

FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

EJERCICIOS II

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045270

Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:10:12.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



ÍNDICE

Capítulo 0: Repaso	3
Capítulo 1: Expresiones algebraicas y polinomios	19
Capítulo 2: Ecuaciones y sistemas	31
Capítulo 3: Funciones	45
Capítulo 4: Geometría del plano	59
Capítulo 5: Áreas y perímetros de figuras planas	65
Capítulo 6: Geometría del plano y el espacio	77
Capítulo 7: Estadística	87
Capítulo 8: Probabilidad	100
TOTAL	106



FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA**MATEMÁTICAS II****CAPÍTULO 0: REPASO. NÚMEROS****ACTIVIDADES PROPUESTAS****1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS**

1. *Las perlas del rajá:* Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo. La hija mayor tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante. La tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?

2. Realiza las siguientes operaciones:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$

b) $-6 + (-7) : (+7)$

c) $+28 - (-36) : (-9-9)$

d) $+11ab + (+7) \cdot (+6ab - 8ab)$

e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$

f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

3. Utiliza la jerarquía de operaciones para calcular en tu cuaderno:

a. $6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7) + 20$

b. $-8 \cdot (+5) + (-4) \cdot 9 + 50$

c. $(-3) \cdot (+9) - (-6) \cdot (-7) + (-2) \cdot (+5)$

d. $-(-1) \cdot (+6) \cdot (-9) \cdot (+8) - (+5) \cdot (-7)$

4. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{5}{3} - \frac{7}{2}$

b) $\frac{4}{7} + \frac{(-7)}{9}$

c) $\frac{(-9)}{5} + \frac{(-1)}{8}$

d) $\frac{7}{2} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{9}{8}$

f) $\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{8}\right)$

g) $\frac{15}{2} : \frac{5}{4}$

h) $\frac{6}{5} : \frac{1}{5}$

i) $15 : \frac{3}{5}$

5. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3}\right) \cdot \frac{9}{x}$

b) $\frac{x+1}{x^2-1}$

c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3} : \frac{x-3}{x+2}$

d) $\frac{a^2-4}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right)$

6. Realiza las operaciones:

a) $31,3 + 5,97$

b) $3,52 \cdot 6,7$

c) $11,51 - 4,8$

d) $19,1 - 7,35$

e) $4,32 + 32,8 + 8,224$

f) $46,77 - 15,6 + 2,3$

g) $1,16 \cdot 3,52$

h) $3,2 \cdot 5,1 \cdot 1,4$

i) $2,3 \cdot 4,11 \cdot 3,5$

j) $4 \cdot (3,01 + 2,4)$

k) $5,3 \cdot (12 + 3,14)$

l) $3,9 \cdot (25,8 - 21,97)$

7. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales y redúcelas. Comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7,92835;

b) 291,291835;

c) 0,23;

d) 2,353535.....

e) 87,2365656565.....;

f) 0,9999.....;

g) 26,5735735735.....

Capítulo 0: Números

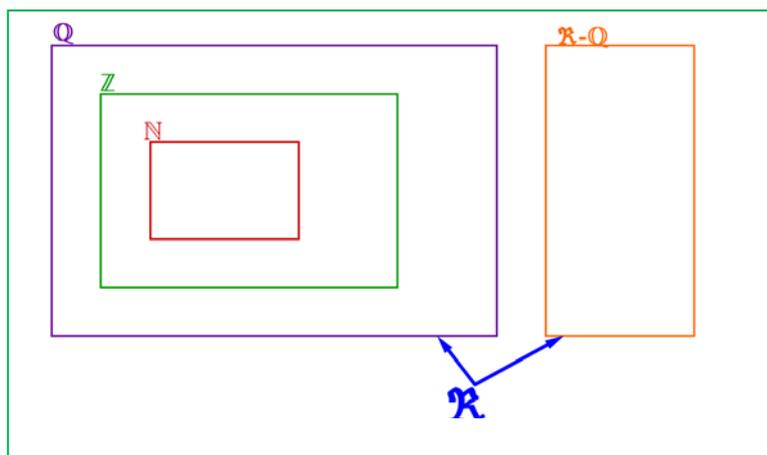
8. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica.
 a) $1/3$ b) $7/5$ c) $11/30$ d) $3/25$ e) $9/8$ f) $7/11$
9. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta.
10. Dibuja un segmento de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitágoras puede ayudarte, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídalo con una regla. Su longitud no es 1,4, pues $(1,4)^2$ es distinto de 2; no 1,41 pues $(1,41)^2$ es distinto de 2; ni 1,414, pues $(1,414)^2$ es distinto de 2; y sin embargo $(\sqrt{2})^2 = 2$.
11. Halla la expresión decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Hemos visto que no es un número racional, por lo que no puede tener una expresión decimal finita, o periódica, de modo que su expresión decimal tiene infinitas cifras que no se repiten periódicamente. Y sin embargo has podido dibujarlo exactamente (bien como la diagonal del cuadrado de lado 1, o como la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).
12. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

Número	N	Z	Q	I	R
-7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212...					
π					
$1/2$					
1,99999...					

13. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y coloca los números del ejercicio anterior en su lugar:

14. ¿Puedes demostrar que $4,99999... = 5$?
 ¿cuánto vale $2,5999...$? Escríbelos en forma de fracción.

15. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{53}$?



2. DIVISIBILIDAD

16. Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.
17. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?
15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.
18. Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.
19. A partir de la igualdad: $5 \cdot 8 = 40$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.
20. Escribe frases usando las expresiones: “*ser múltiplo de*”, “*ser divisor de*” y “*ser divisible por*” y los números 27, 3 y 9.
21. Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:
21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4520, 3411, 46095, 16392, 385500
Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?
22. Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.
23. Sustituye A por un valor apropiado para que:
- 15A72 sea múltiplo de 3.
 - 2205A sea múltiplo de 6.
 - 6A438 sea múltiplo de 11.
24. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.
25. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.
26. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.
27. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.
28. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que $10 = 9 + 1$. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.
29. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que $10 = 11 - 1$. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.
30. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
984486728	Divisible por 2	
984486725	Divisible por 5	
984486720	Divisible por 3	
783376500	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

31. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.

32. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
- a) 50 es múltiplo de 10.
 - b) 2 es divisor de 30.
 - c) 4 es múltiplo de 16.
 - d) 66 es divisible por 11.
 - e) 80 es divisor de 8.
 - f) 3 es divisible por 12.
33. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: $372x54y$.
34. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?
35. Calcula todos los divisores de los siguientes números:
a) 75 b) 88 c) 30 d) 25 e) 160 f) 300
36. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.
37. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?
38. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.
39. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos?
Observa que $13 \cdot 13 = 169$ y $17 \cdot 17 = 289$.
40. Busca los distintos significados de las palabras “criba” y “algoritmo”, ¿en qué más contextos los puedes utilizar?
41. Descompón en factores primos los siguientes números:
a) 50 b) 36 c) 100 d) 110
42. Descompón en factores primos los siguientes números:
a) 150 b) 121 c) 350 d) 750
43. Descompón en factores primos los siguientes números:
a) 1240 b) 2550 c) 4520 d) 5342
44. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?
45. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.
46. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:
a) 70 y 45 b) 121 y 55 c) 42 y 66 d) 224 y 80
47. Calcula el M.C.D de los siguientes números:
a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

48. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

- a) 40 y 24 b) 16 y 40 c) 30 y 66 d) 24 y 80

49. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

- a) 33, 11 y 22 b) 66, 42 y 120 c) 75, 25 y 200 d) 81, 44 y 16

50. Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

- a) ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?

51. La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?

52. Juan compra en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna? ¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?

53. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.

- a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos?
b) ¿A qué hora ocurrirá?

54. ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles les toca a cada niño.

3. POTENCIAS

55. Calcula:

a) 1^{7345} b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

56. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

57. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\frac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\frac{3^2 \cdot 4^5}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

58. Simplifica los radicales $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de exponente fraccionario.59. Calcula $\sqrt{484}$ y $\sqrt[3]{8000}$ factorizando previamente los radicandos

60. Calcula y simplifica: $\sqrt{3} (12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

61. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ y $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

62. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

63. Escribe en notación científica:

a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046

64. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0,000481 + 2,4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5,4 \cdot 10^6 + 7,2 \cdot 10^5$

c) $(2,9 \cdot 10^5) \cdot (5,7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3,8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3,5 \cdot 10^6) \cdot (8,1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4,8 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6,28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2,9 \cdot 10^2) : (3,98 \cdot 10^{-7})$

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS Y ENTORNOS

65. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

- a) Porcentaje superior al 15 %. b) Edad inferior o igual a 21 años.
 c) Números cuyo cubo sea superior a 27. d) Números positivos cuya parte entera tiene 2 cifras.
 e) Temperatura inferior a 24 °C. f) Números que estén de 2 a una distancia inferior a 3.
 g) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

66. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

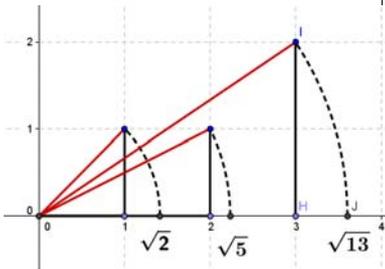
- a) $E(2, 7)$ b) $E(-3, \frac{8}{3})$ c) $E(-1; 0,001)$

67. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

- a) $(1, 7)$ b) $(-5, -1)$ c) $(-4, 2)$

68. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales? *Pista: 600,222333€ ¿puede ser un sueldo?

RESUMEN

Conjuntos de números	Naturales $\rightarrow N = \{1, 2, 3, \dots\}$; Enteros $\rightarrow Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ Racionales $\rightarrow Q = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; Irracionales $\rightarrow I = \mathbb{R} - Q$; $\mathbb{R} = Q \cup I$	
Fracciones y expresión decimal	Todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Toda expresión decimal exacta o periódica se puede poner como fracción.	$0,175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ $x = 1,7252525\dots = 854/495$
Números racionales	Su expresión decimal es exacta o periódica.	$2/3$; 1,5; 0,3333333333...
Representación en la recta real	Fijado un origen y una unidad, existe una biyección entre los números reales y los puntos de la recta. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	
N. Reales	Toda expresión decimal finita o infinita es un número real y recíprocamente.	0,333333; π ; $\sqrt{2}$
- Divisor - Divisible - Múltiplo	- a es divisor de b cuando al dividir b entre a el resto es 0. - a es múltiplo de b o a es divisible por b cuando al dividir a entre b el resto es 0.	<ul style="list-style-type: none"> • 2 y 5 son divisores de 10. • 10 es múltiplo de 2 y de 5. • 10 es divisible por 2 y por 5.
Criterios de divisibilidad	2: Acaba en 0 o cifra par. 3: La suma de sus cifras es múltiplo de 3. 5: Acaba en 0 o 5. 11: La diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.	<ul style="list-style-type: none"> • 7892 es divisible por 2. • 4510 es divisible por 2 y por 5. • 2957 es divisible por 3. • 2057 es múltiplo de 11.
Número primo	Tiene únicamente dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Tiene más de dos divisores, es decir, no es primo.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
Descomponer un número en factores primos	Es expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m.(18, 12)= 36
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D.(18, 12) = 4
Intervalo abierto	Intervalo abierto en el que los extremos no pertenecen al intervalo	$(2, 7) = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\}$. $(2, 7) \Rightarrow$ 
Intervalo cerrado	Los extremos SI pertenecen al intervalo	$[-2, 2] = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$ 
Intervalos Semiabiertos (o semicerrados)	Intervalo con un extremo abierto y otro cerrado	$[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ $[-8, 0) \Rightarrow$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo abierto: $E(a, r) = (a - r, a + r)$	 $E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Números

1. Efectúa las siguientes operaciones con fracciones:

a) $-\frac{4}{7} - \frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{5} + \frac{(-7)}{9}$

c) $\frac{(-2)}{3} + \frac{(-1)}{8}$

d) $\frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{3}\right) \cdot \frac{5}{2}$

f) $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{5}{3} + \frac{9}{2}\right)$

g) $\frac{25}{3} : \frac{5}{9}$

h) $\frac{7}{3} : \frac{14}{9}$ i)

15 : $\frac{3}{5}$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\left(\frac{a-1}{3} + \frac{a+1}{2}\right) \cdot \frac{6}{a}$

b) $\frac{x-2}{x^2-4}$

c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3} : \frac{x^2-9}{x+3}$

d)

$$\frac{a^2-4}{a^2} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2}\right)$$

3. Realiza las operaciones:

a) $(24,67 + 6,91)3,2$

b) $2(3,91 + 98,1)$

c) $3,2(4,009 + 5,9)4,8$

4. Halla el valor exacto de $\frac{0,4}{0,4}$ sin calculadora.

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica:

$$\frac{9}{40}; \frac{30}{21}; \frac{37}{250}; \frac{21}{15}$$

6. Halla 3 fracciones a, b, c tal que $\frac{3}{4} < a < b < c < \frac{19}{25}$

7. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a explicar el motivo?

8. Haz la división $999\,999:7$ y después haz $1:7$. ¿Será casualidad?

9. Ahora divide 999 entre 37 y después haz $1:37$, ¿es casualidad?

10. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

$$2,73535\dots; \quad \pi-2; \quad \sqrt[3]{-32}; \quad 10^{100}; \quad \frac{102}{34}; \quad -2,5; \\ 0,1223334444\dots$$

11. Pon ejemplos que justifiquen:

a) La suma y la resta de números irracionales puede ser racional.

b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.

12. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.

a) $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \{0\}$

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional.

d) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

e) $1/47$ tiene expresión decimal periódica.

13. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional? (Piensa en su expresión decimal)

14. La suma de 2 números con expresión decimal periódica ¿puede ser un entero?

15. Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$ m.

16. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.

17. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

18. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

19. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

20. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

21. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2 ?

22. Tenemos una circunferencia y un hexágono regular inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)

Divisibilidad

23. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.

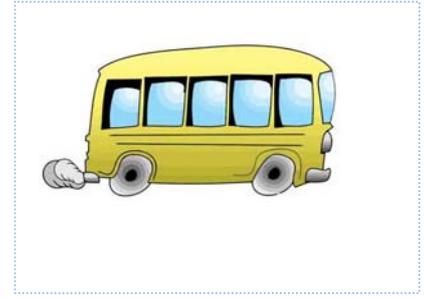
24. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?

25. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
30087	Divisible por 3	
78344	Divisible por 6	
87300	Múltiplo de 11	
2985644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

- 26.** Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:
1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150
- 27.** Busca todos los divisores de 210.
- 28.** Sustituye A por un valor apropiado para que:
- 24A75 sea múltiplo de 5.
 - 1107A sea múltiplo de 3.
 - 5A439 sea múltiplo de 6.
- 29.** Calcula el m.c.m. y M.C.D. de m y n sin averiguar el valor numérico de cada uno:
- $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
 - $m = 3 \cdot 5$ $n = 2 \cdot 7$
 - $m = 22 \cdot 3 \cdot 52$ $n = 22 \cdot 32$
 - $m = 3 \cdot 5 \cdot 72$ $n = 2 \cdot 52 \cdot 7$
- 30.** Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:
- Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es
 - Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es
- 31.** Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:
- | | | | | |
|-----------|-----------|------------|----------|--------------|
| a) 4 y 8 | d) 7 y 10 | g) 10 y 15 | j) 2 y 2 | m) 2, 3 y 4 |
| b) 2 y 3 | e) 6 y 12 | h) 2 y 5 | k) 4 y 1 | n) 3,6, y 12 |
| c) 3 y 12 | f) 6 y 9 | i) 4 y 6 | l) 3 y 7 | o) 3, 4 y 6 |
- 32.** Calcula:
- | | |
|--------------------|-----------------|
| a) m.c.m.(8, 40) | M.C.D.(8, 40) |
| b) m.c.m.(15, 35) | M.C.D.(15, 35) |
| c) m.c.m.(84, 360) | M.C.D.(84, 360) |
- 33.** En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes
- 34.** Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?
- 35.** El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

36. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:



- A qué hora volverán a salir juntos de la estación.
- El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.

37. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?



38. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuántos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?

39. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas máquinas durante ese periodo?

Potencias

40. Calcula:

$$\text{a) } (+2)^7 \quad \text{b) } (-1)^{9345} \quad \text{c) } (-5)^2 \quad \text{d) } (-5)^3 \quad \text{e) } (1/3)^3 \quad \text{f) } (\sqrt{2})^8$$

41. Expresa como única potencia:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8} & \text{b) } (1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2} \\ \text{c) } (2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8 & \text{d) } (-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4} \end{array}$$

42. Calcula:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } (-2/3)^{-4} & \text{b) } (-1/5)^{-2} & \text{c) } \frac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3} & \text{d) } \frac{3^2 \cdot \frac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5} \\ & & & \text{e) } \frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-25}{6}\right)^3}{\left(\frac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^6} \end{array}$$

43. Extrae los factores posibles en cada radical:

$$\text{a) } \sqrt[4]{a^7 \cdot b^6} \quad \text{b) } \sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6} \quad \text{c) } \sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$$

44. Expresa en forma de única raíz:

$$\text{a) } \sqrt[3]{\sqrt{50}} \quad \text{b) } \sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$$

45. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt{5^5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

46. Simplifica la expresión:

a) $\left(\frac{\frac{2}{x^3}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\frac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

47. Se estima que el volumen del agua de los océanos es de 1285600000 km^3 y el volumen de agua dulce es de 35000000 km^3 . Escribe esas cantidades en notación científica y calcula la proporción de agua dulce.

48. Se sabe que en un átomo de hidrógeno el núcleo constituye el 99 % de la masa, y que la masa de un electrón es aproximadamente de $9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. ¿Qué masa tiene el núcleo de un átomo de hidrógeno? (Recuerda: Un átomo de hidrógeno está formado por el núcleo, con un protón, y por un único electrón)

49. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3 . Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

Intervalos

50. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas:

- a. $(-5, 5]$ b. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 7\}$.
 c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

51. Halla:

- a. $(2, 4] \cup (3, 5]$ b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

52. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta? Razona la respuesta.

53. Expresa como entornos abiertos, si es posible, los siguientes intervalos:

- a. $(0, 8)$ b. $(-6, -2)$ c. $(2, +\infty)$

54. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos:

- a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. $E(1, 2)$ d. $E(0, 1)$

55. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

56. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

57. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

Varios

58. Un número irracional tan importante como Pi es el número “e”. $e \approx 2,718281828\dots$ que parece periódico, pero no, no lo es. Es un número irracional. Se define como el número al que se acerca $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando n se hace muy, pero que muy grande. **Coge la calculadora** y dale a n valores cada vez mayores, por ejemplo: 10, 100, 1000, ...

Apunta los resultados en una **tabla**.

59. Otra forma de definir e es $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. No te preocupes, que la tecla “!” está en la calculadora. ¿Puedes calcular e con 6 cifras decimales correctas? **Nota:* Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta $n = 4$?

60. Ordena de menor a mayor las siguientes masas:

Masa de un electrón	$9,11 \cdot 10^{-31}$ kilogramos
Masa de la Tierra	$5,983 \cdot 10^{24}$ kilogramos
Masa del Sol	$1,99 \cdot 10^{30}$ kilogramos
Masa de la Luna	$7,3 \cdot 10^{22}$ kilogramos

61. Tomando $1,67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa de un protón y $1,2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, y suponiéndolo esférico, calcula: a) su volumen en cm^3 (Recuerda el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$). b) Encuentra el peso de un centímetro cúbico de un material formado exclusivamente por protones. c) Compara el resultado con el peso de un centímetro cúbico de agua (un gramo) y de un centímetro cúbico de plomo (11,34 gramos).

AUTOEVALUACIÓN

- Indica qué afirmación es falsa. El número $-0,33333333\dots$ es un número
 - real
 - racional
 - irracional
 - negativo
- La expresión decimal $0,63636363\dots$ Se escribe en forma de fracción como
 - $63/701$
 - $7/11$
 - $5/7$
 - $70/111$
- Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones $4/7$; $9/150$, $7/50$ tienen una expresión decimal:
 - periódica, periódica, exacta
 - periódica, exacta, periódica
 - periódica, exacta, exacta
- El M.C.D.(650, 700) es:
 - 10
 - 30
 - 20
 - 50
- Queremos alicatar una pared de 615×225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?
 - 615
 - 15
 - 225
 - No es posible
- El conjunto de los números reales menores o iguales a -2 se escribe:
 - $(-\infty, -2)$
 - $(-\infty, -2]$
 - $(-2, +\infty)$
 - $(-\infty, -2[$
- El entorno de centro -2 y radio $0,7$ es el intervalo:
 - $(-3,7, -2,7)$
 - $(-2,7, -1,3)$
 - $(-3,3, -2,7)$
 - $(-2,7, -1,3]$
- El intervalo $(-3, -2)$ es el entorno:
 - $E(-2,5; 1/2)$
 - $E(-3,5; -0,5)$
 - $(-3,5, 1/2)$
 - $(-2,5; -0,5)$
- Al efectuar la operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene:
 - $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$
 - $25/4$
 - $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$
 - $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$
- Al efectuar la operación $0,000078 + 2,4 \cdot 10^{-5}$ se obtiene:
 - $3,6 \cdot 10^{-10}$
 - $1,8912 \cdot 10^{-10}$
 - $10,2 \cdot 10^{-5}$
 - $18,72 \cdot 10^{-5}$

FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA**MATEMÁTICAS II****CAPÍTULO 1: EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS****ACTIVIDADES PROPUESTAS****1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

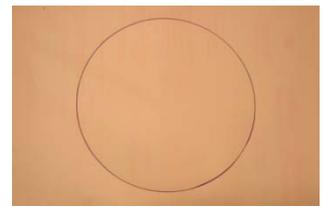
1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo, justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese mes es:

$$(0'05 \cdot M) + (0'12 \cdot N) = 0'05 \cdot M + 0'12 \cdot N \quad \text{€}$$



2. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.
 3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera: x e y :

- a) La mitad del opuesto de su suma.
 b) La suma de sus cubos
 c) El cubo de su suma
 d) El inverso de su suma
 e) La suma de sus inversos



4. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$

5. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 15 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.



6. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 15 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

7. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$. b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$. c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

8. Indica en cada caso el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = 5$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

9. Indica el coeficiente y la parte literal de las siguientes monomios:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

10. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

$$(2x^2 - 2x) + (-3x^2 - 4x + 2) + (3x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$$

$$-2x^4 + (2x^3 + 3x - 4) + (-4x^2 - 6x + 5) + (3x^3 - 2x + 6)$$

11. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$ b) $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$
 c) $(-3)(2a + 4b) - (2b - 3a)$ d) $4(2a^2 - 2ab + 2b^2) - (3a^2 - 4ab)$

12. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $4x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 5x - 2$ b) $9x$ c) $-2x^4 + 4x^2$

13. Considera los polinomios $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$, $q \equiv 2x^2 + 2x + 9$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

14. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -2x^3 - 6x + 3$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

15. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-5x^3 + 3x) \cdot (-4x^2)$ b) $(3x^4 + 2x) \cdot (-4x - 5)$ c) $(3x^3 + 2x^2 - 2x) \cdot (4x^2 - x)$ d) $(-1) \cdot (6x^3 - 3x^2 - 2x + 3)$

16. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-3x^3 + x) - (-2x^2)$ b) $(3x^4 + 2x) - (-4x - 5)$ c) $(4x^2 - 2x) - (x^3 + 2x^2 - 2x)$

17. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $3x^3 - 2x^2 + x$ b) $-4x^4 + 2x - 5$ c) $-x^2 + 2x - 6$

18. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$
 c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

19. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-3x^2 - 4x + 2) \cdot 3x^3$ b) $(3x - 4) \cdot (-4x^2 - 6x + 5) \cdot (-2x)$

20. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-20x^3 - 40x^2 + 10x$ b) $60x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

21. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

✚ Primera etapa:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 \end{array} \right.$$

✚ Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 + 4x \end{array} \right.$$

✚ Las tres etapas:

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x \\ \hline -4x^2 - 9x - 2 \\ 4x^2 - 2x + 6 \\ \hline -11x + 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 2x^2 - x + 3 \\ 3x^2 + 4x - 2 \end{array} \right.$$

22. Divide los siguientes polinomios:

- $3x^3 - 2x^2 - 2x + 6$ entre $x^2 - 3x + 5$
- $-15x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ entre $5x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
- $6x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 4x - 8$ entre $-2x^2 + 2x + 5$
- $-16x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ entre $4x^3 + 2x^2 + x - 2$
- $-7x^5 + 3x^2 + 2$ entre $x^2 + 4$

23. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 + 2x - 1$ como polinomio cociente y $r(x) = -2x^2 + 3$ como resto.

24. Efectúa los siguientes cálculos:

$$a) \frac{3x+2}{x^2+1} + \frac{5}{2x}$$

$$b) \frac{1}{x-3} - \frac{3}{x+2}$$

$$c) \frac{-2x}{5x^2+4x} \cdot \frac{5}{3x-2}$$

$$d) \frac{x-4}{x^2+5x} : \frac{x-4}{x+5}$$

25. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

$$a) \frac{-3x^2+2x-1}{x^3} + \frac{4x-1}{x^2}$$

$$b) \frac{x-1}{x^2+5x} - \frac{6}{x+5}$$

26. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

$$a) \frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b$$

$$b) \frac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$$

$$c) \frac{3x^2-9x}{6x+12} = \frac{x^2-3x}{x+4}$$

$$d) \frac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y} = \frac{3y^2+2y}{y-4}$$

$$e) \frac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b} = \frac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$$

27. Calcula los siguientes cocientes:

$$a) (3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$$

$$b) (7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$$

$$c) (25x^4 - 10x^2) : 5x^2$$

$$d) (3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$$

28. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$a) \frac{3x^2-6x}{9x^2+15}$$

$$b) \frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$$

$$c) \frac{x^2y+3xy^2}{4xy}$$

$$d) \frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

29. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

- a) $-3x^3 + 3x = -3x \cdot (\quad)$
 b) $-6x^2 + 5x + 6 = (2x - 3) \cdot (\quad)$
 c) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 1) \cdot (\quad)$
 d) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 2) \cdot (\quad)$

30. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3 - x^2 + 3x - 1$.

31. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

- a) $x = 3$ de $x^3 - 3x^2 + 1$
 b) $x = -2$ de $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
 c) $x = 1$ de $x^3 - 3x^2 + x + 1$
 d) $x = 0$ de $x^3 - 3x^2 + 1$
 e) $x = -1$ de $x^3 - 3x^2 - x + 3$

32. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α .

- a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?
 b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?
 c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4 \cdot p_1(x)$?

33. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

34. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

35. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

36. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

37. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

38. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

- a) $x + 6$ b) $-x + 4$ c) $2x - 7$ d) $-4x - 5$
 e) $-3x$ f) $x^2 - 5x$ g) $4x^2 - x - 3$ h) $x^3 - 4x$ i)
 $x^3 + 4x$

- 39.** Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:
- $-3x^2 + 2x + 2$ entre $x + 1$
 - $x^3 + 3x^2 - 3x + 6$ entre $x + 2$
 - $5x^3 - 4x^2 - 2$ entre $x - 1$
 - $x^3 - 8x + 2$ entre $x - 3$
- 40.** Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:
- $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$
 - $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$
 - $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$
 - $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$
- 41.** Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ en $x = 3$.
- 42.** Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x + 6$.
- 43.** Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son:
- $x^3 - x^2 + 2x - 2$
 - $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$
 - $2x^3 + x^2 - 18x - 9$
 - $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$
- 44.** Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.
- 45.** Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son:
- $3x^2 + 4x + 1$
 - $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$
- 46.** Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:
- $\frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$
 - $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$
 - $\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
- 47.** Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:
- $\frac{5}{-3x + 12} + \frac{x + 2}{x^2 - 4x}$
 - $\frac{-x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$

48. Realiza los cálculos:

a) $(1 + 4a)^2$

b) $(-x + 5)^2$

c) $(-2x - 3)^2$

d) $(x^2 - 1)^3$

e) $(5x + 3)^3$

49. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a + b + c)^2$

b) $(a + b - c)^2$

50. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$

b) $(3x + y/3)^2$

c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$

e) $(a^2 - b^2)^2$

f) $(3/5y - 2/y)^2$

51. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 + 6a + 9$

b) $4x^2 - 4x + 1$

c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$

e) $a^4 - 2a^2 + 1$

f) $y^4 + 6y^2 + 9$

52. Efectúa estos productos:

a) $(3x + 2y) \cdot (3x - 2y)$

b) $(5x^2 + 1) \cdot (5x^2 - 1)$

c) $(-x^2 + 2x) \cdot (x^2 + 2x)$

53. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 4x + 4$

b) $3x^2 + 18x + 27$

c) $3x^5 - 9x^3$

54. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$

b) $(2a - 3b) \cdot (2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5) \cdot (x^2 + 5)$

d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5)$

55. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$

b) $4a^4 - 81b^2$

c) $49 - 25x^2$

d) $100a^2 - 64$

56. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\frac{x^2 - 1}{3x + 3}$

b) $\frac{2x^2 + 12x + 18}{x^2 - 9}$

c) $\frac{6 - 3a}{a^2 - 4}$

RESUMEN

Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y letras sometidos a las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x \cdot y^2 \cdot z$
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el valor numérico de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos $x=3$, $y=-2$, $z=1/2$ obtenemos $\frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 3 + (-2)^3} - 3 \cdot (-2)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-9}{-5} - 6 = \frac{9}{5} - 6 = \frac{9 - 30}{5} = \frac{-21}{5}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^2$ de grado 6 y coeficiente -5 $7 \cdot x^2$ de grado 2 y coeficiente 7
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
División de dos polinomios	Al dividir el polinomio $p(x)$ entre $q(x)$ se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente, $c(x)$, y resto, $r(x)$, tales que $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$	$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 =$ $= (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
Raíces y factorización	Si α es una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de $x^3 + 2x^2 - x - 2$ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x + 2) \cdot (x^2 - 1)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.
 - Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
 - Que lo multiplique por 3
 - Que al resultado anterior le sume 18
 - Que multiplique por 2 lo obtenido
 - Que divida entre 6 la última cantidad
 - Que al resultado precedente le reste el número que escribió
 - Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?



- En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.
 - Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
 - Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
 - Que multiplique por 5 lo obtenido
 - Que multiplique el resultado precedente por 5
 - Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
 - Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?



- Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a)
$$\frac{7x-9}{(x+5) \cdot (2x-32)}$$

b)
$$\frac{-x}{x^2-6x+9}$$

c)
$$\frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$$

d)
$$\frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$$

- Una persona tiene ahorrados 2500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?
- Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?



6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(5) = -2$.
7. Consideremos los polinomios $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ y $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Realiza las siguientes operaciones:
- $p + q + r$
 - $p - q$
 - $p \cdot r$
 - $p \cdot r - q$
8. Calcula los productos:
- a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0,3x - 0,2y + 0,1z) \cdot (0,1x + 0,2y - 0,3z)$ c) $(x - 1)(x - a)(x - b)$
9. Efectúa las divisiones de polinomios:
- $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$
 - $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$
10. Calcula los cocientes:
- $(5x^4) : (x^2)$
 - $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$
 - $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$
11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:
- $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9}$
 - $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$
 - $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9}$
 - $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9}$
12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.
13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6 , -3 y 0 .
14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6 , -3 , 2 y 0 .
15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.
16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6 , -3 , 2 , 4 y 5 .
17. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = x^2 + x + 1$.
18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:
- $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$
 - $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$
 - $3x^3 + 5x^2 + x - 1$
 - $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$

b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

c) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

d) $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

21. Calcula las potencias:

a) $(x - 2y + z)^2$

b) $(3x - y)^3$

c) $((1/2)a + b^2)^2$

d) $(x^3 - y^2)^2$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

$x^2 - 36$

$5x^2 + 1$

$5x^2 - 11$

$x^2 - 3y^2$

$x^2 - 6x + 9$

$x^4 - 8x^2 + 16$

$x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$

$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

23. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$

b) $x^2 - y^2$

c) $x^2y^2 - z^2$

d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$

c) $\frac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{2}{x(5-x)} - \frac{3}{2(5-x)}$

b) $\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{x^4-1}{x^7} : \frac{x^2+1}{x^8}$

b) $\frac{2x+3y}{a-b} - \frac{3x+4y}{2a-2b}$

c) $-4x + (1-x^4) \left(\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right)$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2} \right) : \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)$

b) $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a}$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{ab}{a+b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a+y}}$

b) $\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)$

c) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}} \cdot \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2} + 6xy^3 - \frac{7}{z}$ b) $-3x^5 + 2x^4 - x^3 + 4x - 5$ c) $7 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$ en $x=2, y=-1, z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

- La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado
- La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado
- El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado
- La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado

4. Al dividir el polinomio $p(x) = 5x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 2$ entre $q(x) = 3x^2 + 5x + 8$ el polinomio resto resultante:

- debe ser de grado 2.
- puede ser de grado 2.
- debe ser de grado 1.
- debe ser de grado menor que 2.

5. Considera el polinomio $5x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 6x + 2$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera el polinomio $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) -3 y $\frac{1}{3}$ d) -3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

- a) tiene tres raíces reales; b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

- La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.
- La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.
- La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.
- La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz real.

FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 2: ECUACIONES Y SISTEMAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

- a) $x - 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

- a) $5x - 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

4. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	$2, -1, -3$		$a^2 - 6 = -2$	$-2, -6, 2$
$x + 6 = 4x - 3$	$3, -2, -3$		$b - 4 = 8 - b$	$3, 4, 6$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

6. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

- a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

7. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

- a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

8. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.
9. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?
10. Un mago le dijo: Piensa un número, súmalo 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).
11. Piensa un número, multiplícalo por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.
12. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).
13. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?
14. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.
15. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.
16. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6° .
17. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado

Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.

18. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?



19. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

20. Si un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5,50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

21. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

22. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.
23. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

3. ECUACIONES DE 2º GRADO

24. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$

c) $8x^2 - 9 = 0$

e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$

d) $8 - 7,3x = 0$

f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

25. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a , b y c .

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$

b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$

d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

26. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$

d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

27. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

28. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$

b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$

d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$

f) $5x^2 - 10x = 0$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

29. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$$

30. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$$

31. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

32. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

33. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

34. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?
35. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.
36. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?
37. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.
38. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?
39. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?
40. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

RESUMEN

Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x .
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	Solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	$3x - 1 = 2x + 5$ $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1; x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro. Operar Despejar la x .	$(3x - 1) = 7/2$ 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7; -x = -10; x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x - 8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0, ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0, ax^2 + bx = 0: x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0: x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5.$
Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	Compatible determinado: Una única solución. Las rectas son secantes : $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ Compatible indeterminado: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son coincidentes : $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ Incompatible: No tiene solución, las rectas son paralelas : $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	Sustitución: despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. Igualación: despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. Reducción: sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones de primer grado

1. Encuentra el número que falta:

a) $0 + 2 = 5$

b) $0 + 3 = 1$

c) $0 - 4 = 6$

d) $0 - 4 = -1$

2. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	Edad en años
Julia	$3x - 9$
María	$x^2 - 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

3. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $x + 3 = 2$

b) $x - 2 = 3$

c) $x/5 = 1$

d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

4. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 9$.

a) $x + 10 = 17,5$

c) $8 - x = 3x - 5x$

e) $4x = 30$

g) $2x = 9 + 6$

i) $10 -$

$2,5 = x$

b) $6x + 2x = 60$

d) $5x - 6 = 3x + 9$

f) $-6 - 9 = x - 3x$

h) $3x = 15$

j) $x = 7,5$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$

d) $x + 9 = 3x - 3$

g) $4x + 2 = 14$

i) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$

e) $5x - x + 7 = 2x + 15$

h) $3x - 4 = x + 18$

k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$

f) $2x - 27 = x$

j) $4x - 6 = x + 9$

l) $3 - 10 = x + 1$

6. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

7. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

8. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $x - 5 = 9$

b) $x - 8 = 2$

c) $x - 3 = 4$

d) $x - 9 = 6$

9. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4x = 54$

b) $4x - 3x = 16$

c) $5(x - 2) = 70$

d) $-5x - 2x = -49$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x + 3 = 5$

b. $4x - 5 = x + 4$

c. $x/3 = -2$

d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 4 = 2x$

b) $2(x + 7) = x$

c) $x/3 + 2 = x$

d) $3(x + 3x) = x + 50$

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$

b) $2x - (2x - 3) + x = 4$

c) $7 = 1 + x/2$

d) $4 - x = 2 + x/2$

13. Resuelve:

a) $x/3 = 7$;

b) $3x = 9$;

c) $x + 4 = 12$;

d) $x - 7 = 1$

14. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie

1) $x + 4 = 6$

2) $x + 6 = 3$

3) $15 = 11 + x$

4) $7 = x + 3$

5) $x + 8 = 4$

6) $x + 6 = 8$

7) $x + 7 = 3$

8) $8 + x = 16$

9) $3 = 7 + x$

10) $2 = x + 4$

2ª serie

11) $x - 3 = 6$

12) $x - 4 = 2$

13) $4 = x - 1$

14) $7 - x = 2$

15) $6 - x = 4$

16) $3 = 9 - x$

17) $x - 4 = 7$

18) $x - 2 = 0$

19) $8 - x = 3$

20) $9 - x = 5$

3ª serie

21) $3x = 6$

22) $4x = 16$

23) $6x = 18$

24) $8 = 2x$

25) $-12 = 3x$

26) $2x = -6$

27) $4x = 11$

28) $3x = 6$

29) $9 = 3x$

30) $18 = 6x$

4ª serie

31) $x/5 = 1$

32) $x/3 = 7$

33) $x/-2 = 3$

34) $x/5 = 2/3$

35) $x/10 = 3/2$

36) $x/7 = 2$

37) $x/12 = 3/4$

38) $x/3 = -2/9$

39) $x/5 = -2$

40) $x/7 = 3/14$

5ª serie

41) $x + 3x = 16$

42) $4x + 2x = 6$

43) $6x = 8 + 10$

44) $3x + 7 = 4$

45) $2x + 7 = 11 + 4x$

46) $x + 1 = 2x - 5 + 2x$

47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$

48) $4x - 3 + x = 3x + 7$

49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$

50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6ª serie

51) $x/3 - 2 = 4$

52) $3x/5 + 4 = 3$

53) $x/3 + 2x/3 = 7$

54) $x/5 + 3x/5 = 9$

55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$

56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$

57) $x + x/5 = 7$

58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$

59) $5 + x/7 = 21$

60) $3 + x/3 = 9$

7ª serie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$

62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$

63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$

64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$

65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$

66) $2(3x - 5) - (2x + 1) = 17 - 3x$

67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$

68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$

69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$

70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8ª serie

71) $x/3 + x/6 = 12$

72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$

73) $(x - 3)/5 = 1$

74) $x/2 - 3 = 4$

75) $(2x + 9)/3 = 7$

76) $(2x + 9)/3 = x$

77) $(x - 3)/5 = x$

78) $5 + x/4 = 6$

79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$

80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Problemas

15. Si un repartidor de pedidos ha dejado los $2/5$ de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?

16. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?

b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?

c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?

d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?

17. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?
18. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.
19. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?
20. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)
21. Si al quintuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?
22. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?
23. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2,55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?
24. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?
25. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?
26. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?
27. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?
28. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.
29. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.
30. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.
31. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?
32. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?
33. **Cuadrados mágicos:** En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

34. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

- ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
- Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
- A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
- Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
- Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
- Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Ecuaciones de segundo grado

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

b) $x(-1 + x) = 6$

c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$

e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$

f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$

h) $x \cdot (x + 2) = 168$

i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 1}{3} = 10$

b) $\frac{x^2 - 3}{3} + \frac{x^2 - x + 1}{7} = 3$

c) $\frac{x^2 + 1}{5} + \frac{2x + 6}{10} = 2$

d) $\frac{1 - x^2}{2} + \frac{3x - 1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{2x^2 - 8}{5} - \frac{3x - 9}{10} = x - 1$

f) $\frac{2x + 3x^2}{5} - \frac{3x - 6}{10} = 1$

37. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x(-1 + x) = 0$

c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$

f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

h) $x^2 - x - 6 = 0$

i) $x^2 + x - 6 = 0$

38. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \cdot (x - 5) = 0.$$

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

39. Cuando el coeficiente b es par ($b = 2B$), puedes simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$

b) $x^2 - 10x + 24 = 0$

c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

40. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2) \cdot (x - 6) = 0$

b) $(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$

c) $(x - 9) \cdot (x - 3) = 0$

d) $(x - 1) \cdot (x + 4) = 0$

e) $(x + 7) \cdot (x - 2) = 0$

f) $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$

41. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$

c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$

e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$

f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

42. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda:* Utiliza el discriminante.

43. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

44. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

45. ¿Podrías escribir una ecuación de segundo grado con únicamente una solución real que no fuese doble?

Sistemas lineales de ecuaciones

46. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

47. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$

48. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$

49. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$$

50. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{2y+2}{5} = -1 \\ \frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{y+3}{5} = -3 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

51. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

Incompatible

Su solución sea $x = 2$ e $y = 1$

$$\text{a) } \begin{cases} ()x + 3y = () \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -5x + y = 2 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x - y = () \\ ()x + y = 7 \end{cases}$$

Incompatible

Su solución sea $x = -1$ e $y = 1$

Compatible indeterminado

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + ()y = () \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 3x + ()y = -1 \\ ()x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} ()x + 6y = () \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

52. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

53. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

54. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

55. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

$$\text{a) } \begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$$

Problemas

56. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

57. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

58. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

59. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

60. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

61. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?
62. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?
63. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365
64. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?
65. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?
66. La suma de dos números es 5 y su producto es -84 . ¿De qué números se trata?
67. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?
68. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.
69. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números
70. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?
71. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?
72. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?
73. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?
74. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?
75. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?
76. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?
77. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
78. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?
79. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?
80. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?
81. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

AUTOEVALUACIÓN

- La solución de la ecuación $3,4 + 5,2x - 8,1x = 9,4 + 7,3x$ es:
 a) $-10/17$ b) $+6/-10,2$ c) $-10/1,7$ d) $0,58$
- La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:
 a) 2 b) -2 c) 2 y -2 d) 0 y 2
- La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?
 a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$ d) $x + x - 8 = 50$
- El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:
 a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20
- Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?
 a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$ d) $6x = 136$
- Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:
 a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = -3$ c) $x = 1$ y $x = -2/3$ d) $x = 2$ y $x = -6/5$
- Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:
 a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$
- Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 14x + 15 = 0$ son:
 a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$
- La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ es:
 a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución
- La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ es:
 a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$

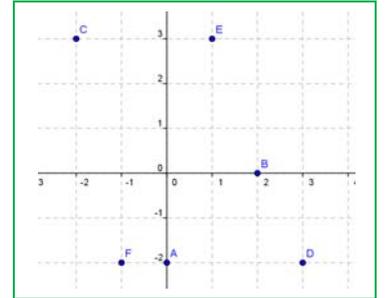
FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 3: FUNCIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:



2. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano: $A(2, -3)$; $B(0, -1)$; $C(3, 4)$.

3. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

- Edad y peso de una persona concreta a lo largo de su vida
- Peso y edad de esa misma persona
- Un número y su mitad
- Un número y su cuadrado
- Precio de la gasolina y el día del mes
- Día del mes y precio de la gasolina

4. Si hoy el cambio de euros a dólares está $1 \text{ €} = 1,3 \text{ \$}$, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	x
\$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas, en la que, conociendo los euros, se obtengan los dólares. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?

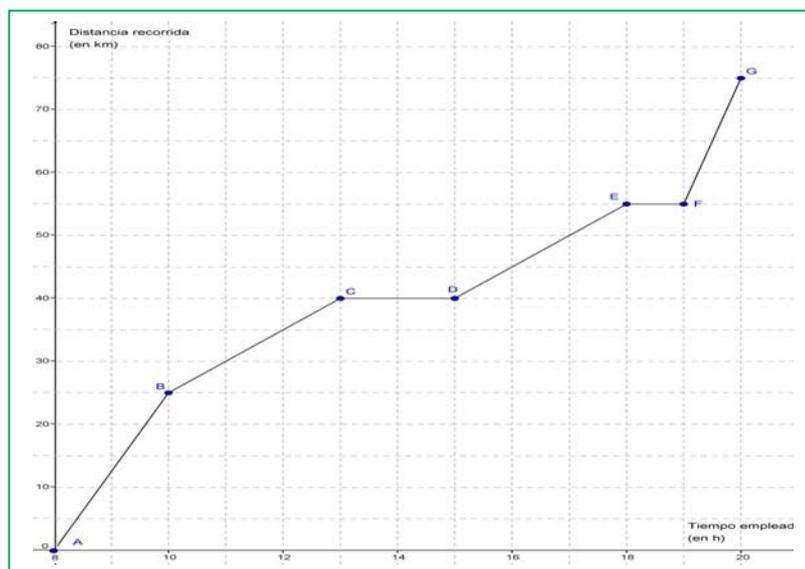
Si cuando realizas el cambio en una oficina te cobran una comisión fija de 1,5 €, ¿cómo quedaría la fórmula en este caso?

5. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y otra que no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

6. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	-10	-5	10	-10	27
f(x)	-3	0	5	4	0

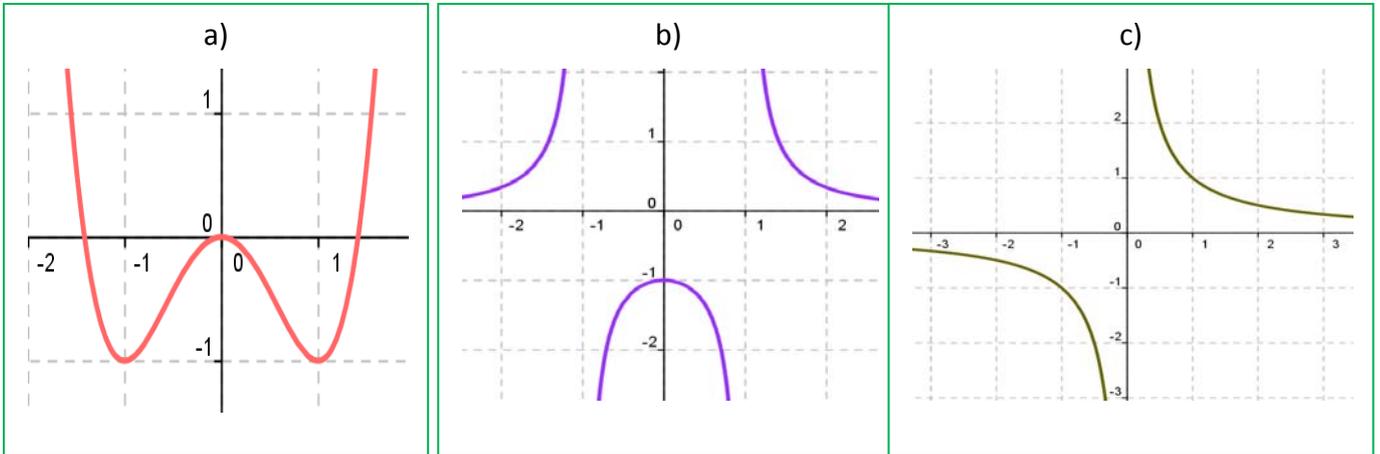
7. Una persona camina a una velocidad de 4 km/h y parte del kilómetro 10. Escribe la expresión algebraica de la función que indica los kilómetros recorridos en función del tiempo. Señala cuáles son los valores que no tiene sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.
8. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. Su área es $1 u^2$. Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5... y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.
9. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. La tarifa mínima es de 0,50 euros, el tiempo máximo de aparcamiento es de 2 horas, cada media hora más cuesta 0,90 euros, y cada fracción, 0,05 euros. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo que se espera va a estar aparcado el vehículo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.
10. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 5 cm y de altura total del vaso 18 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?
11. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:



- a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
 - b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
 - c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
 - d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
 - e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
 - f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
 - g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable “distancia al punto de partida”, ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?
12. La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes de un equipo de baloncesto, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ¿Y la relación entre la edad y la altura? Escribe tres correspondencias que sean funcionales y tres que no.

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

14. Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas. Indica su dominio, si es continua (o puntos de discontinuidad si los hubiera), si es simétrica y tipo de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodo (si lo hubiera)...



3. TIPOS DE FUNCIONES

15. El consumo medio de agua al día por habitante es de 150 litros. Representa gráficamente el consumo de agua de una persona a lo largo de una semana.
16. Representa en tu cuaderno, estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales siguientes:

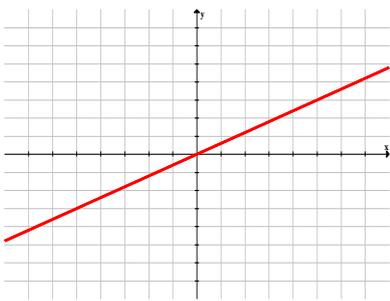
a) $y = 1,25 \cdot x$;

b) $y = (3/5) \cdot x$;

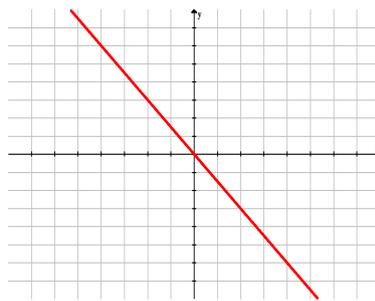
c) $y = 3 \cdot x$;

d) $y = 0,5 \cdot x$;

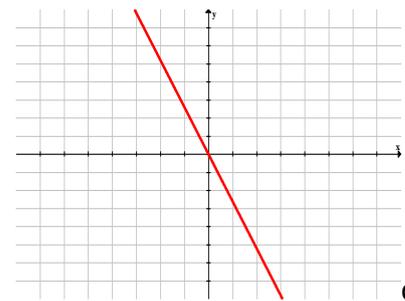
17. Halla la pendiente y la expresión algebraica (fórmula) de las siguientes rectas:



a.

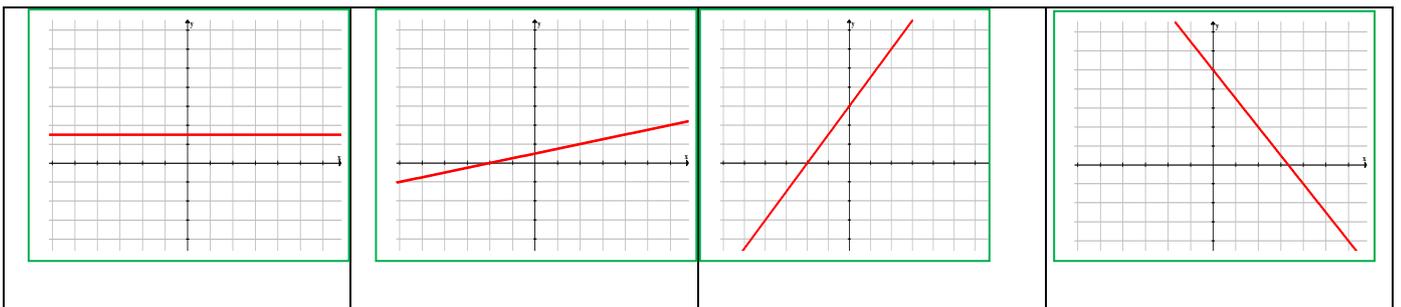


b.



c.

18. Halla la expresión algebraica de las siguientes rectas:



- 19.** Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 5, -4 , y $1/3$ respectivamente.
- 20.** ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta $y = x$? ¿Y la recta $y = -x$?
- 21.** ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?
- 22.** Representa las siguientes funciones lineales:
- | | | |
|------------------------|-----------------------------------|------------------|
| a. $y = 3 \cdot x + 4$ | b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ | c. $2x + 4y = 5$ |
| d. $y = 5$ | e. $y = 0$ | f. $y = -3$ |
- 23.** Un metro de cierta tela cuesta 2,05 €, ¿cuánto cuestan 7 metros? ¿Y 20 m? ¿Y 15,2 m? ¿Cuánto cuestan “ x ” metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.
- 24.** Dibuja en papel cuadriculado la gráfica de la función $y = x^2$.
- Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
 - Tomando valores de abscisa negativa.
 - ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de “ x ”? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
 - ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
 - ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
 - Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.
- 25.** A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:
- | | | |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a. $y = \frac{5}{3}x^2$ | b. $y = -3x^2$ | c. $y = -\frac{15}{3}x^2$ |
| d. $y = 4,12x^2$ | e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ | f. $y = \frac{7}{8}x^2$ |
- 26.** Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:
- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| a) Si $a > 1$ entonces ¿¿?? | b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿?? |
| c) Si $a < -1$ entonces ¿¿?? | d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿?? |
- 27.** Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 - 3$. La parábola $y = -x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos q unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.
- 28.** Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.
- 29.** Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal a la derecha y 4 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

30. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$ b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c. $y = x^2 - 5$
 d. $y = x^2 - 6x + 16$ e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f. $y = -x^2 + 12x - 26$

31. Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (3, 1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (-4, -2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
 d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$
 g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

32. Halla la función cuadrática determinada por los puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Representala gráficamente.

33. Halla la función polinómica que pasa por los puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) y (3, 23).

34. Halla la función polinómica determinada por los puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula las diferencias sucesivas y dibuja la gráfica.

35. Se hacen pruebas midiendo la distancia que recorre un avión desde que toca tierra en una pista de aterrizaje. Los datos están en la tabla adjunta. Existe alguna función polinómica que se ajusta a esos datos. Si la hay, escribe su fórmula.

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. En una fábrica los precios de los cables de acero dependen de los diámetros y viene dado el precio en euros en la tabla siguiente. ¿Existe alguna función polinómica que se ajuste perfectamente a esos datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Precio (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37. Dada la tabla siguiente, ¿se puede ajustar exactamente una recta? Considera si algún dato es erróneo y si es así, corrígelo.

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

38. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

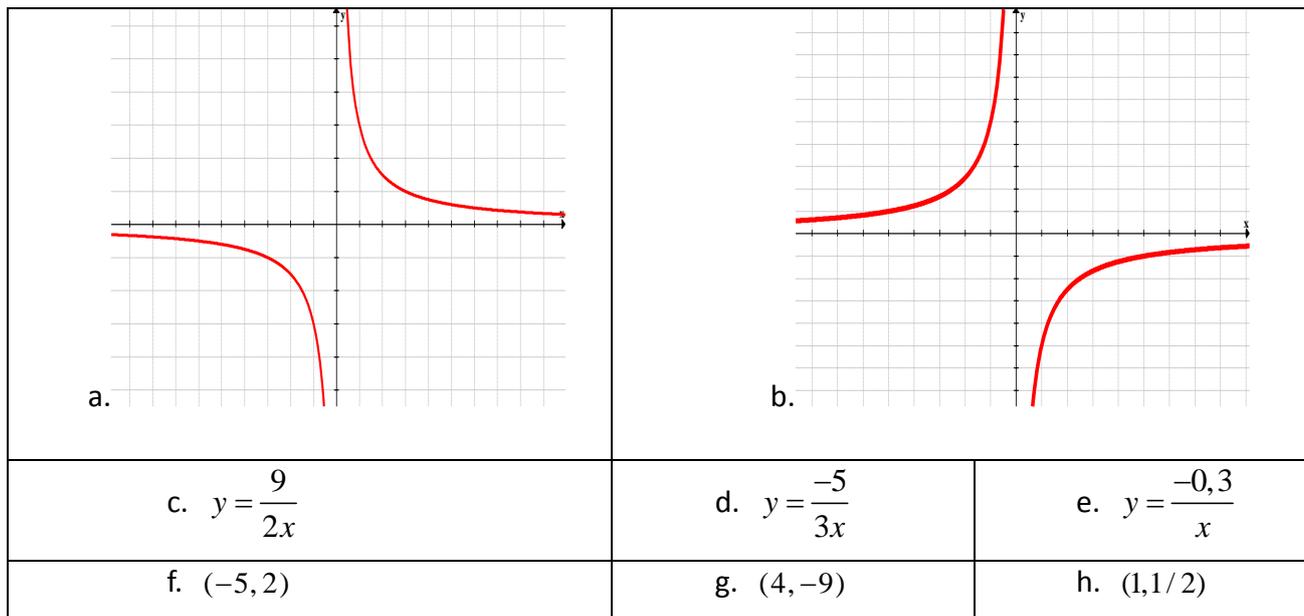
a. $y = \frac{-1}{x}$ b. $y = \frac{5}{x}$ c. $y = \frac{1}{2x}$
 d. $y = \frac{3}{8x}$ e. $y = \frac{-5}{3x}$ f. $y = \frac{-12}{5x}$

39. Describe lo que sucede cuando varía el valor de k . Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

40. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. (5, 3) b. (2, -1) c. (1/2, 6)
 d. (10, 4) e. (a, 1) f. (1, b)

41. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:



42. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

$$\begin{array}{lll}
 y = \frac{5}{x} & y = \frac{5}{x} + 3 & y = \frac{5}{x} - 3 \\
 y = \frac{-12}{x} & y = \frac{-12}{x-3} & y = \frac{-12}{x+3} \\
 y = \frac{3}{x} & y = \frac{3}{x-1} + 4 & y = \frac{5x-2}{x-1}
 \end{array}$$

43. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros a y b en las hipérbolas del ejercicio anterior.

En general, la representación gráfica de las hipérbolas cuya expresión algebraica es $y = \frac{k}{x-b} + a$ es una traslación el plano dependiendo de los valores de a y b .

44. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y = \frac{5}{x}$:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } y = \frac{10}{x-5} + 3 & \text{b. } y = \frac{1}{x+4} + 8 & \text{c. } y = \frac{100}{x+10} + 1 \\
 \text{d. } y = \frac{10}{2x-4} - 7 & \text{e. } y = 6 - \frac{4}{x} & \text{f. } y = \frac{20}{5-x} - 2
 \end{array}$$

45. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

46. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b .

47. Representa las siguientes hipérbolas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } y = \frac{2x-4}{x+5} & \text{b. } y = \frac{3-5x}{x+2} & \text{c. } y = \frac{4x-12}{x-3} \\
 \text{d. } y = \frac{6x+8}{1-x} & \text{e. } y = \frac{7x+5}{x-4} & \text{f. } y = \frac{6x+10}{2x-1}
 \end{array}$$

48. Representa la gráfica de la función: $y = 7 - \frac{15}{x+3}$. A) ¿Cuando x crece, “ y ” tiende a 7? ¿Tiene una asíntota horizontal $y = 7$? B) ¿Si x se acerca a -3 , la y crece? ¿Tiene una asíntota vertical, $x = -3$? C) Analiza si esta hipérbola se ajusta a los valores de la actividad resuelta de la tabla:

Dosis (mg): x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): y	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

49. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1,4.

Observa que los valores de “ y ” aumentan mucho más deprisa: mientras que los valores de “ x ” aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

50. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “ x ” entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

51. Utilizando la calculadora, haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

52. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.

- Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.
- Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.
- Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

53. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por $\frac{2}{3}$ cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también “hacia atrás”), y (b) representa gráficamente estos datos.



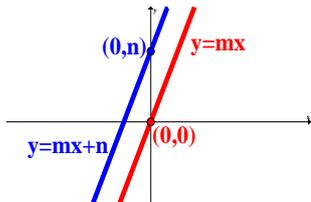
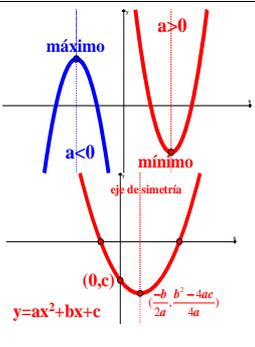
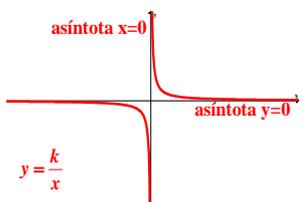
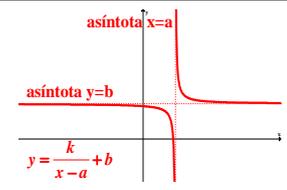
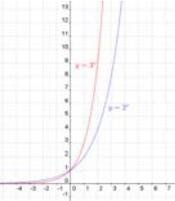
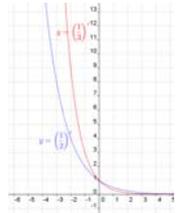
Cultivo de la bacteria *Salmonella*

54. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x) = 2^x - 3$ y $h(x) = 2^{x-3}$.

RESUMEN

Función	Relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra.	$y = 2x + 3$
Características de las funciones	Continuidad. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Simetría. Periodicidad.	La recta $y = 2x + 3$ es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni es simétrica, ni periódica.
Función polinómica de primer grado: Rectas: $y = mx$ $y = mx + n$	Se representan mediante rectas. Hay dos tipos: - Funciones lineales o de proporcionalidad directa: $y = mx$, pasan por el origen de coordenadas. - Funciones afines: $y = mx + n$, son traslaciones en el eje y , n unidades. Pasan por el punto $(0, n)$.	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas $y = ax^2 + bx + c$	Se representan mediante parábolas: Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4a} \right)$ Puntos de corte con el eje OX: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$. Punto de corte con el eje OY: $x = 0$, es el punto $(0, c)$ Eje de simetría: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas $y = k/x$	$ k $: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. Dominio y recorrido: $\mathbb{R} - \{0\}$ Continuidad: Discontinua en $x = 0$. Simetría: Función impar. Asíntotas: Las rectas $x = 0$ e $y = 0$.	
Hipérbolas $y = \frac{k}{x-a} + b$	Traslación de la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector (a, b) . Dominio: $\mathbb{R} - \{a\}$ Recorrido: $\mathbb{R} - \{b\}$ - Asíntotas: $x = a$; $y = b$.	
Función exponencial	$y = b^x$ Si $b > 1$ es creciente  Si $0 < b < 1$ es decreciente 	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Funciones

- Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y en él, los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está: $A(2, 4)$; $B(0, 1)$; $C(-3, 0)$; $D(2, -1'5)$; $E(1'5, 0)$; $F(0, 0)$; $G(-1, -2/3)$.
- Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.
- Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:
 $A(0, 3)$; $B(0, 1'7)$; $C(0, -1)$; $D(0, -4)$. ¿Qué tienen en común todos ellos?
- Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de abscisas. ¿Qué tienen en común?
- Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.
- Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:
 - A cada número natural se le asocian sus divisores primos.
 - A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.
 - A cada circunferencia del plano se le asocia un diámetro.
- La distancia, d , recorrida por un tren depende del número de vueltas, n , que da cada rueda de la locomotora.
 - Escribe la fórmula que permite obtener d conocido n , sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.
 - Dibuja la gráfica.
 - ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3,14).
 - ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?
- Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9°C . Determina:
 - ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?
 - ¿A qué altura habrá una temperatura de -30°C ?
 - Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A . Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?
 - Si la temperatura en la superficie es de 12°C , ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?



9. Dibuja la gráfica de la función *parte entera*: $y = E(x)$, que indica el número entero menor, más próximo a x , así, por ejemplo, $E(2.3) = 2$.
10. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x . Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

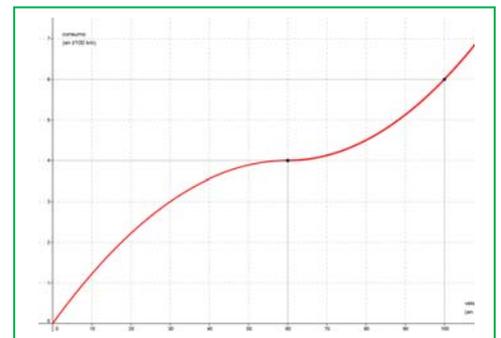


11. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

12. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x ? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.

13. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura " a " de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.

14. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica. Utiliza la gráfica para explicar cómo varía el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.



- ¿Cuál es la variable dependiente?
- ¿Y la independiente?
- ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?
- ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?



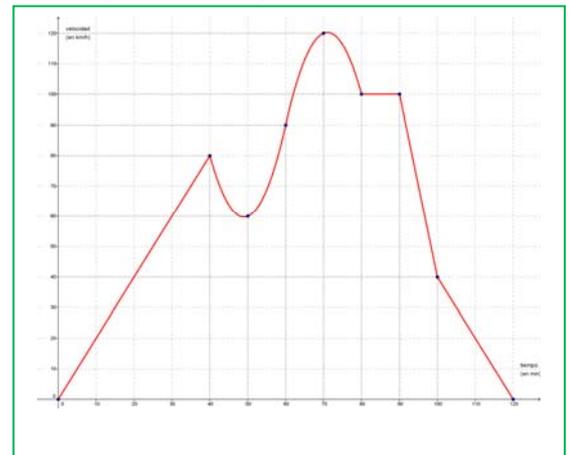
15. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

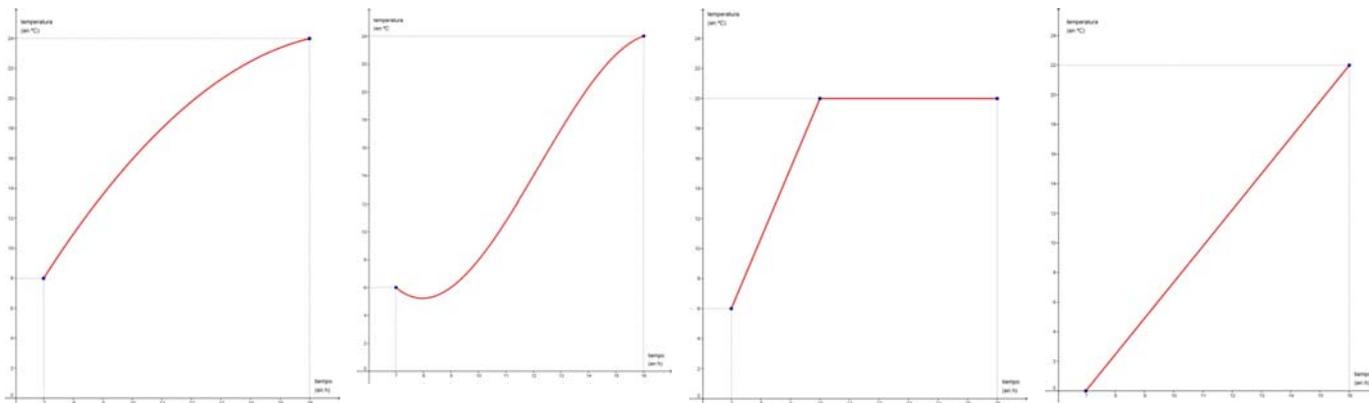
- Durante los primeros 30 días: altura = $4 \cdot$ tiempo
- En los 15 días siguientes: altura = $90 +$ tiempo
- A partir del día 45: altura = 135.

Características de una función

16. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado n años.
17. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1'20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:
- ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
 - ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
 - ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.
18. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico... La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.
- ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?
 - ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?
 - ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?
 - Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?
 - ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?
 - ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?



19. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):



- Explica la monotonía de todas las gráficas.
- ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?
- ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?
- Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h, en Sevilla a veces se ha mantenido constante, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

20. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma: Durante las dos primeras horas, la distancia “ d ” (en kilómetros) al punto de partida es: $2 \cdot t + 1$, donde “ t ” es el tiempo (en horas) de duración del trayecto. Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$. Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$. Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

- Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).
- Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.
- La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?
- ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?
- ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?
- Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.
- Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.



21. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el capítulo: continuidad, monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

- a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x > 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- b) Opuesto e inverso del número x : $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Tipos de funciones

22. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada en el origen 6.
23. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ y $C(12, 15)$.
24. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.
25. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. ¿Cómo son?

26. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.



27. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:

- a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es 5.
- b) Pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(0, 9)$.
- c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.
- d) Pasa por los puntos $C(-2, 7)$ y $D(-3, 10)$.
- e) Pasa por el punto (a, b) y tiene de pendiente m .

28. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:

- a) De pendiente 2 y ordenada en el origen 0.
- b) Pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 1)$.
- c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto $(4, 5)$.

29. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

30. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

31. Ajusta una función polinómica a los datos de la tabla:

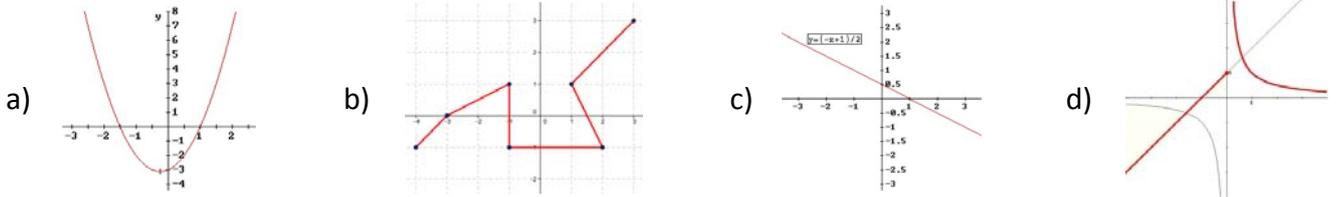
x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	1	5	11	19	29	41	55

32. Dibuja las gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso los puntos de discontinuidad y las asíntotas.

33. Dibuja las gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La única gráfica que no corresponde a una función es:



2. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

x	y
0	5
1	7
2	32
3	41

a)

x	y
-1	-2
0	-2
1	-2
2	-2

b)

x	y
-3	1
-1	2
0	3
2	4

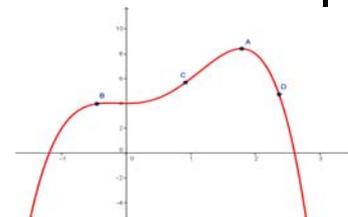
c)

x	y
0	1
1	2
4	3
0	4

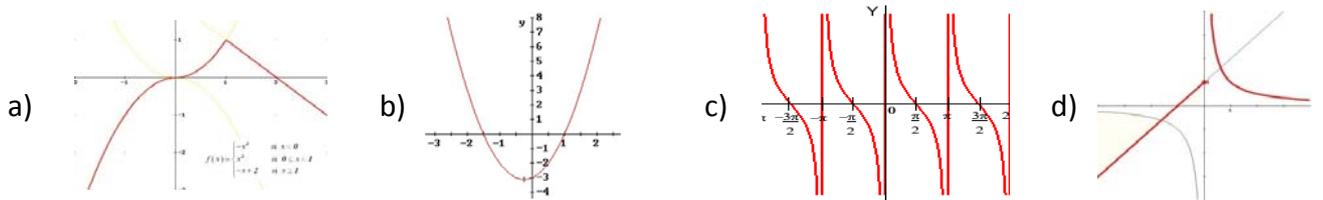
d)

3. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:

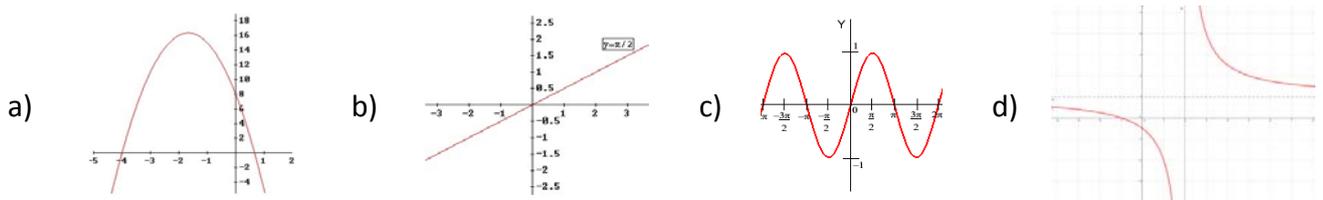
a) b) c) d)



4. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:



5. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:



6. La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

7. La única función cuadrática es:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -2x^3 - 3x$

8. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (2, 0) es:

a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. La hipérbola de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. La única función exponencial es:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$

FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 4: GEOMETRÍA ELEMENTAL DEL PLANO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. ELEMENTOS DEL PLANO

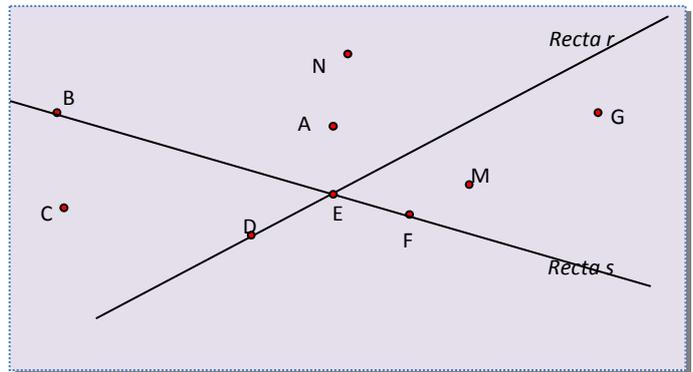
1. Copia en tu cuaderno el siguiente dibujo y realiza las siguientes actividades.

Dibuja tres segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas r y s .

¿El punto B pertenece a la recta s ? ¿Y a la recta r ?

Dibuja un segmento que tenga como extremos A y un punto que esté en las rectas r y s

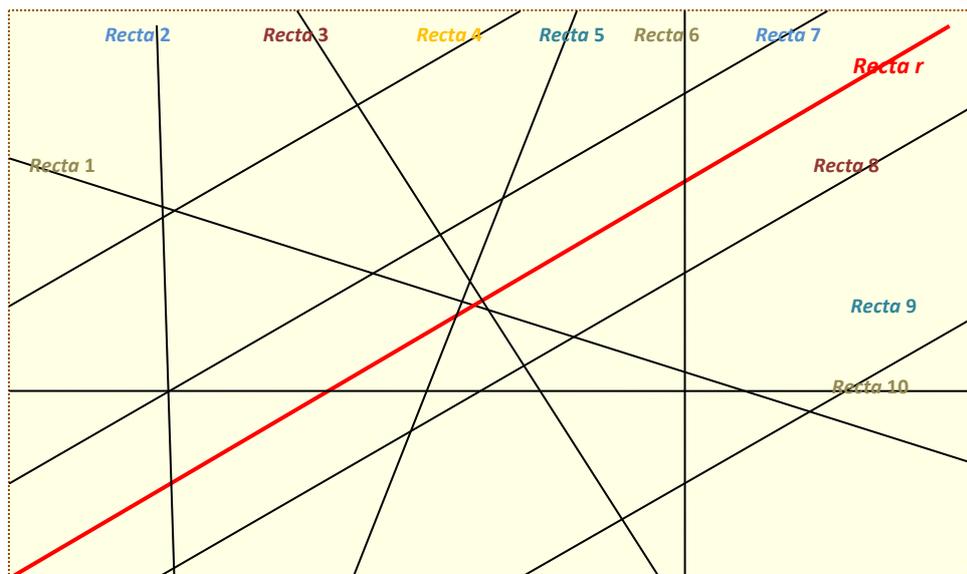
Dibuja una semirrecta de origen C y que pase por B .



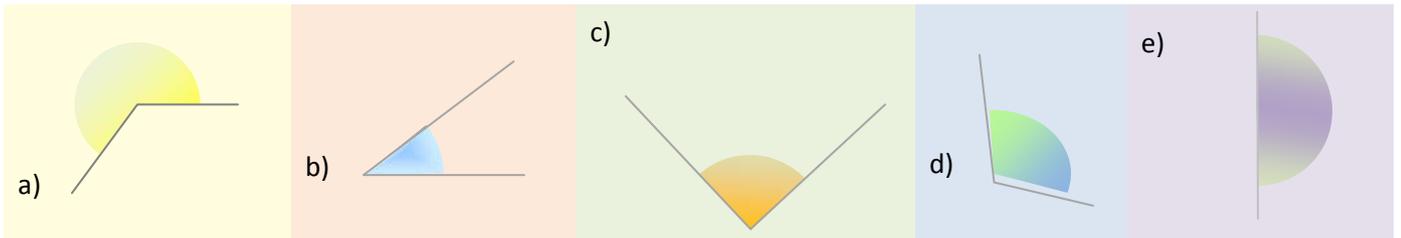
¿Es posible dibujar una recta que pase a la vez por M , F y G ? ¿Y por N , A y E ?

2. Dibuja cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.

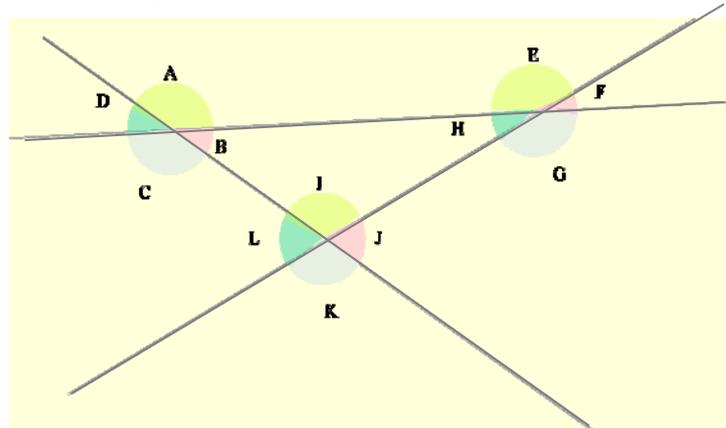
3. Observa el siguiente dibujo e indica qué rectas son paralelas a r y qué rectas son secantes a r .



4. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



5. Indica todas las parejas de ángulos adyacentes, consecutivos y opuestos por el vértice que se encuentran en el siguiente dibujo:



6. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

- a) $12500''$ b) $83'$ c) $230''$ d) $17600''$

7. Pasa de forma compleja a forma incompleja

- a) $12^\circ 34' 40''$ b) $13^\circ 23' 7''$ c) $49^\circ 56' 32''$ d) $1^\circ 25' 27''$

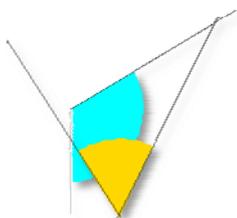
8. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8465''		
	245' 32''	
		$31^\circ 3' 55''$

9. Calcula:

- a) $34^\circ 45' 30'' + 12^\circ 27' 15''$ b) $16^\circ 30' 1'' + 12^\circ 13' 12'' + 2^\circ 1'$
 c) $16^\circ 45' + 23^\circ 13'' + 30^\circ 20' 30''$ d) $65^\circ 48' 56'' - 12^\circ 33' 25''$
 e) $35^\circ 54' 23'' - 15^\circ 1' 35''$ f) $43^\circ 32' 1'' - 15^\circ 50' 50''$

10. Copia en tu cuaderno y dibuja el complementario del ángulo y el suplementario del ángulo .



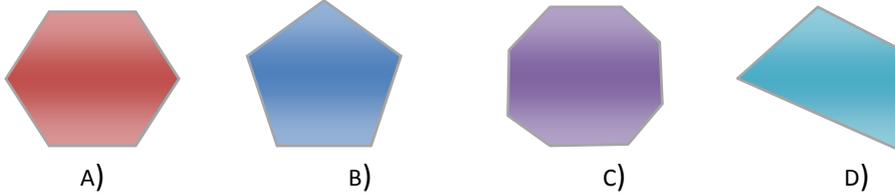
Calcula los ángulos complementario y suplementario de:

- a) $35^\circ 54' 23''$ b) $65^\circ 48' 56''$
 c) $43^\circ 32' 1''$ d) $30^\circ 20' 30''$

11. Indica si las siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o ninguna de las dos cosas:
- a) $15^\circ 34' 20''$ y $164^\circ 25' 40''$ b) $65^\circ 48' 56''$ y $24^\circ 12' 4''$ c) $43^\circ 32' 1''$ y $30^\circ 26' 59''$
12. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.
13. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?
14. ¿Es posible dibujar tres rectas, secantes dos a dos de modo que haya exactamente: a) Una pareja de rectas perpendiculares? b) ¿Dos parejas de rectas perpendiculares? c) ¿Las tres parejas de rectas sean perpendiculares?
15. Dibuja la mediatriz de un segmento de 6 cm de longitud.
16. Dibuja un segmento de longitud 8 cm, su mediatriz y una recta perpendicular al segmento de partida que esté a una distancia de 5 cm de la mediatriz. ¿Qué posición ocupa esta recta con respecto al segmento de partida?
17. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:
- a) 45° b) 130° c) 70° d) 45°
18. Repite la actividad resuelta de elementos geométricos. Colócate encima del segmento a , aprieta el botón derecho, entra en **Propiedades** y modifica el color, haz que sea rojo. Lo mismo con la recta b , pero ahora coloréala en azul. Mueve el punto B para observar cómo se modifican las longitudes y el ángulo.
19. Dibuja con *Geogebra* cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.
20. Dibuja con *Geogebra* dos rectas paralelas cortadas por una secante y mide todos los ángulos que se formen.
21. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados paralelos y comprueba que miden lo mismo.
22. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados perpendiculares y comprueba que miden lo mismo.
23. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos que sean complementarios y dos que sean suplementarios.
24. Dibuja con *Geogebra* un ángulo inscrito en la circunferencia y el central que abarca el mismo arco. Comprueba que el ángulo inscrito mide la mitad del central. Mueve uno de los puntos sobre la circunferencia y comprueba que esa relación permanece.

2. POLÍGONOS

25. Copia los dibujos siguientes y traza todas las diagonales de cada polígono:



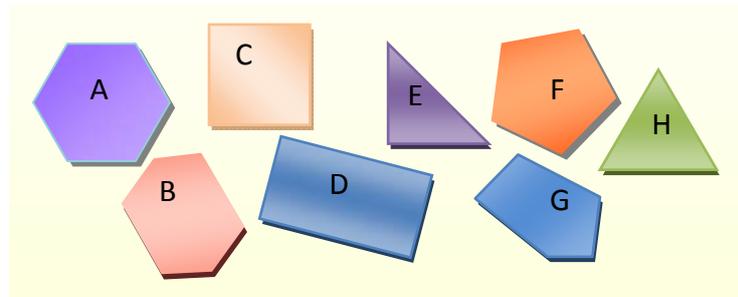
26. Dibuja los polígonos siguientes y traza todas sus diagonales:

a) Hexágono b) Pentágono c) Octógono d) Trapezoide

27. Dibuja, si es posible, un ejemplo de polígono que sea:

- a) triángulo cóncavo b) pentágono convexo
c) hexágono cóncavo d) cuadrilátero convexo regular.

28. Observa la figura adjunta e indica qué polígonos son equiángulos, equiláteros, regulares e irregulares. Puedes copiar la tabla inferior en tu cuaderno y completarla



	A	B	C	D	E	F	G	H
EQUIÁNGULO								
EQUILÁTERO								
REGULAR								
IRREGULAR								

29. Dibuja en tu cuaderno el apotema de:

- a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un hexágono regular.

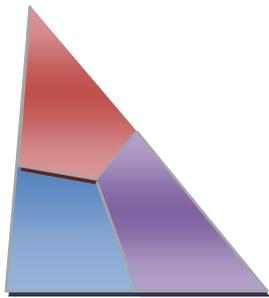
3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

30. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y en ella un sector circular de 30° de amplitud.

31. En la circunferencia anterior, indica si es posible trazar una cuerda en cada uno de los casos siguientes y hazlo en caso afirmativo: a) de 4 cm de longitud, b) de 8 cm, c) mayor de 8 cm.

32. Dibuja tres puntos que no estén en línea recta de modo que el primero esté a 2 cm de distancia del segundo y el segundo a 3 cm del tercero. Finalmente traza la circunferencia que pase por los tres.

4. TRIÁNGULOS



33. Dibuja en un papel un triángulo, divídelo en tres partes y coloréalas con tres colores diferentes. Después recórtalas y forma con ellas un ángulo llano. De esta forma, habrás demostrado que la suma de sus ángulos es 180°

34. Calcula el valor del tercer ángulo de un triángulo si dos de ellos miden respectivamente:

- a) 30° y 80° b) 20° y 50° c) 15° y 75° d) $40^\circ 30'$ y $63^\circ 45'$.

35. Clasifica, según sus ángulos, los triángulos del ejercicio anterior.

36. Construye un triángulo rectángulo isósceles.

37. Indica razonadamente si es posible construir un triángulo cuyos lados midan:

- a) 5 cm, 4 cm y 3 cm b) 10cm, 2 cm y 5 cm c) 2dm, 2dm 4 dm d) 13 m, 12 m y 5 m

38. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado y comprueba que todos los puntos notables coinciden.

39. Calcula el circuncentro de un triángulo rectángulo. ¿Dónde se encuentra?

40. Calcula el ortocentro de un triángulo obtusángulo.

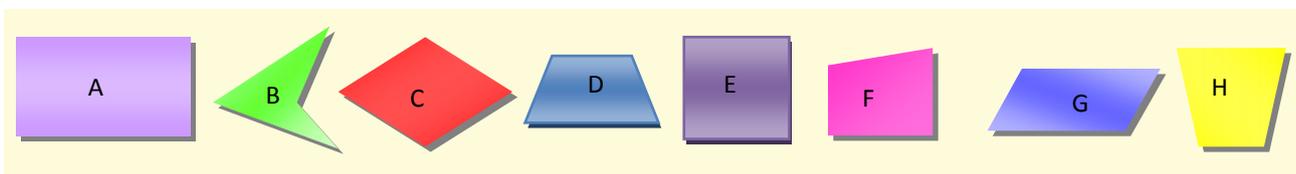
41. Dibuja un triángulo en los siguientes casos:

- a) Sus lados miden 12 cm, 10 cm y 8 cm
 b) Un lado mide 10 cm y sus ángulos adyacentes 30° y 65° .
 c) Dos lados miden 10 cm y 8 cm y el ángulo comprendido entre ellos 50° .

6. CUADRILÁTEROS

42. Fíjate en el dibujo e indica qué cuadriláteros son:

- a) cóncavos b) paralelogramos c) isósceles d) trapecios e) trapezoides f) regulares

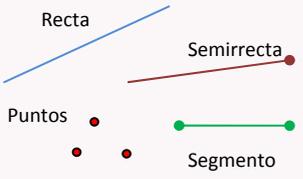
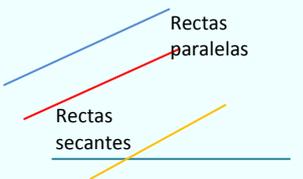
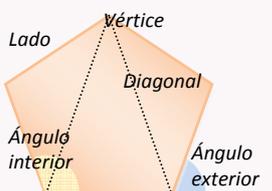
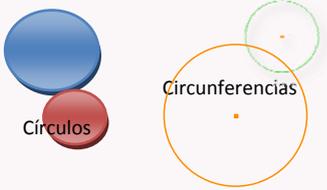


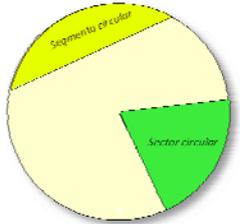
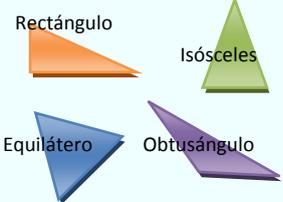
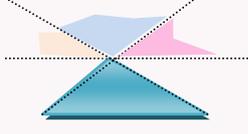
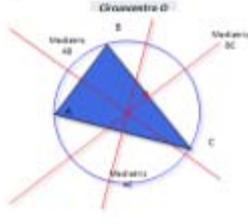
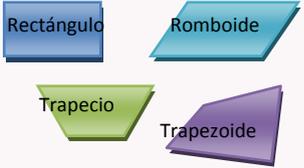
43. Averigua qué tipo de paralelogramo aparece si se unen los puntos medios de:

- a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) un trapecio e) un trapezoide.

44. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32° . ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?

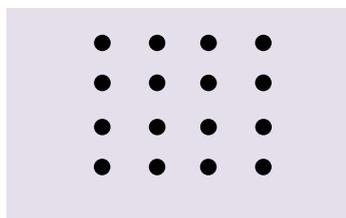
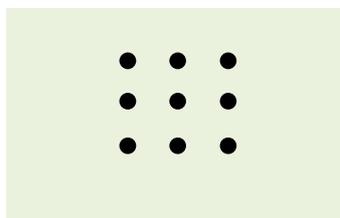
RESUMEN

<p>Elementos del plano</p>	<p>Los elementos fundamentales del plano son: puntos, rectas, semirrectas, segmentos</p>	
<p>Posición relativa de dos rectas</p>	<p>Dos rectas distintas pueden ser paralelas o secantes</p>	
<p>Polígonos. Elementos de un polígono</p>	<p>Un polígono es una línea poligonal cerrada. Los elementos de un polígono son lados, vértices, diagonales, ángulos interiores y exteriores</p>	
<p>Clasificación de los polígonos</p>	<p>Por el tipo de ángulos cóncavos y convexos. Regulares o irregulares según tengan todos sus lados y ángulos iguales o no. Por el número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,...</p>	
<p>Circunferencia y círculo</p>	<p>Una circunferencia es una línea cerrada que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Un círculo es la parte de plano que encierra una circunferencia.</p>	
<p>Elementos de una circunferencia</p>	<p>Centro, radio, diámetro, cuerda, arco.</p>	

<p>Sector circular, segmento circular y corona circular</p>	<p>Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios.</p> <p>Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos.</p> <p>Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.</p>	
<p>Clasificación de triángulos</p>	<p>Según los ángulos: acutángulos, rectángulos y obtusángulos.</p> <p>Según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos,</p>	
<p>Propiedades</p>	<p>La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.</p> <p>En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.</p>	
<p>Rectas y puntos notables en un triángulo</p>	<p>Las mediatrices concurren en el circuncentro, las bisectrices en el incentro, las alturas en el ortocentro y las medianas en el baricentro.</p>	
<p>Clasificación de los cuadriláteros</p>	<p>Paralelogramos si sus lados son paralelos e iguales dos a dos y no paralelogramos.</p> <p>Los paralelogramos se dividen en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides.</p> <p>Los no paralelogramos pueden ser trapecios o trapezoides.</p>	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- Dibuja una recta horizontal y otra que forme un ángulo de 60° con ella.
- Dibuja cuatro rectas de modo que tres de ellas pasen por un mismo punto y la cuarta sea paralela a una de ellas.
- Dibuja dos rectas secantes y un segmento que tenga un extremo en cada una de ellas.
- Si dos rectas r y s son perpendiculares y trazas una tercera recta p paralela a una de ellas, por ejemplo a r , ¿cómo son las rectas s y p ? Haz un dibujo.
- Un ángulo mide $\frac{3}{4}$ de recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
- Calcula :
 - $54^\circ 25' 10'' + 32^\circ 17' 14''$
 - $14^\circ 30' 15'' + 62^\circ 1' 16'' + 42^\circ 1''$
 - $15^\circ 23' + 73^\circ 10'' + 70^\circ 28' 38''$
 - $45^\circ 45' 45'' - 12^\circ 48' 85''$
 - $67^\circ 4' 23'' - 15^\circ 4' 37''$
 - $33^\circ 32' 1'' - 15^\circ 35' 20''$
- La suma de dos ángulos es $125^\circ 46' 35''$. Si uno de ellos mide $57^\circ 55' 47''$, ¿cuánto mide el otro?
- Cinco guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos
- En un tablero de 3×3 , ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono? ¿Y en uno de 4×4 ?

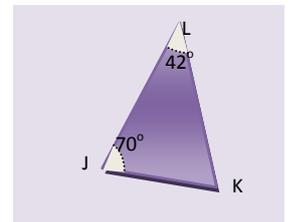
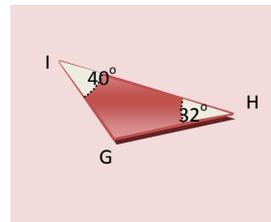
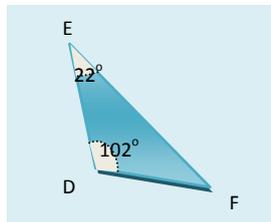
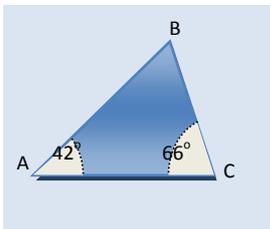


- La fotografía representa un mosaico de La Alhambra de Granada. Observa que está constituido por motivos geométricos.

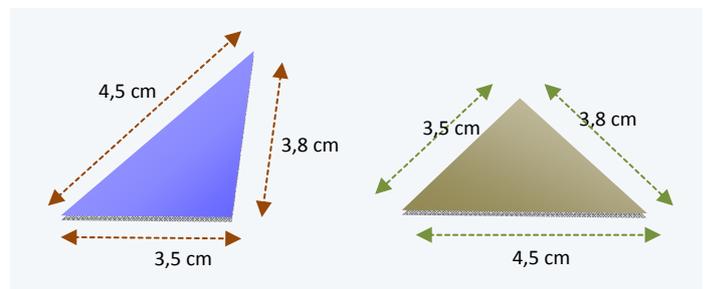
- Este mosaico tiene dos tipos de polígonos regulares: ¿Cuáles son?
- Describe el polígono blanco. ¿Es cóncavo o convexo?
- El mosaico de la fotografía no es un mosaico regular. Si lo fuera estaría formado únicamente por polígono regulares todos iguales.
- Describe un octógono regular: número de lados, cuánto mide su ángulo central, cuánto mide sus ángulos interiores...



11. Calcula el número de diagonales que tienen los siguientes polígonos:
- a) Rombo b) trapecio c) trapecoide d) cuadrado e) rectángulo f) hexágono.
12. Dibuja un hexágono regular y un cuadrado. Marca el centro y sitúa en cada uno de ellos dos apotemas y dos radios.
13. Dibuja un decágono y todas sus diagonales.
14. Completa:
- a. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo
- b. Un triángulo..... tiene un ángulo obtuso.
- c. Un triángulo..... tiene los tres ángulos agudos.
15. Construye un triángulo sabiendo que $a = 9 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ y el ángulo $C = 50^\circ$.
16. ¿Se puede construir un triángulo de modo que sus ángulos midan 105° , 45° y 35° . Razona tu respuesta.
17. Dibuja un triángulo obtusángulo. ¿Crees que las tres alturas son iguales?
18. Observa las figuras y calcula los ángulos que faltan



19. Dados tres segmentos de cualquier medida, ¿es siempre posible construir un triángulo? ¿Por qué? Recorta tiritas de papel de longitudes de 10 cm, 8 cm y 6 cm, ¿puedes construir un triángulo con ellas?
20. ¿Puedes asegurar que son iguales los triángulos de la figura derecha?
21. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 50° , indica el valor de los demás. Dibuja un triángulo rectángulo con estos ángulos y un cateto de 5 cm.
22. Si dos de los ángulos de un triángulo miden 30° y 70° , ¿cuánto mide el menor de los ángulos que forman las bisectrices correspondientes?



23. Construye un triángulo sabiendo que $a = 10 \text{ cm}$, los ángulos $B = 45^\circ$ $C = 50^\circ$

24. Calcula el incentro del triángulo anterior y dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

25. ¿En qué punto colocarías un pozo para que tres casas de campo no alineadas, estén a la misma distancia del mismo? Haz un gráfico esquemático en tu cuaderno y calcula el punto en tu dibujo.



26. Desde uno de los vértices de un hexágono se trazan tres diagonales que dividen al polígono en cuatro triángulos.

- Calcula la suma de los ángulos del hexágono.
- Si el hexágono es regular, calcula el valor de cada uno de sus ángulos interiores.
- En el mismo supuesto, calcula el valor del ángulo central.

27. Dibuja un polígono de 9 lados. ¿Cómo se llama?

- ¿Cuántos triángulos puedes formar al trazar todas las diagonales que parten de un vértice?
- ¿Cuánto vale la suma de los ángulos del polígono inicial?

28. Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

“Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se trata de un rombo”

“Los trapecios rectángulos tienen todos sus ángulos iguales”

“Los rectángulos son polígonos equiángulos”.

“Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio”

Justifica tus respuestas y haz un dibujo que acompañe a cada una.

29. Consigue un hilo grueso y un trozo de papel de color. Recorta el hilo o el trozo de papel, según proceda y construye:

- Una circunferencia, b) un círculo, c) un radio, d) un segmento circular, e) un sector circular.

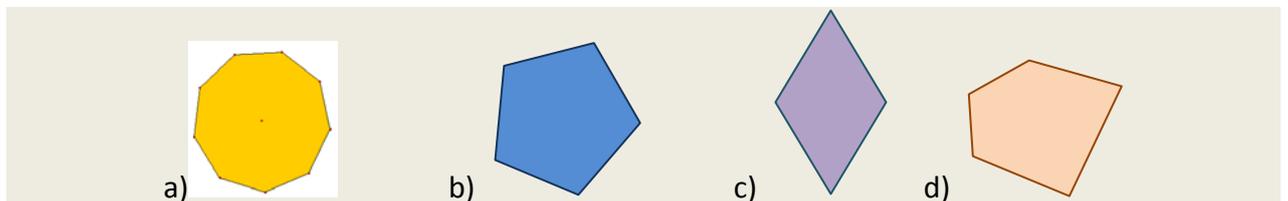
30. Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y dos arcos iguales así como las cuerdas que tienen sus mismos extremos. Comprueba que las cuerdas también son iguales.

31. En el dibujo hecho para dar respuesta al ejercicio anterior, traza dos diámetros perpendiculares a las cuerdas. Mide después la distancia de cada cuerda al centro. ¿Qué observas?

32. Dibuja dos rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea de 5 cm. Dibuja después una circunferencia tangente a ambas.

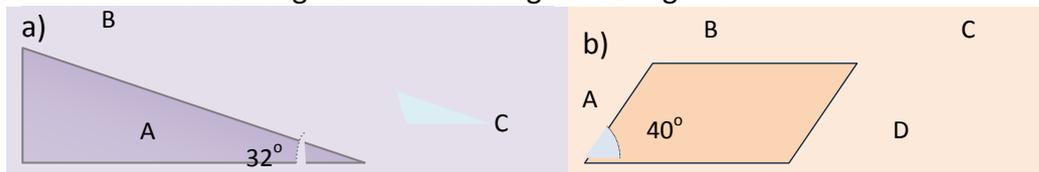
AUTOEVALUACIÓN

- Dibuja tres puntos A, B, C que no estén alineados y :
 - Las rectas r que pasa por A y B y s que pasa por B y C.
 - La recta perpendicular a r y que pasa por el punto C.
 - La recta perpendicular a s que pasa por B.
 - La recta paralela a s que pasa por A.
- Calcula el complementario y suplementario de los ángulos siguientes:
 - 54°
 - $73^\circ 40' 56''$
- ¿Cuánto valen los ángulos interior y exterior de un pentágono regular?
- Dibuja un hexágono y todas sus diagonales.
- Clasifica los siguiente polígonos, completando la tabla:



POLÍGONO	CÓNCAVO	REGULAR	EQUIÁNGULO	EQUILÁTERO	POR EL NÚMERO DE LADOS ES UN
a)	NO	SÍ	SI	SI	ENEÁGONO
b)					
c)					
d)					
e)			SI	NO	CUADRILÁTERO

- Dibuja un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 6 cm y 5 cm y traza sus tres alturas.
- a) Dibuja un sector circular de radio 4 cm de modo que su amplitud sea de 82° . b) Dibuja una corona circular definida por dos círculos de radios 4 cm y 2 cm.
- Dibuja un triángulo en el que $a = 6$ cm, $\gamma = 45^\circ$. Calcula después su circuncentro.
- Dibuja un trapecio isósceles, un trapecio rectángulo, un romboide, traza sus diagonales y estudia si se cortan en el punto medio.
- Calcula el valor del ángulo \hat{B} en las siguientes figuras:



FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 5: ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

- ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 *cm* y su hipotenusa 26 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 *cm*. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.
- Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
 - 8 *cm* y 6 *cm*
 - 12 *m* y 9 *m*
 - 6 *dm* y 14 *dm*
 - 22,9 *km* y 36,1 *km*.
- Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
 - 27 *cm* y 12 *cm*
 - 32 *m* y 21 *m*
 - 28 *dm* y 12 *dm*
 - 79,2 *km* y 35,6 *km*
- Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 *m*. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
- Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 *cm*. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
- Calcula el volumen de un tetraedro regular de arista 5 *dm*.
- Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 *dm*.
- Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 *m*.
- Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 *cm* y altura 5 *cm*.

2. SEMEJANZA

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

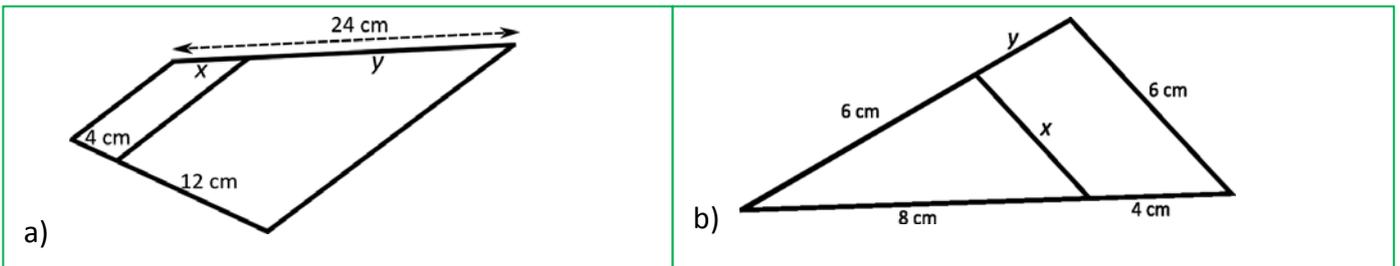
- Un ángulo de 80° y otro de 40° . Un ángulo de 80° y otro de 60° .
- Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70° . Triángulo isósceles con ángulo igual de 50° .
- $A = 30^\circ$, $b = 7$ cm, $c = 9$ cm. $A' = 30^\circ$, $b' = 14$ cm, $c' = 18$ cm
- $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm. $a' = 20$ cm, $b' = 25$ cm, $c' = 35$ cm

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

- $a = 18$ cm, $b = 12$ cm, $c = 24$ cm. $a' = 6$ cm, $b' = 4$ cm, ¿ c' ?
- $A = 45^\circ$, $b = 16$ cm, $c = 8$ cm. $A' = 45^\circ$, $b' = 4$ cm, ¿ c' ?

12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

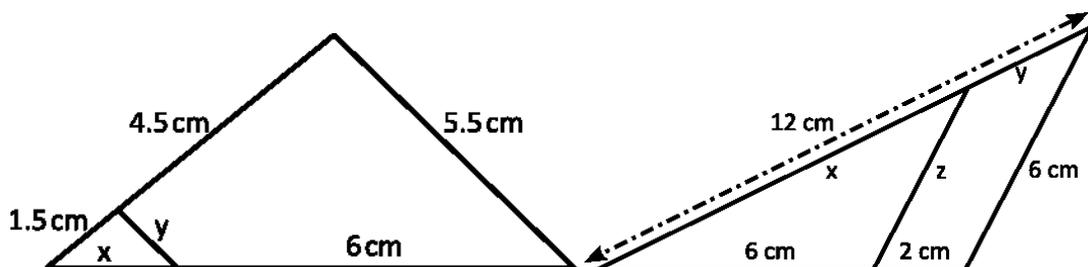
13. Calcula los valores de x e y en las siguientes figuras.



14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?

16. Calcula las longitudes que se indican:



17. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 cm. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

18. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 cm, 25 cm y 40 cm, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

19. Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?



20. La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es $k = 100$. ¿Cuánto mide la pirámide real?

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0,05 m	

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 cm	0,7 hm	
4 cm	20 km	

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

25. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un cuadrado de lado 5 *cm* son:

- a) 10 *cm* y 25 *cm*² b) 20 *cm* y 25 *cm*²
 c) 20 *cm* y 5 *cm*² d) 20 *cm* y 20 *cm*²

26. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un rectángulo de base 7 *dm* y altura 3 *cm* son:

- a) 146 *cm* y 210 *cm*² b) 20 *cm* y 49 *cm*²
 c) 20 *cm* y 21 *cm*² d) 21 *cm* y 21 *cm*²

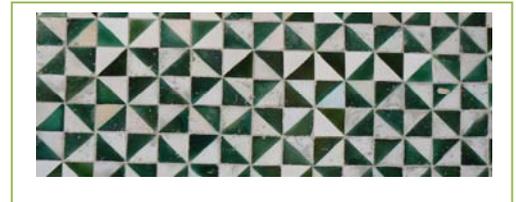
27. Las baldosas de la figura miden 12 *cm* de largo y 6 *cm* de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?

28. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?



29. Estas molduras miden 175 *cm* de ancho y 284 *cm* de alto. ¿Cuál es el área encerrada?

30. Cada uno de los triángulos de la figura tiene una base de 10 *mm* y una altura de 6 *mm*. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?

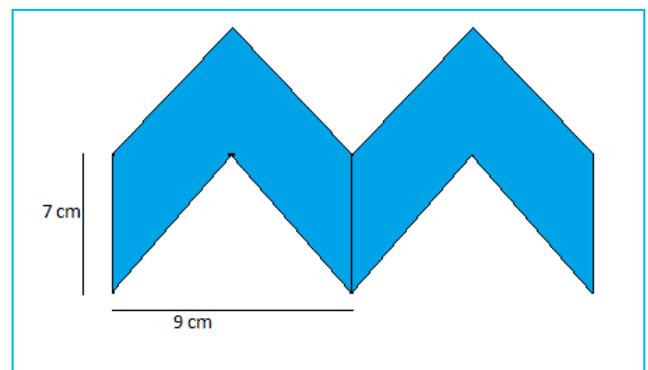
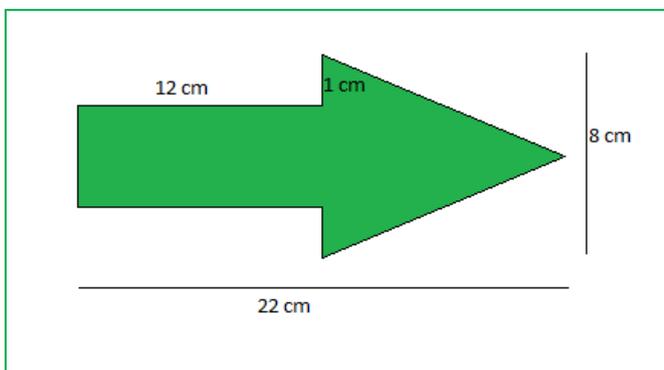


31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 84 y 35 *cm*. ¿Cuánto mide el área de la cometa?

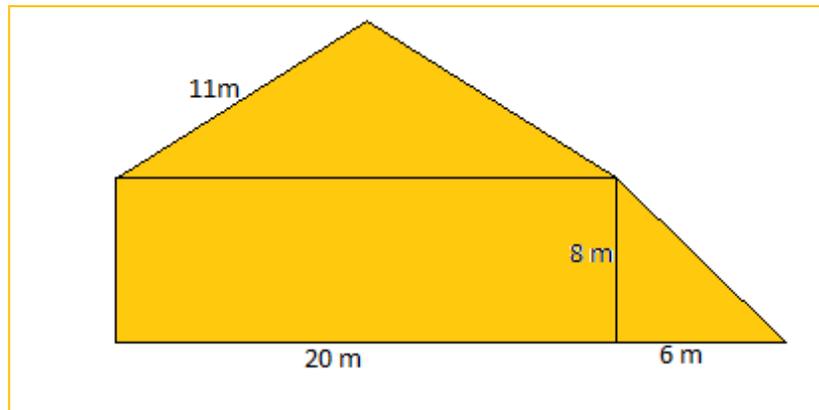
32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 1,2 y 0,8 *m* y altura 0,5 *m*. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

33. Calcula el área de un romboide de 15 *cm* de base y 12 *cm* de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

34. Estima el área de los siguientes polígonos irregulares:

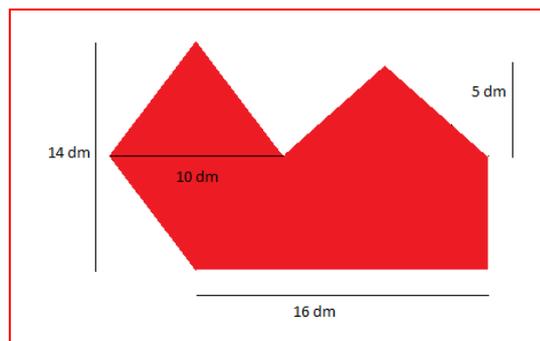


35. Estima el perímetro del polígono de la figura:



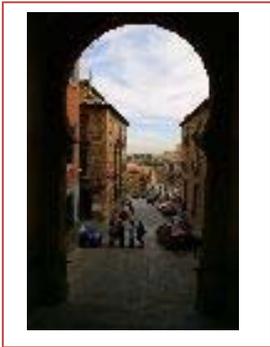
36. Estima el perímetro de los polígonos de la actividad 34.

37. Estima el perímetro del polígono de la figura:



4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

- 38.** Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 2 cm , la un poco más oscura siguiente $2,5\text{ cm}$, la clara siguiente $3,5\text{ cm}$, y así, aumenta unas veces medio centímetro y otras, un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.
- 39.** Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella... y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.
- 40.** La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 km . ¿Cuánto mide el Ecuador?
- 41.** Antiguamente se definía un metro como: *“la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París”*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?



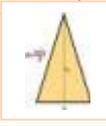
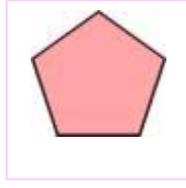
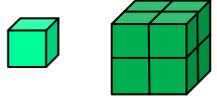
- 42.** Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de $8'4\text{ m}$. ¿Cuál es la longitud del arco?
- 43.** Un faro gira describiendo un arco de 170° . A una distancia de 5 km , ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?
- 44.** El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 3 m , y la de la siguiente figura es de $2,5\text{ m}$.

- a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.
- b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas



- 45.** Calcula el área encerrada por la circunferencia exterior del rosetón de 3 m de radio.
- 46.** Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de $1,3\text{ m}$.
- 47.** Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.
- 48.** Calcula el área de la corona circular de radios 7 y 3 cm .
- 49.** Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 cm y 12 cm y que forma un ángulo de 60° .

RESUMEN

Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$		$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Área del cuadrado	$A = \text{lado}^2 = l^2$		Si $l = 4 \text{ cm} \Rightarrow A = 16 \text{ cm}^2$
Área del rectángulo	$A = \text{base por altura} = a \cdot b$		Si $a = 3 \text{ cm}, b = 5 \text{ cm} \Rightarrow A = 15 \text{ cm}^2$.
Área del paralelogramo	$A = \text{base por altura} = a \cdot b$		$a = 7 \text{ m}, b = 9 \text{ m} \Rightarrow A = 63 \text{ m}^2$
Área del triángulo	$A = (\text{base por altura})/2 = a \cdot b/2$		$a = 5 \text{ m}, b = 6 \text{ m} \Rightarrow A = 15 \text{ m}^2$
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura		$B = 7; b = 3; h = 5 \Rightarrow A = 25$
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2		$D = 4, D' = 9 \Rightarrow A = 36/2 = 18$
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados		Lado = 6 cm , apotema = 5 cm , número de lados = $5 \Rightarrow$ Perímetro = $6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$; Área = $15 \cdot 5 = 75 \text{ cm}^2$.
Área de un polígono regular	Área es igual al semiperímetro por la apotema		
Longitud de la circunferencia	Si el radio es r la longitud es igual a $2\pi r$. Longitud de un arco de circunferencia: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$		Radio = $3 \text{ cm} \Rightarrow$ Longitud = $6\pi \approx 18,84 \text{ cm}$. Área = $9\pi \approx 28,26 \text{ cm}^2$. Si $\alpha = 30^\circ$ y $r = 3 \text{ cm} \Rightarrow$ Longitud del arco = $2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 30/360 = 0,5\pi \approx 1,57 \text{ cm}$ $R = 7, r = 3 \Rightarrow A = \pi(7^2 - 3^2) = \pi(49 - 9) = 40\pi \approx 125,6 \text{ u}^2$ $R = 4 \text{ cm}, \alpha = 60^\circ \Rightarrow A = \pi \cdot 16 \cdot 60/360 \approx 8,373 \text{ cm}^2$
Área del círculo	Si el radio es r , el área es igual a $\pi \cdot r^2$.		
Área de la corona circular. Área del sector circular	Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor. Si abarca un arco α grados, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot \alpha/360$.		
Semejanza	Dos figuras son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales		Si el lado del cuadrado mide 5 m , otro semejante de lado 15 m , $k = 3$, tiene un área multiplicada por 9 , y el volumen del cubo multiplicado por 27 .
Razón de semejanza	Si la razón de semejanza es k , la razón entre las áreas es k^2 , y entre los volúmenes k^3 .		

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

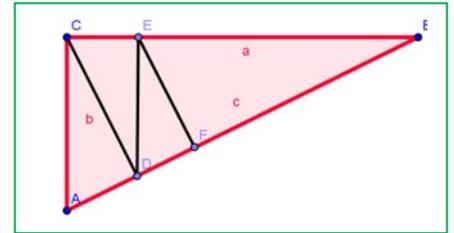
Teorema de Pitágonas

- ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 *cm* y 6 *cm* de medida de sus catetos y 15 *cm* de hipotenusa? Razona tu respuesta
- Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.
- Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.
- ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8,2 *cm* y 6,9 *cm*?
- Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
 - 16 *cm* y 12 *cm*
 - 40 *m* y 30 *m*
 - 5 *dm* y 9,4 *dm*
 - 2,9 *km* y 6,3 *km*.
- Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:
 - 25 *cm* y 15 *cm*
 - 35 *m* y 21 *m*
 - 42 *dm* y 25 *dm*
 - 6,1 *km* y 4,2 *km*
- Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 *m*.
- Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 *cm* y 5 *cm*
- Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 *cm* y la hipotenusa de 10 *cm*. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Semejanza

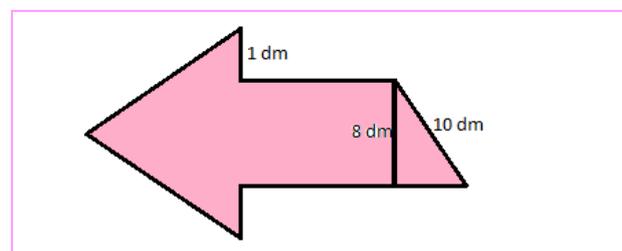
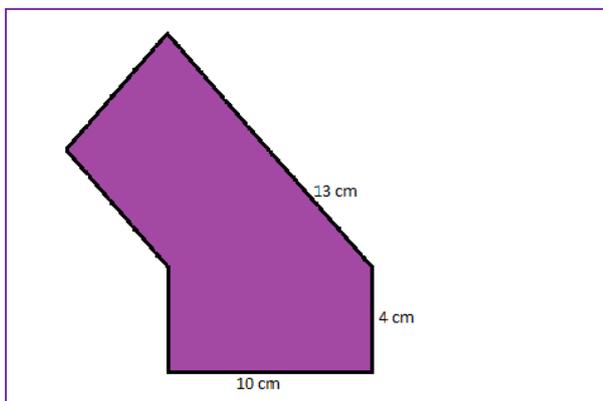
- Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
 - Un ángulo de 30° y otro de 20°. Un ángulo de 120° y otro de 20°.
 - Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50°.
 - $A = 40^\circ$, $b = 8$ *cm*, $c = 12$ *cm*. $A' = 40^\circ$, $b' = 4$ *cm*, $c' = 6$ *cm*
 - $a = 3$ *cm*, $b = 4$ *cm*, $c = 6$ *cm*. $a' = 12$ *cm*, $b' = 16$ *cm*, $c' = 24$ *cm*
- Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
 - $a = 15$ *cm*, $b = 9$ *cm*, $c = 12$ *cm*. $a' = 10$ *cm*, $b' = 4$ *cm*, ¿ c' ?
 - $A = 50^\circ$, $b = 3$ *cm*, $c = 7$ *cm*. $A' = 50^\circ$, $b' = 18$ *cm*, ¿ a' ?
- Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 *cm*, 14 *cm* y 14 *cm*. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 *cm*. ¿Cuánto miden sus lados?

13. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?
14. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?
15. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?
16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo ABC , de lados $a = 60$, $b = 45$ y $c = 75$, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores ACD , CDE , DEF y EFB , y el escriba calcula la longitud del lado AD como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo ABC y del triángulo ACD . Determina la longitud de los segmentos CD , DE y EF .
17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?
18. El mapa a escala 1:5000000 de un pueblo tiene un área de 700 cm^2 , ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?
19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?
20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.



Longitudes y áreas de polígonos

21. Una señal de tráfico tiene forma triangular. Su base mide 23 cm y su altura 36 cm. ¿Cuál es el área de la señal de tráfico?
22. Estima el área de los siguientes polígonos irregulares:



23. La pizarra de una clase tiene 150 cm de altura y 210 cm de base. ¿Cuál es la superficie de la pizarra?
24. El tejado de una casa tiene forma de trapecio. La base pegada al techo de la vivienda mide 53 m y la otra base mide 27 m. Sabiendo que la altura del tejado son 8 m, ¿Cuánto mide su área?

25. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? ¿Cuál es menor? Sólo tenemos 50 cm de reborde, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? Calcula el área de cada uno.
26. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?
27. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3,4 cm de radio.
28. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.
29. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. *Ayuda:* Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.
30. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.
31. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.
32. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?
33. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?
34. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.
35. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su perímetro mide 20 cm.
36. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 cm y su altura 5 cm?
37. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 cm respectivamente.

Longitudes y áreas de figuras circulares

38. Calcula la longitud de una circunferencia de radio 7 cm.
39. Una circunferencia de 98,27 cm de longitud, ¿qué radio tiene? ¿y qué diámetro?
40. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia de 270° si el radio mide 17 cm?
41. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un hexágono de lado 5 cm.
42. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 5 cm.
43. Calcula la longitud de una circunferencia circunscrita en un cuadrado de lado 5 cm.
44. Calcula el área en m^2 de los círculos de radio r igual a:
 - a) $r = 53 \text{ cm}$
 - b) $r = 9 \text{ m}$
 - c) $r = 8,2 \text{ dam}$
 - d) $r = 6,2 \text{ dm}$
45. Calcula el radio de un círculo de área $28,26 \text{ m}^2$.
46. Calcula el área de un círculo de diámetro 73,6 cm.
47. Calcula el área de las coronas circulares de radios, respectivamente:
 - a) $R = 8 \text{ m}; r = 3 \text{ m}$
 - b) $R = 72 \text{ cm}; r = 41 \text{ cm}$
 - c) $R = 9 \text{ m}; r = 32 \text{ cm}$
 - d) $R = 5 \text{ dm}; r = 4 \text{ cm}$
48. En una habitación rectangular de lados 3 y 5 m, cubrimos un trozo con una alfombra circular de radio 2 m, ¿qué parte de suelo queda sin cubrir?
49. Calcula el área, en cm^2 , de los sectores circulares de radio r y ángulo α siguientes:
 - a) $r = 6 \text{ m}; \alpha = 30^\circ$
 - b) $r = 3,7 \text{ cm}; \alpha = 45^\circ$
 - c) $r = 2,7 \text{ dm}; \alpha = 60^\circ$
 - d) $r = 4 \text{ m}; \alpha = 90^\circ$

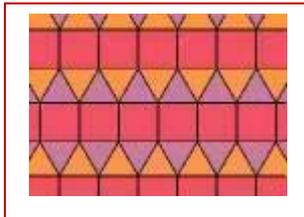
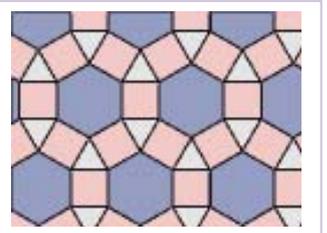
50. Dibuja en tu cuaderno el diseño de tapiz del margen de forma que el lado del cuadrado pequeño oscuro sea de 1 cm, el lado del cuadrado de borde amarillo, de 3 cm, y el borde del cuadrado de fondo rojo, de 6 cm. Estima el área del círculo rojo, del círculo oscuro, de la figura en rojo y de las líneas amarillas.



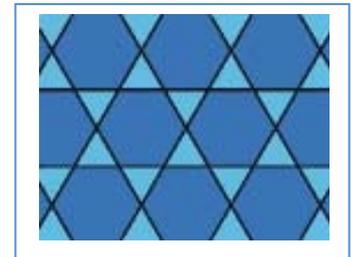
51. En una alfombra circular de 3 m de diámetro ha caído en el centro una mancha de medio metro de radio. a) ¿Qué área ocupa la parte limpia de la alfombra? b) Tapamos la mancha con otra alfombra cuadrada de 1,5 m de lado, ¿qué área de la alfombra circular queda sin tapar?
52. En un círculo cortamos dos círculos tangentes interiores de radios 5 y 2 cm, ¿qué área queda sin cortar?

Problemas

53. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.



54. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.



55. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?
56. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 m, y se separa de la pared una distancia de 2 m, ¿cuál es su longitud?
57. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 m de largo y 60 m de ancho. Calcula:
- La diagonal del terreno cuadrado.
 - La diagonal del rectángulo
 - El área de cada terreno.
 - ¿Cuál tiene mayor superficie?
58. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.
59. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1,2 m de ancho y 1,5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?
60. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

AUTOEVALUACIÓN

- La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:
 - 6,32 *cm*
 - 7 *cm*
 - 0,05 *m*
 - 627 *mm*
- En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:
 - 714 *cm*
 - 7,4 *m*
 - 8 *m*
 - 8925,1 *mm*
- El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:
 - 4,3 *dam*²
 - 21 *m*²
 - 40 *m*²
 - 1273057 *cm*²
- El área de un rectángulo de 10 *cm* de diagonal y 8 *cm* de base es:
 - 53 *cm*²
 - 80 *cm*²
 - 48 *cm*²
 - 62 *cm*²
- El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:
 - 45 *dm*
 - 181 *dm*
 - 126 *dm*
 - 200 *m*
- El área del círculo de radio 83,6 *m* mide aproximadamente:
 - 2,19 *hm*²
 - 234 *dam*²
 - 295413344 *cm*²
 - 0,2 *km*²
- La longitud de la semicircunferencia de radio 7,3 *cm* mide aproximadamente:
 - 0,3 *m*
 - 45,8 *cm*
 - 22,922 *cm*
 - 25,7 *cm*
- El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene como área:
 - 49 *cm*²
 - 48 *cm*²
 - 50 *cm*²
 - 48,37 *cm*²
- La longitud de la circunferencia de radio 4,6 *cm* mide aproximadamente:
 - 0,2 *m*
 - 30 *cm*
 - 28,9 *cm*
 - 25,7 *cm*
- La longitud del arco de circunferencia de radio 27,4 *m* que abarca un arco de 30° mide aproximadamente:
 - 28,6 *m*
 - 100 *cm*
 - 28,9 *cm*
 - 14,34 *m*

FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 6: GEOMETRÍA DEL PLANO Y EL ESPACIO

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. POLIEDROS

1. Investiga si los siguientes cuerpos son poliedros y, en caso afirmativo, si cumplen el teorema de *Euler*. Indica también si son cóncavos o convexos



2. Clasifica los siguientes poliedros



3. ¿Es posible construir un prisma cóncavo triangular? ¿Y un prisma cóncavo regular? Razona las respuestas.
4. Entre los poliedros regulares, ¿hay alguno que sea prisma? En caso afirmativo clasifícalo.
5. ¿Basta que un paralelepípedo tenga dos caras rectangulares para que sea un prisma recto?
6. Dibuja un prisma pentagonal regular y comprueba que cumple la relación de Euler.
7. Una caja tiene forma cúbica de 2 dm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?
8. ¿Hay alguna pirámide regular que sea poliedro regular? ¿Y pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un ejemplo y en caso negativo, justifica tus respuestas.
9. Dibuja una pirámide hexagonal regular y distingue la apotema de la pirámide del apotema de la base. Dibuja también su desarrollo.

2. ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN POLIEDRO

10. Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular regular sabiendo que las aristas de las bases miden 2 cm y cada arista lateral 8 cm.
11. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 63 m^2 y tiene 7 m de altura. Calcula el perímetro de la base.
12. El lado de la base de una pirámide hexagonal regular es de 6 cm y la altura de la pirámide 10 cm. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.
13. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 4 y 7 dm y que la altura de cada cara lateral es de 8 dm.
14. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular, de 4 cm de lado de la base, es 104 cm^2 , calcula la apotema de la pirámide y su altura.

3. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

15. Una columna cilíndrica tiene 76 cm de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?
16. El radio de la base de un cilindro es de 38 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.
17. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 50 dm y su radio de la base 30 dm.
18. La circunferencia de la base de un cono mide 6, 25 m y su generatriz 8 m. Calcula el área total.
19. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula: a) la longitud de la circunferencia máxima; b) el área de la esfera.

4. VOLUMEN DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

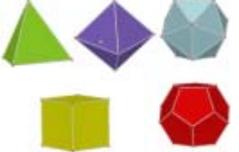
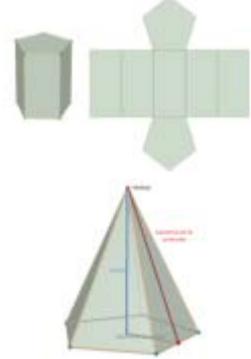
20. Calcula el volumen de un prisma recto de 12 dm de altura cuya base es un hexágono de 4 dm de lado.
21. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.
22. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.
 - a. ¿Cuál es, en dm^3 , el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).
 - b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?
23. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 5 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 10 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 10 dm de altura y 5 dm de radio de la base.

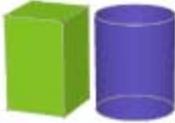
5. GLOBO TERRÁQUEO

24. Un avión recorre 20° en dirección Oeste a lo largo del Ecuador. Si llega a un punto cuya longitud es de 170° Este, ¿cuáles son las coordenadas del lugar de partida?
25. Juan sale de su casa y recorre 10 Km en dirección sur, 20 Km hacia el este y 10 Km hacia el norte. Si se encuentra de nuevo en casa, ¿Dónde está situada su casa?
26. En la esfera terrestre, ¿qué paralelo mide más?, ¿qué meridiano mide más? Razona tus respuestas.
27. Busca las coordenadas geográficas del lugar en el que vives.



RESUMEN

<p>Poliedro. Elementos de un poliedro. Tipos de poliedros</p>	<p>Un poliedro es una región cerrada del espacio limitada por polígonos. Sus principales elementos son: caras, aristas, vértices, ángulos diedros y poliedros, así como las diagonales.</p> <p>Los poliedros pueden ser cóncavos y convexos dependiendo de que alguna de sus caras sea un polígono cóncavo o ninguna lo sea.</p> <p>Entre los poliedros destacan poliedros regulares, prismas y pirámides.</p>	
<p>Teorema de Euler:</p>	<p>En todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2.</p>	$C + V = A + 2$
<p>Poliedros regulares</p>	<p>Un poliedro regular es un poliedro que tiene todas sus caras polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro</p>	
<p>Prismas y pirámides</p>	<p>Un prisma es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.</p> <p>Destacan los paralelepípedos que son prismas con todas sus caras paralelogramos y dentro de éstos los ortoedros que son paralelepípedos con todas sus caras rectangulares</p> <p>Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común, como lados tiene la base.</p>	
<p>Áreas lateral y total de un prisma</p>	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2 Área_{Base}$	
<p>Áreas lateral y total de una pirámide regular</p>	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$	
<p>Cuerpos de revolución</p>	<p>Entre los cuerpos de revolución destacan cilindros, conos y esferas.</p>	
<p>Áreas lateral y total de un cilindro</p>	$A_{Lateral} = 2 \pi R H$ $A_{total} = 2 \pi R H + 2 \pi R^2$	

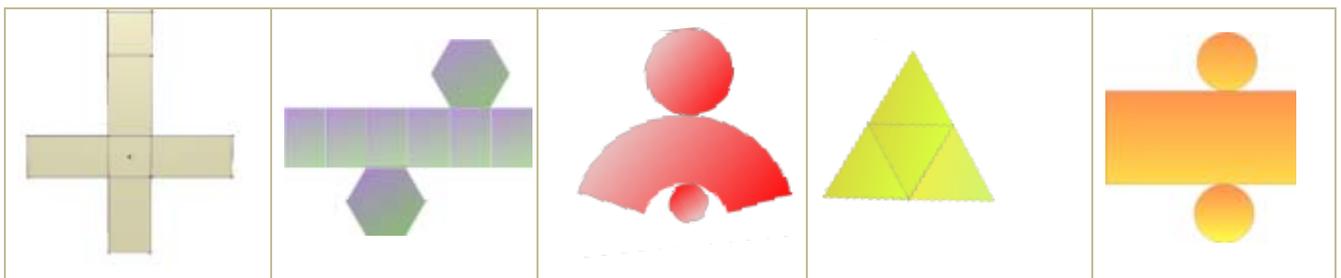
Áreas lateral y total de un cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Área total de una esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$	
Volumen de un prisma y de un cilindro	$Volumen = \text{Área}_{base} \cdot \text{Altura}$	
Volumen de una pirámide y de un cono	$Volumen = \frac{\text{Área}_{base} \cdot \text{Altura}}{3}$	
Volumen de una esfera	$Volumen = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Coordenadas geográficas	<p>Latitud: Distancia del punto geográfico al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por el punto.</p> <p>Longitud: Distancia del punto geográfico al meridiano cero o de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.</p>	
Husos horarios	<p>Cada huso horario es una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15° de longitud.</p>	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.
- ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?
- ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?
- Dibuja un prisma regular de base cuadrada y señala: a) dos aristas que sean paralelas, b) dos aristas que sean perpendiculares y coplanarias, c) dos aristas perpendiculares y no coplanarias, d) dos caras paralelas, e) dos caras perpendiculares.
- Si un poliedro convexo tiene 16 vértices y 24 aristas, ¿cuántas caras tiene? ¿Podría ser una pirámide? ¿Y un prisma?
- Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?
- De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?
- Clasifica los siguientes cuerpos geométricos e indica, cuando sean poliedros, el número de vértices, caras y aristas que tienen. ¿Cuáles cumplen el teorema de Euler?



- Describe la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo. ¿Es suficiente que un paralelepípedo tenga dos caras paralelas rectangulares para que sea un ortoedro?
- Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:



- Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.
- Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 4 cm de arista basal y 1 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.
- Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.
- Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3,5 dm, 8,2 dm y 75 cm.

15. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 8 m de altura y 5 cm de radio de la base.
16. Calcula el área total de una esfera de 5 cm de radio.
17. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 120 m^2 y su base es un hexágono de 5 m de lado.
18. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 32 dm y la altura de la pirámide es de 4 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.
19. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
20. Tres bolas de metal de radios 12 dm, 0,3 m y 4 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?
21. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,20 m de diámetro y 20 metros de profundidad?
22. ¿Cuánto cartón necesitaremos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 10 cm y que su altura sea de 25 cm?



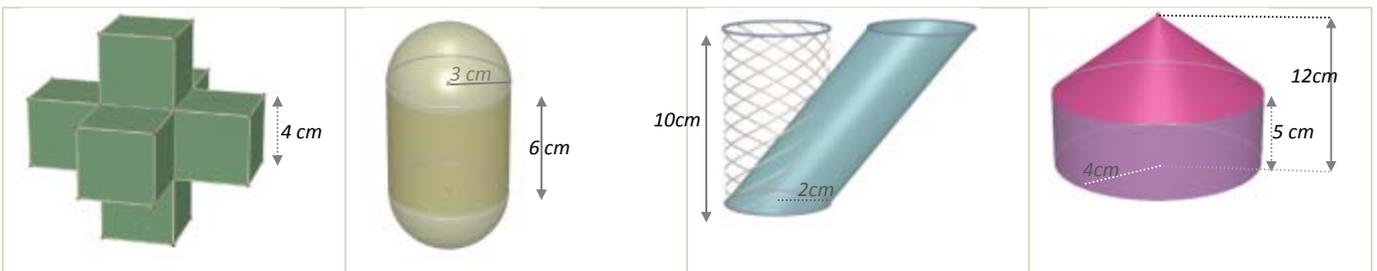
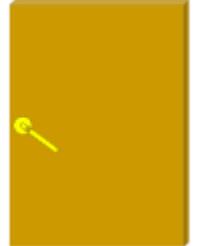
23. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm^3 de volumen.
24. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,20 m de alto y 248 dm^3 de volumen?
25. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?



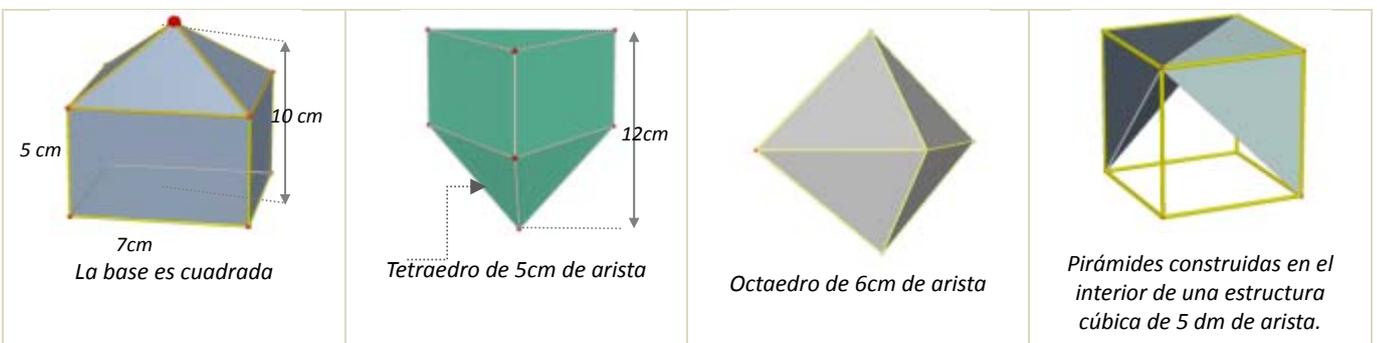
26. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un [anillo](#) de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene 2 cm de arista.
27. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultó un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.
28. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.
29. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.
30. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 3, 5 y 7. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 14,5 m.



31. Un ortoedro tiene 1 dm de altura y 6 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?
32. Si el volumen de un cilindro de 10 cm de altura es de 314 cm^3 , calcula el radio de la base del cilindro. (Utiliza 3,14 como valor de π).
33. (CDI Madrid 2011) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3 . (Tomar $\pi=3,14$). b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?
34. (CDI Madrid 2012) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3 , el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.
35. Una circunferencia de longitud 2,24 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen. (Tomar $\pi=3,14$).
36. Una puerta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho y 4 cm de espesor. El precio de instalación es de 200 € y se cobra 6 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 300 € cada m^3 . A) Calcula el volumen de madera de una puerta. B) El coste de la madera de una puerta más su instalación. C) El coste del barnizado de cada puerta, si sólo se cobra el barnizado de las dos caras principales.
37. El agua contenida en un recipiente cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura llegará el agua?
38. Según Arquímedes ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 5 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.
39. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que una circunferencia máxima mide 31,40 m?
40. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

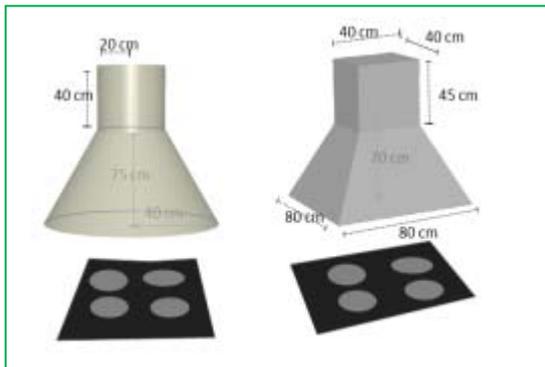
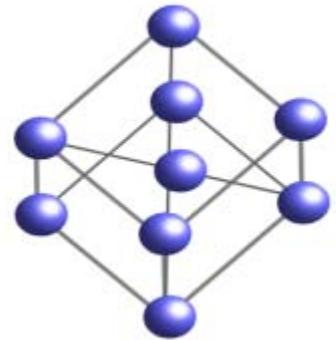


41. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



42. En la construcción de un globo aerostático de radio de 2,5 m se emplea lona que tiene un coste de 300 €/ m^2 . Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

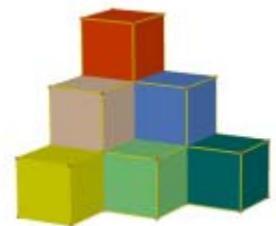
43. Calcula el radio de una esfera que tiene $33,51 \text{ dm}^3$ de volumen.
44. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?
45. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de $2\text{€}/\text{dm}^2$, ¿cuánto dinero ha costado en total?
46. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.
- ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?
 - ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/m^2 ?



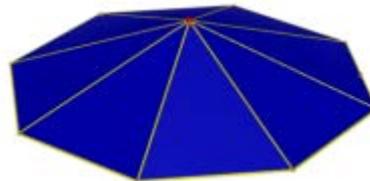
47. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquiera tiene un coste de acero inoxidable menor?
48. En una vasija cilíndrica de 8 dm de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,3 metros el nivel del agua?
49. El precio de las tejas es de $14,30 \text{ €/m}^2$. ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura y 8

metros de lado de la base?

50. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?
51. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?
52. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1,5 cm y la altura total es de 15 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.
53. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 50 cm de altura y bases de radios 20 y 30 cm. Calcula su superficie.
54. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio y 40 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.
55. Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de 120° y radio 20 cm. Calcula el volumen del cono resultante.



56. Un embudo cónico de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad, ¿cuál será su altura?
57. En un depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de un cuarto de hora?
58. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura y 45 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué espacio de sombra determina?
59. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 56 litros de agua. Si tiene 48 cm de largo y 36 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?
60. Un rectángulo de 1 m de base y 10 m de altura gira 360° alrededor de una recta paralela a la altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula la superficie y el volumen del cuerpo que resulta.
61. En un helado de cucurucho la galleta tiene 15 cm de altura y 5 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos gramos de helado contiene?



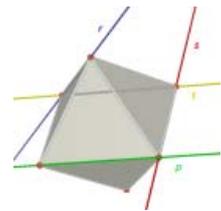
Husos horarios

62. ¿Qué diferencia de longitud existe entre dos ciudades si la diferencia horaria entre ambas es de 5 horas? ¿Podemos saber si existe diferencia entre sus latitudes?
63. Un avión emprende viaje hacia una ciudad situada al oeste de Madrid. El viaje dura 10 horas y su rumbo mantiene en todo momento la latitud de partida. Si la diferencia de longitud entre Madrid y la ciudad de llegada es de 45° y el avión despegó del aeropuerto Adolfo Suárez a las 9 de la mañana. ¿A qué hora local aterrizará en la ciudad de destino?
64. La distancia entre Londres y Pekín es de 8149 Km y la distancia entre Londres y Sao Paulo es de 9508 Km, sin embargo en Pekín el reloj marca 7 horas más que en Londres y en Sao Paulo 3 horas menos que en Londres. ¿Cómo explicas esta diferencia?

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0°	$51^\circ 30'$ latitud N
PEKIN	116° longitud E	40° latitud N
SAO PAULO	$46^\circ 30'$ de longitud W	$23^\circ 30'$ de latitud S

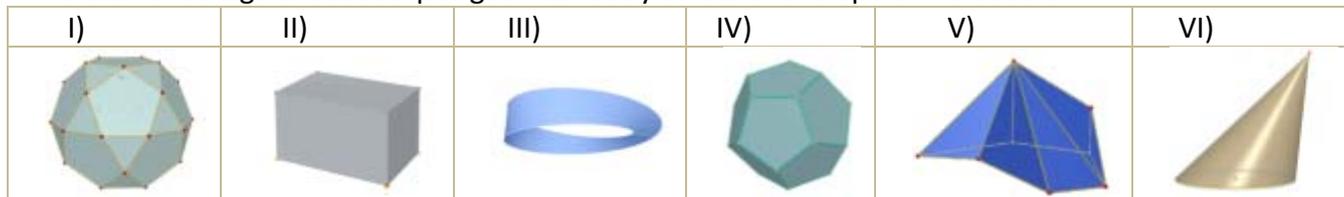
AUTOEVALUACIÓN

1. Cada una de las rectas r , s , t y p pasa por dos vértices consecutivos de un octaedro tal como se observa en la figura. Señala qué afirmación de las siguientes es verdadera:



- a) Las rectas r y s son coplanarias y secantes. b) Las rectas t y p no son coplanarias.
c) Las rectas r y p se cruzan. d) r y s contienen aristas de una misma cara del octaedro

2. Observa los siguientes cuerpos geométricos y selecciona la opción verdadera:



- a) Los cuerpos I), II), IV) y V) cumplen la relación de Euler. b) . Hay dos cuerpos de revolución III) y VI).
c) Son poliedros regulares II) y IV). d) Son cóncavos I) y V).

3. Si la altura de un prisma de base cuadrada es 10 cm y el lado de la base es 4 cm, su área total es:

- a) 160 cm^2 b) 320 cm^2 c) 400 cm^2 d) 192 cm^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. Si sólo contiene las tres cuartas partes de su capacidad, el número aproximado de litros de agua que hay en él es:

- a) 13000 L b) 9750 L c) 3750 L d) 3520 L

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura y 80 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, en total se utilizarán:

- a) 38 tejas b) 76 tejas c) 72 tejas d) 36 tejas

6. Una caja de dimensiones $30 \times 20 \times 15 \text{ cm}$, está llena de cubos de 1 cm de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 cm de lado, la altura medirá:

- a) 55 cm b) 65 cm c) 75 cm d) 90 cm

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

- a) $5\sqrt{3} \text{ dm}$ b) $\sqrt[3]{75} \text{ dm}$ c) 150 cm d) $\sqrt[3]{2250} \text{ cm}$

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

- a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. El área lateral de un tronco de cono que tiene 20 cm de altura y bases de radios 30 y 15 cm, es:

- a) $2250 \pi \text{ cm}^2$ b) $900 \pi \text{ cm}^2$ c) $1125 \pi \text{ cm}^2$ d) $450 \pi \text{ cm}^2$

10. A partir de las coordenadas geográficas de las ciudades A, B, C deduce qué afirmación es correcta

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
A	15° E	15° N
B	15° W	15° N
C	15° E	15° S

- a) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas menos.
b) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas más.
c) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas más.
d) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas menos.

FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 7: ESTADÍSTICA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LA TOMA DE DATOS

- Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elige 10 compañeros al azar y anota en tu cuaderno cuántas monedas lleva cada uno.
 - ¿Cuál es la población objeto del estudio?
 - ¿Cuál es la muestra elegida?
 - Especifica 5 individuos que pertenezcan a la población y no a la muestra.
- Clasifica en variables cualitativas y cuantitativas las que aparecen en el primer ejemplo de esta sección. Para las cuantitativas indica si son continuas o discretas.

2. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

- Completa los datos que faltan en la tabla.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0'05	2	0'05
13	4	0'1	6	0'15
16			16	0'4
19	15			
22	6	0'15	37	0'925
25				

- Completa los datos que faltan en la tabla.

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
$[0, 10[$	60		60
$[10, 20[$		0'4	
$[20, 30[$	30		170
$[30, 40[$		0'1	
$[40, 50]$			200

5. Clasifica las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas, y estas últimas como continuas o discretas.
- Intención de voto de un partido
 - Número de correos electrónicos que recibes en un mes.
 - Número de calzados.
 - Número de kilómetros recorridos en fin de semana.
 - Marcas de cerveza
 - Número de empleados de una empresa
 - Altura
 - Temperatura de un enfermo.

6. Muchas personas que invierten en bolsa lo hacen para conseguir beneficios rápidos, por ello el tiempo que mantienen las acciones es relativamente breve. Preguntada una muestra de 40 inversores habituales sobre el tiempo en meses que han mantenido sus últimas inversiones se recogieron los siguientes datos:

10'5 11'2 9'9 15'0 11'4 12'7 16'5 10'1 12'7 11'4 11'6 6'2 7'9 8'3 10'9
 8'1 3'8 10'5 11'7 8'4 12'5 11'2 9'1 10'4 9'1 13'4 12'3 5'9 11'4 8'8
 7'4 8'6 13'6 14'7 11'5 11'5 10'9 9'8 12'9 9'9

Construye una tabla de frecuencias que recoja esta información y haz alguna representación gráfica.

7. Investigados los precios por habitación de 50 hoteles de una provincia se han obtenido los siguientes resultados.

70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120
 80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50 30 40 70 40 70 50 40 70 100
 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

Determinar:

- Distribución de frecuencia de los precios, sin agrupar y agrupando en 5 intervalos de la misma amplitud.
 - Porcentaje de hoteles con precio superior a 75.
 - ¿Cuántos hoteles tienen un precio mayor o igual que 50 pero menor o igual a 100?
 - Representa gráficamente las distribuciones del apartado a).
8. El gobierno desea saber si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello se ha encuestado a 50 familias respecto al número de hijos y se ha obtenido los datos siguientes.

2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3
 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

- Construye la tabla de frecuencias con estos datos.
- ¿Cuántas familias tienen exactamente 3 hijos?
- ¿Qué porcentaje de familias tienen exactamente 3 hijos?
- ¿Qué porcentaje de familias de la muestra tiene más de dos hijos? ¿Y menos de tres?
- Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias no acumuladas.
- Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias acumuladas.

9. En un hospital se desea hacer un estudio sobre los pesos de los recién nacidos. Para ello se recogen los datos de los 40 bebés y se tiene:

3'2 3'7 4'2 4'6 3'7 3'0 2'9 3'1 3'0 4'5 4'1 3'8 3'9 3'6 3'2 3'5 3'0
 2'5 2'7 2'8 3'0 4'0 4'5 3'5 3'5 3'6 2'9 3'2 4'2 4'3 4'1 4'6 4'2 4'5
 4'3 3'2 3'7 2'9 3'1 3'5

- a) Construye la tabla de frecuencias.
- b) Si sabemos que los bebés que pesan menos de 3 kilos lo hacen prematuramente ¿Qué porcentaje de niños prematuros han nacido entre estos 40?
- c) Normalmente los niños que nacen prematuros que pesan más de 3 kilos y medio no necesitan estar en incubadora. ¿Puedes decir que porcentaje de niños están en esta situación?
- d) Representa gráficamente la información recibida.
10. En una finca de vecinos de Benicasim, se reúnen la comunidad de vecinos para ver si contratan a una persona para que les lleve la contabilidad. El resultado de la votación es el siguiente: 25 vecinos a favor de la contratación, 15 vecinos en contra y 5 vecinos se abstienen. Representa la información mediante un diagrama de sectores
11. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos en mm son:

74'001 74'003 74'015 74'000 74'005 74'002 74'005 74'004

Calcula la media y la mediana de estos datos. Calcula también la varianza, la desviación típica y el rango de la muestra.

12. Dada la distribución de datos 38432 384343 38436 38438 38440 con frecuencias 4, 8, 4, 3, 8, halla la media de la distribución.
13. La distribución de los salarios en la industria turística española es la que figura en la tabla. Calcula:
- a) El salario medio por trabajador (marcas de clase del último intervalo 20000)
- b) El salario más frecuente.
- c) El salario tal que la mitad de los restantes sea inferior a él.

$[l_i, L_i[$	n_i
$[0, 1500[$	2145
$[1500, 2000[$	1520
$[2000, 2500[$	840
$[2500, 3000[$	955
$[3000, 3500[$	1110
$[3500, 4000[$	2342
$[4000, 5000[$	610
$[5000, 10000[$	328
≥ 10000	150

14. Calcula la mediana, la moda, primer y tercer cuartil y nonagésimo percentil de la distribución:

x_i	n_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

15. Se han diseñado dos unidades gemelas de plantas pilotos y han sido puestas en funcionamiento en un determinado proceso. Los resultados de los diez primeros balances en cada una de las unidades han sido los siguientes:

Unidad A	97'8	98'9	101'2	98'8	102'0	99'0	99'1	100'8	100'9	100'5
Unidad B	97'2	100'5	98'2	98'3	97'5	99'9	97'9	96'8	97'4	97'2

a) Haz una representación gráfica de estas muestras.

b) Determina las medias y las varianzas.

16. En cierto barrio se ha encontrado que las familias residentes se han distribuido, según su composición de la forma siguiente:

Composición	Nº de familias
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

a) ¿Cuál es el número medio de personas por familia?

b) ¿Cuál es el tamaño de la familia más frecuente?

c) Si solo hubiera plazas de aparcamiento para el 75 % de las familias y estas se atendieran por familias de mayor tamaño a menor, ¿qué componentes tendría que tener una familia para entrar en el cupo?

d) Número de miembros que tienen como máximo el 85 % de las familias.

17. Al lanzar 200 veces un dado se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	a	32	35	33	b	35

Halla la mediana y la moda de la distribución, sabiendo que la media aritmética es 3'6.

18. Los siguientes datos son medidas de la capacidad craneal de un grupo de homínidos:

84, 49, 61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

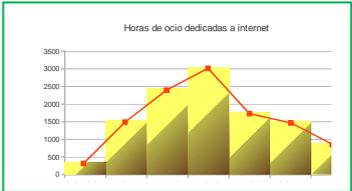
- Calcula la media y la mediana muestrales.
- Halla los cuartiles primero y tercero.
- Halla los percentiles cincuenta y noventa.
- Calcula el rango muestral.
- Calcula la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

19. Los siguientes datos proceden de un estudio de contaminación del aire.

6'5 2'1 4'4 4'7 5'3 2'6 4'7 3'0 4'9 8'6 5'0 4'9 4'0 3'4 5'6 4'7 2'7
 2'4 2'7 2'2 5'2 5'3 4'7 6'8 4'1 5'3 7'6 2'4 2'1 4'6 4'3 3'0 4'1 6'1
 4'2

- Construye un histograma.
- Determina los cuartiles.
- Calcula la media y la desviación típica.

RESUMEN

Población	Colectivo sobre el que se hace el estudio	Estudiantes de todo Madrid
Muestra	Subconjunto de la población que permita obtener características de la población complete.	Alumnos se 3º de ESO seleccionados
Individuo	Cada uno de los elementos de la población o muestra	Juan Pérez
Variabes estadística	Cuantitativa discreta Cuantitativa continua Cualitativa	Número de pie que calza Estatura Deporte que practica
Gráficos estadísticos	Diagrama de barras Histograma de frecuencias Polígono de frecuencias Diagrama de sectores	 
Media	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$ $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{n}$	Con los datos: 8, 2, 5, 10 y 10 $Media = 35/5 = 7$ $\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{50} = \frac{126}{50} = 2,52$
Moda	Es el valor más frecuente	$Mo = 10$
Mediana	Deja por debajo la mitad	$4 < 6 < \mathbf{8} < 10 = 10. Me = 8.$
Rango o recorrido	Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.	$10 - 2 = 8$
Desviación media	Es la media de las distancias de los datos a la media de los datos de los que dispongamos.	$(8-7 + 2-7 + 5-7 + 10-7 + 10-7)/5 = (1+5+2+3+3)/5 = 14/5 = DM$
Varianza	Es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media:	$V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9,4$
	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - m^2$ $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i)^2 \cdot f_i}{n} - \bar{x}^2$	
Desviación típica	Es la raíz cuadrada de la varianza=	$\sigma = \sqrt{47/5} = 3,06$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se han recogido los datos sobre el número de hijos que tienen 20 matrimonios. ¿Cómo es la variable utilizada? Escribe una tabla de frecuencias de los datos recogidos y representa los datos en un diagrama de sectores:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Con los datos del problema anterior calcula la media, la mediana, la moda y los cuartiles.
 3. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el intervalo intercuartílico.
 4. Representa esos datos en un diagrama de cajas.
 5. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talla	1,50 – 1,56	1,56 – 1,62	1,62 – 1,68	1,68 - 1,74	1,74 - 1,80	1,80-1,92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

- a) Representa los datos en un histograma.
 b) Calcula la media y la desviación típica.
 c) Determina el intervalo donde se encuentran la mediana.
6. Se pregunta a un grupo de personas por el número de televisores que hay en su hogar y los resultados son:

Número de televisores	0	1	2	3	4	5
Número de hogares	2	27	15	4	2	1

¿Qué tipo de variables es? Representa los datos en la representación que te parezca más adecuada.

Calcula la media y la desviación típica-

7. Con los datos del problema anterior calcula la mediana y el intervalo intercuartílico.
 8. En un centro escolar se ha recogido información sobre el número de ordenadores en las casas de 100 familias y se han obtenido los siguientes resultados:

Número ordenadores	0	1	2	3	4
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa los datos en un diagrama de barras y calcula la media, la mediana y la moda.

9. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica. Haz un diagrama de cajas.
 10. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Representa los datos en un diagrama de sectores y calcula la media, la mediana y la moda.

11. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	1	2	3	4	5
Número de personas:	13	18	7	5	7

Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

12. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristianos; S: socialistas; L: Liberales; V: verdes; C: conservadores; I: izquierda unitaria; LD: Libertad y democracia; NI: No inscritos; Otros).

Partidos	DM	S	L	V	C	I	LD	NI	Otros	Total
Escaños	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla?

13. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por alguno de los estados miembro:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Polonia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Otros	Total
Escaños	96	54	74	73	51	73	21	21		751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Determina el número de escaños de los otros países miembros de la Unión Europea.

14. En las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Ordena a los países de mayor a menos porcentaje de votantes en las elecciones de 2014.

15. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004' 2009' 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Representa en un polígono de frecuencias los porcentajes de participación del total de los estados miembros.

16. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Separa los Estados Miembros en dos grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al porcentaje medio y los que lo tuvieron menor en 2004. Haz lo mismo para 2014. ¿Son los mismos? Analiza el resultado.

17. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Calcula el porcentaje de participación medio para Alemania en esas tres convocatorias y la desviación típica. Lo mismo para España, para Bélgica y para Portugal.

18. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en blanco
35.379.097	15.920.815	19.458.282	290.189	357.339

Representa en un diagrama de sectores estos datos. Haz una tabla de porcentajes: el censo es el 100 %. Determina los otros porcentajes. ¿Consideras que ha ganado la abstención?

19. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

PP	PSOE	Izquierda plural	Podemos	UPyD	Otros	Total de votantes
4.074.363	8.001.754	1.562.567	1.245.948	1.015.994		15.920.815

Determina el número de votos de los otros partidos. Representa en un diagrama de barras estos datos. Haz una tabla de porcentajes para cada partido. Tienes que distribuir 54 escaños, ¿cómo los distribuirías por partidos?

20. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m³ durante 10 semanas, en un municipio pequeño:

25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6

Calcula:

- Las medidas de **centralización**: la media, mediana, moda
- Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.
- Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

21. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 100 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10

- Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
- Representa los datos en un diagrama de barras, otro de líneas y uno de sectores.
- Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.
- Calcula la media y la desviación típica.
- Calcula la mediana y los cuartiles.

22. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

- Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
- Calcula la media, la mediana y la moda.

23. Se ha preguntado a 50 estudiantes de un curso por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido:

Número de hermanos	0	1	2	3	4	5	6 o más
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1

- Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un diagrama de líneas de frecuencias relativas, y en un diagrama de sectores.
- Haz un histograma.
- Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula los cuartiles.
- Calcula la varianza, la desviación típica, el recorrido y el intervalo intercuartílico.

Utiliza una hoja de cálculo con el ordenador

Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula, utilizando Excel u otra hoja de cálculo:

24. Parámetros estadísticos

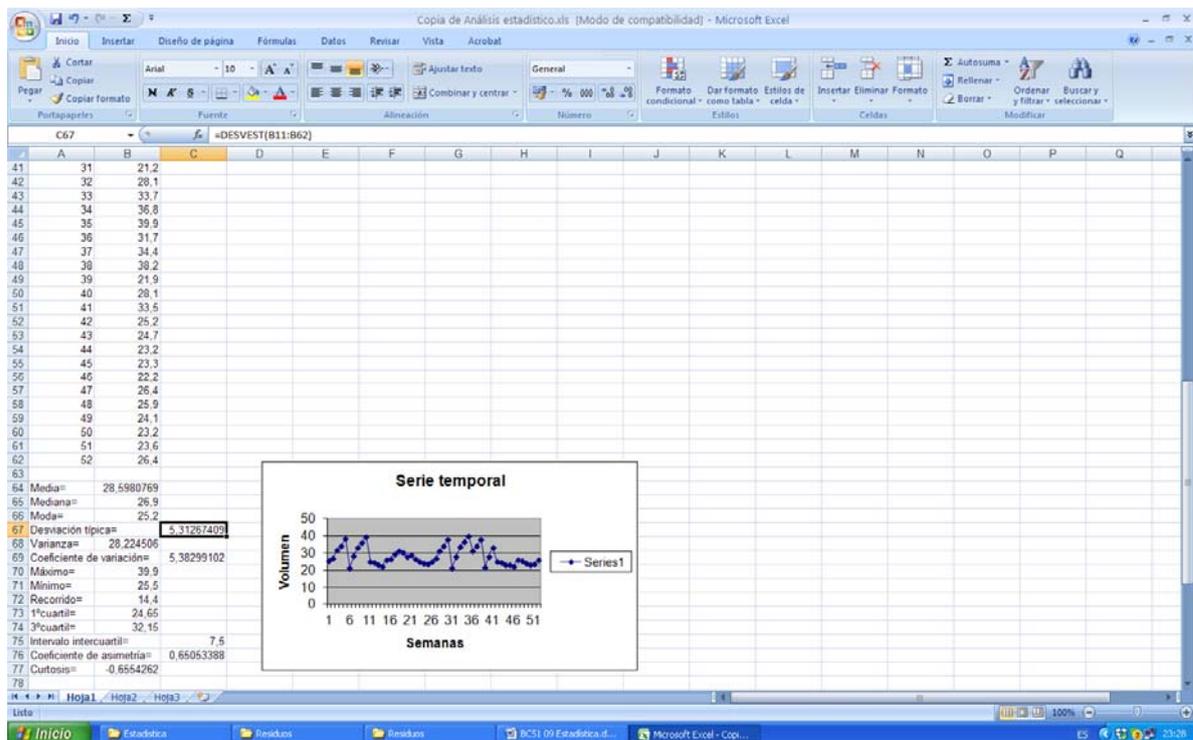
- Las medidas de centralización: la media, mediana, moda
- Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.
- Otros coeficientes: coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis que encuentres. Investiga las posibilidades del ordenador para obtener parámetros estadísticos.
- Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

Para ello, escribe en la casilla A12, 1, en A13, 2, y arrastra para escribir el orden de las semanas, hasta que aparezca el 52. Escribe en la columna B el volumen recogido cada semana.

En la casilla A11 un título, por ejemplo, "Residuos sólidos".

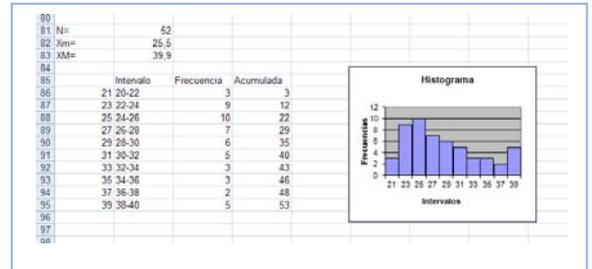
En la casilla C12 escribe Media, y en la casilla D12 calcúlala usando la función PROMEDIO. De igual forma calcula los otros parámetros.

Observa un trozo de pantalla con algunos resultados:



25. Los datos de la práctica anterior se quieren representar en un **histograma** para mejor determinar su distribución. Para ello:

- a) Indica el número total de datos, N , el menor valor: X_m , el mayor valor, X_M , y el recorrido R .
- b) La cantidad de barras del histograma, k , se suele tomar, para menos de 50 datos, entre 5 y 7. Para N entre 50 y 100, entre 6 y 10. Para N entre 100 y 250, entre 7 y 12. Y para N mayor de 250, entre 10 y 20. En este caso N es igual a 52, luego el número de barras podría ser entre 6 y 10. Al dividir R entre 10 se obtiene 1,87 que sería el intervalo de clase. Para facilitar la división en clases fijamos el intervalo de clase, h , en 2, y el número de barras, k , en 10. Para no tener valores en los límites de clase tomamos el inicio del primer intervalo en 20. Así, los intervalos son: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ahora ya se puede construir la tabla de frecuencias y dibujar el histograma.



- c) Calcula y representa en el histograma los puntos m , $m \pm s$, $m \pm 2s$, $m \pm 3s$, donde m y s son la media y la desviación típica, respectivamente

✚ Vamos a investigar qué ocurre al hacer un cambio de variables. Dijimos que si consideramos $y_i = a + bx_i$ siendo a y b dos constantes cualesquiera, la nueva media aritmética quedaría $\bar{y} = a + b\bar{x}$.

- a) Abre Excel. Introduce los datos: $X = 255, 271, 318, 342, 389, \dots$ en la columna A, a partir de la fila 11. ¿Qué cambio de variable se ha hecho? Observa: $x = X/10$.
- b) En la columna C, a partir de la fila 11 escribe los límites de clase, en la columna D el valor medio, en la columna E vamos a contar las frecuencias absolutas y en la columna F las frecuencias acumuladas. Utiliza la función CONTAR.SI para contar. Por ejemplo, escribe en E11, CONTAR.SI(A11:A63; <220). En F11 escribe =E11. En E12 escribe CONTAR.SI(A11:A63; <240)-F11. Completa la tabla de frecuencias. Escribe títulos en la fila 10.
- c) Calcula la media y la desviación típica. Para ello escribe en la fila 3 y 4, columna B, las funciones =PROMEDIO(A11:A63) y =DESVEST(A11:A63). Escribe los resultados con 2 decimales.
- d) ¿Cómo obtienes ahora la media y la desviación típica de los datos reales? ¿Cómo deshaces el cambio? Si no lo recuerdas, o no tienes seguridad, investigalo. Calcula la media y la desviación típica, antes y después del cambio. Escribe este resultado, en general, para un cambio de variables lineal $y = ax + b$.
- e) Dibuja el histograma. No olvides nunca indicar las unidades en ambos ejes, y toda la información que ayude a comprender el gráfico. Añade siempre el tamaño, N , y los valores de la media y la desviación típica.
- f) Discute el resultado. ¿Es grande la dispersión? La distribución, ¿es simétrica?

✚ Otra investigación: Vamos a investigar la distribución de la media. Para ello vamos a tomar muestras de tamaño 5. Utiliza la columna G. En G11 escribe =PROMEDIO(B11:B15), en G12 la media de B16 a B20, y así hasta el final. Tenemos calculadas las 10 medias de muestras de tamaño 5. Calcula la media y la desviación típica de estas medias. Compara con los resultados anteriores. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se hace un estudio sobre el color que prefieren los habitantes de un país para un coche. La variable utilizada es:

- a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

2. En un histograma de frecuencias la altura de los rectángulos es:

- a) proporcional al área b) igual a la frecuencia absoluta
c) proporcional a la frecuencia relativa d) proporcional a la frecuencia acumulada

3. Ana ha obtenido en Matemáticas las siguientes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 y 7. Su nota media es de:

- a) 7,6 b) 8,2 c) 8 d) 9

4. En las notas anteriores de Ana la mediana es:

- a) 9 b) 8 c) 7,5 d) 8,5

5. En las notas anteriores de Ana la moda es:

- a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 y 10

✚ Realizamos una prueba a 20 aspirantes a un puesto de grabador consistente en un dictado con cierto tiempo de duración (en minutos) y luego contar el número de errores cometidos al transcribirlo a ordenador. Los resultados fueron.

Tiempo	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errores	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

6. La media de errores es

- a) 6'75 b) 7 c) 7'9 d) 6'9

7. La media de tiempos es

- a) 6'75 b) 7 c) 7'9 d) 6'9

8. La desviación típica de errores es

- a) 1 b) 1'41 c) 1'33 d) 1'2

9. La desviación típica de tiempos es

- a) 1 b) 1'41 c) 1'33 d) 1'2

10. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los tiempos valen respectivamente:

- a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 5'9, 6'1 y 7'3 d) 6, 7 y 8

11. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los errores valen respectivamente:

- a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 6'5, 7'5 y 8'5 d) 6, 7 y 8

FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

CAPÍTULO 8: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
 - La superficie de las provincias españolas.
 - Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.
 - El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
 - Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
 - Saber si el próximo año es bisiesto.
- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: “Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar”.
- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: “Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no”.
- Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.
- En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.
- Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.
- Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.
- Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A .
- Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.
- En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso “sacar un as”.
- Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.
- Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?
- ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?
- Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.
- Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos A y B : $A = \text{sacar un as en la primera extracción}$, $\bar{A} = \text{no sacar as}$, y $B = \text{sacar un as en la segunda extracción}$, $\bar{B} = \text{no sacar as en la segunda extracción}$. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

16. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de “no salen 2 ases” y la de “no sale ningún as”.
17. En el experimento “sacar tres cartas seguidas”, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres ases? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.
18. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.
19. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda:* Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de no sacar ningún 6, y utilizar el suceso contrario.
20. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A) = 5/36$ (casos favorables: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B) = 8/36$ (casos favorables: (1, 3), (2, 4), ...). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \bar{B})$; $P(\bar{A} \cap B)$; $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\bar{B})$; $P(\bar{A}/B)$.
21. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0'6$.
22. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A , B y C . Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C . Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0'96$; $P(B) = 0'98$ y $P(C) = 0'99$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.
23. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0'3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.
24. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).
25. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0'27		0'56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0'58		1

- a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.
- b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.
- c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

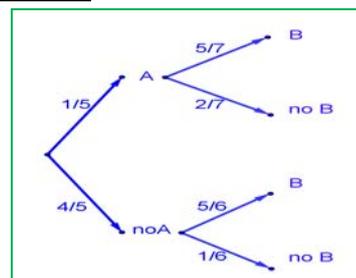
26. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.*

27. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No $A = \bar{A}$	
B	0'4	0'2	0'6
No $B = \bar{B}$	0'15	0'25	0'4
	0'55	0'45	1

28. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.

29. Tenemos dos urnas, A y B . La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A ?



30. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

- La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda:* $P(M/C)$
- La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda:* $P(\bar{M}/C)$.

Problemas propuestos en Selectividad

31. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda:* Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

32. Se tienen 3 cajas, A , B y C . La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es $113/360$.

33. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es $3/5$ y la de cruz es $2/5$. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

RESUMEN

Sucesos	<p>Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o sucesos posibles.</p> <p>Un suceso es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.</p>	<p>Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6}</p> <p>Suceso <i>obtener múltiplo de 3</i> = {3, 6}</p>
Asignación de probabilidades	<p>Una medida</p> <p>Límite al que tienden las frecuencias relativas.</p> <p>Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces:</p> $p = \text{casos favorables} / \text{casos posibles.}$	<p>$P(5) = 1/6.$</p> <p>$P(\text{sacar múltiplo de 3}) = 2/6$</p>
Axiomática de Kolmogorov	<ol style="list-style-type: none"> 1. $P(E) = 1.$ 2. $P(A) \geq 0,$ para todo $A.$ 3. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$ 	
Teoremas de Probabilidad	<p>Suceso contrario: $P(X) + P(\text{no}X) = 1.$</p> <p>Intersección: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A).$</p> <p>Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$</p>	<p>$P(\text{no } 5) = 1 - 1/6 = 5/6.$</p> <p>$P(5 \cup \text{múl. } 3) = 1/6 + 2/6 = 3/6$</p> <p>$P \text{ sacar primero un } 5 \text{ y luego múltiplo de } 3 = 1/6 \cdot 2/6 = 2/36$</p>
Teorema de Bayes	$P(A_i / B) = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B / A_k) \cdot P(A_k)}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?
- Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.
- En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.
- Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.
- Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.
- Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.
- Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, sea 12.
- ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!
- Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso “Salga cara y un número par”. B al suceso “Salga cruz y un número primo” y C al suceso “salga un número primo”. Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.
- Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.
- Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.
- Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.
- Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.
15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.
16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.
17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.
18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?
19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

AUTOEVALUACIÓN

- Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:
a) $5/6$ b) $11/36$ c) $25/36$ d) $30/36$
- Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:
a) $1/2$ b) $3/4$ c) $3/8$ d) $5/8$
- Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:
a) $1/2$ b) $3/4$ c) $3/8$ d) $5/8$
- Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:
a) $22/40$ b) $19/40$ c) $36/40$ d) $3/4$
- Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:
a) $P(A) + P(\text{no}A) = 1$
b) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento “tirar dos monedas y contar el número de caras” es:
a) $\{2C, 1C, 0C\}$ b) $\{CC, CX, XC, XX\}$ c) $\{XX, XC, CC\}$ d) $\{CC, CX, XC, CC\}$
- Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:
a) $1/6$ b) $7/36$ c) $5/36$ d) $3/36$
- Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:
a) $14/40$ b) $13/40$ c) $12/40$ d) $15/40$
- En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es:
a) $49/100$ b) $42/100$ c) $49/90$ d) $7/15$
- Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es:
a) $1/5$ b) $1/7$ c) $1/8$ d) $1/6$