MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MURCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Universidad de Murcia · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1: **[2,5]** En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.
En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Problema 3:

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x^2}$

b) **[0,75]** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+9} - \sqrt{x-9}$

c) **[0,75]** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Problema 4:

4: a) **[1,5]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 sen x dx$.

b) **[1]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 sen x$.

Problema 5:

5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a) **[1]** Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.
b) **[0,5]** Calcule la distancia de la recta r al plano π.
c) **[1]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Problema 6:

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\ z=2\end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases}y+2z=4\\ -x+y=3\end{cases}.$$

a) **[1]** Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) **[0.5]** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) **[1]** Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Problema 7:

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?
b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?
c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?
d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?
b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?
c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1: **[2,5]** En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.
En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Solución:

Llamamos "x" al número de Grand Slam ganados por Carlitos, "y" al de Masters 1000 y "z" al de ATP 500.

"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500" → $x+y+z=10$
"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos" → $2000x+1000y+500z=10000$
"El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías" → $z=1+\dfrac{x+y}{2}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 2000x+1000y+500z=10000 \\ z=1+\dfrac{x+y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10-y-z \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4(10-y-z)+2y+z=20 \\ 2z=2+10-y-z+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 40-4y-4z+2y+z=20 \\ 3z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2y-3z=-20 \\ \boxed{z=4} \end{array}\right\} \Rightarrow -2y-12=-20 \Rightarrow 8=2y \Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{2}=4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10-4-4=2}$$

Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500.

Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Solución:

a) Las dos matrices cumplen la primera condición, comprobamos si alguna de las dos matrices cumple la segunda: $A \cdot A^t = 2I$.

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

La primera matriz si es una matriz de Hadamard y la segunda no lo es.

b) Si A es una matriz de Hadamard tenemos que $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$ y además $A \cdot A^t = 2I$.

$$A \cdot A^t = 2I \Rightarrow |A \cdot A^t| = |2I| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Propiedad} \\ |AB| = |A| \cdot |B| \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Propiedad} \\ \text{Si A es de orden n} \\ |2A| = 2^n |A| \end{array}\right\} \Rightarrow |A| \cdot |A^t| = 2^2 |I| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Propiedad} \\ |A^t| = |A| \end{array}\right\} \left\{ |I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \right\} \Rightarrow |A| \cdot |A| = 4 \Rightarrow |A|^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El determinante de una matriz de Hadamard vale 2 o –2.

c) Acabamos de ver que el determinante de una matriz de Hadamard es $|A| = \pm 2$, como este determinante es no nulo existe la inversa de dicha matriz.

Como una matriz de Hadamard cumple la igualdad $A \cdot A^t = 2I$ tenemos que:

$$A \cdot A^t = 2I \Rightarrow \frac{1}{2} A \cdot A^t = I \Rightarrow A \cdot \left(\frac{1}{2} A^t\right) = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{2} A^t}$$

Problema 3:

3: Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$

b) [0,75] $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}$

c) [0,75] $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=\frac{\cos(0)-\cos(0)}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3sen(3x)+2sen(2x)}{2x}=\frac{-3sen(0)+2sen(0)}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-9\cos(3x)+4\cos(2x)}{2}=\frac{-9\cos(0)+4\cos(0)}{2}=\frac{-5}{2}=\boxed{-2.5}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}(Conjugado)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}\right)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+9-(x-9)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\frac{18}{+\infty+\infty}=\boxed{0}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{+\infty}=\boxed{0}$$

Problema 4:

4: a) [1,5] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 senx dx$.

b) [1] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2 senx$.

Solución:

a) Usamos integración por partes.

$$\int x^2 senx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2x dx \\ dv = senx dx \to v = \int senx dx = -\cos x \end{array} \right\} = x^2(-\cos x) - \int -2x\cos x dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = \cos x dx \to v = \int \cos x dx = senx \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(xsenx - \int senx dx\right) = -x^2\cos x + 2\left(xsenx - (-\cos x)\right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(xsenx + \cos x\right) = -x^2\cos x + 2xsenx + 2\cos x =$$

$$= \boxed{\left(2-x^2\right)\cos x + 2xsenx + C}$$

b) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 senx \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 senx = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ senx = 0 \to x = 0; x = \pi; \ldots \end{array} \right.$$

Como la función corta el eje de abscisas en *x = 0* el área del recinto lo calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas.

Zona 1 entre $x=-\pi/2$ y *x = 0*.

$$\int_{-\pi/2}^{0} x^2 senx dx = \left[\left(2-x^2\right)\cos x + 2xsenx\right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \left[\left(2-0^2\right)\cos 0 + 2\cdot 0\cdot sen0\right] - \left[\left(2-\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{-\pi}{2}\right)sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2 - \left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0 - \pi(-1)\right] = 2-\pi$$

Zona 2 entre *x = 0* y $x=\pi/2$.

$$\int_0^{\pi/2} x^2 senx dx = \left[\left(2-x^2\right)\cos x + 2x senx\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[\left(2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\frac{\pi}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[\left(2-0^2\right)\cos 0+2\cdot 0\cdot sen 0\right]-=$$

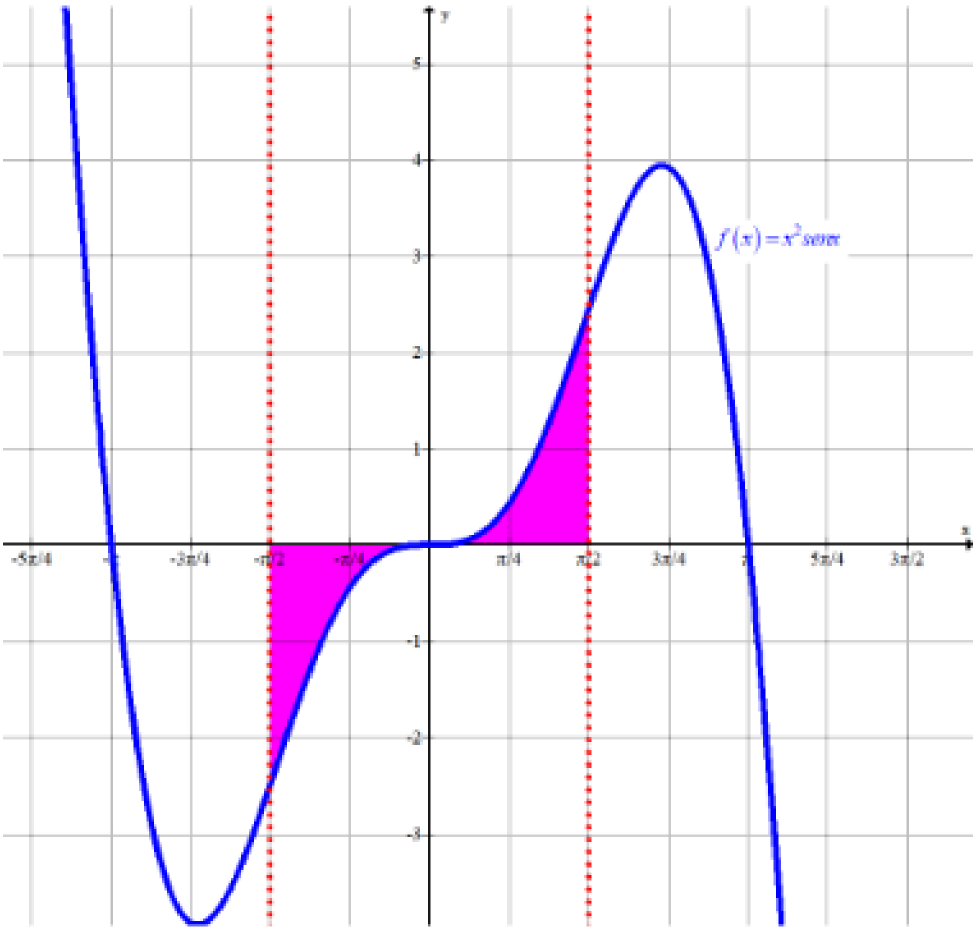
$$= \left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0+\pi(1)\right]-2=\pi-2$$

El área del recinto es la suma del valor absoluto del resultado obtenido en las dos integrales definidas.

$$\text{Área zona 1 + Área zona 2} = |2-\pi| + (\pi-2) = \pi-2+\pi-2 = \boxed{2\pi-4 = 2.28\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.28 unidades cuadradas.

No pide dibujar el recinto, pero lo hacemos para comprobar que el valor aproximado de 2 unidades cuadradas es correcto.



Problema 5:

5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a) **[1]** Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.

b) **[0,5]** Calcule la distancia de la recta r al plano π.

c) **[1]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) Hallamos un vector director de la recta, un vector normal del plano y comprobamos si son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l} r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}\Rightarrow\begin{cases}P_r(0,1,0)\\ \overline{u_r}=(1,-1,0)\end{cases} \\ \pi:x+y+z=-1\Rightarrow\overline{n}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{n}\cdot\overline{u_r}=(1,1,1)(1,-1,0)=1-1=0$$

El producto escalar es nulo y la recta es paralela al plano o está contenida en él.
Comprobamos si el punto $P_r(0,1,0)$ de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}¿P_r(0,1,0)\in\pi?\\ \pi:x+y+z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow ¿0+1+0=-1?\ \text{¡Falso!}$$

Por lo que la recta no está contenida en el plano y es paralela a él.

b) Como la recta es paralela la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano, en particular es la distancia del punto $P_r(0,1,0)$ al plano.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(0,1,0)\\ \pi:x+y+z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|0+1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}\ \textit{unidades}}$$

La distancia de la recta r al plano es de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ unidades.

c) Si el plano π' contiene a la recta r entonces el vector director de la recta es un vector director del plano π' que queremos hallar. Como es perpendicular al plano π el vector normal del plano es otro vector director del plano π'.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{u}=\overline{u_r}=(1,-1,0)\\ \overline{v}=\overline{n}=(1,1,1)\\ P_r(0,1,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\pi':\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+0+z+z-y+1+0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-y+2z+1=0\Rightarrow\boxed{\pi':x+y-2z=1}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi':x+y-2z=1$.

Problema 6:

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\z=2\end{cases} \text{ y } s:\begin{cases}y+2z=4\\-x+y=3\end{cases}.$$

a) **[1]** Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) **[0.5]** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) **[1]** Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\z=2\end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases}x=13-2\lambda\\y=\lambda\\z=2\end{cases};\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow r:\begin{cases}P_r(13,0,2)\\\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}y+2z=4\\-x+y=3\end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases}2z=4-y\\-x=3-y\end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases}z=\frac{4}{2}-\frac{y}{2}\\x=-3+y\end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases}z=2-\frac{1}{2}y\\x=-3+y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s:\begin{cases}x=-3+\lambda\\y=\lambda\\z=2-\frac{1}{2}\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow s:\begin{cases}Q_s(-3,0,2)\\\overrightarrow{v_s}=(1,1,-0.5)\rightarrow\overrightarrow{u_s}=(2,2,-1)\end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\\\overrightarrow{u_s}=(2,2,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{2}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ para decidir si se cortan o cruzan en función del resultado nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(13,0,2)\\Q_s(-3,0,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(-3,0,2)-(13,0,2)=(-16,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\\\overrightarrow{u_s}=(2,2,-1)\\\overrightarrow{P_rQ_s}=(-16,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}-2&1&0\\2&2&-1\\-16&0&0\end{vmatrix}=0+16+0-0-0-0=16\neq0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan en el espacio.

b) ¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta r?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in r? \\ r:\begin{cases} x+2y=13 \\ z=2 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 0+2\cdot 3=13 \\ 0=2 \end{cases}? \quad \text{¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta r. No pertenece a la recta.

¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta s?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in s? \\ s:\begin{cases} y+2z=4 \\ -x+y=3 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 3+2\cdot 0=4 \text{ ¡No!} \\ -0+3=3 \text{ ¡Si!} \end{cases}? \quad \text{¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta s. No pertenece a la recta.

c) El plano π que contiene al punto P y es paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\vec{v_r}=(-2,1,0) \\ \vec{v}=\vec{u_s}=(2,2,-1) \\ P(0,3,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+0-4z-2z-2(y-3)+0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-6z-2y+6=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2y+6z-6=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x+2y+6z-6=0$.

Problema 7:

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?

b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?

c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?

d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Solución:

a) Para que Ana (dado A) gane a Bea (dado B) debe sacar un 4 pues Bea solo puede sacar 3. La probabilidad de que gane Ana es la probabilidad de sacar 4. Hay cuatro caras con 4 y dos con 0.

$$P(\text{Gane Ana a Bea}) = P(\text{Ana saca } 4) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} = 0.667}$$

b) Para que Bea gane al menos 3 veces debe ganar 3, 4, 5, 6, 7 u 8 veces.

Sea X = Número de veces que gana Bea.

Es una variable binomial con los siguientes parámetros:

n = número de repeticiones = 8 y p = probabilidad de gane Bea = 1 – 2/3 = 1/3.

X = B(8, 1/3)

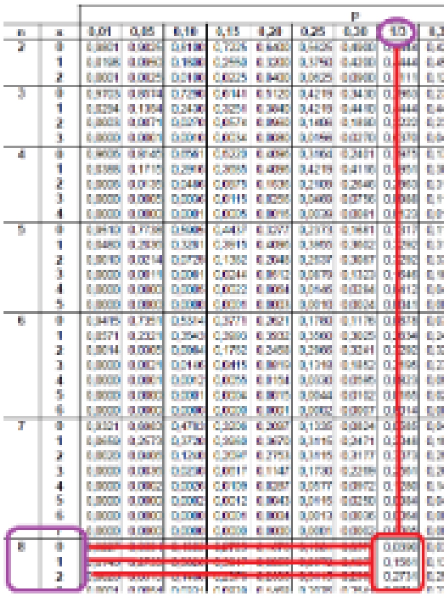
Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla binomial} \end{Bmatrix} =$$

$$= 1 - [0.0390 + 0.1561 + 0.2731] = \boxed{0.5318}$$



La probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces es 0.5318.

c) Para que Ceci (dado C) gane a Ana (dado A) puede ocurrir de dos formas: Ceci saca un 2 y Ana 0 o bien Ceci saca 6 y da igual lo que saque Ana. La probabilidad de que Ceci saque 2 es 4/6 y de que saque 6 es 2/6. La probabilidad de que Ana saque 0 es 2/6.

$$P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ceci saca 2})P(\text{Ana saca 0}) + P(\text{Ceci saca 6}) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6} = \boxed{\frac{5}{9} \simeq 0.56}$$

d) Si Ana saca 0 pierde pues es la menor puntuación que hay en los cuatro dados, si Ana saca 4 para que no gane debe sacar Ceci (dado C) un 6 o Delia (dado D) un 5 y no puede perder pues Bea va a sacar un 3 que es menor.

Para que Ana ni gane ni pierda debe sacar un 4 y Ceci debe sacar un 6 o bien Ana saca un 4 y Delia saca un 5.

Teniendo en cuenta los lanzamientos de las tres chicas el suceso del que queremos calcular la probabilidad se descompone en:

(A4, C6, D1), (A4, C6, D5), (A4, C2, D5)

$$P(\text{Ana ni gana ni pierde}) = P(Ana4, Ceci6, Delia1) + P(Ana4, Ceci6, Delia5) +$$

$$+P(Ana4, Ceci2, Delia5) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{4}{9} \simeq 0.44}$$

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?

b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?

c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

Solución:

a) X = "El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia"

X = N(μ, σ)

Nos dicen que $P(X > 115) = 0.0668$ y $P(X < 102.5) = 0.5987$.

Nos piden calcular $P(102.5 < X < 115)$.

$$P(102.5 < X < 115) = P(X < 115) - P(X < 102.5) =$$

$$= 1 - P(X > 115) - P(X < 102.5) = 1 - 0.0668 - 0.5987 = \boxed{0.3345}$$

b) Para que al menos 5 de los 6 estudiantes tengan un CI menor que 115 deben ser 5 o 6 estudiantes (todos) los que tengan ese CI.

Llamamos p = $P(X < 115) = 1 - P(X > 115) = 1 - 0.0668 = 0.9332$.

La probabilidad de que 5 de ellos tengan un CI menor que 115 = $6 \cdot 0.0668 \cdot 0.9332^5$.

La probabilidad de que 6 de ellos (todos) tengan un CI menor que 115 = 0.9332^6

La probabilidad pedida es la suma de estas dos probabilidades.

$$6 \cdot 0.0668 \cdot 0.9332^5 + 0.9332^6 = 0.9441$$

La probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115 es 0.9441.

c) Nos dicen que $P(X > 115) = 0.0668$ y $P(X < 102.5) = 0.5987$. X = N(μ, σ)

$$P(X > 115) = \left\{ \begin{matrix} \text{Tipificamos} \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix} \right\} = P\left(Z > \frac{115-\mu}{\sigma}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \le \frac{115-\mu}{\sigma}\right) = 0.0668 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{115-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.0668 = 0.9332 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{115-\mu}{\sigma} = 1.5 \Rightarrow \boxed{115 - \mu = 1.5\sigma}$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.504
0.1	0.5398	0.543
0.2	0.5793	0.583
0.3	0.6179	0.621
0.4	0.6554	0.659
0.5	0.6915	0.695
0.6	0.7257	0.729
0.7	0.7580	0.761
0.8	0.7881	0.791
0.9	0.8159	0.818
1.0	0.8413	0.843
1.1	0.8643	0.866
1.2	0.8849	0.886
1.3	0.9032	0.904
1.4	0.9192	0.920
1.5	0.9332	0.934
1.6	0.9452	0.946

$$P(X < 102.5) = 0.5987 \Rightarrow \begin{Bmatrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{102.5-\mu}{\sigma}\right) = 0.5987 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{102.5-\mu}{\sigma} = 0.25 \Rightarrow \boxed{102.5-\mu = 0.25\sigma}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	0
0.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5987	0
[illegible]	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 115-\mu = 1.5\sigma \\ 102.5-\mu = 0.25\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 115-1.5\sigma = \mu \\ 102.5-\mu = 0.25\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow 102.5-115+1.5\sigma = 0.25\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.25\sigma = 12.5 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{12.5}{1.25} = 10} \Rightarrow \boxed{\mu = 115-1.5\cdot 10 = 100}$$

La media de la distribución es 100 y la desviación típica es 10.

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Solución:

Problema 2:

Solución:

Problema 3:

Solución:

Problema 4:

Solución:

Problema 5:

Solución:

Problema 6:

Solución:

Problema 7:

Solución:

Problema 8:

Solución:

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Solución:

Problema B.2:

Solución:

Problema B.3:

Solución:

Problema B.4:

Solución: