Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Luis Lorente

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz $Y = A^2 + BB^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.

b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2AX = B$.

P3. (Análisis)

El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x)=\begin{cases} 70 & \text{si } 0 \le x \le 40 \\ \frac{1}{10}x^2 - 11x + 350 & \text{si } 40 < x \le 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo? (**hasta 2 puntos**).

b) Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida (**hasta 1 punto**).

P4. (Análisis)

El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función $B(x) = -20x^2 + 1200x + a$, donde $x \in [0, \infty)$.

a) Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10000 euros proporciona un beneficio neto de de 10 millones de euros.

b) Para $a = 2000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1].

P5. (Estadística y probabilidad)

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.

b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino?

P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

a) Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$, de forma que el sistema resultante sea incompatible.

C2. (Análisis)

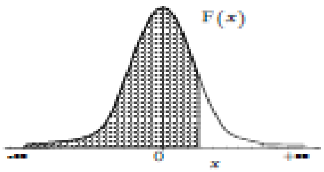
¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$?

C3. (Estadística y probabilidad)

Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0.78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0.83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años.

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

RESPUESTAS

Problema P.1: (Números y álgebra)

En un almacén de frutas disponen de 800 kg de manzanas, 800 kg de naranjas y 500 kg de plátanos. Con estas existencias van a poner a la venta dos tipos de lotes de frutas, A y B. El lote A consta de 1 kg de manzanas, 2 kg de naranjas y 1 kg de plátanos; mientras que el lote B consta de 2 kg de manzanas, 1 kg de naranjas y 1 kg de plátanos. Si los lotes A se venden a 12 euros cada uno y los lotes B a 14 euros cada uno, determinar, mediante técnicas de programación lineal, el número de lotes de cada tipo que ha de vender el almacén para maximizar sus ingresos. ¿A cuánto asciende ese ingreso máximo?

Solución:

Se trata de un problema típico de programación lineal en dos dimensiones. Veamos las 2 variables:

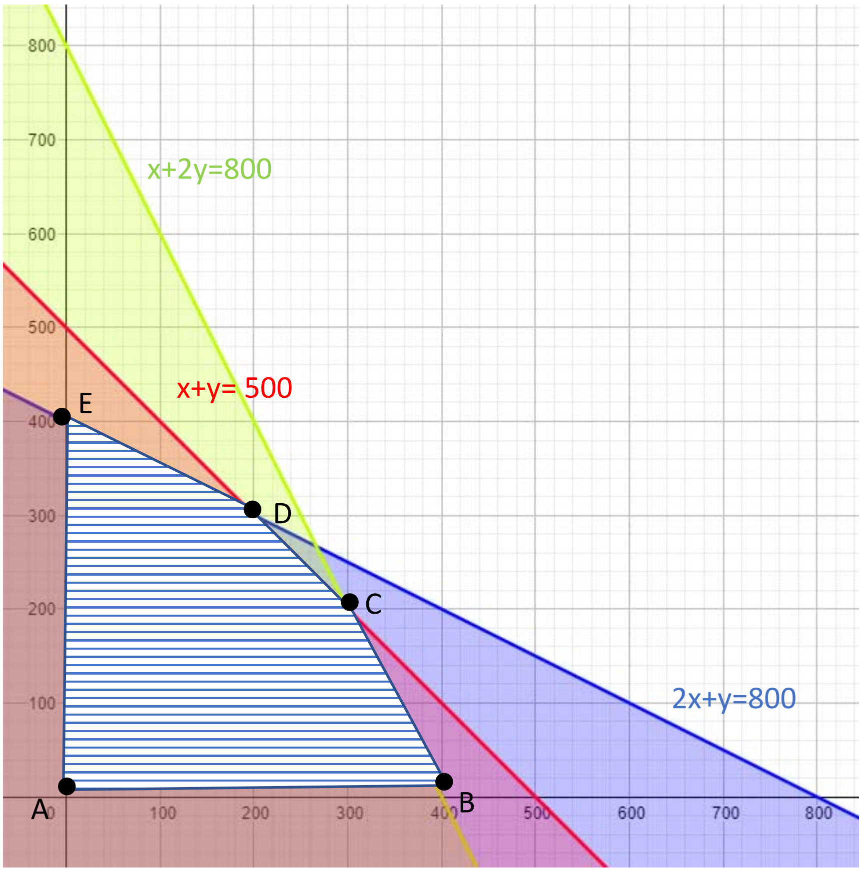
x = número de lotes de A; y = número de lotes de B.

Condiciones de contorno (inecuaciones):

(1) $x \geq 0$ e $y \geq 0$
(2) $x + 2y \leq 800$ (restricción a los kilos de manzanas)
(3) $2x + y \leq 800$ (restricción a los kilos de naranjas)
(4) $x + y \leq 500$ (restricción a los kilos de plátanos)

Función a maximizar (Beneficio): $B(x, y) = 12x + 14y$

Representación región factible (rallada en azul):



Autor: José Luis Lorente
www.apuntesmareaverde.org.es

Vértices del polígono:

- $A(0, 0)$
- $B(400, 0)$
- $C(300, 200)$: solución de $\left.\begin{matrix} 2x + y = 800 \\ x + y = 500 \end{matrix}\right\}$ Restando ecuaciones x = 300 y por tanto y = 200
- $D(200, 300)$: solución de $\left.\begin{matrix} x + 2y = 800 \\ x + y = 500 \end{matrix}\right\}$ Restando ecuaciones y = 300 y por tanto x = 200
- $E(400, 0)$

Representación máxima variación función beneficio: vector $\vec{v} = (12,14)$ o el proporcional que tiene misma dirección $\vec{v} = (120, 140)$ y las rectas perpendiculares son rectas con mismo beneficio

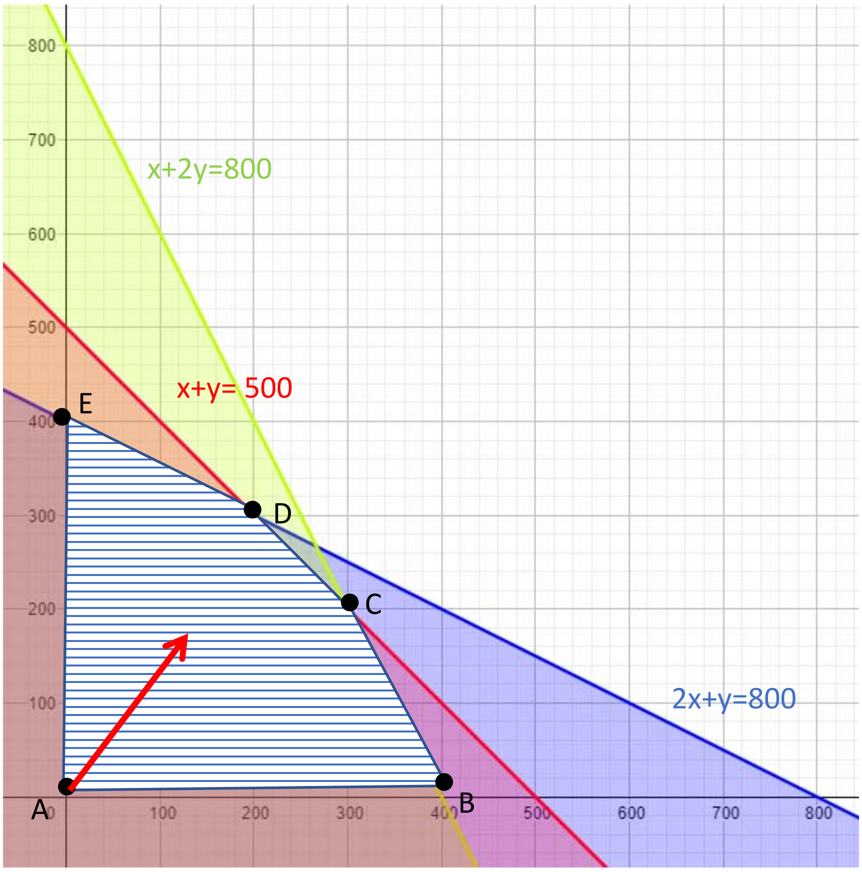
$A(0, 0)$ → Beneficio $B(0, 0)$ = 0 €

$B(400, 0)$ → Beneficio $B(400, 0)$ = 4 800 €

$C(300, 2000)$ → Beneficio $B(300, 200)$ = 6 400 €

$D(200, 300)$ → Beneficio $B(200, 300)$ = 6 600 €

$E(0, 400)$ → Beneficio $B(0, 400)$ =5 600 €



Por tanto, el máximo beneficio es con x **= 200** lotes de A e y **= 300** lotes de B siendo el beneficio de 6 600 €

Problema P2. (Números y álgebra)

Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y

a) Calcular la matriz $Y = A^2 + B \cdot B^t$ donde B^t es la matriz traspuesta de B.

b) Determinar la matriz X para que se verifique la ecuación $2\,A\,X = B$

Solución:

Problema de operación y ecuaciones matriciales.

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Sumando: $Y = A^2 + B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de $2AX = B$ multiplicando ambos miembros por la izquierda por la matriz $\frac{1}{2}A^{-1} \rightarrow$

$$X = \frac{1}{2}A^{-1} \cdot B$$

<u>Cálculo de A^{-1}:</u>

- determinante de A: $|A| = 3$ (tiene inversa pues es distinto de cero)
- traspuesta de A: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- adjunta de A^t: $(A^t)^{ad} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Inversa: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Cálculo de X multiplicando: $X = \frac{1}{2}A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{5/6} \\ \mathbf{-1/6} \end{pmatrix}$$

Problema P3. (Análisis)

El número de zancadas por minuto que realiza un corredor en su entrenamiento diario de 60 minutos viene dado por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 70 & si \ \ 0 \le x \le 40 \\ \dfrac{x^2}{10} - 11x + 350 & si \ \ 40 < x \le 60 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo de entrenamiento transcurrido, medido en minutos.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcular el momento en el que alcanza el número de zancadas mínimo. ¿Cuál es el número de zancadas mínimo?.

b) Representar gráficamente la función $f(x)$, justificando brevemente la representación gráfica obtenida.

Solución:

Problema de optimización e intervalos de crecimiento de funciones a trozos

a) Veamos primero la continuidad:

$$\lim_{x\to 40^-} f(x) = \lim_{x\to 40^-} 70 = 70$$

$$\lim_{x\to 40^+} f(x) = \lim_{x\to 40^+} \frac{x^2}{10} - 11x + 350 = 70$$

$$f(40) = 70$$

Como todos los valores son iguales la función es **continua**.

Calculemos la derivada (menos en x = 40 que no sabemos si es derivable)

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \ \ 0 \le x < 40 \\ \dfrac{x}{5} - 11 & si \ \ 40 < x \le 60 \end{cases}$$

Para ver la monotonía tenemos que ver cuando $f'(x) \begin{cases} > 0 & crece \\ = 0 & Posible\ punto\ relativo \\ < 0 & decrece \end{cases}$

$f'(x) = 0$ en el intervalo (0, 40) que es una recta paralela al eje OX y por tanto ni crece ni decrece y también cuando $\frac{x}{5} - 11 = 0$ → x = 55 que pertenece al intervalo (40, 60).

	Contante $f'(x) = 0$	decrece $f'(x) < 0$	crece $f'(x) > 0$
0	40	55	60

$f'(50) = -1 < 0$ (decrece) $f'(56) = 0.2 > 0$ (crece)

Por tanto tenemos que $f(x)$ crece en $x \in (55, 60)$; decrece en $x \in$ (40, 55); y constante en $x \in$(0, 40);

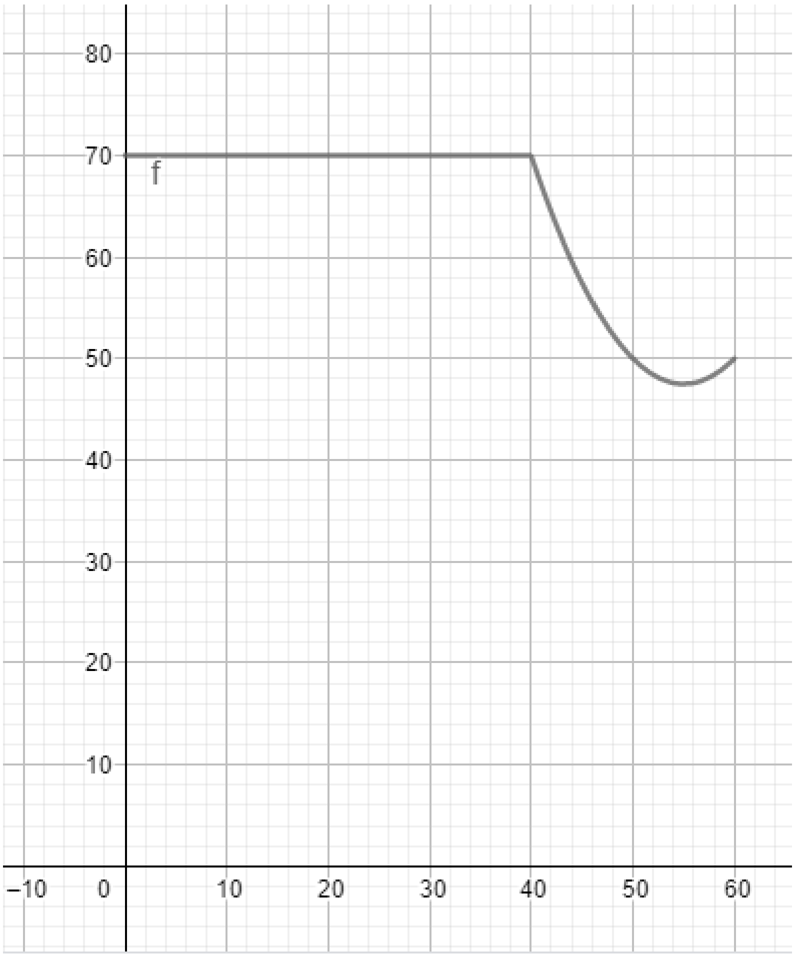
En $x = 55$ tenemos un mínimo relativo.

Autor: José Luis Lorente
www.apuntesmareaverde.org.es

Número de zancadas mínimo: al ser una función continua acotada tenemos que el mínimo ocurrirá en el único mínimo relativo → $\boldsymbol{x = 55}$ con un total de **47.5** zancadas/minuto

La gráfica es la de una función a trozos. Hasta $x = 40$ es constante (paralela al eje OX) de valor 70. Luego es una parábola con mínimo en (55, 47.5). Para hacer la gráfica mejor calculemos el valor de $f(60) = 50$

b) $f(60) = 50$.



Problema P4. (Análisis)

El beneficio neto anual B (en miles de euros) que las ventas de un producto generan a una empresa en función del gasto anual en publicidad x (en miles de euros) viene dado por la función:

$B(x) = -20x^2 + 1200x + a$, donde $x \in [0, \infty)$.

a) Hallar el valor de a sabiendo que un gasto en publicidad de 10 000 euros proporciona un beneficio neto de 10 millones de euros.

b) Para $a = 2\,000$, calcular el área delimitada por $B(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1].

Solución:

a) Se tiene que cumplir que B(x = 10) = 10 000. Sustituyendo:

10 000 + a = 10 000.

Por tanto, **a = 0**.

b) B(x) = - 20x^2 + 1200x +2000

Veamos el signo de B(x) en (0, 1): B(x) = 0 → x = 61.6 y x = -1.6, por tanto el signo en (0, 1) es constante y positivo (pues B(0) = 2000)

De esta forma el área es la integral definida:

$$A = \int_0^1 dx(-20x^2 + 1200x + 2000) = \left[-\frac{20}{3}x^3 + 600x^2 + 2000x\right]_0^1 = 2593.333\, u^2$$

$$\boldsymbol{A = 2\,593.333\, u^2}$$

Problema P5. (Estadística y probabilidad)

Una empresa destinada a la comercialización de cápsulas de café realiza un estudio de mercado entre un grupo de personas donde el 60 % son hombres y el 40 % restante son mujeres. La empresa comprueba que el 55 % de los hombres prefieren cápsulas de café capuchino, porcentaje que se eleva al 80 % en el caso de las mujeres.

a) Calcular la probabilidad de elegir una persona de ese grupo que resulte ser hombre y que prefiera cápsulas de café capuchino.

b) ¿Con qué probabilidad una persona elegida al azar de ese grupo prefiere cápsulas de café capuchino

Solución:

Trabajaremos con tablas de contingencia o de doble entrada. Como nos dan porcentajes supondremos N personas en la empresa.

Hombres = 0.6·N   y mujeres = 0.4·N

Hombres y Capuchino = 0.55 · 0.6 = 0.33·N

Mujeres y Capuchino = 0.8·0.4·N = 0.32·N

	Capuchino	No Capuchino	Total
Hombres	0.33 N		0.6 N
Mujeres	0.32 N		0.4 N
Total			N

Completamos la tabla:

	Capuchino	No Capuchino	Total
Hombres	0.33 N	0.27 N	0.6 N
Mujeres	0.32 N	0.8 N	0.4 N
Total	0.65 N	0.35 N	N

a) p$(Hombre \cap Capuchino) = \frac{0.33N}{N} = 0.33$ (Laplace)

b) p$(Capuchino) = \frac{0.65N}{N} = 0.65$ (Laplace)

Problema P6. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que tarda un auditor en revisar un expediente se ajusta a una distribución normal con media 30 minutos y desviación típica de 10 minutos. Si al principio de una semana se le entregan 75 expedientes:

a) Calcular la probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes si en esa semana el auditor trabaja 35 horas (2100 minutos).

b) Calcular la probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos.

Solución:

a) X = "tiempo en revisar expediente en minutos" → B(μ=30, σ=10)

Y = "tiempo 75 expedientes" =75·x → B(μ = 75·30, σ = 75·10) = B(μ = 2250, σ = 750)

Tipificación Z = $\frac{Y-2250}{750}$ → B(0,¨1) (para poder mirar en las tablas de distribución normal estándar)

p(y < 2100) = p(z < $\frac{2100-2250}{750}$) $= p(z < -0.2) = 1 - p(z < 2) = 1 - 0.5793 = 0.4207$

La probabilidad de que le dé tiempo a revisar los 75 expedientes es de $\mathbf{0.4207}$

b) p(28·75 < y < 33·75) = p(2100 < y < 2475) = p(-0.2 < z < 0.3) = p(z < 0.3) - p(z < -0.2) = 0.6179 - 0.4207 = 0.1972

La probabilidad de que el tiempo medio dedicado a revisar los 75 expedientes esté entre 28 y 33 minutos es de $\mathbf{0.1972}$

Cuestiones

C1. (Números y álgebra)

Añadir una ecuación al sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ de forma que el sistema resultante sea incompatible.

Solución:

Sumamos los dos miembros la de la izquierda: 2x y los de la derecha: 2. Si cambiamos el valor de 2 por otro número la ecuación será incompatible.

Ejemplo: $\mathbf{2x=0}$

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función f(x)=$\frac{x+1}{x^2-4}$?

Solución:

El denominador no puede anularse, luego x = 2 y x = -2 no son del dominio

$$Dom(f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

C3. (Estadística y probabilidad)

Sabiendo que la probabilidad de que un hombre llegue a los 70 años es 0.78 y la probabilidad de que una mujer llegue a los 70 años es 0.83, calcular razonadamente la probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años

Solución:

P(H > 70) = 0.78 y p(M > 70) = 0.83 → p(H > 70 ∩ M > 70) = p(H > 70) · p(M > 70) = 0.78 · 0.83 = 0.6474

Nota: Consideramos que ambas probabilidades son independientes

La probabilidad de que ambos lleguen a los 70 años es de $\mathbf{0.6474}$

	Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad **Castilla y León**	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES	**EXAMEN** **Nº páginas: 2** (tabla adicional)

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)
En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar.
Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

P2. (Números y álgebra)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x+y-az=1 \\ x+2y-2z=-2 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.
b) Resolver el sistema para $a = 1$.

P3. (Análisis)

Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & \text{si } x\le 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.
b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo (0, 1).

P4. (Análisis)

Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, "x", de acuerdo con la función $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento? (**hasta 1 punto**).

b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo [0, 7] ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará? (**hasta 2 puntos**).

P5. (Estadística y probabilidad)

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35 % de los hombres practica "spinning" así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar,

a) Calcular la probabilidad de que practique "spinning".

b) Si el socio elegido no practica "spinning", obtener la probabilidad de que sea una mujer.

P6. (Estadística y probabilidad)

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo?

C2. (Análisis)

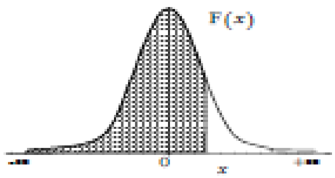
Dada la función $f(x) = ax - 33 + \frac{5}{x}$, determinar a para que verifique $f'(1) = 2$.

C3. (Estadística y probabilidad)

La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6.8 y desviación típica 1.1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9.

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

RESPUESTAS

Problema P.1 (Números y álgebra):

En una panadería hornean todos los días tartas y bizcochos que venden a 10 € y 6 €, respectivamente. Para fabricar una tarta se necesitan 400 gramos de harina y 200 de azúcar, mientras que para un bizcocho se utilizan 300 gramos de harina y 100 de azúcar. Los dueños de la panadería saben que diariamente tienen que hornear, al menos, 6 bizcochos. Para la producción de hoy de tartas y bizcochos se dispone de 6 kg de harina y 2.4 kg de azúcar. Utilizando técnicas de programación lineal, determinar la cantidad de cada uno de los productos que hay que hornear hoy para obtener los máximos ingresos.

Solución:

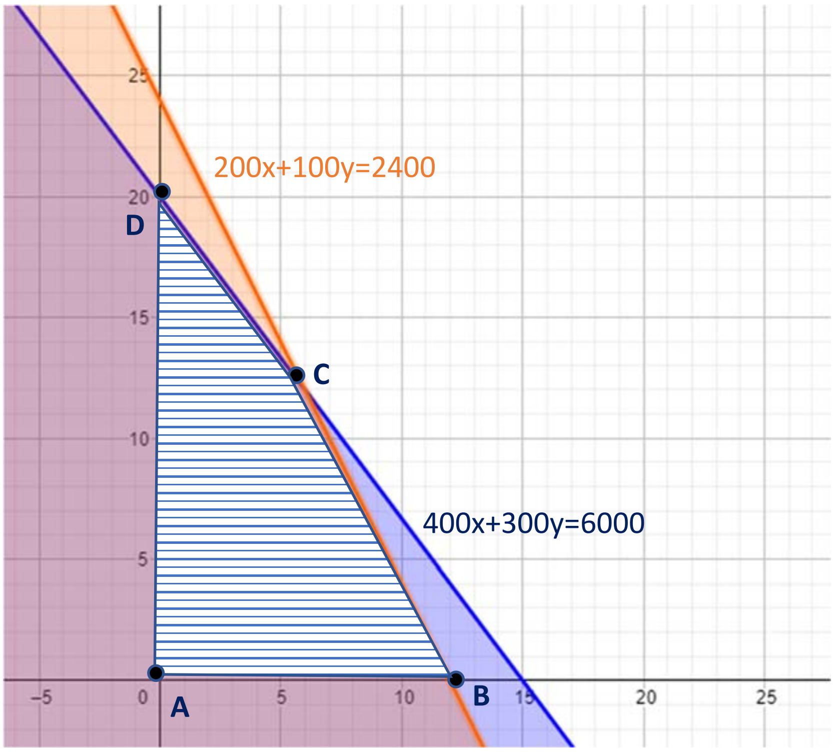
Se trata de un problema típico de programación lineal en dos dimensiones. Veamos las 2 variables: x = número de tartas; y = número de bizcochos.

<u>Condiciones de contorno (inecuaciones):</u>

(1) $x \geq 0$ e $y \geq 0$
(2) $400x + 300y \leq 6000$ (restricción a los kilos de harina)
(3) $200x + 100y \leq 2400$ (restricción a los kilos de azucar)

<u>Función a maximizar (Beneficio)</u>: $B(x, y) = 10x + 6y$

Representación región posible (rallada en azul):



Vértices del polígono:

- $A(0, 0)$
- $B(12, 0)$

- C(6,12): solución de $\left.\begin{matrix} 200x + 100y = 2400 \\ 400x + 300y = 6000 \end{matrix}\right\}$ Resolviendo x = 6, y = 12
- D(0, 20)

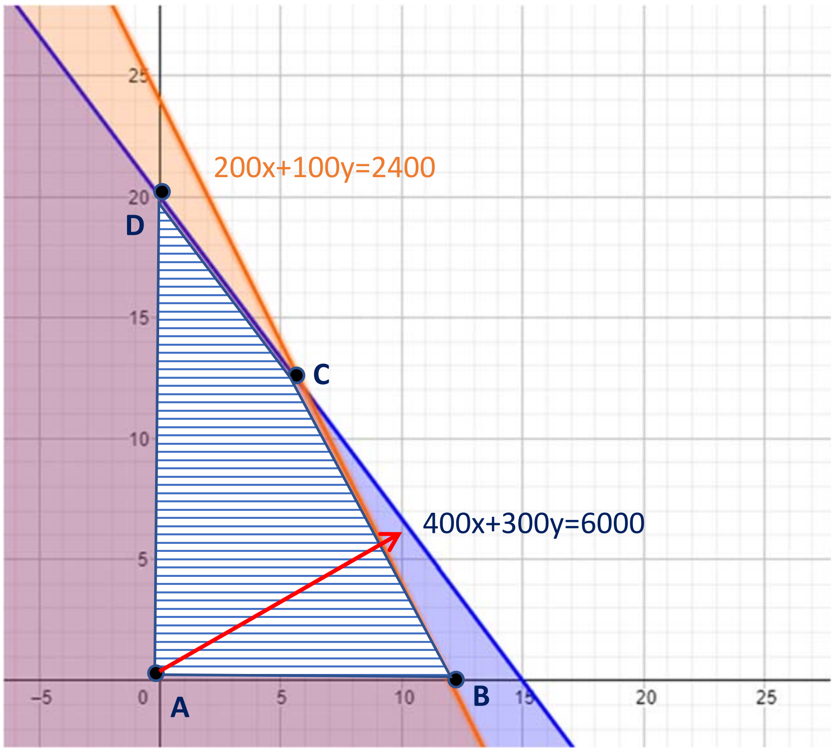
Representación máxima variación función beneficio: vector $\vec{v} = (10,6)$ y las rectas perpendiculares son rectas con mismo beneficio

A(0, 0) → Beneficio B(0, 0) = 0 €

B(12, 0) → Beneficio B(12, 0) = 120 €

C(6, 12) → Beneficio B(6, 12) = 132 €

D(0, 20) → Beneficio B(0, 20) = 120 €



Por tanto, el máximo beneficio es con $\boldsymbol{x}$ **= 6** tartas e $\boldsymbol{y}$ **= 12** bizcochos siendo el beneficio de **132 €**.

Problema P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1 \\ x+y-az=1 \\ x+2y-2z=-2 \end{array}\right\}$$

a) Clasificar el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para a = 1.

Solución:

problema típico de sistemas

a) Estudiemos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada para poder utilizar el teorema de Rouché–Frobenius.

Rango de A

$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -a\\ 1 & 2 & -2\end{pmatrix} \rightarrow$ $|A|$ = 4a - 5; se cumple que 4a – 5 = 0 si a = 5/4

- Si a ≠ 5/4 entonces $|A|$ ≠ 0 y por tanto $rang(A)$ = 3
- Si a = 5/4 entonces $|A|$ = 0 y por tanto $rang(A)$ =2 (ya que $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$)

Rango de A^*

$$A^*=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -a & 1\\ 1 & 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

- Si a ≠ 5/4 entonces $|A|$ ≠ 0 y por tanto $rang(A^*)$ = 3
- Si a = 5/4 → $\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-9\neq 0$ por tanto también $rang(A^*)$ = 3

Utilizando ***Teorema de Rouché–Frobenius***

	a = 5/4	A ≠ 5/4
$Rang(A)$	2	3
$Rang(A^*)$	3	3
Clasificación	**Sistema Incompatible**	**S. Compatible determinado**

b) Si a = 1 el sistema es como hemos visto compatible determinado

$$\left.\begin{array}{rr}(1) & x-2y+z=1\\ (2) & x+y-z=1\\ (3) & x+2y-2z=-2\end{array}\right\}$$

Podemos resolverlo por Gauss, por Cramer o eliminando una incógnita que es lo que vamos a realizar:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\text{-}(3) \rightarrow -4y+3z=3\\ (1)\text{-}(2) \rightarrow -3y+2z=0\end{array}\right\}$$

Sistema con 2 ecuaciones e incógnitas que podemos resolver por método de reducción obteniendo y = 6, z = 9. Sustituyendo estos dos valores en alguna de las 3 ecuaciones tenemos que x = 4.

Solución: **x = 4, y = 6, z = 9**

Problema P3. (Análisis)

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si\ x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de b para que $f(x)$ sea continua.

b) Calcular el área delimitada por $f(x)$ y el eje OX en el intervalo (0, 1).

Solución:

problema típico de continuidad e integración

a) La expresión 4 - x^2 es continua en todos los reales y por tanto también en (-∞, 1] y la expresión b/x no es continua en x = 0 y por tanto si lo es en su intervalo de definición (1, ∞)

El único sitio donde puede no ser continua es en x = 1 donde la función cambia de expresión. Apliquemos las condiciones de continuidad en x = 1

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4 - x^2 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{b}{x} = b$$

$f(1)$ = 3

Para que sea continua los tres valores han de ser iguales, por tanto, $\boldsymbol{b}$ **= 3**

b) En el intervalo (0, 1) la expresión correspondiente es $f(x)$ = 4 - x^2. Esta expresión es positiva en el intervalo (-2, 2) y por tanto también lo es en (0, 1). De esta manera el área es la integral definida siguiente:

$$\boldsymbol{A} = \int_0^1 (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{11}{3} u^2}$$

Problema P4. Análisis:

Los estatutos de una asociación ecologista establecen que la asociación debe disolverse cuando supere los 100 socios. Se sabe, además, que el número de sus socios varía con los años transcurridos desde su fundación, "x", de acuerdo con la función siguiente: $N(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 64$.

a) ¿Cuántos han sido los socios fundadores? Transcurridos 7 años, ¿cuántos socios habrá? ¿Se disolverá la sociedad en ese momento? (hasta 1 punto).

b) Estudiar el comportamiento (crecimiento, decrecimiento) del número de socios en el intervalo [0, 7] ¿cuál será el número mínimo de socios y cuándo se alcanzará? (hasta 2 puntos)

Solución:

a) Los socios fundadores son los que hay en el comienzo de la asociación, es decir cuando $x = 0$. Sustituyendo $x = 0$ en la expresión tenemos $N(0)$ = **64 socios fundadores**.

En 7 años se cumple que hay $N(7) = 7^3 - 9 \cdot 7^2 + 24 \cdot 7 + 64 = 134 > 100$. Se disuelve cuando haya más de 100, por lo tanto, a los 7 años ya no estará, veamos si lo hace antes. Podemos ver los socios los años anteriores y ver si hay más de 100 antes del séptimo año.

X	1	2	3	4	5	6	7
$N(x)$	80	84	82	80	84	100	134

El primer año que lo supera 100 socios es el séptimo que es cuando se disuelve

b) Estudiemos la monotonía a partir de la derivada de $N(x)$

$N'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \rightarrow N'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{6} = \begin{matrix} x = 4 \\ x = 2 \end{matrix}$

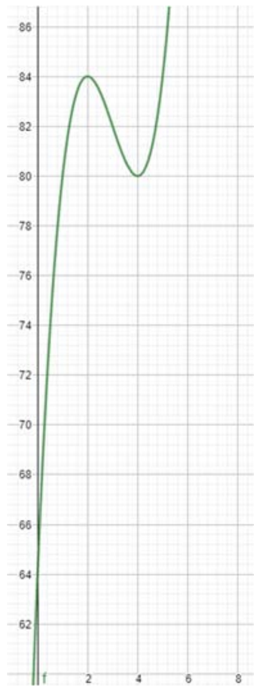
Veamos cuando $N'(x)) \begin{cases} > 0 & crece \\ = 0 & posible\ Punto\ relativo \\ < 0 & decrece \end{cases}$

	Crece	decrece	crece	
	$N'(x) > 0$	$N'(x) < 0$	$N'(x) > 0$	
0	2	4		7

Crecimiento de $N(x)$ en (0, 2) ∪ (4, 7) y decrecimiento en (2, 4)

Máximo relativo en (2, 84) y mínimo relativo en (4, 80)

Dado que la función es continua los máximos y mínimos absolutos se producen en los puntos relativos o en los extremos de los intervalos de definición de la función, en nuestro caso $N(0) = 64$ y $N(7) = 134$. Como estos valores son mayores que los ocurridos en 2 y en 4 estos son los máximos y mínimos absolutos.



Conclusión el mínimo número de socios es de 64 en el año 0 (fundación)

Problema P5. Estadística y probabilidad:

En un gimnasio, el 52 % de los socios son hombres y el resto son mujeres. Entre los socios, el 35% de los hombres practica "spinning" así como el 60 % de las mujeres. Si elegimos un socio al azar, a) Calcular la probabilidad de que practique "spinning". b) Si el socio elegido no practica "spinning", obtener la probabilidad de que sea una mujer.

Solución:

se puede hacer mediante diagrama de árbol y teorema de Bayes o por tablas de contingencia o de doble entrada, elegimos este segundo método

Si hay N usuarios en el gimnasio se cumple que

Nº de hombres = **0.52** N   y nº de mujeres = **0.48** N

Nº de hombres que hacen spining = **0.35** · 0.52N = 0.182 N

Nº de mujeres que hacen spining = **0.60** · 0.48N = 0.288 N

	spinning	No spinning	Total
Hombres	0.182 N	0.338 N	**0.52 N**
Mujeres	0.288 N	0.192 N	**0.48 N**
Total	0.47 N	0.53 N	N

Con esta tabla es ya muy fácil calcular cualquier probabilidad usando **Laplace**:

a) P("spining") = $\frac{0.47N}{N} = \mathbf{0.47}$
b) P("mujer"/"no sping") = $\frac{0.192N}{0.53N} = \mathbf{0.362}$

Problema P6. Estadística y probabilidad:

El peso de la población adulta con sobrepeso sigue una distribución normal de media 120 kg y desviación típica de 20 kg. Además, a los individuos con un peso superior a 150 kg se les considera "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A".

a) ¿Qué porcentaje de la población de adultos con sobrepeso son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A"?

b) Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, calcular la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg

Solución:

problema de distribución normal

x = "peso población adulta con sobrepeso" → $N(\mu = 120, \sigma = 20)$

Tipificación $z = \frac{x-120}{20}$ → $N(0, 1)$

a) $p(x > 150) = p(z > (150 - 120)/20) = p(z > 1.5) = 1 - p(z < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$ → 6.68 %

El porcentaje de la población de adultos con sobrepeso que son "individuos con riesgo de desarrollar la enfermedad coronaria A" es del **6.68 %**.

b) y = "media de peso muestra 20" → $N(\mu = 120, \sigma = \frac{20}{\sqrt{20}}) = N(\mu = 120, \sigma = 4.47)$

$p(110 < y < 125) = p(\frac{110-120}{4.47} < z < \frac{125-120}{4.47}) = p(-2.23 < z < 1.12) = p(z < 1.12) - (1 - p(z < 2.23) =$

$0.8686 - (1 - 0.9871) = 0.8557$

Si se elige aleatoriamente una muestra de 20 adultos con sobrepeso, la probabilidad de que la media del peso de la muestra esté entre 110 kg y 125 kg es de **0.8557**.

C1. (Números y álgebra)

Un hijo tiene 22 años menos que su padre y la suma de sus edades es 46 años ¿qué edad tiene el hijo

Solución

x = edad hijo e y = edad padre → $\left.\begin{array}{r} x+22=y \\ x+y=46 \end{array}\right\}$ x + (x + 22) = 46 → 2x = 24 → x = 12 años el hijo

El hijo tiene **12** años.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = ax - 33 + 5/x$, determinar a para que verifique $f'(1) = 2$

Solución

Derivamos $f'(x) = a - 5/x^2$ → $f'(1) = a - 5 = 2$ → $a = 7$

$\boldsymbol{a = 7}$

C3. (Estadística y probabilidad)

La nota media de los alumnos de segundo de bachillerato de cierto instituto sigue una distribución normal de media 6.8 y desviación típica 1.1. Calcular la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9

Solución

x = "nota media" → $N(\mu = 6.8, \sigma = 1.1)$

$z = \frac{x-6.8}{1.1}$ → $N(1, 0)$ (tipificación)

$p(x > 9) = p\left(z > \frac{9-6.8}{1.1}\right) = p(z > 2) = 0.9772$

La probabilidad de que un alumno haya obtenido más de un 9 es de **0.9772**.

Autor: José Luis Lorente
www.apuntesmareaverde.org.es