Formación Profesional Básica

Matemáticas II

Capítulo 3: Funciones

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 6: Funciones y Gráficas de 4º A ESO de autores: José Gallegos y David Miranda

ÍNDICE

Resumen

La Ciencia utiliza modelos, y muchos modelos se consiguen ajustando una función a una tabla de valores. Por ejemplo, en este momento estamos ajustando unas parábolas a la relación entre la duración del desarrollo en días y la temperatura de los diferentes estadios de la cochinilla roja, *Aonidiella aurantii*, que es una plaga que ataca a los cítricos produciendo desde la muerte del árbol a su desvalorización comercial, y de sus enemigos naturales, como los del género *Aphytis*, que bajo ciertas condiciones pueden llegar a regular las poblaciones de tal forma que no hagan falta utilizar otras medidas adicionales de control como insecticidas.

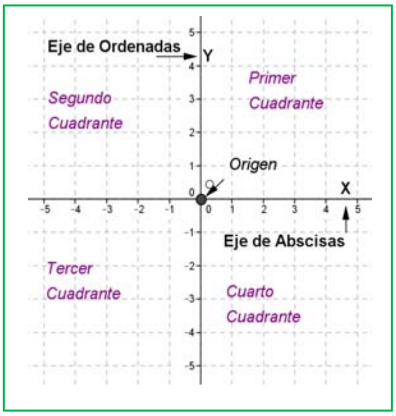
Una vez conseguida una función que se ajuste a una tabla de valores se puede pronosticar lo que va a ocurrir o dar valores que no se conocían previamente.

Ajustar modelos mediante funciones que sirvan en las situaciones más variadas es una de sus aplicaciones más importantes.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. FUNCIONES

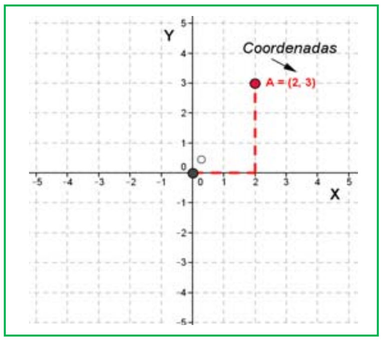
1.1. Ejes de coordenadas o cartesianos. Coordenadas cartesianas



Recuerda que:

Un conjunto formado por el **origen** *O*, los dos **ejes de coordenadas** y la **unidad de medida** es un **sistema de referencia cartesiano**.

Las **coordenadas** de un punto *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada**. A toda pareja ordenada de números (*x*, *y*) le corresponde un punto del plano.

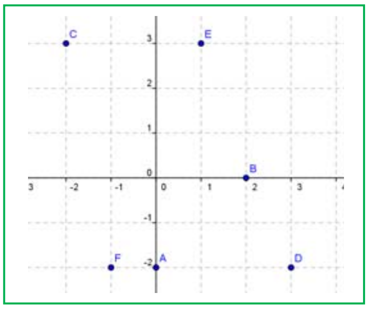


También cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas.

Ejemplo:

- En el gráfico anterior, el punto *A* tiene coordenadas (2, 3).

Actividades propuestas



1. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:

2. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

1.2. Concepto intuitivo de función

Ya sabes que:

Existen multitud de fenómenos en nuestra vida cotidiana en los que aparecen relacionadas dos magnitudes. Por ejemplo, el precio de un kilo de manzanas y el número de kilos que compramos, la duración de un trayecto y la velocidad a la que vamos…

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una, llamada **variable independiente** ("*x*"), le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra, llamada **variable dependiente** ("*y*").

Observa que si a un mismo valor de *x* le corresponden dos o más valores de *y*, entonces la relación **no** es una función. En cambio, a la inversa, en una función un mismo valor de *y* sí puede provenir de distintos valores de *x*.

Las relaciones funcionales se pueden establecer mediante una tabla de valores, una gráfica o una expresión matemática o fórmula.

Ejemplo:

- Un kilo de tomates cuesta 0,8 €/kg. La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es $y = f(x) = 0,8\ x$.

En la expresión $y = f(x)$, ***f*** es el nombre que le ponemos a la **función**, (podríamos llamarla usando otras letras, las que se usan más frecuentemente son "*f*", "*g*" y "*h*"). Entre paréntesis va la variable "***x***" que representa el número de kilos que compramos, es la **variable independiente** puesto que nosotros elegimos libremente la cantidad de tomates que queremos o necesitamos. La variable "***y***" representa el precio que debemos pagar, es la **variable dependiente** puesto que "depende" de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de "*x*".

La expresión, ***f*(*x*)**, que se lee "*f* de *x*", se suele usar con mucha frecuencia para designar a la variable dependiente porque resulta muy cómodo escribir cuánto nos costaría comprar una cantidad concreta, por ejemplo, 5 kg, se expresaría "*f* de 5" y su valor es $f(5) = 0,8·5 = 4$ €.

Actividades propuestas

3. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

a. Edad y peso de una persona concreta a lo largo de su vida
b. Peso y edad de esa misma persona
c. Un número y su mitad
d. Un número y su cuadrado
e. Precio de la gasolina y el día del mes
f. Día del mes y precio de la gasolina

4. Si hoy el cambio de euros a dólares está 1 € = 1,3 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	*x*
$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas, en la que, conociendo los euros, se obtengan los dólares. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?

Si cuando realizas el cambio en una oficina te cobran una comisión fija de 1,5 €, ¿cómo quedaría la fórmula en este caso?

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Grafo y gráfica de una función

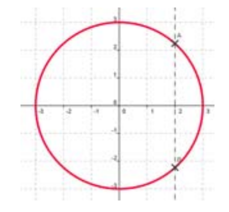
Ya que en toda función tenemos dos valores que se relacionan de forma única, podemos dibujar ambos en los ejes cartesianos de forma que, si unimos todos esos puntos, obtenemos una curva que nos permite visualizar dicha función.

Dicha representación tiene una serie de limitaciones, muchas de ellas comunes a cualquier dibujo que se pueda hacer: es aproximada puesto que los instrumentos que se utilizan para hacerlo (regla, compás, lápiz…), por muy precisos que sean (ordenadores), siempre tienen un margen de error; también existen fallos de tipo visual o de los instrumentos de medida; o muchas veces tenemos que representar los infinitos puntos del grafo en un espacio finito, lo cual es imposible y hace que solo podamos dibujar una parte de lo que se pretende, pero no todo.

A pesar de todos estos inconvenientes, representar gráficamente esta serie de puntos relacionados que conforman la función, aunque sea de forma aproximada, es importante, puesto que nos permite entender muchas propiedades a simple vista: "*más vale una imagen que mil palabras*".
Además, una representación también nos permite descubrir si la misma representa a una función o no, ya que en el dibujo es fácil interpretar si a un valor de la variable independiente le corresponde únicamente uno de la dependiente o más de uno, propiedad fundamental que define a las funciones.

Ejemplo:

- El siguiente dibujo, que corresponde a una circunferencia, al valor **0** de la variable independiente le corresponden los valores **3** y **–3** de la dependiente. Además, hay otros muchos valores a los que les pasa lo mismo, como para x = 2, que corta a la gráfica en los puntos *A* y *B*. La circunferencia no puede ser la representación de una función.



$x^2 + y^2 = 9$

La fórmula que corresponde a dicha gráfica es $x^2 + y^2 = 9$ o, también $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.

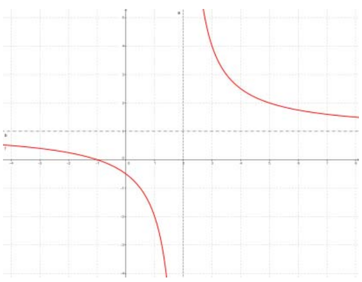
El **grafo de una función** es el conjunto de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función:

$$Grafo\,(f) = \{(x, y); x \in \Re, y = f(x)\}$$

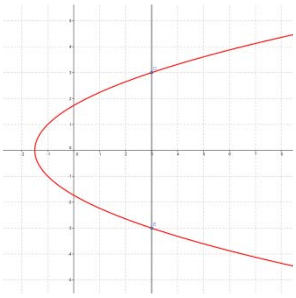
La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los puntos que forman el grafo de la misma.

Actividad resuelta

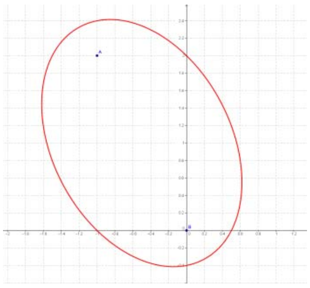
- *Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no:*



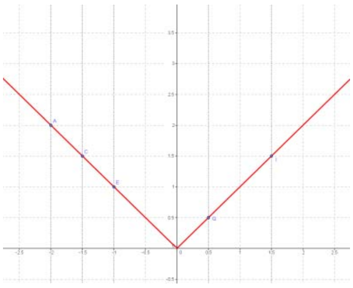
SÍ



NO



NO



SÍ

¿Cuál es la clave o regla para reconocer, a partir del dibujo, si este corresponde a una función o no?

Si trazamos rectas verticales imaginarias y estas chocan con el dibujo, como mucho, en un punto, la gráfica corresponde a una función. Si choca en dos o más puntos, no es una función.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

5. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y otra que no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

6. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–10	–5	10	–10	27
$f(x)$	–3	0	5	4	0

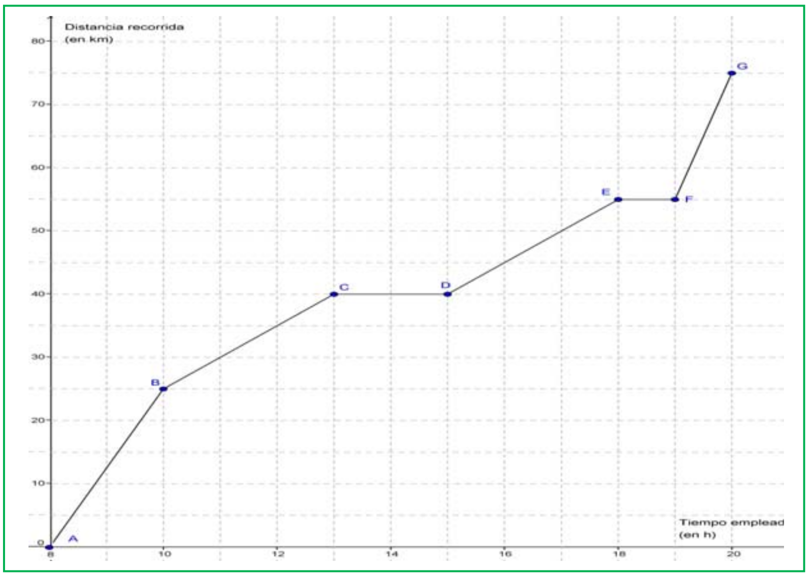
7. Una persona camina a una velocidad de 4 km/h y parte del kilómetro 10. Escribe la expresión algebraica de la función que indica los kilómetros recorridos en función del tiempo. Señala cuáles son los valores que no tiene sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

8. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. Su área es 1 u^2. Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

9. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. La tarifa mínima es de 0,50 euros, el tiempo máximo de aparcamiento es de 2 horas, cada media hora más cuesta 0,90 euros, y cada fracción, 0,05 euros. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo que se espera va a estar aparcado el vehículo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.

10. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 5 cm y de altura total del vaso 18 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

11. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:



a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?

b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?

c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?

d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?

e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.

f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.

g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable “distancia al punto de partida”, ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?

12. La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes de un equipo de baloncesto, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ¿Y la relación entre la edad y la altura? Escribe tres correspondencias que sean funcionales y tres que no.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

2.1. Dominio y continuidad.

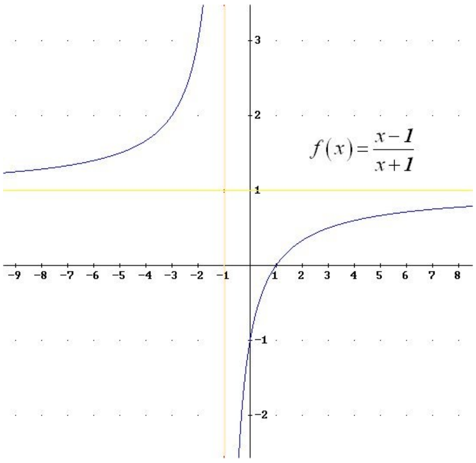
El **dominio** de una función es el conjunto de puntos en los que está definida.

$$Dom(f) = \{x \in \Re \mid \exists f(x)\}$$

El concepto de **continuidad** de una función es muy intuitivo ya que se corresponde con que la gráfica se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel. Cuando esto no ocurre, se producen "*saltos*" en determinados puntos que reciben el nombre de discontinuidades.

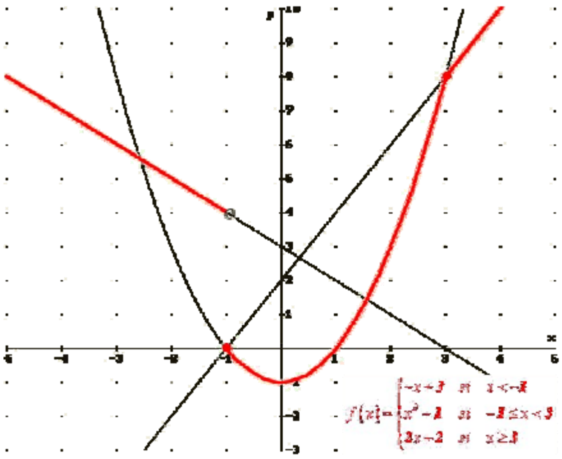
Actividad resuelta

- *¿Qué funciones son continuas según su gráfica y cuáles no? Indica en estas últimas el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad:*



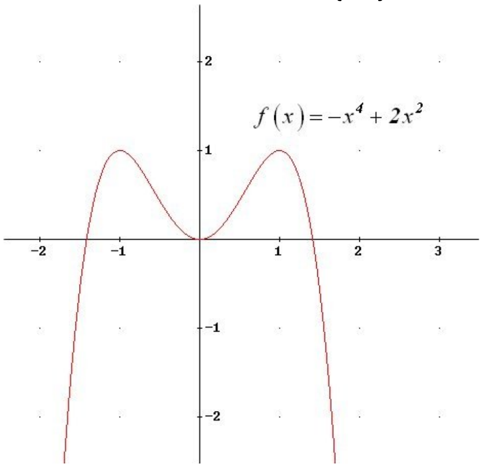
NO es continua en $x = -1$ donde tiene un salto infinito. Es continua en el resto de los puntos

Su dominio es $\Re - \{-1\}$.



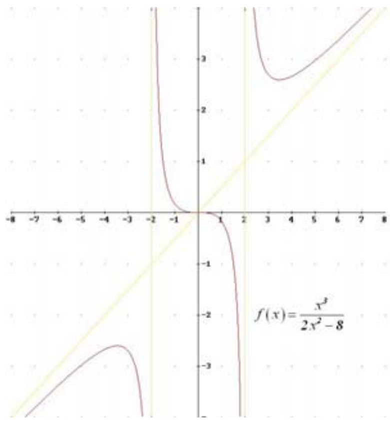
NO es continua en $x = -1$ donde tiene un salto finito de 4 unidades. En el resto, es continua.

Su dominio es $\Re$.



SÍ, es continua para cualquier valor de *x*.

Su dominio es $\Re$.



NO es continua ni en $x = -2$ ni en $x = 2$ donde tiene saltos infinitos.

Es continua en $\Re - \{-2, 2\}$, que es su dominio.

2.2. Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la variable dependiente.

Una función es **decreciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el de la variable dependiente.

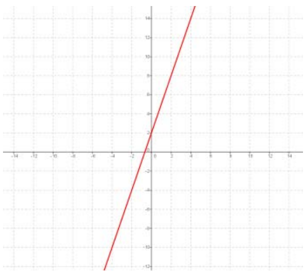
Una función es **monótona** en un intervalo cuando es únicamente creciente (o únicamente decreciente) en dicho intervalo.

Una función es **constante** en un intervalo cuando la variable dependiente toma siempre el mismo valor.

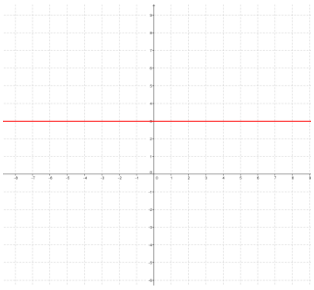
Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

Actividad resuelta

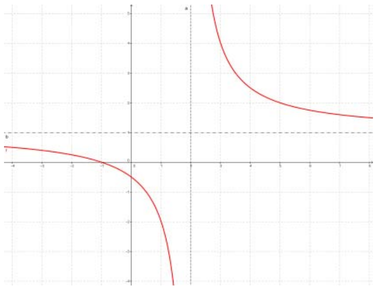
- *Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones siguientes:*



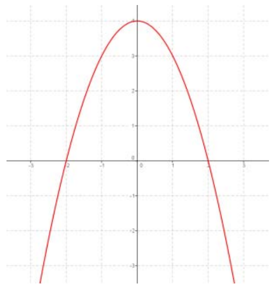
CRECIENTE siempre (monótona)



CONSTANTE siempre



DECRECIENTE hasta x = 2
DECRECIENTE desde x = 2



CRECIENTE hasta x = 0
DECRECIENTE desde x = 0

2.3. Tasa de variación

La **tasa de variación** es lo que aumenta o disminuye una función entre dos valores. Se define como:

TV = $f(x_2) - f(x_1)$, para $x_2 > x_1$.

Si la función es creciente en un intervalo, entonces la tasa de variación es positiva, y si es decreciente, negativa.

La tasa de variación media se define como: TVM = $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

La TVM es muy importante, porque no es lo mismo que una función varíe su valor una misma cantidad en un intervalo pequeño que en un intervalo grande. Por ejemplo, no es lo mismo pasar de 0 a 100 km/h en 5 segundos que en 20 segundos.

Ejemplo:

- En el desplazamiento de un vehículo en función del tiempo, la tasa de variación, es lo que se ha desplazado en un intervalo de tiempo, y la tasa de variación media indica la velocidad media en ese intervalo de tiempo.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

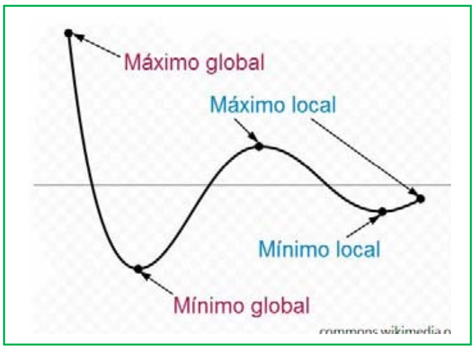
2.4. Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** (o máximo **local**) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

$(a, f(a))$ es **máximo relativo** si $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo

Si, además, el valor es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** (o máximo global) en él.

$(a, f(a))$ es **máximo absoluto** si $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$



Una función presenta un **mínimo relativo** (o mínimo **local**) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

$(a, f(a))$ es **mínimo relativo** si $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo

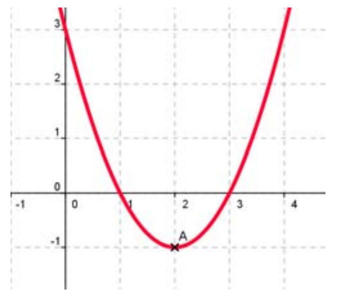
Si, además, el valor es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** (o mínimo **global**) en él.

$(a, f(a))$ es **mínimo absoluto** si $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

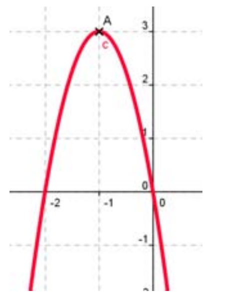
Actividades resueltas

- *Estudia los máximos y mínimos de las funciones siguientes:*



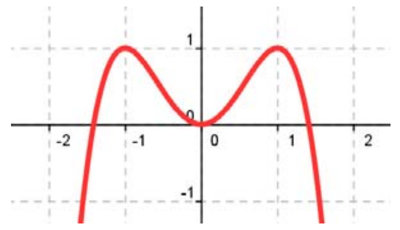
$y = x^2 - 4x + 3$

- La parábola $y = x^2 - 4x + 3$ tiene un mínimo absoluto en su vértice $(2, -1)$. No tiene máximos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice es decreciente y después es creciente.
- La parábola $y = -3x^2 - 6x$ tiene un máximo absoluto en su vértice $(-1, 3)$. No tiene mínimos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice, para $x < -1$, la función es creciente, y después, para $x > -1$, la función es decreciente.



$y = -3x^2 - 6x$

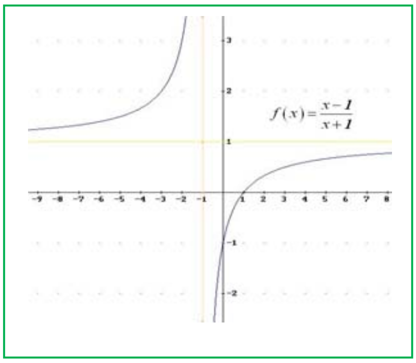
Todas las parábolas tienen un máximo o un mínimo absoluto en su vértice.



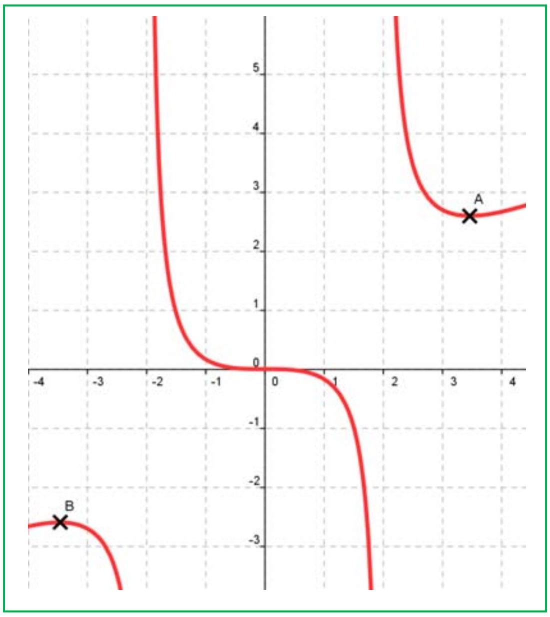
$y = -x^4 + 2x^2$

- La función $y = -x^4 + 2x^2$ tiene un mínimo absoluto en el origen $(0, 0)$ y dos máximos en $(1, 1)$ y en $(-1, 1)$. Para $x < -1$ es una función creciente, para $-1 < x < 0$, es una función decreciente, para $0 < x < 1$ es creciente, y para $x > 1$ es decreciente.

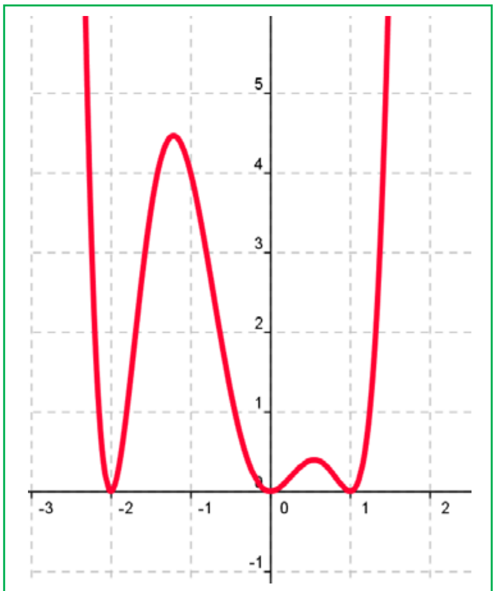
Observa, en los **máximos** siempre la función pasa de ser **creciente** a ser **decreciente**, y el los **mínimos** de ser **decreciente** a ser **creciente**.



- La función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ no tiene ni máximos ni mínimos (ni relativos ni absolutos). Es una función siempre creciente.

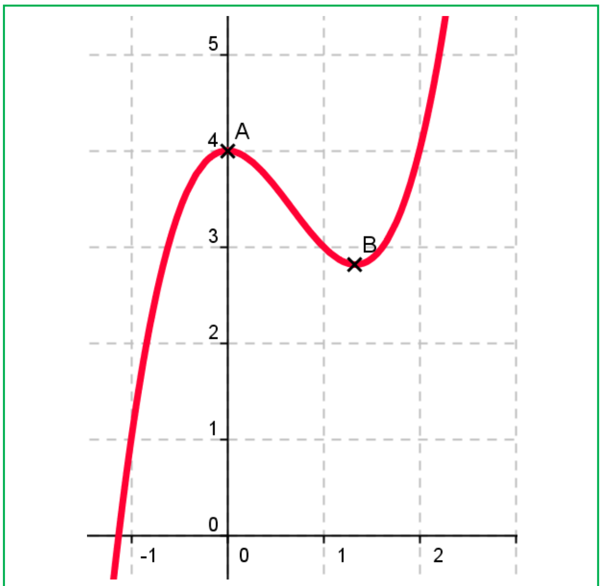


- La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$ no tiene máximo ni mínimo absoluto, pero tiene un mínimo relativo hacia x = 3, A(3'46, 2'6), y un máximo relativo hacia x = –3, B(–3'46, –2'6). Observa que el valor del mínimo relativo, 2'6, es mayor que la del máximo relativo, –2'6. Pero en valores próximos al mínimo si es el menor valor, por este motivo se denominan "*relativo*", "*local*". No son los valores menores (o mayores) que alcanza la función, pero si únicamente miramos en un entorno del punto si son valores máximos o mínimos.



$f(x) = x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$

- La función $f(x) = x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$ no tiene ningún máximo absoluto, pero si tiene dos máximos relativos, uno en el intervalo (–2, –1) y el otro en el intervalo (0, 1). Tiene, sin embargo, tres mínimos absolutos en los puntos (–2, 0), (0, 0) y (1, 0). La función es siempre positiva y su valor mínimo absoluto es **0**.



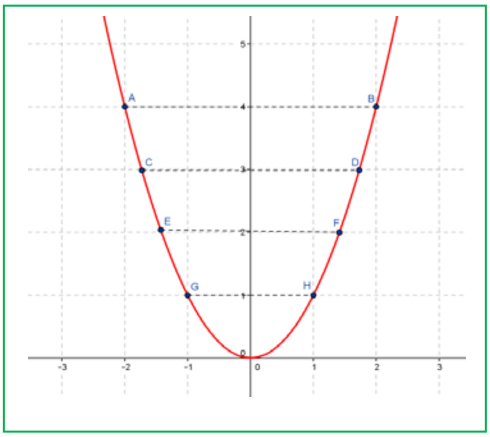
$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

- La función $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ no tiene ni máximos ni mínimos absolutos, pero tiene un máximo relativo en el punto A(0, 4) y un mínimo relativo en el punto B(4/3, 2,8). Es creciente para $x < 0$, decreciente para $0 < x < 4/3$, y creciente para $x > 4/3$.

2.5. Simetría

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número que su opuesto:

$$f(-x) = f(x)$$



Si una función es par entonces es **simétrica** respecto al **eje de ordenadas**, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

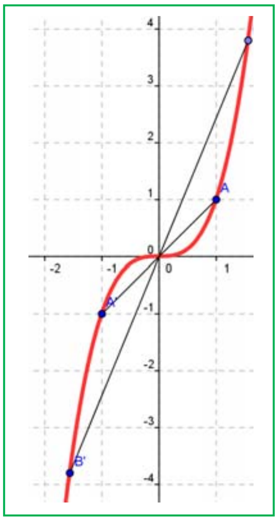
Ejemplo:

- La función cuadrática $f(x) = x^2$ es par:

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número por su opuesto:

$$f(-x) = -f(x)$$



Si una función es impar entonces es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

- La función $y = x^3$ es una función impar pues es simétrica respecto del origen.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

El segmento *AO* es igual al segmento *OA'*, y el segmento *BO* es igual al segmento *OB'*.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.6. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que los valores de la función se repiten siempre que se le añade a la variable independiente una cantidad fija, ***T***, llamada ***periodo***. Las funciones periódicas verifican que:

$$f(x + T) = f(x).$$

Ejemplo:

- Un ejemplo de función periódica es el siguiente, que corresponde a un electrocardiograma:

Se observa claramente que la gráfica se repite a intervalos iguales, ya que los latidos del corazón son rítmicos.

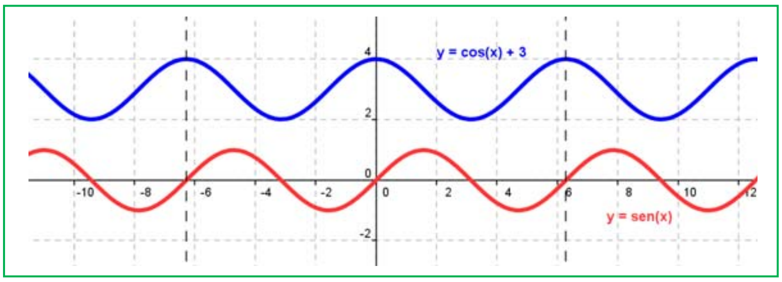
Actividad resuelta

- Las funciones:

$y = sen(x)$,

$y = cos(x) + 3$,

son funciones periódicas. Observa que su periodo es algo mayor que 6, es 2·π. En cada intervalo de longitud 2 · π se repite una oscilación. Verifican que.

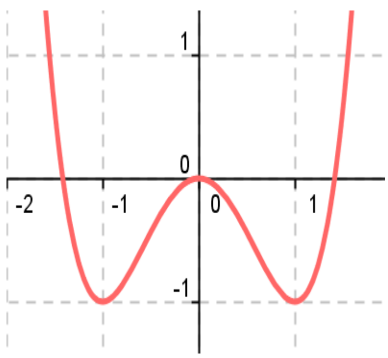


$sen(x + 2·\pi) = sen(x)$, y que: $cos(x + 2·\pi) + 3 = cos(x) + 3$.

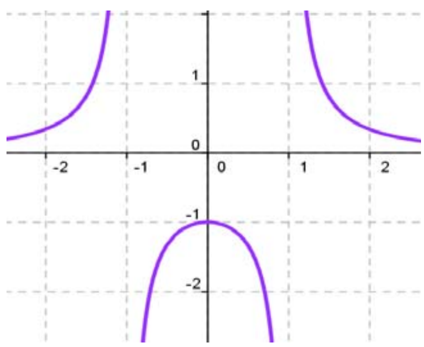
Actividades propuestas

13. Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas. Indica su dominio, si es continua (o puntos de discontinuidad si los hubiera), si es simétrica y tipo de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodo (si lo hubiera)…

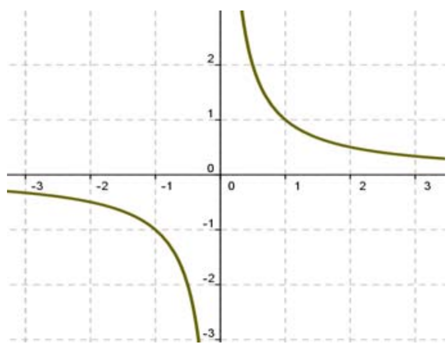
a)



b)



c)



Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. TIPOS DE FUNCIONES

3.1. Funciones polinómicas de primer grado. La recta

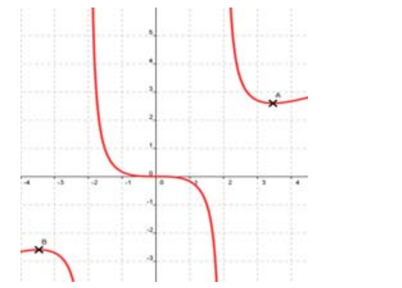
Proporcionalidad directa

Recuerda que:

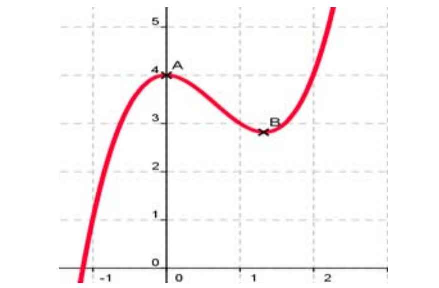
Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

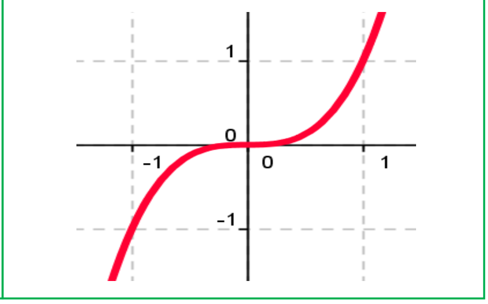
d)



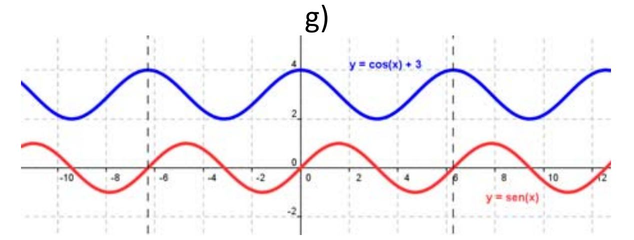
e)



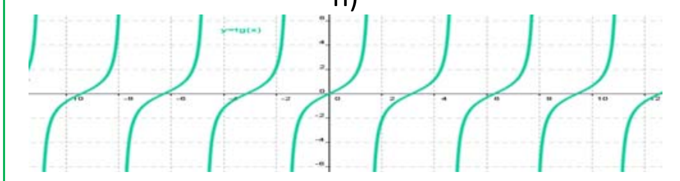
f)



g)



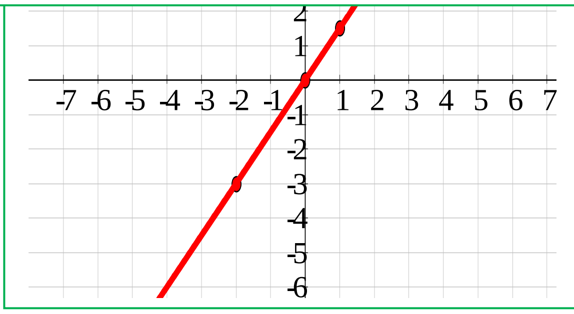
h)



Ejemplo:

- Representar gráficamente la relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:

Magnitud A (x)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (y)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$$k = \frac{-7{,}5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1{,}5}{1} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$

La relación se define así: $y = 1{,}5 \cdot x$.

Autores: José Gallegos y David Miranda

Recuerda que:

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Se puede escribir la relación entre la magnitud A (*x*) y la magnitud B (*y*) como *y* = *kx* donde *k* es la **razón de proporcionalidad**.

Ejemplo:

La relación entre el peso en kilogramos y el coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma *y* = *kx*, donde *k* es el precio de un kilo.

Muchas de las relaciones en Física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa…

Actividades propuestas

14. El consumo medio de agua al día por habitante es de 150 litros. Representa gráficamente el consumo de agua de una persona a lo largo de una semana.

Función lineal. Rectas de la forma $y = m \cdot x$

Recuerda que:

Una **función lineal** es la que tiene la fórmula ***y* = *m·x***.

Es una función polinómica de primer grado a la que le falta el término independiente.

Una función lineal corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

Por tanto, la relación de proporcionalidad directa es una **función lineal** de la forma ***y* = *m·x***.

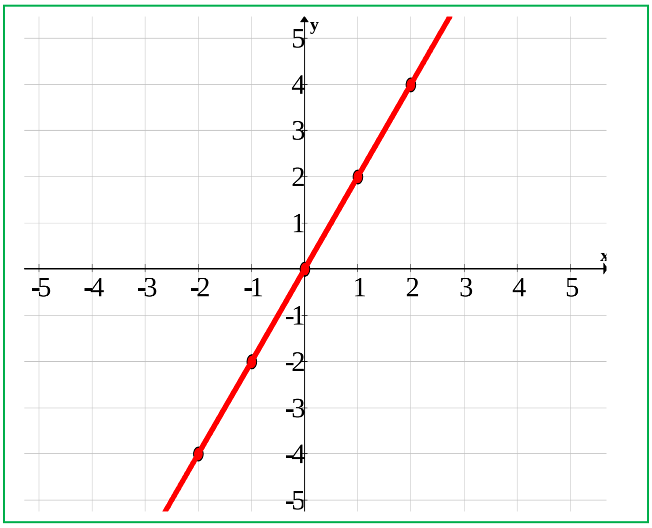
La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una **recta** que pasa por el origen.

Por lo que la gráfica de una **función lineal** es una recta.

Ejemplo

Representa la recta *y* = 2·*x*

Nota: para definir una recta es suficiente con conocer dos de sus puntos (1, 2), (0, 0).



Recuerda que:

- Las rectas *y* = *m*·*x* tienen los siguientes componentes:
- *x* es la variable **independiente**.
- *y* es la variable **dependiente**.
- *m* es la **pendiente** de la recta.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Las características más importantes de las funciones lineales son:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0, 0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todo el conjunto de los números reales: tanto *x* como *y* aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Interpretación geométrica de la pendiente

El coeficiente *m* (que es la razón de proporcionalidad) se llama **pendiente de la recta.** La pendiente *m* es lo que diferencia unas funciones lineales de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas y determina su crecimiento.

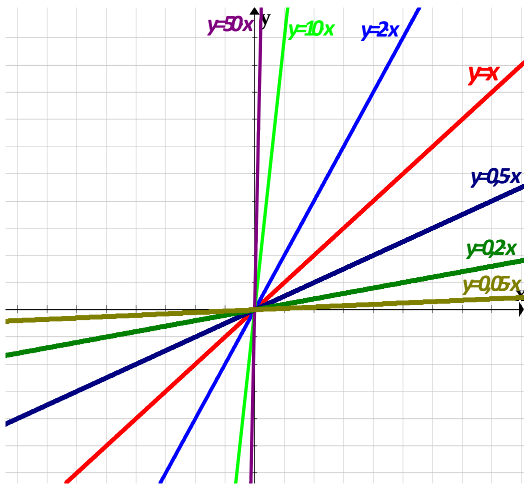
Si $m > 0$. la función es **creciente**.

Si $m < 0$, la función es **decreciente**.

Si $m = 0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece.

En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad *k*.

Actividades resueltas



Representa gráficamente las funciones:

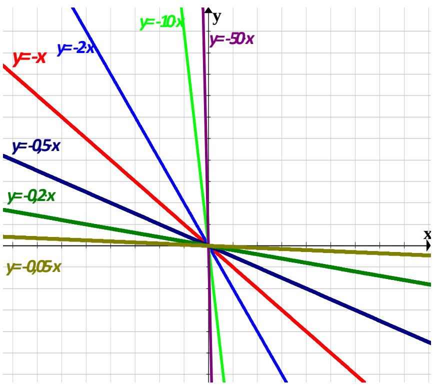
$y = x$; $y = 2x$; $y = 10x$; $y = 50x$; $y = 0,5x$; $y = 0,2x$; $y = 0,05x$.

Analiza el resultado.

- La recta $y = x$, tiene de pendiente $m = 1$.

- Si aumenta *m*, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje *y*.

- Si disminuye *m*, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta convertirse en el eje *x* cuando $m = 0$.



Representa gráficamente las funciones:

$y = -x$; $y = -2x$; $y = -10x$; $y = -50x$; $y = -0,5x$; $y = -0,2x$; $y = -0,05x$.

Analiza el resultado.

- Si aumenta *m* (es decir, disminuye en valor absoluto pues es negativo), entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje *x*: $y = 0$.

- Si disminuye *m* (es decir, aumenta en valor absoluto pues es negativo), entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje *y*.

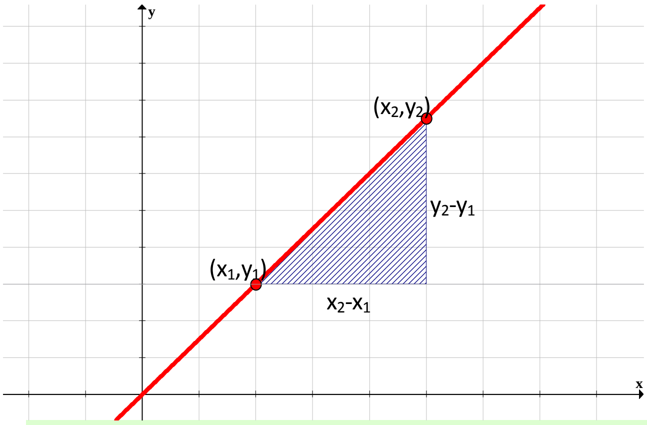
La **pendiente** de la recta $y = mx$ es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m > 0$, la recta es creciente.
- Si $m < 0$, la recta es decreciente.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza. Hemos observado que:

- Si $m > 0$:
  - Para valores altos de *m* la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de *m* la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.
- Si $m < 0$:
  - Para valores altos de *m* la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de *m* la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.



Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:

Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la **pendiente** se calcula de la siguiente forma:

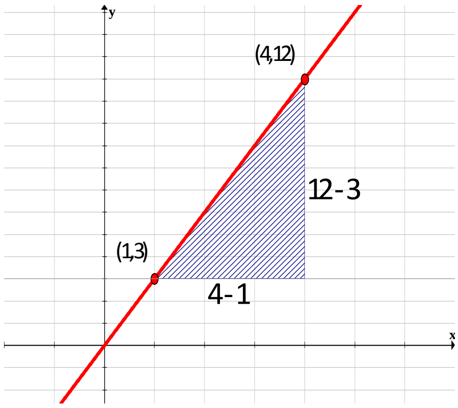
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

es decir, $m = \dfrac{\text{lo que sube}}{\text{lo que avanza}}$

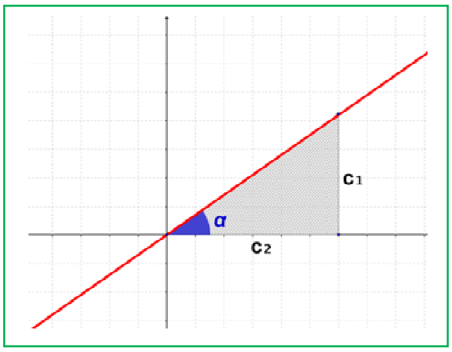
La **tasa de crecimiento media** de una función lineal coincide con su pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ejemplo:

- La recta que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 12) sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces



$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$



Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos.

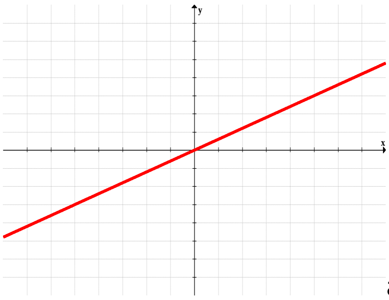
Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

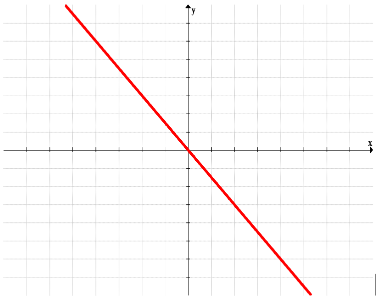
Actividades propuestas

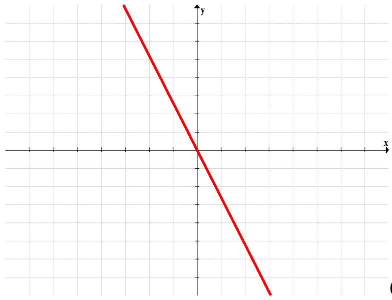
15. Representa en tu cuaderno, estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales siguientes:

a) $y = 1{,}25\cdot x$; b) $y = (3/5)\cdot x$; c) $y = 3\cdot x$; d) $y = 0{,}5\cdot x$;

16. Halla la pendiente y la expresión algebraica (fórmula) de las siguientes rectas:


a.


b.


c.

Función lineal. Rectas de la forma $y = m\cdot x + n$

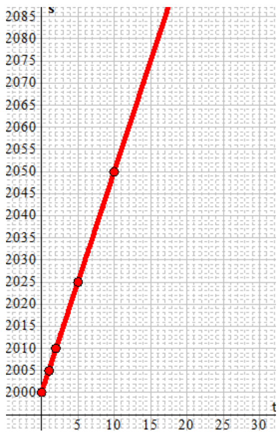
Ya sabes que:

Las funciones polinómicas de primer grado, o **funciones afines**, se describen algebraicamente de la forma $y = m \cdot x + n$ y se representan mediante **rectas**.

Ejemplo:

- *U*n ciclista que se ha trasladado 2 Km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s. Su tabla de valores y su representación gráfica son:

Tiempo (t)	Espacio (s)
0	2000
1	2005
2	2010
5	2025
10	2050



La fórmula es $s = s_0 + v \cdot t$

La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica:

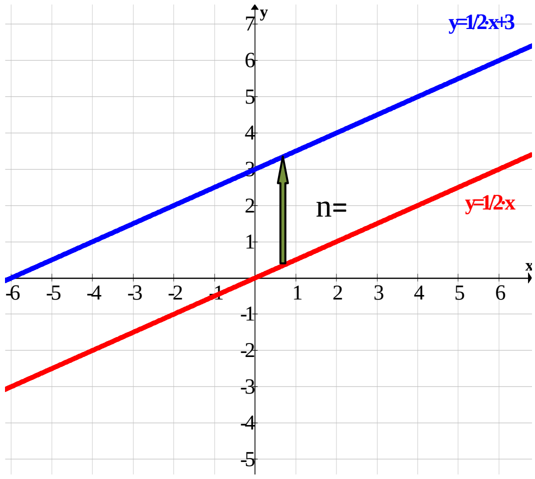
$$y = 5 \cdot x + 2.000,$$

donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s, siendo 2.000 es el espacio inicial s_0.

La **pendiente** es 5 pero la recta no pasa por el punto (0, 0), sino que corta al eje de ordenadas en el punto (2000, 0). Se dice que la **ordenada en el origen** es 2000.

Las rectas de la forma ***y = mx + n*** tienen la misma pendiente que las rectas *y = mx* pero están desplazadas en el eje de ordenadas (eje *y*) *n* posiciones (hacia arriba si *n* es positiva, y hacia abajo si es negativa). Por esta razón, a *n* se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando *x* = 0.

Actividades resueltas

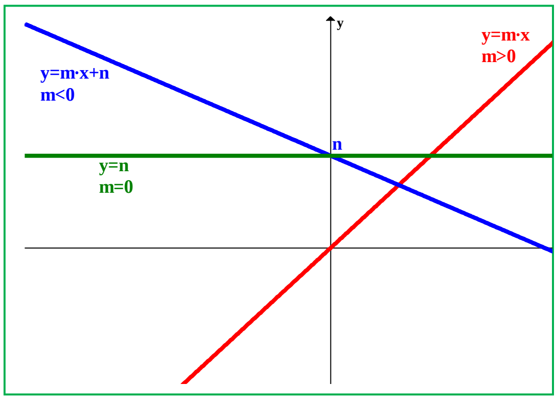


- *Compara la recta y* = (1/2)·*x con la recta y* = (1/2)·*x* + 3.

Las dos rectas tienen la misma pendiente. En ambos casos m = 1/2. Son dos rectas paralelas.
La diferencia está en el valor de la ordenada en el origen n: la recta y = (1/2)·x (donde n = 0) se ha desplazado 3 posiciones en el eje y para convertirse en la recta y = (1/2)·x + 3 (donde n = 3).

La recta $y = mx + n$ es paralela a la recta $y = mx$ (tienen la misma pendiente, m) desplazada verticalmente n posiciones.

Las funciones ***y = mx + n*** se llaman **funciones afines**, y son también funciones lineales.

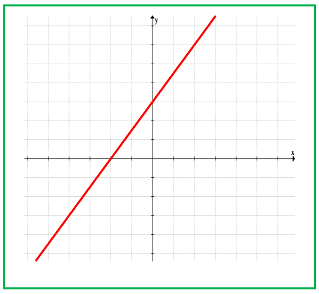
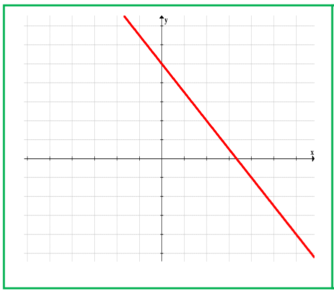
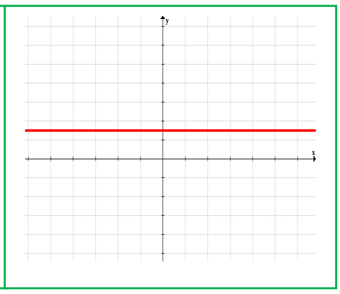
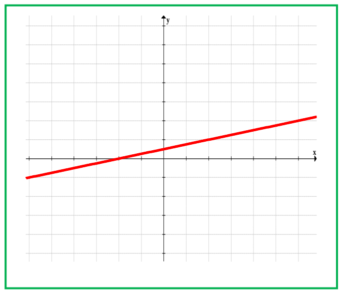


En cuanto a su pendiente, tiene el mismo significado:
Si $m > 0$. la función es **creciente**.
Si $m < 0$, la función es **decreciente**.
Si $m = 0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Pasa por el punto (n, 0) y es paralela al eje x.

La **tasa de crecimiento media** de una función afín también coincide con su pendiente: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y es constante a lo largo de toda la recta.

Actividades propuestas

17. Halla la expresión algebraica de las siguientes rectas:

18. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 5, –4, y 1/3 respectivamente.

19. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = x? ¿Y la recta y = –x?

20. ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

21. Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

22. Un metro de cierta tela cuesta 2,05 €, ¿cuánto cuestan 7 metros? ¿Y 20 m? ¿Y 15,2 m? ¿Cuánto cuestan "x" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Funciones polinómicas de segundo grado. Función cuadrática

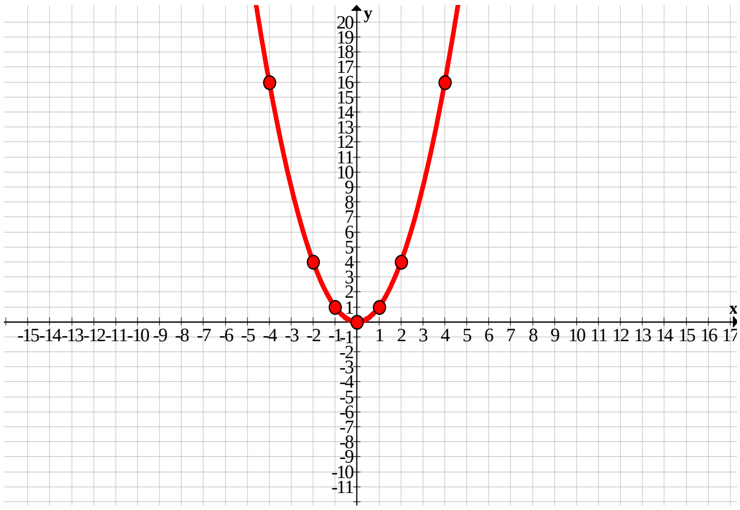
Las **funciones cuadráticas** son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de segundo grado, es decir, son de la forma $y = a \cdot x^2 + bx + c$. La curva que aparece al representar gráficamente una función cuadrática se llama **parábola**.

En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Para representar la parábola $y = x^2$ construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
5	25

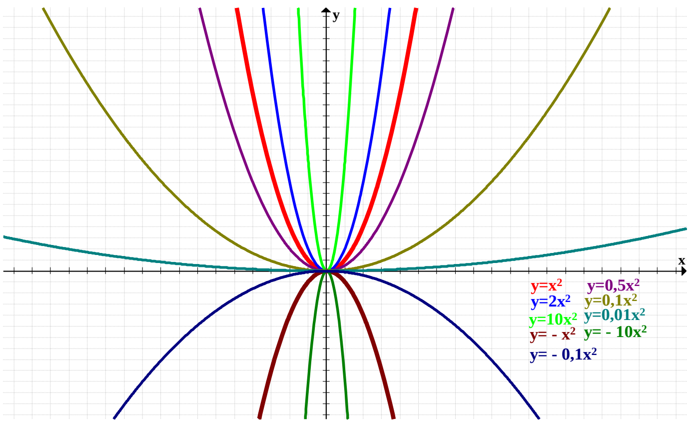


Observamos que es **decreciente** hasta el 0, y después **creciente**, luego tiene un **mínimo** absoluto en el (0, 0). Si $a = -1$, $y = -x^2$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Actividades resueltas

- *Representa gráficamente en unos mismos ejes coordenados:*

$$y = x^2,\ y = 0{,}5x^2,\ y = 2x^2,\ y = 0{,}1x^2,\ y = 10x^2,\ y = 0{,}01x^2,\ y = -10x^2,\ y = -0{,}01x^2.$$



Autores: José Gallegos y David Miranda

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se observa que:

La parábola cuya expresión algebraica es $y = a \cdot x^2$, tiene las siguientes características:

- El dominio es toda la recta real.
- La función es **continua**, porque no presenta saltos.
- Es **simétrica** respecto al eje ***y***, es decir, es una función **par**: $y = f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- Si $a > 0$ tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0):
  - al aumentar a, la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
  - al disminuir a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
- Si $a < 0$ tiene un **máximo absoluto** en el punto (0, 0):
  - al aumentar a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
  - al disminuir a, la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.
- Al punto (0, 0) se le llama **vértice** de la parábola $y = a \cdot x^2$.

La **tasa de crecimiento media** de una parábola:

$$\text{TCM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Varía al movernos por la parábola, y es mayor cuanto mayor es el coeficiente a, como se observa en las gráficas de estas parábolas.

Actividades propuestas

23. Dibuja en papel cuadriculado la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
b) Tomando valores de abscisa negativa.
c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "x"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.

24. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25. Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

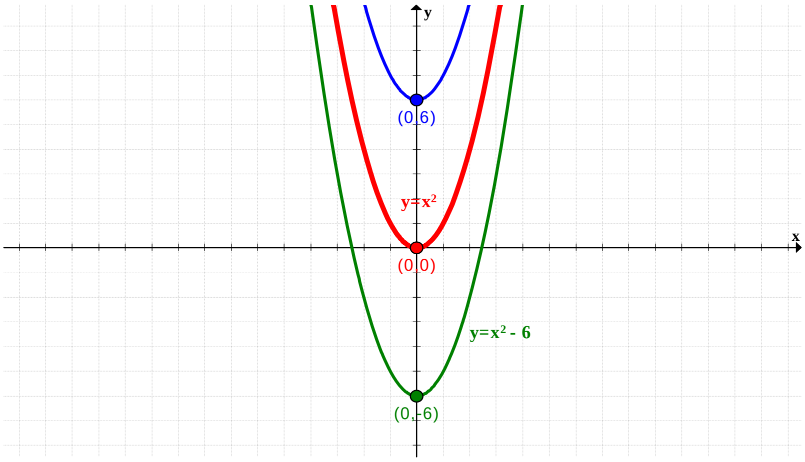
Desplazamientos verticales: Traslaciones en la dirección del eje *y*: $y = x^2 + k$

Utilizando como plantilla la gráfica de $y = x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Ejemplo:

- Comparemos las parábolas $y = x^2 + 6$ y $y = x^2 – 6$ con nuestra plantilla de $y = x^2$.

Comprueba que en este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo.



Al sumar 6 a la parábola $y = x^2$, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje *y*, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a $y = x^2$, En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0, –6), es decir, baja 6 unidades.

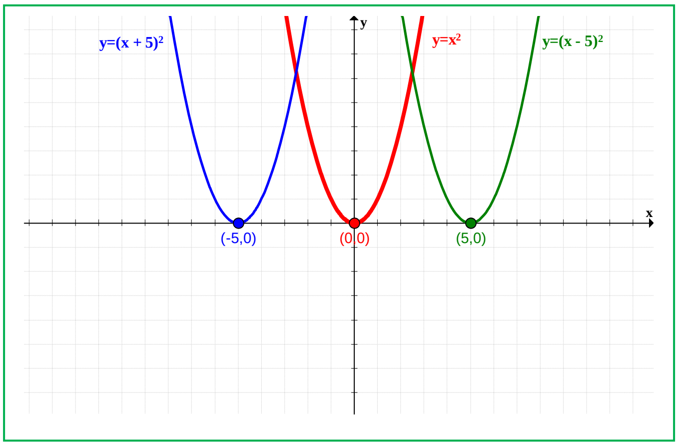
La parábola $y = x^2 + k$ tiene la misma forma que $y = x^2$ pero trasladada *k* unidades verticalmente en el eje *y*. Si *k* es positivo, la traslación es hacia arriba y si *k* es negativo, hacia abajo. El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, *k*).

Actividades propuestas

26. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 – 3$; $y = –x^2$; $y = –x^2 + 2$; $y = x^2 – 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 – 3$. La parábola $y = –x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos *q* unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

Desplazamientos horizontales: Traslaciones en la dirección del eje *x*:

$$y = (x - q)^2$$



Ejemplo:

- Compara las parábolas $y = (x + 5)^2$ e $y = (x - 5)^2$ con la plantilla de $y = x^2$.

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda.

En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (–5, 0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

La parábola $y = (x - q)^2$ tiene la misma gráfica que $y = x^2$ trasladada q unidades en el eje x hacia la derecha si $q > 0$ y hacia la izquierda si $q < 0$. El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q, 0)**.**

Actividades propuestas

27. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.

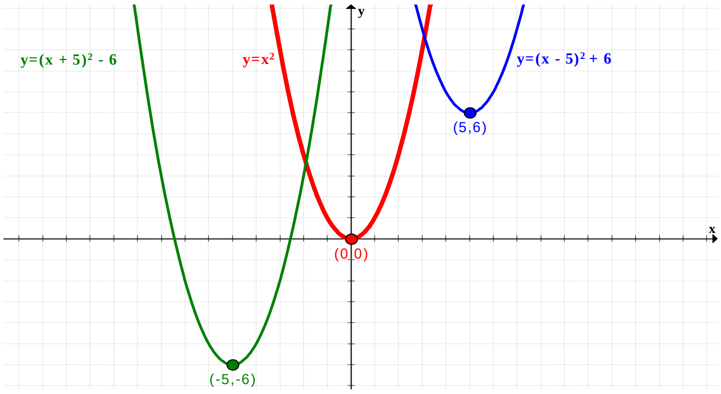
Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $y = (x - q)^2 + k$

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, trasladamos la plantilla de $y = x^2$, k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando una traslación oblicua en el plano.

Ejemplo:

- Comparamos la parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ y $y = (x - 5)^2 + 6$ con la plantilla de $y = x^2$.



La parábola $y = (x - 5)^2 + 6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo. Es decir, es la composición de los dos movimientos anteriores.

La parábola $y = (x - q)^2 + k$ tiene la misma forma que $y = x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q \ unidades \begin{cases} hacia \ la \ derecha \ si \ q > 0 \\ hacia \ la \ izquierda \ si \ q > 0 \end{cases} \quad ; \quad k \ unidades \begin{cases} hacia \ arriba \ si \ k > 0 \\ hacia \ abajo \ si \ k < 0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q, k). El eje de simetría en $x = q$.

Representación de parábolas de la forma $y = x^2 + r·x + s$

Sabemos representar las parábolas de la forma $y = (x – q)^2 + k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos representar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y = x^2 + r·x + s$?

Actividades resueltas

- *Representa la gráfica de la función polinómica $y = x^2 + 6·x – 4$*

  La función viene dada de la forma $y = x^2 + r·x + s$, y queremos convertirla en $y = (x – q)^2 + k$.

$$y = x^2 + r\cdot x + s \Leftrightarrow y = (x-q)^2 + k$$

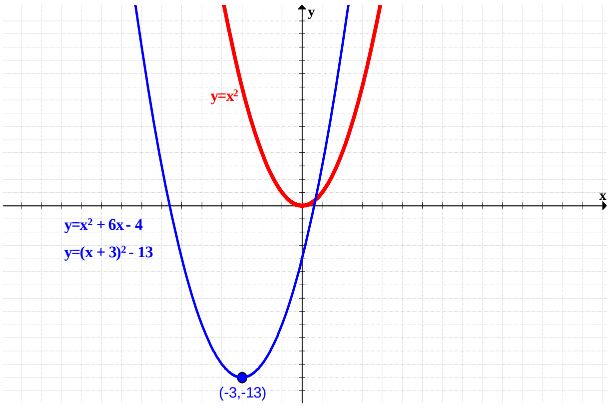
Sabemos que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, donde ya nos aparece $x^2 + 6x$. Ahora tenemos que ajustar el resto:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x+3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x+3)^2 - 13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y = x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).

Como $r = 6$ observa que la primera coordenada del vértice es $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Sustituyendo el valor de $x = –3$ en la expresión $y = x^2 + 6·x – 4$ se obtiene:

$$y = (-3)^2 + 6\cdot(-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$$



El vértice de la parábola $y = x^2 + r·x + s$ se encuentra en el punto $x = \frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Actividades propuestas

28. Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal a la derecha y 4 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

29. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$ b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c. $y = x^2 - 5$

d. $y = x^2 - 6x + 16$ e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f. $y = -x^2 + 12x - 26$

g. $y = x^2 - 10x + 17$ h. $y = -x^2 + 2x - 4$ i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

Función cuadrática. Parábolas de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y = x^2 + r \cdot x + s$, que es una parábola con la misma forma que $y = x^2$ abierta hacia arriba, o $y = -x^2 + r \cdot x + s$, abierta hacia abajo.

También sabemos cómo afecta el valor del coeficiente "a" en la gráfica de la parábola $y = a \cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar completando cuadrados:

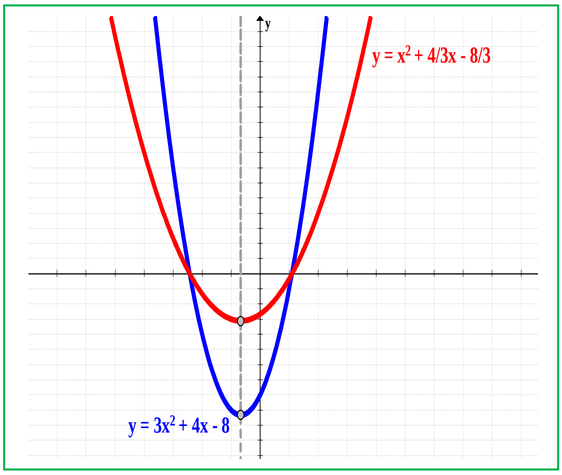
$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resueltas

- *Representa la parábola* $y = 3x^2 + 4x - 8$:

Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

$$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$



y la comparamos con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}$$

Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se estudió anteriormente.

La parábola en el caso general es:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$, es decir, $r = \frac{b}{a}$, entonces la primera coordenada del vértice es $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x = \frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

En resumen:

La función cuadrática $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ tiene su vértice en el punto de abscisa $x = \dfrac{-b}{2a}$, su ordenada en lo que resulta de sustituir ese valor en la ecuación: $y = a\left(\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2\right) + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$. La forma dependerá del valor absoluto del coeficiente "*a*", siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a > 0$
- hacia abajo si $a < 0$

Actividades propuestas

30. Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (3, 1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–4, –2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica.

Coeficiente *a*:

Si $a > 0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a < 0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El **vértice** de la parábola está en el punto $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4a}\right)$:

Puntos de corte con el eje OX:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y = 0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa. Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x = 0$. Cuando $x = 0$ la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto (0, c).

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.

El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

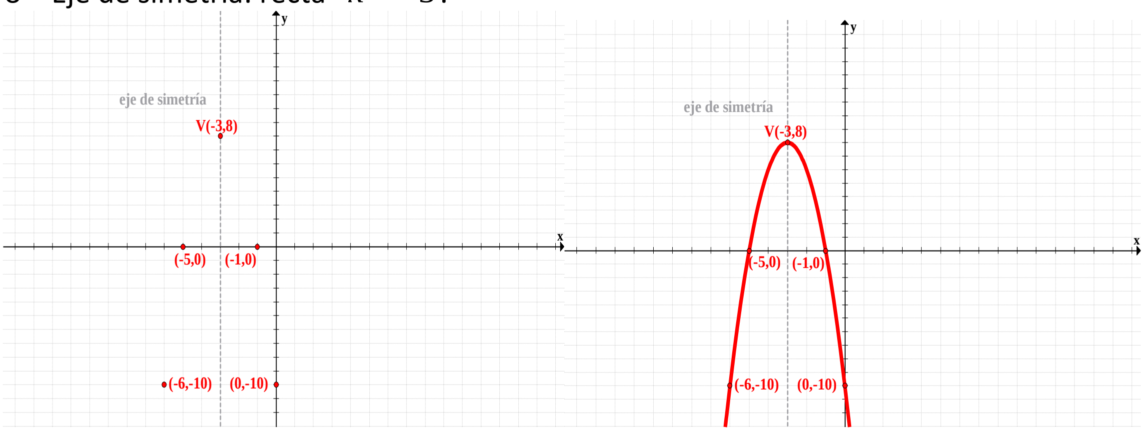
A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

Actividades resueltas

- *Determina los elementos de la parábola* $y = -2x^2 - 12x - 10$
  - $a = -2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2\cdot(-2)} = \frac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3, 8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$

      $y = -2x^2 - 12x - 10 = -2\cdot(x + 5)\cdot(x + 1)$
    - Eje OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

      La parábola también pasa por su simétrico: (–6, –10).
  - Eje de simetría: recta $x = -3$.



Actividades propuestas

31. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$	b. $y = 6x^2 - 24x$	c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
d. $y = 2x^2 + 5x - 12$	e. $y = 3x^2 + 6x - 9$	f. $y = -2x^2 + 7x + 3$
g. $y = 7x^2 + 21x - 28$	h. $y = 5x^2 - 9x + 4$	i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3.3. Ajustes a otras funciones polinómicas

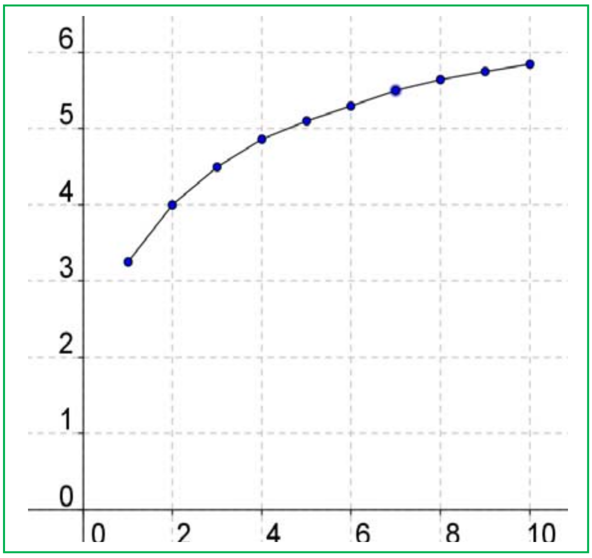
Hemos visto que las rectas, $y = mx + b$, y que las parábolas, $y = ax^2 + bx + c$, sirven de modelo para situaciones muy diversas. Pero estas situaciones no son más que una pequeña parte de la gran variedad de situaciones que existen. Debemos por tanto ampliar el arsenal de nuestras funciones. Si tenemos unos datos en una tabla de valores, queremos analizar si somos capaces de encontrar una fórmula matemática que se ajuste a esos datos, es decir, que nos permita hacer predicciones respecto a valores de la variable no considerados.

Actividad resuelta

- *Para el tratamiento de una enfermedad se está probando un nuevo medicamento con distintas dosis, anotando, para cada dosis el porcentaje de curaciones. Los resultados se recogen en la tabla:*

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Representamos gráficamente los puntos indicados en la tabla:



La gráfica de los puntos unidos mediante segmentos nos da una idea del modelo, pero no podemos todavía descubrir la ley. No existe una única forma de unir los datos. Conocer el mejor modelo está relacionado con el problema en estudio aunque esta primera aproximación gráfica ya nos da bastante información. Parece que, según se aumenta la dosis, crece el porcentaje de curaciones. No parece plausible que para una dosis intermedia, por ejemplo, 4,5 mg, el porcentaje de curaciones crezca a 10 o disminuya a 3 %, quizás podemos asegurar que estará entre 4,86 y 5,1. Podríamos estimarlo mediante una interpolación lineal y decir que el porcentaje de curaciones para una dosis de 4,5 mg se podría estimar en va a ser 4,98.

Las funciones polinómicas, de las que acabas de estudiar las rectas y las parábolas, pero que son todas aquellas de ecuación $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e$, tienen una interesante propiedad.

Si los valores de la *x* están en progresión aritmética, y calculamos las diferencias entre los valores de la "*y*", a los que llamamos **diferencias primeras**, e indicamos $\Delta_1 y$, cuando estas diferencias son constantes, entonces los puntos están en una recta.

Si de nuevo calculamos las diferencias, ahora de las diferencias primeras, y las llamamos **diferencias segundas**, y las indicamos $\Delta_2 y$, cuando estas diferencias son constantes, entonces los puntos están en una parábola.

En general, los valores de la abscisa están en progresión aritmética y si las diferencias *n*-ésimas, $\Delta_n y$ son **constantes** los puntos se ajustan a una **función polinómica de grado *n***.

Ejemplo:

- Vamos a calcular las diferencias sucesivas de la actividad resuelta anterior:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85
$\Delta_1 y$		0,75	0,5	0,36	0,24	0,2	0,2	0,14	0,11	0,1
$\Delta_2 y$			–0,25	–0,14	–0,12	–0,04	0	–0,06	–0,03	–0,01
$\Delta_3 y$				0,11	0,02	0,08	0,04	–0,06	0,03	0,02

Lo primero en que nos fijamos es que los valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 2, 3…

Repasa las operaciones para comprobar que estas diferencias están bien calculadas. Por ejemplo, la primera diferencia es: 4,0 – 3,25 = 0,75. El primer valor de las segundas diferencias es: 0,5 – 0,75=–0,25. El primer valor de las terceras diferencias es: –0,14 –(– 0,25) = +0,11.

Las diferencias primeras no son constantes, luego los datos no se ajustan a una recta, lo que ya se observaba en la gráfica. Las diferencias segundas no son tampoco constantes, luego no existe una parábola que se ajuste a esos datos. Tampoco son constantes las diferencias terceras, luego tampoco existe una función polinómica de tercer grado que se ajuste a esos datos.

Actividad resuelta

- *Comprueba que los datos de la tabla siguiente se ajustan a una recta y escribe su fórmula.*

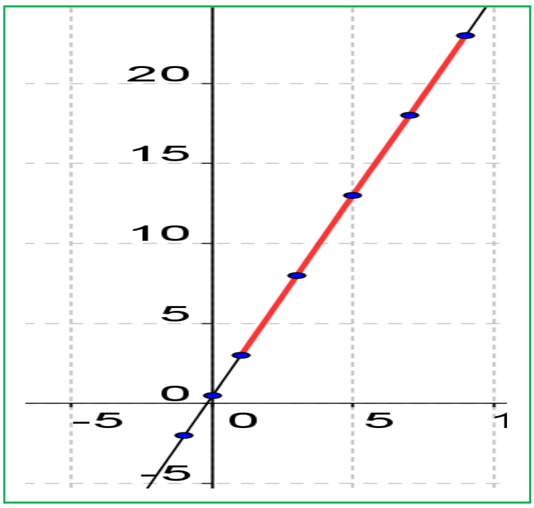
x:	1	3	5	7	9
y:	3	8	13	18	23
$\Delta_1 y$		5	5	5	5

Lo primero en que nos fijamos es que los valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 3, 5, 7, 9…

Las diferencias primeras son constantes, por lo que las diferencias segundas son todas cero. Los datos se ajustan a una recta.

Representamos los datos.

Buscamos la ecuación de la recta $y = mx + b$ imponiendo que pase por dos de los puntos, $3 = m\cdot 1 + b$; $8 = 3m + b$. Restamos: $5 = 2m$, por lo que la pendiente es: $m = 2,5$; y al sustituir en la primera ecuación se obtiene que la ordenada en el origen es $b = 0,5$. La ecuación de la recta es: $y = 2,5\,x + 0,5$.



- *Los datos de la tabla indican los metros recorridos por un móvil en el tiempo t segundos. Se ajustan a una parábola. Represéntalos gráficamente y escribe su fórmula. ¿Qué distancia habrá recorrido a los 6 segundos? ¿Y a los 12 segundos?*

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35		63	80	99		143	
$\Delta_1 y$		9	11			17	19			
$\Delta_2 y$		2				2				

Faltan datos, pero las dos únicas diferencias segundas son iguales, luego como el enunciado dice que se ajustan a una parábola, vamos a imponer que todas las diferencias segundas sean iguales a 2, y con esa información completamos la tabla.

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
$\Delta_1 y$		9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\Delta_2 y$		2	2	2	2	2	2	2	2	

Primero hemos completado todas las diferencias segundas iguales a 2. Después las diferencias primeras que faltaban. Y por último los metros. A los 6 segundos ha recorrido una distancia de 48 metros, y a los 12 segundos de 168 metros.

Buscamos la función polinómica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos:

(3, 15), (4, 24) y (5, 35):

$15 = a9 + b3 + c$

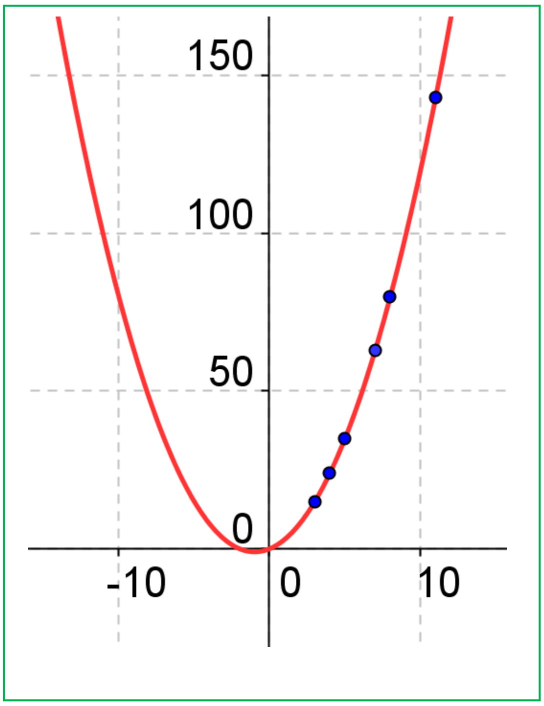
$24 = a16 + b4 + c$

$35 = a25 + b5 + c$

Restamos: $9 = 7a + b$; $11 = 9a + b$. Volvemos a restar: $2 = 2a$. Luego $a = 1$; $b = 11 - 9 \cdot 1 = 2$; $c = 15 - 9 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$. La parábola es $y = x^2 + 2x$.

Comprobamos que, en efecto pasa por los otros puntos de la tabla:

$$143 = 11^2 + 2 \cdot 11 = 121 + 22.$$



Actividades propuestas

32. Halla la función cuadrática determinada por los puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Represéntala gráficamente.

33. Halla la función polinómica que pasa por los puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) y (3, 23).

34. Halla la función polinómica determinada por los puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula las diferencias sucesivas y dibuja la gráfica.

35. Se hacen pruebas midiendo la distancia que recorre un avión desde que toca tierra en una pista de aterrizaje. Los datos están en la tabla adjunta. Existe alguna función polinómica que se ajusta a esos datos. Si la hay, escribe su fórmula.

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. En una fábrica los precios de los cables de acero dependen de los diámetros y viene dado el precio década metros en euros en la tabla siguiente. ¿Existe alguna función polinómica que se ajuste perfectamente a esos datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Precio (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37. Dada la tabla siguiente, ¿se puede ajustar exactamente una recta? Considera si algún dato es erróneo y si es así, corrígelo.

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

Al realizar un experimento es muy raro encontrar situaciones en las que una recta, una función cuadrática, una cúbica… se ajusten a los datos a la perfección.

En la actividad resuelta de las dosis de medicamento y porcentaje de curaciones, si hubiéramos seguido calculando las diferencias sucesivas nunca nos hubieran llegado a ser ninguna de ellas iguales y hubiéramos llegado a las diferencia de orden 9m, que ya sólo sería una, y nos daría: $\Delta_9 y$ = –0,67. ¡Tendríamos que escribir una función polinómica de grado 9!

Una función polinómica de grado *n* se conoce si sabemos que pasa por *n* + 1 puntos.

Así, una recta queda determinada por 2 puntos. Una parábola queda determinada por 3 puntos. Y la función polinómica de grado 9 por 10 puntos. Hay otras funciones. Los datos del medicamento se ajustan a una hipérbola: $y = 7 - \frac{15}{x+3}$, un tipo de función que vamos a estudiar a continuación.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Funciones de proporcionalidad inversa. La hipérbola *y = k/x*

Recuerda que:

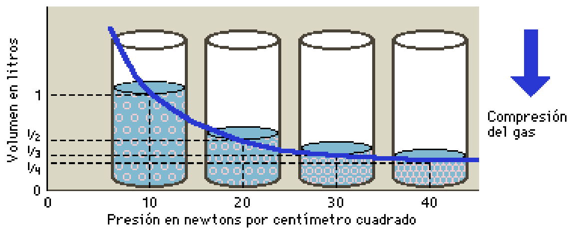
Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k* es el producto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Ejemplo

- En Física encontramos muchos ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales: La velocidad de un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer un trayecto son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, el espacio recorrido se mantiene constante, siendo él, la razón de proporcionalidad inversa $s = v \cdot t$. Otros ejemplos son: la densidad y el volumen, la potencia y el tiempo, la presión y la superficie,…

Actividades resueltas

- *Representa en el plano la ley de Boyle-Mariotte: "a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce".*



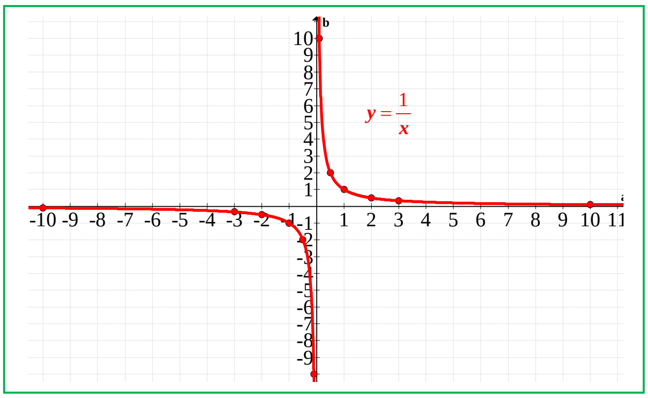
La fórmula que describe esta ley es $P \cdot V = k$.

Si despejamos el volumen final *V*, obtenemos la siguiente expresión: $V = \dfrac{k}{P}$.

La gráfica describe una curva que a medida que aumenta la presión inicial, disminuye el volumen y se va aproximando al eje x, y al contrario, si disminuye la presión, el volumen aumenta.

La **función de proporcionalidad inversa** se define mediante la expresión $y = \dfrac{k}{x}$, donde k es la **razón de proporcionalidad inversa** y las variables *x* e *y* son los distintos valores que tienen las dos magnitudes.

Su representación gráfica en el plano cartesiano es una curva llamada **hipérbola**.



Ejemplo

- Representa la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

x	−10	−3	−2	−1	−1/2	1/2	1	2	3	10
y	−1/10	−1/3	−1/2	−1	−2	2	1	1/2	1/3	1/10

Completamos una tabla de valores y representamos los puntos en un sistema de coordenadas.

Se puede observar que la gráfica nunca corta a los ejes de coordenadas, ya que ni la *x* ni la *y* pueden valer 0. El 0 no está en el dominio y tampoco en el recorrido de la función (no se puede dividir por 0). Su dominio es $\Re-\{0\}$.

Como se ve en la gráfica, y es fácil comprobar, la función es continua en todo el dominio y simétrica respecto del origen (función impar).

Actividades propuestas

38. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a. $y=\dfrac{-1}{x}$ b. $y=\dfrac{5}{x}$ c. $y=\dfrac{1}{2x}$

d. $y=\dfrac{3}{8x}$ e. $y=\dfrac{-5}{3x}$ f. $y=\dfrac{-12}{5x}$

39. Describe lo que sucede cuando varía el valor de *k*. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

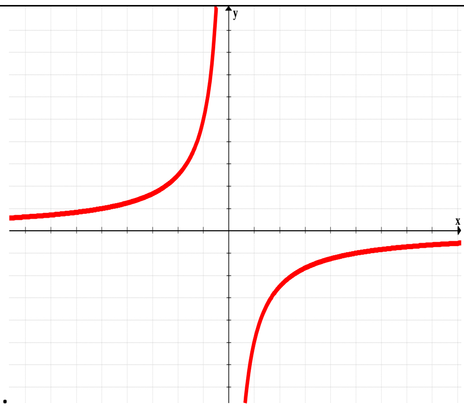
40. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. (5, 3) b. (2, −1) c. (1/2, 6)

d. (10, 4) e. (*a*, 1) f. (1, *b*)

41. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:


a.


b.

c. $y=\dfrac{9}{2x}$	d. $y=\dfrac{-5}{3x}$	e. $y=\dfrac{-0{,}3}{x}$
f. $(-5, 2)$	g. $(4, -9)$	h. $(1, 1/2)$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En general, las hipérbolas cuya expresión es $y=\dfrac{k}{x}$ tienen las siguientes propiedades:

$|k|$:

- Si el valor absoluto de k aumenta, la curva se aleja del origen de coordenadas.
- Si el valor absoluto de k disminuye, la curva se aproxima al origen de coordenadas.

Dominio: Son todos los reales menos el 0: *Dom* = $\Re - \{0\}$.

Recorrido: Su recorrido son todos los reales menos el 0: $\Re - \{0\}$.

Continuidad: La función de proporcionalidad inversa es continua en todo su dominio, pero discontinua en la recta real, ya que el 0 no está en el dominio, y por tanto, en 0 hay un salto infinito.

Simetría: Son funciones impares, esto es, son simétricas respecto al origen de coordenadas.

Asíntotas: Son las rectas cuya distancia a la gráfica es muy pequeña, cuando la curva se aleja del origen.

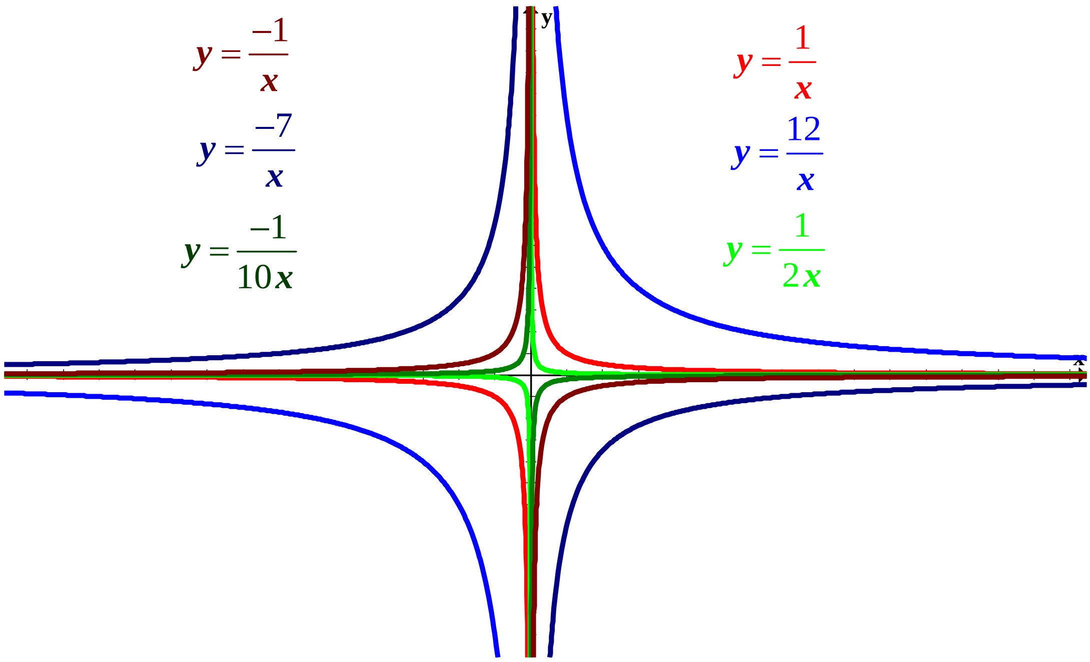
Hemos visto que no está definida en 0, pero cuando el valor de *x* se acerca a cero, el valor de *y* se hace muy grande en valor absoluto. Por eso se dice que la recta *x* = 0 es una asíntota vertical de *y* = *k*/*x*.

Del mismo modo, si nos fijamos en las gráficas, se observa que cuando los valores de *y* crecen en valor absoluto, los valores de *x* se acercan a 0 (sin tocarlo). Se dice que la recta *y* = 0 es una asíntota horizontal.

Crecimiento: depende del signo de k :

- Si $k>0$: la función es siempre **decreciente**.
- Si $k<0$: la función es siempre **creciente**.

Las asíntotas dividen a la hipérbola en dos trozos que reciben el nombre de **ramas de la hipérbola**.



La hipérbola $y = \dfrac{k}{x-a} + b$

A partir de la representación de la función $y = \frac{k}{x}$, ¿es posible representar otro tipo de hipérbolas? Al igual que ocurre con las parábolas, podemos trasladar las hipérbolas en el plano en dirección horizontal o vertical, según los valores que tomen los parámetros a y b.

Actividades propuestas

42. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

$$y=\frac{5}{x} \qquad y=\frac{5}{x}+3 \qquad y=\frac{5}{x}-3$$

$$y=\frac{-12}{x} \qquad y=\frac{-12}{x-3} \qquad y=\frac{-12}{x+3}$$

$$y=\frac{3}{x} \qquad y=\frac{3}{x-1}+4 \qquad y=\frac{5x-2}{x-1}$$

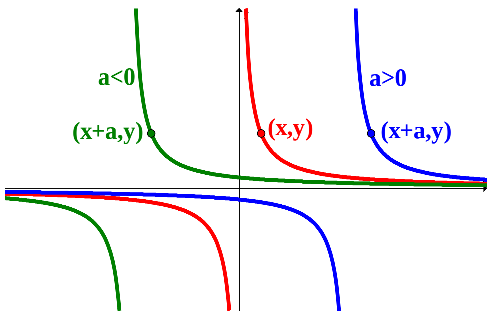
43. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros *a* y *b* en las hipérbolas del ejercicio anterior.

En general, la representación gráfica de las hipérbolas cuya expresión algebraica es $y=\frac{k}{x-b}+a$ es una traslación el plano dependiendo de los valores de a y b.

Desplazamientos horizontales

Al variar el valor de a, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza horizontalmente a unidades:

- Si $a > 0$: la hipérbola se desplaza hacia la derecha.
- Si $a < 0$: la hipérbola se desplaza hacia la izquierda.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y)$:
  $$(x, y) \to (x+a, y)$$
- El vector de traslación es el vector $(a, 0)$
-



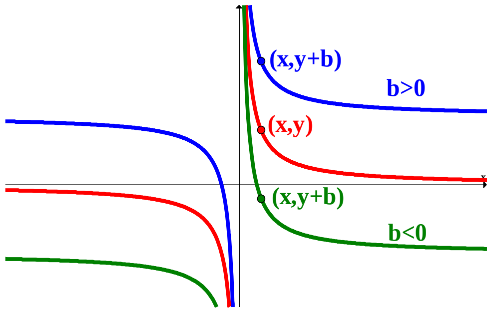
Desplazamientos verticales

Al variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza verticalmente b unidades:

- Si $\boldsymbol{b>0}$: la hipérbola se desplaza hacia arriba.
- Si $\boldsymbol{b<0}$: la hipérbola se desplaza hacia abajo.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x, y+b)$$

- El vector de traslación es el vector $(0, b)$



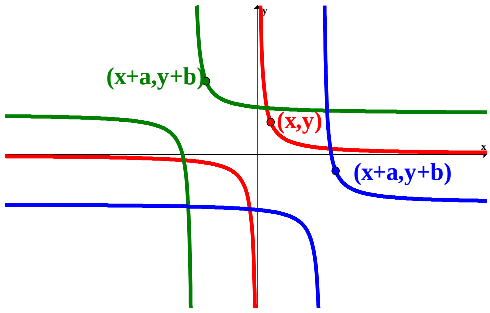
Desplazamientos oblicuos

Al variar tanto el valor $\boldsymbol{a}$ cómo el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza diagonalmente tantas unidades como sea el valor de los parámetros:

- Las direcciones hacia donde se traslada dependerá de los signos de a y b.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$

- El vector de traslación es el vector (a, b).
- El origen de coordenadas (0, 0) se traslada al punto (*a, b*).



Actividades propuestas

44. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \frac{4}{x}$ f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

45. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

46. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Hipérbola $y = \dfrac{mx+n}{px+q}$

Las funciones que se definen mediante esta expresión también se representan mediante hipérbolas. Para ello, necesitamos hacer una modificación en una expresión como la estudiada en el apartado anterior que nos resulte más fácil de manejar y representar:

$$y=\frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Dividiendo } (mx+n):(px+q) \rightarrow y=\frac{k}{x-a}+b$$

Actividades resueltas

- *Convertir la función* $y=\dfrac{3x+2}{x-7}$ *en una función cuya expresión sea más sencilla de representar.*

Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

$$(3x+2)=3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)}=\frac{3(x-7)}{(x-7)}+\frac{23}{(x-7)}=\frac{23}{(x-7)}+3$$

Esta última expresión es fácil de representar.

Actividades propuestas

47. Representa las siguientes hipérbolas:

a. $y=\dfrac{2x-4}{x+5}$ b. $y=\dfrac{3-5x}{x+2}$ c. $y=\dfrac{4x-12}{x-3}$

d. $y=\dfrac{6x+8}{1-x}$ e. $y=\dfrac{7x+5}{x-4}$ f. $y=\dfrac{6x+10}{2x-1}$

48. Representa la gráfica de la función: $y=7-\dfrac{15}{x+3}$. A) ¿Cuando x crece, "*y*" tiende a 7? ¿Tiene una asíntota horizontal *y* = 7? B) ¿Si *x* se acerca a –3, la *y* crece? ¿Tiene una asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza si esta hipérbola se ajusta a los valores de la actividad resuelta de la tabla:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.5. Funciones exponenciales

Hemos estudiado funciones polinómicas, de proporcionalidad inversa… Ahora vamos a estudiar otro tipo de funciones.

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

- Son funciones exponenciales: $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^{3x}$, $y = 5^{-x}$.

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

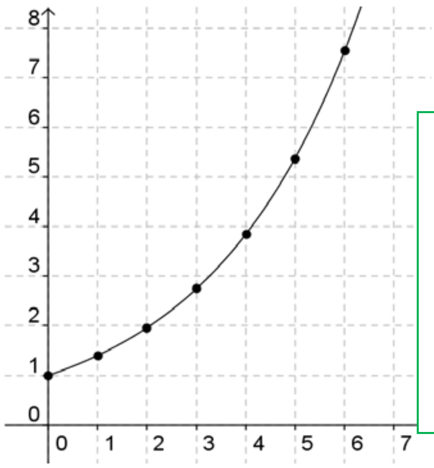
Actividad resuelta

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número *"y"* de bacterias que habrá al cabo de *"x"* horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	**Núm. bacterias (*y*)**
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gráfica de la función



Actividades propuestas

49. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1,4.

Observa que los valores de *"y"* aumentan mucho más deprisa: mientras que los valores de *"x"* aumentan de 1 en 1 los valores de *y* se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

50. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "*x*" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

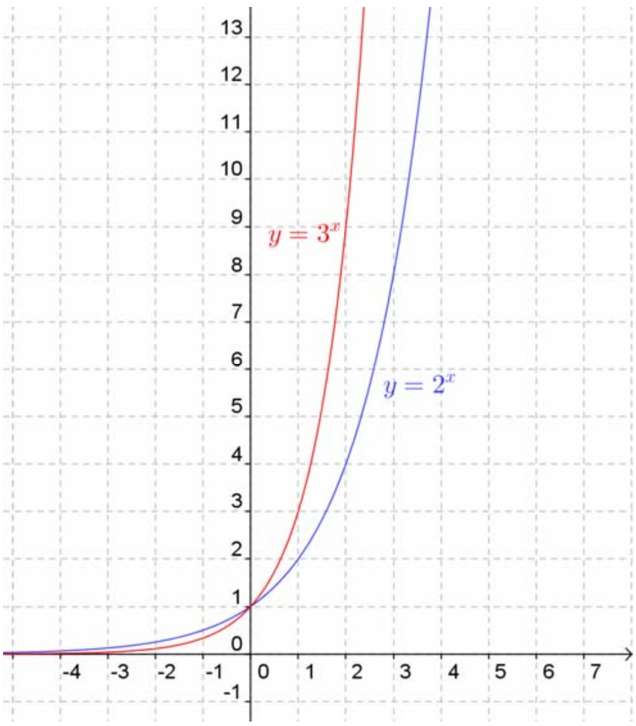
Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base "*b*". Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

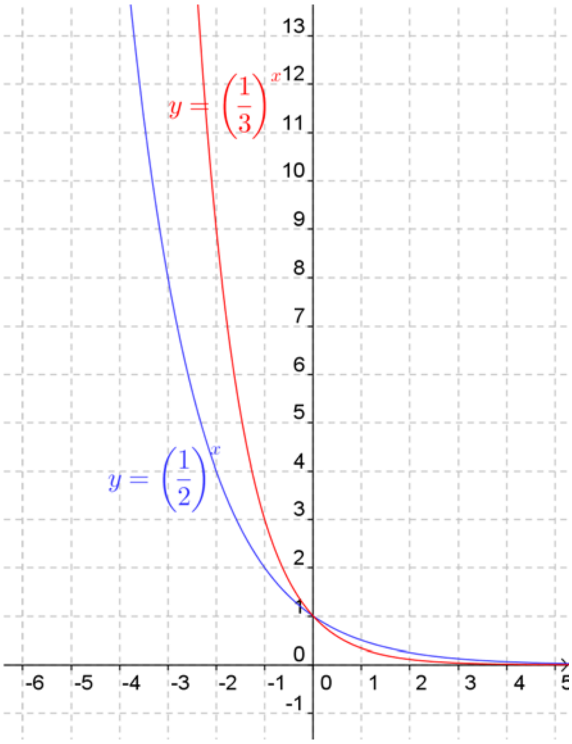
Actividades resueltas

- *Representa las gráficas de* $y = 2^x$ *y de* $y = 3^x$. *También las gráficas de* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *y de* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. *Analiza las similitudes y las diferencias.*

Funciones $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es $(0, +\infty)$. Es decir, "*y*" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos (0, 1), (1, *b*) y (–1, 1/*b*).
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es b > 1

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

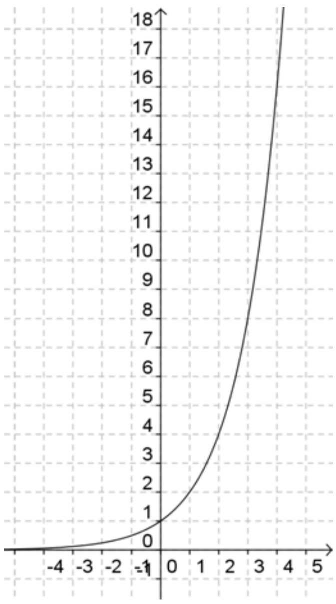
Cuando la base es 0 < b < 1

Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

- *Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales* $y = 2^x$ *e* $y = 2^{-x}$.

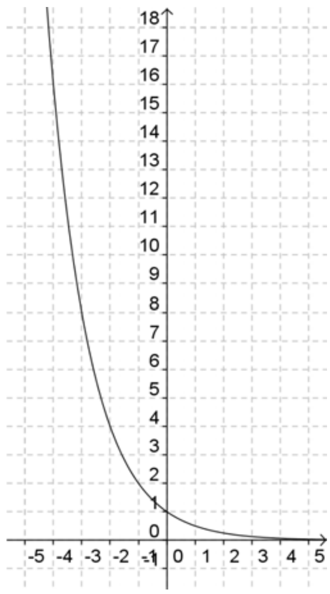
Función $y = 2^x$

x	y
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



Función $y = 2^{-x}$

x	y
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…



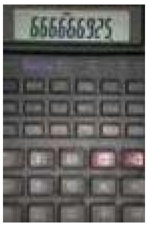
El número *e*. La función *y* = e^x

El número e tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Su valor aproximado es e = 2,71828182846... Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico). Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de e con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta e pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

La función $y = e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

Actividades propuestas



51. Utilizando la calculadora, haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

52. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

Cultivo de la bacteria *Salmonella*

53. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

54. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

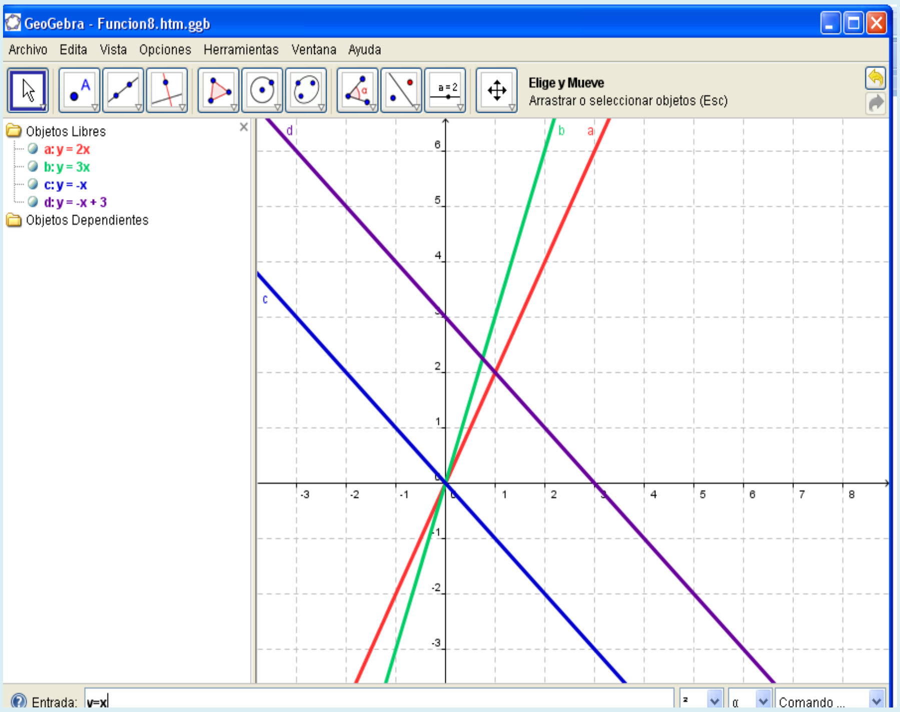
Utiliza el ordenador

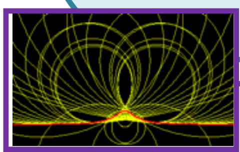
Puedes utilizar el ordenador para dibujar funciones. Para ello necesitas un programa adecuado como *Derive*, *Cabri*, *Mathematica*, *Geogebra*…

Unos son más sencillos de utilizar que otros, pero utilizando la ayuda, pronto dominarás cualquiera de ellos.

Muchas de las gráficas que has visto en este capítulo los han utilizado.

Por ejemplo, utilizando *Geogebra*, podemos dibujar rectas:





María Gaetana Agnesi

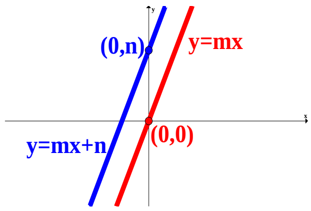
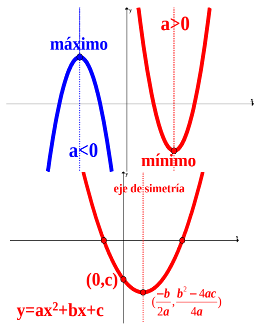
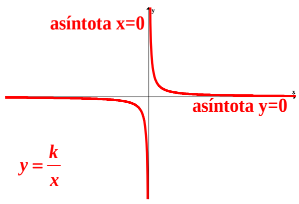
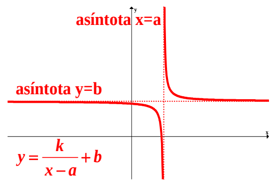
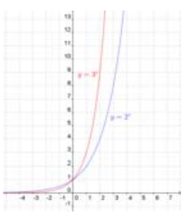
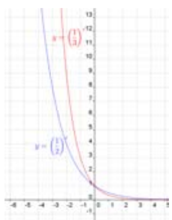
María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *In* *Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa.

Parece ser que María era sonámbula, y en ocasiones, después de trabajar intensamente, exhausta, se iba a dormir dejando un problema sin resolver sobre el escritorio. A la mañana siguiente, al despertar, veía que lo había resuelto mientras dormía. Había escrito la solución completa y había vuelto a la cama.

Si quieres saber más, busca en Internet su biografía

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Función	Relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra.	$y = 2x + 3$
Características de las funciones	Continuidad. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Simetría. Periodicidad.	La recta $y = 2x + 3$ es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni es simétrica, ni periódica.
Función polinómica de primer grado: Rectas: $y = mx$ $y = mx + n$	Se representan mediante rectas. Hay dos tipos: - Funciones lineales o de proporcionalidad directa: $y = mx$, pasan por el origen de coordenadas. - Funciones afines: $y = mx + n$, son traslaciones en el eje y, n unidades. Pasan por el punto (0, n).	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas $y = ax^2 + bx + c$	Se representan mediante parábolas: Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ Puntos de corte con el eje OX: $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$. Punto de corte con el eje OY: x = 0, es el punto (0, c) Eje de simetría: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas $y = k/x$	$\lvert k \rvert$: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. Dominio y recorrido: $\Re - \{0\}$ Continuidad: Discontinua en $x = 0$. Simetría: Función impar. Asíntotas: Las rectas $x = 0$ e $y = 0$.	
Hipérbolas $y = \frac{k}{x-a} + b$	Traslación de la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector (a, b). Dominio: $\Re - \{a\}$ Recorrido: $\Re - \{b\}$ - Asíntotas: $x = a$; $y = b$.	
Función exponencial	$y = b^x$. Si $b > 1$ es creciente  Si $0 < b < 1$ es decreciente 	

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Funciones

1. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y en él, los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está: *A*(2, 4); *B*(0, 1); *C*(–3, 0); *D*(2, –1'5); *E*(1'5, 0); *F*(0, 0); *G*(–1, –2/3).

2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.

3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:

A(0, 3); *B*(0, 1'7); *C*(0, –1); *D*(0, –4). ¿Qué tienen en común todos ellos?

4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de abscisas. ¿Qué tienen en común?

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.

6. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:

a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.

b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.

c) A cada circunferencia del plano se le asocia un diámetro.

7. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.

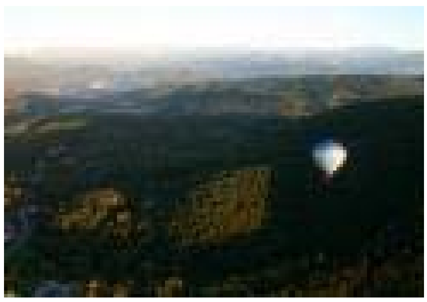
a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.

b) Dibuja la gráfica.

c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3,14).

d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

8. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:



a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?

b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?

c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?

d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

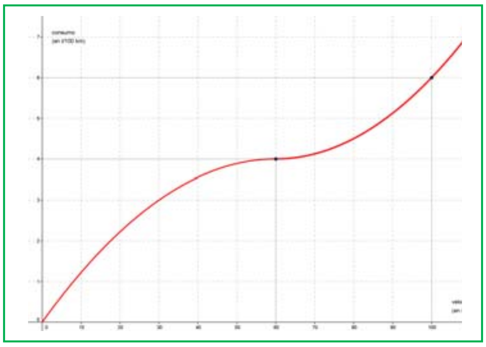
9. Dibuja la gráfica de la función *parte entera*: $y = E(x)$, que indica el número entero menor, más próximo a x, así, por ejemplo, E(2’3) = 2.

10. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

11. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

12. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.

13. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura “a” de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.



14. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica. Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Y la independiente?

c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?

d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?

15. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 · tiempo

b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo

c) A partir del día 45: altura = 135.

Características de una función

16. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.

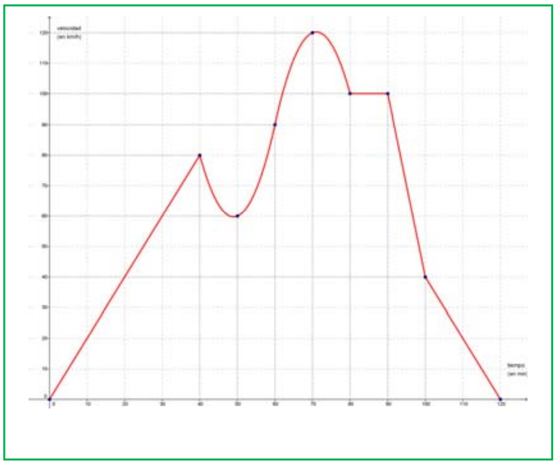
17. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1’20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?

b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?

c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

18. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?

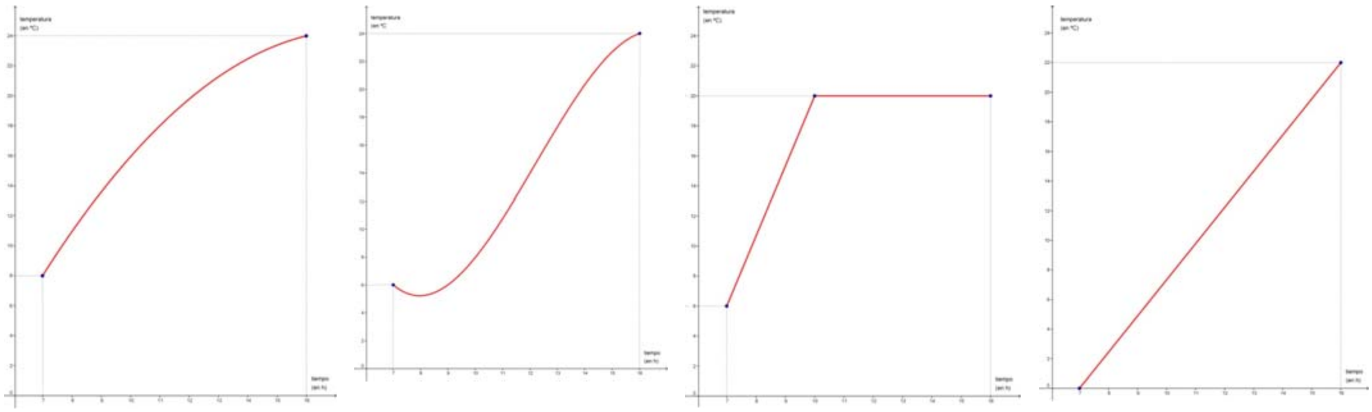
d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?

e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?

f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

19. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):



a) Explica la monotonía de todas las gráficas.

b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?

c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?

d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h, en Sevilla a veces se ha mantenido constante, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

20. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma: Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es: $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto. Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$. Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$. Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).

b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.

c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?

d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?

e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?

f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.

g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

21. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el capítulo: continuidad, monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, si\ x > 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$.

b) Opuesto e inverso del número *x*: $f(x) = \dfrac{-1}{x}$.

Tipos de funciones

22. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada en el origen 6.

23. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos *A*(2, 4), *B*(6, 9) y *C*(12, 15).

24. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.

25. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. ¿Cómo son?

26. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.

27. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:

a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es 5.

b) Pasa por los puntos *A*(1, 4) y *B*(0, 9).

c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.

d) Pasa por los puntos *C*(–2, 7) y *D*(–3, 10).

e) Pasa por el punto (*a*, *b*) y tiene de pendiente *m*.

28. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:

a) De pendiente 2 y ordenada en el origen 0.

b) Pasa por los puntos *A*(1, 3) y *B*(2, 1).

c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).

29. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

30. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

31. Ajusta una función polinómica a los datos de la tabla:

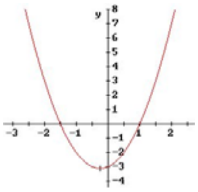
***x*:**	0	1	2	3	4	5	6
***y*:**	1	5	11	19	29	41	55

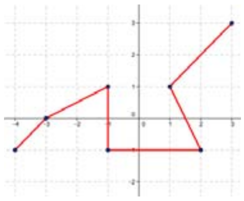
32. Dibuja las gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso los puntos de discontinuidad y las asíntotas.

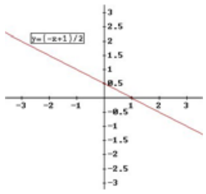
33. Dibuja las gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

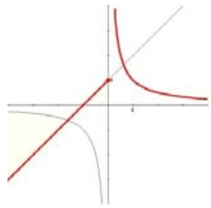
AUTOEVALUACIÓN

1. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a) 

b) 

c) 

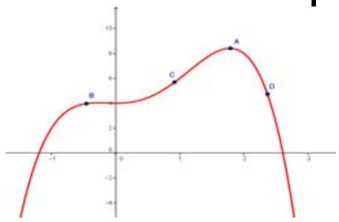
d) 

2. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

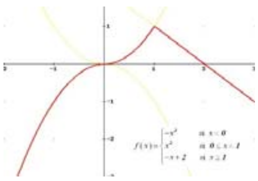
	a) x	a) y	b) x	b) y	c) x	c) y	d) x	d) y
	0	5	–1	–2	–3	1	0	1
	1	7	0	–2	–1	2	1	2
	2	32	1	–2	0	3	4	3
	3	41	2	–2	2	4	0	4

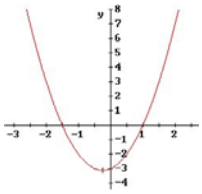
3. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:

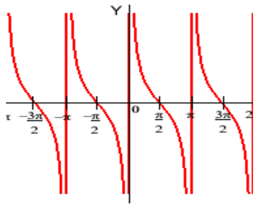
a) b) c) d

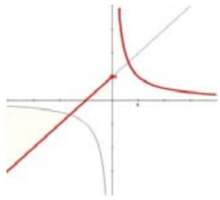


4. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

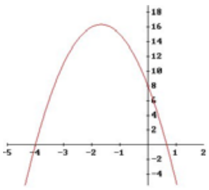
a) 

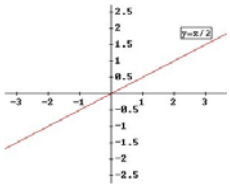
b) 

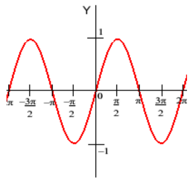
c) 

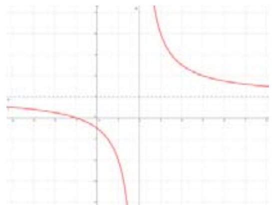
d) 

5. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:

a) 

b) 

c) 

d) 

6. La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = –7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = –4x + 7$ d) $y = –6x – 9$

7. La única función cuadrática es:

a) $y = –8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = –2x^2 + 3x$ d) $y = –2x^3 – 3x$

8. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (2, 0) es:

a) $y = –2x^2$ b) $y = x^2 – 4x + 4$ c) $y = –2x^2 + 4x$ d) $y = –x^2 + 4x – 2$

9. La hipérbola de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x – 3)$ b) $y = 3 + 6/(x – 5)$ c) $y = –5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. La única función exponencial es:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$