MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Ramón Podadera Sánchez

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y+(a+1)z=2 \\ x+(a-1)y+2z=1 \\ 2x+ay+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. (5 puntos)

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible (5 puntos)

Problema 2:

Se dan los planos: $\pi_1: x+y+z=a-1$, $\pi_2: 2x+y+az=a$ y $\pi_3: x+ay+z=1$

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a. (4 puntos)

b) Para $a=1$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 (3 puntos)

c) Para $a=2$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 (3 puntos)

Problema 3:

Consideramos la función $f(x)=\frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$ (4 puntos)

Problema 4:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m. (4 puntos)

b) Explicad cuando la matriz A es invertible. (2 puntos)

c) Resolved la ecuación $XA = I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$ (4 puntos)

Problema 5:

Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano π: $3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π. (2 puntos)

b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π. (5 puntos)

c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π. (3 puntos)

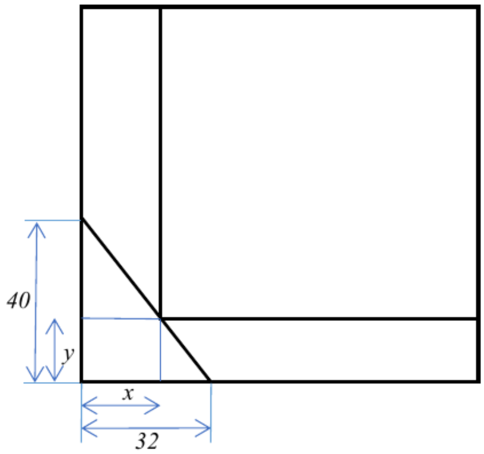
Problema 6:

Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto(x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leqslant x \leqslant 32$. (4 puntos)

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)

c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



RESPUESTAS

Problema 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + (a-1)y + 2z = 1 \\ 2x + ay + z = -1 \end{cases}$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a.

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

Solución:

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a.

Cuando nos piden un estudio se refieren a que lo discutamos utilizando el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz $3x3$ su mayor rango es 3 por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (a-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot a \cdot (a+1) - 2 \cdot (a+1) \cdot (a-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot a =$$

$$= a - 1 + 4 + a^2 + a - 2a^2 + 2 - 1 - 2a = -a^2 + 4$$

Igualamos a cero para encontrar los valores que anulan el determinante:

$-a^2 + 4 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión $3x4$ y su mayor rango es 3 tenemos que:

Si $a \neq 2$ y $a \neq -2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema es un *Sistema Compatible Determinado*.

Vamos a estudiar los casos $a = -2$ y $a = 2$

- Caso $a = -2$, sustituyendo el valor tenemos que:

  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Como la 1^a y 2^a fila, al sumarlas, nos da la 3^a dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 1 = -4 \neq 0$ y, por lo tanto, su rango es 2.

  Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 6 + 8 + 3 - 1 = 4 \neq 0$, con lo cual es de rango 3, con lo que concluimos que:

Si $a = -2$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema es un *Sistema Incompatible.*

- Caso $a = 2$, sustituyendo el valor tenemos que: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Como la 1ª y 2ª columna son iguales dará cero el determinante de orden 3 comprobamos si existe algún menor de orden 2 diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$ y, por lo tanto, su rango es 2.

Estudiamos, para este caso, el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Comprobamos si hay un menor de orden 3 diferente de cero, de las cuatro posibilidades hay una que sabemos que vale cero, comprobamos si alguna de las otras tres da diferente de cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 2 - 8 + 3 - 1 = 0;$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 2 - 8 + 3 - 1 = 0;$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 4 - 4 + 1 - 2 = 0$

Como no hay ningún menor de orden 3 diferente de cero podemos concluir que la matriz ampliada también tiene rango 2 por lo que:

Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema es un *sistema Compatible Indeterminado*.

La discusión completa del sistema es:

- Si $a = -2$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema será SI
- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI
- Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

Por lo que el sistema es compatible para cualquier valor $a \neq -2$

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible

Tenemos dos casos en los que el sistema es compatible:

- Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI
- Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

Tenemos que resolver para los dos casos.

Si $a = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema será SCI

Como sabemos que la matriz de los coeficientes tiene rango 2 tomamos las ecuaciones e incógnitas que nos han dado ese rango y, las ecuaciones que quedan fuera las quitamos y las incógnitas que quedan fuera las igualamos a parámetros. El sistema es:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

El menor que nos da diferente de cero es: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 \neq 0$, por lo que quitamos la última ecuación y hacemos $x = \lambda$. El sistema queda:

$$\begin{cases} \lambda + y + 3z = 2 \\ \lambda + y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + 3z = 2 - \lambda \\ y + 2z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema por reducción (es lo más fácil). Restando las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y + 3z = 2 - \lambda \\ y + 2z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow z = 1;\ E_1\text{-}E_2$$

Sustituyendo el valor: $y + 3 \cdot 1 = 2 - \lambda \rightarrow y = -1 - \lambda$.

Por lo que la solución para $a = 2$ es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{-1 - \lambda}, \boldsymbol{1})$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema será SCD

El sistema lo tenemos que resolver en función del parámetro que contiene. Vamos a resolver utilizando la **Regla de Cramer** ya que sabemos que el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de los coeficientes no es cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4 \neq 0, \text{ ya que } a \neq -2 \text{ y } a \neq 2$$

Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a^2 + 4} = \frac{2 \cdot (a-1) - 2 + a \cdot (a+1) + (a+1) \cdot (a-1) - 1 - 4a}{-a^2 + 4} = \frac{2a^2 - a - 6}{-a^2 + 4}$$

Tenemos que simplificar la expresión:

$$-a^2 + 4 = (2 - a) \cdot (2 + a) \text{ y } 2a^2 - a - 6 = (2a + 3) \cdot (a - 2)$$

$$x = \frac{(2a+3)\cdot(a-2)}{(2-a)\cdot(2+a)} = \frac{-2a-3}{2+a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-a^2+4} = \frac{1+8-(a+1)-2\cdot(a+1)-2+2}{-a^2+4} = \frac{-3a+6}{-a^2+4} = \frac{3\cdot(2-a)}{(2-a)\cdot(2+a)} = \frac{3}{2+a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}}{-a^2+4} = \frac{-a+1+2+2a-4a+4+1-a}{-a^2+4} = \frac{-4a+8}{-a^2+4} = \frac{4\cdot(2-a)}{(2-a)\cdot(2+a)} = \frac{4}{2+a}$$

Luego la solución queda: $\boldsymbol{x = \frac{-2a-3}{a+2}}$; $\boldsymbol{y = \frac{3}{a+2}}$; $\boldsymbol{z = \frac{4}{a+2}}, \forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$

Problema 2:

Se dan los planos: $\pi_1: x+y+z=a-1$, $\pi_2: 2x+y+az=a$ y $\pi_3: x+ay+z=1$

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a.

b) Para $a=1$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3 .

c) Para $a=2$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2 .

Solución:

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a.

Para determinar la posición relativa de los mismos tenemos que discutir el sistema que forman las tres ecuaciones de los planos:

$$\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$$

Utilizamos el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. La matriz de los coeficientes es:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz 3x3 su mayor rango es 3. Sabemos que tendrá, al menos, rango 2 puesto que es fácil encontrar un menor de orden 2 no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 1=-1\neq 0$$

Calculamos el determinante de orden 3 para saber cuándo es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1\cdot 1+1\cdot 1\cdot a+2\cdot 1\cdot a-1\cdot 1\cdot 1-2\cdot 1\cdot 1-1\cdot a\cdot a=1+a+2a-1-2-a^2$$
$$=-a^2+3a-2$$

Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$-a^2+3a-2=0 \rightarrow a^2-3a+2=0$(al estar igualada a cero podemos multiplicar por -1)

$$a=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=2 \\ \frac{3-1}{2}=1 \end{cases}$$

Con lo que tenemos que si $a=1$ o $a=2$ el determinante de la matriz de los coeficientes es cero por lo que su rango será 2 en esos casos y 3 en los demás casos.

Estudiamos ahora la matriz ampliada de los coeficientes:

$$M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tratarse de una matriz 3x4 su mayor rango es 3 por lo que coincidirá con el rango de la matriz de los coeficientes en el caso $a \neq 1$ y $a \neq 2$

Tenemos que estudiar su rango para los casos si $a = 1$ y $a = 2$

- Caso si $a = 1$. Sustituimos en la matriz ampliada el valor y tenemos que:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como las columnas 2ª y 3ª son iguales cualquier menor que las incluya a ambas valdrá cero. Calculamos el valor del menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$$

Por lo que si $a = 1, Rg(M^*) = 3$

- Caso si $a = 2$. Sustituimos en la matriz ampliada el valor y tenemos que:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

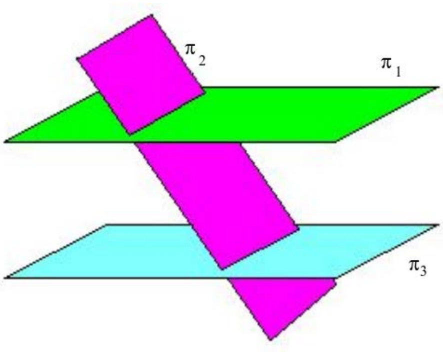
Como las columnas 4ª que hemos añadido es igual a la 1ª y 3ª el rango de la matriz ampliada coincide con el de la matriz de los coeficientes.

Por lo que si $a = 2, Rg(M^*) = 2$

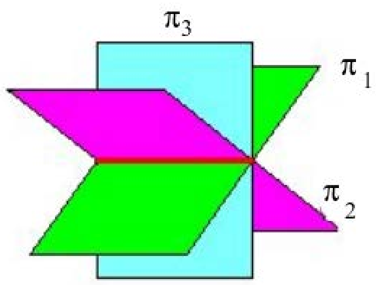
Con estos datos discutimos la posición relativa de los tres planos:

- Si $a = 1 \rightarrow Rg(M) = 2 \neq Rg(M^*) = 3$por lo que el sistema formado por los tres planos es SI (sistema incompatible) los tres planos no tienen ningún punto en común. Si observamos las ecuaciones de los tres planos tenemos que:

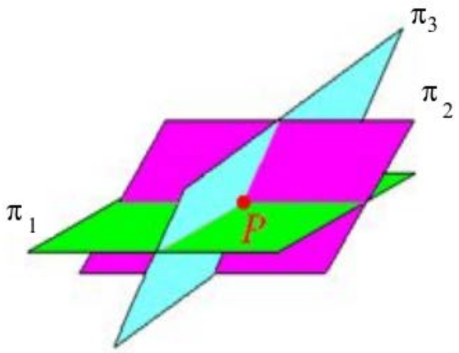
$\pi_1: x + y + z = 0,\ \pi_2: 2x + y + z = 1$ y $\pi_3: x + y + z = 1$ las ecuaciones de los planos π_1 y $\pi_3$tienen el mismo vector normal pero diferente término independiente, esto nos indica que ambos planos son paralelos. Como el otro plano NO es paralelo a esos necesariamente los corta según una recta. La representación sería la de la figura. Son **dos planos paralelos cortados por un tercero mediante dos rectas**.



- Si $a = 2 \rightarrow Rg(M) = 2 = Rg(M^*)$ por lo que el sistema formado por los tres planos es SCI (sistema compatible indeterminado) los tres planos se cortan en infinitos puntos con un grado de libertad (puesto que el rango es 2) eso nos indica que **los tres planos se cortan en una recta común**. La posición sería como la de la figura:



- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow Rg(M) = 3 = Rg(M^*)$ por lo que el sistema formado por los tres planos es SCD (sistema compatible determinado) **los tres planos son secantes, se cortan en un punto** que será la solución determinada del sistema. Por lo que la posición relativa es como la de la figura:



b) Para $a = 1$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3

Si $a = 1$acabamos de ver que los planos π_1 y $\pi_3$tienen el mismo vector normal pero diferente término independiente, esto nos indica que ambos planos **son paralelos**.

Como son paralelos **NO tienen ninguna recta de corte entre ambos** planos.

c) Para $a = 2$ calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2

Para $a = 2$ hemos visto en el apartado a) que esos dos planos se cortan según una recta. La ecuación de la misma es la solución del sistema formado por las ecuaciones de ambos planos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases} \text{es un } SCI$$

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada: $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Buscamos un menor diferente de cero:$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$

Como el menor era con las dos primeras variables hacemos la tercera parámetro$z = \lambda$ y la pasamos al otro miembro para resolver:

$$\begin{cases} x + y = 1 - \lambda \\ 2x + y = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Podemos resolver por cualquier método. Yo creo que lo más fácil es hacerlo por reducción. Restamos ambas ecuaciones:

$-x = -1 + \lambda \rightarrow x = 1 - \lambda$

Multiplicamos la primera por -2 y sumamos ambas ecuaciones:

$-y = 0 \rightarrow y = 0$

La ecuación pedida, en ecuación paramétrica, es: $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Si queremos la ecuación implícita es:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x + z = 1} \\ \boldsymbol{y = 0} \end{cases}$$

Problema 3:

Consideramos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) La integral $\int f\,(x)dx$.

Solución:

a) El dominio y las asíntotas de la función.

La función es una racional polinómica por lo que estarán fuera del dominio los puntos que anulan el denominador. Para saber el dominio tenemos que resolver la ecuación:

$$x \cdot (x+2) = 0$$

Cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = -2$

El dominio de la función será: $Domf(x)$ =]-∞,-2[U] -2,0[U]0, +∞[o bien:

$$\boldsymbol{Domf(x) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}}$$

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe, de los límites:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\,(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = 0$ (por ser el grado del denominador mayor que el del numerador) luego tiene asíntota horizontal en $y = 0$ por +∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\,(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = 0$ (por ser el grado del denominador mayor que el del numerador) luego tiene asíntota horizontal en $y = 0$ por -∞ .

$$\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal.}$$

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Tenemos dos valores candidatos: $x = -2$ y $x = 0$ calculamos los límites a esos puntos.

$$\lim_{x\to-2} f\,(x) = \left(\frac{-3}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-2+} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2-} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = -\infty \end{cases} \text{luego } x = -2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to0} f\,(x) = \left(\frac{-1}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to0+} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0-} \frac{x-1}{x\cdot(x+2)} = +\infty \end{cases} \text{luego } x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\text{Las rectas x} = -2 \text{ y x} = 0 \text{ son asíntotas verticales}$$

Como tiene asíntotas horizontales no tiene oblicua.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Para calcularlos tenemos que hacer la derivada e igualar a cero para conocer los puntos críticos. Creo que es más fácil derivar si hacemos el producto del denominador antes de derivar propiamente:

$$f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{x-1}{x^2+2x}$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+2x)-(x-1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2} = 0$$

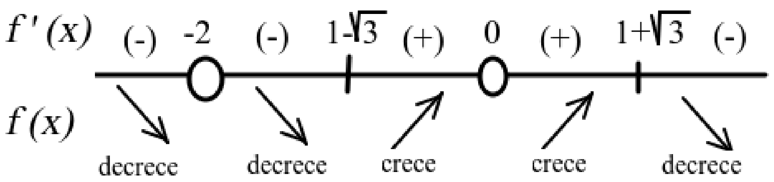
Como es una función racional se hace cero cuando lo es el numerador. Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$-x^2+2x+2=0$ (multiplicamos por (-1) por estar igualada a cero)

$\rightarrow x^2-2x-2=0 \rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt{3}}{2} = 1\pm\sqrt{3}$

Por lo que tiene dos posibles puntos críticos: $x_1 = 1+\sqrt{3}$ y $x_2 = 1-\sqrt{3}$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de los puntos críticos. En el análisis hay que incluir las discontinuidades del dominio.



Los valores calculados han sido:

$$f'^{(-3)} \simeq -1.44;\ f'^{(-1)} = -1;\ f'^{(-0.5)} \simeq 1.33;\ f'^{(1)} \simeq 0.33;\ f'(3) \simeq -0.004$$

Observando el gráfico tenemos que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

Crece en $(1-\sqrt{3},\ 0)\ \cup (0, 1+\sqrt{3})$ y decrece en $(-\infty,-2)\ \cup(-2, 1-\sqrt{3})\ \cup\ (1+\sqrt{3},+\infty)$

$$Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-2) \cup \left(-2, 1-\sqrt{3}\right) \cup \left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$$

$$Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(1-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, 1+\sqrt{3}\right)$$

c) La integral $\int f\,(x)dx$

Tenemos que realizar la integral: $\int \frac{x-1}{x(x+2)}dx$

Como es una racional polinómica cuyo denominador admite descomposición factorial (nos lo dan descompuesto) vamos a descomponer la fracción como suma de fracciones de denominador más simple en la forma:

$$\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

Para hallar A y B realizamos la operación e igualamos los numeradores (es una identidad):

$$\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)}$$

De la expresión se deduce que:

$A+B=1$ y $2A=-1$

Con lo que: $A=\frac{-1}{2}$ y $B=\frac{3}{2}$

La descomposición es: $\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x+2}$

La integral a resolver queda: $\int \frac{x-1}{x(x+2)}dx = \int \left(\frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x+2}\right)dx$

Que podemos resolver como suma de dos integrales del tipo logaritmo neperiano:

$$\int \frac{x-1}{x(x+2)}dx = \int \left(\frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x+2}\right)dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{-1}{2}lnx + \frac{3}{2}ln(x+2) + C$$

Si utilizamos las propiedades del logaritmo podemos agrupar el resultado:

$$\frac{-1}{2}lnx + \frac{3}{2}ln(x+2) = ln\sqrt{(x+2)^3} - ln\sqrt{x} = ln\sqrt{\frac{(x+2)^3}{x}}$$

$$\int \frac{x-1}{x(x+2)}dx = \boldsymbol{ln}\left|\sqrt{\frac{\boldsymbol{(x+2)^3}}{\boldsymbol{x}}}\right| + \boldsymbol{C}$$

Problema 4:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m.

b) Explicad cuando la matriz A es invertible.

c) Resolved la ecuación $XA = I$donde I es la matriz identidad en el caso$m = 1$.

Solución:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m.

Para conocer el rango tenemos que obtener el orden del mayor menor no nulo de la misma. Como es una matriz de dimensión $3x3$ el mayor rango es 3.

Estudiamos el determinante de orden 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \cdot m \cdot (m^2+1) + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot m - 2 \cdot m^2 - 0 \cdot 2 \cdot (m^2+1) + 1 \cdot 1 \cdot 0$$
$$= -m^3 - 2m^2 - m$$

Debemos saber cuándo este determinante es cero para lo que tenemos que resolver la ecuación:

$-m^3 - 2m^2 - m = 0 \rightarrow -m \cdot (m^2 + 2m + 1) = 0$

Como tenemos dos factores multiplicados e igualados a cero las soluciones son igualar a cero cada factor:

$-m = 0 \rightarrow m = 0$ (primera solución)

$m^2 + 2m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$ (segunda solución)

Por lo tanto, ya tenemos que si $m \neq -1$ y $m \neq 0$ el determinante no será cero y, por lo tanto, el rango de la matriz será 3.

Estudiamos los casos $m = 0$ y $m = -1$:

- Si $m = 0$ la matriz queda:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0^2+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante vale cero por tener una fila de ceros. Si tomamos un menor de orden 2 que no tenga elementos de esa fila, por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$ comprobamos que no es cero y, por lo tanto, el rango de la matriz en este caso es 2.

- Si $m = -1$ la matriz queda:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & (-1)^2+1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

El determinante vale cero por tener dos columnas iguales. Si tomamos un menor de orden 2 que no tenga elementos de esas columnas a la vez, por ejemplo: $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$ comprobamos que no es cero y, por lo tanto, el rango de la matriz en este caso es 2.

El $Rg(A)=2$ si $m=0$ o $m=-1$ y $Rg(A)=3$ en caso que $m\neq 0$ y $m\neq -1$

b) Explicad cuando la matriz A es invertible.

Una matriz es invertible cuando su determinante es diferente de cero. Por lo estudiado en el apartado anterior podemos afirmar que:

La matriz A es invertible cuando $m\neq 0$ y $m\neq -1$

c) Resolved la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m=1$

Como estamos en el caso $m=1$ sabemos que $|A|\neq 0$ y que, por lo tanto, $\exists A^{-1}$

Resolvemos la ecuación con las letras:

$$XA=I$$
$$XAA^{-1}=I\cdot A^{-1}$$
$$X\cdot I=A^{-1}$$
$$X=A^{-1}$$

Por lo cual la matriz buscada es la inversa de la matriz A para el caso $m=1$:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1^2+1\end{pmatrix}\rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Podemos calcular la inversa por el Método de Gauss o por determinantes. Yo lo voy a resolver por los dos métodos, pero en el examen basta con uno de ellos.

Por el **Método de Gauss**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=F_3-5\cdot F_2]{F_3=F_3+2\cdot F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 4 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=F_1-2\cdot F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2 & -5 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1=4\cdot F_1-F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-4 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2 & -5 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=F_3/4]{F_1=F_1/(-4)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ o bien } A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar si el cálculo está bien hecho (es opcional pero recomendable) aplicando que: $A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+0+2 & -3+8-5 & -1+0+1 \\ 0+0+0 & 0+4+0 & 0+0+0 \\ -4+0+4 & 6+4-10 & 2+0+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo que el cálculo es correcto.

Hacemos el mismo cálculo por determinantes (el resultado será el mismo):

Para calcular la inversa lo hacemos con la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+0+0-2-0-0 = -4 \neq 0; \text{ por lo que } \exists A^{-1}$$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Que es el mismo resultado que el anterior.

Como $X = A^{-1}$ tenemos que:

$$X=\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-5}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \text{ o bien } \boldsymbol{X}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Problema 5:

Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi: 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π.

b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π.

c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π.

Solución:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π.

Para calcular la distancia de un punto a un plano utilizamos la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

donde el punto es: $P(x_0, y_0, z_0)$y el plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

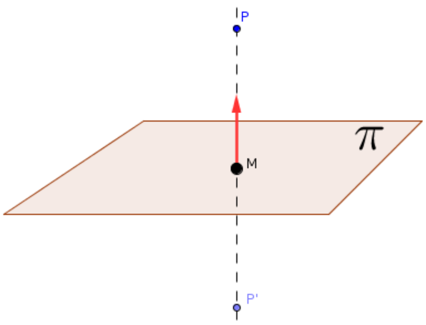
Sustituyendo valores tenemos que:

$$d(P, \pi) = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 + 4}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}\, u.l.$$

$$\boldsymbol{d(P, \pi) = \sqrt{14}}\ \textit{unidades de longitud}$$

b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π.

Primero hay que saber lo que nos están pidiendo. En principio podemos ver una representación en la figura de la derecha.



Para hallar el simétrico vamos a hallar primero el punto de proyección M del punto sobre el plano. Para ello tenemos que obtener la ecuación de la recta r perpendicular al plano (vector director el normal del plano) y que pasa por el punto:

en forma continua será $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

La pasamos a forma general:

$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} \rightarrow$ tomando la primera y la segunda:

$2x - 2 = 3y - 6 \rightarrow 2x - 3y + 4 = 0$

Tomando la primera y la tercera: $x - 1 = 3z - 9 \rightarrow x - 3z + 8 = 0$

Por lo que la recta es: $r: \begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ x - 3z + 8 = 0 \end{cases}$

El punto M que buscamos es el punto de corte entre la recta r y el plano π.

Para hallarlo tenemos que resolver el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ x - 3z + 8 = 0 \\ 3x + 2y + z + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x - 3z = -8 \\ 3x + 2y + z = -4 \end{cases}$$

Voy a resolverlo por la Regla de Cramer (se puede resolver por cualquier otro método). Determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 1 + 3\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 2\cdot 0 - 3\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot(-3)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot(-3) = 42 \neq 0$$

Por lo que puede resolverse por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 & 0 \\ -8 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{0-36+0-0-24-24}{42} = \frac{-84}{42} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -8 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{-16+36+0-0+4-24}{42} = \frac{0}{42} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{42} = \frac{0+72-8-0-12+32}{42} = \frac{84}{42} = 2$$

Luego el punto es $M(-2, 0, 2)$ que es la proyección sobre el plano.

Para calcular el punto pedido podemos hacerlo de diversas formas:

- Utilizando la fórmula del punto medio de dos puntos:

  $$x_M = \frac{x_2 + x_1}{2};\ y_M = \frac{y_2 + y_1}{2};\ z_M = \frac{z_2 + z_1}{2}$$

  Sustituyendo valores: $-2 = \frac{1+x_{P'}}{2} \to x_{P'} = -5$

  $$0 = \frac{2+y_{P'}}{2} \to y_{P'} = -2$$

  $$2 = \frac{3+z_{P'}}{2} \to z_{P'} = 1$$

  Por lo que el punto buscado es el $P' = (-5, -2, 1)$

- Otra forma es calculando el vector $\overrightarrow{PM}$ y aplicarlo en el punto M:

  $\overrightarrow{PM} = (-2-1, 0-2, 2-3) = (-3, -2, -1)$

  Lo aplicamos en el punto: $(-2, 0, 2) + (-3, -2, -1) = (-5, -2, 1)$que es el mismo resultado que el anterior.

El punto simétrico es: $\boldsymbol{P'(-5, -2, 1)}$

c) Calculad la ecuación del plano π’ que pasa por P’ y es paralelo a π.

Si es paralelo al plano tendrá su mismo vector normal por lo que su ecuación será (salvo por el coeficiente D): π: $3x + 2y + z + 4 = 0 \to \pi' : 3x + 2y + z + D' = 0$

Como tiene que pasar por el punto P’ ha de cumplir su ecuación por lo que sustituyendo las coordenadas del punto hallamos el coeficiente D’:

$$3\cdot(-5) + 2\cdot(-2) + 1 + D' = 0 \to -18 + D' = 0 \to D' = 18$$

Por lo que el plano buscado es: $\boldsymbol{\pi' : 3x + 2y + z + 18 = 0}$

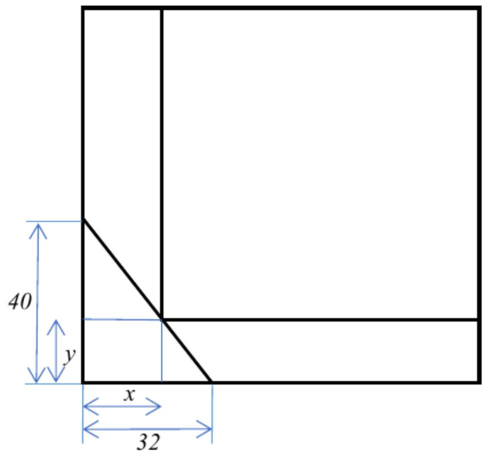
Problema 6:

Un espejo plano, cuadrado, de $80\ \mathrm{cm}$ de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos $32\ \mathrm{cm}$ y $40\ \mathrm{cm}$ respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando$0 \leqslant x \leqslant 32$.

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

c) Calculad el valor de dicha área máxima.



Solución:

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leqslant x \leqslant 32$.

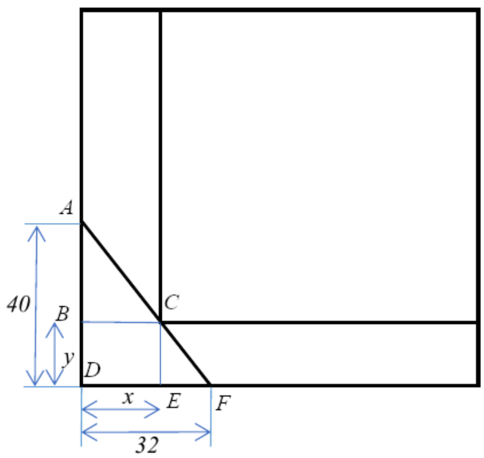
Nos dan un dibujo del problema para hacernos idea de lo que se nos está pidiendo.

Es fácil ver que el área de la pieza que nos piden es: $A(x, y) = (80 - x) \cdot (80 - y)$

(es la anchura o altura del cuadrado menos el trozo que quitamos)

Ahora tenemos que relacionar x e y. Yo lo voy a hacer aquí de dos maneras (en el examen basta con una de ellas).

- Por semejanza de triángulos: En el trozo desprendido podemos apreciar tres triángulos rectángulos semejantes y que, por lo tanto, tienen sus lados correspondientes proporcionales:



Tenemos los triángulos: $A\hat{B}C$; $\hat{A}DF$ y $C\hat{E}F$

Las dimensiones de los lados que forman el ángulo recto, en función de x e y son:

$$\overline{AB} = 40 - y;\ \overline{BC} = x$$

$$\overline{AD} = 40;\ \overline{DF} = 32$$

$$\overline{CE} = y;\ \overline{EF} = 32 - x$$

Podemos establecer la relación de muchas formas ya que, al ser semejantes, cualquier cociente de las dimensiones de los lados es igual en los tres triángulos. Yo voy a utilizar que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} \to \frac{40-y}{x} = \frac{40}{32} \to 1280 - 32y = 40x \to y = \frac{1280-40x}{32} \to y = \frac{160-5x}{4}$$

Como antes hemos visto que el área es: $A(x,y) = (80-x)\cdot(80-y)$

Sustituyendo la expresión de y: $A(x) = (80-x)\cdot\left(80 - \frac{160-5x}{4}\right)$

Agrupamos términos:

$$A(x) = (80-x)\cdot\left(\frac{160+5x}{4}\right) \to A(x) = \frac{12800+400x-160x-5x^2}{4} = \frac{12800+240x-5x^2}{4}$$

Por lo que la expresión buscada es:

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{12800 + 240x - 5x^2}{4};\ 0 \leqslant x \leqslant 32}$$

- Otra forma de hacer el problema es utilizando geometría analítica. Para ello situamos el espejo en un eje de coordenadas bidimensional con el origen en el punto D. El punto A tiene de coordenadas: $A(0,40)$ y el F tiene de coordenadas $F(32,0)$

  El punto C tiene de coordenadas: $C(x,y)$ y pertenece a la recta que pasa por A y F.

  La ecuación de la recta que pasa por A y F es (ecuación de la recta que pasa por dos puntos):

  $$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} \to \frac{x-32}{0-32} = \frac{y-0}{40-0} \to 40x - 1280 = -32y \to y = \frac{1280-40x}{32}$$

  que es la misma relación que hemos hallado anteriormente con la semejanza.

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

Queremos que el área sea máxima. Por lo que tenemos que buscar un máximo para la función:

$$A(x) = \frac{12800 + 240x - 5x^2}{4};\ 0 \leqslant x \leqslant 32$$

Para ello derivamos e igualamos a cero:

$$A'^{(x)} = \frac{240-10x}{4} = 0 \to 240 - 10x = 0 \to x = 24 \text{ (es un punto del intervalo}[0,32])$$

Para demostrar que es máximo tenemos que hallar la segunda derivada y comprobar que su valor en el punto es negativo:

$A''(24) = \frac{-10}{4} = -2.5 < 0$; luego es un máximo

Como toda función continua (se trata de una polinómica) definida en un intervalo cerrado, ($[0, 32]$) alcanza el máximo y mínimo absoluto en los máximos y mínimos relativos o en los extremos del intervalo, por lo que comprobamos su valor en el punto hallado y en los extremos:

$A(0) = \frac{12800+240\cdot 0-5\cdot 0^2}{4} = \frac{12800}{4} = 3200$

$$A(24) = \frac{12800 + 240 \cdot 24 - 5 \cdot 24^2}{4} = \frac{15680}{4} = 3920$$

$$A(32) = \frac{12800 + 240 \cdot 32 - 5 \cdot 32^2}{4} = \frac{15360}{4} = 3840$$

Por lo que el máximo absoluto se alcanza en $x = 24$. Hallamos la otra coordenada:

$$y = \frac{1280-40x}{32} \to y = \frac{1280-40\cdot 24}{32} = \frac{320}{32} = 10$$

El punto $C(x, y)$ es $C(24, 10)$

Las dimensiones de la pieza R son: $80 - 24 = 56$ y $80 - 10 = 70$ es decir: $56 \times 70\ cm$

$$El\ área\ R\ es\ máxima\ cuando\ sus\ dimensiones\ son\ \mathbf{56 \times 70\ cm}$$

c) Calculad el valor de dicha área máxima.

El área será: $A = 56 \times 70 = 3920\ cm^2$

$$El\ área\ máxima\ de\ R\ es\ de\ \mathbf{3\ 920\ cm^2}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE JULIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Problema 1:

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$ donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)

b) La solución del sistema cuando $m = 1$ (3 puntos)

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado (3 puntos)

Problema 2:

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x + my + z = 2$ que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s. (4 puntos)

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π (3 puntos)

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P $(2, 2, 2)$ (3 puntos)

Problema 3:

Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos (4 puntos)

b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$ (3 puntos)

Problema 4:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (3 puntos)

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$ (4 puntos)

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución (3 puntos)

Problema 5:

Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha,3,-1)$, se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s. (4 puntos)

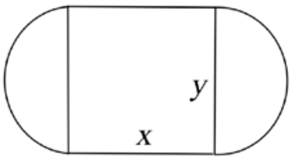
c) Los valores deαpara los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Problema 6:

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4+\pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



RESPUESTAS

Problema 1:

Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$ donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m.

b) La solución del sistema cuando $m = 1$.

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m.

Cuando nos piden una discusión se refieren a que utilicemos el **Teorema de Rouché-Fröbenius**. Para ello tenemos que estudiar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Matriz de los coeficientes: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}$

Como se trata de una matriz 3x3 su mayor rango es 3 (podemos darnos cuenta enseguida que hay menores de orden 2 diferentes de cero) por lo que calculamos el valor del menor de orden 3 (toda la matriz). Calculamos el valor del determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 15 - 4 - 5 + m + 24 = 3m$$

Igualamos a cero para ver los valores que anulan el determinante:

$$3m = 0 \rightarrow m = 0$$

La primera conclusión que podemos sacar es que si $m \neq 0$ el $RgM = 3$ y como la matriz ampliada es de dimensión 3x4 y su mayor rango es 3 tenemos que:

Si $m \neq 0$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema es *Compatible y Determinado*

Si $m = 0$ el $RgM = 2$ ya que el menor de orden 3 es cero pero existen menores de orden 2 que no son nulos: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$

Vamos a estudiar para el caso $m = 0$ el rango de la matriz ampliada:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos damos cuenta que se trata de un **sistema homogéneo** y debemos saber que un sistema homogéneo sólo puede tener una solución compatible determinada que es la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

El rango de la matriz ampliada con una columna de ceros nunca puede ser mayor que el de la matriz de los coeficientes por lo que tenemos que:

Si $m = 0$ el $RgM = 2 = RgM^* < nº incógnitas$ y el sistema es un Sistema Compatible Indeterminado.

La discusión completa es:

Si $m \neq 0$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ el sistema es Compatible Determinado

Si $m = 0$ el $RgM = 2 = RgM^* < nº\ incógnitas$ el sistema es un Sistema Compatible Indeterminado

b) La solución del sistema cuando $m = 1$.

El sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases}$$

Como $m \neq 0$ sabemos que el sistema es *Compatible y Determinado*

El valor del determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 15 - 4 - 5 + 1 + 24 = 3 \neq 0$$

Como tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (3) y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar la **regla de Cramer**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1 - 3 + 0 - 1 - 0 + 12}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{0 + 15 + 1 - 0 - 1 - 6}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2 + 0 - 4 - 5 + 1 - 0}{3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Luego la solución es $\boldsymbol{x = 3};\ \boldsymbol{y = 3};\ \boldsymbol{z = -2}$

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

El sistema es Compatible Indeterminado si $m = 0$. En ese caso el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema homogéneo. Como hemos dicho antes un sistema homogéneo sólo puede tener una solución compatible determinada que es la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Aquí tenemos que buscar una solución indeterminada.

Para ello tomamos el menor que nos daba el rango 2: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

Como vemos es el menor formado por las dos primeras ecuaciones y dos primeras incógnitas. Para resolver quitamos la 3ª ecuación (que es la que queda fuera del menor) y le damos a la tercera incógnita el valor de un parámetro:$z = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R}$

Ahora el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 2x - y + \lambda = 0 \\ x + y + 3\lambda = 0 \end{cases}$$

Pasamos el parámetro al segundo miembro:$\begin{cases} 2x - y = -\lambda \\ x + y = -3\lambda \end{cases}$

Ahora tiene tantas ecuaciones como incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo por lo que podemos aplicar la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -3\lambda & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-\lambda - 3\lambda}{3} = \frac{-4}{3}\lambda;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 1 & -3\lambda \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6\lambda + \lambda}{3} = \frac{-5}{3}\lambda$$

Luego la solución es: $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \left(\frac{-4}{3}\boldsymbol{\lambda}, -\frac{5}{3}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}\right);\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

Problema 2:

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s.

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π.

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$.

Solución:

a) La posición relativa de las rectas r y s.

Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos hacerlo estudiando directamente los rangos de las matrices formadas por sus ecuaciones implícitas (con lo que tendremos que manejar determinantes de orden 4x4) o bien estudiando el rango de las matrices formadas por sus vectores directores y un vector obtenido a partir de un par de puntos de las mismas, con lo que estudiaremos sólo determinantes de rango a lo sumo 3x3. Yo voy a hacerlo de la segunda manera.

Necesitamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$$

Como se trata de una recta en forma general para hallar un vector y un punto podemos resolver el sistema compatible indeterminado que forman sus ecuaciones.

Matriz de los coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Necesitamos un menor de orden 2 diferente de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-2=-2\neq 0$

Hacemos parámetro la coordenada que queda fuera del determinante: $z=\lambda$ y la pasamos al miembro de la derecha:

$$r: \begin{cases} x+y=1 \\ 2x=\lambda+1 \end{cases}$$

Para resolver el sistema no hace falta ningún método especial de resolución ya que tenemos la x casi despejada en la segunda ecuación:

$$x=\frac{\lambda+1}{2}$$

Sustituyendo el valor hallado despejamos la y:

$$\frac{\lambda+1}{2}+y=1 \rightarrow y=1-\frac{\lambda+1}{2}=\frac{2-\lambda-1}{2}=\frac{1-\lambda}{2}$$

Por lo que la ecuación, en paramétricas, es: $r: \begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{\lambda}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2} \\ z=\lambda \end{cases}$

Ahora es fácil obtener un punto y un vector director de la recta:

$$P_r\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right);\ \overrightarrow{v_r}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

$s:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ la recta s está en forma continua por lo que la obtención de un punto y un vector director es inmediata:

$$P_s(1,0,0);\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,2)$$

Hallamos ahora el vector que une ambos puntos:

$$\overrightarrow{P_rP_s}=\left(1-\frac{1}{2},0-\frac{1}{2},0-0\right)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$$

Formamos ahora una matriz con ambos vectores directores y el vector hallado y tenemos que estudiar el rango de dicha matriz:

$$M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2}\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

En esta matriz si observamos las dos primeras columnas podemos ver que son proporcionales lo cual nos dice que ambos vectores directores son proporcionales y las rectas son paralelas o coincidentes (ya que tienen la misma dirección).

Sin embargo, al analizar la matriz con la tercera columna (la que contiene al vector de los puntos), podemos apreciar que no es proporcional a las anteriores por lo que la matriz, con esa columna, tendrá rango 2 y las rectas **serán paralelas**. (Si hubiese sido también proporcional serían coincidentes).

Las rectas r y s son paralelas.

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π

Este apartado podemos abordarlo también de diversas formas. Para que una recta esté contenida en un plano se tienen que dar dos condiciones: su vector director es perpendicular al vector normal del plano y un punto de la recta está en el plano o bien dos puntos están dentro del plano.

$\pi: x+my+z=2$ su vector normal es: $\vec{n}=(1,m,1)$

$$\overrightarrow{v_r}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

Para que sean perpendiculares su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=(1,m,1)\cdot\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)=\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+1=\frac{3}{2}-\frac{m}{2}\rightarrow\frac{3}{2}-\frac{m}{2}=0\rightarrow\frac{m}{2}=\frac{3}{2}\rightarrow m=3.$$

Con ese valor tenemos que comprobar que un punto de la recta está contenido en el plano:

$P_r\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ queremos saber si pertenece al plano $\pi: x+3y+z=2$ para lo cual sustituimos el punto en la ecuación del plano y comprobamos si se verifica:

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+0=2$ como podemos observar el punto pertenece al plano y como el vector es ortogonal al plano podemos afirmar que, para el valor $m=3$ la recta r está contenida en el plano π.

Para $\boldsymbol{m}$ **= 3**, la recta r está contenida en el plano π.

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$

Como nos dicen que $m=2$ la ecuación del plano es: $\pi: x+2y+z=2$

Tenemos que buscar ahora los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados. Las ecuaciones de los ejes son:

Eje OX: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ Eje OY: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ Eje OZ: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Para encontrar los puntos de intersección basta con resolver los sistemas que forman las ecuaciones de cada eje con la ecuación del plano:

Eje OX: $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow x=2$ luego el punto es: $A(2,0,0)$

Eje OY: $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow y=1$ luego el punto es: $B(0,1,0)$

Eje OZ: $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow z=2$ luego el punto es: $C(0,0,2)$

Ahora tenemos que hallar el volumen del tetraedro formado por esos tres puntos y $P(2,2,2)$Tomamos un punto como origen y hallamos los tres vectores desde ese punto a los otros tres vértices:

$\overrightarrow{PA}=(2-2,0-2,0-2)=(0,-2,-2)$

$\overrightarrow{PB}=(0-2,1-2,0-2)=(-2,-1,-2)$

$\overrightarrow{PC}=(0-2,0-2,2-2)=(-2,-2,0)$

Debemos conocer que el volumen del tetraedro es 1/6 del valor absoluto producto mixto de los tres vectores que forman sus aristas con un vértice común:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left|\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{PC}\right)\right|\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|0-8-8+4-0-0|=2\,u^3$$

El volumen del tetraedro mide: $\boldsymbol{V=2u^3}$

Problema 3:

Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos

b) Las asíntotas y la gráfica de f.

c) La integral $\int f\,(x)dx$

Solución:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos

Se trata de una función polinómica por una exponencial de exponente polinómico. Tanto una como la otra no presenta problemas de dominio (su dominio son todos los reales). Por lo que tenemos que:

El dominio de la función será: $\boldsymbol{Dom f(x)} = \mathbb{R}$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Para calcularlos tenemos que hacer la derivada e igualar a cero para conocer los puntos críticos. Se trata de un producto de dos funciones por lo que la derivada será:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} + x \cdot e^{1-x^2} lne \cdot (-2x) = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2) = 0$$

Tenemos un producto de dos funciones igualado a cero. Las soluciones se obtienen al igualar a cero cada una de las funciones, pero una exponencial nunca puede ser cero, por lo que la primera función no nos proporciona ninguna solución:

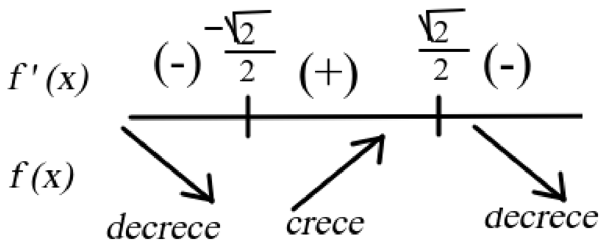
$$e^{1-x^2} \neq 0 \qquad 1 - 2x^2 = 0 \rightarrow -2x^2 = -1 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Por lo que tenemos dos posibles puntos críticos: $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de los puntos críticos. En el análisis hay que incluir las discontinuidades del dominio, pero en este caso no hay ninguna:

Los valores calculados han sido:

$$f'(-1) = -1 < 0$$
$$f'(0) = e > 0$$
$$f'(1) = -1 < 0$$



Observando el gráfico tenemos que los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:

Crece en $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ y decrece en $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\ \cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$

Por el gráfico podemos observar que tiene un máximo en $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y un mínimo en $x_2=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Hallando la segunda coordenada:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\simeq 1.1658$$

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{1-\frac{1}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\simeq -1.1658$$

El máximo es: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\right)$ y el mínimo es: $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{e}\right)$

b) Las asíntotas y la gráfica de f.

Asíntotas horizontales. Se encuentran en el valor, si existe de los límites:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{1-x^2}=0$ (ya que, al tender a infinito, quitamos el 1 del exponente y pasamos toda la exponencial al denominador, el cociente de un polinomio entre una exponencial, por comparación de infinitos es cero) luego tiene asíntota horizontal en $y=0$ por +∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x^2}=0$ por la misma razón que el anterior tiene asíntota horizontal en $y=0$ por -∞.

Veamos las tendencias (cómo se acerca la función a la asíntota) para ello calculamos un valor relativamente grande y comprobamos si sale un valor algo mayor o menor que el de la asíntota:

$f(10)=10e^{1-10^2}=1.011\cdot 10^{-42}>0$ luego va por encima de la asíntota en +∞

$f(-10)=-10e^{1-(-10)^2}=-1.011\cdot 10^{-42}<0$ luego va por debajo de la asíntota en -∞

Asíntotas verticales. Las buscamos en las discontinuidades del dominio, el valor del límite a esos puntos tiene que ser un infinito. Como en este caso el dominio es $Dom f(x)=\mathbb{R}$ y no presenta discontinuidades la función **no tiene asíntotas verticales.**

Como tiene asíntotas horizontales no tiene oblicuas.

Asíntota horizontal y = 0

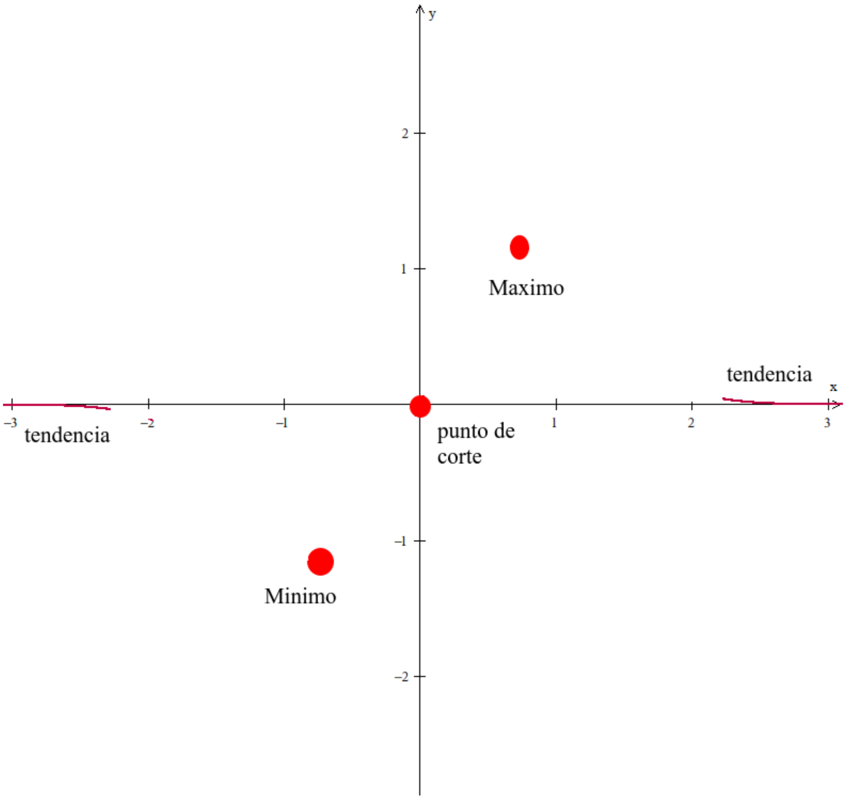
Para dibujar la gráfica nos basamos en las asíntotas, sus tendencias, el máximo y mínimo hallados y la monotonía:

También podemos hallar el punto de corte de la gráfica con los ejes que es (para ambos casos) el (0, 0):

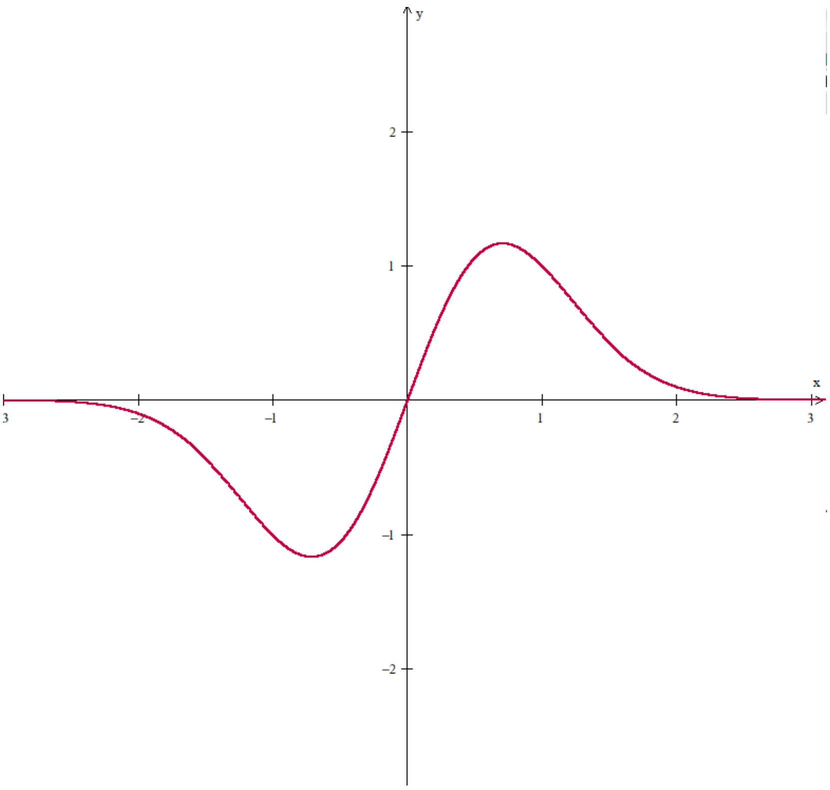
$$f(0)=0e^{1-0^2}=0$$

$$xe^{1-x^2}=0\ \to x=0$$

Autor: Pedro Podadera Sánchez



La gráfica queda:



c) La integral $\int f\,(x)dx$

Tenemos que realizar la integral:

$$\int f\,(x)dx = \int x\,e^{1-x^2}dx$$

Por tratarse de una exponencial y un polinomio podríamos pensar que se trata de una integral por partes. Sin embargo, para que esto fuese así, la integral de la parte exponencial ha de ser inmediata y, en este caso, no lo es, puesto que el exponente es un polinomio de segundo grado.

Procede hacer un **cambio de variable** ya que el polinomio del exponente es de segundo grado (su derivada será de primer grado) y hay un polinomio de primer grado multiplicando a la diferencial.

Hacemos el cambio: $1 - x^2 = t$

$$\int f\,(x)dx = \int x\,e^{1-x^2}dx = \left| \begin{matrix} 1 - x^2 = t \\ -2xdx = dt \to xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t\,dt = \frac{-1}{2}e^t + C$$
$$= \frac{-1}{2}e^{1-x^2} + C$$

Luego la integral pedida es:

$$\boldsymbol{\int f\,(x)dx = \frac{-1}{2}e^{1-x^2} + C}$$

Problema 4:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3)$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$.

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Solución:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

La matriz A es una matriz de dimensión 3x3 por lo que puede tener hasta rango 3. Analizamos el valor del determinante de mayor orden (3):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 2 - 3(a^2-2) - 3a + 6 - (a^2-2) = -4a^2 + 16$$

Vamos a analizar cuándo vale cero:

$$-4a^2 + 16 = 0 \rightarrow -4a^2 = -16 \rightarrow a^2 = \frac{-16}{-4} \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 2$$

Luego el rango de la matriz A será 3 si $a \neq \pm 2$. Veamos qué pasa cuando $a = \pm 2$:

Existe un menor de orden 2 que no depende de a y que no es cero:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$ por lo que el rango de A es 2.

Tenemos que $\boldsymbol{RgA = 3 \; si \; a \neq \pm 2}$ y $\boldsymbol{RgA = 2 \; si \; a = \pm 2}$.

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$

Despejamos con las letras:

$AC = 16I$	Multiplicamos por la izquierda por la inversa de A
$A^{-1} \cdot AC = A^{-1} \cdot 16I$	Utilizamos que $A^{-1} \cdot A = I$ y que los números conmutan
$I \cdot C = 16A^{-1} \cdot I$	Utilizamos que cualquier matriz por la identidad es la misma matriz
$C = 16A^{-1}$	Que es la matriz que tenemos que hallar.

Tenemos que calcular la inversa de A. Podemos hacerlo por el Método de Gauss o por determinantes. Yo lo voy a hacer de las dos maneras, pero en el examen basta con una de ellas.

Como nos dicen que $a = 0$ tenemos que la matriz es ahora: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

<u>Por el Método de Gauss</u>:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 = F_2 + F_1$ $\quad$ $F_1 = F_1 - F_2$ $\quad$ $F_1 = 8F_1 + F_3$

$F_3 = F_3 - F_1$ $\quad$ $F_3 = F_3 + 2F_2$ $\quad$ $F_2 = 2F_2 - F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$F_1 = F_1/8$

$F_2 = F_2/4$

$F_3 = F_3/8$

Por lo que tenemos que: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

No es obligatorio, pero sí conveniente comprobar el resultado utilizando que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8} & \frac{1}{4}+0-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4}-0-\frac{1}{4} & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{3}{4}+0-\frac{3}{4} \\ \frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8} & \frac{1}{4}+0-\frac{1}{4} & \frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que es correcto el resultado.

<u>Por determinantes</u>:

Utilizamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 6 - 0 + 6 + 2 = 16 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}0&1\\-2&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1&1\\1&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1&0\\1&-2\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&3\\-2&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\1&-2\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\-1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2&4&2\\-12&0&4\\2&-4&2\end{pmatrix}^t=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&\frac{-3}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{4}&0&\frac{-1}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

Lógicamente es el mismo resultado que por el anterior método por lo que no vamos a comprobarlo.

Tenemos que hallar la matriz C.

$$C=16A^{-1}\to C=16\cdot A^{-1}=16\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{8}&\frac{-3}{4}&\frac{1}{8}\\\frac{1}{4}&0&\frac{-1}{4}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-12&2\\4&0&-4\\2&4&2\end{pmatrix}$$

Por lo que: $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-12}&\mathbf{2}\\\mathbf{4}&\mathbf{0}&\mathbf{-4}\\\mathbf{2}&\mathbf{4}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ tiene solución.

Como nos dicen que: $B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)$ tenemos que hacer la operación para conocer sus elementos:

$$B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\2&4&6\end{pmatrix}$$

Para conocer el rango tenemos que determinar el número máximo de filas o columnas linealmente independientes. Sin embargo, nos podemos dar cuenta fácilmente que, en este caso, la segunda fila es igual a la primera multiplicada por -1 y la tercera fila es el doble que la primera por lo que **sólo una fila es independiente** y el rango es 1.

$$\boldsymbol{RgB=1}$$

Ahora tenemos que determinar si el sistema $B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ tiene solución. Aplicando el Teorema de

Rouché-Fröbenius sabemos que tendrá solución si los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada son coincidentes.

Por el subapartado anterior sabemos que la matriz de los coeficientes (B) tiene de rango 1.

Tomamos ahora la matriz ampliada del sistema:

$$B^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

Podemos de nuevo observar que la segunda fila es igual a la primera multiplicada por -1 y la tercera fila es el doble que la primera por lo que **sólo una fila es independiente** y el rango es 1 de nuevo.

Aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius $RgB = RgB^* = 1 < nº\ incógnitas \Rightarrow SCI$

Luego **el sistema tiene solución** (es compatible) indeterminado (por ser menor el rango que el número de incógnitas).

El sistema es compatible indeterminado, por lo que **sí tiene solución**.

Problema 5:

Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha,3,-1)$, se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

Solución:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

Como sabemos para determinar la ecuación de un plano hacen faltan un punto y dos vectores directores. Vamos a tomar el punto de referencia P y los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PQ} = (2-1,-1-1,1-0) = (1,-2,1)$

$\overrightarrow{PR} = (1-1,3-1,-1-0) = (0,2,-1)$

Para determinar la ecuación implícita calculamos el determinante formado por el punto y los vectores directores en la forma: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2(x-1)+0(y-1)+2(z-0)-0(z-0)+1(y-1)-2(x-1) = 0 \rightarrow$

$\boldsymbol{y+2z-1=0}$ que es la ecuación buscada.

Ahora tenemos que determinar la distancia de ese plano al origen.

Para calcular la distancia de un punto a un plano utilizamos la fórmula:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

donde el punto es: $O(0,0,0)$ y el plano $y+2z-1=0$

Sustituyendo valores tenemos que:

$$d(O,\pi) = \frac{|0\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 0-1|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} u.l.$$

$$\boldsymbol{d(O,\pi) = \frac{\sqrt{5}}{5} u.l.}$$

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

Para determinar la ecuación de una recta nos hace falta un punto y un vector director.

El punto lo tenemos ya que la recta r pasa por R cuando $\alpha = 1$, es decir, el punto $R(1,3,-1)$

Como es paralela a la recta s que pasa por P y Q ha de tener su mismo vector director (el que une ambos puntos):

$\overrightarrow{PQ} = (2-1,-1-1,1-0) = (1,-2,1)$

Damos la ecuación de la recta r en forma continua:

$$\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{y-3}}{\boldsymbol{-2}} = \frac{\boldsymbol{z+1}}{\boldsymbol{1}}$$

Ahora tenemos que calcular la distancia entre ambas rectas. Como son paralelas la distancia entre ellas es la misma que la de cualquier punto de una a la otra recta.

Vamos a utilizar el punto que tenemos de la recta r que es el punto$R(1,3,-1)$y la recta s.

Fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$d(R,s) = \frac{|\overrightarrow{PR}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}$ donde P es un punto de s y $\vec{v}$ es un vector director de s.

Tomamos como punto de s el P por lo que:

$\overrightarrow{PR} = (1-1,3-1,-1-0) = (0,2,-1)$

Y como vector director el hallado anteriormente: $\vec{v} = (1,-2,1)$

Hallamos los valores necesarios para aplicar la fórmula: $|\vec{v}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$

$$\overrightarrow{PR}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} - 2\vec{k} = (0,-1,-2)$$

$$|\overrightarrow{PR}\times\vec{v}| = \sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$$

Por lo que la distancia pedida es:

$$d(R,s) = \frac{|\overrightarrow{PR}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}\ u.l.$$

c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

Para hacer el ejercicio más corto podemos trazar la recta que pasa por P y Q y después comprobar el valor de α que hace que pertenezca a esa recta. Si lo hacemos así la segunda parte estará resuelta.

Para determinar la ecuación de una recta nos hace falta un punto y un vector director.

El punto lo tenemos ya que la recta t pasa por P, es decir, el punto $P(1,1,0)$

Como pasa por P y Q ha de tener como vector director el que une ambos puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (2-1, -1-1, 1-0) = (1, -2, 1)$

Damos la ecuación de la recta en forma continua:

$s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$

Ahora el punto $R(\alpha, 3, -1)$ ha de pertenecer a esa recta por lo que tiene que verificar su ecuación, es decir:

$$\frac{\alpha-1}{1} = \frac{3-1}{-2} = \frac{-1-0}{1} \to \alpha - 1 = -1 = -1$$

Como vemos la última ecuación se cumple para que lo hagan las otras dos basta con que se cumpla que:

$\alpha - 1 = -1 \ \to \alpha = 0$

Por lo que para el valor $\alpha = 0$ los tres puntos están alineados y los contiene la recta:

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

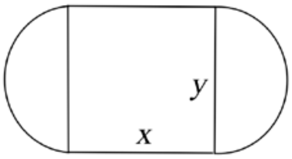
Para el valor $\boldsymbol{\alpha = 0}$ los tres puntos están alineados

Problema 6:

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4+\pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.



Solución:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.

La figura está formada por un rectángulo y una circunferencia (si unimos las dos semicircunferencias forman una única figura).

La longitud de las líneas del rectángulo es: $L_r = 2x + 2y$

La longitud de la circunferencia (el radio es $y/2$): $LC = 2\pi \cdot \frac{y}{2} = \pi y$

Sumando ambas longitudes tenemos la longitud total:

$$L = L_r + L_c = 2x + 2y + \pi y = 2x + (2+\pi)y$$

Como queremos que esté sólo en función de la altura y del rectángulo tenemos que buscar una relación entre ambas variables.

El dato que tenemos adicional que las relaciona es la superficie del campo: $(4+\pi)$

Esta superficie se obtiene sumando el área del rectángulo y de la circunferencia:

$$S = S_r + S_c = x \cdot y + \pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4}$$

Ahora tenemos que sustituir la superficie por su valor y despejar la x:

$$4 + \pi = x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4} \rightarrow 4 + \pi - \pi \cdot \frac{y^2}{4} = x \cdot y \rightarrow \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4} = x \cdot y \rightarrow \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4y} = x$$

Ahora hay que sustituir la expresión hallada en la de la longitud que teníamos:

$$L = 2x + (2+\pi)y \rightarrow L = 2 \cdot \left(\frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4y}\right) + (2+\pi)y$$

Debemos simplificar la expresión:

$L = 2 \cdot \left(\frac{16+4\pi-\pi \cdot y^2}{4y}\right) + (2+\pi)y \rightarrow L = \frac{16+4\pi-\pi \cdot y^2}{2y} + (2+\pi)y \rightarrow$

$\rightarrow L = \frac{16+4\pi-\pi \cdot y^2+4y^2+2\pi y^2}{2y} \rightarrow L = \frac{16+4\pi+(4+\pi)y^2}{2y}$

Si lo separamos en términos:

$$\boldsymbol{L(y) = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y}$$

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

Como queremos usar la menor cantidad de pintura posible tenemos que buscar las dimensiones del campo de forma que la longitud sea mínima.

Es decir, tenemos que buscar un mínimo a la función:

$$L(y) = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi}{2}y$$

Para ello derivamos en función de y, igualamos a cero y despejamos el valor de y:

$L'(y) = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + \frac{4+\pi}{2} = 0 \rightarrow \frac{4+\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2} \rightarrow$

$\rightarrow (4+\pi) \cdot y^2 = 16+4\pi \rightarrow y^2 = \frac{16+4\pi}{4+\pi} \rightarrow y^2 = \frac{4 \cdot (4+\pi)}{4+\pi} = 4 \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

Fijémonos que sólo nos interesa estudiar el valor positivo $y = 2$ puesto que la variable es una dimensión de un campo (no puede ser negativa):

Para demostrar que es mínimo tenemos que hallar la segunda derivada y comprobar que su valor en el punto es positivo:

$L'(y) = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + 2 + \frac{\pi}{2} \rightarrow L''(y) = \frac{2(8+2\pi)}{y^3} \rightarrow L''(y) = \frac{16+4\pi}{y^3}; L''(2) = \frac{16+4\pi}{2^3} \simeq 3.57 > 0$

Luego $y = 2$ es un mínimo.

La función $L(y)$ es continua en el intervalo $(0, +\infty)$ y el único extremo relativo en ese intervalo ha sido el $y = 2$. Como la función decrece para los valores menores y crece para los mayores está claro que será un extremo absoluto puesto que no ha salido ningún cambio de la monotonía en ese intervalo.

Por lo que el mínimo absoluto es en $y = 2$ hallamos la otra coordenada:

$x = \frac{16+4\pi-\pi \cdot y^2}{4y} \rightarrow x = \frac{16+4\pi-\pi \cdot 2^2}{4 \cdot 2} = 2$

Por lo que los valores de las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima son:

$$\boldsymbol{x = 2; y = 2}$$

Es un cuadrado de lado 2 y las semicircunferencias laterales tienen radio 1.