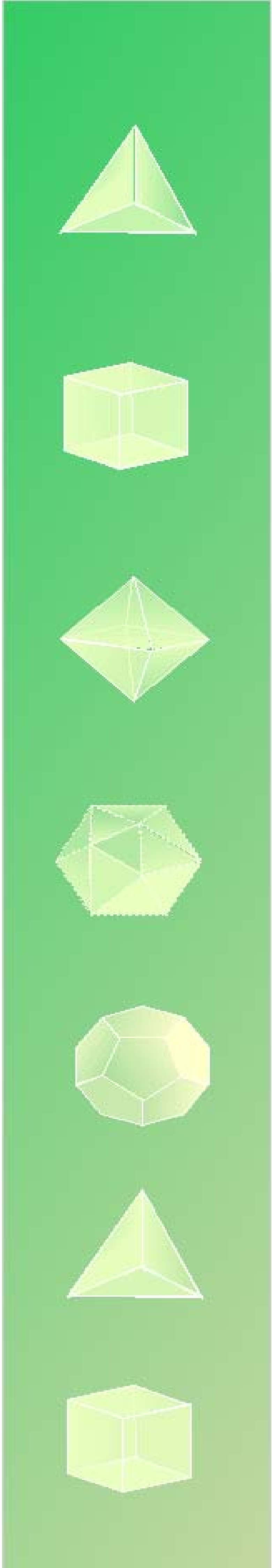


Formación Profesional Básica

Matemáticas II

Capítulo 8: Probabilidad

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 7: Probabilidad de Bachillerato, Matemáticas aplicadas a las CCSS I →

Autor: David Miranda

Revisor: Javier Rodrigo

ÍNDICE

Resumen

Todos los días estamos obligados a calcular probabilidades, aunque sea de modo intuitivo: ¿ganará la liga mi equipo favorito?, ¿lloverá mañana?, ¿le gustaré a esa persona "especial" que hay en clase?, ¿me darán una beca?

Siempre, en la televisión o en los periódicos, se usa la Probabilidad y se utiliza continuamente en todas las Ciencias, incluso en Medicina, Psicología…

Vamos a comenzar este capítulo con ejercicios de introducción que sirvan para comprender los conceptos, pero terminaremos aprendiendo cosas más complicadas, como el Teorema de *Bayes*.

El Teorema de *Bayes* nos va servir para resolver problemas como:

"Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo, calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis".

Autor: David Miranda

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. PROBABILIDAD

1.1. Introducción a la Probabilidad

Actividad de introducción

- ***Un nuevo jugador para mi equipo***

Como todos podéis observar, mi físico me ha hecho un portento del baloncesto. Mi equipo no me quiere por mi altura, sino porque hago matemáticas. El caso es que me han encargado la difícil tarea de elegir un jugador para el próximo año, y no sé cómo empezar. Me han mandado unas cosas que no sé muy bien qué significan. ¿Me podéis ayudar?

Esto es lo que me han mandado:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82

Primero vamos a intentar descifrar qué es cada cosa:

- ¿Qué significa Con?
- ¿Qué significa Int?
  - Con: son tiros conseguidos
  - Int: son tiros intentados

Ahora, lo siguiente que tenemos que hacer, es saber qué jugador queremos fichar:
- ¿Qué tiene que tener nuestro jugador para que lo fichemos?

Una primera clasificación la podríamos hacer con los puntos logrados. Es un cálculo fácil, ¿no?

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769

Me surgen nuevas preguntas con la nueva columna de Puntos Totales:
- ¿Qué significa Puntos Totales Conseguidos?
- ¿Qué significa Puntos Totales Intentados?
- ¿Me sirve de algo saber los Puntos Totales Intentados?
- ¿Es mejor presentar los nombres en ese orden o es preferible otro?

Yo creo que si los ordenamos, vemos más claramente las cosas:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631

Esta es una actividad adecuada para desarrollar en el aula en grupo, discutiendo sobre la información que aparece. Las preguntas van encaminadas a valorar la utilidad de la información, si me está diciendo algo o no. Aquí los alumnos ya estarán decidiendo qué jugador es mejor para ficharlo, así que se trata de dar razones favorables o desfavorables para justificar su intuición. Se fomenta primero que piensen, y después que expresen sus ideas, las debatan, critiquen otras y sepan escuchar críticas a las suyas,... Se puede relacionar con una competencia de lenguaje, tanto matemático como lingüístico. El tiempo adecuado para desarrollar esta actividad es de una hora de clase. Se pretende que recuerden y utilicen conceptos como experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, regla de Laplace…

También se puede hacer la clasificación según los tiros de 3, los tiros de 2 o los tiros libres.

- ¿Qué jugador es mejor en tiros de 3?
- ¿Y en tiros de 2?
- ¿Cuál es mejor en tiros libres?

Ordenado por tiros de 3:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631

Ordenado por tiros de 2:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606

Ordenado por tiros libres:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631

La ordenación de las tablas es una introducción a la representación de datos estadísticos.

Aquí podemos ver que hay un jugador que destaca en casi todas las clasificaciones:

- ¿Podemos fiarnos de estas clasificaciones?
- ¿Tendrá algo que ver el número de canastas conseguidas con el número de lanzamientos?

Otra vez cuestionamos la información hallada. En probabilidad, al hacer un experimento, es importante recoger la información que verdaderamente nos es útil, y rechazar información que no nos va a servir para nuestro experimento.

Más o menos, se va viendo un poco las características de cada jugador. Me pregunto si podemos añadir algo más que apoye nuestra decisión.

- ¿Sería interesante calcular cuántas canastas han fallado?
- ¿Por qué?
- ¿Me da alguna información saber cuántas canastas han fallado (Fall)?

Pues entonces añadimos la nueva información que es fácil de calcular. ¿Cómo se calcula? Restando las canastas intentadas a las canastas conseguidas.

Pues la nueva tabla es:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Puntos Totales		
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	447	434	881
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	444	460	904
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	397	372	769
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	305	301	606
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	258	373	631

No sé si tenemos claro ya el jugador que queremos, pero yo no estoy muy convencido. ¿Se os ocurre algún otro tipo de clasificación para que nos ayude a decidir?

A mí se me ha ocurrido estudiar los tiros totales realizados:

Si los ordeno según los tiros conseguidos:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Puntos Totales			Tiros Totales		
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	447	434	881	245	191	436
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	444	460	904	215	181	396
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	397	372	769	213	159	372
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	305	301	606	154	123	277
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	258	373	631	142	164	306

Según los tiros que han fallado:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Puntos Totales			Tiros Totales		
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	447	434	881	245	191	436
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	444	460	904	215	181	396
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	258	373	631	142	164	306
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	397	372	769	213	159	372
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	305	301	606	154	123	277

Podemos ver que el jugador que más puntos ha conseguido, que es el que más canastas ha conseguido, también es el que más canastas ha fallado:

- ¿Qué quiere decir los Tiros Totales Conseguidos?
- ¿Y los Tiros Totales Intentados?
- ¿Tiene alguna relación los Tiros Totales Conseguidos con los Tiros Totales Intentados?
- Es decir, ¿cuántos más tiros intentados, más tiros conseguidos?

La respuesta a la última pregunta es muy interesante, porque se suele creer que si se tira muchas veces, meterá muchas canastas y será el mejor jugador. Y esto no es verdad. Se puede decir que cada lanzamiento es un intento distinto.

Ahora estoy algo confuso. Hemos encontrado un jugador que mete muchos puntos, pero es el que más canastas falla. Qué podría hacer para saber, de manera más clara, qué jugador es el mejor.

Se me ocurre calcular las frecuencias relativas de tiros totales que han sido canasta.

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Tiros Totales			
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Fr
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	245	191	436	0’56
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	215	181	396	0’54
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	142	164	306	0’46
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	213	159	372	0’57
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	154	123	277	0’56

Voy a ordenarlo por la mayor frecuencia relativa de tiros totales conseguidos:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Tiros Totales			
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Fr
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	213	159	372	5 '57
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	245	191	436	0'56
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	154	123	277	0'56
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	215	181	396	0'54
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	142	164	306	0'46

- ¿Qué información me está dando esa frecuencia relativa?
- ¿Qué significa?
- ¿Qué aporta esta frecuencia relativa para la decisión?

Vamos a definir bien cada cosa:

- Con: canasta conseguida tras un lanzamiento (para abreviar, lo escribiremos como C).
- Fall: canasta fallada tras un lanzamiento (lo mismo, lo llamamos F).
- Int: es un lanzamiento, I.
- ¿Qué hemos hecho para conseguir un tiro de cualquier valor?

Lanzar a canasta. Pues podemos decir que el lanzamiento a canasta es nuestro experimento (o el **experimento aleatorio**).

- Cuando hemos lanzado a canasta, ¿qué puede suceder?

Que consigamos el tiro, es decir, C, o que lo fallemos, es decir, F (lo que calculamos más adelante). Por eso, diremos que Conseguir y Fallar son **sucesos**, para aclararnos mejor. Es decir, C y F son sucesos. Y no sólo eso, o bien se consigue o se falla el tiro.

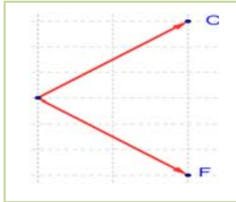
Al realizar nuestro experimento, los resultados que obtendremos siempre van a ser estos dos sucesos. Entonces, si reunimos todos los sucesos en una caja (nosotros los matemáticos lo llamamos conjunto), diremos que este conjunto $\{C, F\}$ es nuestro **espacio muestral**.

Para que nos entendamos, fijaos en esta imagen:

- Es una carta de lo que podemos pedir. No sólo tienen un producto de cada, son todas las cosas que tienen, es una muestra de lo que puedes pedir. Este cartel, en matemáticas, lo podemos llamar "espacio muestral". Puedo pedir algo que esté en la carta, y no puedo pedir nada que no esté en la carta.

En un experimento, el espacio muestral son las cosas que nos pueden salir al realizar el experimento, y lo que no esté dentro de ese espacio, no saldrá nunca.

Pues entonces tenemos lo siguiente:



- Experimento: lanzamiento a canasta
- Espacio muestral: $\{C, F\}$.
- Sucesos:
  - o C: conseguir el lanzamiento
  - o F: fallar el lanzamiento.

- Cuando calculasteis los lanzamientos fallados, ¿qué hicisteis?

Restasteis a los lanzamientos intentados, los conseguidos. Podemos escribir que:

$$F = \text{Int} - C$$

o lo que es lo mismo:

$$F = \text{Total} - C$$

Decimos que fallar la canasta es lo **contrario** de conseguir la canasta.

Por tanto, F es el **suceso contrario** (suceso opuesto, suceso complementario) de C. Lo podemos escribir de distintas formas según los autores: $F = C^c = C' = noC = \overline{C}$. Podemos decir que son complementarios porque $C \cup F = \text{Total}$, se complementan.

- Cuando hemos ido viendo las distintas clasificaciones de los jugadores, ¿por qué se dice que uno era mejor que otro?

El que metía más canastas era el mejor, pero también era el que más había fallado. Cuando calculamos los porcentajes de acierto, nos aclaró un poco la situación. La tabla era esta:

Voy a ordenarlo por la mayor frecuencia relativa de tiros totales conseguidos:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Tiros Totales			
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Fr
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	213	159	372	5 **'57**
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	**245**	191	436	0'56
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	154	123	277	0'56
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	215	181	396	0'54
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	142	164	306	0'46

Ahora el jugador que lidera esta clasificación no es el que más puntos había metido el año pasado.

- Entonces, ¿qué significa esa frecuencia relativa? ¿Cómo lo habíamos calculado?

La frecuencia relativa significa que de todos los lanzamientos que intentó, 372, consiguió meter canasta 213, calculamos el cociente entre los tiros conseguidos y los lanzamientos intentados, 0'57.

Si queremos saber cuál va a ser el mejor jugador para nuestro equipo el próximo año, me gustaría que el jugador, de todos los lanzamientos que intente, consiga muchos. ¿Qué certeza tendré yo de que el próximo año, ese porcentaje de acierto sea grande? A esto es a lo que responde la probabilidad.

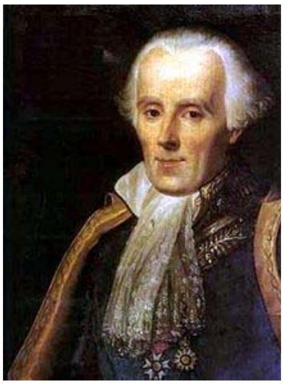
Ya sabes que, por la ley de los grandes números, cuando el número de experiencias es muy grande la frecuencia relativa tiende a estabilizarse. Y a ese número al que tiende, lo denominamos probabilidad. Recuerda que hay dos formas de asignar probabilidades, por simetría, a priori, si los sucesos elementales sabemos que son equiprobables, mediante la ley de *Laplace*, o a posteriori, haciendo un buen número de experimentos y valorando a donde tienden las frecuencias relativas.

Si la tabla que nos han proporcionado para hacer la selección recoge un número suficiente de experimentos (de tiros a canasta) entonces, mirando nuestra tabla, vemos que todos nuestro jugadores tienen una probabilidad de encestar en un tiro próxima a 1/2, pero el jugador que vamos a seleccionar es Washington Cucurto pues su probabilidad de encestar en un tiro a canasta es la mayor, 0'57.

Otra actividad de introducción

Mirada desde la perspectiva de Laplace

- Pedro y Elisa van a jugar tirando dos dados. Gana Pedro si la suma de los números de las caras superiores es menor que 7, y gana Elisa si es mayor que 7. Si es 7, ni gana ni pierde ninguno. Pero Daniel les pregunta si están seguros que ese juego es justo. ¿Puedes ayudarles a decidirlo? Han contactado con un amigo para que les ayude.



Pero es algo anticuado, esto no mola, vamos a ponerle algo.

Bueno, algo ha mejorado.

Ayúdanos desde el principio. Seguro que tú sabes.

- Quiero calcular la probabilidad de que gane Pedro y la de que gane Elisa.
  - Experimento: lanzar dos dados y sumar los números de las caras superiores
  - Sucesos:
    - A: Sumen menos de 7
    - B: Sumen más de 7
    - C: Sumen 7.
  - ¿Espacio muestral: $E = \{A, B, C\}$? No. Este espacio muestral no nos interesa. No son sucesos equiprobables. El espacio muestral $E = \{(1, 1), (1, 2),..., (6, 6)\}$ si nos interesa, porque los sucesos elementales son equiprobables. Nos dice lo que ha salido en la cara superior del primer dado, y en la del segundo.

Nos dice nuestro amigo que contemos el número total de casos posibles: (1, 1), (1, 2)… (1, 6), (2, 1), … (6, 6). ¿Cuántos son? ¿Son 36?

Que contemos aquellos casos en los que ganaría Pedro: (1, 1), (1, 2), …, (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1). ¿Cuántos son? ¿Son 15?

Y los casos en los que ganaría Elisa: (2, 6), (3, 6), …, (6, 6), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 3), (6, 3), (6, 2). ¿Cuántos son? ¿Son 15?

Y ahora que usemos:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Según nuestro cálculo hay:

- Casos posibles = 36
- Casos favorables = 15

Por tanto:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{15}{36} = 0'42 = P(B)$$

El juego es justo.

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0'16$$

Observa además que: $P(A)$ + $P(B)$ + $P(C)$ = 0'42 + 0'42 + 0'16 = 1. La probabilidad vale siempre un número entre 0 y 1. No existen probabilidades que valgan más que 1, ni menos de 0.

Aspectos a tener en cuenta:

- ¿Por qué se pone arriba los casos favorables?

  Estamos calculando una razón, que es una parte del total.

- ¿Puede haber una frecuencia relativa menor que 0?

  Siempre que hacemos un experimento, el valor de algo que nos sale siempre es positivo, es decir, no podemos tener –3 casos favorables.

- ¿Puede haber una frecuencia relativa mayor que 1?

  Si diese mayor que 1 querría decir que hay más casos favorables que todos los posibles.

- Se llama **suceso imposible** al que no tiene ningún caso favorable, por lo que su frecuencia relativa y su probabilidad es siempre 0.
- Si el suceso está formado por todos los casos posibles, la frecuencia relativa y la probabilidad es 1. Siempre que realizamos el experimento ocurre. Lo llamamos **suceso seguro**.
- También se podrían calcular porcentajes en lugar de frecuencias relativas. Ambos son razones, sólo que en el porcentaje el total es 100, y en la frecuencia relativa es 1.

Y otra actividad de introducción más

Actividades culturales en un centro escolar

- En una clase de 36 estudiantes, 15 quieren hacer teatro, 24 editar una revista, y 9 no quieren participar en ninguna actividad.

a) ¿Qué proporción quieren hacer teatro?
b) ¿Qué proporción quieren editar una revista?
c) ¿Qué proporción no quieren participar en ninguna actividad?
d) ¿Qué proporción quieren hacer teatro o bien editar una revista?
e) ¿Qué proporción quieren hacer teatro y además editar una revista?
f) ¿Qué proporción de estudiantes, de los que quieren editar una revista, quieren también hacer teatro? Observa que es una pregunta diferente a la anterior pues contamos aquellos estudiantes que desean hacer teatro entre los que quieren editar una revista. Es un suceso condicionado a querer editar una revista.
g) ¿Qué proporción de estudiantes, de los que quieren hacer teatro, quieren también editar una revista?

La mejor manera de resolver esto es dar nombres y dibujar un diagrama para aclararnos.

- Total de estudiantes, E: 36
- Quieren hacer teatro, T: 15
- Quieren editar una revista, V: 24
- No hacer nada, N: 9.

Por tanto, en $E - N$ hay 36 – 9 = 27 estudiantes, que son los que quieren hacer teatro o bien editar la revista, $T \cup R$.

Ayúdate de un diagrama y observa que en $T - R$ hay 3 estudiantes y en $R - T$ hay 12 estudiantes. Por tanto hay 12 estudiantes que quieren hacer teatro y además editar una revista. En $T \cap R$ hay 12 estudiantes.

Por tanto:

a) T: 15/36 = 0’42 $\rightarrow$ 42 %.
b) R: 24/36 = 0’67 $\rightarrow$ 67 %
c) N: 9/36 = 0’25 $\rightarrow$ 25 %
d) $T \cup R$: 27/36 = 0’75 $\rightarrow$ 75 %
e) $T \cap R$: 12/36 = 0’33 $\rightarrow$ 33 %

Queremos ahora saber cuántos estudiantes, de entre los que desean editar una revista, quieren hacer teatro. Hay 24 que quieren editar la revista, y 12 que desean hacer ambas cosas:

f) T/R: 12/24 = 0’5 $\rightarrow$ 50 %

Y de los 15 estudiantes que quieren hacer teatro, 12 también quieren editar una revista:

g) R/T: 12/15 = 0’8 $\rightarrow$ 80 %

1.2. Álgebra de sucesos

Recuerda que:

Experimento aleatorio

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Ejemplos:

- Son experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.

b) Lanzar dos dados y anotar los números de las caras superiores.

c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.

d) Sacar, sin reemplazamiento, dos cartas de la baraja.

e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

- No son experimentos aleatorios

a) Salir a la calle sin paraguas cuando llueve y ver si te mojas.

b) El precio de medio kilo de rosquillas, si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.

c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las provincias españolas.

b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.

c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.

d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.

e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Suceso, suceso elemental, espacio muestral

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral, E**.

Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral.

Ejemplos:

- Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga cara o salga cruz. El conjunto de sucesos elementales es $\mathbf{E}$ = {cara, cruz}.

- *Al lanzar un dado, el conjunto de posibles resultados es* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso obtener par es {2, 4, 6}, el suceso obtener impar es {1, 3, 5}, el suceso obtener múltiplo de 3 es {3, 6}, sacar un número menor que 3 es {1, 2}.

- El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes, son:

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es E = {*blanca*, *negra*}.

b) Sacar una carta de una baraja española es E = {As de Oros, 2O, 3O,…, SO, CO, RO, As de Copas, …, RC, As de Bastos, …, RB, As de Espadas,…, RE}

- *Al lanzar dos monedas el conjunto de posibles resultados es* E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El suceso *sacar cero caras* es {(+, +)}, *sacar una cara* es {(C, +), (+, C)} y *sacar dos caras* {(C, C)}.

Actividades propuestas

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: $A \cup B$ se verifica si se verifica A **o bien** se verifica B.

La **intersección**: $A \cap B$ se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

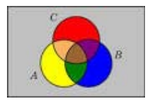
La **diferencia**: $A - B$ se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios.

Las operaciones con sucesos verifican las mismas **propiedades** que las operaciones con conjuntos:

Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Simplificativa:	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Todas ellas puedes comprenderlas representando conjuntos usando diagramas de Venn.



Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, llamamos A al suceso obtener par*: $A = \{2, 4, 6\}$, y B al suceso obtener múltiplo de 3: $B = \{3, 6\}$. Entonces $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$, $A \cap B = \{6\}$, $A - B = \{2, 4\}$.

Actividades propuestas

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Suceso seguro, suceso imposible y suceso contrario

Se considera que el espacio muestral, E, es un suceso al que se denomina **suceso seguro**, y que el conjunto vacío, $\varnothing$, es otro suceso, al que se llama **suceso imposible**.

Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o complementario) de A, y se escribe $\overline{A}$, (o A', o A^C, o no$A$), al suceso $E - A$.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, si* $A = \{2, 4, 6\}$, y $B = \{3, 6\}$. Entonces $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5\}$. Los sucesos A y B son compatibles pues $A \cap B = \{6\}$.

Actividades propuestas

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".

1.3. Asignación de Probabilidades

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya había sido usado este concepto, por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles,** que se conoce como **Regla de *Laplace*** y dice que:

Regla de Laplace

"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles".

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ley de los grandes números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la ley de los grandes números, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Actividades resueltas

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, y suponemos que la moneda no está trucada. Si sospecháramos que la moneda estuviera trucada para asignar esa probabilidad habría que tirar la moneda un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener cara.
- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 5, y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables.

- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0'5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0'49.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar un oro*", o "*sacar un as*", o "*sacar el caballo de copas*"… Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad de, por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar un oro* es 10/40, y la de un *as* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar el rey de copas? ¿Y de sacar un rey? ¿Y una copa?

La probabilidad de sacar el *rey de copas* es 1/40. Pero el suceso *sacar un rey* se cumple si sale el rey de oros, o de copas, o de bastos o de espadas. Es decir, no es un suceso simple, está formado, en este caso, por 4 sucesos elementales, luego su probabilidad es 4/40 = 1/10. Lo mismo le ocurre a *sacar una copa*. Es un suceso compuesto, y como hay 10 copas su probabilidad es 10/40 = 1/4.

- En una clase hay 15 chicos y 14 chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?

Como hay 14 chicas (los casos favorables) sobre una población de 29 individuos, de acuerdo con la Ley de *Laplace*, la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{14}{29}$$

- En el monedero tenemos 3 monedas de 1 céntimo, 7 monedas de 5 céntimos, 4 monedas de 10 céntimos y 2 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 céntimos o de 50 céntimos. Por tanto el total de casos favorables es de 6 (hay 4 de 10 y 2 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 3 + 7 + 4 + 2 = 16.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es:

$$P(\text{par de céntimos}) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso "par de céntimos"}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Actividades propuestas

11. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

12. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Definición axiomática de probabilidad debida a Kolmogorov

La definición axiomática de Kolmogorov es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

La probabilidad de un suceso es un número que debe verificar estas propiedades:

1.- La probabilidad del suceso seguro es 1: $P(E) = 1$.

2.- La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo: $P(A) \geq 0$, para todo A.

3.- Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades: Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$

b) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

c) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de 40 cartas? ¿Y de* ***no*** *sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de* ***no*** *sacar una copa?*

El suceso *no sacar un as* es el suceso **contrario** al de *sacar un as*. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Observa que se obtiene que $P(as) + P(no\ as)$ = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

La probabilidad de *sacar copa* es 10/40, y hay 30 cartas que no son copas, luego la probabilidad de ***no*** *sacar copa* es 30/40, y 10/40 + 30/40 = 1.

Actividades propuestas

13. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

14. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar una copa o un oro?

Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar un as o un oro?

Hay 4 ases y hay 10 oros, pero hay el *as de oros*, luego las cartas que son o bien un as o bien un oro son 13, luego la probabilidad es 13/40.

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que, como copa y oro, no pueden realizarse a la vez, y **sucesos compatibles** a los que, como as y oro, pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso "*se verifica A o bien se verifica B*". Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B sí pueden verificarse a la vez habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar un rey o una figura; b) No sale un rey o sale un rey; c) Sacar un basto o una figura.*

a) Hay 4 reyes y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero los cuatro reyes son figuras, por tanto P(Rey ∪ Figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0'4.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes, y hay 4 reyes, luego P(no rey ∪ rey) = 36/40 + 4/40 = 1. Esta conclusión es más general. Siempre:

$P(\overline{A} \cup A) = 1$,

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

c) Hay 10 bastos y hay 16 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez bastos (as, sota, caballo y rey), luego P(Basto ∪ Figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

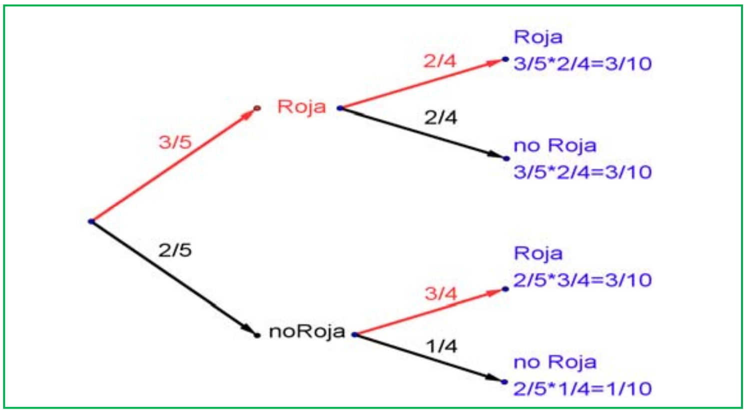
La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

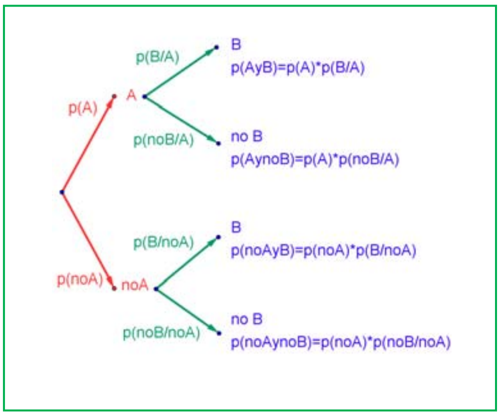
Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 3/5, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes:** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4, y está condicionada por lo que antes hayamos sacado. Se escribe: P(Roja/Roja) y se lee *"probabilidad de Roja condicionado a haber sacado Roja"*. La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 2/5·3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5·1/4 = 2/20 = 1/10.



Pero observa más cosas. Por ejemplo, sumando las probabilidades de Roja y noRoja se obtiene: 3/5 + 2/5 = 1; y lo mismo en las otras ramas del árbol: 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; e incluso sumando todas las probabilidades finales:

$$P(E) = P(A_1)+P(A_2)+ \dots +P(A_n) = 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.$$

Los sucesos no son independientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.

Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de 40 cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 4/40 · 4/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *as* viene condicionada por que hayamos sacado un *as* previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 4 ases sino sólo 3, luego la probabilidad es:

4/40 · 3/39 = 1/130.

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $\boldsymbol{P(B/A) \neq P(B)}$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $\boldsymbol{P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)}$.

Actividades propuestas

15. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y B = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

16. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

17. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

18. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

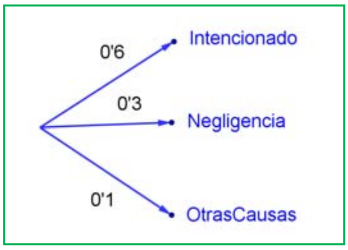
19. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

20. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A)$ = 5/36 (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B)$ = 8/36 (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

1.4. Tablas de contingencia y diagramas de árbol

Diagramas de árbol

Ejemplo:

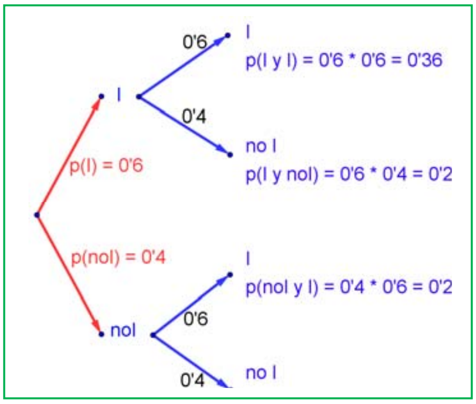


- *Se hace un estudio sobre los incendios y se comprueba que en una determinada zona el* 60 % de los incendios son intencionados, un 30 % se deben a negligencias y 10 % a causas naturales como rayos o a otras causas. Representa esta situación con un diagrama de árbol.

Actividades resueltas

- Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es 0’6, ¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?

Llamamos I al suceso “ser intencionado” y $\bar{I}$ = no$I$ al suceso “no ser intencionado”. Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:



$$P(I, I) = 0'6 \cdot 0'6 = 0'36$$

$$P(I, \bar{I}) = 0'6 \cdot 0'4 = 0'24$$

ya que es la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo no.

$$P(\bar{I}, I) = 0'4 \cdot 0'6 = 0'24$$

$$P(\bar{I}, \bar{I}) = 0'4 \cdot 0'4 = 0'16$$

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de (I, I), $(I, \bar{I})$, y $(\bar{I}, I)$ que es 0’36 + 0’24 + 0’24 = 0’84. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario P(no$I$, no$I$) = $P(\bar{I}, \bar{I})$ = 0’16 y restarla de 1:

$$P(\text{al menos uno intencionado}) = 1 – 0'16 = 0'84.$$

Actividades propuestas

21. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I)$ = 0’6.

22. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A)$ = 0’96; $P(B)$ = 0’98 y $P(C)$ = 0’99. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

23. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0’3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

24. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totales**
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totales	474	26	500

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totales**
Lesión maligna (M)	0’412	0’024	0’436
Lesión benigna (B)	0’536	0’028	0’564
Totales	0’948	0’052	1

Actividades resueltas

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.*

  0’412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

  0’024 = $P(M \cap I)$; 0’536 = $P(B \cap C)$; 0’028 = $P(B \cap I)$.

  ¿Y 0’436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0’436 = $P(M)$.

  Del mismo modo: 0’564 = $P(B)$; 0’948 = $P(C)$; 0’052 = $P(I)$.

  Observa que $P(M) + P(B) = 1$ y que $P(C) + P(I) = 1$. Son sucesos contrarios.

- *¿Son dependientes o independientes los sucesos* M *y* C*?*

Solución:

$P(M \cap C) = P(M) \cdot P(C/M)$, por tanto: 0’412 = 0’436 · $P(C/M)$, de donde $P(C/M)$ = 0’412/0’436 = 0’945 que es distinto de 0’948 que es la probabilidad de C. Se puede afirmar que M y C son dependientes ya que $P(C/M) \neq P(C)$. Pero si redondeamos a dos cifras decimales $P(C/M)$ = 0’95 = $P(C)$, y en este caso consideramos que son sucesos independientes.

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
No B = $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ y } P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Actividades propuestas

25. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0’27		0’56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0’58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap \text{U})$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

26. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividades resueltas

- Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y no$A$ = $\overline{A}$.

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	2/9	5/9	7/9
No B = $\overline{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Conocemos la $P(A)$ = 3/9 = 1/3, $P(\overline{A})$ = 6/9 = 2/3, $P(B)$ = 7/9 y $P(\overline{B})$ = 2/9.

También conocemos $P(A \cap B)$ = 2/9; $P(A \cap \overline{B})$ =1/9; $P(\overline{A} \cap B)$ = 5/9 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 1/9.

Nos falta conocer $P(B/A)$ que podemos obtener dividiendo $P(A \cap B)$ entre $P(A)$:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.$$

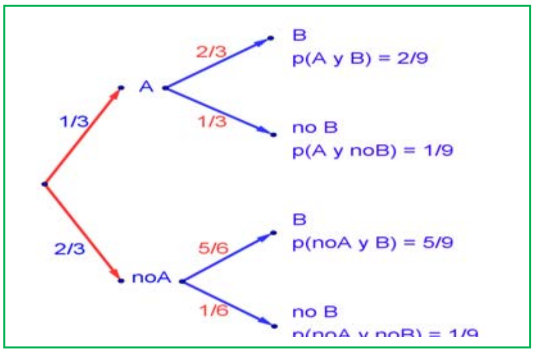
Del mismo modo calculamos:

$$P(\overline{B}/A) = P(A \cap \overline{B})/P(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3$$

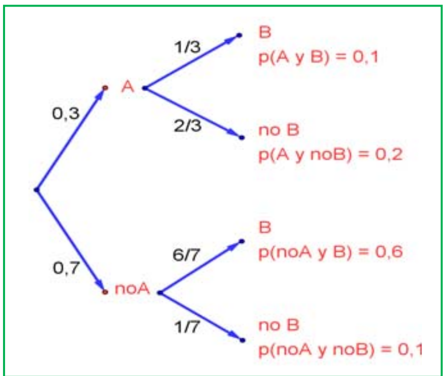
$$P(B/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(\overline{A}) = 5/9 : 6/9 = 5/6$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{A}) = 1/9 : 6/9 = 1/6.$$

El árbol es:



Actividades resueltas



- Recíprocamente, dado el diagrama de árbol obtener la tabla de contingencia:

Ahora conocemos $P(A)$ = 0'3 y $P(\overline{A})$ = 0'7. Además conocemos $P(B/A)$ = 1/3; $P(B/\overline{A})$ = 6/7; $P(\overline{B}/A)$ = 2/3 y $P(\overline{B}/\overline{A})$ = 1/7.

Calculamos, multiplicando: $P(A \cap B)$ = 0'3·(1/3) = 0'1; $P(A \cap \overline{B})$ = 0'3·(2/3) = 0'2; $P(\overline{A} \cap B)$ = 0'7·(6/7) = 0'6 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0'7·(1/7) = 0'1 que ponemos también en el árbol.

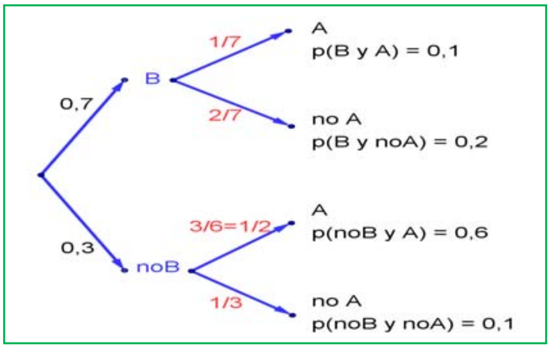
Rellenamos con estos datos una tabla de contingencia:

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	0'1	0'6	
No B = $\overline{B}$	0'2	0'1	
	0'3	0'7	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan, $P(B)$ = 0’1 + 0’6 = 0’7 y $P(\overline{B})$ = 0’2 + 0’1 = 0’3.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0’1	0’6	0’7
No B = $\overline{B}$	0’2	0’1	0’3
	0’3	0’7	1

Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer:



$P(A/B)$ = 0’1/0’7 = 1/7;

$P(\overline{A}/B)$ = 0’2/0’7 = 2/7;

$P(A/\overline{B})$ = 0’3/0’6 = 3/6 = 1/2;

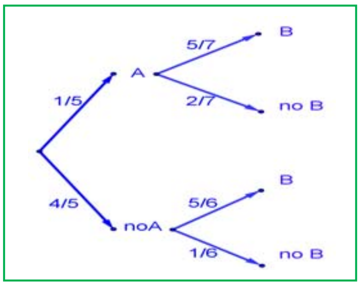
$P(\overline{A}/\overline{B})$ = 0’1/0’3 = 1/3.

Actividades propuestas

27. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0’4	0’2	0’6
No B = $\overline{B}$	0’15	0’25	0’4
	0’55	0’45	1

28. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



29. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

30. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: $P(M/C)$

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: $P(\overline{M}/C)$.

1.5. Teorema de *Bayes*

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de la página inicial: "Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis". Es decir permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral). Vamos a enunciarlo, pero ¡no te asustes! ¡Ya sabes resolver problemas en los que se usa el Teorema de *Bayes*! ¡No hace falta que te aprendas la fórmula!

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

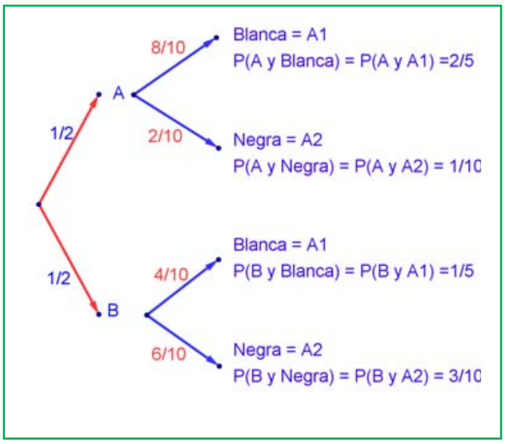
$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Actividades resueltas

- Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?



Debemos calcular $P(B/Negra)$.

Para que se parezca más al enunciado del teorema vamos a llamar a Blanca = A_1 y a Negra = A_2. El conjunto de sucesos $\{A_1, A_2\}$ verifica las condiciones del teorema de *Bayes*. Por tanto queremos calcular $P(B/A_2)$.

Podemos construir el árbol del margen. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades.

Nos dicen que la elección de urna es al azar, por tanto $P(A) = P(B) = 1/2$.

Si sacamos una bola de la urna A sabemos que $P(Blanca/A) = P(A_1/A) = 8/10$, pues en la urna A hay 10 bolas de las que 8 son bolas blancas.

Del mismo modo sabemos:

$P(Negra/A) = P(A_2/A) = 2/10$; $P(Blanca/B) = P(A_1/B) = 4/10$, y $P(Negra/B) = P(A_2/B) = 6/10$.

Multiplicando calculamos las probabilidades de los sucesos compuestos:

$P(A \cap A_1) = 2/5$, $P(A \cap A_2) = 1/10$, $P(B \cap A_1) = 1/5$, $P(B \cap A_2) = 3/10$.

Estos datos nos permiten construir la tabla de contingencia asociada:

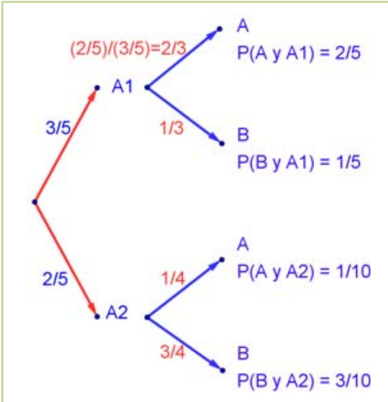
	Blanca = A_1	**Negra = A_2**	
A	$P(A \cap A_1) = 2/5$	$P(A \cap A_2) = 1/10$	$P(A) = 2/5 + 1/10 = 1/2$
B	$P(B \cap A_1) = 1/5$	$P(B \cap A_2) = 3/10$	$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2$
	$P(A_1) = 2/5 + 1/5 = 3/5$	$P(A_2) = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 2/5$	1

Observa que:

$$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2 = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2)$$

En general, si hubiera un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se escribiría:

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)\cdot P(A_n)$$



Construimos el otro diagrama de árbol. Conocemos $P(A_1) = 3/5$ y $P(A_2) = 2/5$, además de las probabilidades de las intersecciones, por lo que podemos calcular las probabilidades condicionadas, dividiendo:

Por ejemplo: $P(A/A_1) = P(A \cap A_1)/P(A_1) = (2/5)/(3/5) = 2/3$.

Con lo que tenemos resuelto nuestro problema pues:

$P(B / Negra) = P(B / A_2) = 3/4$.

Vamos a comprobar que es el mismo resultado (y los mismos cálculos) que hubiéramos obtenido usando la expresión del teorema de *Bayes*:

$$P(B/A_2) = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2/A)\cdot P(A) + P(A_2/B)\cdot P(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap A) + P(A_2 \cap B)} = \frac{3/10}{1/10 + 3/10} = \frac{3}{4}$$

Actividades propuestas

Problemas propuestos en Selectividad

31. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

32. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

33. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

CURIOSIDADES. REVISTA

Galileo

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

RESUMEN

Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**. Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	*P*(5) = 1/6. *P*(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	*1.* $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo *A.* *3.* Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Teoremas de Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Intersección: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	*P*(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. *P*(5 ∪ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 *P* sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 =2/36
Teorema de *Bayes*	$P(A_i / B) = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k) \cdot P(A_k)}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par". B al suceso "Salga cruz y un número primo" y C al suceso "salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) $P(A) + P(noA) = 1$

b) $P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento “tirar dos monedas y contar el número de caras” es:

a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

7. Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

8. Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:

a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

9. En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es:

a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

10. Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es:

a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6