Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2021 Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Problema 1:

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\left.\begin{array}{r} 3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$.

Problema 2:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

$b)$ Para $x=2$, resuelve la ecuación matricial: $AX-B=C$.

Problema 3:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que:

$A' \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Problema 4:

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40 euros, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 con un beneficio de 100 euros. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones. Calcular, justificando la respuesta:

$a)$ El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos.

$b)$ El valor de dichos beneficios máximos.

Problema 5:

El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizando (en gramos por metro cuadrado) utiliza, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \ \ (0 \leq x \leq 4).$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Problema 6:

Las ventas de un producto (en miles de euros), $V(t)$, en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \ \ (0 \leq t \leq 6).$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

$a)$ Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años.

$b)$ Representar gráficamente la función $V(t)$.

Problema 7:

$a)$ Determinar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)}$.

Problema 8:

Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50 %), mármol (40 %) y artificial (10 %). El 10 % del granito, el 5 % del mármol y el 1 % de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas.

$b)$ Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol.

Problema 9:

En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95 % para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

Problema 10:

La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1,2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionar para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.

RESPUESTAS

Problema 1:

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifiquen el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\left.\begin{array}{r} 3X+2Y=\begin{pmatrix}2 & 3\\-2 & 5\end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix}-3 & 2\\-10 & 12\end{pmatrix}\end{array}\right\}$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 3X+2Y=\begin{pmatrix}2 & 3\\-2 & 5\end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix}-3 & 2\\-10 & 12\end{pmatrix}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 9X+6Y=\begin{pmatrix}6 & 9\\-6 & 15\end{pmatrix} \\ 4X-6Y=\begin{pmatrix}-6 & 4\\-20 & 24\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 13X=\begin{pmatrix}0 & 13\\-26 & 39\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\\mathbf{-2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 6X+4Y=\begin{pmatrix}4 & 6\\-4 & 10\end{pmatrix} \\ -6X+9Y=\begin{pmatrix}9 & -6\\30 & -36\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 13y=\begin{pmatrix}13 & 0\\26 & -26\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{2} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}}.$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

Problema 2:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&x&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\\5&-6\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&0\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A.

$b)$ Para $x=2$, resuelve la ecuación matricial: $AX-B=C$.

Solución:

$a)$ Una matriz no es invertible cuando su determinante es cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&x&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=0;\ \ x-1=0\Rightarrow x=1.$$

$\underline{La\ matriz\ A\ no\ tiene\ inversa\ para\ \boldsymbol{x=1}}.$

$b)$ $A\cdot X-B=C;\ \ A\cdot X=B+C;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(B+C);.I\cdot X=A^{-1}\cdot(B+C)\Rightarrow$

$\underline{X=A^{-1}\cdot(B+C)}.$

Para $x=2$ es $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&1&0&0&1\\0&2&-1&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2\to -F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&-1\\0&2&-1&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-2F_2\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0&-1\\0&0&1&0&1&2\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2+F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\\5&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&0\end{pmatrix}\right]==\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2\\-1&5\\8&-6\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-2}\\\mathbf{7}&\mathbf{-1}\\\mathbf{15}&\mathbf{-7}\end{pmatrix}}.$$

Problema 3:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ y & -3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -8\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que:

$A' \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución:

$$A' \cdot B = C - z \cdot I \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 1\\ y & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -8\end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2x+4y & x-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z & 1\\ 0 & -8-z\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}-2=-z\\ -2x+4y=0\\ x-12=-8-z\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}2=z\\ x-2y=0\\ x+z=4\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{x=2;\ \ y=1;\ \ z=2.}}$$

Problema 4:

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40 euros, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 con un beneficio de 100 euros. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones. Calcular, justificando la respuesta:

$a)$ El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos.

$b)$ El valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

$a)$ Sean x e y el número de butacas y sillones que se fabrican diariamente en el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 2x + 4y \le 100 \\ x \le 40;\ y \le 20 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x + 2y \le 50 \\ x \le 40;\ y \le 20 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow x + 2y \le 50 \Rightarrow y \le \frac{50-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	50	0
y	0	25

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

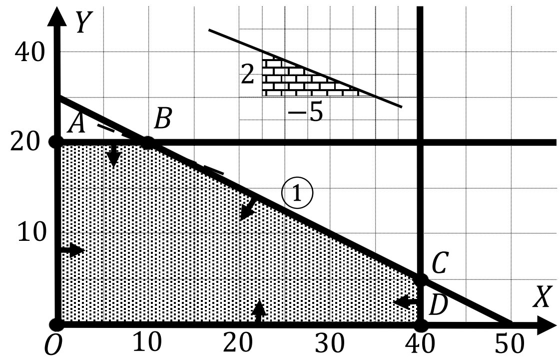
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 50 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 10 \Rightarrow B(10,20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 50 \\ x = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow 40 + 2y = 50;$

$2y = 10;\ \ y = 5 \Rightarrow C(40,5).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 40 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(40,0).$



La función de objetivos es $f(x,y) = 40x + 100y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,20) = 40 \cdot 0 + 100 \cdot 20 = 0 + 2.000 = 2\,000.$

$B \Rightarrow f(10,20) = 40 \cdot 10 + 100 \cdot 20 = 400 + 2.000 = 2\,400.$

$C \Rightarrow f(40,5) = 40 \cdot 40 + 100 \cdot 5 = 1.600 + 500 = 2\,100.$

$D \Rightarrow f(40,0) = 40 \cdot 40 + 100 \cdot 0 = 1.600 + 0 = 1\,600.$

El valor máximo se produce en el punto $B(10,20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 40x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{40}{100}x = -\frac{2}{5}x \Rightarrow m = -\frac{2}{5}.$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ fabricando\ \mathbf{10\ butacas\ y\ 20\ sillones}}.$

$b)\ \underline{El\ máximo\ beneficio\ es\ de\ \mathbf{2\,400\ euros}}.$

Problema 5:

El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, $C(x)$, en función de la cantidad de fertilizando (en gramos por metro cuadrado) utiliza, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \ \ (0 \le x \le 4).$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Solución:

Por crecer 8 cm con una dosis de 3 gramos es $C(3) = 8$:

$C(3) = 2 \cdot 3^3 - A \cdot 3^2 + B \cdot 3 + 35 = 8; \ \ 54 - 9A + 3B + 35 = 8;$

$-9A + 3B = 8 - 89; \ -9A + 3B = -81; \ -3A + B = -27.$ (1)

La condición necesaria para que una función polinómica tenga un mínimo es que se anule su primera derivada y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$C'(x) = 6x^2 - 2Ax + B.$ $\qquad C''(x) = 12x - 2A.$

$C'(3) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 3^2 - 2A \cdot 3 + B = 0; \ \ -6A + B = -54.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} -3A + B = -27 \\ -6A + B = -54 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3A + B = -27 \\ 6A - B = 54 \end{array}\right\} \Rightarrow 3A = 27;$$

$$\underline{\boldsymbol{A = 9}}.$$

$-6A + B = -54; \ \ B = -54 + 6A = -54 + 6 \cdot 9 = -54 + 54 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{B = 0}}.$$

Para justificar que se trata de un mínimo para los valores hallados se comprueba que para $x = 3$ y $A = 9$ la segunda derivada es positiva:

$C''(3) = 12 \cdot 3 - 2 \cdot 9 = 36 - 18 = 18 > 0 \Rightarrow Mín. \ c.q.j.$

Problema 6:

Las ventas de un producto (en miles de euros), $V(t)$, en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \ \ (0 \leq t \leq 6).$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años.

b) Representar gráficamente la función $V(t)$.

Solución:

a) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$V'(t) = 12t^2 - 48t + 36.$

$V'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 48t + 36 = 0; \ \ t^2 - 4t + 3 = 0; \ \ t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3.$

Por ser $V'(t)$ una función polinómica sus raíces dividen su dominio en los intervalos $(0,1), (1,3)\ y\ (3,6)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 2 \in (1,3)$ es:

$V'(2) = 12 \cdot 2^2 - 48 \cdot 2 + 36 = 48 - 96 + 36 = -12 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

$$\underline{Crecimiento: V'(t) > 0 \Rightarrow t\epsilon(\mathbf{0},\mathbf{1}) \cup (\mathbf{3},\mathbf{6})}.$$

$$\underline{Decrecimiento: V'(t) < 0 \Rightarrow t\epsilon(\mathbf{1},\mathbf{3})}.$$

También se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento teniendo en cuenta que la derivada es la función cuadrática $V'(t) = 12t^2 - 48t + 36$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de t^2, por lo cual la función derivada es positiva (creciente) para $t \in (0,1) \cup (3,6)$ y negativa (decreciente) para $t\epsilon(1,3)$.

b) Para representar gráficamente la función $V(t)$ se determinan sus extremos relativos y su punto de inflexión.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$V'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$V''(t) = 24t - 48.$

$V''(1) = 24 \cdot 1 - 48 = -24 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$

$V(1) = 4 \cdot 1^3 - 24 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 + 100 = 4 - 24 + 36 + 100 = 140 - 24 = 116 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{Máx.\ A(1, 116)}.$$

$V''(3) = 24 \cdot 3 - 48 = 24 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 3.$

$V(3) = 4 \cdot 3^3 - 24 \cdot 3^2 + 36 \cdot 3 + 100 = 108 - 216 + 108 + 100 = 316 - 216 = 100 \Rightarrow$

$\boldsymbol{Mín. B(3, 100).}$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero su tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$V''(t) = 0 \Rightarrow 24t - 48 = 0;\ \ t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2.$

$V'''(t) = 24 \neq 0 \Rightarrow Punto\ de\ inflexión\ para\ x = 2.$

$V(2) = 4 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 + 100 =$

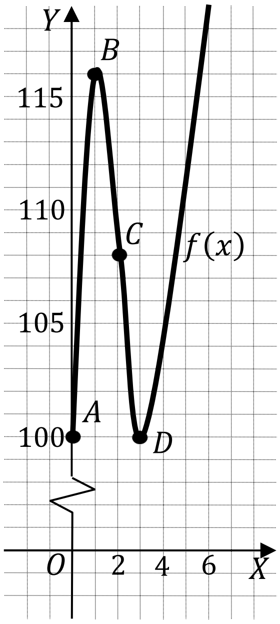
$= 32 - 96 + 72 + 100 = 204 - 96 = 108 \Rightarrow$

$\Rightarrow P.I.\ C(2, 108).$

Siendo $V(0) = 100 \Rightarrow D(0, 100).$

$V(6) = 4 \cdot 6^3 - 24 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 + 100 =$

$= 864 - 864 + 216 + 100 = 316 \Rightarrow E(3, 316).$



La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

Problema 7:

a) Determinar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)}$.

Solución:

a) La función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}.$$

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{2} + 6 = \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 6 = \frac{49-98+24}{4} = \frac{-25}{4} \Rightarrow V\left(\frac{7}{2}, -\frac{25}{4}\right).$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con el eje X son los siguientes:

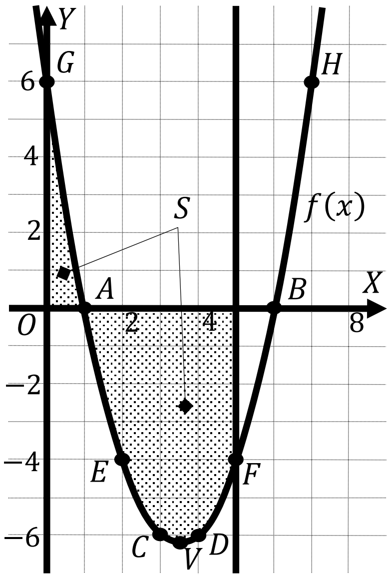
$$x^2 - 7x + 6 = 0;\ \ x = \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{7\pm5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow A(1,0) \\ x_2 = 6 \Rightarrow B(6,0) \end{cases}.$$

Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$f(3) = f(4) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 6 = -6 \Rightarrow C(3,-6)\ y\ D(4,-6).$

$f(2) = f(5) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 6 = -4 \Rightarrow E(2,-4)\ y\ F(5,-4).$

$f(0) = f(7) = 6 \Rightarrow G(0,6)\ y\ H(7,6).$



De la observación de la figura se deduce el valor de la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx - \int_1^5 f(x) \cdot dx =$$

$$= [F(1) - F(0)] - [F(5) - F(1)] =$$

$$= F(1) - F(0) - F(5) + F(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2\,F(1) - F(0) - F(5). \quad (*)$$

Siendo $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^2 - 7x + 6) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x$, sustituyendo en (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} - \frac{7\cdot1^2}{2} + 6 \cdot 1\right) - 0 - \left(\frac{5^3}{3} - \frac{7\cdot5^2}{2} + 6 \cdot 5\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - 7 + 12 - \frac{125}{3} + \frac{175}{2} - 30 = -\frac{123}{3} - 25 + \frac{175}{2} = \frac{-246 - 150 + 525}{6} = \frac{525 - 396}{6} = \frac{129}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{43}{2}\,u^2 = 21.5\,u^2}}.$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x^2+1}{2(x^2-7x+6)} = 2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{y = 2 \text{ es asíntota horizontal}}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$2(x^2 - 7x + 6) = 0; \;\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 6.$

$$\underline{\boldsymbol{\text{Las rectas } x = 1 \text{ y } x = 6 \text{ son asíntotas verticales}}}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

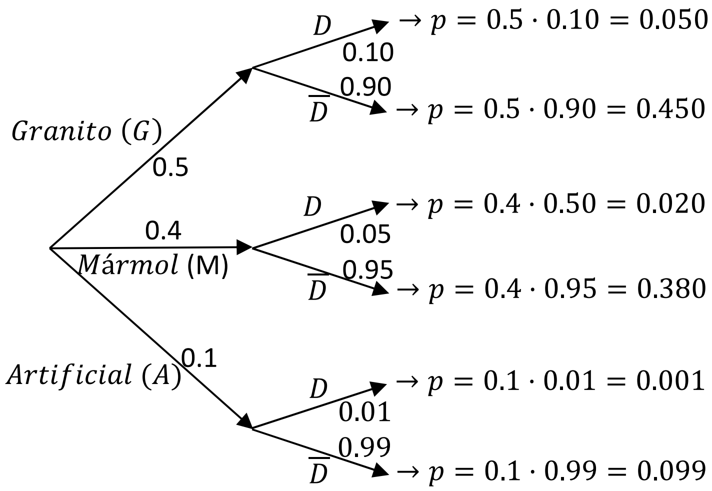
Problema 8:

Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50 %), mármol (40 %) y artificial (10 %). El 10 % del granito, el 5 % del mármol y el 1 % de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas.

b) Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol.

Solución:



a) $\quad P = P(D) = P(G \cap D) + P(M \cap D) + P(A \cap D) =$

$= P(G) \cdot P(D/G) + P(M) \cdot P(D/M) + P(D) \cdot P(D/A) =$

$= 0.5 \cdot 0.10 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.050 + 0.020 + 0.001 = \underline{0.071}$.

La probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas es de **0.071**.

b) $P = P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{P(M) \cdot P(D/M)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.071} = \frac{0.020}{0.071} = \underline{0.2817}$.

La probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol es de **0.2817**.

Problema 9:

En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95 % para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 %;

$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1 - 0.025 = 0.9750 \ \rightarrow z = 1.96).$

Datos: $n = 150;\ \ p = \frac{120}{150} = 0.8;\ \ q = 1 - 0.8 = 0.2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96.$

La fórmula que da el intervalo de confianza en función de p, q y n, es la siguiente:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right).$$

$$\left(0.8 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{150}};\ 0.8 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{150}}\right);$$

$(0.8 - 1.96 \cdot 0.0327;\ 0.8 + 1.96 \cdot 0.0327);\ \ (0.8 - 0.0640;\ 0.8 + 0.0640).$

$$\underline{I.C._{95\ \%} = (\mathbf{0.7360};\ \mathbf{0.8640})}.$$

Problema 10:

La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1.2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionar para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0.95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0.95=0.05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$

$(1-0.025=0.9750 \;\rightarrow z=1.96).$

Datos: $\sigma=1.2;\;\; E=\frac{0.5}{2}=0.25;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96.$

Sabiendo que $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E};\;\; n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1.96\cdot\frac{1.2}{0.25}\right)^2=$

$=(1.96\cdot 4.8)^2=9.408^2=88.51.$

$\underline{\textit{Deben seleccionarse } \mathbf{89} \textit{ candidatos}}.$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

Problema 1:

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A\cdot X-B^t=2C$, con B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Problema 2:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & x & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x=2$.

Problema 3:

Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases}x+y+z=6\\ 2x-3y+z=-1\\ -3x+2y-z=-2\end{cases}$.

Problema 4:

Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m^2 de tela de forro y 3 m^2 de tela de paño y una cazadora requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 euros y en cada cazadora 70 euros, calcular, justificando las respuestas:

$a)$ El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios.

$b)$ El valor de dichos beneficios máximos.

Problema 5:

Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos de tiempo de crianza, x, viene dada por la función $G(x)=x^3-Ax^2+6Bx+2\ (1\le x\le 4)$. Determinar, justificando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

Problema 6:

El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x, de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \ \ (2 \le x \le 5).$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas.

Problema 7:

$a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$.

Problema 8:

En una fábrica de vidrios el 25 % de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1 % de las botellas grandes, el 2 % de las medianas y el 3 % de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

$a)$ Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

$b)$ Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.

Problema 9:

Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.

Problema 10:

Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene una distribución normal con desviación típica 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95 %, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.

RESPUESTAS

Problema 1:

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\\-1&4\end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $A\cdot X-B^t=2C$, con B^t es la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

$$A\cdot X-B^t=2C;\ \ A\cdot X=2C+B^t;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(2C+B^t);$$

$$I\cdot X=A^{-1}\cdot(2C+B^t)\Rightarrow$$

$$\underline{X=A^{-1}\cdot(2C+B^t).}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=2-1=1;\ \ A^t=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}}{1}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$$

$$2C+B^t=2\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&6&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&3&4\end{pmatrix}\Rightarrow 2C+B^t=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\2&9&0\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot(2C+B^t)=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-1\\2&9&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-11}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{20}&\mathbf{1}\end{pmatrix}.}$$

****

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

$a)$ Determinar para qué valores de x existe la inversa de A.

$b)$ Calcular la inversa de A para $x = 2$.

Solución:

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 4 + 3x = 0;\ \ 4x = 4 \Rightarrow x = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{1\}}.$$

$b)$

Para $x = 2$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

Problema 3:

Resolver, justificando la respuesta, el sistema: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-3y+z=-1 \\ -3x+2y-z=-2 \end{cases}$.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3+4-3-9-2+2=-5\neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ de\ incógnitas.$$

$$\underline{Según\ el\ teorema\ de\ Rouché-Fröbenios \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{18-2-2-6-12-1}{-5}=\frac{-5}{-5}=1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{1-4-18-3+2+12}{-5}=\frac{-10}{-5}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{6+24+3-54+2+4}{-5}=\frac{-15}{-5}=3.$$

$$\underline{Solución: x=1, y=2, z=3.}$$

****

Problema 4:

Un taller de confección fabrica abrigos y cazadoras. Para ello dispone semanalmente de 80 m^2 de tela de forro y 120 m^2 de tela de paño. Un abrigo requiere 1 m^2 de tela de forro y 3 m^2 de tela de paño y una cazadora requiere 2 m^2 de cada una de las telas. Si en cada abrigo gana 80 euros y en cada cazadora 70 euros, calcular, justificando las respuestas:

a) El número de abrigos y de cazadoras que debe confeccionar semanalmente para hacer máximos los beneficios.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

a)

Sean x e y el número de abrigos y cazadoras que se confeccionan semanalmente en el taller, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+2y\leq 80 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$.

$(1) \Rightarrow x+2y\leq 80 \Rightarrow y\leq \frac{80-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

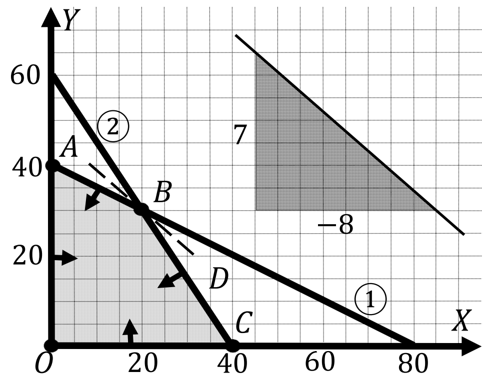
x	0	80
y	40	0

$(2) \Rightarrow 3x+2y\leq 120 \Rightarrow y\leq \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	60	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=80 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=40 \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=40;\ \ x=20;\ \ 20+2y=80;\ \ 2y=60 \Rightarrow y=30 \Rightarrow B(20,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=120;\ \ x=40 \Rightarrow C(40,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=80x+70y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40)=80\cdot 0+70\cdot 40=0+2\,800=2\,800.$

$B \Rightarrow f(20,30)=80\cdot 20+70\cdot 30=1\,600+2\,100=3\,700.$

$C \Rightarrow f(40,0) = 80 \cdot 40 + 70 \cdot 0 = 3\,200 + 0 = 3\,200.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20,40)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 80x + 70y = 0 \Rightarrow y = -\frac{80}{70}x = -\frac{8}{7}x \Rightarrow m = -\frac{8}{7}.$

$\underline{Los\ beneficios\ son\ \boldsymbol{máximos}\ confeccionando\ \boldsymbol{20\ abrigos\ y\ 30\ cazadoras}}.$

$b)$

$\underline{Los\ máximos\ beneficios\ son\ de\ \boldsymbol{3\,700\ euros}}.$

****

Problema 5:

Un determinado vino tiene un tiempo de crianza en bodega de entre 1 y 4 años. La graduación del vino, $G(x)$, en términos de tiempo de crianza, x, viene dada por la función $G(x) = x^3 - Ax^2 + 6Bx + 2 \ (1 \leq x \leq 4)$. Determinar, justificando las respuestas, las constantes A y B sabiendo que la máxima graduación se consigue exactamente a los 2 años, edad en que el vino alcanza los 22 grados.

Solución:

Por alcanzar a los 2 años la graduación de 22 grados es $G(2) = 22$.

$G(2) = 22 \Rightarrow 2^3 - A \cdot 2^2 + 6B \cdot 2 + 2 = 22; \ \ 8 - 4A + 12B + 2 = 22;$

$-4A + 12B = 12; \ -A + 3B = 3.$ (1)

Por alcanzar la máxima graduación a los dos años es $G'(2) = 0$.

$G'(x) = 3x^2 - 2Ax + 6B.$

$G'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 - 2A \cdot 2 + 6B = 0; \ \ 12 - 4A + 6B = 0;$

$4A - 6B = 12; \ \ 2A - 3B = 6.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$\left.\begin{array}{r} -A + 3B = 3 \\ 2A - 3B = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A = 9}. \quad -9 + 3B = 3; \ \ 3B = 12 \Rightarrow \underline{B = 4}.$

$$\underline{\boldsymbol{A = 9}}. \ \underline{\boldsymbol{B = 4}}.$$

****

Problema 6:

El diámetro de cierta variedad de manzana oscila entre los 2 y los 5 cm. El precio (en céntimos de euro), $P(x)$, que se paga al agricultor por un kilogramo de estas manzanas viene determinado por su diámetro, x, de acuerdo con la siguiente función:

$$P(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x + 30 \;\; (2 \leq x \leq 5).$$

Determinar para qué diámetros se alcanzan los precios máximo y mínimo de las manzanas. ¿Cuáles son estos precios máximo y mínimo? Razonar las respuestas.

Solución:

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$P'(x) = -6x^2 + 30x - 24$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 30x - 24 = 0;\;\; x^2 - 5x + 4 = 0;\;\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \notin D(P)\,, x_2 = 4 \Rightarrow \text{Solución: } x = 4.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$P''(x) = -12x + 30.$$

$$P''(4) = -12 \cdot 4 + 30 = -18 < 0 \Rightarrow \mathit{Máximo\ relativo\ para\ } x = 4.$$

$$P(4) = -2 \cdot 4^3 + 15 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 30 = -2 \cdot 64 + 15 \cdot 16 - 96 + 30 =$$

$$= -128 + 240 - 66 = 240 - 194 = 46.$$

$\underline{\mathit{El\ mayor\ precio\ se\ produce\ para\ un\ diámetro\ de\ } \mathbf{4\ cm}}.$

$\underline{\mathit{El\ precio\ máximo\ es\ de\ } \mathbf{0.46\ euros\ el\ kg}}.$

$$P(2) = -2 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 30 = -2 \cdot 8 + 15 \cdot 4 - 48 + 30 =$$

$$= -16 + 60 - 18 = 60 - 34 = 26.$$

$$P(5) = -2 \cdot 5^3 + 15 \cdot 5^2 - 24 \cdot 5 + 30 = -2 \cdot 125 + 15 \cdot 25 - 120 + 30 =$$

$$= -250 + 375 - 90 = 375 - 340 = 35.$$

$\underline{\mathit{El\ menor\ precio\ se\ produce\ para\ un\ diámetro\ de\ } \mathbf{2\ cm}}.$

$\underline{\mathit{El\ precio\ mínimo\ es\ de\ } \mathbf{0.26\ euros\ el\ kg}}.$

****

Problema 7:

$a)$ Determinar, razonando la respuesta, el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

$b)$ Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$.

Solución:

$a)$

La función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

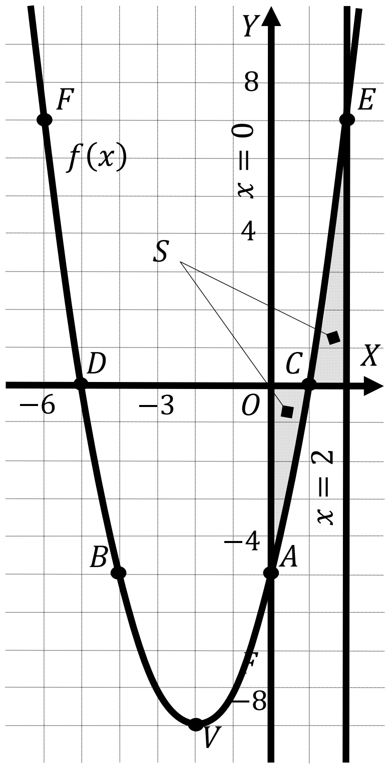
$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$.

$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 =$

$= 4 - 8 - 5 = -9 \Rightarrow V(-2, -9)$.

Otros puntos de la parábola son los siguientes:

$A(-5, 0), B(-4, -5), C(1, 0), D(-5, 0), E(2, 7)\ y\ F(-6, 7)$.



La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^2 f(x) \cdot dx = F(0) - F(1) + F(2) - F(1) =$$

$$= F(0) - 2F(1) + F(2).$$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^2 + 4x - 5) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 5x = \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x.$$

$$S = 0 - 2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) + \left(\frac{2^3}{3} + 2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} - 4 + 10 + \frac{8}{3} + 8 - 10 = 4 + \frac{6}{3} = 4 + 2 = 6.$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 6\ u^2}}.$$

$b)$

Las asíntotas de la función $g(x) = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ son las siguientes:

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+4x-5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{La\ recta\ \boldsymbol{y = 0}\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x^2 + 4x - 5 = 0;\ \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = -5, x_1 = 1.$

$\underline{Las\ rectas\ \boldsymbol{x = -5}\ y\ \boldsymbol{x = 1}\ son\ asíntotas\ verticales}.$

Asíntotas oblicuas:

$\underline{No\ tiene\ Asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$

****

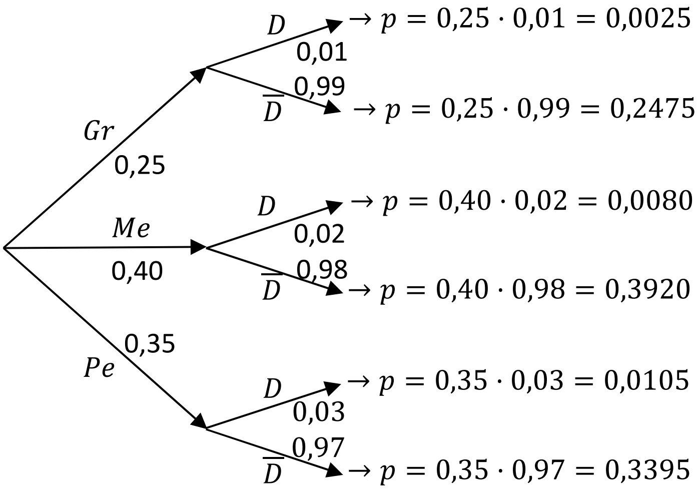
Problema 8:

En una fábrica de vidrios el 25 % de las botellas que se producen son grandes, el 40 % medianas y el resto pequeñas. En un control de calidad, se detecta que el 1 % de las botellas grandes, el 2 % de las medianas y el 3 % de las pequeñas son defectuosas. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea a la vez mediana y defectuosa.

b) Calcular la probabilidad de que una botella elegida al azar sea defectuosa.

Solución:



a)

$$P = P(Me \cap D) + P(Me) \cdot P(D/Me) = 0.40 \cdot 0.02 = \underline{0.0080}$$

$$\boldsymbol{P(Me \cap D) = \underline{0.0080}}$$

b)

$$P = P(D) = P(Gr \cap D) + P(Me \cap D) + P(Pe \cap D) =$$

$$= P(Gr) \cdot P(D/G) + P(Me) \cdot P(D/Me) + P(Pe) \cdot P(D/Pe) =$$

$$= 0.25 \cdot 0.01 + 0.40 \cdot 0.02 + 0.35 \cdot 0.03 = 0.0025 + 0.0080 + 0.0105 = \underline{0.0210}.$$

$$\boldsymbol{P(D) = \underline{0.0210}.}$$

****

Problema 9:

Se desea conocer la proporción de clientes que adquirirán un nuevo modelo de teléfono móvil. Para ello se realiza una encuesta a 300 potenciales clientes de los cuales 60 están interesados en dicho producto. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95 %, para la proporción de clientes interesados en el nuevo modelo de teléfono móvil. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0.95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0.95=0.05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96.$

$(1-0.025=0.9750 \;\rightarrow z=1.96).$

Datos: $n=300;\;\; p=\frac{60}{300}=0.2;\;\; q=1-0.2=0.8;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1.645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$\left(0.2-1.96\cdot\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{300}},\; 0.2+1.96\cdot\sqrt{\frac{0.2\cdot 0.8}{300}}\right);$

$(0.2-1.96\cdot 0.0231;\; 0.2+1.96\cdot 0.0231);\;\; (0.2-0.0453,\; 0.2+0.0453).$

$\boldsymbol{I.C._{95\,\%}=(0.1547,\; 0.2453).}$

****

Problema 10:

Con objeto de adquirir los embalajes en una panadería, se realiza un estudio sobre la longitud de las barras de pan. Se sabe que dicha variable tiene una distribución normal con desviación típica 3 cm. ¿Cuántas barras de pan deben ser tomadas para el estudio si se desea obtener un intervalo de confianza para la longitud media de las barras, al nivel de confianza del 95 %, con una amplitud de 1 cm? Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha = 0.95 \; \rightarrow \; \alpha = 1-0.95 = 0.05 \; \rightarrow \; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96.$

$(1-0.025 = 0.9750 \; \rightarrow z = 1.96).$

Datos: $\sigma = 3;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96;\; E = \frac{1}{2} = 0.5.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1.96 \cdot \frac{3}{0.5}\right)^2 =$

$= (1.96 \cdot 6)^2 = 11.76^2 = 138.30.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } \mathbf{139\ barras}}$

****