MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Ramón Podadera Sánchez

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

CRITERIOS DE CORRECCIÓN:

De los seis problemas planteados se han de contestar tres. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de las tres.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) ¿Cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste? (8 puntos)

b) ¿Cuál sería dicho coste mínimo? (2 puntos)

Problema 2:

En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de $62\,000$ euros. En la empresa hay trabajadores de 3 categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de $1\,000$ euros y el de los trabajadores de la categoría C de $2\,000$ euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un $4\,\%$ el salario de los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará un $10\,\%$ el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios el próximo mes será un $2\,\%$ inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa? (*Planteamiento correcto* 5 *puntos---Resolución correcta* 5 *puntos*)

Problema 3:

Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad total de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función:

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980. (2 puntos)

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos). (4 puntos)

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento. (4 puntos)

Problema 5:

Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0.4$, $P(B/A) = 0.25$ y $P(B^C) = 0.75$, se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué? (2.5 puntos)

b) Calcula $P(A \cup B)$. (2.5 puntos)

c) Calcula $P(A/B^C)$. (2.5 puntos)

d) Calcula$P(A^C \cup B^C)$ y $P(A^C \cap B^C)$. (2.5 puntos)

(A^C y B^C representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

Problema 6:

Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4.7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25% de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4.7 pulgadas y del 40 % de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4.7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas. (4 puntos)

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (3 puntos)

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas. (4 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros,

a) ¿Cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste?

b) ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos tipos de marcas de sacos (A y B), un objetivo (minimizar coste) y unas restricciones (el mínimo de piensos de origen animal y piensos de origen vegetal que necesitan nuestros animales).

Variables de decisión: Nos interesa saber qué combinación de compra de sacos de cada tipo de sacos hay que comprar **semanalmente** por lo que las variables de decisión serán:

$x -$ sacos de pienso de la marca A.

$y -$ sacos de pienso de la marca B.

Función objetivo: Queremos tener un coste mínimo. Como cada saco de A cuesta 12 euros si compramos x kilos gastamos $12x$. Cada saco de B cuesta 11 euros con los y sacos comprados gastamos $11y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$C(x, y) = 12x + 11y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0; \qquad y \geq 0$$

Como **cada animal** necesita **diariamente** 5 kilos de pienso de origen animal necesitamos de este tipo de pienso semanalmente y para 100 animales: $5 \cdot 7 \cdot 100 = 3500$ kg . Como el saco A tiene 7 kg de piensos de origen animal tenemos que si compramos x sacos: $7x$ mientras que el saco B tiene un 6 kg por lo que tendremos para y sacos: $6y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tienen que tomar nuestros animales:

$$7x + 6y \geq 3500$$

Como **cada animal** necesita **diariamente** 3 kilos de pienso de origen vegetal necesitamos de este tipo de pienso semanalmente y para 100 animales: $3 \cdot 7 \cdot 100 = 2100$ kg. Como el saco A tiene 3 kg de piensos de origen vegetal tenemos que si compramos x sacos: $3x$ mientras que el saco B tiene un 4 kg por lo que tendremos para y sacos: $4y$. Debemos sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser mayor o igual a la cantidad mínima que tienen que tomar nuestros animales:

$$3x + 4y \geq 2100$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 7x + 6y \geq 3500 \\ 3x + 4y \geq 2100 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = \frac{3500 - 7x}{6}$$

tabla de valores:

x	500	200	0
y	0	350	583.3

Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = \frac{2100 - 3x}{4}$$

tabla de valores:

x	0	400	700
y	525	225	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en la tercera y la cuarta podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia el lado contrario a ese punto. Por lo que la representación queda:

Se trata de una región abierta que presenta tres vértices:

- El primero es el $(0, 583.3)$ que sale directamente de nuestra tabla.
- El segundo es el $(700, 0)$ que también sale de nuestra tabla.
- El tercero es el corte de ambas rectas $y = \frac{3500-7x}{6}$ y $y = \frac{2100-3x}{4}$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

$$\frac{3500-7x}{6} = \frac{2100-3x}{4}$$
$$4 \cdot (3500-7x) = 6 \cdot (2100-3x)$$
$$14000 - 28x = 12600 - 18x$$
$$1400 = 10x$$
$$x = 140$$

la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos:

$y = \frac{3500-7\cdot 140}{6} = 420$ por lo que el punto será $(140, 420)$

Los 3 vértices a estudiar son: $(0, 583.3)$ $(700, 0)$ y $(140, 420)$

La función objetivo era:$C(x, y) = 12x + 11y$ sustituimos los vértices hallados:

$C(0, 583.3) = 12 \cdot 0 + 11 \cdot 583.3 = 6416.3$ euros

$C(700, 0) = 12 \cdot 700 + 11 \cdot 0 = 8400$ euros

$C(140, 420) = 12 \cdot 140 + 11 \cdot 420 = 6300$ euros

Como buscamos el coste mínimo tenemos que se da comprando **140** sacos del A y **420** sacos del B y el coste mínimo semanal es de **6 300 €**.

El problema también puede resolverse calculando el coste mínimo por animal y día y multiplicando por 100 animales y 7 días (es decir, por 700). Lo que ocurre es que, en ese caso, el resultado sale decimal y confunde bastante: 0.2 sacos del A y 0.6 sacos del B y el coste mínimo es de 9 € (este resultado es por animal y día)

Problema 2:

En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62 000 euros. En la empresa hay trabajadores de 3 categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1 000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2 000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4 % el salario de los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará un 10 % el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios el próximo mes será un 2 % inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones.

Como nos preguntan por el número de trabajadores de cada categoría que tiene la empresa y hay tres categorías podemos definir las siguientes incógnitas:

x – n.º de trabajadores de la empresa de categoría A.

y – n.º de trabajadores de la empresa de categoría B.

z – n.º de trabajadores de la empresa de categoría C.

Como en la empresa hay 57 trabajadores, la suma de las tres incógnitas debe ser esa cantidad:

$$x + y + z = 57$$

El gasto en salarios ha sido de 62 000 euros. Los trabajadores de categoría A cobran 800 euros cada uno, el gasto que generan será de $800x$. Los trabajadores de la categoría B cobran 1 000 euros cada uno, el gasto que generan será de $1000y$ y los trabajadores de la categoría C cobran 2 000 euros por lo que generarán un gasto de $2000z$. La suma de los tres gastos debe ser el gasto total en salarios:

$$800x + 1000y + 2000z = 62000$$

Después de la auditoría se incrementará en un 4 % el salario de los trabajadores de la categoría A por lo que si cobraban 800 ahora cobrarán $800 \cdot \frac{104}{100} = 832$ euros y el gasto salarial será de $832x$. Como se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B el costo salarial continúa siendo $1000y$ por último se rebajará un 10 % el salario a los trabajadores de la categoría C por lo que cobrarán:

$20000 \cdot \frac{90}{100} = 1800$ euros y el costo generado será de $1800z$. Como nos dicen que el gasto de la empresa en salarios el próximo mes será un 2 % inferior tenemos que ese gasto queda en:

$62000 \cdot \frac{98}{100} = 60760$ euros. La suma de los tres costos debe ser el nuevo gasto:

$$832x + 1000y + 1800z = 60760$$

Si unimos las tres ecuaciones tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 800x + 1000y + 2000z = 62000 \\ 832x + 1000y + 1800z = 60760 \end{cases}$$

Podemos simplificar algo la resolución si dividimos la segunda ecuación por 400 y la tercera por 8:

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 4x + 5y + 10z = 310 \\ 104x + 125y + 225z = 7595 \end{cases}$$

Para la resolución podemos elegir el Método de Gauss o la Regla de Cramer. Yo aquí lo voy a resolver por los dos métodos. En el examen sólo hay que resolver por un método.

Por el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 10 & 310 \\ 104 & 125 & 225 & 7595 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 21 & 121 & 1667 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 0 & -5 & -55 \end{array}\right)$$

De la última ecuación tenemos que: $-5z = -55 \rightarrow z = \frac{-55}{-5} = 11$

De la segunda ecuación tenemos que: $y + 6z = 82 \rightarrow y + 6 \cdot 11 = 82 \rightarrow y = 82 - 66 = 16$

De la primera ecuación: $x + y + z = 57 \rightarrow x + 16 + 11 = 57 \rightarrow x = 30$

Por lo que la empresa tiene 30 trabajadores de categoría A, 16 de categoría B y 11 de categoría C.

Si lo resolvemos por la Regla de Cramer tenemos que:

El sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas. Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 10 \\ 104 & 125 & 225 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 225 + 1 \cdot 10 \cdot 104 + 1 \cdot 4 \cdot 125 - 1 \cdot 5 \cdot 104 - 1 \cdot 4 \cdot 225 - 1 \cdot 10 \cdot 125 = -5 \neq 0$$

Cumple las condiciones para resolver por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 57 & 1 & 1 \\ 310 & 5 & 10 \\ 7595 & 125 & 225 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{64125 + 75950 + 38750 - 37975 - 69750 - 71250}{-5} = \frac{-150}{-5} = 30$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 57 & 1 \\ 4 & 310 & 10 \\ 104 & 7595 & 225 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{69750 + 59280 + 30380 - 32240 - 51300 - 75950}{-5} = \frac{-80}{-5} = 16$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 310 \\ 104 & 125 & 7595 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{37975 + 32240 + 28500 - 29640 - 30380 - 38750}{-5} = \frac{-55}{-5} = 11$$

Lógicamente el resultado es el mismo que el anterior.

Problema 3:

Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2 - 4 = 0 \ \rightarrow \ x = \pm 2$ por lo que no existe en esos puntos.

El **dominio** será: $\boldsymbol{Dom f(x)} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4} = 0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$1 - x^2 = 0 \ \rightarrow x = \pm 1$ por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(1, 0)$ **y** $(-1, 0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f(x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = \frac{-1}{4}$ por lo que es el punto $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

Puntos de corte: $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$; $(\mathbf{-1}, \mathbf{0})$ y $\left(\mathbf{0}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y = -1$.

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y = -1$:

$f(10) = \frac{1-10^2}{10^2-4} \simeq -1.031 < -1$ por lo que en $+\infty$ va por debajo de la asíntota.

$f(-10) = \frac{1-(-10)^2}{(-10)^2-4} \simeq -1.031 < -1$ por lo que en $-\infty$ también va por debajo de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = \pm 2$, calculamos los límites:

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left(\frac{-3}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = +\infty \end{cases}$ por lo que $x = -2$ es asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \left(\frac{-3}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1-x^2}{x^2-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -\infty \end{cases}$ por lo que $x = 2$ es asíntota vertical

$Las\ rectas\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{-2}\ y\ \boldsymbol{x} = 2\ son\ asíntotas\ verticales.\ La\ recta\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{-1}\ es\ asíntota\ horizontal$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

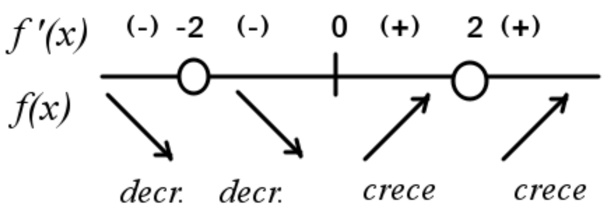
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{(-2x)\cdot(x^2-4)-(1-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$6x = 0 \to x = 0$por lo que tiene un posible punto crítico.

Este punto es el posible máximo, mínimo o punto de inflexión. Con este punto y las discontinuidades del dominio $x = \pm 2$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-3) \simeq -0.72 < 0$$
$$f'(-1) = -0.67 < 0$$
$$f'(1) \simeq 0.67 > 0$$
$$f'(3) \simeq 0.72 > 0$$

Por lo que tenemos que la función **decrece** en $(-\infty,-\mathbf{2}) \cup (-\mathbf{2},\mathbf{0})$; **Crece** en $(\mathbf{0},\mathbf{2})$ **U** $(\mathbf{2},+\infty)$

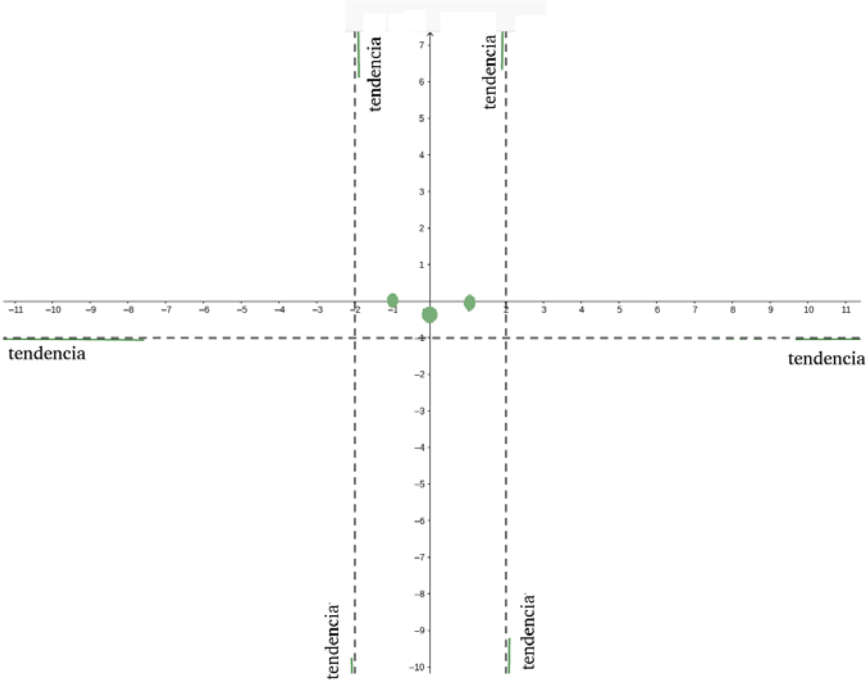
d) Los máximos y mínimos locales.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un mínimo en el punto de abscisa $x = 0$ que es el punto $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ que hemos calculado en el apartado a)

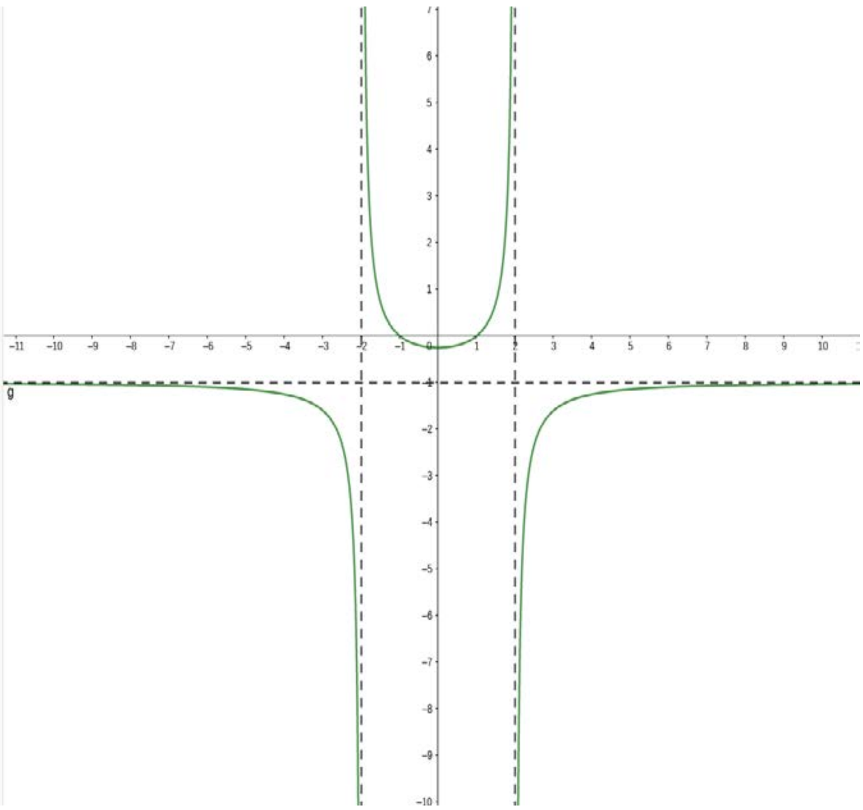
$$\boldsymbol{Mínimo}: \boldsymbol{C}\left(\mathbf{0},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$$

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(1,0)$,$(-1,0)$, el mínimo y punto de corte$\left(0,-\frac{1}{4}\right)$, las asíntotas verticales en $x=-2$ y $x=2$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y=-1$ con sus tendencias y obtenemos:



La gráfica queda así:



Problema 4:

Desde el inicio de 1980, la capacidad (cantidad total de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función

$$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2$$

donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980.

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

Solución:

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1980.

Como la función está definida a partir del inicio de 1980 nos están pidiendo el valor inicial, es decir para $x = 0$ por lo que:

$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2 \rightarrow f(0) = 36600 + 1500 \cdot 0 - 15 \cdot 0^2 = 36600$

La capacidad de la explotación al inicio de 1980 es de **36 600** miles de m^3

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

Tenemos que buscar un máximo de la función capacidad. Para ello se deriva la función y se iguala a cero la derivada:

$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2 \ \rightarrow \ f'^{(x)} = 1500 - 30x = 0 \rightarrow \ x = \frac{1500}{30} = 50$

Para comprobar que es máximo hacemos la segunda derivada y sustituimos el valor hallado:

$f''^{(x)} = -30 \rightarrow f''^{(50)} = -30 < 0$por lo que se trata de un **máximo**.

Para saber cuál es la capacidad en el máximo basta con sustituir en la función original de capacidad:

$f(x) = 36600 + 1500x - 15x^2 \ \rightarrow f(50) = 36600 + 1500 \cdot 50 - 15 \cdot 50^2 = 74100$

Por lo cual, la capacidad máxima se alcanza transcurridos **50 años** (año **2030**) y es de **74 100 miles de m^3**

El apartado también se puede resolver razonando que la función beneficios es una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) por lo que presenta un máximo en dicho vértice y cuya abscisa se calcula con la fórmula $x = \frac{-b}{2a} \to x = \frac{-1500}{2\cdot(-15)} = 50$ (el resultado es el mismo)

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función

$$g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12100}$$

calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

La explotación **dejará de ser rentable en el momento en el que los beneficios sean cero**.

Por lo cual tenemos que resolver la ecuación:

$3 - \frac{3x^2}{12100} = 0 \to 3 = \frac{3x^2}{12100} \to 36300 = 3x^2 \to 12100 = x^2 \to x = \pm 110$

Como x es el tiempo transcurrido desechamos la solución negativa y obtenemos que han de transcurrir 110 años para que los beneficios sean cero (deje de ser rentable). En ese momento, la capacidad de extracción será de:

$f(110) = 36600 + 1500 \cdot 110 - 15 \cdot 110^2 = 20100$miles de m³

Por lo cual, la explotación dejará de ser rentable transcurridos **110 años** (año **2090**) y, en ese momento, tendrá una capacidad de extracción de **20 100 miles de m^3**

Problema 5:

Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0.4$, $P(B/A) = 0.25$ y $P(B^C) = 0.75$, se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

b) Calcula $P(A \cup B)$.

c) Calcula $P(A/B^C)$.

d) Calcula$P(A^C \cup B^C)$y$P(A^C \cap B^C)$.

(A^C y B^C representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

Solución:

Es un problema de probabilidad de álgebra de sucesos. En el enunciado utiliza "suceso complementario" que muchas veces se llama también "contrario" y se denota por un suprarrayado $A^C = \overline{A}$ y $B^C = \overline{B}$

a) ¿Son independientes los sucesos A y B?

Para saber si dos sucesos son independientes tenemos que demostrar que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

O bien que: $P(A/B) = P(A)$ o que $P(B/A) = P(B)$

En el enunciado tenemos $P(B^C) = 0.75$ por el suceso contrario o complementario tenemos que:

$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.75 = 0.25$

Como en el enunciado nos dice que $P(B/A) = 0.25$ tenemos la igualdad: $P(B/A) = P(B)$

Por lo tanto, los sucesos **SÍ son independientes**.

b) Calcula $P(A \cup B)$.

Por la fórmula de la probabilidad de la unión tenemos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Tenemos los valores de las probabilidades de los sucesos. Nos falta la probabilidad de la intersección, pero, por el apartado anterior sabemos que son independientes por lo que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$$

Sustituyendo valores:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.25 - 0.1 = 0.55 = 55\ \%$$

$$P(A \cup B) = 0.55 = 55\ \%$$

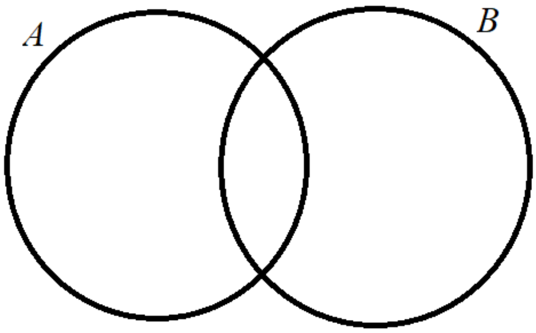
c) Calcula $P(A/B^C)$.

Aplicamos la fórmula de la probabilidad condicionada: $P(A/B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)}$

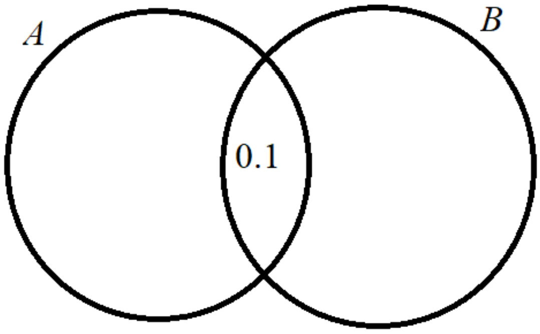
Tenemos que hallar $P(A \cap B^C)$ vamos a hacerlo de dos maneras: por diagramas de Venn y por la fórmula de la probabilidad de la diferencia de dos sucesos.

Por diagramas de Venn:

Representamos los sucesos dentro de un espacio muestral E:



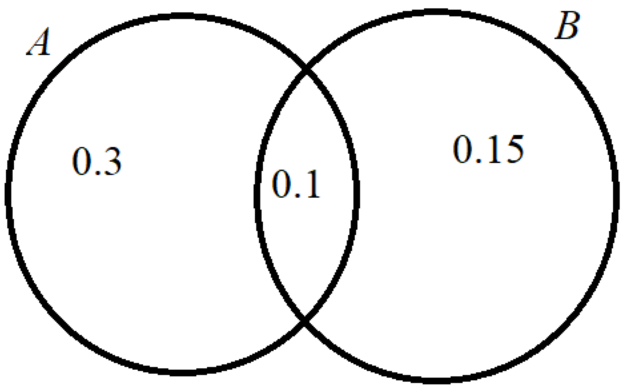
Sabemos que $P(A \cap B) = 0.1$ por el apartado anterior:



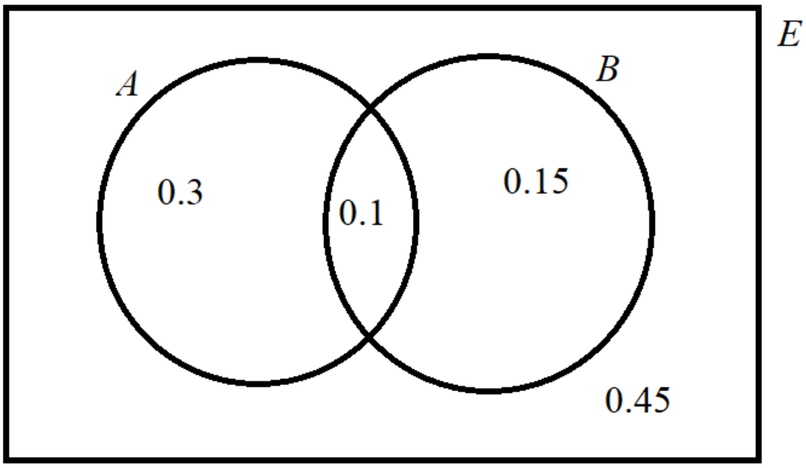
Como $P(A) = 0.4$ y en la intersección hay 0.1 tenemos que el resto será 0.3

Lo mismo para $P(B) = 0.25$ y en la intersección hay 0.1 tenemos que el resto será 0.15:

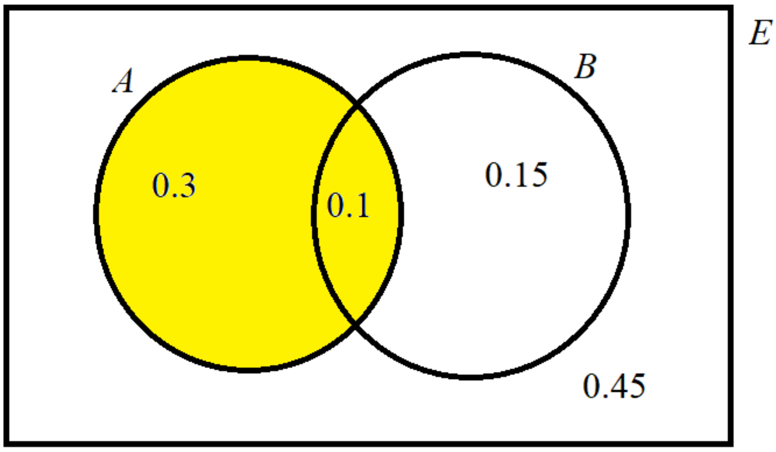
El diagrama queda:



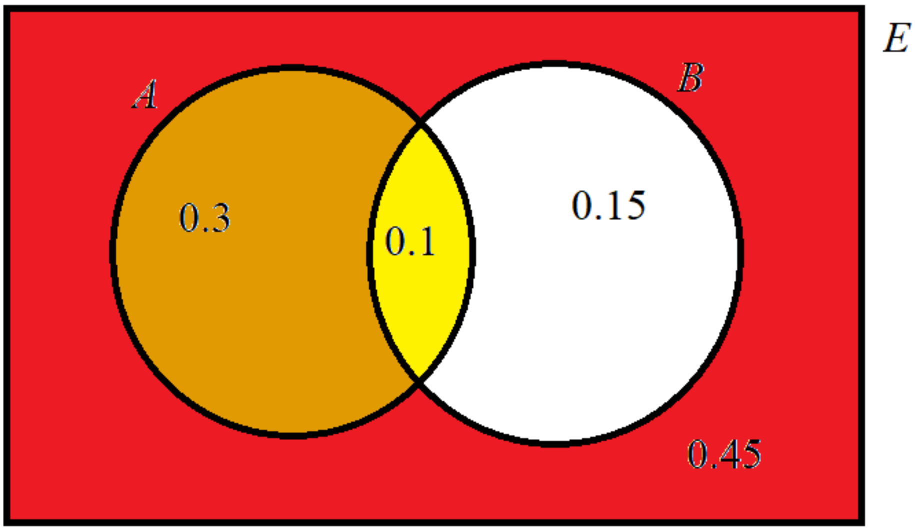
Podemos completarlo para todo el espacio muestral con: $1 - 0.3 - 0.1 - 0.15 = 0.45$



Ahora tenemos que saber qué zona nos están pidiendo. Para hallar$P(A \cap B^C)$ pintamos de amarillo el suceso A:



Si pintamos de rojo el suceso B^C la zona dos veces pintada es la intersección:



Por lo cual la probabilidad que buscamos es: $P(A \cap B^C) = 0.3$

Por la probabilidad de la diferencia:

$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$

Sustituyendo valores: $P(A/B^C) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{0.3}{0.75} = 0.4 = 40\ \%$

$$P(A/B^C) = 0.4 = 40\ \%$$

d) Calcula $P(A^C \cup B^C)$ y $P(A^C \cap B^C)$.

Por la fórmula de Morgan tenemos que: $P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C)$

Por el suceso complementario o contrario: $P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.1 = 0.9$

Por lo cual: $P(A^C \cup B^C) = 0.9 = 90\ \%$

Por la fórmula de Morgan tenemos que: $P(A^C \cap B^C) = P((A \cup B)^C)$

Por el suceso complementario o contrario: $P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.55 = 0.45 = 45\%$

Por lo cual $P(A^C \cap B^C) = 0.45 = 45\%$

$$\boldsymbol{P(A^C \cup B^C) = 0.9;\ P(A^C \cap B^C) = 0.45}$$

Problema 6:

Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4.7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30% de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4.7 pulgadas y del 40 % de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4.7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Solución:

Es un problema de probabilidad. Tenemos que definir los sucesos yo he optado por estas letras:

A – Usuario de teléfono móvil de 4 pulgadas.

B – Usuario de teléfono móvil de 4.7 pulgadas.

C – Usuario de teléfono móvil de 5 pulgadas.

S – Que tienen protector de pantalla (por aquello de “seguridad”)

Podemos apreciar que se ha evitado nombrar a los sucesos con números (4, 4.7 o 5) y la letra P de protector ya que puede liar con la P de probabilidad.

A partir de la definición de los sucesos vamos a ver qué probabilidades nos dan en el enunciado:

- El 30 % de los usuarios de un teléfono móvil tienen una pantalla de 4 pulgadas.

$$P(A) = 0.3$$

- El 30 % de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Se trata de una condicionada, es decir:

$$P(S/A) = 0.3$$

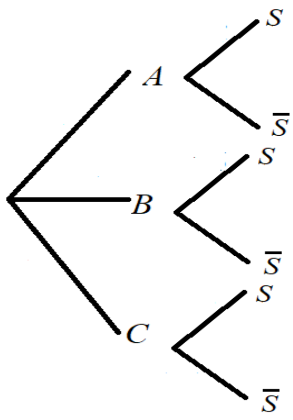
- El 25 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4.7 pulgadas también utilizan un protector de pantalla. Se trata de una condicionada, es decir:

$$P(S/B) = 0.25$$

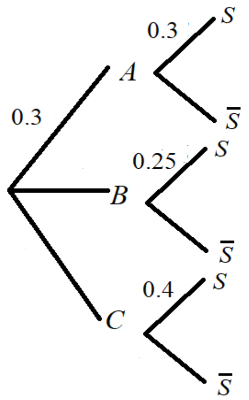
- El 40 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 5 pulgadas también utilizan un protector de pantalla. Se trata de una condicionada, es decir:

$$P(S/C) = 0.4$$

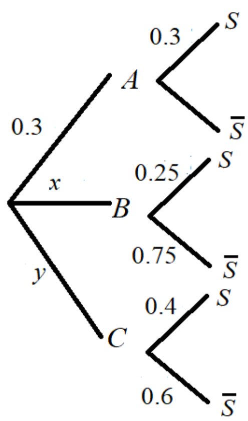
Vamos a situar todas estas probabilidades en un árbol:



Ahora ponemos las probabilidades que tenemos del enunciado:



Para completar el árbol utilizamos que la suma de probabilidades en un nudo ha de ser 1:



Sin embargo, podemos ver que hay dos probabilidades que no podemos completar. Yo les he llamado x

e *y*.

a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4.7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

Nos piden precisamente las dos probabilidades que no hemos podido calcular antes: $P(B)$ y $P(C)$. Pero ahora tenemos un dato adicional: $P(S) = 0.34$

Utilizando la probabilidad total:

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S) + P(C \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(B) \cdot P(S/B) + P(C) \cdot P(S/C)$$

Sustituyendo valores:

$0.34 = 0.3 \cdot 0.3 + x \cdot 0.25 + y \cdot 0.4 \rightarrow 0.25x + 0.4y = 0.25 \rightarrow x + 1.6y = 1$

Por otro lado, tenemos que la suma de las probabilidades de un nudo han de ser 1:

$x + y + 0.3 = 1 \rightarrow x + y = 0.7$

Podemos hacer con ambas condiciones un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 1.6y = 1 \\ x + y = 0.7 \end{cases}$

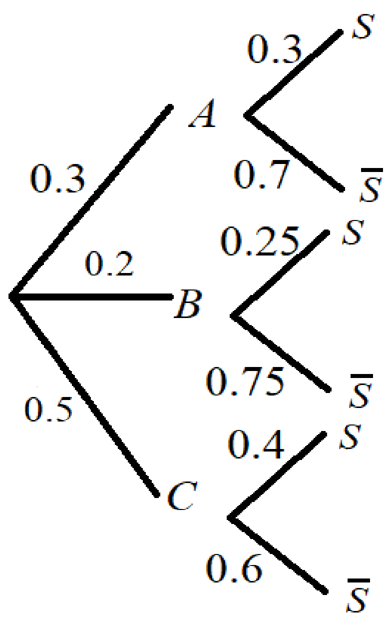
Resolviendo el sistema (podemos hacerlo por reducción restando ambas ecuaciones)) tenemos que: $y = 0.5$ y que $x = 0.2$

Por lo tanto, tenemos que:

$$P(B) = 0.2 = \mathbf{20\ \%} \text{ y } P(C) = 0.5 = \mathbf{50\ \%}$$

$$El\ 50\ \%\ usa\ teléfonos\ de\ 5\ pulgadas\ y\ el\ 20\ \%\ de\ 4.7\ pulgadas$$

Podemos ahora también completar nuestro árbol:



b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Como sabemos que tiene protector de pantalla se trata de probabilidad a posteriori por lo que tenemos que utilizar la fórmula de Bayes:

$$P(C/S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)}$$

Del árbol tenemos que: $P(C \cap S) = P(C) \cdot P(S/C) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$

Del enunciado del a) sabemos que: $P(S) = 0.34$

Sustituyendo valores: $P(C/S) = \frac{P(C\cap S)}{P(S)} = \frac{0.2}{0.34} \simeq 0.5882 = 58.82\%$

La probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas es aproximadamente de **0.5882**.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Tenemos que calcular una condicionada. Vamos a hallar la probabilidad de tener un teléfono móvil de 5 pulgadas y con protector (se puede ver del árbol):

$$P(C \cap S) = P(C) \cdot P(S/C) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

Ahora calculamos la población que tiene protector, pero cuya pantalla no es de 4.7 pulgadas (son dos casos):

$$P(A \cap S) + P(C \cap S) = P(A) \cdot P(S/A) + P(C) \cdot P(S/C) = 0.3 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.29$$

La probabilidad pedida es: $\frac{P(C\cap S)}{P(A\cap S)+P(C\cap S)} = \frac{0.2}{0.29} \simeq 0.6897 = 68.97\ \%$

La probabilidad de que use un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas es aproximadamente de **0.6897**.

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE JULIO

CRITERIOS DE CORRECCIÓN:
De los seis problemas planteados se han de contestar tres. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de las tres.
Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1:

Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8.5 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple que la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos – Solución correcta 5 puntos)

Problema 2:

Consideramos las matrices

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz $A - B$ (3 puntos)

b) Calcula la matriz X de dimensión 2 x 3, que satisface la ecuación $XA + C = XB$ (4 puntos)

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. (3 puntos)

Problema 3:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2-36}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de producto vienen dados por las siguientes funciones:

Ingresos: $I(x) = 4x^2 + 800x$ Gastos: $G(x) = 6x^2 + 460x + 672$

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? (4 puntos)

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? (3 puntos)

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. (3 puntos)

Problema 5:

En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. (4 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. (3 puntos)

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? (3 puntos)

Problema 6:

Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5 % de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99 % de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95 %. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. (2.5 puntos)

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. (2.5 puntos)

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. (2.5 puntos)

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1 % de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso? (2.5 puntos)

RESPUESTAS

Problema 1:

Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8.5 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple que la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo que ha de utilizarse en la mezcla.

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones ya que tenemos tres tipos de café que han de mezclarse cumpliendo unas condiciones. Nosotros vamos a hallar la cantidad de café de cada tipo que hay que añadir a la mezcla, pero no debemos perder de vista que, al final, la pregunta es el **porcentaje de cada tipo**.

Incógnitas: Nos interesa saber qué cantidad de café de cada tipo de sacos hay que utilizar en la mezcla por lo que las incógnitas serán:

x – Cantidad de café colombiano en cada paquete.

y – Cantidad de café brasileño en cada paquete.

z – Cantidad de café keniata en cada paquete.

Planteamiento:

Como queremos que los paquetes pesen 1 kg la suma de las tres cantidades ha de ser ese peso:

$$x + y + z = 1$$

Como queremos que el paquete tenga de coste 8.5 € y sabemos el precio de cada tipo tenemos que el café colombiano de la mezcla valdrá $10x$, el café brasileño de la mezcla valdrá $6y$ y el café keniata de la mezcla valdrá $8z$ si sumamos las tres cantidades tenemos el coste total del paquete:

$$10x + 6y + 8z = 8.5$$

Por último, la cantidad de café colombiano de la mezcla *(x)* ha de ser el triple que la de café brasileño *(y)*:

$$x = 3y$$

Uniendo las tres ecuaciones ya tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 10x + 6y + 8z = 8.5 \\ x = 3y \end{cases}$$

Pasamos las incógnitas al primer miembro para resolver:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 10x+6y+8z=8.5 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

Podemos resolver por el Método de Gauss o por la Regla de Cramer. Yo lo voy a hacer aquí por los dos métodos, pero en el examen basta con cualquiera de ellos.

Por el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 & 8.5 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3 = E_3 - E_1]{E_2 = E_2 - 10 E_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1.5 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3 = E_3 - E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{array}\right)$$

De la última fila tenemos que: $z = 0.5$

Con ese resultado vamos a la segunda fila y tenemos que:

$$-4y - 2\cdot 0.5 = -1.5 \ \rightarrow -4y - 1 = -1.5 \ \rightarrow -4y = -0.5 \ \rightarrow y = \tfrac{-0.5}{-4} = 0.125$$

Con esos dos resultados vamos a la primera fila y tenemos que:

$x + 0.125 + 0.5 = 1 \ \rightarrow x + 0.625 = 1 \ \rightarrow x = 0.375$

Por lo que el resultado de nuestro sistema es: $x = 0.375;\ y = 0.125;\ z = 0.5$

Vamos ahora a resolverlo **por la Regla de Cramer**:

Matriz de los coeficientes: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Su determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 8 - 30 - 6 - 0 + 24 = -4 \neq 0$

Como tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8.5 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0 + 0 - 25.5 - 0 - 0 + 24}{-4} = \frac{-1.5}{-4} = 0.375$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8.5 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0 + 8 + 0 - 8.5 - 0 - 0}{-4} = \frac{-0.5}{-4} = 0.125$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 8.5 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{0 + 8.5 - 30 - 6 - 0 + 25.5}{-4} = \frac{-2}{-4} = 0.5$$

El resultado es el mismo que el anterior.

Ahora vamos a responder a la cuestión del problema puesto que NO pregunta la cantidad de café sino el % de cada tipo. Como el paquete es de 1 kg (100 %) es muy fácil expresar el % (se puede hacer si se quiere por regla de tres):

0.375 kg son el 37.5 %de un kilo

0.125 kg son el 12.5 %de un kilo

0.5 kg son el 50 %de un kilo

Por lo que la respuesta es:

El 37.5 %es de café colombiano, el 12.5 %es café brasileño y el50 %keniata.

Problema 2:

Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$.

b) Calcula la matriz X de dimensión 2 x 3, que satisface la ecuación $XA+C=XB$.

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Solución:

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$

Primero tenemos que calcular la matriz diferencia:

$$A-B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Para saber **si existe la matriz inversa** comprobamos que el determinante de la misma no es cero:

$$|A-B|=\begin{vmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=0+6+0-0-0-0=6\neq 0 \text{ por lo que } \exists(A-B)^{-1}$$

Para calcular la inversa podemos hacerlo por Gauss o por determinantes. Yo lo voy a hacer aquí de las dos maneras, pero en el examen basta con una de ellas.

Por el Método de **Gauss**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&2&1&0&0\\0&0&2&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right);\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\2&3&2&1&0&0\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right);\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&3&2&1&0&-2\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right);\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&3&0&1&-1&-2\\0&0&2&0&1&0\end{array}\right);$$

$$\begin{matrix}F_1\Leftrightarrow F_3\\F_2\Leftrightarrow F_3\end{matrix}\qquad F_2=F_2-2F_1\qquad F_2=F_2-F_3\qquad \begin{matrix}F_2=F_2/3\\F_3=F_3/2\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{-1}{3}&\frac{-2}{3}\\0&0&1&0&\frac{1}{2}&0\end{array}\right)$$

Por lo que la inversa es:

$$\boldsymbol{(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}}$$

No es obligatorio, pero SI CONVENIENTE comprobar el resultado multiplicando por la matriz original y viendo si el resultado es la identidad:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ luego es correcto el resultado.

Por **determinantes**:

Utilizamos la fórmula: $(A-B)^{-1}=\frac{1}{|A-B|}\left(Adj(A-B)\right)^t$

El determinante lo tenemos calculado previamente: $|A-B|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=6$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 3\\ 6 & -4 & 0\end{pmatrix}^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 2 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

Lógicamente el resultado es el mismo por lo que no vamos a comprobarlo.

b) Calcula la matriz X de dimensión 2 x 3, que satisface la ecuación $XA+C=XB$

Primero tenemos que resolver con las letras:

$XA+C=XB$ Trasponemos las X al primer miembro y el resto al segundo.

$XA-XB=-C$ Extraemos factor común la X en el primer miembro (por la izquierda)

$X(A-B)=-C$ Multiplicamos por la derecha por la inversa de $A-B$

$X(A-B)\cdot(A-B)^{-1}=-C\cdot(A-B)^{-1}$ Aplicamos que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad

$X\cdot I=-C\cdot(A-B)^{-1}$ El producto de una matriz por la identidad es la misma matriz

$X=-C\cdot(A-B)^{-1}$ Que es el cálculo que tenemos que realizar.

La matriz -C es cambiar de signo todos los elementos de C:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -C = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz $(A - B)^{-1}$ la hemos calculado en el apartado anterior:

$$(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que asegurarnos que el producto puede realizarse. Es una matriz 2x3 por una matriz 3x3 por lo que el número de columnas de la primera coincide con el de filas de la segunda y podemos realizar el producto que será de dimensión 2x3.

$$X = -C \cdot (A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{pmatrix}$$

Luego el resultado es:

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{pmatrix}}$$

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué.

Dos matrices son multiplicables si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. La matriz B es de dimensión 3x3 mientras que la C es 2x3 por lo que NO es posible realizar el producto al no coincidir el número de columnas de B (3) con el de filas de C (2)

La matriz C es de dimensión 2x3 y la B es 3x3 por lo que SI es posible realizar el producto ya que coinciden el número de columnas de C (3) con el de filas de B (3). Realizamos el producto que será de dimensión 2x3:

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Dada la función $f(x)=\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x^2-2x-8=0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{2+6}{2}=4\\ \frac{2-6}{2}=-2\end{cases}$ → por lo que no existe en esos dos puntos:

$x=4$y$x=-2$

El **dominio** será: $Dom f(x)=\mathbb{R}-\{-2,4\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x)=0$:

$f(x)=\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=0$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2-36=0 \rightarrow x=\pm 6$ por lo que la función **CORTA al eje OX en** $(-6,0)$ **y** $(6,0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de $f(x)$ cuando $x=0$:

$f(0)=\frac{0^2-36}{0^2-2\cdot 0-8}=\frac{9}{2}=4.5$ por lo que es el punto $\left(0,\frac{9}{2}\right)$ o $(0,4.5)$

Puntos de intersección con los ejes son $\boldsymbol{(-6,0)}$; $\boldsymbol{(6,0)}$ **y** $\boldsymbol{(0,4.5)}$.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=1$ luego **tiene asíntota horizontal en** $y=1$.

No lo pide, pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y=1$:

$f(15)=\frac{15^2-36}{15^2-2\cdot 15-8}=\frac{189}{187}\simeq 1.01>1$ por lo que en $+\infty$ va por encima de la asíntota.

$f(-10)=\frac{(-10)^2-36}{(-10)^2-2\cdot(-10)-8}=\frac{64}{112}\simeq 0.57<1$ por lo que en $-\infty$ va por debajo de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = -2;\ x = 4$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \left(\frac{-32}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty \\ \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty \end{cases}$$ por lo que $x = -2$ es asíntota vertical

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = \left(\frac{-20}{0}\right) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty \\ \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty \end{cases}$$ por lo que $x = 4$ es asíntota vertical

Las asíntotas son: $y = 1; x = -2; x = 4$.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

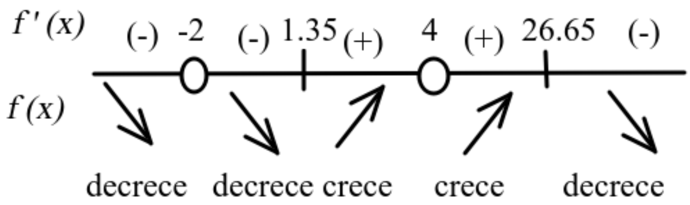
$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-2x-8)-(x^2-36)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-8)^2} = \frac{2x^3-4x^2-16x-2x^3+2x^2+72x-72}{(x^2-2x-8)^2}$$
$$= \frac{-2x^2+56x-72}{(x^2-2x-8)^2}$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$-2x^2+56x-72 = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-56\pm\sqrt{56^2-4\cdot(-2)\cdot(-72)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-56\pm\sqrt{2560}}{-4} \simeq \frac{-56\pm 50.6}{-4} = \begin{cases} \frac{-56+50.6}{-4} = 1.35 \\ \frac{-56-50.6}{-4} = 26.65 \end{cases}$$ por lo que tiene dos posibles puntos críticos: $x = 1.35$ y $x = 26.65$

Estos puntos son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y las discontinuidades del dominio $x = -2$ y $x = 4$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-3) \simeq -5.27 < 0$$
$$f'(0) = -1.125 < 0$$
$$f'(2) = 0.5 > 0$$
$$f'(5) \simeq 3.22 > 0$$
$$f'(30) \simeq -0.23 < 0$$

Por lo que tenemos que la función:

Decrece en]-∞, -2[U]-2, 1.35[U]26.65, +∞[, y crece en]1.35, 4[U]4, 26.65[

d) Los máximos y mínimos locales.

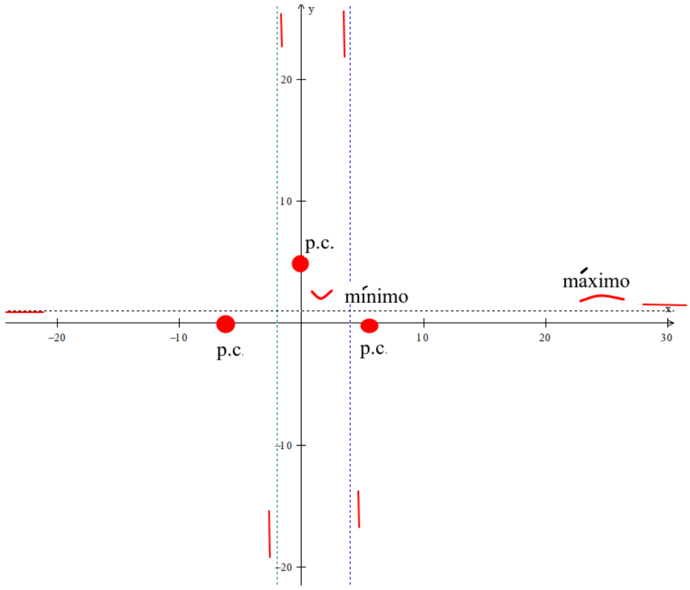
Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un mínimo en el punto de abscisa $x = 1.35$ que es el punto $(1.35, 3.85)$ (hemos calculado la coordenada y en la función original).

Y tiene un máximo en el punto de abscisa $x = 26.65$ que es el punto $(26.65, 1.04)$ (hemos calculado la coordenada y en la función original).

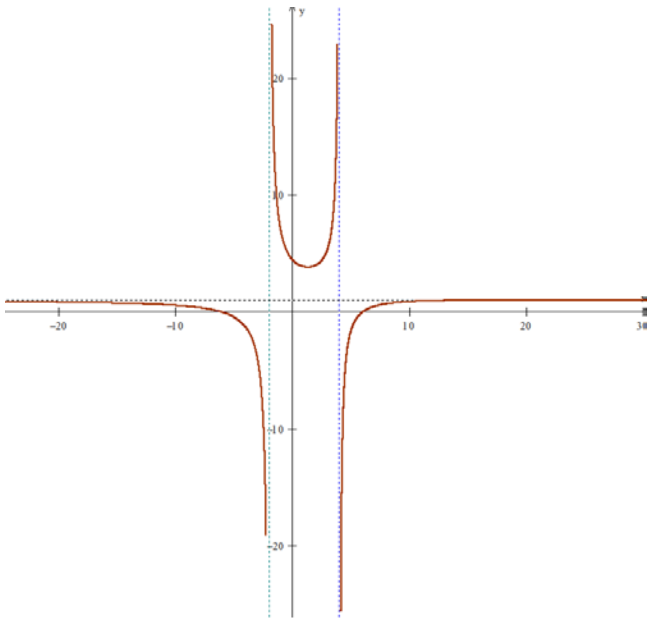
Mínimo: $(1.35, 3.85)$; Máximo: $(26.65, 1.04)$.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(6, 0)$,$(-6, 0)$ y $(0, 4.5)$, el mínimo $(1.35,\ 3.85)$ y el máximo $(26.65, 1.04)$, las asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 4$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y = 1$ con sus tendencias, y obtenemos:



La gráfica queda así:



Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de producto vienen dados por las siguientes funciones:

Ingresos: $I(x) = 4x^2 + 800x$ Gastos: $G(x) = 6x^2 + 460x + 672$

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable?

Consideramos siempre que los beneficios generados son los ingresos menos los gastos por lo que nuestra función de beneficios será:

$$B(x) = I(x) - G(x) = (4x^2 + 800x) - (6x^2 + 460x + 672) = -2x^2 + 340x - 672$$

Como se considera rentable cuando el beneficio es mayor o igual a cero tenemos que resolver la inecuación:

$$B(x) = -2x^2 + 340x - 672 \geq 0$$

Es una inecuación de segundo grado. Para resolverla primero tenemos que resolver la ecuación:

$-2x^2 + 340x - 672 = 0$

$$x = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-672)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-340 \pm \sqrt{110224}}{-4} = \frac{-340 \pm 332}{-4} = \begin{cases} \dfrac{-340 + 332}{-4} = 2 \\ \dfrac{-340 - 332}{-4} = 168 \end{cases}$$

Se trata de una función continua (polinómica de segundo grado) en esos dos valores vale cero comprobamos su signo antes y después de esos valores:

$B(1) = -2 \cdot 1^2 + 340 \cdot 1 - 672 = -334 < 0$

$B(10) = -2 \cdot 10^2 + 340 \cdot 10 - 672 = 2528 > 0$

$B(200) = -2 \cdot 200^2 + 340 \cdot 200 - 672 = -12672 < 0$

Por lo que la función es positiva o cero en el intervalo $[2, 168]$

Como nos preguntan por el **número mínimo** de unidades para que sea rentable podemos afirmar que este número es **2 unidades**.

El número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable es de 2 unidades.

Todo lo anterior también se puede razonar estudiando la función beneficio como una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) y hallando los puntos de corte con el eje OX.

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso?

Buscamos un máximo absoluto de la función beneficio. Por el teorema de Bolzano Weierstrass si se trata de una función continua (polinómica de segundo grado) definida en un intervalo cerrado (sólo tiene sentido hablar de beneficios en el intervalo $[2, 168]$) alcanza en dicho intervalo un máximo y mínimo absolutos los cuales se encuentran en los extremos relativos o en los extremos del intervalo.

Para hallar los extremos relativos calculamos la derivada de la función beneficios:

$B(x) = -2x^2 + 340x - 672 \rightarrow B'(x) = -4x + 340$

Igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante:

$B'(x) = -4x + 340 = 0 \rightarrow -4x = -340 \rightarrow x = \frac{-340}{-4} = 85$

El valor $x = 85$ es un posible máximo, mínimo o punto de inflexión. Para conocer su naturaleza comprobamos el signo de la segunda derivada:

$B''(x) = -4 \rightarrow B''(85) = -4 < 0$ por lo que es un máximo.

Comprobamos ahora el valor de la función en el máximo relativo y en los extremos del intervalo considerado:

$$B(2) = 0$$

$$B(85) = 13778$$

$$B(168) = 0$$

Por lo que el valor $x = 85$ es un máximo absoluto.

Por lo tanto, tenemos que fabricar **85 unidades** para obtener un beneficio máximo de **13 778 €**

Todo lo anterior también se puede razonar estudiando la función beneficio como una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba) y hallando el vértice de la misma (que es su máximo absoluto) y que se encuentra en el valor $x = \frac{-b}{2a} \rightarrow x = \frac{-340}{-4} = 85$

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta.

Ahora el intervalo que tenemos que considerar no es $[2, 168]$ sino el $[100, 168]$ ya que el número mínimo de unidades fabricadas ha de ser 100.

Continuando con el razonamiento anterior una función continua (polinómica de segundo grado) definida en un intervalo cerrado (en este caso el $[100, 168]$) alcanza en dicho intervalo un máximo y mínimo absolutos los cuales se encuentran en los extremos relativos o en los extremos del intervalo. Como el máximo relativo hallado no está en el intervalo sólo tenemos que comprobar el valor en los extremos del mismo:

$$B(100) = -2 \cdot 100^2 + 340 \cdot 100 - 672 = 13328$$

$$B(168) = 0$$

Por lo que el máximo beneficio lo alcanza fabricando **100 unidades** y es de **13 328 €**

Problema 5:

En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que la experiencia es extraer dos bolas de una urna **sin reemplazamiento** lo que implica que, al sacar la primera bola, ésta queda excluida de la segunda extracción, por lo cual las probabilidades de la segunda extracción son diferentes puesto que tenemos una bola menos y, además, tendremos en cuenta el color de la primera bola extraída.

Definimos los sucesos:

B – "Extraer bola blanca" $\quad$ 1^{o} – "ganar el primer premio (dos bolas blancas)"

A – "Extraer bola amarilla" $\quad$ 2^{o} – "ganar el segundo premio (dos bolas amarillas)"

N – "Extraer bola negra" $\quad$ 3^{o} – "ganar el tercer premio (una bola blanca y otra no)"

Vamos a utilizar la ley de Laplace $P(X) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ para calcular las probabilidades de los sucesos siguientes (en la primera extracción):

- Como en total hay 10 bolas y 2 son blancas tenemos que: $P(B) = \frac{2}{10} = 0.2$
- Como en total hay 10 bolas y 3 son amarillas tenemos que: $P(A) = \frac{3}{10} = 0.3$
- Como en total hay 10 bolas y 5 son negras tenemos que: $P(N) = \frac{5}{10} = 0.5$

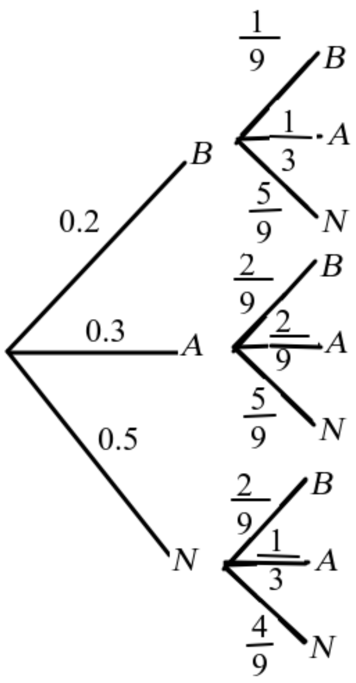
En la segunda extracción hay que tener en cuenta dos factores: hay una bola menos y el color de la bola extraída en la primera extracción (tendremos que utilizar la notación de condicionada):

Si la primera bola era blanca: $P(B/B) = \frac{1}{9}$; $P(A/B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $P(N/B) = \frac{5}{9}$

Si la primera bola era amarilla: $P(B/A) = \frac{2}{9}$; $P(A/A) = \frac{2}{9}$; $P(N/A) = \frac{5}{9}$

Si la primera bola era negra: $P(B/N) = \frac{2}{9}$; $P(A/N) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $P(N/N) = \frac{4}{9}$

Estas probabilidades se entienden mejor en un diagrama de árbol como el siguiente:



a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio.

El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas y consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas. Evidentemente ambos premios son sucesos excluyentes (si ganamos el primer premio no ganamos el segundo y al contrario) por lo cual la probabilidad pedida será la suma de conseguir el primer premio más la de conseguir el segundo premio:

$P(1^{\underline{o}} \cup 2^{\underline{o}}) = P(1^{\underline{o}}) + P(2^{\underline{o}})$ (No hay una $P(1^{\underline{o}} \cap 2^{\underline{o}})$)

Obtenemos las probabilidades pedidas:

Para obtener el primer premio tiene que extraer dos blancas. Por el diagrama sabemos que:

$$P(1^{\underline{o}}) = P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B/B) = 0.2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45} \simeq 0.0222 = 2.22\ \%$$

Para obtener el segundo premio tiene que extraer dos amarillas. Por el diagrama sabemos que:

$$P(2^{\underline{o}}) = P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A/A) = 0.3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \simeq 0.0667 = 6.67\ \%$$

Por lo que la respuesta es: $P(1^{\underline{o}} \cup 2^{\underline{o}}) = P(1^{\underline{o}}) + P(2^{\underline{o}}) = \frac{1}{45} + \frac{1}{15} = \frac{4}{45} \simeq 0.0889 = 8.89\ \%$

La probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio es **0.0889**.

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio.

El jugador consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. Es decir, tenemos todas estas combinaciones:

$B\cap A$; $B\cap N$; $A\cap B$ y $N\cap B$. (Hemos de tener en cuenta que la bola blanca puede salir en la primera o en la segunda extracción)

Como los sucesos vuelven a ser excluyentes la suma será la suma de los cuatro sucesos individuales. Hallamos las probabilidades pedidas utilizando el diagrama de árbol:

$$P(B\cap A)=P(B)\cdot P(A/B)=0.2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{15}\simeq 0.0667=6.67\ \%$$

$$P(B\cap N)=P(B)\cdot P(N/B)=0.2\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{9}\simeq 0.1111=11.11\ \%$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)=0.3\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}\simeq 0.0667=6.67\ \%$$

$$P(B\cap N)=P(B)\cdot P(N/B)=0.2\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{9}\simeq 0.1111=11.11\ \%$$

Sumando las cuatro probabilidades obtenemos la probabilidad pedida:

$$P(3º)=\frac{1}{15}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{9}=\frac{16}{45}\simeq 0.3556=35.56\ \%$$

La probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio es **0.3556**.

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio?

Como sabemos que ha obtenido premio en el sorteo se trata de probabilidad a posteriori y utilizaremos la **fórmula de Bayes:**

$$P(3º/1º\cup 2º\cup 3º)=\frac{P\big(3º\cap(1º\cup 2º\cup 3º)\big)}{P(1º\cup 2º\cup 3º)}$$

Como los sucesos son excluyentes (cuando obtenemos un premio no obtenemos el otro) tenemos que:

$P\big(3º\cap(1º\cup 2º\cup 3º)\big)=P(3º)=\frac{16}{45}$, (obtenido en el apartado anterior)

$$P(1º\cup 2º\cup 3º)=P(1º)+P(2º)+P(3º)=\frac{1}{45}+\frac{1}{15}+\frac{16}{45}=\frac{4}{9}$$

Sustituyendo valores: $P(3º/1º\cup 2º\cup 3º)=\frac{P(3º\cap(1º\cup 2º\cup 3º))}{P(1º\cup 2º\cup 3º)}=\frac{\frac{16}{45}}{\frac{4}{9}}=\frac{4}{5}=0.8=80\ \%$

Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio es **0.8**.

Problema 6:

Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5 % de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99 % de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95 %. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

Solución:

Es un problema de probabilidad. Tenemos que definir los sucesos yo he optado por esta notación:

E – Persona que tiene la enfermedad.

$\overline{E}$ – Persona que no tiene la enfermedad.

$(+)$ – El test dice que tiene la enfermedad.

(-) – El test dice que no tiene la enfermedad.

A partir de la definición de los sucesos vamos a ver qué probabilidades nos dan en el enunciado:

- El 5 % de la población tiene la enfermedad.

$$P(E) = 0.05$$

- Por lo tanto, el 95 % de la población no tiene la enfermedad.

$$P(\overline{E}) = 0.95$$

- El 99 % de las veces da positivo si la persona está enferma. Esto es una probabilidad condicionada, es decir:

$$P(+/E) = 0.99$$

- De lo anterior se deduce que el 1 % de las veces da negativo si la persona está enferma. Esto es una probabilidad condicionada también, es decir:

$$P(\text{-}/E) = 0.01$$

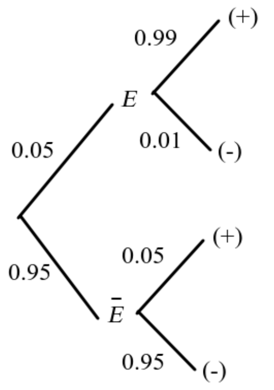
- El 95 % de las veces da negativo si la persona no está enferma. Esto es una probabilidad condicionada, es decir:

$$P(\text{-}/\overline{E}) = 0.95$$

- De lo anterior se deduce que el 5 % de las veces da positivo si la persona no está enferma. Esto es una probabilidad condicionada también, es decir:

$$P(+/\overline{E}) = 0.05$$

Vamos a situar todas estas probabilidades en un árbol:



Contestamos ahora a las cuestiones:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test.

Como sabemos que la persona ha dado positivo en el test eso quiere decir que se trata de probabilidad a posteriori y tenemos que utilizar la fórmula de Bayes:

$$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)}$$

Hallamos las probabilidades que necesitamos utilizando el diagrama:

$$P(E \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) = 0.05 \cdot 0.99 = 0.0495$$

Por la probabilidad total:

$$P(+) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\overline{E}) \cdot P(+/\overline{E}) = 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.05 = 0.097$$

Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{0.0495}{0.097} \simeq 0.5103 = 51.03\ \%$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test es de **0.5103**.

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test.

Como sabemos que la persona ha dado negativo en el test eso quiere decir que se trata de probabilidad a posteriori y tenemos que utilizar de nuevo la fórmula de Bayes:

$$P(\overline{E}/\text{-}) = \frac{P(\overline{E} \cap \text{-})}{P(\text{-})}$$

Hallamos las probabilidades que necesitamos utilizando el diagrama:

$P(\overline{E} \cap \text{-}) = P(\overline{E}) \cdot P(\text{-}/\overline{E}) = 0.95 \cdot 0.95 = 0.9025.$

Para hallar la probabilidad de test negativo podemos aplicar la probabilidad total (como antes) o bien la probabilidad del suceso contrario ya que conocemos la de dar positivo:

$P(\text{-}) = 1 - P(+) = 1 - 0.097 = 0.903$

Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(\overline{E}/\text{-}) = \frac{P(\overline{E} \cap \text{-})}{P(\text{-})} = \frac{0.9025}{0.903} \simeq 0.9994 = 99.94\%$$

La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test es de **0.9994**.

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto.

Hay dos casos en los que el resultado del test es correcto: cuando está enferma y da positivo y cuando no lo está y da negativo. La probabilidad que nos piden es la suma de ambas:

$$P(correcto) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap \text{-})$$

Ambas probabilidades las hemos calculado antes:

$P(E \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) = 0.05 \cdot 0.99 = 0.0495$

$P(\overline{E} \cap \text{-}) = P(\overline{E}) \cdot P(\text{-}/\overline{E}) = 0.95 \cdot 0.95 = 0.9025$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

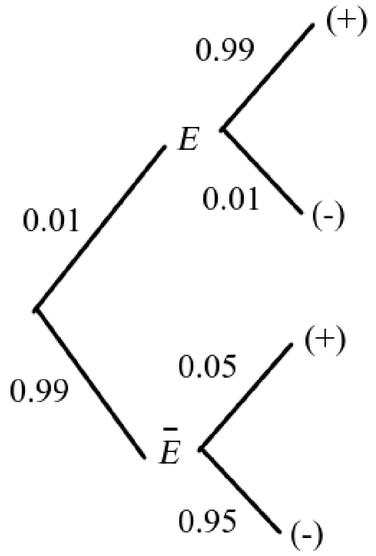
$P(correcto) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap \text{-}) = 0.0495 + 0.9025 = 0.952 = 95.2\ \%$

La probabilidad de que el test dé el resultado correcto es de **0.952**.

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un $1\ \%$ de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

Si los indicios son correctos tenemos que cambiar el árbol en las primeras ramas ya que ahora:

$P(E) = 0.01$ y $P(\overline{E}) = 0.99$. Queda así:



Tenemos que repetir el apartado a) con los nuevos datos:

Como sabemos que la persona ha dado positivo en el test eso quiere decir que se trata de probabilidad a posteriori y tenemos que utilizar la fórmula de Bayes:

$$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)}$$

Hallamos las probabilidades que necesitamos utilizando el nuevo diagrama:

$P(E \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) = 0.01 \cdot 0.99 = 0.0099$

Por la probabilidad total:

$$P(+) = P(E \cap +) + P(\overline{E} \cap +) = P(E) \cdot P(+/E) + P(\overline{E}) \cdot P(+/\overline{E}) = 0.05 \cdot 0.99 + 0.95 \cdot 0.05 = 0.097$$

Calculamos la probabilidad pedida:

$P(E/+) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)} = \frac{0.0099}{0.0594} \simeq 0.1667 = 16.67\ \%$

Si existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un $1\ \%$ de la población, entonces la probabilidad de que una persona está enferma si ha dado positivo en el test en este caso, es de **0.1667**.