

# Formación Profesional Básica

## Matemáticas II

### Capítulo 5: Áreas y perímetros de figuras planas

LibrosMareaVerde.tk

[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** ([www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)):

Capítulo 6: Longitudes y áreas de 2º de ESO y del capítulo 9: Longitudes y áreas de 1º de ESO, de autores Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo



## ÍNDICE

### 1. TEOREMA DE PITÁGORAS

### 2. SEMEJANZA

- 2.1. FIGURAS SEMEJANTES
- 2.2. TRIÁNGULOS SEMEJANTES. CRITERIOS DE SEMEJANZA.
- 2.3. TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE TALES
- 2.4. TEOREMA DE TALES
- 2.5. PROPORCIONALIDAD EN LONGITUDES, ÁREAS Y VOLÚMENES
- 2.6. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS



### 3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

- 3.1. CONCEPTO DE PERÍMETRO Y DE ÁREA DE UNA FIGURA PLANA
- 3.2. ÁREA DEL CUADRADO Y DEL RECTÁNGULO
- 3.3. ÁREA DEL PARALELOGRAMO Y DEL TRIÁNGULO
- 3.4. ÁREA DEL TRAPECIO, ROMBO Y ROMBOIDE
- 3.5. ÁREA DE POLÍGONOS REGULARES
- 3.6. ÁREA DE POLÍGONOS IRREGULARES
- 3.7. PERÍMETROS DE POLÍGONOS



### 4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

- 4.1. LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA
- 4.2. LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA
- 4.3. ÁREA DEL CÍRCULO
- 4.4. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR
- 4.5. ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR
- 4.6. OTRAS ÁREAS



## Resumen



En este capítulo estudiaremos el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos, que nos ayudará en el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas.

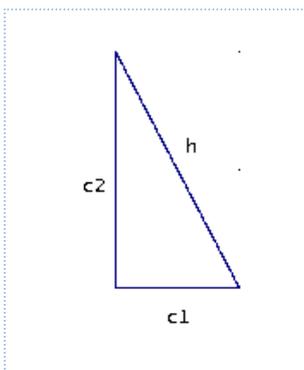
Estudiaremos el teorema de Tales y la semejanza, con los criterios para reconocer cuando dos triángulos son semejantes, y la razón de semejanza (escala) en mapas y en áreas y volúmenes.

Aprenderemos a hallar el perímetro y el área de las principales figuras: triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecio, circunferencia, círculo, ...

## 1. TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

### Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es decir,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- Del teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos:  $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

- También podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto:  $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

### Ejemplo:

Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 cm y 4 cm, su hipotenusa vale 5 cm, ya que:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

### Actividades resueltas

- ✚ Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 dm y uno de sus catetos mide 12 dm, halla la medida del otro cateto:

*Solución:* Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12) \times (13+12)} = \sqrt{25} = 5 \text{ dm}$$

### Actividades propuestas

- ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 cm y su hipotenusa 26 cm? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 cm. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

### Interpretación del teorema de Pitágoras

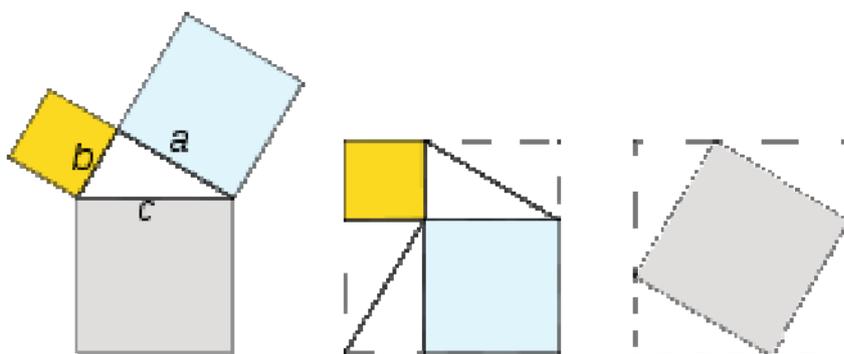
Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa  $h$  de un triángulo rectángulo, su área es  $h^2$  (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos  $c_1$  y  $c_2$  de ese triángulo rectángulo, sus áreas son  $c_1^2$ ,  $c_2^2$ . Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos  $a$  y  $b$  (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado  $a$  y  $b$ , en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.

Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



## Actividades propuestas

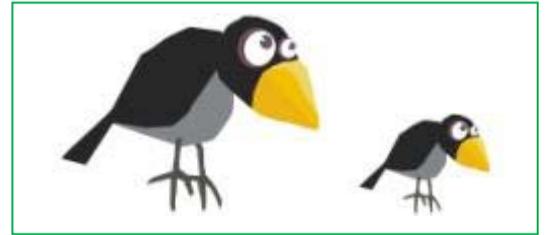
- Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
  - 8 cm y 6 cm
  - 12 m y 9 m
  - 6 dm y 14 dm
  - 22,9 km y 36,1 km.
- Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
  - 27 cm y 12 cm
  - 32 m y 21 m
  - 28 dm y 12 dm
  - 79,2 km y 35,6 km
- Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 m. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
- Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 cm. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
- Calcula el volumen de un tetraedro regular de arista 5 dm.
- Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 dm.
- Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 m.
- Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 cm y altura 5 cm.

## 2. SEMEJANZA

### 2.1. Figuras semejantes

Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*.

Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible.

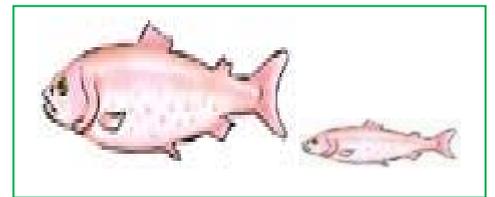


La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos figuras son **semejantes** si sus longitudes son proporcionales y sus ángulos son iguales.

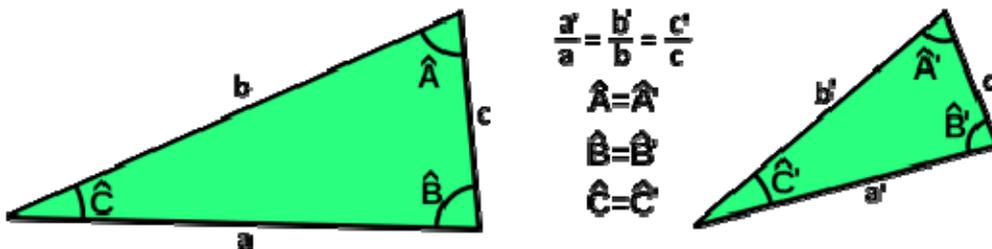
**Ejemplo:**

✚ Las figuras del margen **no** son semejantes



### 2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza

Dos triángulos son **semejantes** si tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza**.

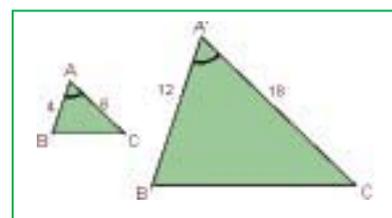
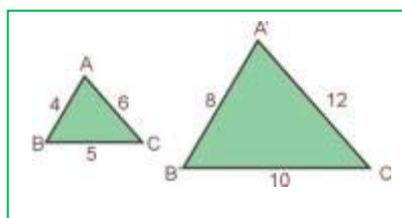
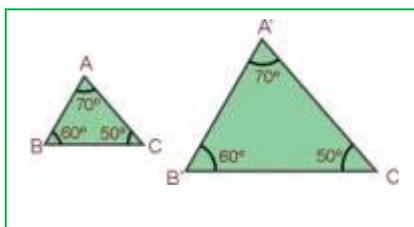
Dos triángulos son semejantes si:

- **Primero:** Tienen dos ángulos iguales.
- **Segundo:** Tienen los tres lados proporcionales.
- **Tercero:** Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta, por ejemplo, que tengan un lado y dos ángulos iguales.

Si tienen dos ángulos iguales, el tercer ángulo también es igual, y necesariamente los lados son proporcionales. Si los lados son proporcionales, entonces los tres ángulos son iguales. Con más cuidado es preciso mirar el tercer criterio, y en otro curso se demostrará con más rigor.

## Ejemplo



## Actividades propuestas

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

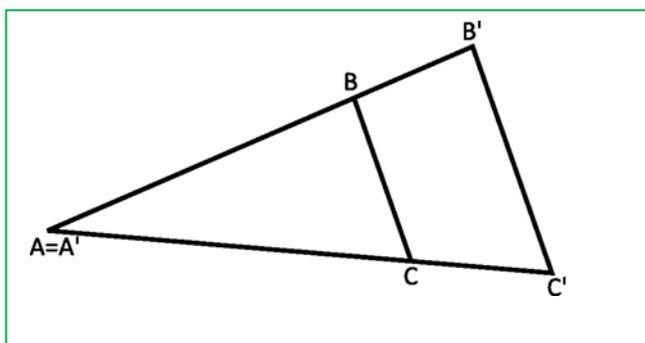
- Un ángulo de  $80^\circ$  y otro de  $40^\circ$ . Un ángulo de  $80^\circ$  y otro de  $60^\circ$ .
- Triángulo isósceles con ángulo desigual de  $70^\circ$ . Triángulo isósceles con ángulo igual de  $50^\circ$ .
- $A = 30^\circ$ ,  $b = 7$  cm,  $c = 9$  cm.  $A' = 30^\circ$ ,  $b' = 14$  cm,  $c' = 18$  cm
- $a = 4$  cm,  $b = 5$  cm,  $c = 7$  cm.  $a' = 20$  cm,  $b' = 25$  cm,  $c' = 35$  cm

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

- $a = 18$  cm,  $b = 12$  cm,  $c = 24$  cm.  $a' = 6$  cm,  $b' = 4$  cm, ¿ $c'$ ?
- $A = 45^\circ$ ,  $b = 16$  cm,  $c = 8$  cm.  $A' = 45^\circ$ ,  $b' = 4$  cm, ¿ $c'$ ?

12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

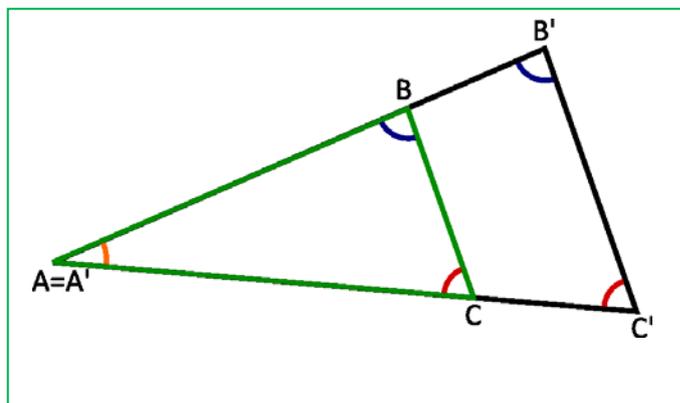
## 2.3. Triángulos en posición de Tales



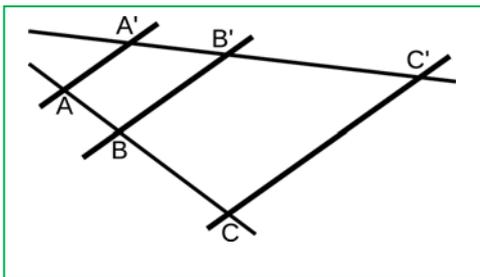
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros, por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los lados son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$



## 2.4. Teorema de Tales



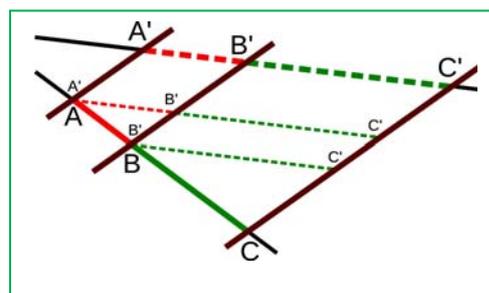
El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

Dadas dos rectas, y varias rectas paralelas entre sí, que las cortan respectivamente en los puntos  $A, B, C$  y  $A', B', C'$ . Entonces el **Teorema de Tales** afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes en posición Tales, y que por lo tanto se puede deducir que sus lados son proporcionales:

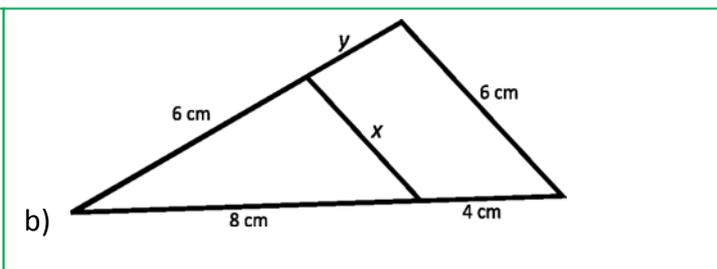
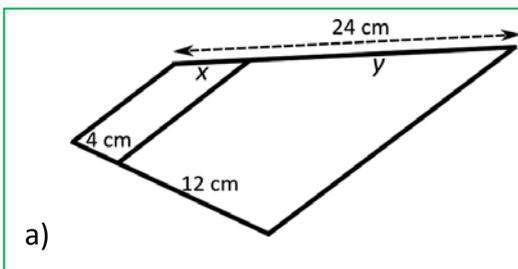
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$



**Observación:** En este caso no relacionamos los segmentos  $AA', BB'$  y  $CC'$  que se forman sobre los lados paralelos.

### Actividades propuestas

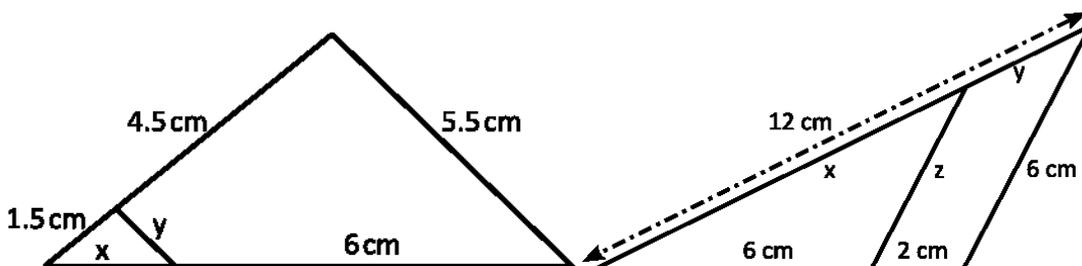
13. Calcula los valores de  $x$  e  $y$  en las siguientes figuras.



14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?

16. Calcula las longitudes que se indican:



## 2.5. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

### Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos... a la razón de semejanza se le llama **escala**.

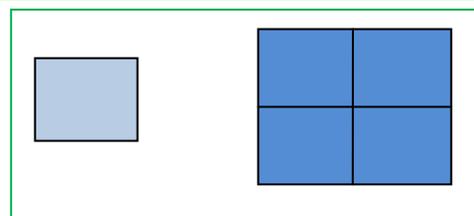
### Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es  $k$ , entonces la razón entre sus áreas es  $k^2$ .

#### Ejemplo:

✚ Observa la figura del margen:

Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es  $2^2 = 4$  veces la del pequeño.



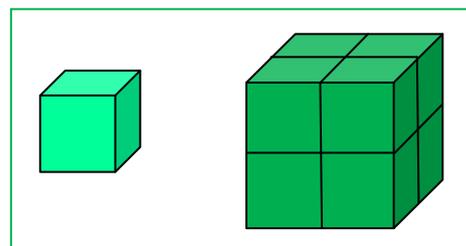
### Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es  $k$ , entonces la razón entre sus volúmenes es  $k^3$ .

#### Ejemplo:

✚ Observa la figura del margen:

Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 ( $2^3$ ) el del cubo pequeño.



## Actividades resueltas

✚ La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?

El peso está relacionado con el volumen. La Torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material, que pese 1 kilo. Por tanto  $k^3 = 8000000/1 = 8\,000\,000$ , y  $k = 200$ . La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 m, y llamamos  $x$  a lo que mide la nuestra tenemos:  $300/x = 200$ . Despejamos  $x$  que resulta igual a  $x = 1,5$  m. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

## Actividades propuestas

- El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 cm. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?
- En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 cm, 25 cm y 40 cm, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.
- Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?
- La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es  $k = 100$ . ¿Cuánto mide la pirámide real?



## 2.6. Escalas: planos y mapas

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos “**escala**”

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

### Ejemplo:



En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 5 000 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm en la realidad, es decir, a 50000 m, es decir a 50 km.

### Ejemplo:

Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala:

$$1 : 600.$$

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3,5 cm. La altura real de las torres será:

$$3,5 \cdot 600 = 2100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$



CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes**.

### Ideas claras

La **escala** utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.

Por ejemplo: 1 : 70000

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

### Actividades propuestas

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

| Dibujo | Medida real |
|--------|-------------|
| 26 cm  |             |
|        | 11 km       |
| 0,05 m |             |

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

| Dibujo | Medida real | Escala |
|--------|-------------|--------|
| 1,4 cm | 700 m       |        |
| 7 cm   | 0,7 hm      |        |
| 4 cm   | 20 km       |        |

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

## 3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

### 3.1. Concepto de perímetro y de área de una figura plana

El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.

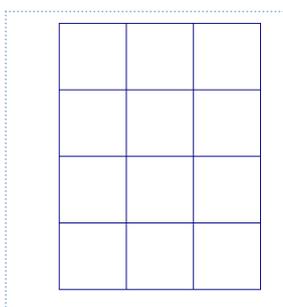
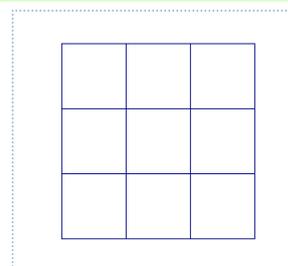
El **área** de una figura plana es lo que mide la región limitada por los lados de la figura.

Las unidades para el perímetro son centímetros ( $cm$ ), decímetros ( $dm$ ), metros ( $m$ )...

Las unidades para el área son  $cm^2$ ,  $dm^2$ ,  $m^2$ , ...

#### Ejemplo:

- ✚ Si tenemos un cuadrado de lado  $3\text{ cm}$ , su perímetro es  $3 + 3 + 3 + 3 = 12\text{ cm}$  y su área es  $9\text{ cm}^2$  porque podemos meter en él 9 cuadraditos de lado  $1\text{ cm}$ :



#### Ejemplo:

- ✚ Si tenemos un rectángulo de base  $3\text{ cm}$  y altura  $4\text{ cm}$ , su perímetro es  $3 + 4 + 3 + 4 = 14\text{ cm}$  y su área es  $12\text{ cm}^2$  porque podemos meter en él 12 cuadraditos de lado  $1\text{ cm}$ :

### Actividades resueltas

- ✚ Halla los siguientes perímetros y áreas:

El perímetro de un cuadrado de lado  $4\text{ dm}$ :

$$4 + 4 + 4 + 4 = 16\text{ dm}$$

El área de un cuadrado de lado  $4\text{ km}$ :

$$4 \cdot 4 = 16\text{ km}^2$$

El perímetro de un rectángulo de base  $4\text{ m}$  y altura  $5\text{ dm}$  en  $m$ :

$$4 + 0,5 + 4 + 0,5 = 9\text{ m}$$

El área de un rectángulo de base  $4\text{ m}$  y altura  $5\text{ dm}$  en  $m^2$ :

$$4 \cdot 0,5 = 2\text{ m}^2$$

### Actividades propuestas

25. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un cuadrado de lado  $5\text{ cm}$  son:

a)  $10\text{ cm}$  y  $25\text{ cm}^2$

b)  $20\text{ cm}$  y  $25\text{ cm}^2$

c)  $20\text{ cm}$  y  $5\text{ cm}^2$

d)  $20\text{ cm}$  y  $20\text{ cm}^2$

26. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un rectángulo de base  $7\text{ dm}$  y altura  $3\text{ cm}$  son:

a)  $146\text{ cm}$  y  $210\text{ cm}^2$

b)  $20\text{ cm}$  y  $49\text{ cm}^2$

c)  $20\text{ cm}$  y  $21\text{ cm}^2$

d)  $21\text{ cm}$  y  $21\text{ cm}^2$

## 3.2. Área del cuadrado y del rectángulo

El **área de un cuadrado** es el cuadrado de uno de sus lados:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2$$

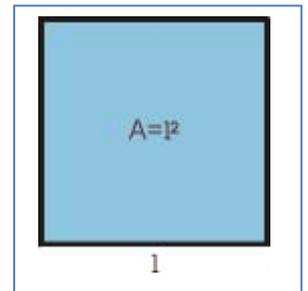
El **área de un rectángulo** es el producto de su base por su altura:

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

**Ejemplo:**

- Si tenemos un cuadrado de 13 *dm* de lado, el área de dicho cuadrado es 169 *dm*<sup>2</sup> ya que:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 13^2 = 169 \text{ dm}^2.$$



### Actividades resueltas

- Calcula el área de la baldosa de la figura de 7 *cm* de lado

*Solución:* La baldosa de la figura es cuadrada. Por lo tanto:

$$\text{Área}_{\text{cuadrado}} = \text{lado}^2 = 7^2 = 49 \text{ cm}^2.$$

- Calcula el área de un rectángulo de 9 *cm* de base y 4 *cm* de altura

*Solución:* Por tratarse de un rectángulo:

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2.$$



### Actividades propuestas

- Las baldosas de la figura miden 12 *cm* de largo y 6 *cm* de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?
- Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?



- Estas molduras miden 175 *cm* de ancho y 284 *cm* de alto. ¿Cuál es el área encerrada?



## 3.3. Área de paralelogramo y del triángulo

### Recuerda que:

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero (cuatro lados) cuyos lados opuestos son paralelos.

Los cuadrados, los rectángulos y los rombos son paralelogramos.

Los que no son de ninguno de esos tipos se llaman **romboides**.

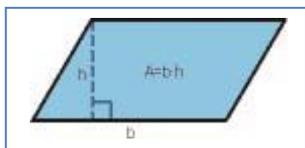


Los paralelogramos tienen las siguientes propiedades:

- Los lados opuestos son iguales
- Sus diagonales se cortan en sus puntos medios
- Tienen un centro de simetría
- Los romboides no tienen eje de simetría

El área de un **paralelogramo** es el producto de su base por su altura, igual que el área de un rectángulo:

$$\text{Área}_{\text{paralelogramo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

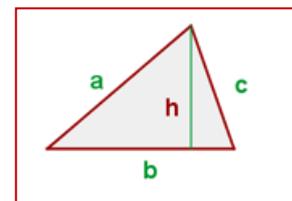


Mira el paralelogramo de la figura. Puedes convertirlo en un rectángulo cortando un triángulo y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

El **área de un triángulo** es la mitad del área de un paralelogramo:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$



### Ejemplo:

✚ El área de un triángulo de base  $b = 5 \text{ cm}$  y altura  $h = 8 \text{ cm}$  es  $20 \text{ cm}^2$  ya que:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20 \text{ cm}^2.$$

## Actividades resueltas

- ✚ La vela de un barco tiene forma triangular. La base de la vela mide 3 metros y su altura son 6 metros, ¿qué superficie ocupa dicha vela?

*Solución:* Como la vela tiene forma triangular:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9 \text{ m}^2.$$



- ✚ Halla los siguientes perímetros y áreas:

- a) Un cuadrado de 4 metros de lado:

*Perímetro:* La suma de sus cuatro lados:  $4 + 4 + 4 + 4 = 16 \text{ m}$ .

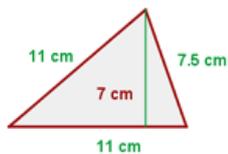
*Área:* lado  $\cdot$  lado =  $4 \cdot 4 = 16 \text{ m}^2$ .

- b) Un rectángulo de 5 metros de ancho y 3 m de largo

*Perímetro:* Suma de sus lados:  $5 + 5 + 3 + 3 = 16 \text{ m}$ .

*Área:* Largo por ancho =  $5 \cdot 3 = 15 \text{ m}^2$ .

- c)



*Área:*  $A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5 \text{ cm}^2$

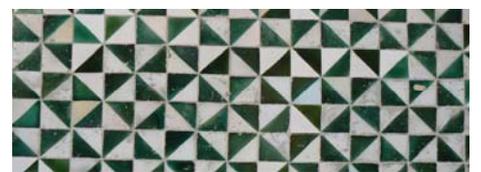
### Recuerda que:

Un **triángulo** es **rectángulo**, si tiene un ángulo recto.

*Perímetro:*  $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5 \text{ cm}$

## Actividades propuestas

30. Cada uno de los triángulos de la figura tiene una base de 10 mm y una altura de 6 mm. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?



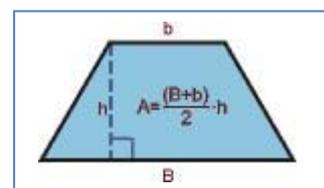
## 3.4. Área del trapecio, rombo y romboide

### Recuerda que:

- Un **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados paralelos y dos lados no
- Un trapecio con dos ángulos rectos se llama **rectángulo**
- Un trapecio con los dos lados no paralelos iguales se llama **isósceles**
- Un trapecio con los tres lados desiguales se llama **escaleno**



Imagina un trapecio. Gíralo 180°. Une el primer trapecio con el trapecio que acabas de girar por un lado. ¿Qué obtienes? ¿Es un paralelogramo? Tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad es la semisuma de las bases por la altura.

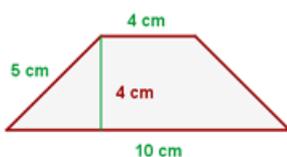


El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura:

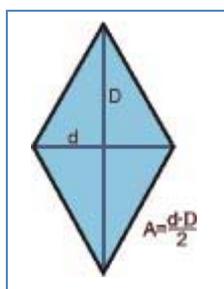
$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

### Ejemplo:

- ✚ Tenemos el siguiente trapecio cuyas medidas son:  $B = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $h = 4 \text{ cm}$ , su área es:



$$A = \frac{(10+4) \cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$



Piensa en un rombo. Está formado por dos triángulos iguales

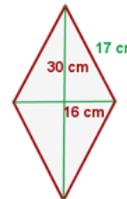
El **área de un rombo** es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

## Ejemplo:

- ✚ Si tenemos un rombo cuyas diagonales miden  $D = 30\text{ cm}$  y  $d = 16\text{ cm}$  respectivamente y un lado mide  $17\text{ cm}$ , el área será

$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\text{ cm}^2$$



Y el perímetro  $P = 17 \cdot 4 = 68\text{ cm}$  al ser todos los lados iguales.

Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados:  $15\text{ cm}$ , (la mitad de la diagonal  $D$ ),  $8\text{ cm}$  (la mitad de la diagonal  $d$ ), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa  $17\text{ cm}$ , el lado del rombo.

El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos.

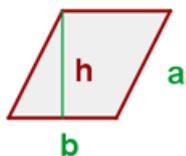
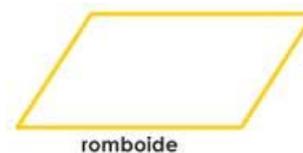
Comprobamos que el valor coincide con el anterior:

$$(8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240\text{ cm}^2.$$

Ya sabes que el romboide es un caso particular de paralelogramo.

El **área de un romboide** es el producto de su base y su altura:

$$\text{Área}_{\text{romboide}} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$



## Ejemplo:

- ✚ Si tenemos un romboide de  $5\text{ cm}$  de base y  $4\text{ cm}$  de altura su área es  $5 \cdot 4 = 20\text{ cm}^2$ .

Si el lado vale 4, el perímetro es  $5 + 5 + 4 + 4 = 18\text{ cm}$ .

## Actividades resueltas

- ✚ Calcula el área de las siguientes figuras planas:

- Un trapecio de bases  $10$  y  $4\text{ cm}$  y de altura  $3\text{ cm}$
- Un rombo de diagonales  $16$  y  $12\text{ cm}$

Solución:

$$\text{Área}_{\text{trapecio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(10 + 4) \cdot 3}{2} = 21\text{ cm}^2.$$

$$\text{Área}_{\text{rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96\text{ cm}^2.$$

## Actividades propuestas

31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 84 y 35 cm. ¿Cuánto mide el área de la cometa?
32. Un trapeceista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 1,2 y 0,8 m y altura 0,5 m. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapeceista?
33. Calcula el área de un romboide de 15 cm de base y 12 cm de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

## 3.5. Área de polígonos regulares

Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área:  $(\text{base} \cdot \text{altura})/2$ . La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, el apotema del polígono.

### Ejemplo

- ✚ El hexágono regular de lado 4 cm y apotema 3,5 cm lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 cm y altura 3,5 cm, por lo que su área es:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{4 \cdot 3,5}{2} = 7 \text{ cm}^2.$$

El área del hexágono es por tanto:

$$\text{Área}_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,5}{2} = \left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) \cdot 3,5 = 42 \text{ cm}^2.$$

Al ser  $\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right)$  el semiperímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

**El área de un polígono regular es igual al semiperímetro por la apotema.**

$$\text{Área} = \text{semiperímetro} \cdot \text{apotema}$$

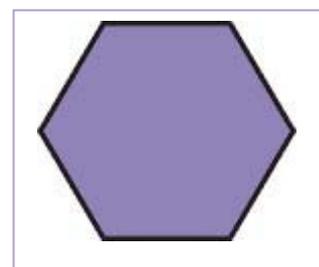
## Actividades resueltas

- ✚ Calcula las áreas de un triángulo y un hexágono regular de lado 6 cm.

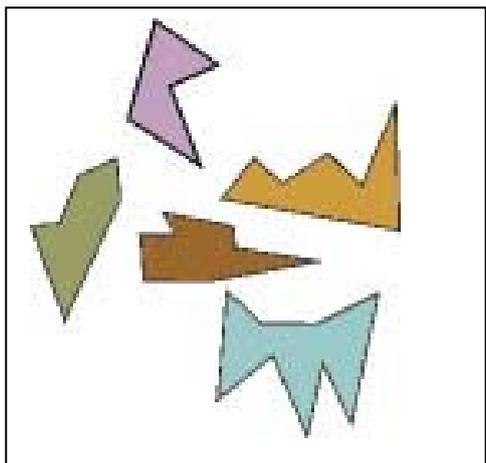
**Solución:** El semiperímetro del triángulo es 9 cm y el del hexágono es 18 cm. Las apotemas las puedes calcular utilizando el teorema de Pitágoras y valen, para el triángulo y para el hexágono aproximadamente 5,2 cm, luego las áreas valen:

$$A_{\text{triángulo}} = 9 \cdot 5,2 = 46,8 \text{ cm}^2.$$

$$A_{\text{hexágono}} = 18 \cdot 5,2 = 93,6 \text{ cm}^2.$$

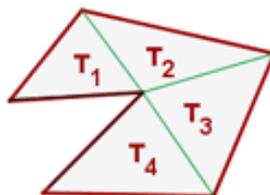


## 3.6. Área de polígonos irregulares



Los polígonos irregulares son aquellos que no tienen una forma conocida determinada.

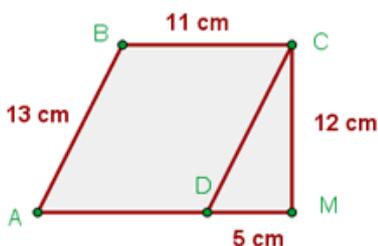
Para calcular el área de un polígono irregular, dividimos la figura en triángulos y cuadriláteros conocidos para poder aplicar las fórmulas aprendidas anteriormente.



$$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

### Ejemplo:

✚ Hallar el perímetro y el área de la figura:



$AD = BC$ ;  $AB = DC$   $\longrightarrow$  Romboide

$$P = 13 + 11 + 12 + 5 + 11 = 52 \text{ cm}$$

$$A = A_R + A_T$$

$A_R$  = área del romboide       $A_T$  = área del triángulo

$$A = 11 \cdot 12 + (12 \cdot 5) : 2 = 162 \text{ cm}^2$$

### Ejemplo:

✚ El área de esta figura irregular es  $84 \text{ cm}^2$ . ¿Qué hemos hecho para calcularla?

Dividimos la figura en dos triángulos y un rectángulo y calculamos el área de cada una de las figuras. Previamente utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura de los triángulos y obtenemos que mide  $6 \text{ cm}$ .

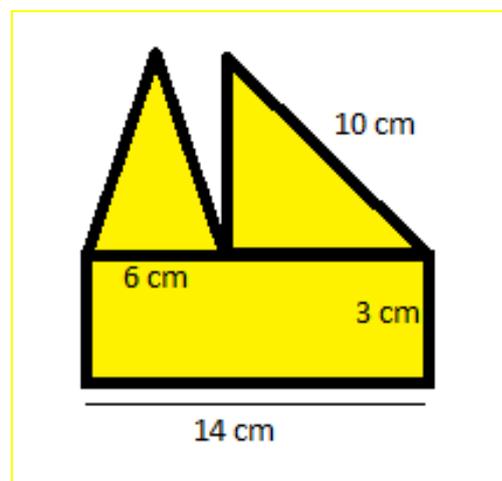
$$\text{Área}_{\text{triángulo 1}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área}_{\text{triángulo 2}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42 \text{ cm}^2.$$

Para calcular el área total, sumamos las tres áreas obtenidas:

$$A_{\text{total}} = 18 + 24 + 42 = 84 \text{ cm}^2.$$



## Actividades resueltas

✚ Para calcular el área de la figura de la derecha, la dividimos primero en cuadriláteros conocidos.

Tenemos un rombo, un trapecio y un triángulo:

Calculamos el área del rombo, el trapecio y el triángulo:

$$\text{Área}_{\text{rombo}} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70 \text{ dm}^2.$$

El trapecio tiene de base mayor 16 dm, de base menor 16 - 5 = 11 dm, y de altura 7 dm, luego:

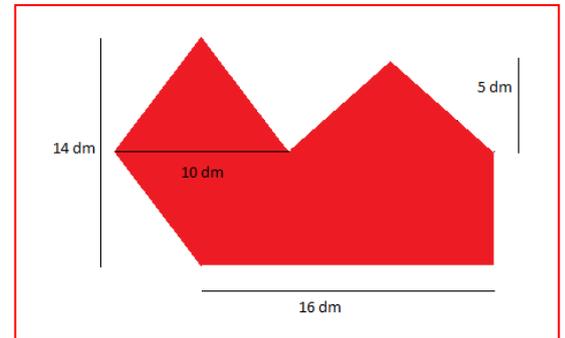
$$\text{Área}_{\text{trapecio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \frac{(16 + 11) \cdot 7}{2} = \frac{189}{2} \text{ dm}^2.$$

La base del triángulo mide 11 dm y su altura 5 dm, luego su área mide:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2} \text{ dm}^2.$$

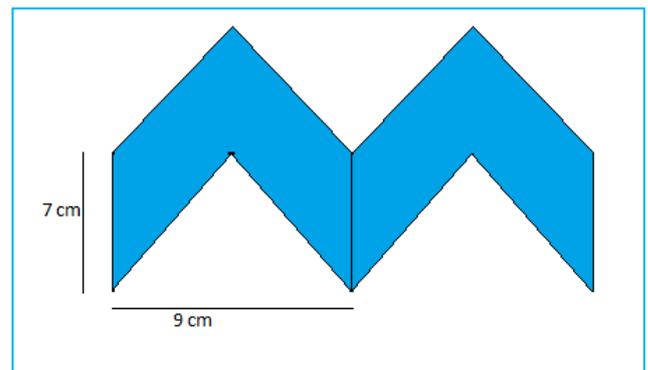
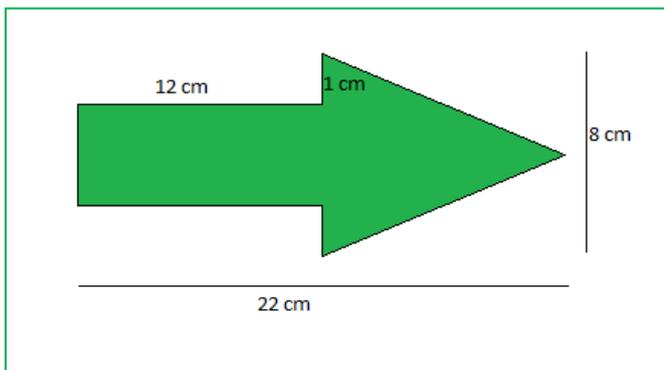
Sumando todas las áreas obtenidas:

$$\text{Área}_{\text{TOTAL}} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192 \text{ dm}^2.$$



## Actividades propuestas

34. Estima el área de los siguientes polígonos irregulares:

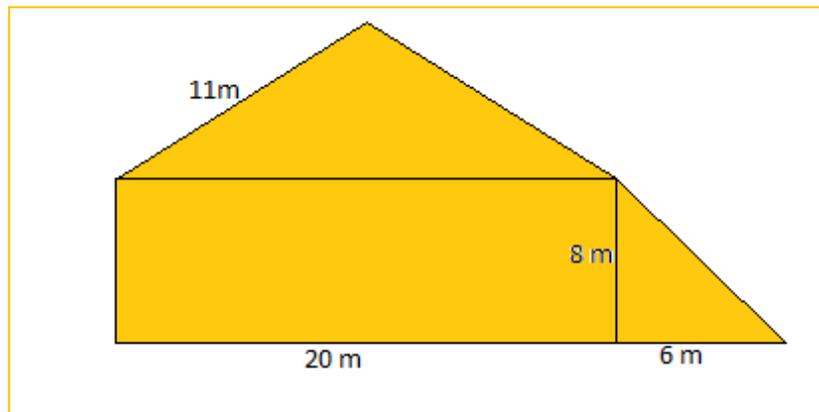


## 3.7. Perímetros de polígonos

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados

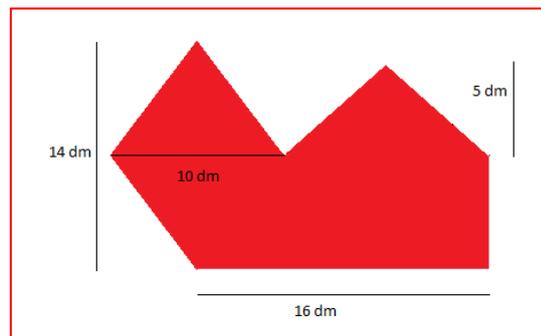
### Actividades propuestas

35. Estima el perímetro del polígono de la figura:



36. Estima el perímetro de los polígonos de la actividad 34.

37. Estima el perímetro del polígono de la figura:



## 4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

### 4.1. Longitud de una circunferencia

El número  $\pi$  (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\pi = \text{Longitud de la circunferencia} / \text{Diámetro}$$

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de  $\pi$  es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592.

Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio  $r$ , entonces su diámetro mide  $2r$ , y su longitud, por la definición de  $\pi$ , mide  $2 \cdot \pi \cdot r$ .

$$\text{Longitud de la circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r.$$

#### Actividades resueltas

- ✚ La circunferencia de radio 3 *cm* tiene una longitud  $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 6 \cdot \pi \approx 18,84$ .

#### Actividades propuestas

38. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 2 *cm*, la un poco más oscura siguiente 2,5 *cm*, la clara siguiente 3,5 *cm*, y así, aumenta unas veces medio centímetro y otras, un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.
39. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella... y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de  $\pi$  que hayas obtenido.
40. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?



### 2.2. Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de  $\alpha$  grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360°. Por tanto:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360.$$

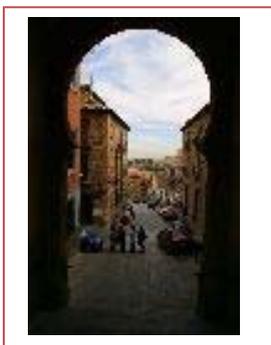
#### Actividades resueltas

- ✚ Las ruedas de un carro miden 60 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. La longitud del arco entre cada radio es  $L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha / 360 = 60 \cdot \pi / 16 \approx 11,78$  *cm*.



## Actividades propuestas

41. Antiguamente se definía un metro como: “la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París”. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

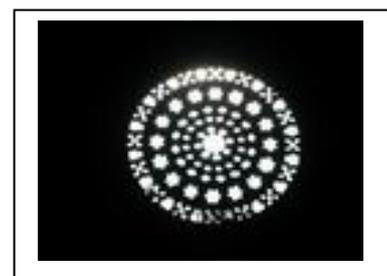


42. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de  $8'4\text{ m}$ . ¿Cuál es la longitud del arco?

43. Un faro gira describiendo un arco de  $170^\circ$ . A una distancia de  $5\text{ km}$ , ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

44. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de  $3\text{ m}$ , y la de la siguiente figura es de  $2,5\text{ m}$ .

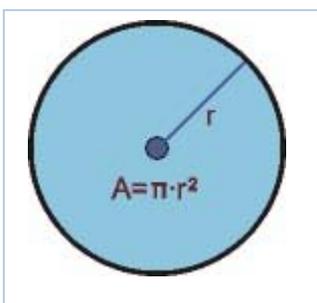
- a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.
- b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas



## 4.3. Área del círculo

El **área del círculo** es igual al producto del número  $\pi$  por el cuadrado del radio.

$$A = \pi \cdot r^2.$$



Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio  $r$ , con cada vez más lados. Entonces:

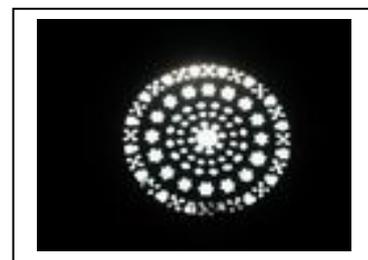
- i) La apotema del polígono se aproxima al radio.
- ii) El perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia.

Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semiperímetro por la apotema, es igual a:

$$(2 \cdot \pi \cdot r / 2) \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

## Actividades resueltas

- ✚ El área de un círculo de radio  $7\text{ cm}$  es  $A = 49\pi \approx 153,86\text{ cm}^2$ . Y el de un círculo de  $1\text{ cm}$  de radio es  $A = \pi \approx 3,14\text{ cm}^2$ .
- ✚ El área de un círculo de diámetro  $4\text{ m}$  es  $A = 2^2\pi = 4\pi \approx 12,56\text{ m}^2$ . Y el de un círculo de  $2\text{ m}$  de diámetro es  $A = 1^2\pi = \pi \approx 3,14\text{ m}^2$ .



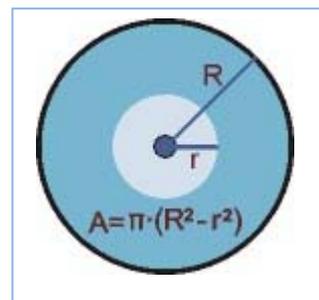
## Actividades propuestas

45. Calcula el área encerrada por la circunferencia exterior del rosetón de  $3\text{ m}$  de radio.
46. Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de  $1,3\text{ m}$ .
47. Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.

## 4.4. Área de la corona circular

El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$



### Actividades resueltas

- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios  $97,5 \text{ cm}$  y  $53,2 \text{ cm}$  es igual a:  $A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (97,5^2 - 53,2^2) = \pi \cdot (9506,25 - 2830,24) = \pi \cdot 6676,01 \approx 20962,6714 \text{ cm}^2$ .

### Actividades propuestas

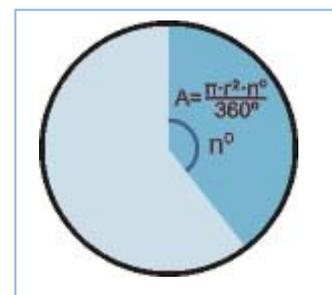
48. Calcula el área de la corona circular de radios  $7$  y  $3 \text{ cm}$ .

## 4.5. Área del sector circular

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de  $n$  grados es igual a:

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot n / 360.$$

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo construido sobre los radios.



### Actividades resueltas

- Para hallar el área del *sector* circular de radio  $7 \text{ m}$  que abarca un ángulo de  $90^\circ$ , calculamos el área del círculo completo:  $\pi \cdot 7^2 = 49 \pi$ , y hallamos la proporción:

$$A_S = 49\pi \cdot 90 / 360 = 12,25 \pi \approx 38,465 \text{ m}^2.$$

Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base  $7 \text{ m}$  y altura  $7 \text{ m}$ ,  $A_T = 7 \cdot 7 / 2 = 24,5 \text{ m}^2$ . Luego el área del segmento es:

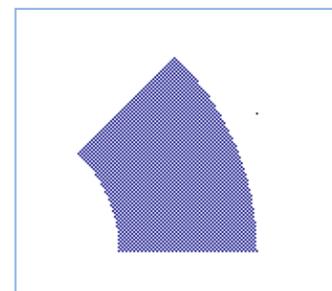
$$A = A_S - A_T = 38,465 - 24,5 = 13,965 \text{ m}^2.$$

## 4.6. Otras áreas

Para hallar el **área de un sector de corona circular** restamos al área del sector circular de mayor radio el área del sector circular de menor radio.

El **área de un sector de corona circular** formada por las circunferencias concéntricas de radios  $r$  y  $R$  que abarca un ángulo de  $n$  grados es igual a:

$$A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.$$



### Actividades resueltas

- ✚ Para hallar el área del *sector* de corona circular de radios 7 m y 8 m que abarca un ángulo de  $90^\circ$ , calculamos el área de la corona circular completa:  $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15 \pi$ , y hallamos la proporción:

$$A_c = 15 \pi \cdot 90/360 = 3,75 \pi \approx 11,78 \text{ m}^2.$$

También se puede hallar con la fórmula anterior:

$$A_c = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11,78 \text{ m}^2.$$

### Actividades propuestas

49. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 cm y 12 cm y que forma un ángulo de  $60^\circ$ .

## CURIOSIDADES. REVISTA

### Biografía de Pitágoras

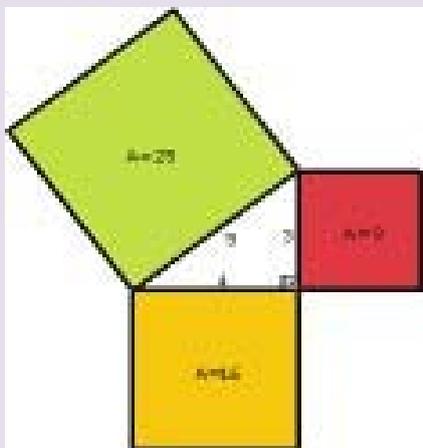


Pitágoras de Samos nació aproximadamente en el año 580 a. C. y falleció aproximadamente en el 495 a. C. Destacó por sus contribuciones en Matemáticas, Filosofía y Música. Entre sus hallazgos matemáticos destaca el teorema de Pitágoras. Pitágoras fundó la Escuela Pitagórica, en la que todos los descubrimientos eran de la comunidad, y que mantenía entre otras normas muy estrictas, la de ser vegetariano. El lema de los Pitagóricos era: *“Todo es número”*. Cuando Pitágoras murió quedó su mujer, Teano, dirigiendo la Escuela. Curiosidad: Los Pitagóricos mostraban odio a las judías. No se conoce el origen de esa aversión. ¿Preferirían contar con lentejas?

### Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los grandes tesoros de la Geometría. Se habla de las 370 demostraciones del Teorema de Pitágoras: chinos, hindúes, árabes... tienen la suya.

### Teorema de Pitágoras y los egipcios



Dos mil años antes de Cristo, en las orillas del Nilo, los egipcios utilizaban una cuerda con trece nudos para trazar ángulos rectos. Sabían que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 era un triángulo rectángulo.

Incluso hoy algunos albañiles verifican la perpendicularidad de los marcos de las puertas y de las ventanas mediante la regla que llaman: 6, 8 y 10.

### El número $\pi$ (PI)

Es un número sorprendente con infinitas cifras decimales no periódicas.

Su rastro más antiguo se encuentra en el Papiro de Ahmes donde se le da un valor de 3,16.

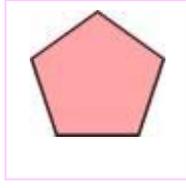
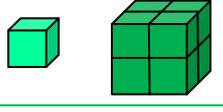
Arquímedes lo valoró como  $\frac{22}{7}$  que es 3,1429.

Actualmente, con ayuda del ordenador, se calculan más y más de sus cifras decimales. En 2009 se hallaron más de dos billones y medio de decimales de pi:  $\pi = 3,141592\dots$

### Medida del radio de la Tierra

Eratóstenes de Cirene estimó, de forma muy precisa para su época, el radio de la Tierra. Para ello debió medir con cuidado longitudes (entre la ciudad de Syena cerca de Assuan y Alejandría), ángulos (del Sol en el solsticio de verano). Como ese ángulo era  $\frac{1}{50}$  de la circunferencia determinó que el radio de la Tierra era 50 veces la distancia calculada.

## RESUMEN

|                                      |  |  |   |
|--------------------------------------|--|--|---|
| <b>Teorema de Pitágoras</b>          | En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:<br>$a^2 = b^2 + c^2$     |     | $25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$   |
| <b>Área del cuadrado</b>             | $A = \text{lado}^2 = l^2$  |     | Si $l = 4 \text{ cm} \Rightarrow A = 16 \text{ cm}^2$   |
| <b>Área del rectángulo</b>           | $A = \text{base por altura} = a \cdot b$   |    | Si $a = 3 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm} \Rightarrow A = 15 \text{ cm}^2$ .   |
| <b>Área del paralelogramo</b>        | $A = \text{base por altura} = a \cdot b$   |    | $a = 7 \text{ m}, b = 9 \text{ m} \Rightarrow A = 63 \text{ m}^2$   |
| <b>Área del triángulo</b>            | $A = (\text{base por altura})/2 = a \cdot b/2$   |    | $a = 5 \text{ m}, b = 6 \text{ m} \Rightarrow A = 15 \text{ m}^2$   |
| <b>Área del trapecio</b>             | Área igual a la semisuma de las bases por la altura  |    | $B = 7; b = 3; h = 5 \Rightarrow A = 25$  |
| <b>Área del rombo</b>                | Área igual al producto de las diagonales partido por 2   |   | $D = 4, D = 9 \Rightarrow A = 36/2 = 18$  |
| <b>Perímetro de un polígono</b>      | Perímetro es igual a la suma de los lados  |  | Lado = $6 \text{ cm}$ , apotema = $5 \text{ cm}$ , número de lados = $5 \Rightarrow$<br>Perímetro = $6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$ ;<br>Área = $15 \cdot 5 = 75 \text{ cm}^2$ .  |
| <b>Área de un polígono regular</b>   | Área es igual al semiperímetro por la apotema  |  |   |
| <b>Longitud de la circunferencia</b> | Si el radio es $r$ la longitud es igual a $2\pi r$ . Longitud de un arco de circunferencia: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$ |  | Radio = $3 \text{ cm} \Rightarrow$<br>Longitud = $6\pi \approx 18,84 \text{ cm}$ .<br>Área = $9\pi \approx 28,26 \text{ cm}^2$ .  |
| <b>Área del círculo</b>              | Si el radio es $r$ , el área es igual a $\pi \cdot r^2$ .  |  | Si $\alpha = 30^\circ$ y $r = 3 \text{ cm} \Rightarrow$ Longitud del arco =<br>$2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30/360 = 0,5\pi \approx 1,57 \text{ cm}$<br>$R = 7, r = 3 \Rightarrow A = \pi(7^2 - 3^2) = \pi(49 - 9) = 40\pi \approx 125,6 \text{ u}^2$<br>$R = 4 \text{ cm}, \alpha = 60^\circ \Rightarrow A = \pi \cdot 16 \cdot 60/360 \approx 8,373 \text{ cm}^2$ |
| <b>Área de la corona circular.</b>   | Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor.   |  |   |
| <b>Área del sector circular</b>      | Si abarca un arco $\alpha$ grados, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot \alpha/360$ .   |  |   |
| <b>Semejanza</b>                     | Dos figuras son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales   |  | Si el lado del cuadrado mide $5 \text{ m}$ , otro semejante de lado $15 \text{ m}$ , $k = 3$ , tiene un área multiplicada por $9$ , y el volumen del cubo multiplicado por $27$ .   |
| <b>Razón de semejanza</b>            | Si la razón de semejanza es $k$ , la razón entre las áreas es $k^2$ , y entre los volúmenes $k^3$ .                                |  |   |

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

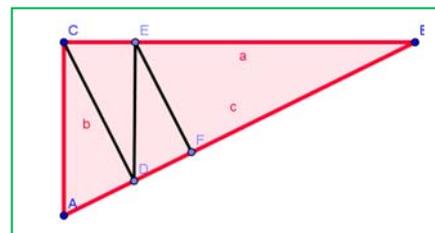
### Teorema de Pitágonas

- ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 *cm* y 6 *cm* de medida de sus catetos y 15 *cm* de hipotenusa? Razona tu respuesta
- Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.
- Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.
- ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8,2 *cm* y 6,9 *cm*?
- Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
  - 16 *cm* y 12 *cm*
  - 40 *m* y 30 *m*
  - 5 *dm* y 9,4 *dm*
  - 2,9 *km* y 6,3 *km*.
- Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
  - 25 *cm* y 15 *cm*
  - 35 *m* y 21 *m*
  - 42 *dm* y 25 *dm*
  - 6,1 *km* y 4,2 *km*
- Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 *m*.
- Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 *cm* y 5 *cm*
- Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 *cm* y la hipotenusa de 10 *cm*. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

### Semejanza

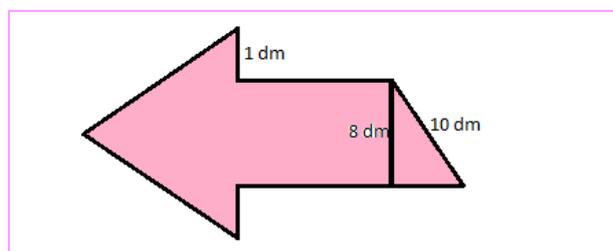
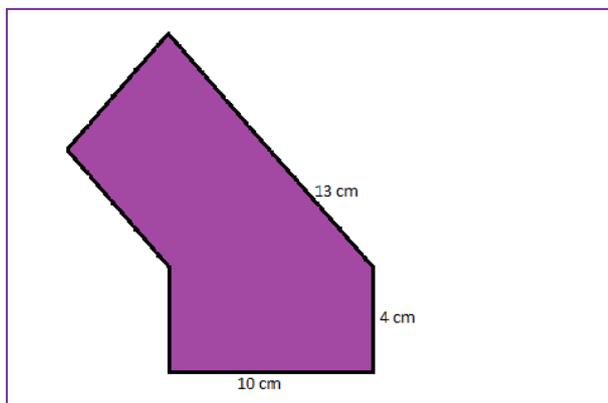
- Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
  - Un ángulo de 30° y otro de 20°. Un ángulo de 120° y otro de 20°.
  - Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50°.
  - $A = 40^\circ$ ,  $b = 8$  *cm*,  $c = 12$  *cm*.  $A' = 40^\circ$ ,  $b' = 4$  *cm*,  $c' = 6$  *cm*
  - $a = 3$  *cm*,  $b = 4$  *cm*,  $c = 6$  *cm*.  $a' = 12$  *cm*,  $b' = 16$  *cm*,  $c' = 24$  *cm*
- Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
  - $a = 15$  *cm*,  $b = 9$  *cm*,  $c = 12$  *cm*.  $a' = 10$  *cm*,  $b' = 4$  *cm*, ¿ $c'$ ?
  - $A = 50^\circ$ ,  $b = 3$  *cm*,  $c = 7$  *cm*.  $A' = 50^\circ$ ,  $b' = 18$  *cm*, ¿ $a'$ ?
- Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 *cm*, 14 *cm* y 14 *cm*. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 *cm*. ¿Cuánto miden sus lados?

13. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?
14. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?
15. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?
16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo  $ABC$ , de lados  $a = 60$ ,  $b = 45$  y  $c = 75$ , subdividido en 4 triángulos rectángulos menores  $ACD$ ,  $CDE$ ,  $DEF$  y  $EFB$ , y el escriba calcula la longitud del lado  $AD$  como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo  $ABC$  y del triángulo  $ACD$ . Determina la longitud de los segmentos  $CD$ ,  $DE$  y  $EF$ .
17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?
18. El mapa a escala 1:5000000 de un pueblo tiene un área de  $700 \text{ cm}^2$ , ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?
19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?
20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.



### Longitudes y áreas de polígonos

21. Una señal de tráfico tiene forma triangular. Su base mide 23 cm y su altura 36 cm. ¿Cuál es el área de la señal de tráfico?
22. Estima el área de los siguientes polígonos irregulares:



23. La pizarra de una clase tiene 150 cm de altura y 210 cm de base. ¿Cuál es la superficie de la pizarra?
24. El tejado de una casa tiene forma de trapecio. La base pegada al techo de la vivienda mide 53 m y la otra base mide 27 m. Sabiendo que la altura del tejado son 8 m, ¿Cuánto mide su área?

25. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? ¿Cuál es menor? Sólo tenemos 50 cm de reborde, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? Calcula el área de cada uno.
26. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?
27. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3,4 cm de radio.
28. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
29. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
30. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.
31. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.
32. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?
33. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?
34. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.
35. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su perímetro mide 20 cm.
36. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 cm y su altura 5 cm?
37. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 cm respectivamente.

## Longitudes y áreas de figuras circulares

38. Calcula la longitud de una circunferencia de radio 7 cm.
39. Una circunferencia de 98,27 cm de longitud, ¿qué radio tiene? ¿y qué diámetro?
40. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia de  $270^\circ$  si el radio mide 17 cm?
41. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un hexágono de lado 5 cm.
42. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 5 cm.
43. Calcula la longitud de una circunferencia circunscrita en un cuadrado de lado 5 cm.
44. Calcula el área en  $m^2$  de los círculos de radio  $r$  igual a:
  - a)  $r = 53 \text{ cm}$
  - b)  $r = 9 \text{ m}$
  - c)  $r = 8,2 \text{ dam}$
  - d)  $r = 6,2 \text{ dm}$
45. Calcula el radio de un círculo de área  $28,26 \text{ m}^2$ .
46. Calcula el área de un círculo de diámetro 73,6 cm.
47. Calcula el área de las coronas circulares de radios, respectivamente:
  - a)  $R = 8 \text{ m}; r = 3 \text{ m}$
  - b)  $R = 72 \text{ cm}; r = 41 \text{ cm}$
  - c)  $R = 9 \text{ m}; r = 32 \text{ cm}$
  - d)  $R = 5 \text{ dm}; r = 4 \text{ cm}$

48. En una habitación rectangular de lados 3 y 5 m, cubrimos un trozo con una alfombra circular de radio 2 m, ¿qué parte de suelo queda sin cubrir?

49. Calcula el área, en  $\text{cm}^2$ , de los sectores circulares de radio  $r$  y ángulo  $\alpha$  siguientes:

a)  $r = 6 \text{ m}$ ;  $\alpha = 30^\circ$

b)  $r = 3,7 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 45^\circ$

c)  $r = 2,7 \text{ dm}$ ;  $\alpha = 60^\circ$

d)  $r = 4 \text{ m}$ ;  $\alpha = 90^\circ$

50. Dibuja en tu cuaderno el diseño de tapiz del margen de forma que el lado del cuadrado pequeño oscuro sea de 1 cm, el lado del cuadrado de borde amarillo, de 3 cm, y el borde del cuadrado de fondo rojo, de 6 cm. Estima el área del círculo rojo, del círculo oscuro, de la figura en rojo y de las líneas amarillas.

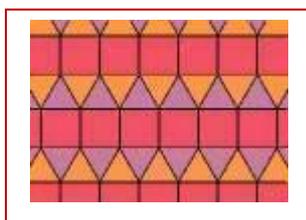
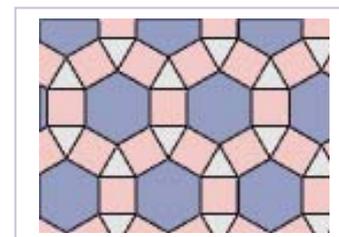


51. En una alfombra circular de 3 m de diámetro ha caído en el centro una mancha de medio metro de radio. a) ¿Qué área ocupa la parte limpia de la alfombra? b) Tapamos la mancha con otra alfombra cuadrada de 1,5 m de lado, ¿qué área de la alfombra circular queda sin tapar?

52. En un círculo cortamos dos círculos tangentes interiores de radios 5 y 2 cm, ¿qué área queda sin cortar?

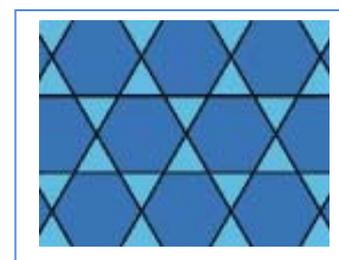
## Problemas

53. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.



54. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.

55. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?



56. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 m, y se separa de la pared una distancia de 2 m, ¿cuál es su longitud?

57. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 m de largo y 60 m de ancho. Calcula:

- La diagonal del terreno cuadrado.
- La diagonal del rectángulo
- El área de cada terreno.
- ¿Cuál tiene mayor superficie?

- 58.** Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.
- 59.** Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1,2 m de ancho y 1,5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?
- 60.** La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

## AUTOEVALUACIÓN

- La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:
  - 6,32 *cm*
  - 7 *cm*
  - 0,05 *m*
  - 627 *mm*
- En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:
  - 714 *cm*
  - 7,4 *m*
  - 8 *m*
  - 8925,1 *mm*
- El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:
  - 4,3 *dam*<sup>2</sup>
  - 21 *m*<sup>2</sup>
  - 40 *m*<sup>2</sup>
  - 1273057 *cm*<sup>2</sup>
- El área de un rectángulo de 10 *cm* de diagonal y 8 *cm* de base es:
  - 53 *cm*<sup>2</sup>
  - 80 *cm*<sup>2</sup>
  - 48 *cm*<sup>2</sup>
  - 62 *cm*<sup>2</sup>
- El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:
  - 45 *dm*
  - 181 *dm*
  - 126 *dm*
  - 200 *m*
- El área del círculo de radio 83,6 *m* mide aproximadamente:
  - 2,19 *hm*<sup>2</sup>
  - 234 *dam*<sup>2</sup>
  - 295413344 *cm*<sup>2</sup>
  - 0,2 *km*<sup>2</sup>
- La longitud de la semicircunferencia de radio 7,3 *cm* mide aproximadamente:
  - 0,3 *m*
  - 45,8 *cm*
  - 22,922 *cm*
  - 25,7 *cm*
- El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene como área:
  - 49 *cm*<sup>2</sup>
  - 48 *cm*<sup>2</sup>
  - 50 *cm*<sup>2</sup>
  - 48,37 *cm*<sup>2</sup>
- La longitud de la circunferencia de radio 4,6 *cm* mide aproximadamente:
  - 0,2 *m*
  - 30 *cm*
  - 28,9 *cm*
  - 25,7 *cm*
- La longitud del arco de circunferencia de radio 27,4 *m* que abarca un arco de 30° mide aproximadamente:
  - 28,6 *m*
  - 100 *cm*
  - 28,9 *cm*
  - 14,34 *m*