MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden en que aparecen resueltos en el cuadernillo del examen. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

Ejercicio 1:

Considera el vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}\in R^2$, y la matriz de rotación $R(\theta)$, siendo $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -sen\,\theta\\ sen\,\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R(\theta)\cdot\vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo θ en sentido antihorario.

$b)$ Comprueba que para $\theta=\frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta)\cdot\vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo 2θ en sentido antihorario.

$c)$ Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.

$d)$ Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$.

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x)=x^2$.

$a)$ Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.

$b)$ Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x), x=\frac{1}{2}, x=1$, y el eje OX de abscisas.

$c)$ Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

$d)$ Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)\ y\ x=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3:

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A(1,2,8)$ hacia la posición de la base enemiga $B(3,4,0)$.

$a)$ Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

$b)$ Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z=4$.

$c)$ Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

$d)$ Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}\ y\ \overrightarrow{AB}$.

Ejercicio 4:

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

$a)$ Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1.000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.

$b)$ ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1.000?

Ejercicio 5:

Considera el sistema $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

$a)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

$b)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λsi es necesario.

$c)$ Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 6:

En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & si \ \ t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & si \ \ t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

$a)$ Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.

$b)$ Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \to \infty$.

$c)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.

$d)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Ejercicio 7:

Considera el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 4z = 10$ los puntos $A(1,2,1)\ y\ B(2,3,3)$.

$a)$ Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Halla el vector normal del plano π.

$c)$ Determina la posición relativa del plano π y la recta que pasa por los puntos A y B.

$d)$ Halla la ecuación del plano paralelo a π que contiene al punto A.

Ejercicio 8:

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40 % de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30 % jugando con negras.

$a)$ Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

$b)$ Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Considera el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \in R^2$, y la matriz de rotación $R(\theta)$, siendo $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

$a)$ Comprueba que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot \vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo θ en sentido antihorario.

$b)$ Comprueba que para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot \vec{v}$ rota el vector $\vec{v}$ un ángulo 2θ en sentido antihorario.

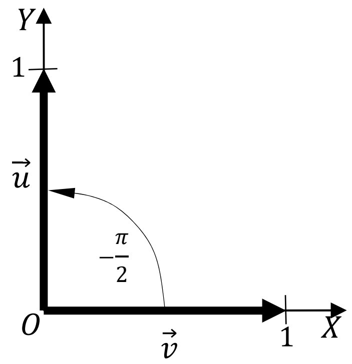
$c)$ Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.

$d)$ Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Solución:

$a)$

El vector $\vec{u}$ resultante del producto de la matriz de rotación $R(\theta)$ por el vector dado $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el siguiente:



$$\vec{u} = R\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -sen\,\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

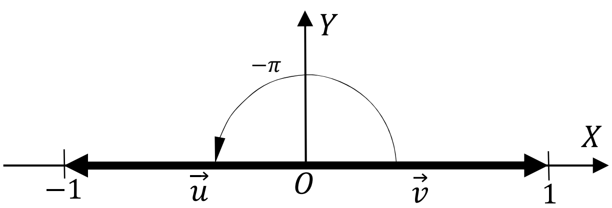
Como se observa en la figura, el vector $\vec{v}$ gira un ángulo $-\frac{\pi}{2}$ respecto al origen para transformarse en el vector $\vec{u}$.

$b)$

$$R^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -sen\,\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -sen\,\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} cos^2\frac{\pi}{2} - sen^2\frac{\pi}{2} & -2 \cdot sen\,\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} \\ 2 \cdot sen\,\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} & cos^2\frac{\pi}{2} - sen^2\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -sen\,\pi \\ sen\,\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Como se observa en la figura, el vector $\vec{v}$ gira un ángulo $-2\theta = -\pi$ respecto al origen para transformarse en el vector $\vec{u}$.

$c)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|R(\theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = cos^2\theta + sen^2\theta = 1 \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ matriz\ R\ es\ invertible\ \forall\theta \in R}.$$

$d)$

$$R^t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \qquad Adj.de\ R^t(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}(\theta) = \frac{Adj.de\ R^t(\theta)}{|R(\theta)|} = \frac{\begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow \underline{R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}.$$

$$R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -sen\,(-\theta) \\ sen\,(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ \boldsymbol{R^{-1}(\theta) = R(-\theta)}}.$$

Textos Marea Verde

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x)=x^2$.

$a)$ Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.

$b)$ Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x), x=\frac{1}{2}, x=1$, y el eje OX de abscisas.

$c)$ Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

$d)$ Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$ y $x=\frac{1}{2}$.

Solución:

$a)$

Para $x=1$ es $f(1)=1$, por lo cual el punto de tangencia es $P(1,1)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

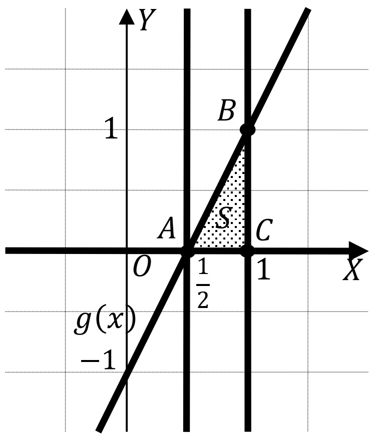
$$f'(x)=2x \Rightarrow m=f'(1)=2\cdot 1 \Rightarrow m=2.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P(0,1)$ con $m=-4$ es:

$$y-1=2(x-1)=2x-2.$$

$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ \boldsymbol{y=g(x)=2x-1}}.$

$b)$



Los puntos de corte de $g(x)\equiv 2x-y-1=0$ con las rectas $x=\frac{1}{2}$ y $x=1$ son $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $B(1,1)$, respectivamente.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x)\cdot dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)\cdot dx=$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = [x^2 - x]_{\frac{1}{2}}^{1} = (1^2 - 1) - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

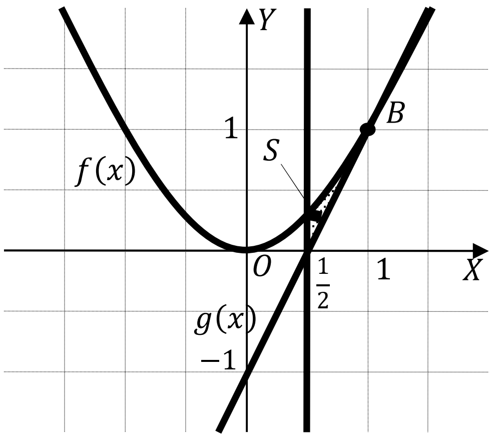
$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{4}\, u^2 = 0.25\, u^2.}}$$

$c)$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int x^2 \cdot dx \Rightarrow \underline{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C.}$$

$d)$

Los puntos de corte de la función $f(x) = x^2$ y la recta $g(x) = 2x - 1$ tienen por abscisas las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 = 2x - 1;$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0;\ \ (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

El único punto de corte es $B(1, 1)$.

En el intervalo de la superficie a calcular, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [x^2 - (2x - 1)] dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (x^2 - 2x + 1) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 1\right) - \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8 - 1 + 6 - 12}{24} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{24}\, u^2 = 0.042\, u^2.}}$$

Ejercicio 3:

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A(1,2,8)$ hacia la posición de la base enemiga $B(3,4,0)$.

$a)$ Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

$b)$ Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

$c)$ Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

$d)$ Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

$a)$ Los puntos $A(1,2,8)$ y $B(3,4,0)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,4,0) - (1,2,8)] = (2,2,-8).$$

Un vector director de la recta r que contiene la trayectoria del misil es cualquiera que sea linealmente del vector $\overrightarrow{AB} = (2,2,-8)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-4)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 8 - 4\lambda \end{cases}.}}$$

$b)$ El punto P de corte de la recta r con el plano $z = 4$ es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{r} z = 4 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 8 - 4\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 8 - 4\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 1; \;\; x = 2; \;\; y = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(2,3,4).}}$$

$c)$ La distancia que recorre el misil es el módulo del vector $\overrightarrow{AB} = (2,2,-8)$:

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{4 + 4 + 64} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

$$\underline{\boldsymbol{d = 6\sqrt{2}\, u \cong 8.49\, u.}}$$

$d)$ Un vector es perpendicular a dos vectores dados cuando es linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores:

$$\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = -32i + 6k - 9k + 24j = -32i + 24j - 3k \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\vec{v} = (32,-24,3).}}$$

CC BY NC SA

Ejercicio 4:

La testosterona es una hormona que se produce en el cuerpo de los hombres. En ciclismo la testosterona puede utilizarse como sustancia dopante, de forma que niveles elevados se consideran ilegales. En una población dada, la concentración de testosterona en sangre para un hombre adulto que no se haya dopado, sigue una distribución normal con media 600 ng/dl, y desviación típica 200 ng/dl.

a) Calcula la probabilidad de que un ciclista presente más de 1 000 ng/dl de testosterona en sangre sin haberse dopado.

b) ¿Qué nivel de testosterona elegirías como límite en un control antidopaje, para que la probabilidad de acusar a un inocente sea de 1 entre 1 000?

Solución:

a)

$Datos\colon\ \mu = 600;\ \ \sigma = 200.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(600, 200).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-600}{200}$.

$P = P(X > 1\,000) = P\left(Z > \frac{1\,000-600}{200}\right) = P\left(Z > \frac{400}{200}\right) = P(Z > 2) =$

$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = \underline{0.0228}.$

$$\boldsymbol{P(X > 1\,000) = \underline{0.0228}.}$$

b)

Se trata de determinar β tal que:

$P = P(X > \beta) = 0.001 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-600}{200}\right) = 1 - \left(Z < \frac{\beta-600}{200}\right) = 0.001 \Rightarrow$

$P\left(Z \leq \frac{\beta-600}{200}\right) = 0.999$. Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0.999 le corresponde, aproximadamente, 3.08:

$\frac{\beta-600}{200} = 3.08;\ \beta - 600 = 3.08 \cdot 200;\ \ \beta = 616 + 600 = 1\,216.$

$$\underline{El\ límite\ de\ testosterona\ sería\ de\ \boldsymbol{1\,216\ ng/dl}.}$$

Ejercicio 5:

Considera el sistema $\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ 4x - \lambda y = 2\lambda - 2 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

$a)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

$b)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λsi es necesario.

$c)$ Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} \ y \ M' = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 4 & -\lambda & 2\lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 4 = 0; \ \ \lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -2 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = nº\ incóg \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = -2 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$$Para\ \lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = 2F_1\} \Rightarrow Rang\ M' = 1.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve el sistema cuando la solución es única mediante la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\lambda-2 & -\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}} = \frac{-\lambda+2\lambda-2}{4-\lambda^2} = \frac{\lambda-2}{-(\lambda+2)(\lambda-2)} = \frac{-1}{\lambda+2}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 2\lambda-2 \end{vmatrix}}{4-\lambda^2} = \frac{2\lambda^2-2\lambda-4}{4-\lambda^2} = \frac{2\cdot(\lambda^2-\lambda-2)}{4-\lambda^2} = \frac{2\cdot(\lambda+1)(\lambda-2)}{-(\lambda+2)(\lambda-2)} = \frac{-2\cdot(\lambda+1)}{\lambda+2}.$$

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x = \frac{-1}{\lambda+2}, y = \frac{-2(\lambda+1)}{\lambda+2}, \forall\lambda \in R - \{-2, 2\}}.}$$

Se resuelve ahora cuando el sistema tiene infinitas soluciones: $\lambda = 2$.

El sistema resulta $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$, equivalente a $2x - y = 1$. Haciendo $x = \mu$:

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x = \mu, y = 2\mu - 1, \forall\mu \in R}.}$$

Ejercicio 6:

En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & si \ \ t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & si \ \ t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

$a)$ Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.

$b)$ Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \to \infty$.

$c)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.

$d)$ Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Solución:

$a)$ La función $I(t)$ es continua en R por ser $3t^2 + 1 \neq 0, \forall t \in R$, excepto para el valor de $t = 1$, cuya continuidad se va a forzar determinando los correspondientes valores reales de k.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \to 1^-} I(t) = \lim_{t \to 1} (ke^{2t}) = ke^2 \\ \lim_{t \to 1^+} I(t) = \lim_{t \to 1} \frac{t^2}{3t^2+1} = \frac{1}{4} = I(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 1^-} I(t) = \lim_{t \to 1^+} I(t) = I(1) \Rightarrow ke^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{k = \frac{1}{4e^2}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{k = \frac{1}{4e^2}}}.$$

La función resulta $I(t) = \begin{cases} \frac{1}{4e^2} \cdot e^{2t} & si \ \ t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & si \ \ t \geq 1 \end{cases}$.

$b)$ Cuando $t \to \infty$ la función es $I(t) = \frac{t^2}{3t^2+1} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2}{3t^2+1} = \frac{1}{3}$

$$\underline{La\ proporción\ de\ personas\ infectadas\ cuando\ t \to \infty\ es\ \boldsymbol{\frac{1}{3}}}.$$

$c)$ Para $t = \frac{1}{2}$ la función es $I(t) = \frac{1}{4e^2} \cdot e^{2t}$.

El valor de la velocidad de una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$I'(t) = \frac{1}{4e^2} \cdot 2 \cdot e^{2t} = \frac{1}{2} \cdot e^{2t-2} \Rightarrow v\left(\frac{1}{2}\right) = I'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot e^{-1} \Rightarrow \underline{v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}}}$$

$d)$ Para $t=2$ la función es $I(t)=\frac{t^2}{3t^2+1}$.

$I'(t)=\frac{2t\cdot(3t^2+1)-t^2\cdot 6t}{(3t^2+1)^2}=\frac{6t^3+2t-6t^3}{(3t^2+1)^2}=\frac{2t}{(3t^2+1)^2}$.

$v(2)=I'(2)=\frac{2\cdot 2}{(3\cdot 2^2+1)^2}=\frac{4}{13^2}\Rightarrow \underline{v(2)=\frac{4}{169}}$.

$$\underline{\boldsymbol{v(2)=\frac{4}{169}}}.$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Ejercicio 7:

Considera el plano $\pi \equiv 2x + 3y - 4z = 10$ los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(2, 3, 3)$.

$a)$ Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Halla el vector normal del plano π.

$c)$ Determina la posición relativa del plano π y la recta que pasa por los puntos A y B.

$d)$ Halla la ecuación del plano paralelo a π que contiene al punto A.

Solución:

$a)$

Los puntos $A(1, 2, 1)$ y $B(2, 3, 3)$ determinan el vector:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2, 3, 3) - (1, 2, 1)] = (1, 1, 2).$$

Un vector director de la recta r que contiene la trayectoria del misil es cualquiera que sea linealmente del vector $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}.}$$

$b)$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 3, -4)$.

$c)$

Existen varias formas de responder a este apartado; una de ellas es la siguiente.

La expresión de la recta r expresada por don ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases};\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2};\ \left. \begin{array}{r} x - 1 = y - 2 \\ 2x - 2 = z - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left. \begin{array}{r} x - y = -1 \\ 2x - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 10 \end{array} \right\}.$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M \; y \; M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 8 = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes}.$$

$d)$

El haz de planos β paralelos a π es de la forma $\beta \equiv 2x + 3y - 4z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π' que contiene al punto $A(1, 2, 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \beta \equiv 2x + 3y - 4z + D = 0 \\ A(1, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + D = 0;$$

$2 + 6 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow \underline{\pi' \equiv 2x + 3y - 4z - 4 = 0}$.

$$\underline{\pi' \equiv 2x + 3y - 4z - 4 = 0}.$$

Textos Marea Verde

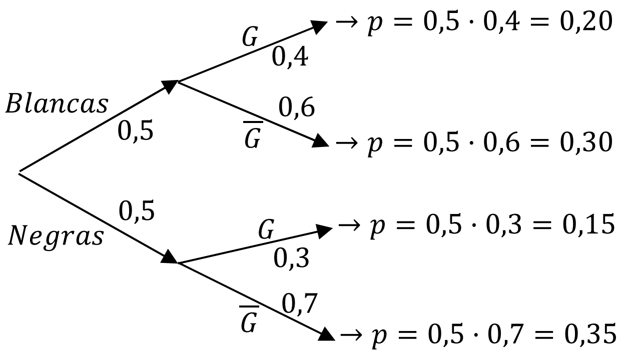
Ejercicio 8:

En ajedrez, la mitad de las partidas se juegan con piezas blancas y la otra mitad con negras. Un determinado jugador gana el 40 % de las partidas oficiales que juega con blancas y el 30 % jugando con negras.

a) Calcula la probabilidad de que gane una partida concreta si no sabemos con qué piezas jugará.

b) Calcula la probabilidad de que haya jugado con blancas una partida concreta, sabiendo que ha ganado.

Solución:



a)

$$P = P(G) = P(B \cap G) + P(N \cap G) = P(B) \cdot P(G/B) + P(N) \cdot P(G/N) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.20 + 0.15 = \underline{0.35}.$$

$$\underline{\mathbf{0.35}}$$

b)

$$P = P(B/G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(B) \cdot P(G/B)}{P(G)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{0.35} = \frac{0.20}{0.35} = \underline{0.5714}.$$

$$\underline{\mathbf{0.5714}}\mathbf{.}$$

Textos Marea Verde

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2021

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Deben escogerse solo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y &= 3\lambda \\ 3x + y &= 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.

2) [0.5 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

3) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π, que contiene a los puntos A, B y C.

2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, O, está contenido en el plano Π.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60% de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30%.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a.

2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A.

3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.

4) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 2$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la derivada de $f(x)$.

2) [0.75 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula una primitiva de $f(x)$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x &= 3 - \lambda \\ y &= 4 - 3\lambda \\ z &= 1 - 4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r', que pase por A y B

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r'.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

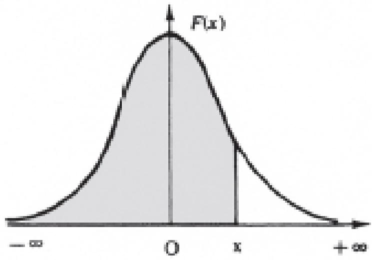
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]
En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1% de adultos sanos de dicha población.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	:9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

$a)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

$b)$ Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvalo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

$c)$ Determina para qué valores de λ el sistema no tiene soluciones.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 3 & 3\lambda \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0;\ \ \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -3 \\ \lambda \neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = -3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -9 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow\ Rang\ M' = 2$$

$$\underline{Para\ \lambda = -3 \Rightarrow Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ \lambda = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow\ Rang\ M' = 1.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$a)$

Se resuelve para $\lambda = 3$; el sistema resulta: $\begin{cases} 9x + 3y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado (infinitas soluciones), equivalente a $3x + y = 3$.

Haciendo $x = \mu \Rightarrow y = 3 - 3\mu$.

$$\underline{Solución: \boldsymbol{x = \mu, y = 3 - 3\mu, \forall \mu \in R}.}$$

CC BY NC SA
Autor: Antonio Menguiano Corbacho

$b)$

Se resuelve para $\left\{\begin{matrix} \lambda \neq -3 \\ \lambda \neq 3 \end{matrix}\right\}$ mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3\lambda & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3\lambda-9}{\lambda^2-9} = \frac{3(\lambda-3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{3}{\lambda+3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2 & 3\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\lambda^2-9} = \frac{3\lambda^2-9\lambda}{\lambda^2-9} = \frac{3\lambda(\lambda-3)}{(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{3\lambda}{\lambda+3}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{3}{\lambda+3}, y = \frac{3\lambda}{\lambda+3}, \forall \lambda \in R}.$$

$c)$

Para $\lambda = -3$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} 9x + 3y = -9 \\ 3x + y = 3 \end{matrix}\right\}$, que es incompatible (no tiene solución).

$$\left.\begin{matrix} 9x + 3y = -9 \\ 3x + y = 3 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 3x + y = -3 \\ -3x - y = -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 = -6??.$$

****

Textos Marea Verde

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

$a)$ Calcula la derivada primera.

$b)$ Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

$c)$ Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

$d)$ Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Solución:

$a)$

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} \Rightarrow \underline{f'(x)=\frac{1-x}{e^x}}.$$

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta que $D(f)\Rightarrow R$ y por ser $e^x>0, \forall x\in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea $(1-x)$.

$$f'(x)>0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x\in(-\infty,1)}.$$

$$f'(x)<0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x\in(1,+\infty)}.$$

$c)$

Para $x=2$ es $f(2)=\frac{2}{e^2}$, por lo cual el punto de tangencia es $P\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto: $m=f'(2)=\frac{1-2}{e^2}=\frac{-1}{e^2}$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ con $m=-\frac{1}{e^2}$ es:

$$y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}\cdot(x-2);\ \ e^2y-2=-x+2.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t\equiv x+e^2y-4=0}.$$

$d)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{e^\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=\underline{0}.$$

****

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Ejercicio 3:

Considera los puntos $A(1,1,0), B(0,1,1), C(-1,0,1)\ y\ O(0,0,0)$.

$a)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Comprueba que el origen de coordenadas está contenido en el plano π.

$c)$ Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

$d)$ Calcula el área del paralelogramo ABCO.

Solución:

$a)$

Los puntos $A(1,1,0), B(0,1,1)\ y\ C(-1,0,1)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,1) - (1,1,0)] = (-1,0,1)$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(-1,0,1) - (1,1,0)] = (-2,-1,1)$.

El plano π que contiene a los puntos A, B y C es el siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-2(y-1) + z + (x-1) + (y-1) = 0;\ (x-1) - (y-1) + z = 0;$$

$$x - 1 - y + 1 + z = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi \equiv x - y + z = 0.}}$$

$b)$

Un plano, expresado en forma general, contiene al origen cuando carece de término independiente, o de otra forma: el punto $O(0,0,0)$ satisface su ecuación.

$$\underline{Lo\ anterior\ comprueba\ que\ el\ plano\ \pi\ contiene\ al\ origen.}$$

$c)$

Dos vectores son paralelos cuando sus componentes son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{OC} = (-1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{OC}\ son\ paralelos}.$$

$\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA} = -(1,1,0) = (-1,-1,0)$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = [(-1,0,1) - (0,1,1)] = (-1,-1,0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AO} = (-1,-1,0) \\ \overrightarrow{BC} = (-1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\overrightarrow{AO}\ y\ \overrightarrow{BC}\ son\ paralelos}.$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$d)$

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S_{ABCO} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{matrix}\right\| = |-2j + k + i + j| = |i - j + k| =$$

$$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S_{ABCO} = \sqrt{3}\, u^2}}.$$

****

CC BY NC SA

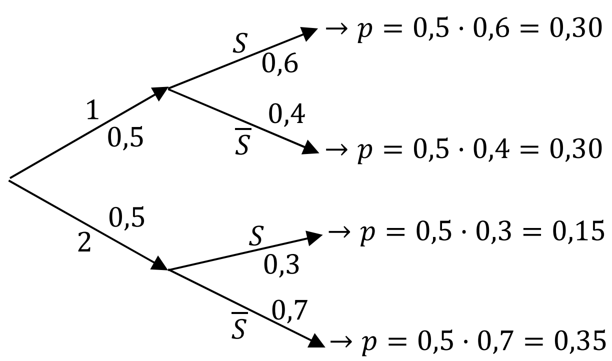
Ejercicio 4:

Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo se es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60 % de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30 %.

a) Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer o en segundo lugar su huevo.

b) Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Solución:



a)

$$P = P(S) = P(1 \cap S) + P(2 \cap S) = P(1) \cdot P(S/1) + P(2) \cdot P(S/2) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}30 + 0{,}15 = \underline{0{,}45 = 45\ \%}.$$

$$\underline{\boldsymbol{P = P(S) = 0,45 = 45\ \%}}$$

b)

$$P = P(2/S) = \frac{P(2 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(2) \cdot P(S/2)}{P(S)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3}{0{,}45} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \underline{0{,}3333 = 33{,}33\ \%}.$$

$$\boldsymbol{P = P(2/S) = \underline{0,3333 = 33,33\ \%}}.$$

****

CC BY NC SA

Ejercicio 5:

Considera la ecuación matricial $X \cdot A - 2X = A$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

$a)$ Estudia el rango de A en función del parámetro a.

$b)$ Indica para qué valores se puede calcular la inversa de A.

$c)$ Despeja X de la ecuación matricial. $d)$ Calcula X para $a = 2$.

Solución:

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a \neq 4 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ para\ a = 4 \Rightarrow Rang\ A = 1}}.$$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{4\}}.$$

$c)$

$$X \cdot A - 2X = A;\ \ X \cdot (A - 2I) = A;$$

$$X \cdot (A - 2I) \cdot (A - 2I)^{-1} = A \cdot (A - 2I)^{-1};\ \ X \cdot I = A \cdot (A - 2I)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X = A \cdot (A - 2I)^{-1}}}.$$

$d)$

Para $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2.$ $(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$. $Adj.de\ (A - 2I)^t = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-2I)^t}{|A-2I|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = A \cdot (A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

****

CC BY NC SA

Ejercicio 6:

Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

$a)$ Calcula la derivada de $f(x)$.

$b)$ Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

$c)$ Calcula una primitiva de $f(x)$.

$d)$ Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1, x = 3$ y el eje OX.

Solución:

$a)$ $f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{f'(x) = 2 \cdot (-x + 2)}}.$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea $(-x + 2)$.

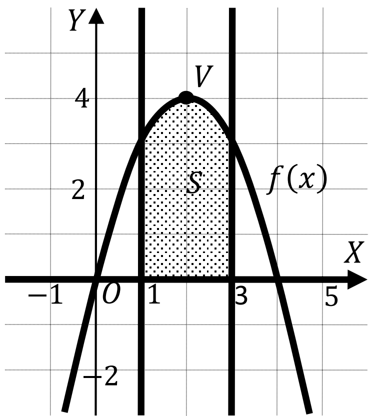
$$f'(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (2, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-\infty, 2)}.$$

$c)$ $\quad F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^2 + 4x) \cdot dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + C.$

Por ejemplo, para $C = 0$: $\underline{F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2}$.

$d)$ La función $f(x) = -x^2 + 4x$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es siguiente:



$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow.$$

$\Rightarrow V(2, 4)$.

Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisa son los siguientes:

$$-x^2 + 4x = 0;\ -x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 4 \Rightarrow A(4,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es la que expresa la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^3 f(x) \cdot dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_1^3 = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2\right) = -9 + 18 + \frac{1}{3} - 2 = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{22}{3}\ u^2 \cong 7{,}33\ u^2 = S}.$$

CC BY NC SA

Ejercicio 7:

Considera los puntos $A(2,1,5), B(3,4,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}.$

$a)$ Calcula la ecuación de la recta r' que pasa por A y B.

$b)$ Determina la posición relativa de las rectas $r\ y\ r'$.

$c)$ Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

Solución:

$a)$

$$\overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,4,1) - (2,1,5)] = (1,3,-4).$$

$$\underline{\boldsymbol{r' \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{-5}}.}$$

$b)$

Un punto y un vector director de la recta r' son $A(2,1,5)$ y $\overrightarrow{v_{r'}} = (1,3,-4)$.

Un punto y un vector director de la recta r son $B(3,4,1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,3,4)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_{r'}}$ y $\overrightarrow{v_r}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r' y r se cortan o se cruzan.

Como quiera que ambas rectas contienen al punto $B(3,4,1)$:

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r'\ y\ r\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ B(3,4,1).}}$$

$c)$

$\overrightarrow{AB} = (1,3,-4).$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{OA} = (2,1,5).$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OA}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |15i - 8j + k - 6k + 4i - 5j| = \frac{1}{2} \cdot |19i - 13j - 5k| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19^2 + (-13)^2 + (-5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{361 + 169 + 25} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{555}.$$

$$\underline{\boldsymbol{S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{555}\ u^2 \cong 11,78\ u^2.}}$$

****

BY NC SA

Ejercicio 8:

En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

$a)$ Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.

$b)$ Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1 % de adultos sanos de dicha población.

Solución:

$a)$

$Datos\!: \ \mu = 190; \ \ \sigma = 30.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(190, 30).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-190}{30}$.

$P = P(X > 250) = P\left(Z > \frac{250-190}{30}\right) = P\left(Z > \frac{60}{30}\right) = P(Z > 2) =$

$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$

La probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl es de 0.0228.

$b)$

Se trata de determinar β tal que:

$P = P(X > \beta) = 0{,}01 \Rightarrow P\left(Z > \frac{\beta-190}{30}\right) = 1 - \left(Z < \frac{\beta-190}{30}\right) = 0{,}01 \Rightarrow$

$P\left(Z \le \frac{\beta-190}{30}\right) = 0{,}99$. Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,99 le corresponde, aproximadamente, 2,33:

$\frac{\beta-190}{30} = 2{,}33; \ \beta - 190 = 2{,}33 \cdot 30; \ \ \beta = 69{,}9 + 190 = 259{,}9.$

$\underline{Solo\ superan\ el\ 1\ \%\ un\ nivel\ de\ colesterol, aproximadamente, de\ 260\ mg/dl}.$

****

Textos Marea Verde