MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS** II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINTO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Es necesario justificar las respuestas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Problema 1:

Sea la función $f(x) = x \cdot e^{1/x^3}$. Determinar el dominio, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Problema 2:

Sea f una función continua cuya derivada es la siguiente: $f'(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$. Halla la expresión de las funciones f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x = 0$.

Problema 3:

Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Problema 4:

Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{aligned} x+y+az &= 1 \\ 2x+ay &= -1 \\ ax+y+z &= 1 \end{aligned}\right\}$, según el valor del parámetro real a. Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 0$.

Problema 5:

Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{cases}$, donde C y D son las matrices: $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz inversa de $C^t \cdot D$, donde C^t es la matriz traspuesta de C.

Problema 6:

Sabiendo que $|A| = 1$, donde $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{bmatrix}$. Calcular $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2$.

Problema 7:

Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(0,1,1)$.

2) Está contenida en el plano $\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases}$.

Problema 8:

Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

Problema 9:

La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

Problema 10:

Una bolsa M contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa N contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la bolsa M.

RESPUESTAS

Problema 1:

Sea la función $f(x) = x \cdot e^{1/x^3}$. Determinar el dominio, las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución:

La función está definida para cualquier valor real de x, excepto para $x = 0$, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^{1/x^3}\right) = -\infty \cdot e^{-0} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot e^{1/x^3}\right) = +\infty \cdot e^{0} = \infty. \qquad \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}}\right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot \infty \Rightarrow Indeterminado \ \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \ \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{3x^2}{x^6} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}} = 3 \cdot \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{x^2} = 3 \cdot \frac{e^{\frac{1}{0}}}{0} = \frac{3}{0} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}}\right) = -0 \cdot e^{-\frac{1}{0}} = -0 \cdot e^{-\infty} = -\frac{0}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = 0\ (Eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical\ en\ su\ parte\ positiva}}\ .$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x^3}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^0 = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x^3}} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to \infty} \left[x \cdot \left(e^{\frac{1}{x^3}} - 1\right)\right] =$$

$$= \infty \cdot \left(e^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) = \infty \cdot (e^0 - 1) = \infty \cdot (1 - 1) = \infty \cdot 0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^3}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{\infty}} - 1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x^4} \cdot e^{\frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2}} = 3 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^3}}}{x^2} = 3 \cdot \frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{\infty} = \frac{3 \cdot e^0}{\infty} = \frac{3 \cdot 1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = x\ es\ asíntota\ oblicua.}}$$

Problema 2:

Sea f una función continua cuya derivada es la siguiente: $f'(x) = \begin{cases} x+1, & x<0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$. Halla la expresión de las funciones f y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en el punto $x=0$.

Solución:

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \int (x+1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} + x + C_1 \ \ si \ \ x<0 \\ f(x) = \int e^x \cdot dx = e^x + C_2 \ \ si \ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C_1, & x<0 \\ e^x + C_2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Como quiera que $f(x)$ es continua, para $x=0$ sus límites laterales tienen que ser iguales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1 \right) = C_1.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x + C_2) = e^0 + C_2 = 1 + C_2 = f(0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{2} + x + C_1 \right) = C_1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (e^x + C_2) = e^0 + C_2 = 1 + C_2 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 1 + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = C_1 - 1.$$

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x + C, & x<0 \\ e^x - 1 + C, & x \geq 0 \end{cases}}.$$

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$m = f'(0) = 0 + 1 = e^0 = 1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = C \Rightarrow P(0, C)$.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \ \Rightarrow y - C = 1 \cdot (x - 0).$$

$$\boldsymbol{Recta\ tangente: t \equiv x - y + C = 0.}$$

Problema 3:

Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Solución:

En el intervalo $(0, 5)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}$ son positivas, por lo cual, el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^5 f(x) \cdot dx = \int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+2=t \\ x+3=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} x=5 \to t=7 \\ x=0 \to t=2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int_2^7 \frac{t+1}{t^2} \cdot dt = \int_2^7 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) \cdot dt = \int_2^7 \left(\frac{1}{t} + t^{-2}\right) \cdot dt = \left[Lt + \frac{t^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^7 =$$

$$= \left[Lt + \frac{t^{-1}}{-1}\right]_2^7 = \left[Lt - \frac{1}{t}\right]_2^7 = \left(L7 - \frac{1}{7}\right) - \left(L2 - \frac{1}{2}\right) = L7 - \frac{1}{7} - L2 + \frac{1}{2} =$$

$$= L\frac{7}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = L3.5 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{14 \cdot L3.5 - 2 + 7}{14} = \frac{14 \cdot L3.5 + 5}{14}.$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{14} \cdot (14 \cdot L3.5 + 5)\ u^2 \cong 1.61\ u^2.}}$$

Problema 4:

Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} x+y+az=1 \\ 2x+ay=-1 \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$, según el valor del parámetro real a. Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=0$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+2a-a^3-2=0;$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$a^3-3a+2=0.$

Resolviendo por la regla de Ruffini: $a_1=a_2=1, a_3=-2$.

$$\boldsymbol{Para \left\{\begin{array}{c} a\neq 1 \\ a\neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D}$$

$$.Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2+2+2-4+1-2=-3\neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=-2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a=0$ es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2.\ M^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Adj.de\ M^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1}=\frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \boldsymbol{M^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Problema 5:

Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3A-5B=C \\ -A+3B=D \end{cases}$, donde C y D son las matrices: $C=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz inversa de $C^t \cdot D$, donde C^t es la matriz traspuesta de C.

Solución:

$$\left.\begin{matrix} 3A-5B=C \\ -A+3B=D \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 9A-15B=3C \\ -5A+15B=5D \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4A=3C+5D \Rightarrow A=\tfrac{1}{4}(3C+5D).$$

$$A=\tfrac{1}{4}\left[3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]=\tfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 21 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 36 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{matrix} 3A-5B=C \\ -A+3B=D \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 3A-5B=C \\ -3A+9B=3D \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4B=C+3D \Rightarrow B=\tfrac{1}{4}(C+3D).$$

$$B=\tfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]=\tfrac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$$C^t\cdot D=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}. \quad (C^t\cdot D)^t=\begin{pmatrix} 26 & 2 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$|C^t\cdot D|=\begin{vmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}=12\cdot\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=12\cdot(-26-1)=-324.$$

$$Adj.de\ (C^t\cdot D)^t=\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$(C^t\cdot D)^{-1}=\frac{Adj.de\ (C^t\cdot D)^t}{|C^t\cdot D|}=\frac{\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}}{-324} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{(C^t\cdot D)^{-1}=\frac{1}{162}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 6:

Sabiendo que $|A| = 1$, donde $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{bmatrix}$. Calcular $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2$.

Solución:

$$|B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x+a & y+b & z+c \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot |A| = -2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{|\boldsymbol{B}| = -\mathbf{2}.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumando, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

Para determinar $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|$ se tiene en cuenta que $|B^{-1}| = \frac{1}{|B|}$ y que el determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta: $|A^t| = |A|$, con lo que la expresión $|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|$ quedaría de la forma $\left|\frac{4 \cdot A}{B}\right|$. Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por un número es el producto del número por todos y cada uno de los elementos de la matriz y que, si se multiplica un línea de una matriz por un número el valor de su determinante queda multiplicado por dicho número y, también, que la matriz A tiene de dimensión 3×3, resulta que $|4 \cdot A| = 4^3 \cdot |A|$.

De lo anterior se deduce que:

$$|4 \cdot B^{-1} \cdot A^t|^2 = \left(\left|\frac{4 \cdot A}{B}\right|\right)^2 = \left(\frac{4^3 \cdot |A|}{|B|}\right)^2 = \left(\frac{64 \cdot 1}{-2}\right)^2 = (-32)^2.$$

$$\underline{\left|\mathbf{4} \cdot \boldsymbol{B}^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}}\right|^{\mathbf{2}} = \mathbf{1.024}.}$$

Problema 7:

Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(0,1,1)$.

2) Está contenida en el plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases}$.

Solución:

La expresión de $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=-z+4 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,1,3)$.

El vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,1)$ y $\vec{n}=(1,1,3)$, que es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{v_r} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3i+j+k+k-i-3j=-4i-2j+2k=$$
$$=(-4,-2,2) \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1).$$

Teniendo en cuanta que $P \in \pi$ por satisfacer su ecuación, como se comprueba a continuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+3z-4=0 \\ P(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 0+1+3-4=0 \Rightarrow Comprobado\ que\ P \in \pi.$$

Teniendo en cuanta lo anterior, la expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=1+\mu \\ z=1-\mu \end{cases}}$$

Problema 8:

Hallar las ecuaciones de la recta s que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$.

Solución:

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2,2,1)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π que contiene al punto $P(2,-1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x + 2y + z + D = 0 \\ P(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 + D = 0;$$

$4 - 2 + 1 + D = 0;\;\; 3 + D = 0;\;\; D = -3 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0.$

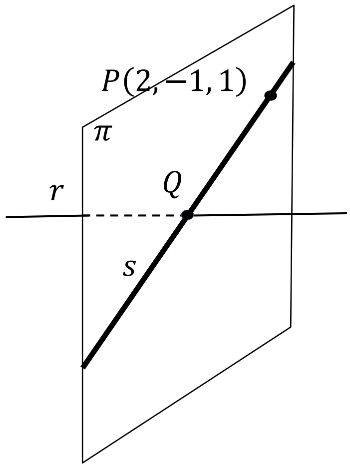
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de la recta y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot (2 + 2\lambda) + 2(1 + 2\lambda) + \lambda - 3 = 0;$$

$4 + 4\lambda + 2 + 4\lambda + \lambda - 3 = 0;\;\; 9\lambda + 3 = 0;$

$3\lambda + 1 = 0;\;\; \lambda = -\frac{1}{3}.$



$$Q \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Los puntos $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ y $P(2,-1,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \left[(2,-1,1) - \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right] = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$

Un vector de la recta pedida, s, es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (1,-2,2)$.

La expresión de s dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = -1 - 2\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}}.$$

Problema 9:

La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.

$a)$ ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?

$b)$ ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre 15 y 21 años?

Solución:

$Datos\text{:}\ \mu = 20;\ \ \sigma = 5.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(20, 5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{5}$.

$a)\ P = P(X < 25) = P\left(Z < \frac{25-20}{5}\right) = P\left(Z < \frac{5}{5}\right) = P(Z < 1) = 0.8413 =$

$= \underline{84.13\ \%}.$

Se espera que no cumplan la garantía un $\underline{\mathbf{84.13}\ \%}$.

$b)\ P = P(15 \le X \le 21) = P\left(\frac{15-20}{5} \le Z \le \frac{21-20}{5}\right) = P\left(\frac{-5}{5} \le Z \le \frac{1}{5}\right) =$

$= P(-1 \le Z \le 0.2) = P(Z \le 0.2) - P(Z \le -1) = P(Z \le 0.2) - 1 + P(Z \le 1) =$

$= 0.5792 - 1 + 0.8413 = 1.4205 - 1 = \underline{0.4205}.$

La proporción de máquinas que tienen una duración comprendida entre 15 y 21 años es de $\underline{\mathbf{0.4205}}$.

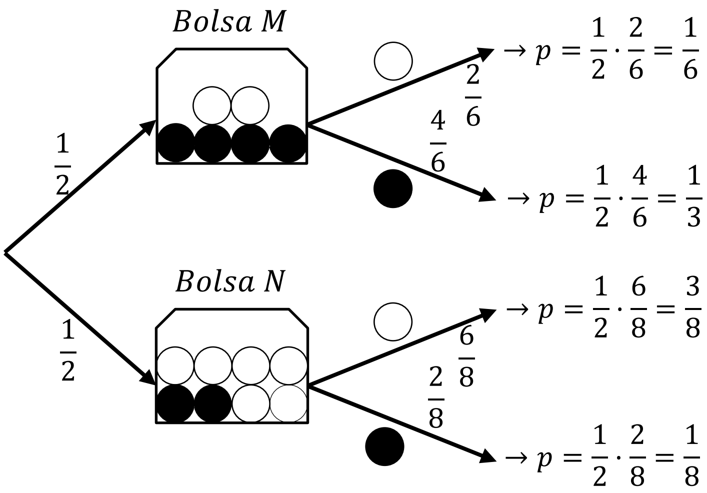
Problema 10:

Una bolsa M contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa N contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.

a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.

b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la bolsa M.

Solución:



$a)\ P = P(B) = P(M \cap B) + P(N \cap B) = P(M) \cdot P(B/M) + P(N) \cdot P(B/N) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{4+9}{24} = \underline{\frac{13}{24} = 0.5417}.$

La probabilidad de que la bola sea blanca es $\underline{\mathbf{\frac{13}{24} = 0.5417}}$

$b)\qquad P = P(M/B) = \frac{P(M) \cdot P(B/M)}{P(M) \cdot P(B/M) + P(N) \cdot P(B/N)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{8}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{3}{8}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4+9}{24}} = \frac{24}{6 \cdot 13} =$

$= \underline{\frac{4}{13} = 0.3077}.$

Sabiendo que la bola es blanca, la probabilidad de que sea de la bolsa M es de $\underline{\mathbf{\frac{4}{13} = 0.3077}}$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020–2021
Convocatoria: Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.– (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2}{2 - e^{-x}}.$$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

2.– (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \cos x.$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

3.– (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}$.

4.– (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+y+z &= 2 \\ 2x+ay+a^2z &= 1 \\ 2x+y+z &= 2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real a.

5.– (2 puntos) Hallar las matrices $A-B$, A y B, sabiendo que las matrices A y B, satisfacen las siguientes identidades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.– (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad.

7.– (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(1,1,1)$,

b) es paralela al plano $\pi \equiv x+y-2z-3=0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x &= 3+\lambda, \\ y &= 2-\lambda, \\ z &= 1-2\lambda, \end{cases}$

8.– (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x+z &= a, \\ x+y &= 2, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+y+z &= 0, \\ x+2z &= 2a. \end{cases}$$

9.– (2 puntos) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?.

10.– (2 puntos) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?.

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)** **Curso 2020–2021** **Convocatoria: Ordinaria / Extraordinaria** **ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II**

CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

(1) Se sugiere un tipo de corrección positivo, es decir, partiendo de cero y sumando puntos por los aciertos que el alumno vaya obteniendo.

(2) Como excepción al apartado anterior, los errores muy graves, del tipo

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b\,,\quad \frac{\ln x}{x}=\ln\,,\quad \int\frac{x}{x^2+3}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right),$$

se penalizarán especialmente, y pueden suponer un 0 en el apartado en el que se hayan cometido.

(3) Se deberá valorar la exposición lógica y la coherencia de las respuestas, tanto en cuestiones teóricas como prácticas. Algunos ejemplos:

(a) Si al resolver un sistema de ecuaciones, el alumno comete un error **numérico**, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se prestará especial atención siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial.

(b) En la representación gráfica de funciones, se valorará la coherencia del dibujo con los datos obtenidos previamente por el alumno. (Vale aquí la misma excepción que en el párrafo anterior.)

(4) La puntuación máxima que se puede obtener en cada ejercicio viene señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si alguno de los apartados tiene a su vez subapartados, se deberá distribuir razonablemente el número de puntos entre los mismos (no necesariamente debe darse el mismo peso a cada subapartado).

(5) Si un alumno da una respuesta acertada a un problema escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 40 % de la nota máxima prevista.

(6) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en cada ejercicio de una sola propuesta.

RESPUESTAS

Problema 1:

Sea la función $f(x)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}$. Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución:

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$2-e^{-x}=0;\;\; 2=e^{-x}=\frac{1}{e^x};\;\; e^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=L\frac{1}{2}=L1-L2=-L2.$$

$$\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-L2\}}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f(x)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{x^2}{2-\frac{1}{e^x}}=\frac{x^2}{\frac{2e^x-1}{e^x}}=\frac{x^2\cdot e^x}{2e^x-1}.$$

$$f'(x)=\frac{(2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x)(2e^x-1)-(x^2\cdot e^x)\cdot 2e^x}{(2e^x-1)^2}=\frac{e^x\cdot[(x^2+2x)(2e^x-1)-2x^2\cdot e^x]}{(2e^x-1)^2}=$$

$$=\frac{e^x\cdot(2x^2\cdot e^x-x^2+4x\cdot e^x-2x-2x^2\cdot e^x)}{(2e^x-1)^2}=\frac{e^x\cdot(-x^2+4x\cdot e^x-2x)}{(2e^x-1)^2}=\frac{-x\cdot e^x\cdot(x-4\cdot e^x+2)}{(2e^x-1)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x\cdot e^x\cdot(x-4\cdot e^x+2)}{(2e^x-1)^2}=0;\;\; -x\cdot e^x\cdot(x-4\cdot e^x+2)=0;\;\; x_1=0;$$

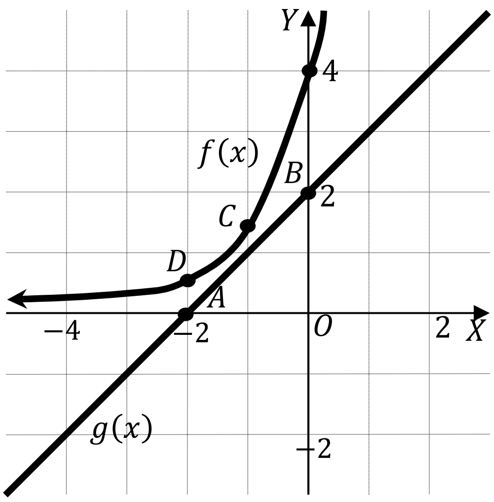
$x-4\cdot e^x+2=0;\;\; x+2=4\cdot e^x$. Las soluciones de esta ecuación son los puntos de corte de las funciones $g(x)=x+2$ y $h(x)=4\cdot e^x$. Se hace un esquema, aproximado, de las gráficas de las funciones.

La función $g(x)=x+2$ es una recta que pasa por los puntos $A(-2,0)\; y\; B(0,2)$.

La función $h(x)=4\cdot e^x$ es una función exponencial, creciente, que corta el eje de ordenadas en el punto $C(0,4)$; tiene como asíntota horizontal al eje de abscisas en su parte negativa y contiene los puntos siguientes:

$h(-1)=4\cdot e^{-1}=\frac{4}{e}\cong 1.47\Rightarrow C(-1,1.47)$.

$h(-2)=4\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}\cong 0.54\Rightarrow D(-2,0.54)$.



Como se puede observar en la figura adjunta, las funciones $g(x)=x+2$ y $h(x)=4\cdot e^x$ no tienen puntos en común, lo que supone que $(x-4\cdot e^x+2)<0$, para cualquier valor real de x, y como consecuencia, la única raíz real de la derivada es $x=0$.

Para: $\left.\begin{matrix} x<0\Rightarrow f'(x)<0 \\ x>0\Rightarrow f'(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x)\; tiene\; un\; mínimo\; relativa\; para\; x=0.$

$$f(0)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}=0 \Rightarrow$$

$$\underline{Mínimo\ relativo: O(0,0)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{(-\infty)^2}{2-e^{-(-\infty)}}=\frac{\infty}{2-e^{\infty}}=\frac{\infty}{2-\infty}=-\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=0.$$

$$k=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{\infty^2}{2-e^{-\infty}}=\frac{\infty}{2-0}=\frac{\infty}{2}=\infty.$$

$$\underline{La\ recta\ y=0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ su\ parte\ negativa}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x=-L2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

****

Problema 2:

Sea la función $f(x) = \cos x$. Halla el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

Para $x = -\frac{\pi}{4}$ es $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ Punto de tangencia: $P\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

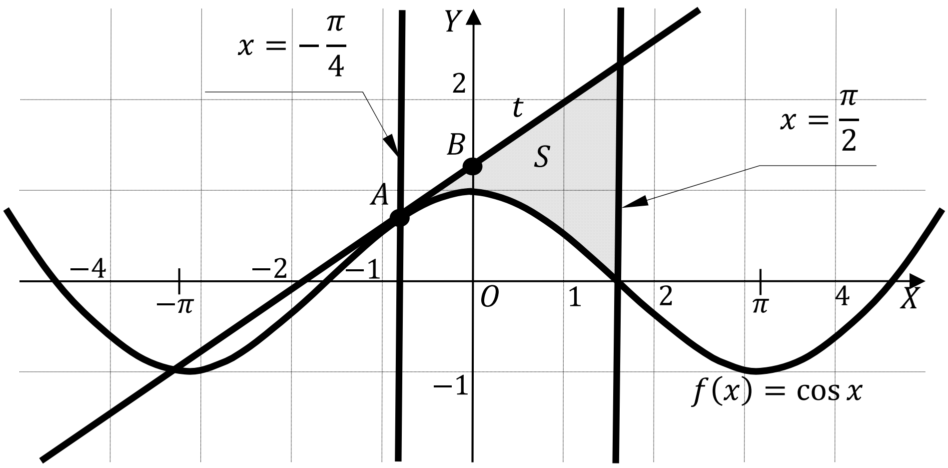
$$f'(x) = -sen\ x \Rightarrow m = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, 1)$ con $m = -4$ es:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8};\ \ 8y - 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}x + \pi\sqrt{2};$$

$$8y = 4\sqrt{2}x + \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\ \Rightarrow t \equiv y = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (4x + \pi + 4).$$

Para la representación de la recta tenemos en cuenta el punto de tangencia y haciendo $x = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (\pi + 4) \cong 1.26 \Rightarrow Q(0, 1.26)$.



La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

En la figura se observa que en el intervalo de la superficie a calcular, $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, las ordenadas de la recta tangente son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $f(x) = \cos x$, por lo cual la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} t(x) \cdot dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot (4x + \pi + 4) \cdot dx - [sen\ x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\frac{4x^2}{2} + \pi \cdot x + 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[sen\ \frac{\pi}{2} - sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot [x \cdot (2x + \pi + 4)]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - sen\ \frac{\pi}{2} + sen\ \left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[\frac{\pi}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \pi + 4\right)\right] - \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \left[-\frac{\pi}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{-\pi}{4} + \pi + 4\right)\right] - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{16} \cdot (2\pi + 4) + \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 4\right) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \cdot (\pi + 2) + \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{8+\pi}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \left(4\pi + 8 + \frac{8+\pi}{2}\right) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{8\pi+16+8+\pi}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{64} \cdot (9\pi + 24) - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 3.629 - 1.707 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = 1.922\ u^2}$$

****

Problema 3:

Calcular los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}$. $b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}$.

Solución:

$a)$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} = \left(\frac{1}{0}\right)^{0} = \infty^0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow A = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = L\left[\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}\right] \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left[\mathrm{L}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[(L1 - Lx^2)^{tag\,x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[(-2\cdot Lx)^{tag\,x}\right] = \lim_{x\to 0^+}(-2\cdot tag\,x\cdot Lx) = \lim_{x\to 0^+}\left(-2\cdot\frac{sen\,x}{\cos x}\cdot Lx\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{-2}{\cos x}\cdot(sen\,x\cdot Lx)\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,x\cdot Lx) =$$

$$= \frac{-2}{1}\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,x\cdot Lx) = -2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{Lx}{\frac{1}{sen\,x}} = -2\cdot\frac{-\infty}{\frac{1}{0}} = -2\cdot\frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow -2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} = 2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{cox\,x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2 x}{x} = 2\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{sen^2 0}{0} =$$

$$= 2\cdot\frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow 2\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{2\cdot sen\,x\cdot\cos x}{1} = 2\cdot\lim_{x\to 0^+}(sen\,2x) =$$

$$= 2\cdot sen\,0 = 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow LA = 0 \Rightarrow A = \underline{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} = 1}.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tag\,x} = 1}$$

$b)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{4x}\right)^{x} = \left(1+\frac{-1}{\infty}\right)^{\infty} = 1^\infty \Rightarrow Indet.\,n^{\underline{o}}\,e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{x\cdot(-4x)\cdot\frac{1}{-4x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{-4x}\right]^{\frac{x}{-4x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-4x}\right)^{-4x}\right]^{-\frac{1}{4}} = e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x} = \frac{\sqrt[4]{e^3}}{e}}.$$

****

Problema 4:

Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=2 \\ 2x+ay+a^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\}$, según el valor del parámetro real a.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+2+2a^2-2a-a^3-2=-a^3+3a^2-2a=0;$$

$$=-a(a^2-3a+2)=0\Rightarrow a_1=0;\ \ a^2-3a+2=0;\ \ a=\tfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\tfrac{3\pm\sqrt{1}}{2}=$$

$$=\tfrac{3\pm1}{2}\Rightarrow a_2=1, a_3=2.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+2-4=2\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+4+2-4-1-4=-1\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1=F_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=2\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 0, a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a+1+2a^2-2a-2a^2-1}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{0}{-a(a-1)(a-2)} = 0.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{a+4+4a^2-2-2a^3-4}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a^3+4a^2+a-2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-(a-2)(2a^2-1)}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2-1}{a(a-1)}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2+4+2-4a-a-4}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{2a^2-5a+2}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{(a-2)(2a-1)}{-a(a-1)(a-2)} = \frac{-2a+1}{a(a-1)}.$$

$$\underline{Solución: x = 0;\ \ y = \frac{2a^2-1}{a(a-1)};\ \ z = \frac{-2a+1}{a(a-1)}, \forall a \in R - \{0, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = 2$; el sistema resulta $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente a $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right\}$. Haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = -1 - 3\lambda.$$

$$2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda;\ \ 2x = 3 + 2\lambda \Rightarrow x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{3}{2} + \lambda;\ \ y = -1 - 3\lambda;\ \ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

Problema 5:

Hallar las matrices $A-B, A\ y\ B$, sabiendo que las matrices $A\ y\ B$, satisfaces las siguientes identidades:

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\ A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Solución:

$$A^2-AB+BA-B^2=A\cdot(A-B)+B\cdot(A-B)=(A+B)(A-B).$$

Multiplicando por la izquierda los dos términos por $(A+B)^{-1}$:

$$(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)=(A+B)^{-1}\cdot(A+B)\cdot(A-B);$$

$$(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2)=I\cdot(A-B)\Rightarrow$$

$$(A^2-AB+BA-B^2)\cdot(A-B)^{-1}=(A+B)\cdot I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A-B=(A+B)^{-1}\cdot(A^2-AB+BA-B^2).}$$

Se obtiene la inversa de $(A+B)$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(A+B|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&-1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\leftrightarrow F_3\\F_2-F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&-1&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\rightarrow -F_3\}\Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\rightarrow F_1-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow(A+B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$A-B=(A+B)^{-1}(A^2-AB+BA-B^2)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A-B=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\2&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}.}$$

$$A+B+(A-B)=2A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0&-2\\2&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A=\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&-3\\2&0&0\\3&0&3\end{pmatrix}.}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-A=$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&-3\\2&0&0\\3&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&0&-\frac{3}{2}\\1&0&0\\\frac{3}{2}&0&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\-1&-1&0\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{B=\tfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&-2&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.}$$

Problema 6:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad: $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 15 - 16 - 12 = -1. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = -I.$$

$$A^{20} = A^{18+2} = A^{6 \cdot 3} \cdot A^2 = (A^3)^6 \cdot A^2 = (-I)^6 \cdot A^2 = I^6 \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A^{20} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.}$$

****

Problema 7:

Hallar la ecuación de una recta s, tal que:

1) Pasa por el punto $P(1,1,1)$.

2) Es paralela al plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$.

3) Es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$.

Solución:

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y - 2z - 3 = 0$ es $\vec{n} = (1,1,-2)$.

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,-2)$.

El vector director de la recta s pedida es perpendicular, simultáneamente, a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$, o sea: es linealmente dependiente del producto vectorial $\overrightarrow{v_r} \times \vec{n}$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2i - 2j + k + k + 2i + 2j = 4i + 2k = (4,0,2) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2,0,1)$.

$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}}}.$$

****

Problema 8:

Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas $r \equiv \begin{cases} 4x+z=a \\ x+y=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2z=2a \end{cases}$ se corten y calcular este punto.

Solución:

Las rectas r y s determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 4x+z=a \\ x+y=2 \\ x+y+z=0 \\ x+2z=2a \end{array}\right\}.$

Para que las rectas r y s se corten en un punto es condición necesaria que el sistema que forman sea compatible determinado, que, según el teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que tener el mismo rango, que ha de ser igual al número de incógnitas, que es tres, por lo cual, el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0;\ \ 8a-2-a+16=0;\ \ 7a=-14 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=-2}}.$$

Para determinar el punto de corta consideramos el sistema $\left.\begin{array}{r} 4x+z=-2 \\ x+y=2 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} z=-2-4x \\ y=2-x \end{array}\right\} \Rightarrow x+(2-x)+(-2-4x)=0;\ \ x+2-x-2-4x=0;$$

$$-4x=0;\ \ x=0;\ \ y=2;\ \ z=-2\ \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(0,2,-2)}}.$$

****

Problema 9:

El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84.1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?

Solución:

$Datos\colon\ \mu = 20;\ \ P(X < 22) = 0.8410.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(20, \sigma).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{\sigma}$.

Se trata de determinar σ tal que:

$P = P(X < 22) = 0.8410 \Rightarrow P\left(Z < \frac{22-20}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0.8410.$

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0,1)$ a 0.8410 le corresponde, aproximadamente, el valor 1: $\frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \underline{\sigma = 2}$.

$$\underline{\sigma = 2}$$

$P = P(X < 18) = P\left(Z < \frac{18-20}{2}\right) = P\left(Z < -\frac{2}{2}\right) = P(Z < -1) =$

$= 1 - P(Z < 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587.$

$n = P \cdot N = 0.1587 \cdot 290 = 46.023.$

$$\underline{Se\ estima\ que\ tardará\ menos\ de\ 18\ minutos\ en\ llegar\ al\ trabajo\ 46\ días.}$$

****

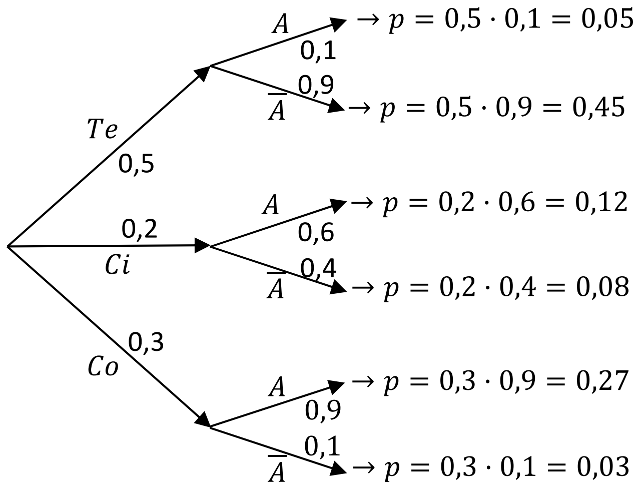
Problema 10:

Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0.5; 0.2 y 0.3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?

Solución:



a)

$$P = P(A) = P(Te \cap A) + P(Ci \cap A) + P(Co \cap A) =$$

$$= P(Te) \cdot P(A/Te) + P(Ci) \cdot P(A/Ci) + P(Co) \cdot P(A/Co) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.05 + 0.12 + 0.27 = \underline{0.44}.$$

$$\boldsymbol{P(A) = \underline{0.44}}$$

b)

$$P = P\left(Ci/\overline{A}\right) = \frac{P\left(Ci \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P(Ci) \cdot P\left(\overline{A}/Ci\right)}{1 - P(A)} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{1 - 0.44} = \frac{0.08}{0.56} = \underline{0.1429}.$$

$$\boldsymbol{P\left(Ci/\overline{A}\right) = \underline{0.1429}.}$$

****