Formación Profesional Básica
Matemáticas II
Capítulo 0:
Repaso. Números

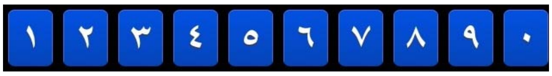
LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 1: **Números reales** de 4º A ESO de autores: Paco Moya y Nieves Zuasti
Capítulo 4: **Divisibilidad** de 2º A de autora: Fernanda Ramos



Números arábigos

ÍNDICE

Sistema de numeración egipcio

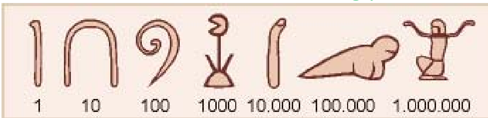


Ilustración: A. Ortega

Ilustración: A. Ortega

Sistema de numeración maya

Resumen

Ya conoces muchos tipos de números, los números naturales, que sirven para contar, los números decimales, que nos sirven, entre otras muchas cosas, para usar los céntimos, las fracciones… También conoces los números enteros, los positivos, los negativos y el cero. En la historia de la humanidad aparecen mucho antes las fracciones, en Egipto y en Babilonia, que los números negativos. En los balances contables, por ejemplo, se ponía en rojo las deudas (pero no se usaba el signo menos). En el Renacimiento Tartaglia y Cardano ya obtuvieron soluciones negativas de algunas ecuaciones (de tercer grado) pero hasta el siglo XVII no se generalizó su uso. Observa que ya se usaban expresiones decimales y fracciones positivas y sin embargo se tardó mucho en utilizar los números negativos.

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a éste:

Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: "El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer". ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

Fotografía: Clarisa Rodrígues

Y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

Observación

En este primer capítulo vamos a **repasar** muchas cosas que ya conoces, como las operaciones con los números, representar los números en una recta, las potencias… Si todo eso lo dominas suficientemente, lo mejor es que **pases muy deprisa por él**, y dediques tu tiempo a otros capítulos que te resulten más nuevos. Sin embargo, seguro que hay pequeños detalles que sí pueden resultarte nuevos, como por ejemplo que los números irracionales, junto con los números racionales forman el conjunto de los *números reales*.

Empezamos con un problema para que midas lo que recuerdas sobre operaciones con fracciones:

Actividades propuestas

1. *Las perlas del rajá*: Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

1.1. Operaciones con números enteros, fracciones y decimales

Operaciones con números enteros

Recuerda que:

Los números **naturales** son: $\mathbf{N}$ **= {1, 2, 3….}**.

Existen ocasiones de la vida cotidiana en las que es preciso usar números diferentes de los números naturales. Fíjate en estos ejemplos:

Ejemplos:

- Si se tienen 20 € y se gastan 30 euros, se tendrá una deuda de 10 euros, es decir –10 €.
- Cuando hace mucho frío, por ejemplo 5 grados bajo cero, se indica diciendo que hace –5 ºC.
- Al bajar en ascensor al sótano 3, has bajado al piso –3.

Los **números enteros** son una ampliación de los números **naturales** ($\mathbf{N}$). Los números enteros **positivos** son los números naturales y se escriben precedidos del signo +: +1, +2, +3, +4, +5… Los enteros **negativos** van precedidos del signo –: –1, –2, –3… El **cero** es el único número entero que no es ni negativo ni positivo y no lleva signo.

El conjunto de los números enteros se representa por $\mathbf{Z}$: $\mathbf{Z}$ **= {…–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3…}.**

Recuerda que:

Para **sumar** (o restar) números enteros podemos sumar por un lado todos los números enteros positivos, y los negativos por otro, restando el resultado.

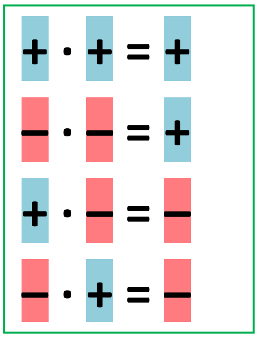
Ejemplo:

- Si *a, b* y *c* son números enteros entonces:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

Para **multiplicar** o dividir números enteros se tiene en cuenta la regla de los signos.



Ejemplo:

- **(+5) · (+4) = +20**　　**(–3) · (–5) = +15**
- **(+5) · (–4) = –20**　　**(–6) · (+5) = –30**

Actividades propuestas

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6)　　b) –6 + (–7) : (+7)　　c) +28 – (–36) : (–9–9)

d) $+11ab + (+7) \cdot (+6ab - 8ab)$　　e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$　　f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]

3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20　　b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5)　　d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

Operaciones con fracciones

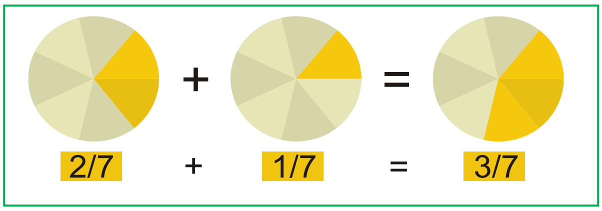
Recuerda que:

Una ***fracción*** es una expresión de la forma $\frac{m}{n}$ donde tanto m como n son números enteros. Para referirnos a ella decimos *"m partido por n"*; m recibe el nombre de ***numerador*** y n el de ***denominador***.

Las fracciones cuyo numerador es mayor que el denominador reciben el nombre de **fracciones impropias**. Las fracciones cuyo numerador es menor que el denominador reciben el nombre de **fracciones propias.**

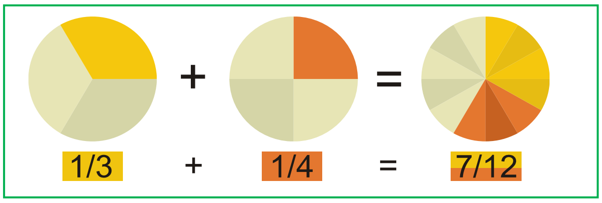
Para **sumar** o restar fracciones que tienen **el mismo denominador** se realiza la suma, o la resta, de los numeradores y se mantiene el mismo denominador.

Para sumar o restar fracciones con **distinto denominador**, se reducen a común denominador, buscando el mínimo común múltiplo de los denominadores.



Ejemplos:

- a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$
- b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$



Los denominadores son diferentes, 3 y 4. Su mínimo común múltiplo es 12. Al dividir 12 entre 3 nos da 4 y al hacerlo entre 4 obtenemos 3.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

5. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Operaciones con expresiones decimales

Una **expresión decimal** consta de dos partes: su **parte entera**, el número que está a la izquierda de la coma y su **parte decimal**, lo que se encuentra a la derecha de la coma.

Observa que:

La coma se puede escribir arriba: 3'5, o abajo: 3,5, e incluso en Estados Unidos se utiliza un punto: 3.5. En este capítulo vamos a escribir la coma abajo.

Para **sumar o restar** expresiones decimales, basta conseguir que tengan el mismo número de cifras decimales.

Ejemplo:

- a) 24,7 + 83,15 – 0,05 = 24,70 + 83,15 – 0,05 = 107, 80 b) 53,39 – 56 + 0,06 = 53,45 – 56,00 = –2,55

Para **multiplicar** dos expresiones decimales, se multiplican ignorando la coma que posee cada una de ellas. Al resultado de ese producto se le pone una coma para que surja una expresión decimal con una parte decimal de longitud igual a la suma de las cantidades de cifras decimales que tienen las expresiones decimales multiplicadas.

Ejemplo:

- $5{,}7a \cdot 3{,}2a \cdot 7{,}14a = 130{,}2336a^3$

Para **dividir** expresiones decimales igualamos el número de cifras decimales de ambos números, y luego dividimos.

Ejemplo:

- $\frac{9{,}3}{4'81}=\frac{9{,}30}{4'81}=\frac{930}{481}=1{,}9$

Actividades propuestas

6. Realiza las operaciones:

a) $31{,}3+5{,}97$ b) $3{,}52\cdot 6{,}7$ c) $11{,}51-4{,}8$ d) $19{,}1-7{,}35$

e) $4{,}32+32{,}8+8{,}224$ f) $46{,}77-15{,}6+2{,}3$ g) $1{,}16\cdot 3{,}52$ h) $3{,}2\cdot 5{,}1\cdot 1{,}4$

i) $2{,}3\cdot 4{,}11\cdot 3{,}5$ j) $4\cdot(3{,}01+2{,}4)$ k) $5{,}3\cdot(12+3{,}14)$ l) $3{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

1.2. Números racionales. Fracciones y expresiones decimales

Toda expresión decimal exacta, o periódica, se puede poner como fracción.

Una expresión **decimal exacta** se convierte en la fracción cuyo numerador coincide con el número decimal, tras eliminar la coma, y el denominador es el número 1 seguido de tantos ceros como cifras tenía la parte decimal del número en cuestión.

Ejemplo:

- $93{,}15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$

Para escribir en forma de fracción una expresión **decimal periódica**, como por ejemplo N = 1,725252525…, tenemos que conseguir dos números con la misma parte decimal para que al restar desaparezcan los decimales:

$$N = 1{,}7252525\ldots$$
$$1000N = 1725{,}2525\ldots$$
$$10N = 17{,}2525\ldots$$
$$Si\ restamos: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Para ello multiplicamos a N de forma que la coma quede después del primer periodo, en este caso después de 1725. También multiplicamos a N de manera que la coma quede al principio del primer periodo, en este caso detrás de 17. Ahora 1000N y 10N tienen la misma parte decimal (infinita) que si restamos desaparece, y podemos despejar N.

Actividades propuestas

7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23; d) 2,353535…..

e) 87,2365656565….; f) 0,9999…..; g) 26,5735735735…..

Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta, o periódica.

Recuerda que:

Si el denominador (de la fracción irreducible) sólo tiene como factores primos potencias de 2 o 5 su expresión decimal es exacta.

Ejemplo:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0{,}025;\ ya\ que\ \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, y esto es general ya que siempre habrá una potencia de 10 que sea múltiplo del denominador si éste sólo contiene doses o cincos. Fíjate que el número de decimales es el mayor de los exponentes de 2 y 5.

Si el denominador (de la fracción irreducible) tiene algún factor primo que no sea 2 ni 5 la fracción tendrá una expresión decimal periódica.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Si dividimos 1 entre 23 obtenemos un primer resto que es 10, luego otro que es 8 y seguimos, pero, ¿se repetirá alguna vez el resto y por lo tanto las cifras del cociente? La respuesta es que sí, seguro que sí, los restos son siempre menores que el divisor, en este caso del 1 al 22, si yo obtengo 22 restos distintos (como es el caso) al sacar uno más ¡tiene que repetirse!, es el llamado *Principio del Palomar*. Y a partir de ahí los valores del cociente se repiten. Por lo tanto la expresión decimal es periódica y el número de cifras del periodo es como máximo una unidad inferior al denominador (no siempre ocurre esto pero 1/23 tiene un periodo de 22 cifras, 1/97 lo tiene de 96 cifras, sin embargo 1/37 tiene un periodo de sólo 3 cifras.

Se llaman **números racionales** a aquellos cuya expresión decimal es finita o periódica, y se les representa por $\mathbf{Q}$. Acabamos de ver que se pueden escribir en forma de fracción por lo que se puede definir el conjunto de los números racionales como:

$$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

¿Por qué imponemos que el denominador sea distinto de cero? Observa que no tiene sentido una fracción de denominador 0.

Actividades propuestas

8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.

a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.

1.3. Números irracionales. Expresión decimal de los números irracionales

Existen otros números cuya expresión decimal es infinita no periódica. Ya conoces algunos: π, $\sqrt{2}$ … Cuando los griegos demostraron que existían números como $\sqrt{2}$, o como el número de oro, que no se podían poner en forma de fracción y que tenían, por tanto, infinitas cifras decimales no periódicas, les pareció algo insólito. Por eso estos números recibieron ese extraño nombre de "*irracionales*". No lo podían entender dentro de su filosofía. Lo interesante es que existe una longitud que mide exactamente $\sqrt{2}$, que es la diagonal de cuadrado de lado 1, o la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1.

El método para demostrar que $\sqrt{2}$ no se puede escribir en forma de fracción se denomina "reducción al absurdo" y consiste en suponer que sí se puede, y llegar a una contradicción. Este procedimiento sirve igual para **todas las raíces no exactas**, como con $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ …

Pero no vale para todos los irracionales. Para demostrar que π es un número irracional hay que estudiar mucho. Está relacionado con el interesante problema de la *cuadratura del círculo*. Fue demostrado a finales del siglo XVIII por Lambert. Hasta ese momento todavía se seguían calculando decimales para encontrar un periodo que no tiene.

Estos números cuya expresión decimal es infinita y no periódica se denominan **números irracionales**.

Se llaman **números reales** al conjunto formado por los números racionales y los números irracionales.

Con estos números tenemos resuelto el problema de poder medir cualquier longitud. Esta propiedad de los números reales se conoce con el nombre de *completitud*.

A cada número real le corresponde un punto de la recta y a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Observa que también a cada número racional le corresponde un punto de la recta, pero no al contrario, pues $\sqrt{2}$ es un punto de la recta que no es racional.

Actividades propuestas

10. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídelo con una regla. Su longitud no es 1,4, pues $(1,4)^2$ es distinto de 2; no 1,41 pues $(1,41)^2$ es distinto de 2; ni 1,414, pues $(1,414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.

11. Halla la expresión decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

1.4. Distintos tipos de números

Notación:

∈ significa "pertenece a"

∪ significa "unión"

⊂ significa "incluido en"

∩ significa "intersección"

Ya conoces distintos tipos de números:

Naturales ➔ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Son los números que se usan para contar y ordenar. El 0 no suele considerarse un número natural.

Enteros ➔ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Son los números naturales, sus opuestos y el cero. No tienen parte decimal, de ahí su nombre. Incluyen a los Naturales.

A los números que se pueden expresar en forma de cociente de dos números enteros se les denomina números **racionales** y se les representa por la letra $\mathbf{Q}$. Por tanto

Racionales ➔ $\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Los números racionales incluyen a los Enteros.

También contienen a los números que tienen expresión decimal exacta (0,12345) y a los que tienen expresión decimal periódica (7,01252525…) pues pueden escribirse en forma de fracción.

Los números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \pi \ldots$ son los números **irracionales**, y tienen una expresión decimal infinita no periódica. Junto con los números racionales forman el conjunto de los números reales. Por tanto

Irracionales ➔ $\mathbf{I} = \Re - \mathbf{Q}$.

Son números irracionales aquellos números que **no** pueden ponerse como fracción de números enteros. Hay más de lo que podría parecer (de hecho hay más que racionales ¡!), son todos aquellos que tienen una expresión decimal que no es exacta ni periódica, es decir, **infinitas cifras decimales y sin periodo.** Ejemplos: 17,6766766676… que me lo acabo de inventar o 0,1234567891011… que se lo inventó Carmichael. Invéntate uno, busca en Internet y si no lo encuentras, pues es tuyo (por ahora ☺)

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Reales ➔ $\Re = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$.

Es la unión de los números racionales y de los irracionales.

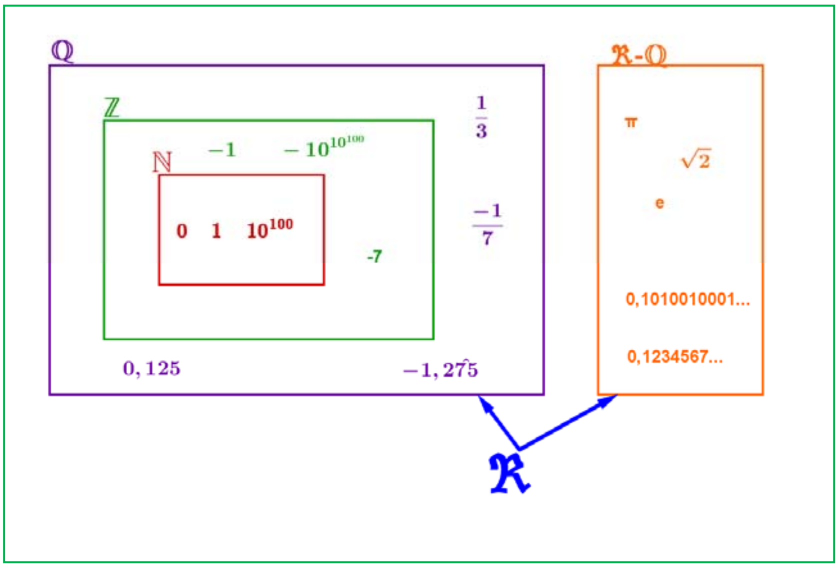
Tenemos por tanto que:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \Re.$$

$$\mathbf{I} \quad \subset \Re$$

¿Son estos todos los números?

No, los reales forman parte de un conjunto más amplio que es el de los Números Complejos $\mathbf{C}$ (en 1º de bachillerato se estudian en la opción de Ciencias).

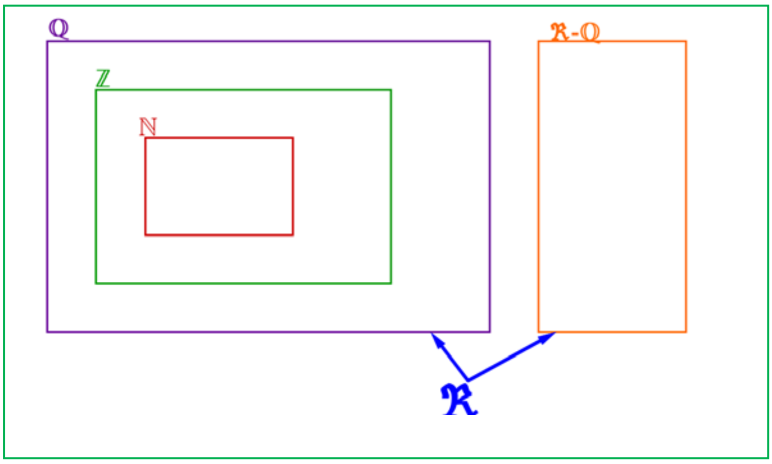


Actividades propuestas

12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{I}$	$\Re$
−7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212…					
π					
1/2					
1,99999…					

13. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:



14. ¿Puedes demostrar que 4,99999… = 5?, ¿cuánto vale 2,5999…? Escríbelos en forma de fracción.

15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

2. DIVISIBILIDAD

2.1. Múltiplos y divisores de un número entero

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

- Escribe en tu cuaderno la del 3 y la del 6.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 3 y de 6.

Se definen los **múltiplos** de un número entero ***n*** como los números que resultan de multiplicar ese número ***n*** por todos los números enteros.

Ejemplo:

- La tabla del 3 que has escrito antes está formada por los valores:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54,….

Todos ellos son múltiplos de 3.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{3}$

Es decir: $\dot{3} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$.

Ejemplo:

- Cuenta los múltiplos de 3 que hubieras podido escribir antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número entero son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

16. Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.

17. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?

15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.

18. Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.

Divisores enteros de un número

Un número entero ***a*** es **divisor** de otro número entero ***b*** cuando al dividir ***b*** entre ***a***, el resto es 0.

Nota

Todo número tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

a) 3 es **divisor** de 9 porque al dividir 9 entre 3, el resto es 0.

b) 10 es **divisor** de 100 porque al dividir 100 entre 10, el resto es 0.

c) 7 es **divisor** de 49 porque al dividir 49 entre 7, el resto es 0.

Si ***a*** es **divisor** de ***b***, entonces también se dice que ***b*** es **divisible** por ***a***.

Ejemplo:

a) 9 es **divisible** por 3 porque 3 es divisor de 9, es decir, al dividir 9 entre 3, el resto es 0.

b) 100 es **divisible** por 10 porque 10 es divisor de 100, es decir al dividir 100 entre 10, el resto es 0.

c) 49 es **divisible** por 7 porque 7 es divisor de 49, es decir, al dividir 49 entre 7, el resto es 0.

Notas

a) Como habrás deducido, las relaciones ser ***múltiplo*** y ser ***divisor*** son relaciones inversas.

b) No confundas las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- De la igualdad: $3 \cdot 7 = 21$, podemos deducir lo siguiente:

  3 y 7 son divisores de 21.

  21 es múltiplo de 3 y de 7.

  21 es divisible por 3 y por 7.

Actividades propuestas

19. A partir de la igualdad: $5 \cdot 8 = 40$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.

20. Escribe frases usando las expresiones: "*ser múltiplo de*", "*ser divisor de*" y "*ser divisible por*" y los números 27, 3 y 9.

2.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número entero es divisible por otro número entero, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por **2** cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 492, 70, 376, 900, 564, 298 son divisibles por 2, ya que terminan en 2, 0, 6, 0, 4, y 8.

¿Sabrías explicar por qué?

Recuerda que un número cualquiera lo podemos escribir con las potencias de 10:

$$4652031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1$$

Observa que en todos los sumandos, excepto el último, aparece el 10, y $10 = 2 \cdot 5$, luego todos los sumandos son múltiplos de 2. Si el último lo es, el número es múltiplo de 2, si, como en el ejemplo,

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

termina en 1, aunque el resto de los sumandos sea divisible entre 2, el último no lo es, luego el número no es divisible entre 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por **3** cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo:

- El número 531 es divisible por 3 ya que 5 + 3 + 1 = 9 que es múltiplo de 3.
- El número 4002 es divisible por 3 ya que 4 + 0 + 0 + 2 = 6 que es múltiplo de 3.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 99 es divisible por 3 ya que 9 + 9 = 18, y 18 es divisible por 3, pues 1 + 8 = 9 que es múltiplo de 3. Por tanto, 9, 18 y 99 son múltiplos de 3.
- El número 48593778396 es divisible por 3 ya que 4 + 8 + 5 + 9 + 3 + 7 + 7 + 8 + 3 + 9 + 6 = 69, y 69 es divisible por 3 pues 6 + 9 = 15, y 15 lo es pues 1 + 5 = 6, que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número entero es divisible por **4** si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 5728 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4, pues 7 · 4 = 28.
- El número 5718 **no** es divisible por 4 ya que termina en 18, que no es múltiplo de 4, pues 4 · 4 = 16 y 5 · 4 = 20.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por **5** cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

- Los números 3925 y 78216570 son divisibles por 5, pues terminan en 5 y en 0.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número entero es divisible por **6** cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

- El número 5532 es divisible por 6 ya que:
  - Lo es por 2 porque termina en 2.
  - Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.
- El número 2456 **no** es divisible por 6 ya que:
  - Lo es por 2 porque termina en 6.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

- No lo es por 3, ya que sus cifras suman 2 + 4 + 5 + 6 = 17, y 1 + 7 = 8 que no es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número entero es divisible por **9** cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9

Ejemplo:

- El número 5022 es divisible por 9 ya que: 5 + 0 + 2 + 2 = 9.
- El número 3313 **no** es divisible por 9 ya que: 3 + 3 + 1 + 3 = 10 que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número entero es divisible por **10** cuando termina en 0

Ejemplo:

- El número 825160 es divisible por 10 porque termina en 0.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa, si un número es divisible por 2 y por 5, lo es por 10.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por **11** cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11

Ejemplo:

- El número 71335 es divisible por 11 ya que: (7 + 3 + 5) – (1 + 3) = 15 – 4 = 11.
- El número 71345 **no** es divisible por 11 ya que: (7 + 3 + 5) – (1 + 4) = 15 – 5 = 10, que no es múltiplo de 11.

Actividades propuestas

21. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4520, 3411, 46095, 16392, 385500

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?

22. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.

23. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 15*A*72 sea múltiplo de 3.

b) 2205*A* sea múltiplo de 6.

c) 6*A*438 sea múltiplo de 11.

24. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.

25. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.

26. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.

27. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.

28. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que 10 = 9 + 1. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.

29. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que 10 = 11 – 1. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.

30. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
984486728	Divisible por 2	
984486725	Divisible por 5	
984486720	Divisible por 3	
783376500	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

2.3. Obtención de todos los divisores de un número entero

En principio, para hallar los divisores naturales de un número entero *N*, lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4,..., *N*. De esta manera, los divisores de *N* serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- Si queremos hallar los divisores de 54 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5,…., 54 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que ***N*** sea divisible.

Si la división es exacta, ***N* : *d* = *c*,** entonces el divisor (***d***) y el cociente (***c***) son divisores de ***N***, lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.

Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 48.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 48.

Es divisible por 2. (Termina en cifra par) → 48 : 2 = 24 → Ya tenemos dos divisores: 2 y 24.

Es divisible por 3. (4 + 8 = 12, múltiplo de 3) → 48 : 3 = 16 → Ya tenemos dos divisores: 3 y 16.

Es divisible por 4. → 48 : 4 = 12 → Ya tenemos dos divisores: 4 y 12.

Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) → 48 : 6 = 8 → Ya tenemos dos divisores: 6 y 8.

Como 48 : 8 = 6, y el cociente 6 es menor que el divisor 8, ya hemos terminado. 8 y 6 (Repetidos).

Por tanto, los divisores de 48 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48.

Actividades propuestas

31. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.

32. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) 50 es múltiplo de 10.

b) 2 es divisor de 30.

c) 4 es múltiplo de 16.

d) 66 es divisible por 11.

e) 80 es divisor de 8.

f) 3 es divisible por 12.

33. Sustituye *x* e *y* por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 372*x*54*y*.

34. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

35. Calcula todos los divisores de los siguientes números:

a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300

2.4. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores del 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores, es decir, al que no es primo.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones.

Ejemplo:

- Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- Números como: 33, 48, 54, 70, 785 o 43215678940 son compuestos.

Actividades propuestas

36. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.

37. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.5. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

a) Construimos una lista con los números del 1 al 100, en este caso, ordenados de 10 en 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.

c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.

d) Se repite de nuevo el paso c) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

- Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la lista como sigue:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

- Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una lista así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

- No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5, algunos de los cuales ya estaban tachados, todos los que terminan en 0.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7.
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11.
- ¿Hasta qué número debemos seguir tachando? ¡Piensa! ¡Piensa! Observa que 100 es igual a 10 · 10, por tanto al dividir un número menor que 100 por uno mayor que 11 el cociente es menor que 11.

Hemos llegado a una lista de la forma:

~~1~~	**2**	**3**	4	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números que no quedan tachados en ningún paso no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí en rojo).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de "*filtro*" (criba) por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los "*primos*".

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Actividades propuestas

38. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.

39. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos?

Observa que 13 · 13 = 169 y 17 · 17 = 289.

40. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

2.6. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número. Por ejemplo, si quiero expresar 11 como producto de dos números, sería:

$$11 = 1 \cdot 11 \text{ o también } 11 = 11 \cdot 1$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

- Para descomponer el número 18 podríamos hacer: $18 = 9 \cdot 2$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 9 no es un número primo.

  Su descomposición es $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$, que se expresa como $18 = 3^2 \cdot 2$.

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, un número primo no se puede descomponer, no podemos decir $11 = 11 \cdot 1$, pues 1 no es primo) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

a) Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.

b) Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.

c) Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.

d) Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

- 1) Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.
- 2) Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.
- 3) Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.
- Por ejemplo: $80 = 40 \cdot 2$. Como $40 = 4 \cdot 10$ y $10 = 2 \cdot 5$, tenemos que: $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ y por tanto, su descomposición es: $80 = 2^4 \cdot 5$.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 231:	2. Vamos a realizar otra factorización para el número 5148:
Como 231 no es múltiplo de 2, pero sí de 3, lo dividimos: 231 : 3 = 77. Como 77 es múltiplo de 7, que es el menor primo posible por el que se pueda dividir: 77 : 7 = 11. Por tanto: 231 = 3 · 7 · 11. Esto se suele realizar de la siguiente forma: 231 | 3 77 | 7 11 | 11 1 |	5148 | 2 2574 | 2 1287 | 3 429 | 11 13 | 13 1 | Por tanto: $5148 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$.

Actividades propuestas

41. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 50 b) 36 c) 100 d) 110

42. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 150 b) 121 c) 350 d) 750

43. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1240 b) 2550 c) 4520 d) 5342

44. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

45. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.

2.7. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

- Vamos a calcular los divisores de los números 60 y 84:

Divisores de 60 → 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 30, 60.

Divisores de 84 → 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 21, 28, 84

¿Cuáles son los divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

El mayor de los divisores comunes es 12 y se dice que 12 es el máximo común divisor de 60 y de 84.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

Escribimos: M.C.D (60, 84) = 12

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

En principio, parece que hallar el M.C.D no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados el menor exponente.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D

Actividades resueltas

- Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 60, 72 y 84.

1. Factorizamos cada número:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números (2 y 3) elevados el menor exponente: 2^2 y 3.

3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$\text{M.C.D}\ (60, 72, 84) = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

46. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 70 y 45 b) 121 y 55 c) 42 y 66 d) 224 y 80

47. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

2.8. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy "rudimentaria" y que se complica mucho para números grandes.

- Vamos a calcular m.c.m.(20, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 20 $\rightarrow$ 20, 40, 60, 80, 100, 120, …

Múltiplos de 15 $\rightarrow$ 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, …

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 60, 120, … pero el menor de ellos es el 60. Por tanto:

m.c.m.(20, 15) = 60.

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

- Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 60, 72 y 84 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente. En nuestro caso: 2^3, 3^2, 5 y 7.

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m.}(60, 72, 84) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Actividades propuestas

48. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 40 y 24 b) 16 y 40 c) 30 y 66 d) 24 y 80

49. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas reales**. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

- Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de cinta roja de 15 m y uno azul de 10 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y quiere cortar la cinta en trozos de la misma longitud para tenerlo preparado para empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima en que puede cortar cada rollo?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 10 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D: M.C.D. (15, 10) = 5.

Por tanto, la longitud de cada trozo de cinta en que cortará ambos rollos será de 5 m.

- Jaime, María y Raquel van a visitar a su abuela a menudo. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su abuela. Ella afirmó: "*El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer*". ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

Fotografía: Clarisa Rodrígues

Estamos buscando un número de días que será múltiplo de 2, 4 y 7 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular: m.c.m.(2, 4, 7) = 28

Por tanto, dentro de 28 días volverán a coincidir y la abuela les hará el pastel.

Actividades propuestas

50. Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?

51. La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?

52. Juan compra en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?

53. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos?

b) ¿A qué hora ocurrirá?

54. ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles les toca a cada niño.

3. POTENCIAS

3.1. Repaso de las potencias de exponente natural

Recuerda que:

Para calcular la **potencia** de exponente un número natural y de base un número cualquiera se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplos:

- a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$ b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

  c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$ d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Conviene tener en cuenta algunas particularidades que nos ayudan a abreviar el cálculo:

Las potencias de **base negativa** y exponente **par** son números positivos.

Las potencias de **base negativa** y exponente **impar** son números negativos

$(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

Ejemplos:

- $(-5)^2 = +25$
- $(-5)^3 = -125$

Actividades propuestas

55. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

3.2. Potencias de exponente fraccionario

Si el exponente es, por ejemplo, –2, no sabemos multiplicar algo *menos dos* veces. Tampoco sabemos multiplicar algo por si mismo *cero* veces. Ahora la definición anterior no nos sirve. Las definiciones que se van a dar van a mantener las propiedades que conocemos de las operaciones con potencias de exponente natural, que van a seguir siendo válidas.

Se define: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ y se define $a^0 = 1$

En efecto, $\frac{a^3}{a^3} = 1$ y $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^0 = 1$.

Recuerda

Siempre se verifica que:

$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

$c^m : c^n = c^{m-n}$

$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$

También, $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ y $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Para que continúen verificándose las propiedades de las operaciones con potencias se define $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

56. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

57. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\frac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\frac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

3.3. Operaciones con radicales

La raíz enésima de un número *a* es un número *x* que al elevarlo a *n*, da como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

La **raíz cuadrada** de un número real no negativo *a* es un *único* número no negativo *x* que elevado al cuadrado nos da *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos. Sin embargo $\sqrt[3]{-1}$ = –1 sí existe, pues (–1) · (–1) · (–1) = –1.

Observa que: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, por lo que se define:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Ejemplo:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podemos **operar** con radicales utilizando las mismas propiedades de las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$
- $\frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Recuerda

Hay operaciones con radicales que **NO** están permitidas.

10 = $\sqrt{100}$ = $\sqrt{64+36}$ que es distinto de:

$\sqrt{64}$ + $\sqrt{36}$ = 8 + 6 = 14

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En ocasiones es posible **extraer factores** de un radical.

Ejemplo:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Actividades propuestas

58. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.

59. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8000}$ factorizando previamente los radicandos

60. Calcula y simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

61. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

62. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

3.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo *n* un número entero positivo o negativo.

$$a \cdot 10^n \qquad \text{siendo} \qquad 1 \le a \le 9$$

Si el exponente ***n*** es positivo se utiliza para expresar números grandes y si el exponente ***n*** es negativo para expresar números pequeños

Ejemplo:

- $7810000000000 = 7{,}81 \cdot 10^{12}$ $\qquad$ $0{,}000000000038 = 3{,}8 \cdot 10^{-11}$
- $500.000 = 5 \cdot 10^5$ $\qquad$ $0{,}00002 = 2 \cdot 10^{-5}$
- Hay galaxias que están a 200.000.000.000.000 km de nosotros, y lo escribimos $2 \cdot 10^{14}$
- La masa de un electrón es aproximadamente de 0,000000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como $9{,}11 \cdot 10^{-28}$

Actividades resueltas

- En la leyenda del ajedrez utilizamos números muy grandes. Si no nos interesa tanta aproximación sino hacernos una idea únicamente de lo grande que es, podemos usar la notación científica.

Una aproximación para el número de granos de trigo de la casilla 64 es $9 \cdot 10^{18}$, con lo que nos hacemos una idea mejor de lo enorme que es que con el número: 9223372036854775808922337203685477580 8 que da un poco de mareo.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Escribe en notación científica: 2^{16}, 2^{32} y 2^{64}

2^{16} = 65536 ≈ $6,5 \cdot 10^4$

2^{32} = 4294967296 ≈ $4,29 \cdot 10^9$

2^{64} = 18446744073709551616 ≈ $1,8 \cdot 10^{19}$

Actividades propuestas

63. Escribe en notación científica:

a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046

Operaciones con notación científica

Para realizar **sumas y restas**, con expresiones en notación científica, se transforma cada expresión decimal de manera que se igualen los exponentes de 10 en cada uno de los términos

Ejemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2,3 \cdot 10^6 - 6,5 \cdot 10^5$ expresamos todos los sumandos con la misma potencia de 10, eligiendo la menor, en este caso 10^5: $4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6,5 \cdot 10^5$. Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6,5) = 4016,5 \cdot 10^5 = 4,0165 \cdot 10^8$

El **producto** (o el **cociente**) de dos expresiones en notación científica es el resultado de multiplicar (o de dividir) los números decimales y sumar (o restar) los exponentes de base 10.

Ejemplo:

- $2,5 \cdot 10^5 \cdot 1,36 \cdot 10^6 = (2,5 \cdot 1,36) \cdot 10^{5+6} = 3,4 \cdot 10^{11}$
- $5,4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5,4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1,35 \cdot 10^2$
- Para hacer el cociente para calcular 2^{63} dividiendo 2^{64} entre 2 en notación científica:

  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1,8 \cdot 10^{19} / 2 = 0,9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa la calculadora

Las calculadoras utilizan la notación científica. Muchas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

Utiliza tu calculadora para obtener 2^{16}, 2^{32} y 2^{64} y observa cómo da el resultado.

Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

Actividades propuestas

64. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0,000481 + 2,4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5,4 \cdot 10^6 + 7,2 \cdot 10^5$

c) $(2,9 \cdot 10^5) \cdot (5,7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3,8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3,5 \cdot 10^6) \cdot (8,1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4,8 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6,28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2,9 \cdot 10^2) : (3,98 \cdot 10^{-7})$

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

Como ya sabemos entre dos números reales hay infinitos números. Hay una notación especial para referirse a esos infinitos números que deberás dominar para éste y futuros cursos.

4.1. Intervalos. Tipos y significado

(Del lat. *intervallum*): **2.** m. Conjunto de los valores que toma una magnitud entre dos límites dados. RAE.

Definición:

Un subconjunto de $\Re$ es un intervalo si para cualquier par de elementos, a y b, de ese subconjunto se verifica que si $a < x < b$ entonces x debe pertenecer a dicho subconjunto.

Vamos a estudiar en este apartado intervalos acotados de distintos tipos: los intervalos abiertos, los intervalos cerrados y los intervalos semiabiertos (o semicerrados)

Intervalos abiertos

Si nos queremos referir al conjunto de los números que hay entre dos valores pero sin contar los extremos, usamos un **intervalo abierto**

Ejemplo:

- Los números superiores a 2 pero menores que 7 se representan por (2, 7) y se lee "*intervalo abierto de extremos 2 y 7*". A él pertenecen infinitos números como 2,001; 3,5; 5; 6,999; … pero no son de este conjunto ni el 2 ni el 7. Eso representan los paréntesis, que entran todos los números de en medio pero no los extremos.

Ejemplo:

- Los números positivos menores que 10, se representan por (0, 10), el intervalo abierto de extremos 0 y 10. Fíjate que 0 no es positivo, por lo que no entra y el 10 no es menor que 10, por lo que tampoco entra.

Nota: No se admite poner (7, 2), ¡el menor siempre a la izquierda!

También hay que dominar la expresión de estos conjuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \Re / 2 < x < 7\}.$$

Traducimos: Las llaves se utilizan para dar los elementos de un conjunto, dentro de ellas se enumeran los elementos o se da la propiedad que cumplen todos ellos. Se utiliza la x para denotar a un número real, la / significa "tal que" (en ocasiones se utiliza un punto y coma ";" o una raya vertical "|") y por último se dice la propiedad que cumplen mediante una doble desigualdad. Así que no te asustes, lo de arriba se lee: *los números reales tal que son mayores que 2 y menores que 7*.

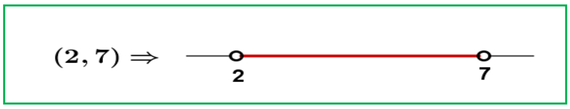
Usaremos indistintamente varias de estas nomenclaturas para que todas te resulten familiares.

Es necesario dominar este lenguaje matemático puesto que la frase en castellano puede no entenderse en otros países pero te aseguramos que eso de las llaves y la | lo entienden todos los estudiantes de matemáticas del mundo (bueno, casi todos).

El otro ejemplo: $(0, 10) = \{x \in \Re / 0 < x < 10\}$.

Por último la **representación gráfica**:

Se ponen **puntos sin rellenar** en los extremos y se resalta la zona intermedia.



En ocasiones también se pueden poner en el 2 y en el 7 paréntesis: "( )", o corchetes al revés: "] [".

Pregunta: ¿Cuál es número que está más cerca de 7, sin ser 7?

Piensa que 6,999… = 7 y que entre 6,999 y 7 hay "muchos, muchísimos …" números.

Nota:

En algunos textos los intervalos abiertos se representan así:]2, 7[lo cual tiene algunas ventajas como que los estudiantes no confundan el intervalo (3, 4) con el punto del plano (3, 4), que aseguramos que ha ocurrido (pero tú no serás uno de ellos ¿no?), o la fastidiosa necesidad de poner (2,3 ; 3,4) porque (2,3,3,4) no lo entendería ni Gauss.

Intervalos cerrados

Igual que los abiertos pero ahora **sí** pertenecen los extremos.

Ejemplo:

- El intervalo de los números mayores o iguales que –2 pero menores o iguales que 5. Ahora el –2 y el 5 sí entran. Se hace igual pero poniendo corchetes: [–2, 5].

En forma de conjunto se escribe:

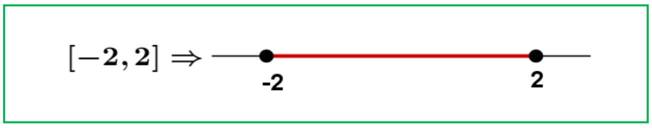
$$[-2, 5] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq 5\}.$$

Fíjate que ahora ponemos $\leq$ que significa "*menor o igual*".

Ejemplo:

- El intervalo de los números cuyo cuadrado no es superior a 4. Si lo piensas un poco verás que son los números entre el –2 y el 2, ambos incluidos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Por tanto:

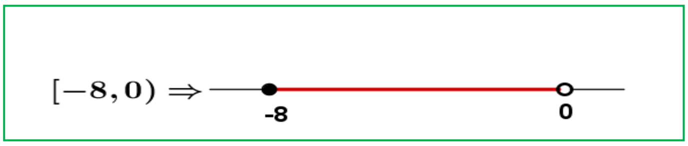
$$[-2, 2] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq 2\}.$$



La representación gráfica es igual pero poniendo **puntos rellenos**. En ocasiones también se puede representar gráficamente con corchetes: "[ ]".

Intervalos semiabiertos (o semicerrados, a elegir)

Por supuesto que un intervalo puede tener un extremo abierto y otro cerrado. La notación será la misma.



Ejemplo:

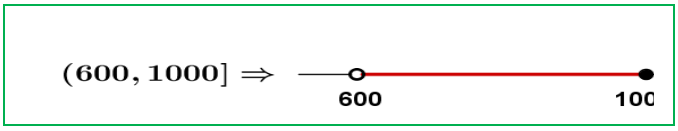
- Temperatura negativa pero no por debajo de –8 ºC:

$$[-8, 0) = \{x \in \Re; -8 \leq x < 0\}.$$

Es el intervalo cerrado a la izquierda de extremos –8 y 0.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- Números superiores a 600 pero que no excedan de 1000.
  (600, 1000] = {$x \in \Re$; $600 < x \leq 1000$}.



Es el intervalo cerrado a la derecha de extremos 600 y 1000.

4.2. Semirrectas

Muchas veces el conjunto de interés no está limitado por uno de sus extremos.

Ejemplo:

- Los números reales positivos: No hay ningún número positivo que sea el mayor. Se recurre entonces al símbolo ∞ y se escribe:

$$(0, +\infty) = \{x \in \Re \mid x > 0\}.$$

Nótese que es equivalente poner $x > 0$ que poner $0 < x$, se puede poner de ambas formas.

Ejemplo:

- Números no mayores que 5:

$$(-\infty, 5] = \{x \in \Re \mid x \leq 5\}.$$

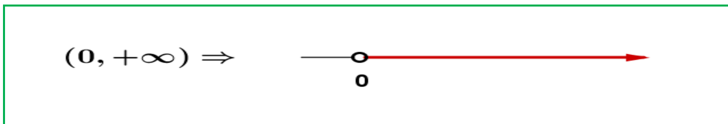
Aquí el 5 sí entra y por eso lo ponemos cerrado ("no mayor" equivale a "menor o igual")

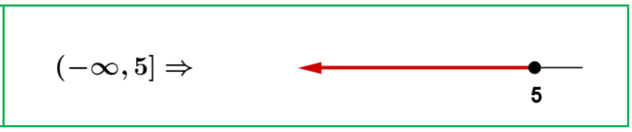
Ejemplo:

- Solución de $x > 7$:

$$(7, +\infty) = \{x \in \Re \mid x > 7\}.$$

Nota: **El extremo no acotado siempre se pone abierto**. No queremos ver esto: (7, +∞]





Las semirrectas también son intervalos. Son intervalos no acotados.

Incluso la recta real es un intervalo:

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \Re \mid -\infty < x < +\infty\} = \Re.$$

Es el único intervalo no acotado ni superiormente ni inferiormente.

Observa que con esta nomenclatura estamos diciendo que $-\infty$ y que $+\infty$ no son números reales.

4.3. Entornos

Es una forma especial de representar los intervalos abiertos.

Se define el entorno de centro a y radio r y se denota E(a, r) (otra forma usual es $E_r(a)$) como el conjunto de números que están a una **distancia de *a* menor que *r***.

E(*a*, *r*) = (*a* − *r*, *a* + *r*)

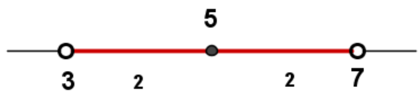
Observa que un entorno es siempre un intervalo abierto y acotado.

Con un ejemplo lo entiendes mejor:

Ejemplo:

- El entorno de centro 5 y radio 2 son los números que están de 5 a una distancia menor que 2. Si lo pensamos un poco, serán los números entre 5 – 2 y 5 + 2, es decir, el intervalo (3, 7). Es como coger el compás y con centro en 5 marcar con abertura 2.

$$E(5,2)=(3,7)\Rightarrow$$



Fíjate que el 5 está en el centro y la distancia del 5 al 7 y al 3 es 2.

Ejemplo:

- E(2, 4) = (2 – 4, 2 + 4) = (–2, 6)

Es muy fácil pasar de un entorno a un intervalo. Vamos a hacerlo al revés.

Ejemplo:

- Si tengo el intervalo abierto (3, 10), ¿cómo se pone en forma de entorno?

Hallamos el punto medio $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$ = 6,5 que será el centro del entorno. Nos falta hallar el radio:

(10 – 3) : 2 = 3,5 es el radio (la mitad del ancho).

Por tanto (3, 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

El intervalo (*b*, c) es el entorno $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Ejemplo:

- El intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2})=E(-3{,}5;4{,}5)$.

Actividades propuestas

65. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Porcentaje superior al 15 %.
b) Edad inferior o igual a 21 años.
c) Números cuyo cubo sea superior a 27.
d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras.
e) Temperatura inferior a 24 ºC.
f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3.
g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

66. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0,001)

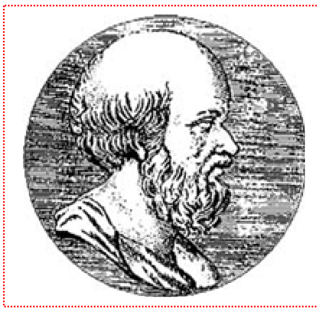
67. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (1, 7) b) (–5, –1) c) (–4, 2)

68. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales? **Pista:* 600,222333€ ¿puede ser un sueldo?

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA



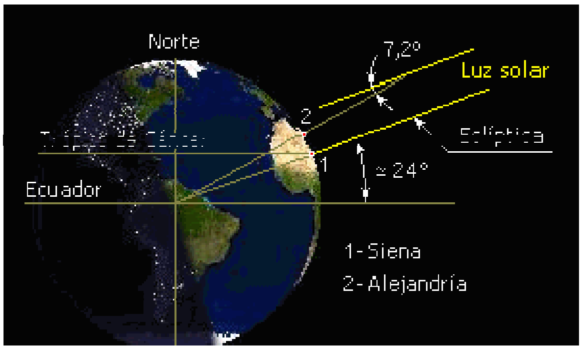
¿Quién era Eratóstenes el de la famosa criba que estudiamos antes?

Eratóstenes nació en Cyrene (ahora Libia), en el norte de Africa. Vivió entre los años 275 a C y 195 antes de Cristo.

Por varias décadas, fue el director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Fue amigo de Arquímedes.

Aún así, Eratóstenes se hizo famoso por tres descubrimientos:

- Por la **medición increíblemente precisa que hizo del diámetro de la Tierra**
- Por haber fabricado una **criba**, o un filtro, para descubrir todos los números primos.
- La invención de la esfera armilar.



¿QUÉ RELACIÓN TIENEN EL ESPIONAJE CON LA EVOLUCIÓN DE ALGUNOS INSECTOS?

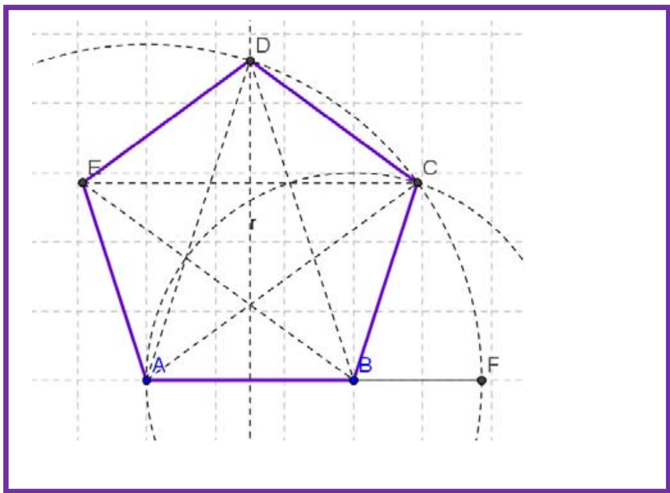
La relación entre ambos son los **números primos**.

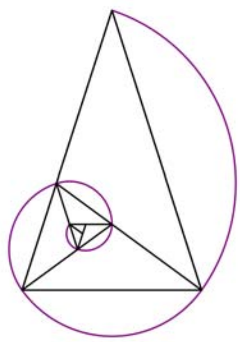
La teoría de los números primos tiene aplicación en la **criptografía**, ciencia que estudia formas de cifrar mensajes secretos que solo puedan ser descifrados por el receptor, pero por nadie más. El proceso de cifraje requiere el uso de una clave secreta y para descifrar el mensaje, normalmente, al receptor solo le hace falta aplicar la clave al revés.

Pero lo ideal sería tener una clave para un cifraje fácil y descifrado difícil. Esto se logra utilizando números primos muy grandes, de 80 cifras o más.

Hoy en día la criptografía tiene gran importancia para las comunicaciones entre los gobiernos, compras por Internet o llamadas por teléfono móvil.

El pentágono regular y el Número de Oro.





En un pentágono regular la razón entre una diagonal y el lado es Φ . Como sabemos construir Φ , la construcción de un pentágono regular es muy sencilla:

Si AB va a ser un lado de nuestro pentágono, construimos el punto F alineado con A y B que cumpla AF/AB igual a Fi (se indica cómo hacerlo en el texto).

Entonces, AB será el lado y AF la medida de la diagonal.

Trazamos la mediatriz de AB y una circunferencia de centro A y radio AF. Se cortan en D que es un vértice del pentágono.

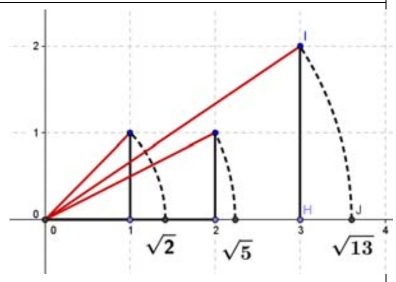
Trazamos ahora una circunferencia con centro B y radio AB, se corta con la anterior en C que es otro vértice del pentágono. Sólo queda hallar E que es muy fácil.

El pentágono regular con sus diagonales se conoce como "Pentagrama Místico" y parece ser que volvía loquitos a los pitagóricos, en él el número de Oro aparece de forma desmesurada.

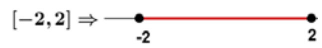
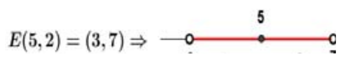
Del Pentagrama hemos sacado este triángulo, llamado Triángulo Áureo que permite obtener más triángulos áureos haciendo la bisectriz en uno de los ángulos iguales y formar esta espiral. Esta espiral es parecida a la Espiral Áurea, a la de *Fibonacci* y a la espiral logarítmica que es la que aparece en: galaxias, huracanes, conchas, girasoles …

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

RESUMEN

Conjuntos de números	**Naturales** ➔ N = {1, 2, 3, …}; **Enteros** ➔ Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionales** ➔ Q = $\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionales** ➔ I = $\Re$ – Q; $\Re$= Q∪I	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ x = 1,7252525… = 854/495
Números racionales	Su expresión decimal es exacta o periódica.	2/3; 1,5; 0,333333333….
Representación en la recta real	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	
N. Reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0,333333; π; $\sqrt{2}$
- **Divisor** - **Divisible** - **Múltiplo**	-*a* es **divisor** de *b* cuando al dividir *b* entre *a* el resto es 0. -*a* es **múltiplo** de *b* o *a* es **divisible** por *b* cuando al dividir *a* entre *b* el resto es 0.	• 2 y 5 son divisores de 10. • 10 es múltiplo de 2 y de 5. • 10 es divisible por 2 y por 5.
Criterios de divisibilidad	**2:** Acaba en 0 o cifra par. **3:** La suma de sus cifras es múltiplo de 3. **5:** Acaba en 0 o 5. **11:** La diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.	• 7892 es divisible por 2. • 4510 es divisible por 2 y por 5. • 2957 es divisible por 3. • 2057 es múltiplo de 11.
Número primo	Tiene únicamente dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Tiene más de dos divisores, es decir, no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m.(18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D.(18, 12) = 4
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos **no** pertenecen al intervalo	$(2, 7) = \{x \in \Re / 2 < x < 7\}$. 
Intervalo cerrado	Los extremos **SI** pertenecen al intervalo	$[-2, 2] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq$  $2\}$
Intervalos Semiabiertos (o semicerrados)	Intervalo con un extremo abierto y otro cerrado	$[-8,0) = \{x \in \mathbb{R} \ / -8 \leq x < 0\}$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo abierto: **E(*a* , *r*) = (*a* − *r* , *a* + *r*)**	

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realiza las operaciones:

a) (24,67 + 6,91)3,2 b) 2(3,91 + 98,1) c) 3,2(4,009 + 5,9)4,8

4. Halla el valor exacto de $\frac{0,\overset{\frown}{4}}{0,4}$ sin calculadora.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Halla 3 fracciones *a, b, c* tal que $\frac{3}{4}<a<b<c<\frac{19}{25}$

7. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, ¿te atreves a explicar el motivo?

8. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

9. Ahora divide 999 entre 37 y después haz 1:37, ¿es casualidad?

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

2,73535…; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; –2,5 ; 0,1223334444…

11. Pon ejemplos que justifiquen:

a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.

b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda

12. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

a) $\mathbf{Q} \cap (\Re - \mathbf{Q}) = \{0\}$

b) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.

d) $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}$

e) 1/47 tiene expresión decimal periódica.

13. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

14. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

15. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}\ y\ \sqrt{8}$ m.

16. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

Divisibilidad

23. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.

24. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?

25. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es…?	Verdadero/Falso
30087	Divisible por 3	
78344	Divisible por 6	
87300	Múltiplo de 11	
2985644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

26. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

27. Busca todos los divisores de 210.

28. Sustituye *A* por un valor apropiado para que:

a) 24*A*75 sea múltiplo de 5.

b) 1107*A* sea múltiplo de 3.

c) 5*A*439 sea múltiplo de 6.

29. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de *m* y *n* sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\quad n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

b) $m = 3 \cdot 5$ $\quad n = 2 \cdot 7$

c) $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $\quad n = 22 \cdot 32$

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $\quad n = 2 \cdot 52 \cdot 7$

30. Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:

a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es ………

b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es ………

31. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

a) 4 y 8	d) 7 y 10	g) 10 y 15	j) 2 y 2	m) 2, 3 y 4
b) 2 y 3	e) 6 y 12	h) 2 y 5	k) 4 y 1	n) 3,6, y 12
c) 3 y 12	f) 6 y 9	i) 4 y 6	l) 3 y 7	o) 3, 4 y 6

32. Calcula:

a) m.c.m.(8, 40) M.C.D.(8, 40)

b) m.c.m.(15, 35) M.C.D.(15, 35)

c) m.c.m.(84, 360) M.C.D.(84, 360)

33. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes

34. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?

35. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

36. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:

a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.

b) El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.

37. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?

38. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuantos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?

39. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas maquinas durante ese periodo?

Potencias

40. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

41. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

42. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

43. Extrae los factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

44. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

45. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

46. Simplifica la expresión:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

47. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35000000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

48. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9{,}109\cdot 10^{-31}$ kg. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (*Recuerda*: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

49. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

Intervalos

50. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

a. $(-5, 5]$ b. $\{x \in \Re \mid -2 < x \le 7\}$.

c. $\{x \in \Re \mid x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

51. Halla:

a. $(2, 4] \cup (3, 5]$ b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

52. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.

53. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:

a. $(0, 8)$ b. $(-6, -2)$ c. $(2, +\infty)$

54. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:

a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. $E(1, 2)$ d. $E(0, 1)$

55. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

56. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

57. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

Varios

58. Un numero irracional tan importante como Pi es el número "e". $e \approx 2,718281828...$ que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando *n* se hace muy, pero que muy grande. **Coge la calculadora** y dale a *n* valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, …

Apunta los resultados en una **tabla**.

59. Otra forma de definir *e* es $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo: 4! = 4·3·2·1 = 24, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No te preocupes, que la tecla "!" está en la calculadora. ¿Puedes calcular e con 6 cifras decimales correctas? **Nota:* Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta *n* = ¿?

60. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

Masa de un electrón	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos
Masa de la Tierra	$5,983 \cdot 10^{24}$ kilogramos
Masa del Sol	$1,99 \cdot 10^{30}$ kilogramos
Masa de la Luna	$7,3 \cdot 10^{22}$ kilogramos

61. Tomando $1,67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa de un protón y $1,2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, y suponiéndolo esférico, calcula: a) su volumen en cm^3 (Recuerda el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$. b) Encuentra el peso de un centímetro cúbico de un material formado exclusivamente por protones. c) Compara el resultado con el peso de un centímetro cúbico de agua (un gramo) y de un centímetro cúbico de plomo (11,34 gramos).

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica qué afirmación es falsa. El número –0,3333333… es un número

a) real b) racional c) irracional d) negativo

2. La expresión decimal 0,63636363…. Se escribe en forma de fracción como

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

3. Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150, 7/50 tienen una expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

4. El M.C.D.(650, 700) es:

a) 10 b) 30 c) 20 d) 50

5. Queremos alicatar una pared de 615x225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?

a) 615 b) 15 c) 225 d) No es posible

6. El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:

a) $(-\infty, -2)$ b) $(-\infty, -2]$ c) $(-2, +\infty)$ d) $(-\infty, -2[$

7. El entorno de centro –2 y radio 0,7 es el intervalo:

a) (–3,7, –2,7) b) (–2,7, –1,3) c) (–3,3, –2,7) d) (–2,7, –1,3]

8. El intervalo (–3, –2) es el entorno:

a) E(–2’5; 1/2) b) E(–3’5; –0,5) c) (–3’5, 1/2) d) (–2’5; –0,5)

9. Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. Al efectuar la operación $0{,}000078 + 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ se obtiene:

a) $3{,}6 \cdot 10^{-10}$ b) $1{,}8912 \cdot 10^{-10}$ c) $10{,}2 \cdot 10^{-5}$ d) $18{,}72 \cdot 10^{-5}$

Autores: Paco Moya, Nieves Zuasti, Fernanda Ramos y David Miranda