FORMACIÓN PROFESIONAL BÁSICA

MATEMÁTICAS II

AUTOR: DAVID MIRANDA SUÁREZ

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0

Textos Marea Verde

ÍNDICE

Formación Profesional Básica
Matemáticas II
Capítulo 1: Expresiones algebraicas y polinomios

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

CAPÍTULO 3. Expresiones algebraicas. Polinomios. Identidades notables. de **4º A ESO** de autor: **Eduardo Cuchillo Ibáñez**.

ÍNDICE

Resumen

En Babilonia ya utilizaban el Álgebra, pero los egipcios y los griegos la trataban utilizando la Geometría. Los árabes recogieron el saber antiguo de Oriente y Occidente y trajeron el Álgebra a Europa. La palabra "*álgebra*" en árabe significa "*restaurar*" y en el Quijote aparecen algebristas que restauraban los huesos rotos. En el siglo XIII, *Fibonacci*, (Leonardo de Pisa) viajó y contactó con matemáticos árabes e hindúes. Su libro, *Liber abaci*, puede ser considerado el primer libro de Álgebra europeo. En el Renacimiento italiano ya hubo grandes algebristas que se ocupaban, principalmente, de la resolución de ecuaciones.

Luego, el punto de vista cambió. El *Álgebra Moderna* se ocupa de las estructuras algebraicas, que viene a ser el encontrar las propiedades comunes que puedan tener distintos conjuntos, como por ejemplo, encontrar similitudes entre los números enteros, que ya conoces, y los polinomios que vamos a trabajar en este capítulo.

Hoy los ordenadores son capaces de trabajar con expresiones algebraicas.

1. INTRODUCCIÓN. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Llamaremos **expresión algebraica** a cualquier expresión matemática que se construya con números reales, letras y las operaciones matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación y/o división.

En una expresión algebraica puede haber datos no concretados; unas veces deberemos obtener los valores que "resuelven" la expresión, y en otras, como la fórmula del área del triángulo, se verifican para cualquier valor. Según el contexto, recibirán el nombre de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, ***incógnita***, entre otros.

Si en una expresión algebraica no hay *variables*, dicha expresión no es más que un número real.

Al fijar un valor concreto para cada *indeterminada* de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas.

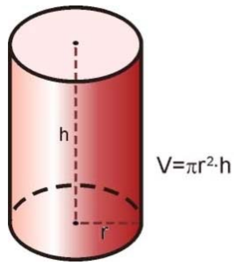
El **valor numérico** de una expresión algebraica es el que se obtiene al sustituir las letras de esa expresión por determinados valores.

Ejemplo:

- El volumen de un cilindro viene dado por la expresión algebraica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a: $\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \quad cm^3$



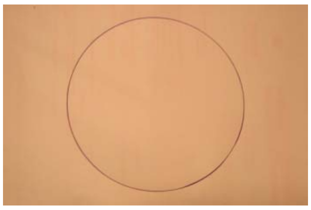
- El valor de la expresión 2*a* + 5 para el caso concreto de *a* igual a 3 lo calculamos sustituyendo *a* por 3. Así resulta 2 · 3 + 5 = 11, y se dice que el valor numérico de 2*a* + 5 para *a* = 3 es 11.

- Si en la expresión $7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$ particularizamos las tres variables con los valores $x = 4$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$ surge el número real

$$7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{1/2} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z = 0$.

Actividades propuestas



1. Escribe la expresión algebraica que nos proporciona el área de un círculo.
2. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera: *x* e *y*:

   a) La mitad del opuesto de su suma.

   b) La suma de sus cubos

   c) El cubo de su suma

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

d) El inverso de su suma

e) La suma de sus inversos

3. Traduce a un enunciado en lenguaje natural las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x + 4$ b) $x/3 - x^3$ c) $(x^3 + y^3 + z^3)/3$ d) $(x^2 - y^2) / (x - y)^2$

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 15 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta.

5. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 15 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

6. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o los valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

7. Indica en cada caso el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

b) $x = 2$, $y = 0$, $z = 5$

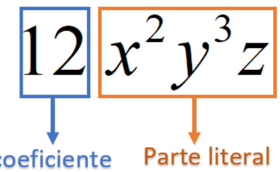
c) $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos son los **monomios**.

Un **monomio** viene dado por el producto de números reales y variables (o indeterminadas). Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la **parte literal**, indeterminada o indeterminadas.



Ejemplos:

- La expresión que nos proporciona el doble de una cantidad, 2·*x*, es un monomio con una única variable, *x*, y coeficiente 2.
- El volumen de un cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente π. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- La expresión $7xy^2 + 3xy + 2x$ está formada por tres términos, tres monomios, cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primero, $7xy^2$, el coeficiente es 7 y la parte literal $x\,y^2$

  El segundo, $3xy$, tiene por coeficiente 3 y parte literal $x \cdot y$

  Y en el tercero, $2x$, el coeficiente es 2 y la parte literal *x.*

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

Por ejemplo:

- Son monomios semejantes: $7xy^3$ y $3xy^3$.

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, adjudicaremos un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.

Ejemplos:

- $3 \cdot x$ es un monomio de grado 1 en la variable *x*.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ es un monomio de grado 5 en x e y.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ es un monomio de grado 4 en x, y y z.

Un número real puede ser considerado como un monomio de grado 0.

Actividades propuestas

8. Indica el coeficiente y la parte literal de las siguientes monomios:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios.

El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ es un polinomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Diremos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Un polinomio está **ordenado** si sus monomios están escritos de menor a mayor grado o viceversa.

Un polinomio es **completo** si están los monomios de todos los grados, sin coeficientes nulos.

Ejemplos:

- $-8x^4 + \frac{1}{4}x^2 + 23$ es un polinomio de grado 4 en la variable x. Está ordenado y no es completo.
- $7y^3 + 4y - 9$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y. Está ordenado y no es completo.
- $z^2 - 6z + 8$ es un polinomio de grado 2 en z. Además, es un polinomio mónico, ordenado y completo.
- $5x + 2$ es un polinomio de grado 1 en x. Además, es un polinomio ordenado y completo.

Valor numérico de un polinomio

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real: el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotamos por , y leemos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o indistintamente. De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real. En ese caso a $y = p(x)$ decimos que es una función polinómica.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número
  - $p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$
- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es
  - $q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$
- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta el número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios, con la misma indeterminada, procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Para sumar monomios: se suman los coeficientes y se deja la misma parte literal.

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio
  - $$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$ $$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$
- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$
- $5abx^2 + 3abx - 2abx^2 - 4abx + 3abx^2 = (5abx^2 - 2abx^2 + 3abx^2) + (3abx - 4abx) = 6\,abx^2 - abx$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rl} & 4x^5+2x^4+x^3-5x^2+x+4 \\ + & -7x^5+4x^3+5x^2-3x-6 \\ \hline & -3x^5+2x^4+5x^3-2x-2 \end{array}$$

Actividades propuestas

9. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(2x^2-2x)+(-3x^2-4x+2)+(3x^3-3x^2+2x-3)$

b) $-2x^4+(2x^3+3x-4)+(-4x^2-6x+5)+(3x^3-2x+6)$

10. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

a) $3x-4-(3x+2)+4x$

b) $3(x^2-4x+6)-(x^2-6x+5)$

c) $(-3)(2a+4b)-(2b-3a)$

d) $4(2a^2-2ab+2b^2)-(3a^2-4ab)$

2.3. Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Para multiplicar monomios: se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes de la parte literal.

Ejemplos:

- $(-5)x^2\cdot 2x^4=(-5)\cdot 2\cdot x^{2+4}=-10x^6$
- $5x^3\cdot(-4)=5\cdot(-4)\cdot x^3=-20x^3$
- $3x^2\cdot(2x^2-4x+6)=(3x^2\cdot 2x^2)-(3x^2\cdot 4x)+(3x^2\cdot 6)=6x^4-12x^3+18x^2$
- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$
  $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:

$$\begin{array}{r} -2x^3+x+4 \\ \times \qquad x^2-3x+1 \\ \hline -2x^3 \qquad +x+4 \\ 6x^4 \qquad -3x^2-12x \qquad \\ -2x^5 \qquad +x^3+4x^2 \qquad\qquad \\ \hline -2x^5+6x^4-x^3+x^2-11x+4 \end{array}$$

Polinomio opuesto

Recordemos que el polinomio ***opuesto*** de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p-q \equiv p+(-q) \equiv p+(-1)\cdot q$$

Ejemplo:

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$=2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & -5x^2 & - & 3x & + & 2 \\ - & -2x^4 & + & x^3 & + & 3x^2 & & + & 6 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccccc} & & & & - & 5x^2 & - & 3x & + & 2 \\ + & 2x^4 & - & x^3 & - & 3x^2 & & & - & 6 \\ \hline & 2x^4 & - & x^3 & - & 8x^2 & - & 3x & - & 4 \end{array}$$

Actividades propuestas

11. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$

b) $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$

c) $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$

d) $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

12. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-3x^3+x)-(-2x^2)$

b) $(3x^4+2x)-(-4x-5)$

c) $(4x^2-2x)-(x^3+2x^2-2x)$

13. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

14. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-3x^2 - 4x + 2) \cdot 3x^3$

b) $(3x - 4) \cdot (-4x^2 - 6x + 5) \cdot (-2x)$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot \left(x^3 - 6x + 7\right) =$$
$$= 3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir, aplicar la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$= (-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo: $6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$

Actividades propuestas

15. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-20x^3 - 40x^2 + 10x$ b) $60x^4 - 30x^2$

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introducción a las fracciones polinómicas

Hasta este momento hemos estudiado la suma y el producto de polinomios. En cualquiera de los casos el resultado siempre es otro polinomio. Cuando establecemos una **fracción polinómica** como, por ejemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

lo que tenemos es una **fracción algebraica**, que en general, no es un polinomio. Sí aparece un polinomio en el caso particular en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que la expresión anterior no es un polinomio: cualquier polinomio puede ser evaluado en cualquier número real. Sin embargo esa expresión no puede ser evaluada para $x=1$, ya que nos quedaría el número 0 en el denominador.

Podríamos creer que la siguiente fracción polinómica sí es un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x = 0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor. Son **expresiones equivalentes** cuando ambas tienen sentido.

3.2. División de polinomios

Antes de dividir polinomios, vamos a definir cómo dividir dos monomios.

Para dividir dos monomios: se dividen los coeficientes y se restan los exponentes de la parte literal.

$$ax^n : bx^m = \frac{ax^n}{bx^m} = \left(\frac{a}{b}\right)x^{n-m}$$

Ejemplo: $12x^5 : 4x^3 = \frac{12x^5}{4x^3} = \left(\frac{12}{4}\right)x^{5-3} = 3x^2$

Aunque, como hemos visto en el apartado anterior, una fracción polinómica, en general, no es un polinomio, vamos a adentrarnos en la división de polinomios pues es una cuestión importante y útil.

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (*c*) y el resto (*r*). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Vamos a dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primera etapa:

  Nos fijamos en el primer monomio del Dividendo $6x^4$ y el primer monomio del divisor $2x^2$.

  – Vamos a dividir estos dos monomios: $\dfrac{6x^4}{2x^2} = 3x^2$

  – El monomio que nos ha dado como resultado se multiplica por el divisor:

  $3x^2 \cdot (2x^2 - x + 3) = 6x^4 - 3x^3 + 9x^2$

  – El resultado de esta multiplicación, se coloca debajo del Dividendo, haciendo coincidir los exponentes, y **cambiando el signo**. Por último, se realizan las operaciones de monomios, según los signos.

$$\begin{array}{rl} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \quad | \; 2x^2 - x + 3 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & \quad 3x^2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \end{array}$$

- Primera y segunda etapas:

  – $\dfrac{8x^3}{2x^2} = 4x$

  – $4x \cdot (2x^2 - x + 3) = 8x^3 - 4x^2 + 12x$

$$\begin{array}{rl} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \quad | \; 2x^2 - x + 3 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & \quad 3x^2 + 4x \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \qquad & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \end{array}$$

- Las tres etapas:

$$\begin{array}{rl} \text{Dividendo: } D(x) & \quad \text{Divisor: } d(x) \\ \boxed{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2} & \quad | \; \boxed{2x^2 - x + 3} \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\qquad & \quad \boxed{3x^2 + 4x - 2} \; \text{Cociente: } C(x) \\ 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \qquad & \\ -4x^2 - 9x - 2 & \\ \underline{4x^2 - 2x + 6} & \\ \boxed{-11x + 4} \; \text{Resto: } R(x)) & \end{array}$$

La división acaba cuando el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Actividades propuestas

16. Divide los siguientes polinomios:

a) $3x^3-2x^2-2x+6$ entre x^2-3x+5

b) $-15x^3-3x^2+4x+5$ entre $5x^3-2x^2-2x+4$

c) $6x^4-7x^3+7x^2-4x-8$ entre $-2x^2+2x+5$

d) $-16x^5-3x^4+7x^3+3x^2+4x+6$ entre $4x^3+2x^2+x-2$

e) $-7x^5+3x^2+2$ entre x^2+4

17. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2+2x-1$ como polinomio cociente y $r(x)=-2x^2+3$ como resto.

3.3. Operaciones con fracciones algebraicas

Puesto que tanto los polinomios como las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones algebraicas debemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Actividades propuestas

18. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$ b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$ c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$ d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

19. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, solo uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2+5x}-\dfrac{6}{x+5}$

20. Comprueba, simplificando, las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\dfrac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\dfrac{3y^2+2y}{y-4}$

e) $\dfrac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\dfrac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

21. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3-9x^2-6x):3x$

b) $(7a^3-70a^2-21):7$

c) $(25x^4-10x^2):5x^2$

d) $(3x^2y^3-8xy^2):xy^2$

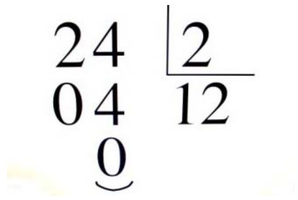
22. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

4.1. Factorización de un polinomio



Tal y como ocurre con la división entera, la división de polinomios también puede ser **exacta**, es decir, el resto puede ser el polinomio cero.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -3x^4 & -4x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & -3x^2+3x-2 \\ \cline{7-7}
\underline{-3x^5} & \underline{+3x^4} & \underline{-2x^3} & & & & -x^3+2x-4 \\
 & & -6x^3 & +18x^2 & -16x & +8 & \\
 & & \underline{6x^3} & \underline{-6x^2} & \underline{+4x} & & \\
 & & & 12x^2 & -12x & +8 & \\
 & & & \underline{-12x^2} & \underline{+12x} & \underline{-8} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

En este caso escribimos $\dfrac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$

y diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Si optamos por una igualdad polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que el haber obtenido como resto el polinomio 0 nos permite expresar el polinomio dividendo, $p(x)$, como producto de otros dos polinomios, los polinomios divisor y cociente, $q(x)\cdot c(x)$ Hemos alcanzado una **factorización** del polinomio $p(x)$, o una **descomposición en factores** de $p(x)$.

En general, un polinomio concreto puede ser factorizado, o descompuesto, por medio de diferentes grupos de factores. Si continuamos con el polinomio $p(x)$ anterior, una manera de obtener una descomposición alternativa consiste en, a su vez, alcanzar una factorización de alguno de los polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que el polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & & +2x & -4 & -x^2+2x-2 \\ \cline{5-5}
\underline{x^3} & \underline{-2x^2} & \underline{+2x} & & x+2 \\
 & -2x^2 & +4x & -4 & \\
 & \underline{2x^2} & \underline{-4x} & \underline{+4} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

En efecto, la división es exacta y ello nos lleva a la siguiente igualdad:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Si la trasladamos a la descomposición que teníamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

Actividades propuestas

23. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

a) $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

Diremos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Es claro que los polinomios de grado 1 no pueden ser descompuestos como producto de otros dos polinomios de menor grado. Son polinomios irreducibles. En el siguiente apartado constataremos que hay polinomios de grado 2 que también son irreducibles.

De las diferentes factorizaciones que puede admitir un polinomio la que más información nos proporciona es aquella en la que todos los factores que intervienen son polinomios irreducibles, puesto que *no es mejorable*. Conviene advertir que, en general, no es fácil alcanzar ese tipo de descomposiciones. Seguidamente vamos a ahondar en esta cuestión.

4.2. Raíces de un polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha)=0$$

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

$$s(2)=2\cdot2^3+2\cdot2^2-8\cdot2-8=2\cdot8+2\cdot4-16-8=16+8-16-8=0$$

Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot1^3+2\cdot1^2-8\cdot1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq0$$

Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

$$s(0)=2\cdot0^3+2\cdot0^2-8\cdot0-8=0+0-0-8=-8\neq0$$

Actividades propuestas

24. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1

b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2

c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1

d) $x=0$ de x^3-3x^2+1

e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

En el siguiente ejercicio vamos a recoger algunas conexiones entre las raíces de un polinomio y las operaciones de suma y producto de polinomios.

Actividades propuestas

25. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

El que un número real sea raíz de un polinomio está fuertemente conectado con la factorización de dicho polinomio:

Teorema del factor. Un número real concreto α es raíz de un polinomio $p(x)$ si y solo si el polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$, es decir, si y solo si el polinomio $p(x)$ admite una descomposición factorial de la forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Ejemplo:

- Volvamos con el polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

Sabemos que el número 2 es una raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x-2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +2x^2 & -8x & -8 & \;x-2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & \;2x^2+6x+4 \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 & -8x & -8 & \\
 & -6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3}
 & & 4x & -8 & \\
 & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

Podemos descomponer $s(x)$ de la siguiente forma: $2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$

- Vimos que otra raíz de $s(x)$ es el número -1. Si observamos la precedente factorización de $s(x)$, es evidente que este número -1 no es raíz del factor $x-2$, por lo que necesariamente debe serlo del otro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

Al haber constatado que -1 es raíz del polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos va a ayudar a descomponer $c(x)$:

$$\begin{array}{rl} 2x^2+6x+4 & \underline{|\ \ x+1\ \ } \\ \underline{-2x^2-2x} & \ \ 2x+4 \\ 4x+4 & \\ \underline{-4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Luego:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Si reunimos lo hecho en los apartados precedentes de este ejemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

Se ha descompuesto $s(x)$ como producto de tres polinomios irreducibles de grado 1. A la vista de ellos conocemos todas las raíces de $s(x)$, los números 2, -1 y -2.

Los resultados teóricos que hemos establecido nos conducen a este otro:

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca:

Ejemplos:

- El polinomio $t(x)=x^2+1$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1\ >\ 0$$

Además, este polinomio de grado dos, $t(x)=x^2+1$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.

- Otro polinomio sin raíces es

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

Sin embargo, $u(x)=x^4+2x^2+1$ es un polinomio reducible puesto que, obviamente, puede ser expresado como producto de dos polinomios de inferior grado.

Aunque no sea posible demostrarlo, por su dificultad, sí se puede anunciar que todo polinomio de grado impar posee, al menos, una raíz real.

Actividades propuestas

26. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

27. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

28. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

29. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

30. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

31. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+6$ b) $-x+4$ c) $2x-7$ d) $-4x-5$ e) $-3x$

f) x^2-5x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+4x

4.3. Regla de Ruffini

En el apartado anterior se probó la equivalencia entre que un número real α sea raíz de un polinomio $p(x)$ y el hecho de que el polinomio mónico de grado uno $x-\alpha$ divida a $p(x)$, esto es, que exista otro polinomio $c(x)$ tal que sea posible una factorización de $p(x)$ del tipo:

$$p(x) = (x-\alpha)\cdot c(x)$$

Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

Ejemplo:

- Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$. Si el resto es 0 el número -2 será una raíz de $p(x)$; si no es 0 el resto, entonces -2 no será raíz de $p(x)$.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

$$
\begin{array}{rl}
3x^3 - 4x^2 + x + 3 & \underline{|\ \ x+2\ \ \ \ } \\
\underline{-3x^3 - 6x^2} & 3x^2 - 10x + 21 \\
-10x^2 + \ x\ + 3 & \\
\underline{10x^2 + 20x} & \\
21x + 3 & \\
\underline{-21x - 42} & \\
-39 &
\end{array}
$$

Puesto que el resto no es cero, -2 no es una raíz de $p(x)$.

Vamos a utilizar el método de Ruffini dividiendo el polinomio $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$, de grado 3, entre el polinomio mónico $(x+2)$, es decir, de grado 1. Este polinomio es de la forma $(x - \alpha)$, siendo α una posible raíz.

En estos gráficos se muestran las zonas que se utilizan en el método de Ruffini. A la izquierda, las operaciones que se realizan, y a la derecha, cómo coincide con el método de división normal.

$$
\begin{array}{r|c}
 & \textit{Coeficientes Dividendo} \\
-\alpha & \textit{Multiplicaciones} \\
\hline
 & \textit{Sumas o Restas}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|c}
 & \textit{Coeficientes Dividendo} \\
\textit{Raiz} & \textit{Restos intermedios} \\
\hline
 & \textit{Cocientes}
\end{array}
$$

- Paso 1

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & \downarrow & & & \\
\hline
 & 3 & & &
\end{array}
$$

– En la primera fila se escriben los coeficientes del Dividendo.
– En la columna de la izquierda, se escribe el término independiente del divisor (raíz) cambiado de signo
– El primer coeficiente del dividendo se baja a la última fila.

- Paso 2

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
 & & -2 \cdot 3 & & \\
-2 & & -6 & & \\
\hline
 & 3 & & &
\end{array}
$$

Se multiplica la raíz por el valor de la última fila que se ha bajado. El resultado se coloca debajo del siguiente coeficiente en la zona de Multiplicaciones. En este caso es **– 6.**

- Paso 3

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & 3 & \boxed{\begin{array}{c}-4\\-6\end{array}} & 1 & 3 \\
-2 & & & & \\
\hline
 & & -4-6 & & \\
 & 3 & -10 & &
\end{array}
$$

Se operan los valores que aparecen en la misma columna, y el resultado se escribe debajo de la línea en la zona del cociente.

En este caso es **– 10.**

- Paso 4

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ & & -2\cdot 3 & -2\cdot -10 & -2\cdot 21 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & & -4-6 & 1+20 & 3-42 \\ & 3 & -10 & 21 & \boxed{-39} \end{array}$$

Se repite el mismo proceso con los coeficientes que quedan.

- Elección del Cociente C(x) y del Resto R(x)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \boxed{-39} \end{array}$$

Al final nos queda algo así. Al dividir un polinomio por otro mónico, el cociente tendrá un grado menos que el Dividendo, es decir, grado 2.

El cociente será $C(x)=3x^2-10x+21$ y el resto es el número que está recuadrado, es decir Resto = **– 39**.

Estamos ante la llamada **regla de Ruffini**, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-\alpha$.

Ejemplo:

- Dividamos el polinomio $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & -8 \end{array}$$

El cociente es $-x^3-x^2-3x-4$ y el resto -8. Como el resto no es 0 deducimos que el número 3 no es raíz de $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$. La relación entre dividendo, divisor, cociente y resto es, como siempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3+5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x=3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior. Este hecho viene recogido en el denominado teorema del resto.

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Actividades propuestas

32. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$

b) x^3+3x^2-3x+6 entre $x+2$

c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$

d) x^3-8x+2 entre $x-3$

33. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5

b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$

d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

34. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

35. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este tema la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Ejemplos:

- Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que $\alpha=\dfrac{1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para conocer las raíces del polinomio x^2-2 debemos estudiar si hay algún número real α tal que lo anule, es decir, para el que se tenga

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

  Así, el polinomio de grado dos x^2-2 tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.

- Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo x^2+4.

Apreciamos que la regla de Ruffini nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo apartado destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

4.4. Cálculo de las raíces de un polinomio

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$
$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha = -a_0$$
$$\alpha \cdot (a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2 \alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + ... + a_2 \alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:
  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:
  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$
  Puede comprobarse que los números enteros 2 y -3 son raíces; los demás no lo son.
- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ también son:
  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$
  En este caso ninguno de esos números es una raíz del polinomio.

Actividades propuestas

36. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

4.5. Factorización de polinomios y fracciones algebraicas

La factorización de polinomios puede ser utilizada para simplificar algunas expresiones en las que intervienen fracciones algebraicas. Veámoslo a través de un par de ejemplos:

Ejemplo:

- Una fracción algebraica como:

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, es decir, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Ejemplo:

- En una suma de fracciones polinómicas como ésta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en los cocientes a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

37. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

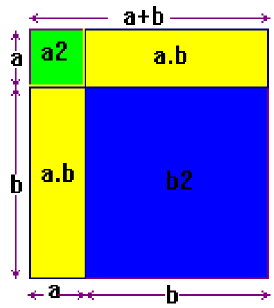
a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

38. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

4.6. Productos notables de polinomios

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.



Potencias de un binomio.

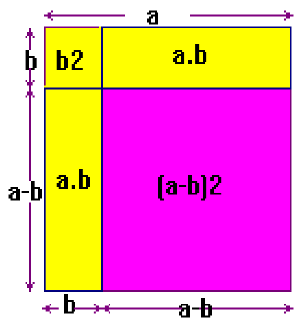
Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Observa los cuadrados de la ilustración y comprueba cómo se verifica.

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Observa los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Actividades propuestas

39. Realiza los cálculos:

a) $(1+4a)^2$

b) $(-x+5)^2$

c) $(-2x-3)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(5x+3)^3$

40. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$

b) $(a+b-c)^2$

41. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x – 5/x)^2$

d) $(3a – 5)^2$ e) $(a^2 – b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

42. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 – 4x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

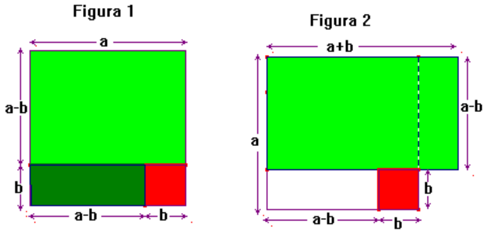
Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Observa la ilustración.

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Figura 1 Figura 2



Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$

  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Actividades propuestas

43. Efectúa estos productos:

a) $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$

b) $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$

c) $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

Conviene darse cuenta de que sus fórmulas, leídas al revés, constituyen una factorización de un polinomio.

Ejemplos:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Actividades propuestas

44. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) x^2-4x+4

b) $3x^2+18x+27$

c) $3x^5-9x^3$

45. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1)\cdot(3x - 1)$ b) $(2a - 3b)\cdot(2a + 3b)$

c) $(x^2 - 5)\cdot(x^2 + 5)$ d) $(3a^2 + 5)\cdot(3a^2 - 5)$

46. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25$ b) $4a^4 - 81b^2$ c) $49 - 25x^2$ d) $100a^2 - 64$

47. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

CURIOSIDADES. REVISTA

Haz magia

- Piensa un número
- Multiplícalo por 2
- Suma 4
- Multiplica por 5
- Divide por 10
- Resta el número
- Magia, magia, magia…
- ¡El resultado es **2**!

Analiza cómo tú, el mago, has podido conocer el resultado.

Pasatiempo

A B A

A B A

<u>A B A</u>

B C B

Emmy Noether (1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Demostró dos teoremas esenciales para la teoría de la relatividad que permitieron resolver el problema de la conservación de la energía.

Trabajó en estructuras algebraicas y en la actualidad el calificativo ***noetheriano*** se utiliza para designar muchos conceptos en álgebra: anillos *noetherianos*, grupos *noetherianos*, módulos *noetherianos*, espacios topológicos *noetherianos*, etc.

Cuando intentó dar clases en la Universidad de *Göttingen* el reglamento indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres por lo que *Noether* no pudo acceder a la docencia universitaria. Se cuenta, como anécdota, que *Hilbert* dijo en un Consejo de dicha Universidad:

> *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un estable… baños"*

De ella dijo Albert Einstein:

> *"En el reino de Álgebra en el que los mejores matemáticos han trabajado durante siglos, ella descubrió métodos que se ha demostrado que tienen una importancia enorme... La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas. ... En este esfuerzo hacia la belleza lógica se descubren fórmulas espirituales para conseguir una penetración más profunda en las leyes de*

RESUMEN

Expresión algebraica	Expresión matemática que se construye con números reales y letras sometidos a las operaciones matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación y/o división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Valor numérico de una expresión algebraica	Al fijar un valor concreto para cada indeterminada, o variable, de una expresión algebraica aparece un número real: el **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las indeterminadas	Si, en la expresión precedente, hacemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtenemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada por el producto de números reales e indeterminadas	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ de grado 6 y coeficiente –5 $7\cdot x^2$ de grado 2 y coeficiente 7
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	El anterior polinomio es de grado 3
Suma y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$2ax - ax = ax$ $2ax \cdot ax = 2a^2x^2$
División de dos polinomios	Al dividir el polinomio *p*(*x*) entre *q*(*x*) se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente, *c*(*x*), y resto, *r*(*x*), tales que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Raíces y factorización	Si α es una raíz del polinomio $p(x)$ es equivalente a que el polinomio $p(x)$ admita una descomposición factorial de la forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para cierto polinomio $c(x)$	-2 es una raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un *truco* mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

i. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
ii. Que lo multiplique por 3
iii. Que al resultado anterior le sume 18
iv. Que multiplique por 2 lo obtenido
v. Que divida entre 6 la última cantidad
vi. Que al resultado precedente le reste el número que escribió
vii. Independientemente del número desconocido original, ¿qué número ha surgido?

2. En este otro ejercicio vamos a *adivinar* dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

i. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99)
ii. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
iii. Que multiplique por 5 lo obtenido
iv. Que multiplique el resultado precedente por 5
v. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
vi. Si tu compañero te dice el resultado de estas operaciones, tu descubres sus dos números. Si te dice, por ejemplo, 467, entonces sabes que el número de una cifra es 4 y el de dos cifras es 67, ¿por qué?

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$

b) $\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$

c) $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Una persona tiene ahorrados 2500 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 2 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá?

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

6. Construye un polinomio de grado 2, $p(x)$, tal que $p(5) = -2$.

7. Consideremos los polinomios $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 8$ y $r(x) = 5x^2 + 6x - 2$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p + q + r$

b) $p - q$

c) $p \cdot r$

d) $p \cdot r - q$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0{,}3x - 0{,}2y + 0{,}1z) \cdot (0{,}1x + 0{,}2y - 0{,}3z)$ c) $(x - 1)\ (x - a)\ (x - b)$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x - 2$ entre $3x^2 + 4x - 4$

b) $5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x - 7$ entre $x^3 + 3x + 4$

10. Calcula los cocientes:

a. a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza las operaciones entre las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x} + \frac{3x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x} - \frac{3x}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-3x} \cdot \frac{3x}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{2x-3}{x^2-3x} : \frac{3x}{x^2-6x+9}$

12. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

14. Determina un polinomio de grado 4 tal que sus raíces sean 6, -3, 2 y 0.

15. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

16. Determina un polinomio de grado 5 tal que sus raíces sean 6, -3, 2, 4 y 5.

17. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = 2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = x^2 + x + 1$.

18. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$

b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$

c $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

19. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

20. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3+11x^2+5x-3$

b) $3x^3+5x^2+x-1$

c) $2x^3+x^2-6x-3$

d) $3x^3-6x^2+x-2$

21. Calcula las potencias:

a) $(x-2y+z)^2$ b) $(3x-y)^3$ c) $((1/2)a+b^2)^2$ d) $(x^3-y^2)^2$

22. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

x^2-36 $5x^2+1$

$5x^2-11$ x^2-3y^2

x^2-6x+9 x^4-8x^2+16

$x^2+\sqrt{20}\,xy+5y^2$ $x^4+2x^3+x^2+2x+1$

$x^4-2x^3+x^2+2x+1$

23. Descompón en factores:

a) x^4-1 b) x^2-y^2 c) $x^2y^2-z^2$ d) $x^4-2x^2y+y^2$

24. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4-5x^2+6=(x^2-2)\cdot(x^2-3)$.

b) Determina todas las raíces del polinomio x^4-5x^2+6.

25. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}$ c) $\dfrac{x^3-x}{x^4-1}$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)}-\dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7}:\dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b}-\dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x+(1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

28. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\dfrac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right):\dfrac{ab}{a+b}$

29. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$ b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$ c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado tres suele ser otro polinomio de grado ……….

b) La suma de tres polinomios de grado dos suele ser otro polinomio de grado ……….

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado ……….

d) La diferencia de dos polinomios de grado cuatro suele ser otro polinomio de grado ……….

4. Al dividir el polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado 1. d) debe ser de grado menor que 2.

5. Considera el polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son *razonables candidatos* para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c) 4 d) 7

6. Considera el polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son *razonables candidatos* para ser una de sus raíces?

a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) –3 y $\frac{1}{3}$ d) –3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres

a) tiene tres raíces reales; b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

10. Analiza si puede haber algún polinomio de grado diez que no tenga ninguna raíz real.

Autores: David Miranda y Eduardo Cuchillo Ibáñez

Formación Profesional Básica
Matemáticas II
Capítulo 2: Ecuaciones y sistemas

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es)**.

Para los apartados 1 y 2, el capítulo 9 del libro de 2º de ESO de "Álgebra" de autora Raquel Caro.

Para los apartados 3, 4 y 5, el capítulo 5 del libro de 3º A de ESO sobre "Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales" de autora Raquel Hernández.

ÍNDICE

Resumen

En la época de El Quijote, en la puerta de las barberías, se leía el siguiente cartel: "ALGEBRISTA Y SANGRADOR" ¿Y eso, por qué?

La palabra "Álgebra" es una palabra árabe que utilizó el matemático Al-Khwarizmi. Si logras leer ese nombre verás que te suena a otra palabra: "algoritmo".

Hacia el año 825 escribió un libro titulado: *Al-jabr w'almuqabalah* La palabra árabe *jabr* significa restaurar. El libro trataba de álgebra, de sumas y otras operaciones, pero como los barberos también restauraban huesos, por eso se llamaban algebristas.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

1.1. El lenguaje de las ecuaciones

Ya sabes que:

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Ejemplo:

- Si tenemos dos expresiones algebraicas: $7x + 3$ y $5x + 2$, y las unimos con el signo igual obtenemos una ecuación: $7x + 3 = 5x + 2$.

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Ejemplo:

- $6x – 1 = 5x + 8$ es una ecuación con una sola incógnita, mientras que
- $4x + 2y = 1$ o $3x – 8 = 9y$ son ecuaciones con dos incógnitas: x e y.

El **grado** de una ecuación es el mayor exponente que aparece en alguna de sus incógnitas.

Ejemplo:

- $2x – 7 = 3x + 2$ es una ecuación de primer grado, mientras que $4x + 5xy^2 = 8$ es una ecuación de tercer grado ya que el monomio $5xy^2$ tiene grado 3 (1 + 2 = 3).

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x – 5 = 6x – 7$			
	$3x + 2$	$x – 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x – 3y$	$2 + y$	

2. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $x – 2y = 3x + 4$; b) $5x + 6y^2 = 7$ c) $8a + 9a^2 = 1$ d) $2x + 3x^2 = 4$.

3. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $5x – 6 = 7x + 8$; b) $9x + y^2 = 13$ c) $x + 2x^2 = 3$ d) $4x + 5xy^2 = 6$

1.2. Ecuaciones equivalentes. Resolución de ecuaciones

Solución de una ecuación:

Una **solución** de una ecuación es un número que, cuando la incógnita toma ese valor, se verifica la igualdad, es decir, los dos términos de la ecuación valen lo mismo.

Algunas ecuaciones solo tienen una solución, pero otras pueden tener varias.

Resolver una ecuación es encontrar todas sus posibles soluciones numéricas.

Actividades resueltas

- Si te fijas en la ecuación: $7x - 3 = 5x + 9$, verás que al darle valores a x la igualdad no siempre se cumple.

Por ejemplo, para $x = 1$, el primer miembro vale $7 \cdot 1 - 3 = +4$, mientras que el valor del segundo miembro es: $5 \cdot 1 + 9 = 5 + 9 = 14$. Luego 1 **no** es solución de la ecuación.

Para $x = 6$, el primer miembro toma el valor: $7 \cdot 6 - 3 = 42 - 3 = 39$; y el segundo miembro: $5 \cdot 6 + 9 = 30 + 9 = 39$. Por tanto 6 es una **solución** de la ecuación.

Si se desconoce la solución de una ecuación, resulta muy pesado resolverla probando un número tras otro.

Por eso lo que se hace habitualmente es transformarla en otras ecuaciones **equivalentes** más sencillas.

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones.

¿Sabías que todas las soluciones de todas las expresiones algebraicas posibles, de cualquier grado, forman lo que se denomina los "***números algebraicos***"? Por ejemplo, son algebraicos todos estos números: 1, 2, 1/3, 7/5, ‾ , ‾, etc. Aunque la inmensa mayoría de los números que utilizamos en nuestra vida cotidiana son algebraicos, debes saber que realmente hay muchos, muchísimos más números "no algebraicos" que ya irás conociendo, aunque alguno ya conoces como al número π.

Ejemplo:

- $3x - 7 = 11$ es equivalente a $3x = 18$, puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 6$.

Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades:

Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente.

Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad (distinta de cero), se obtiene una ecuación equivalente.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.

Transformar una ecuación hasta que sus soluciones se hagan evidentes se llama "*resolver la ecuación*". Siguiendo estos pasos intentaremos resolver la ecuación: $3x + 9 = x - 5$.

1) Sumamos a los dos miembros $-x$ y restamos a los dos miembros 9: $3x - x + 9 - 9 = x - x - 5 - 9$.

2) Hacemos operaciones y conseguimos otra ecuación que tiene en el primer miembro los términos con x y en el segundo, los términos sin x: $3x - x = -5 - 9$.

3) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -14$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{2x}{2} = \frac{-14}{2}$ de donde $x = -7$.

5) Comprueba que todas las ecuaciones que hemos obtenido en este proceso son equivalentes y que su solución es $x = -7$.

- Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$.

1) Sumamos x y 3 para pasar a un miembro los términos con x y al otro miembro los términos sin x: $6 - x + x + 3 = 2x + x - 3 + 3$,

2) Hacemos operaciones: $6 + 3 = 2x + x$

3) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

4) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$.

La solución de la ecuación es $x = 3$.

5) Comprobamos que en efecto es la solución: $6 - x = 2x - 3 \Rightarrow 6 - 3 = 3;\ 2\cdot 3 - 3 = 3$.

El procedimiento utilizado en las actividades es un método universal para **resolver** cualquier ecuación de grado 1, es decir, donde x aparece sin elevar a otro exponente como en x^2. Las ecuaciones de primer grado tienen siempre una única solución, pero en general, las soluciones no tienen porqué ser números enteros como en los ejemplos.

Actividades propuestas

4. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$3x + 5 = x - 1$	2, –1, –3		$a^2 - 6 = -2$	–2, –6, 2
$x + 6 = 4x - 3$	3, –2, –3		$b - 4 = 8 - b$	3, 4, 6

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x - 1 = 3x - 4$ b) $7x + 9 = 5x - 6$ c) $6x + 8 = 14$ d) $3x - 9 = 2x - 11$

6. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$

7. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $2x - 5 = 13$ b) $3x = 15$ c) $5x + 12 = 7$ d) $x = -5$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

2.1. Procedimiento

Ya sabes que:

Muchos problemas pueden resolverse mediante una ecuación.

Actividades resueltas

- Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate:

¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento que acabamos de aprender.

Quita, si los hay, paréntesis y denominadores: $x + x + 1 = 9$.

Para poner en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los que no lo tienen, **haz lo mismo a los dos lados**, resta 1 a los dos miembros: $x + x + 1 – 1= 9 – 1$, luego $x + x = 9 – 1$. Opera: $2x = 8$. Despeja:

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

Actividades propuestas

8. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

9. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

2.2. Problemas numéricos

Actividades resueltas

- En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 – x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado:

$$x + 2(34 – x) = 54.$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$x + 68 – 2x = 54.$$

Para poner en el primer miembro los términos con x y en el segundo los términos sin x, resta 68 a los dos miembros:

$$x + 68 – 2x – 68 = 54 – 68.$$

Opera:

$$– x = – 14$$

Para despejar la x divide los dos miembros por –1:

$$x = – 14/– 1 = 14.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay 34 – 14 = 20 habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues:

$$14 + 2·20 = 54.$$

- En una granja hay 50 animales entre gallinas y conejos, y entre todos los animales suman 120 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de gallinas, y como hay 50 animales en total, conejos tendremos $50 – x$.

Como una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, tendremos en total $2x + 4(50 – x)$ patas.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como sabemos que el número total de patas es 120, podemos escribir esta ecuación:

$$2x + 4(50 - x) = 120$$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Resuelve la ecuación. Quita paréntesis:

$$2x + 200 - 4x = 120$$

Si restamos 200 en ambos lados obtenemos:

$$2x + 200 - 4x - 200 = 120 - 200$$

Operando obtenemos:

$$-2x = -80$$

Dividiendo por –2 en ambos lados resolvemos la ecuación:

$$-2x/-2 = -80/-2 \text{ luego } x = 40.$$

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 40 gallinas y 10 conejos pues $50 - x = 50 - 40 = 10$.

Las patas de 40 gallinas y 10 conejos suman $40 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 80 + 40 = 120$

Actividades propuestas

10. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

11. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

12. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

13. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

2.3. Problemas de geometría

Muchos problemas de geometría se pueden resolver por métodos algebraicos, utilizando ecuaciones.

Actividades resueltas

- Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.

Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x – 5$

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x – 5) = 55$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x – 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor. Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x – 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, $10 + 20 + 25 = 55$, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

Actividades resueltas

- Tienes un rectángulo de altura x cm y de base $2x + 3$. Si a la base de este rectángulo le quitan 2 cm y a la altura le añaden 5 cm, se convierte en un cuadrado. ¿Qué dimensiones tiene?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un rectángulo con las condiciones del problema. La expresión $2x + 3 – 2$ expresa los 2 cm que le quita a la base y $x + 5$ expresa los 5 cm que le añaden a la altura.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Si se ha formado un cuadrado como los lados son iguales ambas expresiones deben ser equivalentes: $2x + 3 – 2 = x + 5$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

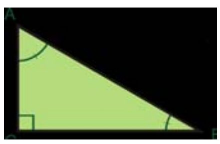
Resuelve la ecuación: $2x +3 –2 – x – 3 + 2= x– x – 3 + 2 + 5$; $2x – x = 4$; $x = 4$

Solución: x = 4 cm es la longitud de la altura del rectángulo. Por tanto, $2 \cdot 4 + 3 = 11$ cm mide la base del rectángulo.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, a la altura le sumamos 5, $4 + 5 = 9$, y a la base le restamos 2, $11 – 2 = 9$, se obtiene un cuadrado.

Actividades propuestas



14. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

15. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

16. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6º.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández

2.4. Otros problemas

Actividades resueltas

- Si tenemos 21 billetes de 5 € y de 10 € que suman en total 170 €, ¿cuántos billetes tenemos de cada clase?

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de billetes de 5 € y el resto, 21 – x, será el número de billetes de 10 €.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Plantea la ecuación que expresa la suma en euros de los dos tipos de billetes: $5 \cdot x + 10(21 - x) = 170$

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Para resolver la ecuación, lo primero, quita paréntesis: $5x + 210 - 10x = 170$

Deja en el primer miembro todos los términos con *x*, y en el segundo los que no tienen *x*: $5x - 10x + 210 - 210 = -210 + 170$

Haz operaciones: $-5x = -40$

Despeja la incógnita: $x = (-40) : (-5) = +8$

Por tanto, tenemos 8 billetes de 5 €, y 21 – 8 = 13 es el número de billetes de 10 €.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Comprobamos que $8 \cdot 5 = 40$ € y $13 \cdot 10 = 130$ €. Y que, en efecto, 40 + 130 = 70 €.

Solución: Tenemos 8 billetes de 5 € y 13 billetes de 10 €.

Actividades propuestas

17. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado

Solución: Tardan 3 horas en cruzarse.

18. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

19. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

20. Si un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5,50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

21. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

22. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

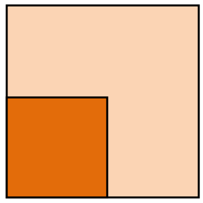
23. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

3. ECUACIONES DE 2º GRADO

Hay ecuaciones de segundo grado que ya sabes resolver. En este capítulo vamos a profundizar y a aprender a resolver este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, el siguiente problema ya sabes resolverlo:

Actividades resueltas

- Se aumenta el lado de una baldosa cuadrada en 3 cm y su área ha quedado multiplicada por 4, ¿Qué lado tenía la baldosa?



Planteamos la ecuación:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

¡Esta ecuación si sabes resolverla! $x + 3 = 2x$, luego el lado es de 3 cm.

Hay otra solución, $x = -1$, que no tiene sentido como lado de un cuadrado.

Vamos a estudiar de forma ordenada estas ecuaciones.

3.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplo 1:

- Son ecuaciones de 2º grado por ejemplo

$$3x^2 - 7x + 1 = 0; \qquad -2x^2 + 5x + -2 = 0; \qquad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Ejemplo 2:

- Los coeficientes de las ecuaciones de 2º grado son números reales, por lo tanto pueden ser fracciones o raíces. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -2{,}7x^2 + 3{,}5x - 0{,}2 = 0; \qquad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Actividades propuestas

24. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$ c) $8x^2 - 9 = 0$ e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$ d) $8 - 7{,}3x = 0$ f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

25. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica quiénes son a, b y c.

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a aquella que tiene valores distintos de cero para *a*, *b* y *c*.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula nos permite calcular las dos soluciones de nuestra ecuación.

Llamaremos **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primero debemos saber quiénes son *a*, *b* y *c:*

$$a = 1;\ b = -5;\ c = 6$$

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, nuestras dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \qquad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecto, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

26. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández

3.3. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado completa

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, ¿te acuerdas?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cuántas soluciones tiene una ecuación de 2º grado, nos vamos a fijar en el signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales, (una solución doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución.

Ejemplo:

- a) La ecuación $2x^2 - 4x - 7 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 16 + 36 = 52 > 0$$

  Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas.

- b) La ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 > 0$$

  Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 5 y –1.

  Comprobación: $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ y $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$).

- c) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

  Por lo tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales. Se puede escribir como:

  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$, que tiene la solución doble $x = 1$.

- d) La ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ tiene como discriminante

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

  Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

27. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ **d)** $x^2 - 3x + 5 = 0$

3.4. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), o el coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Ejemplo:

La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta *b*.

La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene *c*, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas se resuelven de una manera u otra dependiendo del tipo que sean.

Si el coeficiente *b* = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente *c* = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero.

Por tanto $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumen

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común:

$$x = 0 \text{ y } x = \frac{-b}{a}.$$

Ejemplo:

En la ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta la *b*. Para resolverla despejamos la incógnita, es decir, x^2:

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Una vez que llegamos aquí, nos falta quitar ese cuadrado que lleva nuestra incógnita. Para ello, haremos la raíz cuadrada en los 2 miembros de la ecuación:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 3 y –3. En efecto, $2\cdot 3^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$, y $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$

Ejemplo:

En la ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta la *c*. Para resolverla, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$

Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 5$

Una ecuación de segundo grado incompleta también se puede resolver utilizando la fórmula de las completas pero es un proceso más lento y es más fácil equivocarse.

Actividades resueltas

- Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 32 = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *b*. Por lo tanto, despejamos la incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Las raíces son 4 y –4.

- Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*. Por lo tanto, sacamos factor común:

$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$

y obtenemos las dos soluciones:

$$x = 0 \text{ y } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7.$$

Actividades propuestas

28. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Ejemplo:

No es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*.

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

Actividades propuestas

29. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

4.2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

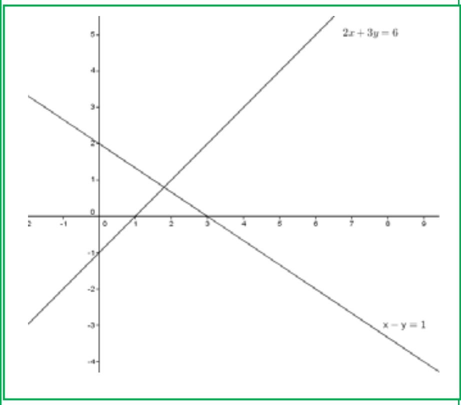
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

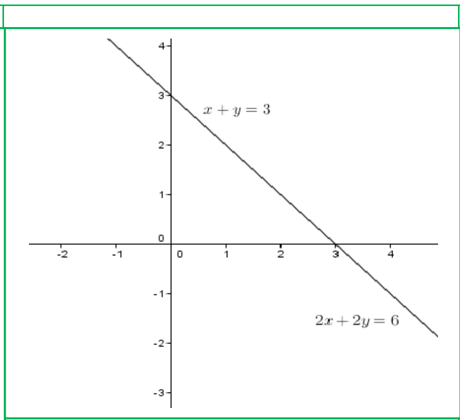
Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

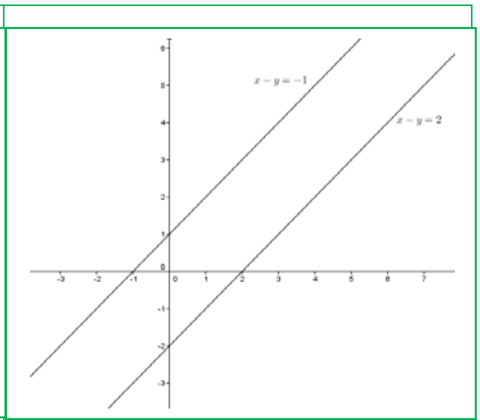
1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**







Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resueltas

- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

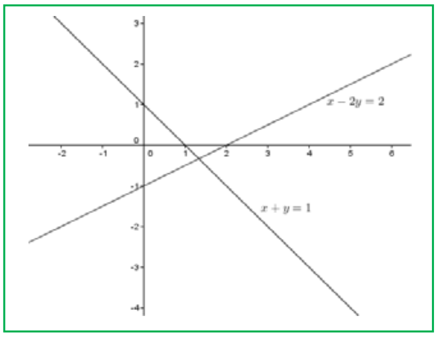
  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

  c) Compatible indeterminado

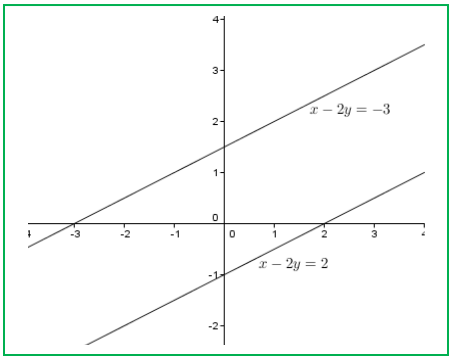
Solución:

a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.

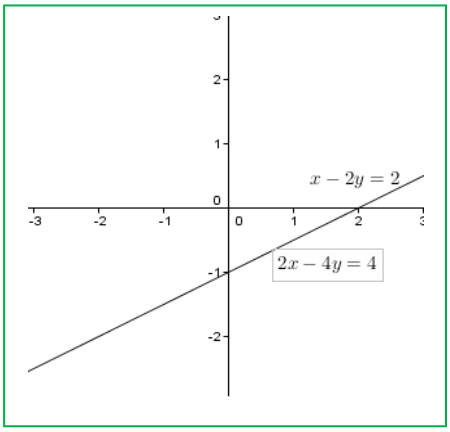


Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propuestas

30. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3-2y)-3y=-1 \Rightarrow 6-4y-3y=-1 \Rightarrow -4y-3y=-1-6 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3-2y \Rightarrow x = 3-2\cdot 1 = 1.$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

31. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.4. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

32. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

4.5. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x-3y=-1 \\ -2x-4y=-6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x - 3\cdot1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

33. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x-5y=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 4x+y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones de 2º grado

Para resolver problemas por medio de ecuaciones de 2º grado, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 es igual a su cuadrado?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice "número natural" el número buscado es el 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

34. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

35. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

36. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

37. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.

5.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

38. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?

39. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

40. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

CURIOSIDADES. REVISTA

CUADRADOS MÁGICOS

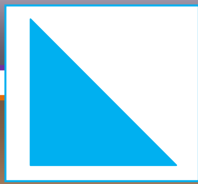
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales.

Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514.

Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

Dos ecuaciones de segundo grado interesantes



$x^2 = 2$

Esta ecuación nos aparece al aplicar el Teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguales a 1, o al calcular la diagonal de un cuadrado de lado 1. Su solución es la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Tiene de interesante que se demuestra que dicha solución NO es un número racional, un número que pueda escribirse como cociente de dos números enteros.

$x + 1 = x^2$

También se puede escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que es una proporción, donde x toma el valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ≈ 1,618… que es el número de oro, otro número irracional.

DIOFANTO

Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

¡Caminante! Aquí yacen los restos de *Diofanto*. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla!

La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia. Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba. A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril. Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito. Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir. Por su parte, *Diofanto* descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió *Diofanto*.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Ecuación	Igualdad entre dos expresiones algebraicas.	$3x - 1 = 2x + 5$
Incógnitas	Letras de valor desconocido que contienen una ecuación	En $3x - 1 = 2x + 5$ la incógnita es x.
Grado de una ecuación	El mayor exponente de la incógnita.	La ecuación $3x - 1 = 2x + 5$ es de primer grado. La ecuación $3x^2 = 27$ es de segundo grado.
Solución de una ecuación	Número por el que se puede sustituir la incógnita para que la igualdad sea cierta.	Solución de $3x - 1 = 2x + 5$ es $x = 6$.
Resolver una ecuación	Es hallar su solución.	$\mathbf{3x - 1 = 2x + 5}$ $3x - 2x - 1 + 1 = 2x - 2x + 5 + 1$; $x = 6$
Ecuaciones equivalentes	Tienen las mismas soluciones	$2x - 5 = x + 2$ es equivalente a: $2x - x = 2 + 5$
Pasos para resolver una ecuación:	Quitar paréntesis Quitar denominadores Agrupar los términos con x en un miembro y los términos sin x en el otro. Operar Despejar la x.	$\mathbf{(3x - 1) = 7/2}$ 1. $6x - 2 = 7/2$ 2. $12x - 4 = 7$ 3. $12x = 7 + 4$ 4. $12x = 11$ 5. $x = 11/12$
Pasos para resolver un problema mediante ecuaciones	Leer el enunciado. Escribir la ecuación. Resolver la ecuación. Comprobar la solución.	Hallar un número que sumado a 7 da lo mismo que su doble menos 3. 1) Comprender el enunciado 2) $x + 7 = 2x - 3$ 3) $x - 2x = -3 - 7$; $-x = -10$; $x = 10$ 4) $10 + 7 = 2 \cdot 10 - 3$
Ecuación de segundo grado	Es una ecuación algebraica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x + -8 = 0$
Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despejamos la incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ y $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0$: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$.

Sistema de ecuaciones lineales	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: Una única solución. Las rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas soluciones, por lo que las rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No tiene solución, las rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Sustitución:** despejar una incógnita y sustituir en la otra ecuación. **Igualación:** despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones. **Reducción:** sumar las dos ecuaciones, multiplicándolas por números adecuados.	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ecuaciones de primer grado

1. Encuentra el número que falta:

a) O + 2 = 5 b) O + 3 = 1 c) O – 4 = 6 d) O – 4 = –1

2. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	*Edad en años*
Julia	$3x - 9$
María	$x^2 - 17$
Federica	$3x + 5 + 7x + 6$
Elisa	$x - 2x + 9$

3. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $x + 3 = 2$ b) $x - 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$

4. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación 3x – 6 = x + 9.

a) $x + 10 = 17{,}5$ c) $8 - x = 3x - 5x$ e) $4x = 30$ g) $2x = 9 + 6$ i) $10 - 2{,}5 = x$

b) $6x + 2x = 60$ d) $5x - 6 = 3x + 9$ f) $-6 - 9 = x - 3x$ *h) $3x = 15$* *j) $x = 7{,}5$*

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$ d) $x + 9 = 3x - 3$ g) $4x + 2 = 14$ i) $3x - 5 = 2x - 5$

b) $x - 12 = 7x + 6$ e) $5x - x + 7 = 2x + 15$ h) $3x - 4 = x + 18$ k) $3x - 4 + x = 8$

c) $x - 1 = x + 5x + 9$ f) $2x - 27 = x$ i) $4x - 6 = x + 9$ l) $3 - 10 = x + 1$

6. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x - 3 = 5$.

7. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

8. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $x - 5 = 9$ b) $x - 8 = 2$ c) $x - 3 = 4$ d) $x - 9 = 6$

9. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 4x = 54$ b) $4x - 3x = 16$ c) $5(x - 2) = 70$ d) $-5x - 2x = -49$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x + 3 = 5$ b. $4x - 5 = x + 4$ c. $x/3 = -2$ d. $-2(3x - 4) = 2x + 5$

11. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $4x - 4 = 2x$ b) $2(x + 7) = x$ c) $x/3 + 2 = x$ d) $3(x + 3x) = x + 50$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

12. Resuelve las ecuaciones:

a) $x/2 - 2(x - 3x) = 27$ b) $2x - (2x - 3) + x = 4$ c) $7 = 1 + x/2$ d) $4 - x = 2 + x/2$

13. Resuelve:

a) $x / 3 = 7$; b) $3x = 9$; c) $x + 4 = 12$; d) $x - 7 = 1$

14. Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:

1ª serie

1) $x + 4 = 6$ 2) $x + 6 = 3$ 3) $15 = 11 + x$ 4) $7 = x + 3$ 5) $x + 8 = 4$
6) $x + 6 = 8$ 7) $x + 7 = 3$ 8) $8 + x = 16$ 9) $3 = 7 + x$ 10) $2 = x + 4$

2ª serie

11) $x - 3 = 6$ 12) $x - 4 = 2$ 13) $4 = x - 1$ 14) $7 - x = 2$ 15) $6 - x = 4$
16) $3 = 9 - x$ 17) $x - 4 = 7$ 18) $x - 2 = 0$ 19) $8 - x = 3$ 20) $9 - x = 5$

3ª serie

21) $3x = 6$ 22) $4x = 16$ 23) $6x = 18$ 24) $8 = 2x$ 25) $-12 = 3x$
26) $2x = -6$ 27) $4x = 11$ 28) $3x = 6$ 29) $9 = 3x$ 30) $18 = 6x$

4ª serie

31) $x/5 = 1$ 32) $x/3 = 7$ 33) $x/-2 = 3$ 34) $x/5 = 2/3$ 35) $x/10= 3/2$
36) $x/7 = 2$ 37) $x/12 = 3/4$ 38) $x/3 = -2/9$ 39) $x/5 = -2$ 40) $x/7 = 3/14$

5ª serie

41) $x + 3x = 16$ 42) $4x + 2x = 6$ 43) $6x = 8 + 10$ 44) $3x + 7 = 4$
45) $2x + 7 = 11 + 4x$ 46) $x +1 = 2x - 5 + 2x$ 47) $3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1$
48) $4x - 3 + x = 3x + 7$ 49) $x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5$ 50) $6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7$

6ª serie

51) $x/3 -2 = 4$ 52) $3x/5 + 4 = 3$ 53) $x/3 + 2x/3 = 7$ 54) $x/5 + 3x/5 = 9$
55) $x/2 + x/2 + 3 = 5$ 56) $3x/7 + 2x/7 + 3 = 6$ 57) $x + x/5 = 7$ 58) $x/2 + 5x/2 + 3 = 5$
59) $5 + x/7 = 21$ 60) $3 + x/3 = 9$

7ª serie

61) $3 + 4(2 - x) = 9 - 2x$ 62) $5 - 2(x + 2) = x - 5$
63) $13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1$ 64) $7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)$
65) $5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)$ 66) $2(3x - 5) - (2x + 1)= 17 - 3x$
67) $2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)$ 68) $5 - 2(7 - 2x) = x - 6$
69) $3x - 4(x - 1) = 8 - 5x$ 70) $5x - (2x + 3) = 2x - 5$

8ª serie

71) $x/3 + x/6 = 12$ 72) $x/6 + x/3 + x/2 = 5$ 73) $(x - 3)/5 = 1$ 74) $x/2 - 3 = 4$
75) $(2x + 9)/3 = 7$ 76) $(2x + 9)/3 = x$ 77) $(x - 3)/5 = x$ 78) $5 + x/4 = 6$
79) $4x/3 + 5x/6 = x/3 + 2$ 80) $2x/3 + 7x/2 + 5x = 8 + x/6$

Problemas

15. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?

16. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?

b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?

c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?

d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

17. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

18. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.

19. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?

20. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)

21. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?

22. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?

23. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2,55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?

24. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?

25. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

26. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?

27. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

28. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.

29. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.

30. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.

31. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

32. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?

33. **Cuadrados mágicos:** En el cuadro Melancolía del famoso pintor alemán Alberto Durero (1471-1528) aparece este cuadrado mágico en el que todas las filas, columnas y diagonales suman lo mismo, y además ese mismo resultado se obtiene sumando las cuatro casillas centrales. Además, las dos casillas del centro de la línea inferior indican el año en el que este cuadrado mágico fue resuelto, 1514. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

34. DIOFANTO: Diofanto fue un famoso matemático griego del siglo III d. C. En el epitafio de su tumba escribió:

- ¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar ¡oh maravilla! La duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.
- Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.
- A partir de ahí, la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.
- Pasó, además un quinquenio y entonces le hizo dichoso el nacimiento de primogénito.
- Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.
- Por su parte, Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Ecuaciones de segundo grado

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

37. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $x(-1 + x) = 0$ c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ e) $x^2 + 3x - 10 = 0$ f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

38. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 5, escribe:

$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)\cdot(x - 5) = 0.$

Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

39. Cuando el coeficiente b es par (b = 2B), puedes simplificar la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm\sqrt{4B^2-4ac}}{2a}=\frac{-2B\pm2\sqrt{B^2-ac}}{2a}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 6x + 8 = 0$ basta decir $x=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$, luego sus soluciones son 2 y 4.

Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ b) $x^2 - 10x + 24 = 0$ c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

40. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 3) = 0$ c) $(x - 9)\cdot(x - 3) = 0$

d) $(x - 1)\cdot(x + 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x - 2) = 0$ f) $(x - 4)\cdot(x + 6) = 0$

41. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discrimínate, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

42. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. *Ayuda*: Utiliza el discriminante.

43. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

44. Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

45. ¿Podrías escribir una ecuación de segundo grado con únicamente una solución real que no fuese doble?

Sistemas lineales de ecuaciones

46. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases}2x-5y=-4\\3x-y=7\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x+y=4\\2x+5y=7\end{cases}$ c) $\begin{cases}6x+5y=7\\2x+3y=1\end{cases}$

47. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases}-2x+3y=13\\3x-7y=-27\end{cases}$ b) $\begin{cases}5x-2y=-3\\4x-y=0\end{cases}$ c) $\begin{cases}9x-5y=4\\-8x+3y=-5\end{cases}$

48. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases}3x-5y=1\\2x+y=5\end{cases}$ b) $\begin{cases}4x+3y=14\\-x-6y=7\end{cases}$ c) $\begin{cases}9x-5y=4\\-7x+5y=-2\end{cases}$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

49. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

50. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

51. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

Su solución sea x = 2 e y = 1

c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

Su solución sea x = –1 e y = 1

e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminado

f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

52. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

53. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

54. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

55. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas

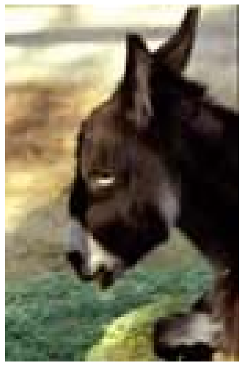
56. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

57. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

58. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

59. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

60. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.



61. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

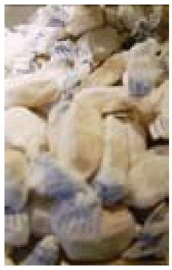
62. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

63. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365

64. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

65. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

66. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?



67. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

68. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

69. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

70. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

71. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

72. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

73. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

74. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

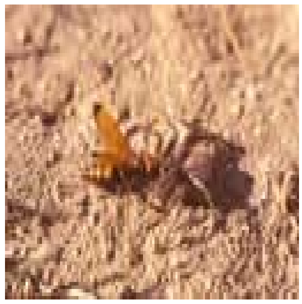
75. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

76. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

77. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

78. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?



79. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?

80. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

81. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación 3,4 + 5,2x – 8,1x = 9,4 + 7,3x es:

a) –10/17 b) +6/–10,2 c) – 10/1,7 d) 0,58

2. La ecuación $x^2 = 4$ tiene de soluciones:

a) 2 b) –2 c) 2 y –2 d) 0 y 2

3. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $x + x + 8 = 50$ b) $x - 8 = 50$ c) $50 + x = 8 - x$ d) $x + x - 8 = 50$

4. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:

a) 30 y 11 b) 20 y 9 c) 25 y 10 d) 55 y 20

5. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?

a) $2x + x + 3x = 142$ b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$ c) $x + 2x + 3x = 142 - 8$ d) $6x = 136$

6. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = -3$ c) $x = 1$ y $x = -2/3$ d) $x = 2$ y $x = -6/5$

7. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$

8. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$

9. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ es:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 1$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución

10. La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ es:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$

Autores: David Miranda, Raquel Caro y Raquel Hernández
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Formación Profesional Básica

Matemáticas II

Capítulo 3: Funciones

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 6: Funciones y Gráficas de 4º A ESO de autores: José Gallegos y David Miranda

ÍNDICE

Resumen

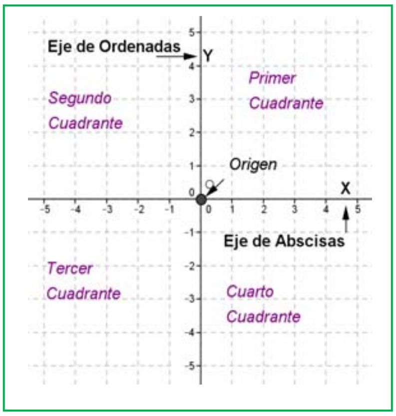
La Ciencia utiliza modelos, y muchos modelos se consiguen ajustando una función a una tabla de valores. Por ejemplo, en este momento estamos ajustando unas parábolas a la relación entre la duración del desarrollo en días y la temperatura de los diferentes estadios de la cochinilla roja, *Aonidiella aurantii*, que es una plaga que ataca a los cítricos produciendo desde la muerte del árbol a su desvalorización comercial, y de sus enemigos naturales, como los del género *Aphytis*, que bajo ciertas condiciones pueden llegar a regular las poblaciones de tal forma que no hagan falta utilizar otras medidas adicionales de control como insecticidas.

Una vez conseguida una función que se ajuste a una tabla de valores se puede pronosticar lo que va a ocurrir o dar valores que no se conocían previamente.

Ajustar modelos mediante funciones que sirvan en las situaciones más variadas es una de sus aplicaciones más importantes.

1. FUNCIONES

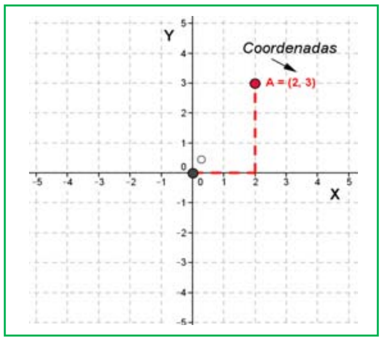
1.1. Ejes de coordenadas o cartesianos. Coordenadas cartesianas



Recuerda que:

Un conjunto formado por el **origen** *O*, los dos **ejes de coordenadas** y la **unidad de medida** es un **sistema de referencia cartesiano**.

Las **coordenadas** de un punto *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada**. A toda pareja ordenada de números (*x*, *y*) le corresponde un punto del plano.

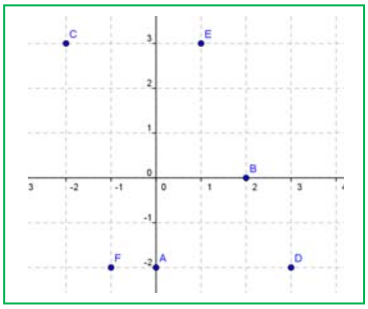


También cualquier punto del plano queda totalmente determinado mediante sus coordenadas.

Ejemplo:

- En el gráfico anterior, el punto *A* tiene coordenadas (2, 3).

Actividades propuestas



1. Copia en tu cuaderno e indica las coordenadas de todos los puntos que están señalados en el plano:

2. Representa gráficamente en tu cuaderno los siguientes puntos del plano: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

1.2. Concepto intuitivo de función

Ya sabes que:

Existen multitud de fenómenos en nuestra vida cotidiana en los que aparecen relacionadas dos magnitudes. Por ejemplo, el precio de un kilo de manzanas y el número de kilos que compramos, la duración de un trayecto y la velocidad a la que vamos…

Una **función** es una relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una, llamada **variable independiente** ("*x*"), le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra, llamada **variable dependiente** ("*y*").

Observa que si a un mismo valor de *x* le corresponden dos o más valores de *y*, entonces la relación **no** es una función. En cambio, a la inversa, en una función un mismo valor de *y* sí puede provenir de distintos valores de *x*.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Las relaciones funcionales se pueden establecer mediante una tabla de valores, una gráfica o una expresión matemática o fórmula.

Ejemplo:

- Un kilo de tomates cuesta 0,8 €/kg. La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es $y = f(x) = 0,8\ x$.

En la expresión $y = f(x)$, ***f*** es el nombre que le ponemos a la **función**, (podríamos llamarla usando otras letras, las que se usan más frecuentemente son "*f*", "*g*" y "*h*"). Entre paréntesis va la variable "***x***" que representa el número de kilos que compramos, es la **variable independiente** puesto que nosotros elegimos libremente la cantidad de tomates que queremos o necesitamos. La variable "***y***" representa el precio que debemos pagar, es la **variable dependiente** puesto que "depende" de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de "*x*".

La expresión, ***f*(*x*)**, que se lee "*f* de *x*", se suele usar con mucha frecuencia para designar a la variable dependiente porque resulta muy cómodo escribir cuánto nos costaría comprar una cantidad concreta, por ejemplo, 5 kg, se expresaría "*f* de 5" y su valor es $f(5) = 0,8·5 = 4$ €.

Actividades propuestas

3. De las siguientes relaciones entre dos variables, razona cuáles son funcionales y cuáles no:

a. Edad y peso de una persona concreta a lo largo de su vida
b. Peso y edad de esa misma persona
c. Un número y su mitad
d. Un número y su cuadrado
e. Precio de la gasolina y el día del mes
f. Día del mes y precio de la gasolina

4. Si hoy el cambio de euros a dólares está 1 € = 1,3 $, completa en tu cuaderno la siguiente tabla de equivalencia entre las dos monedas:

€	2	5	10	27	*x*
$					

Expresa mediante una fórmula la relación que existe entre ambas, en la que, conociendo los euros, se obtengan los dólares. ¿Se puede expresar de forma única dicha relación? ¿Es una función?

Si cuando realizas el cambio en una oficina te cobran una comisión fija de 1,5 €, ¿cómo quedaría la fórmula en este caso?

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Grafo y gráfica de una función

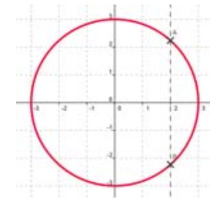
Ya que en toda función tenemos dos valores que se relacionan de forma única, podemos dibujar ambos en los ejes cartesianos de forma que, si unimos todos esos puntos, obtenemos una curva que nos permite visualizar dicha función.

Dicha representación tiene una serie de limitaciones, muchas de ellas comunes a cualquier dibujo que se pueda hacer: es aproximada puesto que los instrumentos que se utilizan para hacerlo (regla, compás, lápiz…), por muy precisos que sean (ordenadores), siempre tienen un margen de error; también existen fallos de tipo visual o de los instrumentos de medida; o muchas veces tenemos que representar los infinitos puntos del grafo en un espacio finito, lo cual es imposible y hace que solo podamos dibujar una parte de lo que se pretende, pero no todo.

A pesar de todos estos inconvenientes, representar gráficamente esta serie de puntos relacionados que conforman la función, aunque sea de forma aproximada, es importante, puesto que nos permite entender muchas propiedades a simple vista: “*más vale una imagen que mil palabras*”.
Además, una representación también nos permite descubrir si la misma representa a una función o no, ya que en el dibujo es fácil interpretar si a un valor de la variable independiente le corresponde únicamente uno de la dependiente o más de uno, propiedad fundamental que define a las funciones.

Ejemplo:

- El siguiente dibujo, que corresponde a una circunferencia, al valor **0** de la variable independiente le corresponden los valores **3** y **–3** de la dependiente. Además, hay otros muchos valores a los que les pasa lo mismo, como para x = 2, que corta a la gráfica en los puntos A y B. La circunferencia no puede ser la representación de una función.



$x^2 + y^2 = 9$

La fórmula que corresponde a dicha gráfica es $x^2 + y^2 = 9$ o, también $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.

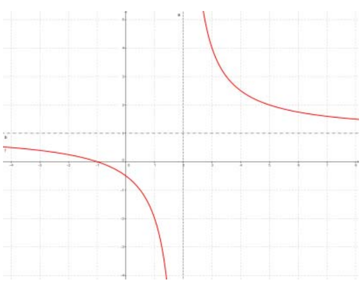
El **grafo de una función** es el conjunto de todos los pares ordenados en los que el primer valor corresponde a uno cualquiera de la variable independiente y el segundo al que se obtiene al transformarlo mediante la función:

$$Grafo(f) = \{(x, y); x \in \Re, y = f(x)\}$$

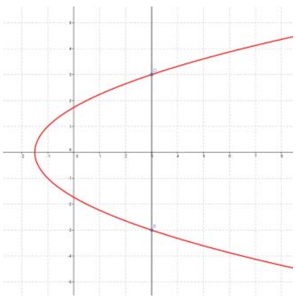
La **gráfica de una función** es la representación en el plano cartesiano de todos los puntos que forman el grafo de la misma.

Actividad resuelta

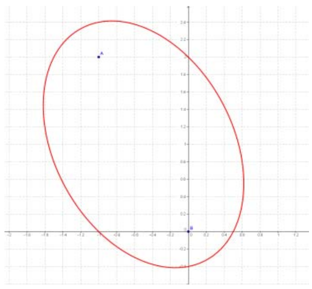
- *Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función y cuáles no:*



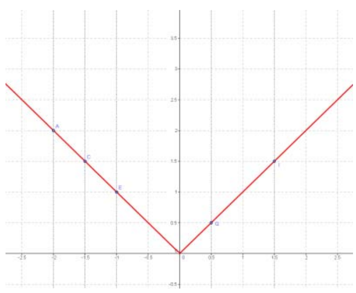
SÍ



NO



NO



SÍ

¿Cuál es la clave o regla para reconocer, a partir del dibujo, si este corresponde a una función o no?

Si trazamos rectas verticales imaginarias y estas chocan con el dibujo, como mucho, en un punto, la gráfica corresponde a una función. Si choca en dos o más puntos, no es una función.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

5. Realiza en tu cuaderno el dibujo de dos gráficas, una que corresponda a una función y otra que no. Identifica cada cual y explica el porqué de dicha correspondencia.

6. Razona si los valores de la siguiente tabla pueden corresponder a los de una función y por qué:

x	–10	–5	10	–10	27
f(*x*)	–3	0	5	4	0

7. Una persona camina a una velocidad de 4 km/h y parte del kilómetro 10. Escribe la expresión algebraica de la función que indica los kilómetros recorridos en función del tiempo. Señala cuáles son los valores que no tiene sentido dar a la variable independiente y en qué se traduce eso en la gráfica.

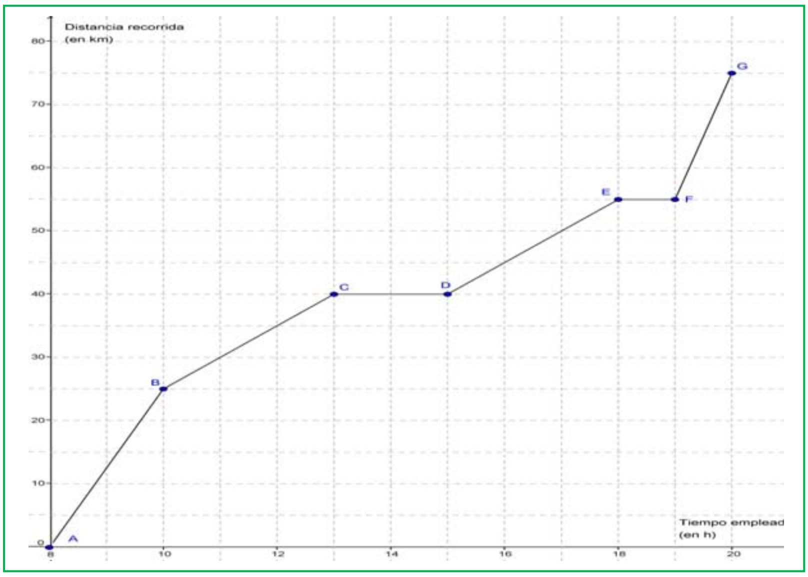
8. En una hoja de papel cuadriculado raya un cuadrado de lado un cuadradito. Su área es 1 u^2. Ahora haz lo mismo con un cuadrado de lado 2. Continúa tomando cuadrados de lados 3, 4, 5… y calcula sus áreas. Con los resultados completa una tabla de valores y dibuja su gráfica. ¿Tiene sentido para valores negativos de la variable? Busca una fórmula para esta función.

9. Para aparcar en zona azul (no residentes) hay unas tarifas. La tarifa mínima es de 0,50 euros, el tiempo máximo de aparcamiento es de 2 horas, cada media hora más cuesta 0,90 euros, y cada fracción, 0,05 euros. Representa una gráfica de la función cuya variable independiente sea el tiempo que se espera va a estar aparcado el vehículo y la variable dependiente el precio (en euros) que hay que pagar.

10. Un fabricante quiere construir vasos cilíndricos medidores de volúmenes, que tengan de radio de la base 5 cm y de altura total del vaso 18 cm. Escribe una fórmula que indique cómo varía el volumen al ir variando la altura del líquido. Construye una tabla con los volúmenes correspondientes a las alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe también una fórmula que permita obtener la altura conociendo los volúmenes. ¿A qué altura habrá que colocar la marca para tener un decilitro?

11. La siguiente gráfica resume la excursión que hemos realizado por la sierra de Guadarrama:

a) ¿Cuánto tiempo duró la excursión?
b) ¿Cuánto tiempo se descansó? ¿A qué horas?
c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron?
d) ¿En qué intervalos de tiempo se fue más rápido que entre las 11 y las 13 horas?
e) Haz una breve descripción del desarrollo de la excursión.
f) Construye una tabla de valores a partir de los puntos señalados en la gráfica.
g) Si en el eje de ordenadas representáramos la variable "distancia al punto de partida", ¿sería la misma gráfica? Con los datos que dispones, ¿puedes hacerla?



12. La relación entre la altura y la edad de los diferentes componentes de un equipo de baloncesto, ¿es una relación funcional? ¿Por qué? ¿Y la relación entre la edad y la altura? Escribe tres correspondencias que sean funcionales y tres que no.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

2.1. Dominio y continuidad.

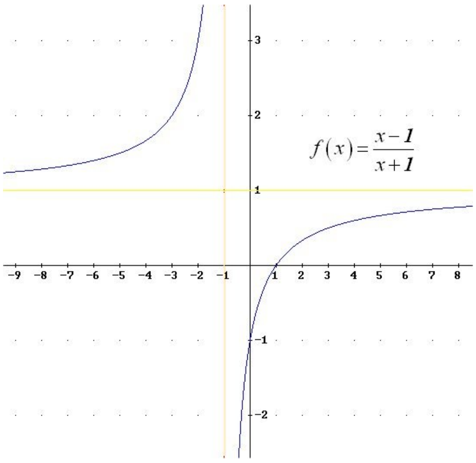
El **dominio** de una función es el conjunto de puntos en los que está definida.

$$Dom(f) = \{x \in \Re \mid \exists f(x)\}$$

El concepto de **continuidad** de una función es muy intuitivo ya que se corresponde con que la gráfica se pueda dibujar sin levantar el lápiz del papel. Cuando esto no ocurre, se producen "*saltos*" en determinados puntos que reciben el nombre de discontinuidades.

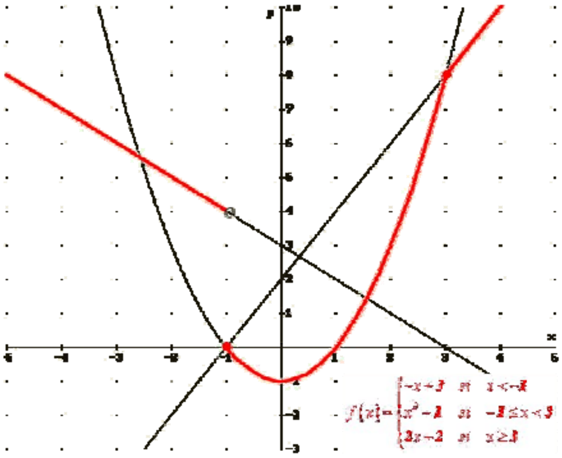
Actividad resuelta

- *¿Qué funciones son continuas según su gráfica y cuáles no? Indica en estas últimas el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad:*



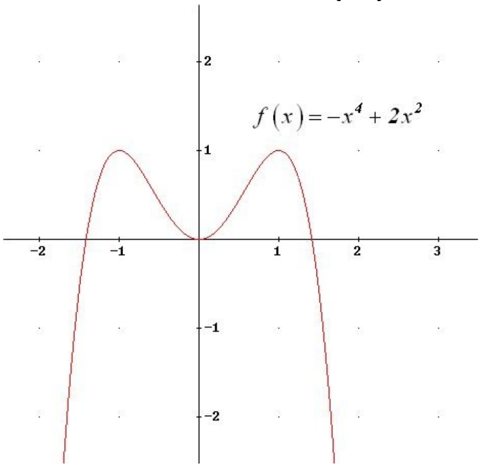
NO es continua en $x = -1$ donde tiene un salto infinito. Es continua en el resto de los puntos

Su dominio es $\Re - \{-1\}$.



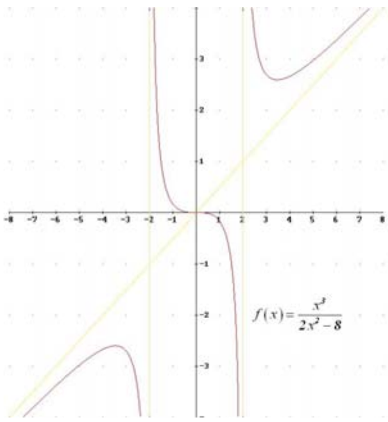
NO es continua en $x = -1$ donde tiene un salto finito de 4 unidades. En el resto, es continua.

Su dominio es $\Re$.



SÍ, es continua para cualquier valor de *x.*

Su dominio es $\Re$.



NO es continua ni en $x = -2$ ni en $x = 2$ donde tiene saltos infinitos.

Es continua en $\Re - \{-2, 2\}$, que es su dominio.

Autores: José Gallegos y David Miranda

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Una función es **creciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la variable dependiente.

Una función es **decreciente** en un intervalo si al aumentar el valor de la variable independiente disminuye el de la variable dependiente.

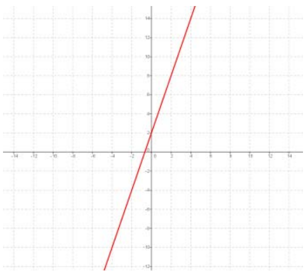
Una función es **monótona** en un intervalo cuando es únicamente creciente (o únicamente decreciente) en dicho intervalo.

Una función es **constante** en un intervalo cuando la variable dependiente toma siempre el mismo valor.

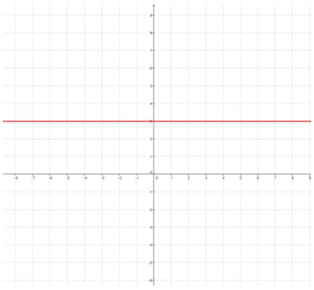
Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

Actividad resuelta

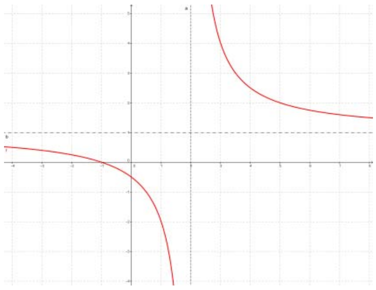
- *Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones siguientes:*



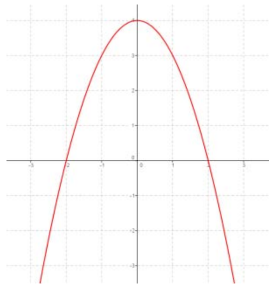
CRECIENTE siempre (monótona)



CONSTANTE siempre



DECRECIENTE hasta x = 2
DECRECIENTE desde x = 2



CRECIENTE hasta x = 0
DECRECIENTE desde x = 0

2.3. Tasa de variación

La **tasa de variación** es lo que aumenta o disminuye una función entre dos valores. Se define como:

TV = $f(x_2) - f(x_1)$, para $x_2 > x_1$.

Si la función es creciente en un intervalo, entonces la tasa de variación es positiva, y si es decreciente, negativa.

La tasa de variación media se define como: TVM = $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

La TVM es muy importante, porque no es lo mismo que una función varíe su valor una misma cantidad en un intervalo pequeño que en un intervalo grande. Por ejemplo, no es lo mismo pasar de 0 a 100 km/h en 5 segundos que en 20 segundos.

Ejemplo:

- En el desplazamiento de un vehículo en función del tiempo, la tasa de variación, es lo que se ha desplazado en un intervalo de tiempo, y la tasa de variación media indica la velocidad media en ese intervalo de tiempo.

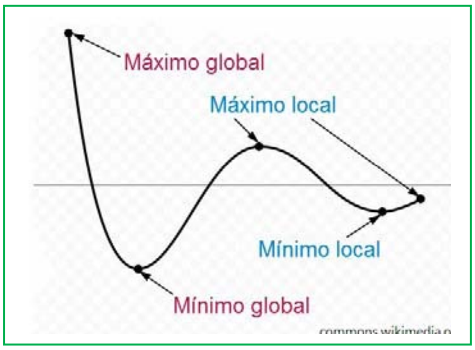
Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** (o máximo **local**) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es mayor que cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

$(a, f(a))$ es **máximo relativo** si $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo

Si, además, el valor es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** (o máximo global) en él.



$(a, f(a))$ es **máximo absoluto** si $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$

Una función presenta un **mínimo relativo** (o mínimo **local**) en un punto cuando el valor de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

$(a, f(a))$ es **mínimo relativo** si $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo

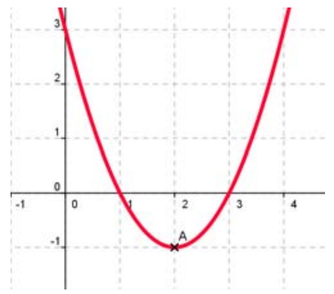
Si, además, el valor es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** (o mínimo **global**) en él.

$(a, f(a))$ es **mínimo absoluto** si $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

Actividades resueltas

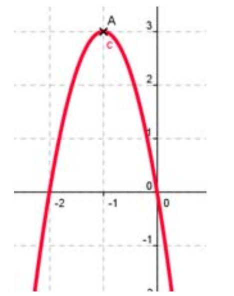
- *Estudia los máximos y mínimos de las funciones siguientes:*



$y = x^2 - 4x + 3$

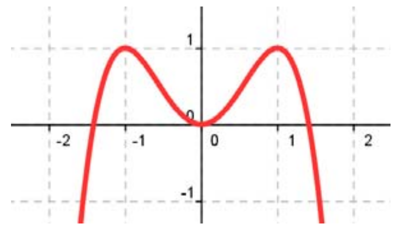
- La parábola $y = x^2 - 4x + 3$ tiene un mínimo absoluto en su vértice $(2, -1)$. No tiene máximos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice es decreciente y después es creciente.

- La parábola $y = -3x^2 - 6x$ tiene un máximo absoluto en su vértice $(-1, 3)$. No tiene mínimos, ni relativos ni absoluto. Antes del vértice, para $x < -1$, la función es creciente, y después, para $x > -1$, la función es decreciente.



$y = -3x^2 - 6x$

Todas las parábolas tienen un máximo o un mínimo absoluto en su vértice.

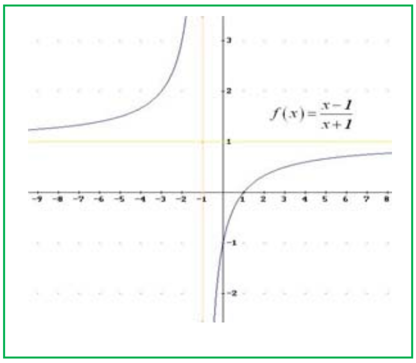


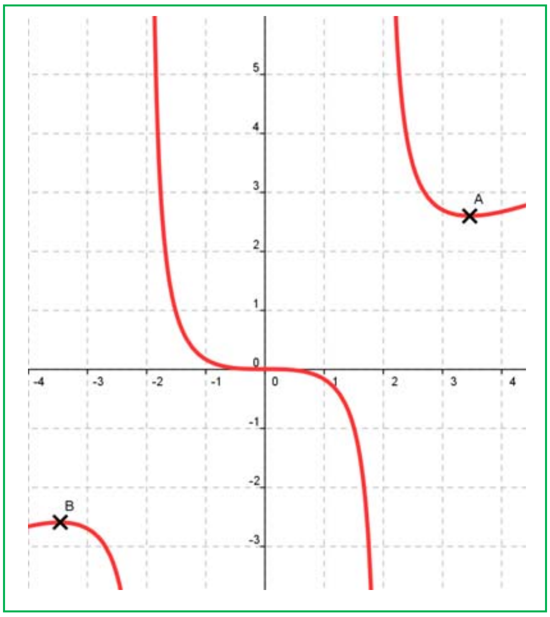
$y = -x^4 + 2x^2$

- La función $y = -x^4 + 2x^2$ tiene un mínimo absoluto en el origen $(0, 0)$ y dos máximos en $(1, 1)$ y en $(-1, 1)$. Para $x < -1$ es una función creciente, para $-1 < x < 0$, es una función decreciente, para $0 < x < 1$ es creciente, y para $x > 1$ es decreciente.

Observa, en los **máximos** siempre la función pasa de ser **creciente** a ser **decreciente**, y el los **mínimos** de ser **decreciente** a ser **creciente**.

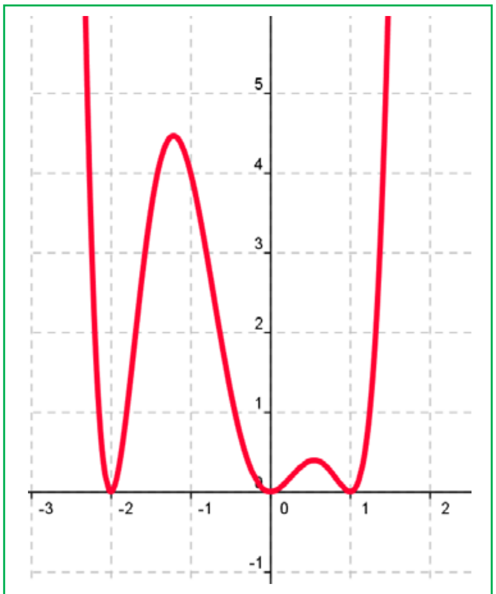
- La función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ no tiene ni máximos ni mínimos (ni relativos ni absolutos). Es una función siempre creciente.



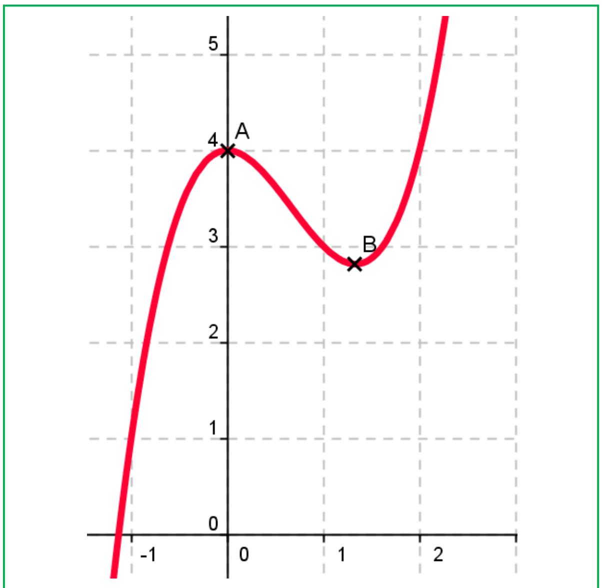


- La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$ no tiene máximo ni mínimo absoluto, pero tiene un mínimo relativo hacia x = 3, A(3'46, 2'6), y un máximo relativo hacia x = –3, B(–3'46, –2'6). Observa que el valor del mínimo relativo, 2'6, es mayor que la del máximo relativo, –2'6. Pero en valores próximos al mínimo si es el menor valor, por este motivo se denominan "*relativo*", "*local*". No son los valores menores (o mayores) que alcanza la función, pero si únicamente miramos en un entorno del punto si son valores máximos o mínimos.

- La función $f(x)$ = x^2 $(x-1)^2$ $(x-2)^2$ no tiene ningún máximo absoluto, pero si tiene dos máximos relativos, uno en el intervalo (–2, –1) y el otro en el intervalo (0, 1). Tiene, sin embargo, tres mínimos absolutos en los puntos (–2, 0), (0, 0) y (1, 0). La función es siempre positiva y su valor mínimo absoluto es **0**.



$f(x) = x^2\,(x-1)^2\,(x-2)^2$



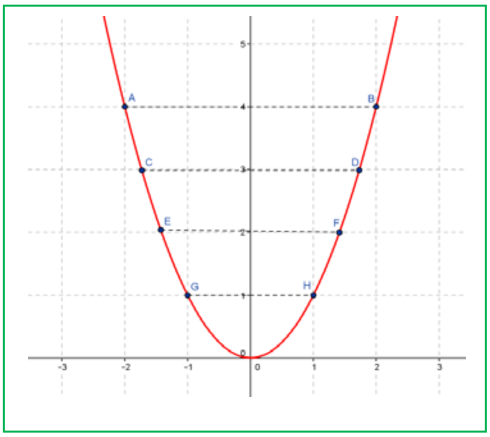
$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

- La función $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ no tiene ni máximos ni mínimos absolutos, pero tiene un máximo relativo en el punto A(0, 4) y un mínimo relativo en el punto B(4/3, 2,8). Es creciente para $x < 0$, decreciente para $0 < x < 4/3$, y creciente para $x > 4/3$.

2.5. Simetría

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número que su opuesto:

$$f(-x) = f(x)$$



Si una función es par entonces es **simétrica** respecto al **eje de ordenadas**, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

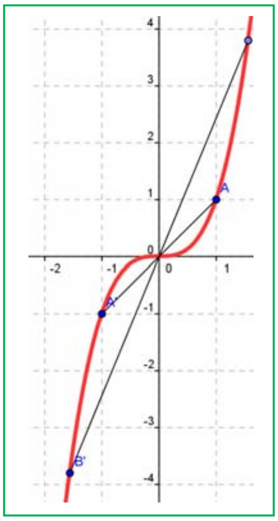
Ejemplo:

- La función cuadrática $f(x) = x^2$ es par:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número por su opuesto:

$$f(-x) = -f(x)$$



Si una función es impar entonces es **simétrica** respecto al **origen** de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

- La función $y = x^3$ es una función impar pues es simétrica respecto del origen.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

El segmento *AO* es igual al segmento *OA'*, y el segmento *BO* es igual al segmento *OB'*.

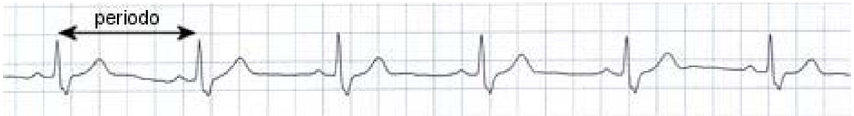
2.6. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que los valores de la función se repiten siempre que se le añade a la variable independiente una cantidad fija, ***T***, llamada ***periodo***. Las funciones periódicas verifican que:

$$f(x + T) = f(x).$$

Ejemplo:

- Un ejemplo de función periódica es el siguiente, que corresponde a un electrocardiograma:



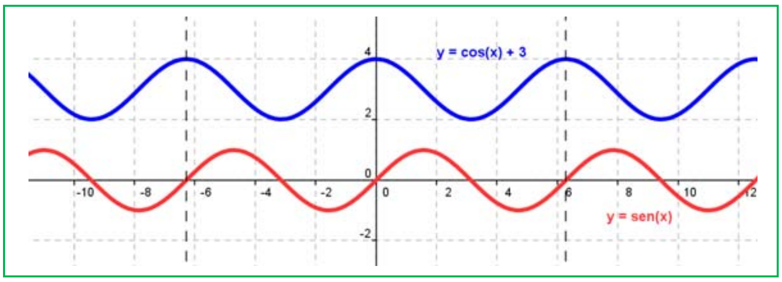
Se observa claramente que la gráfica se repite a intervalos iguales, ya que los latidos del corazón son rítmicos.

Actividad resuelta

- Las funciones:

$y = sen(x)$,

$y = cos(x) + 3$,



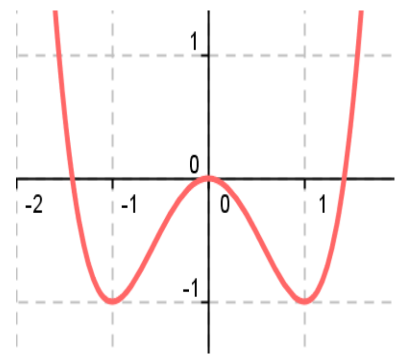
son funciones periódicas. Observa que su periodo es algo mayor que 6, es 2·π. En cada intervalo de longitud 2 · π se repite una oscilación. Verifican que.

$sen(x + 2\cdot\pi) = sen(x)$, y que: $cos(x + 2\cdot\pi) + 3 = cos(x) + 3$.

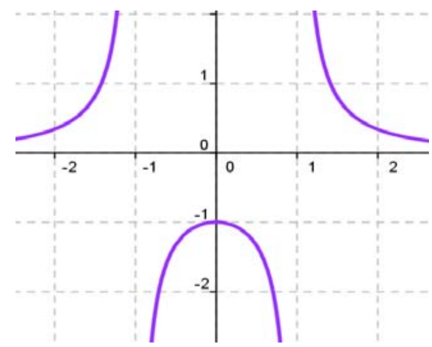
Actividades propuestas

13. Copia las siguientes gráficas en tu cuaderno y señala todas las características que puedas de las funciones representadas. Indica su dominio, si es continua (o puntos de discontinuidad si los hubiera), si es simétrica y tipo de simetría, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodo (si lo hubiera)…

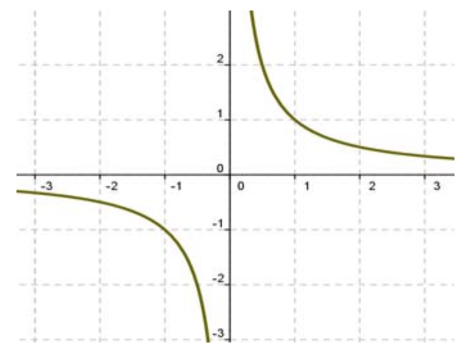
a)



b)



c)



Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. TIPOS DE FUNCIONES

3.1. Funciones polinómicas de primer grado. La recta

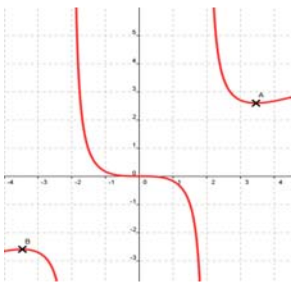
Proporcionalidad directa

Recuerda que:

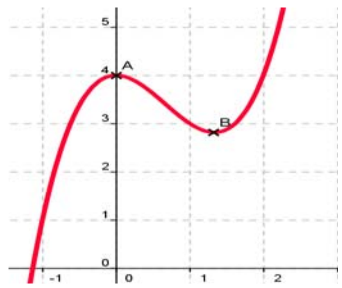
Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

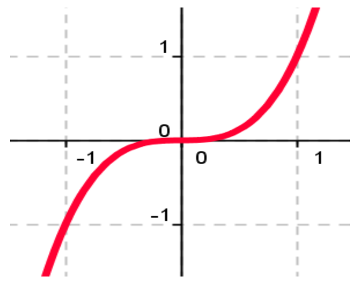
d)



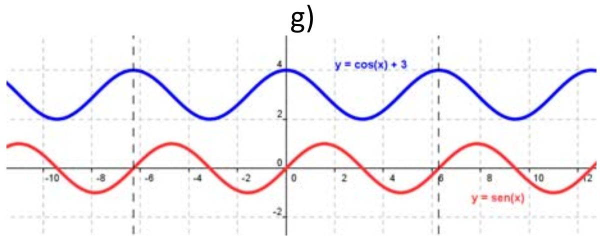
e)



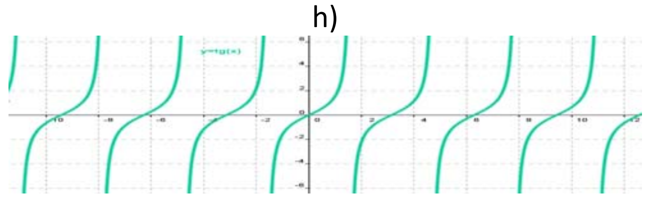
f)



g)



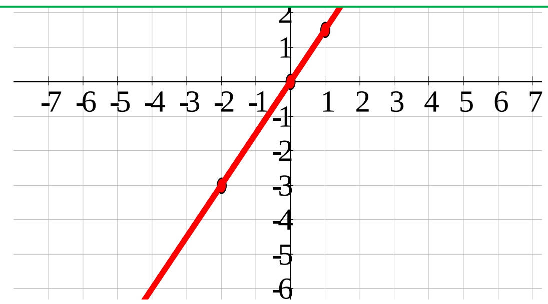
h)



Ejemplo:

- Representar gráficamente la relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:

Magnitud A (*x*)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (*y*)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$$k = \frac{-7{,}5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1{,}5}{1} = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$$

La relación se define así: $y = 1{,}5 \cdot x$.

Recuerda que:

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

Se puede escribir la relación entre la magnitud A (x) y la magnitud B (y) como $y = kx$ donde k es la **razón de proporcionalidad**.

Ejemplo:

La relación entre el peso en kilogramos y el coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = kx$, donde k es el precio de un kilo.

Muchas de las relaciones en Física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa…

Actividades propuestas

14. El consumo medio de agua al día por habitante es de 150 litros. Representa gráficamente el consumo de agua de una persona a lo largo de una semana.

Función lineal. Rectas de la forma $y = m\cdot x$

Recuerda que:

Una **función lineal** es la que tiene la fórmula $\boldsymbol{y = m\cdot x}$.

Es una función polinómica de primer grado a la que le falta el término independiente.

Una función lineal corresponde a una relación de proporcionalidad directa.

Por tanto, la relación de proporcionalidad directa es una **función lineal** de la forma $\boldsymbol{y = m\cdot x}$.

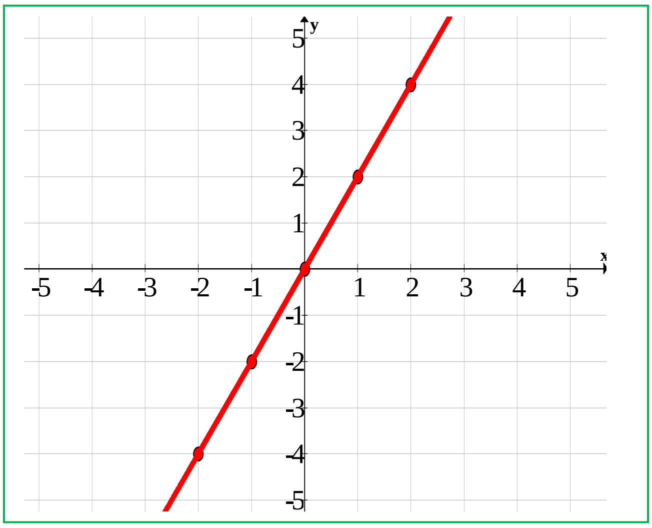
La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una **recta** que pasa por el origen.

Por lo que la gráfica de una **función lineal** es una recta.

Ejemplo

Representa la recta $y = 2\cdot x$

Nota: para definir una recta es suficiente con conocer dos de sus puntos (1, 2), (0, 0).



Recuerda que:

- Las rectas $y = m\cdot x$ tienen los siguientes componentes:
- x es la variable **independiente**.
- y es la variable **dependiente**.
- m es la **pendiente** de la recta.

Las características más importantes de las funciones lineales son:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0, 0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todo el conjunto de los números reales: tanto *x* como *y* aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Interpretación geométrica de la pendiente

El coeficiente *m* (que es la razón de proporcionalidad) se llama **pendiente de la recta.** La pendiente *m* es lo que diferencia unas funciones lineales de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas y determina su crecimiento.

Si $m > 0$. la función es **creciente**.

Si $m < 0$, la función es **decreciente**.

Si $m = 0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece.

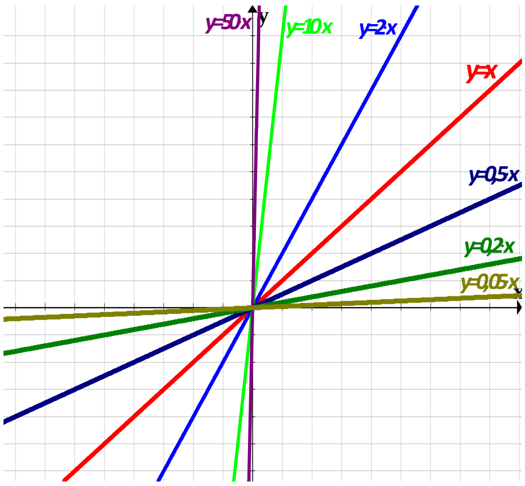
En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad *k*.

Actividades resueltas

Representa gráficamente las funciones:

$y = x$; $y = 2x$; $y = 10x$; $y = 50x$; $y = 0{,}5x$; $y = 0{,}2x$; $y = 0{,}05x$.

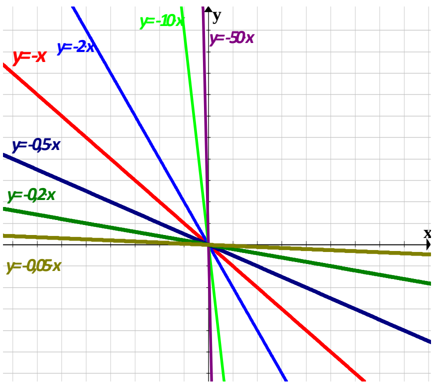
Analiza el resultado.



- La recta $y = x$, tiene de pendiente $m = 1$.

- Si aumenta *m*, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje *y*.

- Si disminuye *m*, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta convertirse en el eje *x* cuando $m = 0$.



Representa gráficamente las funciones:

$y = -x$; $y = -2x$; $y = -10x$; $y = -50x$; $y = -0{,}5x$; $y = -0{,}2x$; $y = -0{,}05x$.

Analiza el resultado.

- Si aumenta *m* (es decir, disminuye en valor absoluto pues es negativo), entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje *x*: $y = 0$.

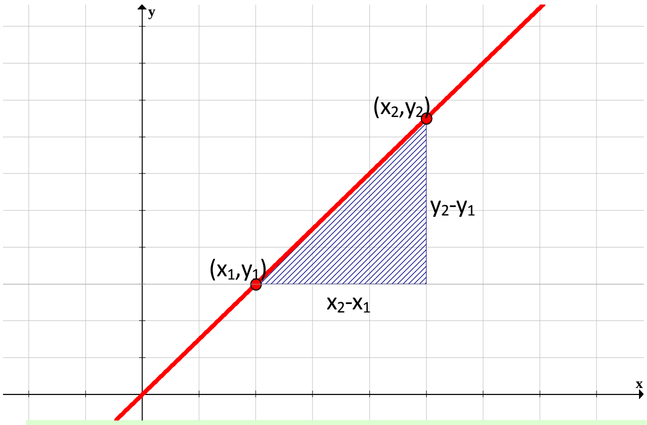
- Si disminuye *m* (es decir, aumenta en valor absoluto pues es negativo), entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje *y*.

La **pendiente** de la recta $y = mx$ es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m > 0$, la recta es creciente.
- Si $m < 0$, la recta es decreciente.

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza. Hemos observado que:

- Si $m > 0$:
  - Para valores altos de m la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de m la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.
- Si $m < 0$:
  - Para valores altos de m la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de m la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.



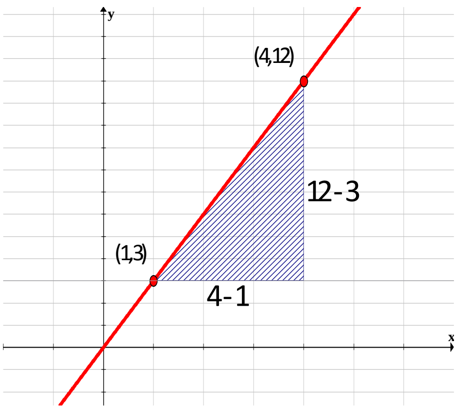
Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:

Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la **pendiente** se calcula de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

es decir, $m = \dfrac{\textit{lo que sube}}{\textit{lo que avanza}}$

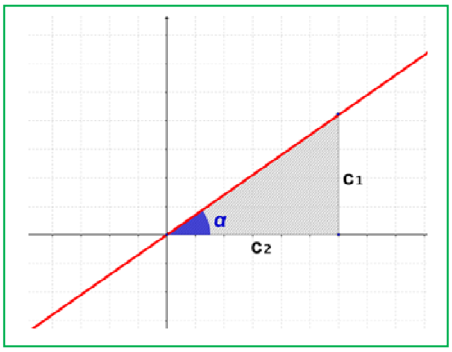
La **tasa de crecimiento media** de una función lineal coincide con su pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Ejemplo:

- La recta que pasa por los puntos (1, 3) y (4, 12) sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$



Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

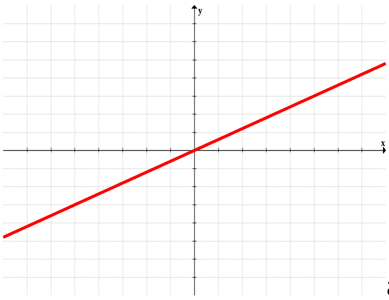
El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos.

Actividades propuestas

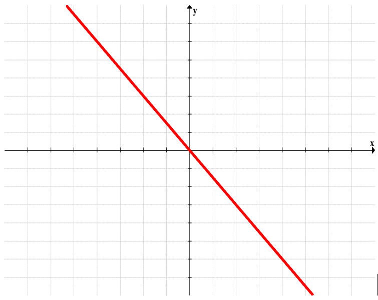
15. Representa en tu cuaderno, estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales siguientes:

a) $y = 1{,}25 \cdot x$; b) $y = (3/5) \cdot x$; c) $y = 3 \cdot x$; d) $y = 0{,}5 \cdot x$;

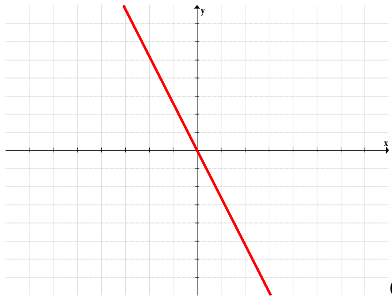
16. Halla la pendiente y la expresión algebraica (fórmula) de las siguientes rectas:



a.



b.



c.

Función lineal. Rectas de la forma $y = m \cdot x + n$

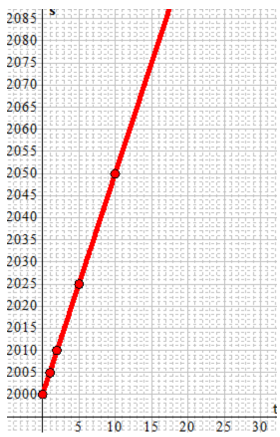
Ya sabes que:

Las funciones polinómicas de primer grado, o **funciones afines**, se describen algebraicamente de la forma $y = m \cdot x + n$ y se representan mediante **rectas**.

Ejemplo:

- *U*n ciclista que se ha trasladado 2 Km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s. Su tabla de valores y su representación gráfica son:

Tiempo (t)	Espacio (s)
0	2000
1	2005
2	2010
5	2025
10	2050



La fórmula es $s = s_0 + v \cdot t$

La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica:

$$y = 5 \cdot x + 2.000\,,$$

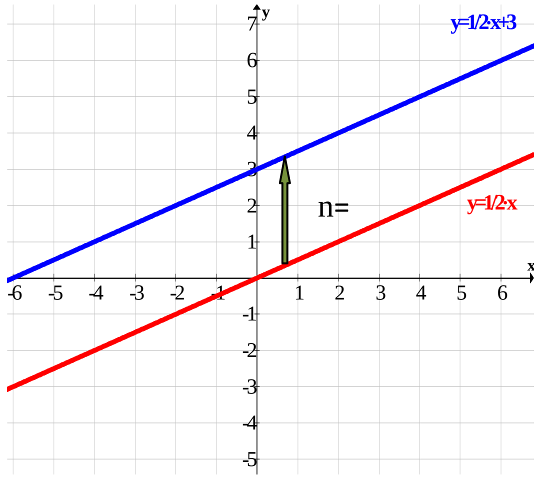
donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s, siendo 2.000 es el espacio inicial s_0.

La **pendiente** es 5 pero la recta no pasa por el punto (0, 0), sino que corta al eje de ordenadas en el punto (2000, 0). Se dice que la **ordenada en el origen** es 2000.

Las rectas de la forma ***y = mx + n*** tienen la misma pendiente que las rectas *y = mx* pero están desplazadas en el eje de ordenadas (eje *y*) *n* posiciones (hacia arriba si *n* es positiva, y hacia abajo si es negativa). Por esta razón, a *n* se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando *x* = 0.

Actividades resueltas

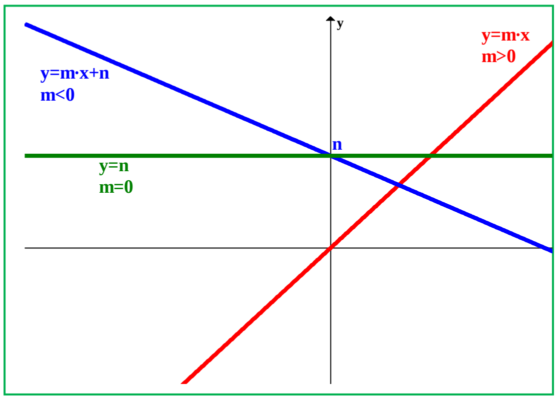
- *Compara la recta y = (1/2)·x con la recta y = (1/2)·x + 3.*



Las dos rectas tienen la misma pendiente. En ambos casos m = 1/2. Son dos rectas paralelas.
La diferencia está en el valor de la ordenada en el origen n: la recta y = (1/2)·x (donde n = 0) se ha desplazado 3 posiciones en el eje y para convertirse en la recta y = (1/2)·x + 3 (donde n = 3).

La recta $y = mx + n$ es paralela a la recta $y = mx$ (tienen la misma pendiente, m) desplazada verticalmente n posiciones.

Las funciones $\boldsymbol{y = mx + n}$ se llaman **funciones afines**, y son también funciones lineales.

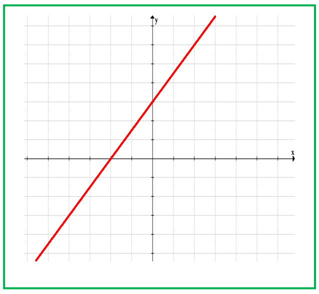


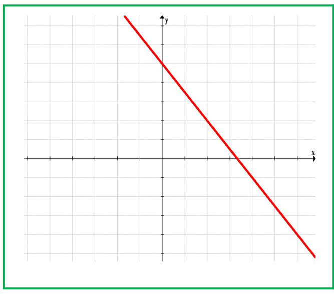
En cuanto a su pendiente, tiene el mismo significado:
Si $m > 0$. la función es **creciente**.
Si $m < 0$, la función es **decreciente**.
Si $m = 0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Pasa por el punto (n, 0) y es paralela al eje x.

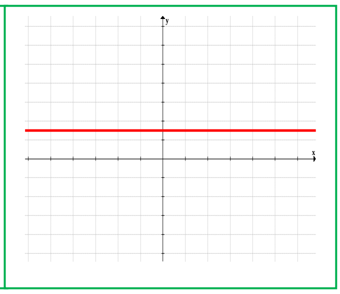
La **tasa de crecimiento media** de una función afín también coincide con su pendiente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y es constante a lo largo de toda la recta.

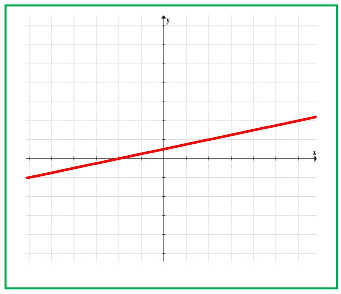
Actividades propuestas

17. Halla la expresión algebraica de las siguientes rectas:









18. Escribe tres funciones cuyas gráficas sean tres rectas que pasen por el origen de coordenadas y sus pendientes sean 5, –4, y 1/3 respectivamente.

19. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas la recta y = x? ¿Y la recta y = –x?

20. ¿Cómo son entre sí dos rectas de igual pendiente y distinta ordenada en el origen?

21. Representa las siguientes funciones lineales:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\dfrac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

22. Un metro de cierta tela cuesta 2,05 €, ¿cuánto cuestan 7 metros? ¿Y 20 m? ¿Y 15,2 m? ¿Cuánto cuestan "x" metros de tela? Escribe la fórmula de esta situación.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Funciones polinómicas de segundo grado. Función cuadrática

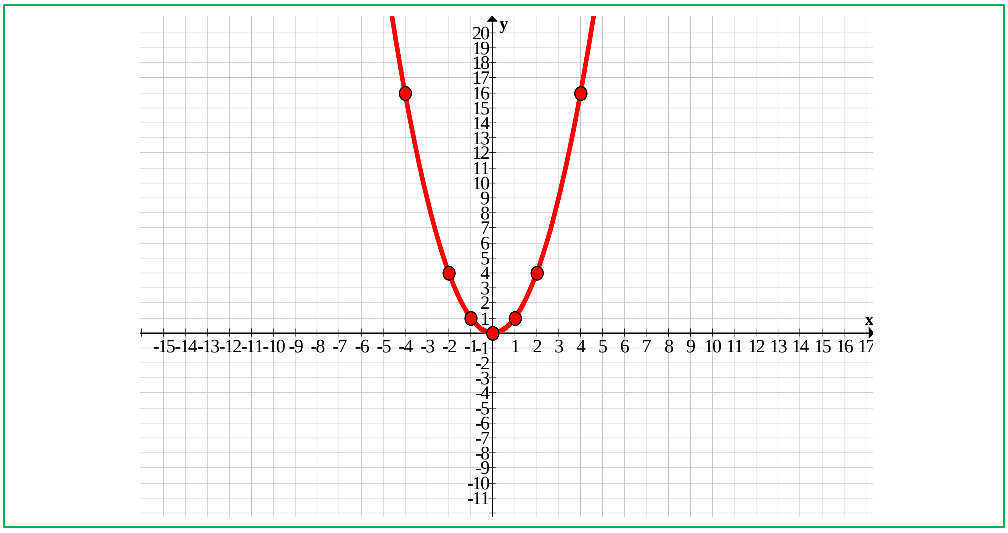
Las **funciones cuadráticas** son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de segundo grado, es decir, son de la forma $\boldsymbol{y = a \cdot x^2 + bx + c}$. La curva que aparece al representar gráficamente una función cuadrática se llama **parábola**.

En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Para representar la parábola $y = x^2$ construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
5	25

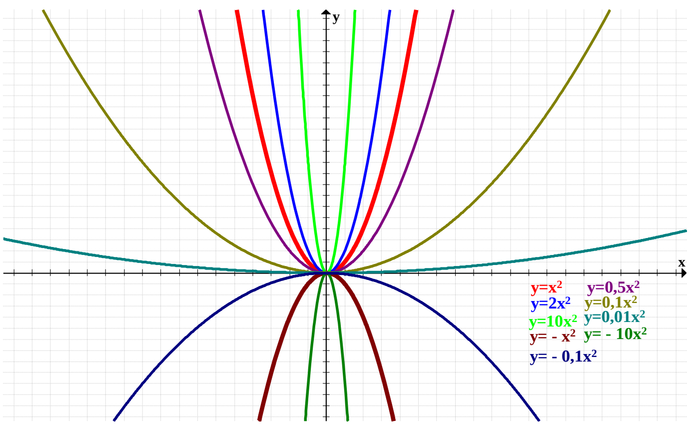


Observamos que es **decreciente** hasta el 0, y después **creciente**, luego tiene un **mínimo** absoluto en el (0, 0). Si $a = -1$, $y = -x^2$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Actividades resueltas

- *Representa gráficamente en unos mismos ejes coordenados:*

$$y = x^2,\ y = 0{,}5x^2,\ y = 2x^2,\ y = 0{,}1x^2,\ y = 10x^2,\ y = 0{,}01x^2,\ y = -10x^2,\ y = -0{,}01x^2.$$



Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se observa que:

La parábola cuya expresión algebraica es $y = a\cdot x^2$, tiene las siguientes características:

- El dominio es toda la recta real.
- La función es **continua**, porque no presenta saltos.
- Es **simétrica** respecto al eje ***y***, es decir, es una función **par**: $y = f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- Si $a > 0$ tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0):
    - al aumentar a, la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
    - al disminuir a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
- Si $a < 0$ tiene un **máximo absoluto** en el punto (0, 0):
    - al aumentar a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
    - al disminuir a, la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.
- Al punto (0, 0) se le llama **vértice** de la parábola $y = a\cdot x^2$.

La **tasa de crecimiento media** de una parábola:

$$\text{TCM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Varía al movernos por la parábola, y es mayor cuanto mayor es el coeficiente a, como se observa en las gráficas de estas parábolas.

Actividades propuestas

23. Dibuja en papel cuadriculado la gráfica de la función $y = x^2$.

a) Para ello haz una tabla de valores, tomando valores de abscisa positiva.
b) Tomando valores de abscisa negativa.
c) ¿Qué le ocurre a la gráfica para valores grandes de "x"? ¿Y para valores negativos grandes en valor absoluto?
d) ¿La curva es simétrica? Indica su eje de simetría.
e) ¿Tiene un mínimo? ¿Cuál es? Coordenadas del vértice.
f) Recorta una plantilla de esta parábola marcando su vértice y el eje de simetría, que usaremos en otros problemas.

24. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4{,}12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25. Completa este resumen. La gráfica de $y = ax^2$ se obtiene de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ entonces ¿¿??
b) Si $0 < a < 1$ entonces ¿¿??
c) Si $a < -1$ entonces ¿¿??
d) Si $-1 < a < 0$ entonces ¿¿??

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

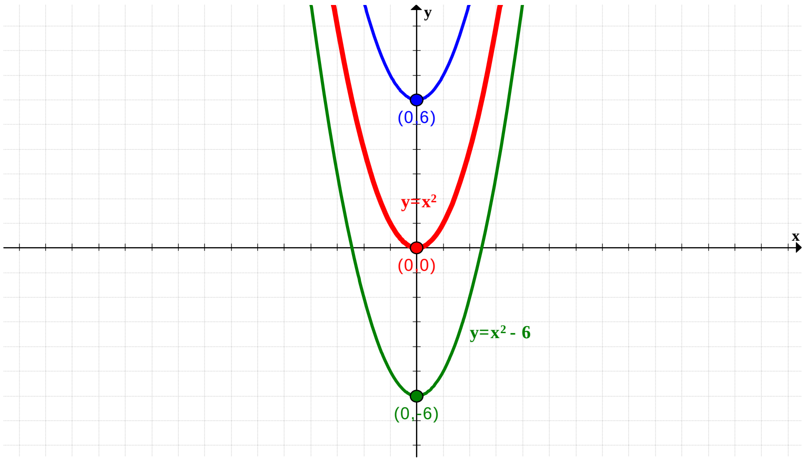
Desplazamientos verticales: Traslaciones en la dirección del eje *y*: $y = x^2 + k$

Utilizando como plantilla la gráfica de $y = x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Ejemplo:

- Comparemos las parábolas $y = x^2 + 6$ y $y = x^2 – 6$ con nuestra plantilla de $y = x^2$.

Comprueba que en este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo.



Al sumar 6 a la parábola $y = x^2$, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje *y*, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a $y = x^2$, En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0, –6), es decir, baja 6 unidades.

La parábola $y = x^2 + k$ tiene la misma forma que $y = x^2$ pero trasladada *k* unidades verticalmente en el eje *y*. Si *k* es positivo, la traslación es hacia arriba y si *k* es negativo, hacia abajo. El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, *k*).

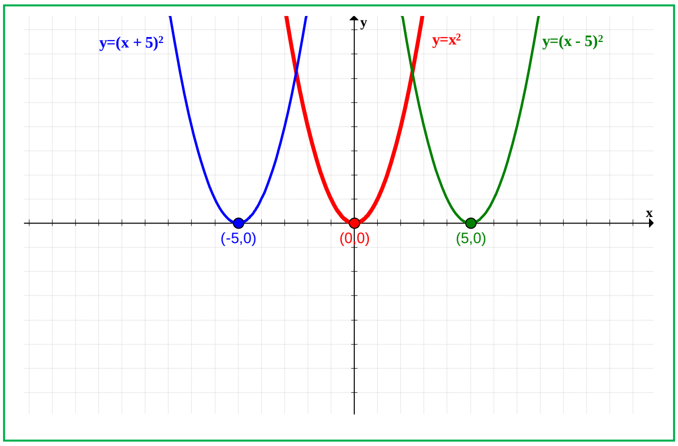
Actividades propuestas

26. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 – 3$; $y = –x^2$; $y = –x^2 + 2$; $y = x^2 – 1$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido vertical, hacia arriba en el caso de $y = x^2 + 2$; y hacia abajo en el caso de $y = x^2 – 3$. La parábola $y = –x^2$; es simétrica (hacia abajo) de $y = x^2$. En general, si trasladamos *q* unidades en la dirección del eje de ordenadas tenemos la parábola $y = x^2 + q$.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Desplazamientos horizontales: Traslaciones en la dirección del eje *x*:

$$y = (x - q)^2$$



Ejemplo:

- Compara las parábolas $y = (x + 5)^2$ e $y = (x - 5)^2$ con la plantilla de $y = x^2$.

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda.

En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (–5, 0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

La parábola $y = (x - q)^2$ tiene la misma gráfica que $y = x^2$ trasladada q unidades en el eje x hacia la derecha si $q > 0$ y hacia la izquierda si $q < 0$. El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q, 0)$**.**

Actividades propuestas

27. Tomando la misma unidad que en el problema anterior dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema de referencia, las gráficas de las parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x - 5)^2$. Observa que puedes utilizar la plantilla del ejercicio anterior. Haz un resumen indicando lo que has obtenido. Habrás observado que en todos los casos puedes utilizar la plantilla trasladándola en sentido horizontal, hacia la derecha en el caso de $y = (x - 2)^2$; y hacia la izquierda en el caso de $y = (x + 3)^2$. Por lo que, en general, si trasladamos p unidades en la dirección del eje de abscisas obtenemos la parábola $y = (x - q)^2$.

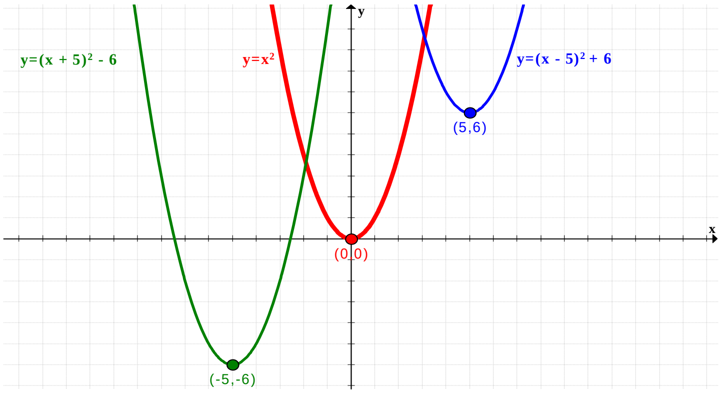
Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $y = (x - q)^2 + k$

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, trasladamos la plantilla de $y = x^2$, k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando una traslación oblicua en el plano.

Ejemplo:

- Comparamos la parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ y $y = (x - 5)^2 + 6$ con la plantilla de $y = x^2$.



La parábola $y = (x - 5)^2 + 6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo. Es decir, es la composición de los dos movimientos anteriores.

La parábola $y = (x - q)^2 + k$ tiene la misma forma que $y = x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia la derecha si } q > 0 \\ \text{hacia la izquierda si } q > 0 \end{cases} \quad ; \quad k \text{ unidades} \begin{cases} \text{hacia arriba si } k > 0 \\ \text{hacia abajo si } k < 0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q, k). El eje de simetría en $x = q$.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Representación de parábolas de la forma *y* = *x*² + *r·x* + *s*

Sabemos representar las parábolas de la forma $y = (x - q)^2 + k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos representar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y = x^2 + r\cdot x + s$?

Actividades resueltas

- *Representa la gráfica de la función polinómica* $y = x^2 + 6\cdot x - 4$

La función viene dada de la forma $y = x^2 + r\cdot x + s$, y queremos convertirla en $y = (x - q)^2 + k$.

$$y = x^2 + r\cdot x + s \Leftrightarrow y = (x-q)^2 + k$$

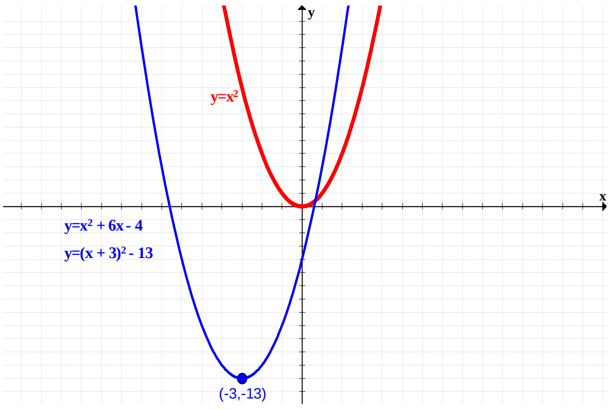
Sabemos que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, donde ya nos aparece $x^2 + 6x$. Ahora tenemos que ajustar el resto:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x+3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x+3)^2 - 13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y = x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).

Como $r = 6$ observa que la primera coordenada del vértice es $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Sustituyendo el valor de $x = -3$ en la expresión $y = x^2 + 6\cdot x - 4$ se obtiene:

$$y = (-3)^2 + 6\cdot(-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$$



El vértice de la parábola $y = x^2 + r\cdot x + s$ se encuentra en el punto $x = \frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo *x* en la expresión de la función.

Actividades propuestas

28. Escribe la ecuación de una parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal a la derecha y 4 unidades en sentido vertical hacia arriba. ¿Qué coordenadas tiene su vértice?

29. Represента la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$	b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$	c. $y = x^2 - 5$
d. $y = x^2 - 6x + 16$	e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$	f. $y = -x^2 + 12x - 26$
g. $y = x^2 - 10x + 17$	h. $y = -x^2 + 2x - 4$	i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

Función cuadrática. Parábolas de la forma *y* = *a*·*x*² + *b*·*x* + *c*

Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y = x^2 + r \cdot x + s$, que es una parábola con la misma forma que $y = x^2$ abierta hacia arriba, o $y = -x^2 + r \cdot x + s$, abierta hacia abajo.

También sabemos cómo afecta el valor del coeficiente "*a*" en la gráfica de la parábola $y = a \cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar completando cuadrados:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resueltas

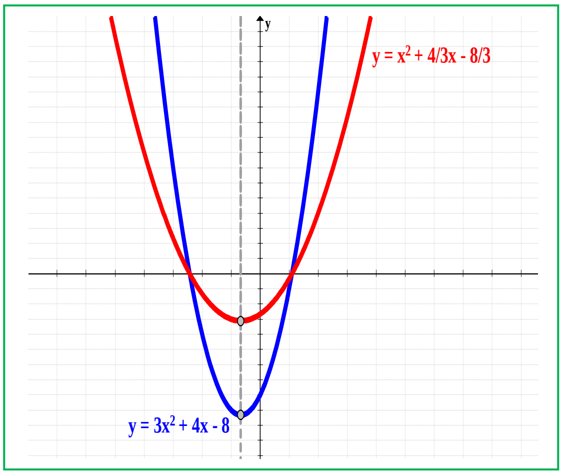
- *Representa la parábola* $y = 3x^2 + 4x - 8$:

Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

$$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

y la comparamos con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}$$



Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se estudió anteriormente.

La parábola en el caso general es:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$, es decir, $r = \frac{b}{a}$, entonces la primera coordenada del vértice es $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x = \frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

En resumen:

La función cuadrática $y = a·x^2 + b·x + c$ tiene su vértice en el punto de abscisa $x = \frac{-b}{2a}$, su ordenada en lo que resulta de sustituir ese valor en la ecuación: $y = a\left(\left(\frac{-b}{2a}\right)^2\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2+4ac}{4a}$. La forma dependerá del valor absoluto del coeficiente *"a"*, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a>0$
- hacia abajo si $a<0$

Actividades propuestas

30. Volvemos a usar la plantilla.

a) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (3, 1). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

b) Traslada el vértice de la parábola $y = x^2$ al punto (–4, –2). Escribe su ecuación y la ecuación de su eje de simetría. Dibuja su gráfica.

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica.

Coeficiente *a*:

Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo.

Vértice:

El **vértice** de la parábola está en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$:

Puntos de corte con el eje OX:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa. Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

Punto de corte con el eje OY:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x=0$. Cuando $x=0$ la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto (0, c).

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Eje de simetría:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.

El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

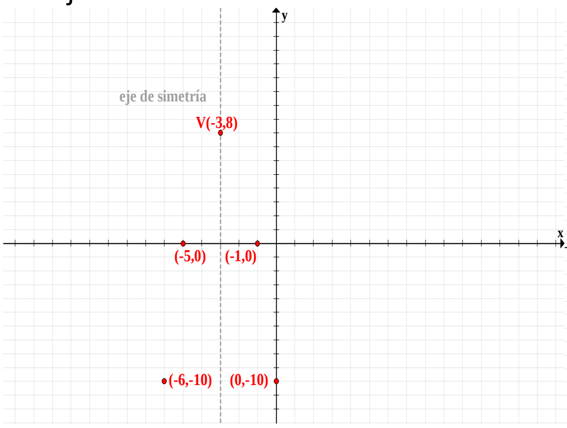
A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

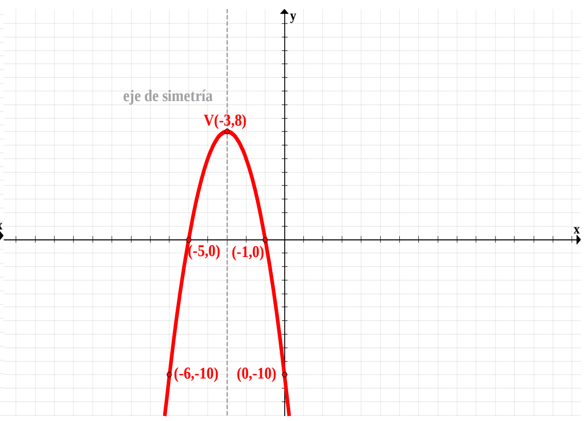
Actividades resueltas

- *Determina los elementos de la parábola* $y = -2x^2 - 12x - 10$
  - $a = -2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2\cdot(-2)} = \frac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3, 8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$

      $y = -2x^2 - 12x - 10 = -2\cdot(x + 5)\cdot(x + 1)$
    - Eje OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

      La parábola también pasa por su simétrico: (–6, –10).
  - Eje de simetría: recta $x = -3$.





Actividades propuestas

31. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$	b. $y = 6x^2 - 24x$	c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
d. $y = 2x^2 + 5x - 12$	e. $y = 3x^2 + 6x - 9$	f. $y = -2x^2 + 7x + 3$
g. $y = 7x^2 + 21x - 28$	h. $y = 5x^2 - 9x + 4$	i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3.3. Ajustes a otras funciones polinómicas

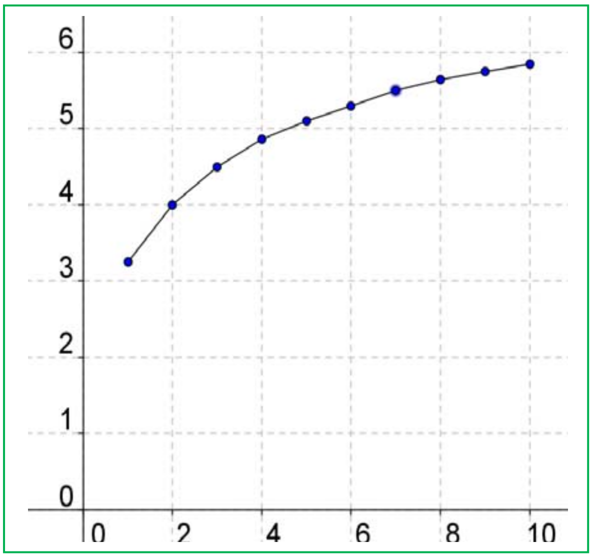
Hemos visto que las rectas, $y = mx + b$, y que las parábolas, $y = ax^2 + bx + c$, sirven de modelo para situaciones muy diversas. Pero estas situaciones no son más que una pequeña parte de la gran variedad de situaciones que existen. Debemos por tanto ampliar el arsenal de nuestras funciones. Si tenemos unos datos en una tabla de valores, queremos analizar si somos capaces de encontrar una fórmula matemática que se ajuste a esos datos, es decir, que nos permita hacer predicciones respecto a valores de la variable no considerados.

Actividad resuelta

- *Para el tratamiento de una enfermedad se está probando un nuevo medicamento con distintas dosis, anotando, para cada dosis el porcentaje de curaciones. Los resultados se recogen en la tabla:*

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Representamos gráficamente los puntos indicados en la tabla:



La gráfica de los puntos unidos mediante segmentos nos da una idea del modelo, pero no podemos todavía descubrir la ley. No existe una única forma de unir los datos. Conocer el mejor modelo está relacionado con el problema en estudio aunque esta primera aproximación gráfica ya nos da bastante información. Parece que, según se aumenta la dosis, crece el porcentaje de curaciones. No parece plausible que para una dosis intermedia, por ejemplo, 4,5 mg, el porcentaje de curaciones crezca a 10 o disminuya a 3 %, quizás podemos asegurar que estará entre 4,86 y 5,1. Podríamos estimarlo mediante una interpolación lineal y decir que el porcentaje de curaciones para una dosis de 4,5 mg se podría estimar en va a ser 4,98.

Las funciones polinómicas, de las que acabas de estudiar las rectas y las parábolas, pero que son todas aquellas de ecuación $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e$, tienen una interesante propiedad.

Si los valores de la *x* están en progresión aritmética, y calculamos las diferencias entre los valores de la "*y*", a los que llamamos **diferencias primeras**, e indicamos $\Delta_1 y$, cuando estas diferencias son constantes, entonces los puntos están en una recta.

Si de nuevo calculamos las diferencias, ahora de las diferencias primeras, y las llamamos **diferencias segundas**, y las indicamos $\Delta_2 y$, cuando estas diferencias son constantes, entonces los puntos están en una parábola.

En general, los valores de la abscisa están en progresión aritmética y si las diferencias *n*-ésimas, $\Delta_n \boldsymbol{y}$ son **constantes** los puntos se ajustan a una **función polinómica de grado *n***.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Vamos a calcular las diferencias sucesivas de la actividad resuelta anterior:

Dosis (mg): x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): y	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85
$\Delta_1 y$		0,75	0,5	0,36	0,24	0,2	0,2	0,14	0,11	0,1
$\Delta_2 y$			–0,25	–0,14	–0,12	–0,04	0	–0,06	–0,03	–0,01
$\Delta_3 y$				0,11	0,02	0,08	0,04	–0,06	0,03	0,02

Lo primero en que nos fijamos es que los valores de x están en progresión aritmética: 1, 2, 3…

Repasa las operaciones para comprobar que estas diferencias están bien calculadas. Por ejemplo, la primera diferencia es: 4,0 – 3,25 = 0,75. El primer valor de las segundas diferencias es: 0,5 – 0,75=–0,25. El primer valor de las terceras diferencias es: –0,14 –(– 0,25) = +0,11.

Las diferencias primeras no son constantes, luego los datos no se ajustan a una recta, lo que ya se observaba en la gráfica. Las diferencias segundas no son tampoco constantes, luego no existe una parábola que se ajuste a esos datos. Tampoco son constantes las diferencias terceras, luego tampoco existe una función polinómica de tercer grado que se ajuste a esos datos.

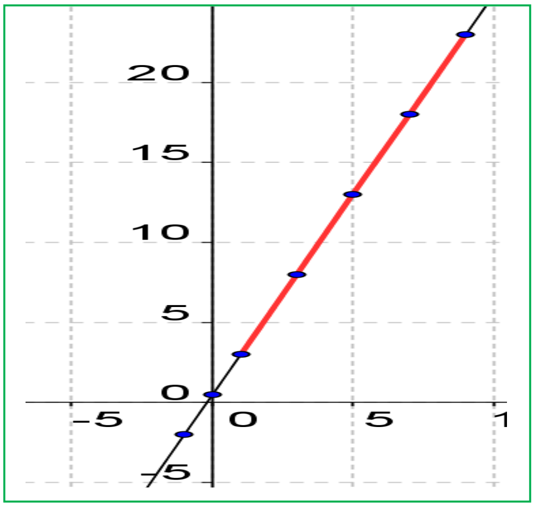
Actividad resuelta

- *Comprueba que los datos de la tabla siguiente se ajustan a una recta y escribe su fórmula.*

x:	1	3	5	7	9
y:	3	8	13	18	23
$\Delta_1 y$		5	5	5	5

Lo primero en que nos fijamos es que los valores de x están en progresión aritmética: 1, 3, 5, 7, 9…

Las diferencias primeras son constantes, por lo que las diferencias segundas son todas cero. Los datos se ajustan a una recta.



Representamos los datos.

Buscamos la ecuación de la recta $y = mx + b$ imponiendo que pase por dos de los puntos, $3 = m \cdot 1 + b$; $8 = 3m + b$. Restamos: $5 = 2m$, por lo que la pendiente es: $m = 2,5$; y al sustituir en la primera ecuación se obtiene que la ordenada en el origen es $b = 0,5$. La ecuación de la recta es: $y = 2,5\,x + 0,5$.

- *Los datos de la tabla indican los metros recorridos por un móvil en el tiempo t segundos. Se ajustan a una parábola. Represéntalos gráficamente y escribe su fórmula. ¿Qué distancia habrá recorrido a los 6 segundos? ¿Y a los 12 segundos?*

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35		63	80	99		143	
$\Delta_1 y$		9	11			17	19			
$\Delta_2 y$		2				2				

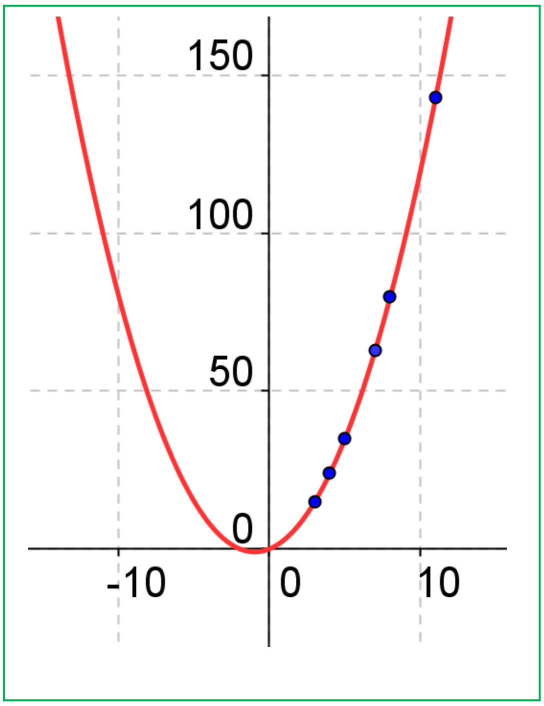
Faltan datos, pero las dos únicas diferencias segundas son iguales, luego como el enunciado dice que se ajustan a una parábola, vamos a imponer que todas las diferencias segundas sean iguales a 2, y con esa información completamos la tabla.

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
$\Delta_1 y$		9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\Delta_2 y$		2	2	2	2	2	2	2	2	

Primero hemos completado todas las diferencias segundas iguales a 2. Después las diferencias primeras que faltaban. Y por último los metros. A los 6 segundos ha recorrido una distancia de 48 metros, y a los 12 segundos de 168 metros.

Buscamos la función polinómica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$, que pasa por los puntos:

(3, 15), (4, 24) y (5, 35):



$15 = a9 + b3 + c$

$24 = a16 + b4 + c$

$35 = a25 + b5 + c$

Restamos: $9 = 7a + b$; $11 = 9a + b$. Volvemos a restar: $2 = 2a$. Luego $a = 1$; $b = 11 - 9\cdot1 = 2$; $c = 15 - 9\cdot1 - 3\cdot2 = 0$. La parábola es $y = x^2 + 2x$.

Comprobamos que, en efecto pasa por los otros puntos de la tabla:

$$143 = 11^2 + 2\cdot11 = 121 + 22.$$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

32. Halla la función cuadrática determinada por los puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Represéntala gráficamente.

33. Halla la función polinómica que pasa por los puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) y (3, 23).

34. Halla la función polinómica determinada por los puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula las diferencias sucesivas y dibuja la gráfica.

35. Se hacen pruebas midiendo la distancia que recorre un avión desde que toca tierra en una pista de aterrizaje. Los datos están en la tabla adjunta. Existe alguna función polinómica que se ajusta a esos datos. Si la hay, escribe su fórmula.

Tiempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. En una fábrica los precios de los cables de acero dependen de los diámetros y viene dado el precio década metros en euros en la tabla siguiente. ¿Existe alguna función polinómica que se ajuste perfectamente a esos datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Precio (€):	3,6	8	18	25,3	39,2	57,6	81

37. Dada la tabla siguiente, ¿se puede ajustar exactamente una recta? Considera si algún dato es erróneo y si es así, corrígelo.

Tiempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1,53	4,65	7,78	10,89	14,01	17,13	20,29

Al realizar un experimento es muy raro encontrar situaciones en las que una recta, una función cuadrática, una cúbica… se ajusten a los datos a la perfección.

En la actividad resuelta de las dosis de medicamento y porcentaje de curaciones, si hubiéramos seguido calculando las diferencias sucesivas nunca nos hubieran llegado a ser ninguna de ellas iguales y hubiéramos llegado a las diferencia de orden 9m, que ya sólo sería una, y nos daría: $\Delta_9 y = -0{,}67$. ¡Tendríamos que escribir una función polinómica de grado 9!

Una función polinómica de grado *n* se conoce si sabemos que pasa por *n* + 1 puntos.

Así, una recta queda determinada por 2 puntos. Una parábola queda determinada por 3 puntos. Y la función polinómica de grado 9 por 10 puntos. Hay otras funciones. Los datos del medicamento se ajustan a una hipérbola: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$, un tipo de función que vamos a estudiar a continuación.

3.4. Funciones de proporcionalidad inversa. La hipérbola *y = k/x*

Recuerda que:

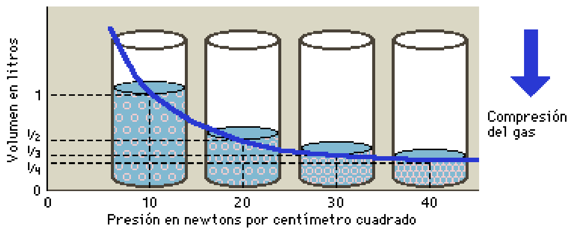
Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** k es el producto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Ejemplo

- En Física encontramos muchos ejemplos de magnitudes inversamente proporcionales: La velocidad de un vehículo y el tiempo que tarda en recorrer un trayecto son magnitudes inversamente proporcionales. En este caso, el espacio recorrido se mantiene constante, siendo él, la razón de proporcionalidad inversa $s = v \cdot t$. Otros ejemplos son: la densidad y el volumen, la potencia y el tiempo, la presión y la superficie,…

Actividades resueltas

- *Representa en el plano la ley de Boyle-Mariotte: "a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce".*



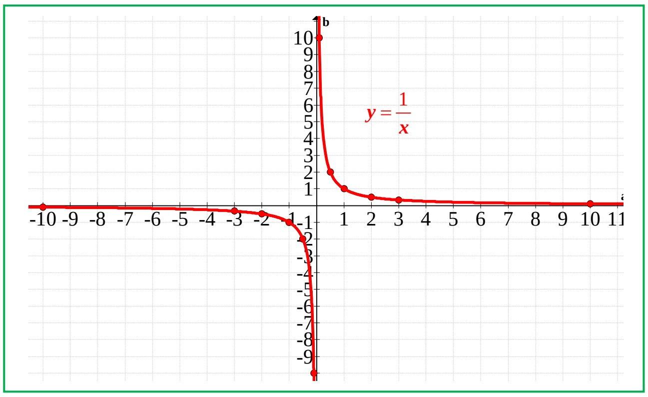
La fórmula que describe esta ley es $P \cdot V = k$.

Si despejamos el volumen final V, obtenemos la siguiente expresión: $V = \dfrac{k}{P}$.

La gráfica describe una curva que a medida que aumenta la presión inicial, disminuye el volumen y se va aproximando al eje x, y al contrario, si disminuye la presión, el volumen aumenta.

La **función de proporcionalidad inversa** se define mediante la expresión $y = \dfrac{k}{x}$, donde k es la **razón de proporcionalidad inversa** y las variables x e y son los distintos valores que tienen las dos magnitudes.

Su representación gráfica en el plano cartesiano es una curva llamada **hipérbola**.



Ejemplo

- Representa la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$

Autores: José Gallegos y David Miranda

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

x	−10	−3	−2	−1	−1/2	1/2	1	2	3	10
y	−1/10	−1/3	−1/2	−1	−2	2	1	1/2	1/3	1/10

Completamos una tabla de valores y representamos los puntos en un sistema de coordenadas.

Se puede observar que la gráfica nunca corta a los ejes de coordenadas, ya que ni la *x* ni la *y* pueden valer 0. El 0 no está en el dominio y tampoco en el recorrido de la función (no se puede dividir por 0). Su dominio es $\Re-\{0\}$.

Como se ve en la gráfica, y es fácil comprobar, la función es continua en todo el dominio y simétrica respecto del origen (función impar).

Actividades propuestas

38. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa en el mismo sistema de coordenadas:

a. $y=\frac{-1}{x}$ b. $y=\frac{5}{x}$ c. $y=\frac{1}{2x}$

d. $y=\frac{3}{8x}$ e. $y=\frac{-5}{3x}$ f. $y=\frac{-12}{5x}$

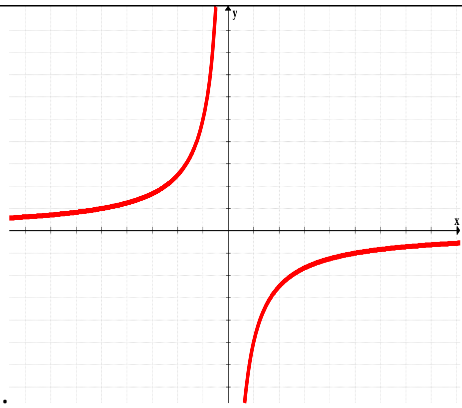
39. Describe lo que sucede cuando varía el valor de *k*. Ayúdate de las gráficas del ejercicio anterior.

40. Halla la expresión analítica y representa la gráfica de las hipérbolas que pasa por cada uno de estos puntos. Escribe los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

a. (5, 3) b. (2, −1) c. (1/2, 6)

d. (10, 4) e. (*a*, 1) f. (1, *b*)

41. Halla el dominio, recorrido, continuidad, máximos y mínimos y el crecimiento de las siguientes hipérbolas:

<table>
<tr><td colspan="2">
a.</td><td colspan="2">
b.</td></tr>
<tr><td colspan="2">c. $y=\frac{9}{2x}$</td><td>d. $y=\frac{-5}{3x}$</td><td>e. $y=\frac{-0,3}{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">f. $(-5,2)$</td><td>g. $(4,-9)$</td><td>h. $(1,1/2)$</td></tr>
</table>

En general, las hipérbolas cuya expresión es $y = \frac{k}{x}$ tienen las siguientes propiedades:

$|\boldsymbol{k}|$:

- Si el valor absoluto de k aumenta, la curva se aleja del origen de coordenadas.
- Si el valor absoluto de k disminuye, la curva se aproxima al origen de coordenadas.

Dominio: Son todos los reales menos el 0: *Dom* = $\Re - \{0\}$.

Recorrido: Su recorrido son todos los reales menos el 0: $\Re - \{0\}$.

Continuidad: La función de proporcionalidad inversa es continua en todo su dominio, pero discontinua en la recta real, ya que el 0 no está en el dominio, y por tanto, en 0 hay un salto infinito.

Simetría: Son funciones impares, esto es, son simétricas respecto al origen de coordenadas.

Asíntotas: Son las rectas cuya distancia a la gráfica es muy pequeña, cuando la curva se aleja del origen.

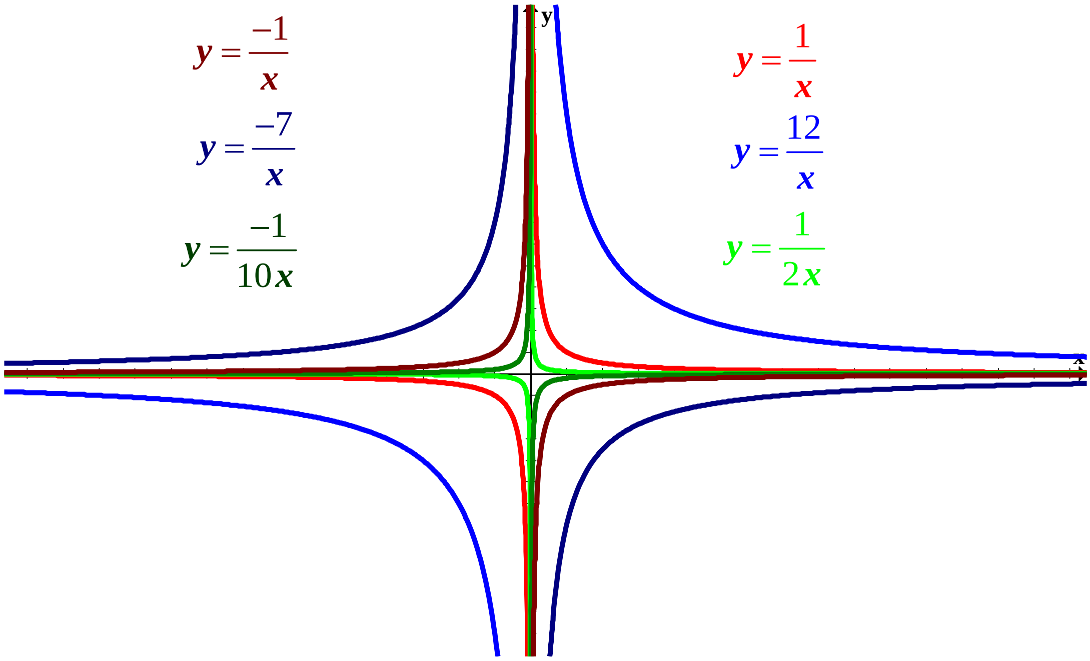
Hemos visto que no está definida en 0, pero cuando el valor de *x* se acerca a cero, el valor de *y* se hace muy grande en valor absoluto. Por eso se dice que la recta *x* = 0 es una asíntota vertical de *y* = *k*/*x*.

Del mismo modo, si nos fijamos en las gráficas, se observa que cuando los valores de *y* crecen en valor absoluto, los valores de *x* se acercan a 0 (sin tocarlo). Se dice que la recta *y* = 0 es una asíntota horizontal.

Crecimiento: depende del signo de k:

- Si $k > 0$: la función es siempre **decreciente**.
- Si $k < 0$: la función es siempre **creciente**.

Las asíntotas dividen a la hipérbola en dos trozos que reciben el nombre de **ramas de la hipérbola**.



La hipérbola $y = \dfrac{k}{x-a} + b$

A partir de la representación de la función $y = \dfrac{k}{x}$, ¿es posible representar otro tipo de hipérbolas? Al igual que ocurre con las parábolas, podemos trasladar las hipérbolas en el plano en dirección horizontal o vertical, según los valores que tomen los parámetros a y b.

Actividades propuestas

42. Representa en los mismos ejes de coordenadas, las siguientes hipérbolas:

$$y=\frac{5}{x} \qquad y=\frac{5}{x}+3 \qquad y=\frac{5}{x}-3$$

$$y=\frac{-12}{x} \qquad y=\frac{-12}{x-3} \qquad y=\frac{-12}{x+3}$$

$$y=\frac{3}{x} \qquad y=\frac{3}{x-1}+4 \qquad y=\frac{5x-2}{x-1}$$

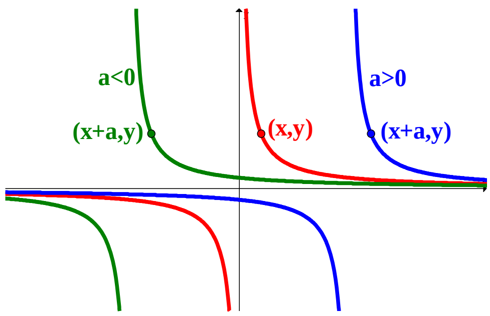
43. Describe lo que sucede cuando varían los parámetros *a* y *b* en las hipérbolas del ejercicio anterior.

En general, la representación gráfica de las hipérbolas cuya expresión algebraica es $y = \dfrac{k}{x-b} + a$ es una traslación el plano dependiendo de los valores de a y b.

Desplazamientos horizontales

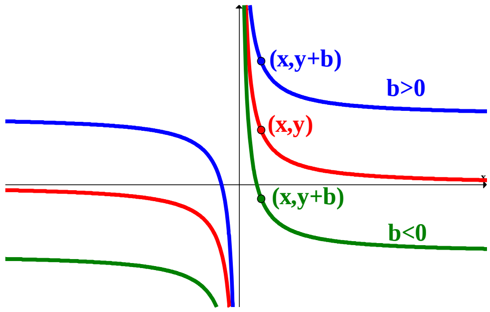
Al variar el valor de a, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza horizontalmente a unidades:

- Si $a > 0$: la hipérbola se desplaza hacia la derecha.
- Si $a < 0$: la hipérbola se desplaza hacia la izquierda.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y)$:
  $$(x, y) \rightarrow (x+a, y)$$
- El vector de traslación es el vector $(a, 0)$
-



Desplazamientos verticales

Al variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza verticalmente b unidades:



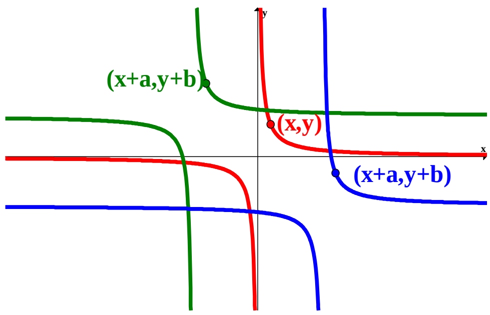
- Si $\boldsymbol{b>0}$: la hipérbola se desplaza hacia arriba.
- Si $\boldsymbol{b<0}$: la hipérbola se desplaza hacia abajo.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x, y+b)$:

$$(x, y) \to (x, y+b)$$

- El vector de traslación es el vector $(0, b)$

Desplazamientos oblicuos

Al variar tanto el valor $\boldsymbol{a}$ cómo el valor de $\boldsymbol{b}$, la representación gráfica de la hipérbola se desplaza diagonalmente tantas unidades como sea el valor de los parámetros:



- Las direcciones hacia donde se traslada dependerá de los signos de a y b.
- El punto (x, y) se convierte en el punto $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$

- El vector de traslación es el vector (a, b).
- El origen de coordenadas (0, 0) se traslada al punto (*a, b*).

Actividades propuestas

44. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa a partir de la hipérbola $y = \dfrac{5}{x}$:

a. $y = \dfrac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \dfrac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \dfrac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \dfrac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \dfrac{4}{x}$ f. $y = \dfrac{20}{5-x} - 2$

45. Estudia el dominio, recorrido, continuidad, simetría, asíntotas y crecimiento de las funciones de proporcionalidad inversa del ejercicio anterior.

46. Escribe una regla para expresar cómo se trasladan las asíntotas según los parámetros a y b.

Hipérbola $y = \dfrac{mx+n}{px+q}$

Las funciones que se definen mediante esta expresión también se representan mediante hipérbolas. Para ello, necesitamos hacer una modificación en una expresión como la estudiada en el apartado anterior que nos resulte más fácil de manejar y representar:

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Dividiendo } (mx+n):(px+q) \rightarrow y = \frac{k}{x-a} + b$$

Actividades resueltas

- *Convertir la función* $y = \dfrac{3x+2}{x-7}$ *en una función cuya expresión sea más sencilla de representar.*

Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

$$(3x+2) = 3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)} = \frac{3(x-7)}{(x-7)} + \frac{23}{(x-7)} = \frac{23}{(x-7)} + 3$$

Esta última expresión es fácil de representar.

Actividades propuestas

47. Representa las siguientes hipérbolas:

a. $y = \dfrac{2x-4}{x+5}$ b. $y = \dfrac{3-5x}{x+2}$ c. $y = \dfrac{4x-12}{x-3}$

d. $y = \dfrac{6x+8}{1-x}$ e. $y = \dfrac{7x+5}{x-4}$ f. $y = \dfrac{6x+10}{2x-1}$

48. Representa la gráfica de la función: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$. A) ¿Cuando x crece, "*y*" tiende a 7? ¿Tiene una asíntota horizontal *y* = 7? B) ¿Si *x* se acerca a –3, la *y* crece? ¿Tiene una asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza si esta hipérbola se ajusta a los valores de la actividad resuelta de la tabla:

Dosis (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curaciones (%): *y*	3,25	4,0	4,5	4,86	5,1	5,3	5,5	5,64	5,75	5,85

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.5. Funciones exponenciales

Hemos estudiado funciones polinómicas, de proporcionalidad inversa… Ahora vamos a estudiar otro tipo de funciones.

Hay dos tipos de funciones cuya **expresión analítica** o **fórmula** es una **potencia**:

- Si la variable independiente está en la base: $y = x^3$, se llama **función potencial**, y cuando además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente: $y = 3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

- Son funciones exponenciales: $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^{3x}$, $y = 5^{-x}$.

Una función exponencial es aquella en la que la variable independiente está en el exponente.

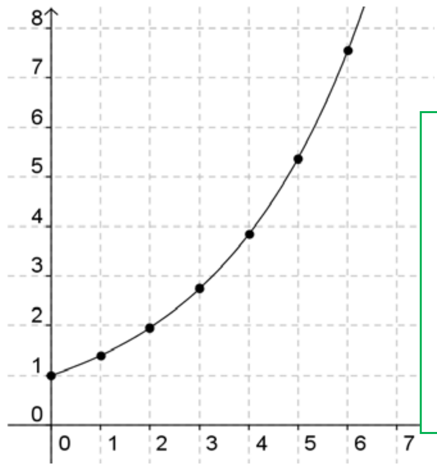
Actividad resuelta

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número *"y"* de bacterias que habrá al cabo de *"x"* horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	**Núm. bacterias (*y*)**
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gráfica de la función



Actividades propuestas

49. Prueba ahora a realizar en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1,4.

Observa que los valores de *"y"* aumentan mucho más deprisa: mientras que los valores de *"x"* aumentan de 1 en 1 los valores de *y* se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. Si en lugar de multiplicar se trata de dividir tenemos el caso de **decrecimiento exponencial**.

50. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de "x" entre 0 y 6. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

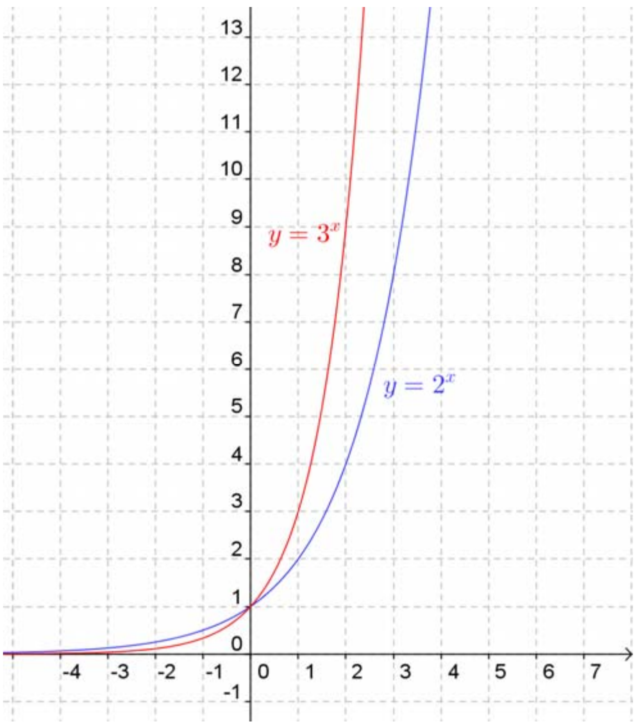
Las gráficas de las funciones exponenciales $y = b^x$ se diferencian según el valor de la base "b". Especialmente se diferencian si $0 < b < 1$ o $b > 1$.

En el caso en el que $b = 1$ tenemos la función constante $y = 1$, cuya gráfica es una recta horizontal.

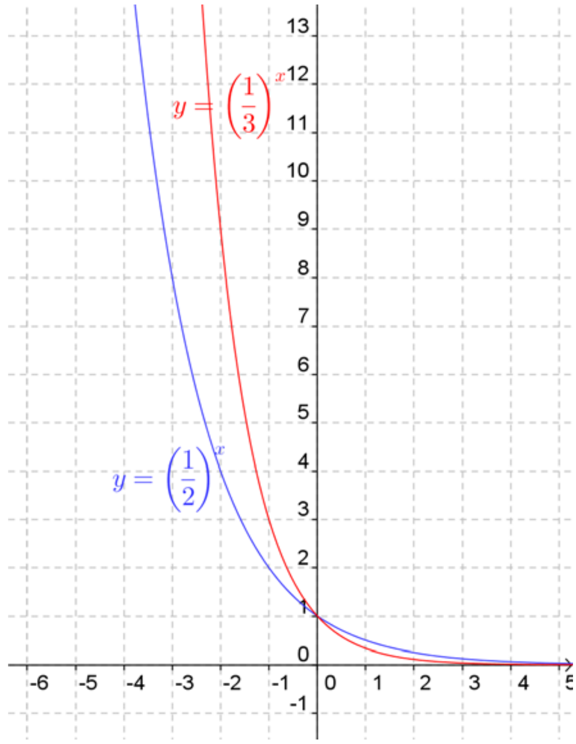
Actividades resueltas

- *Representa las gráficas de* $y = 2^x$ *y de* $y = 3^x$. *También las gráficas de* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *y de* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. *Analiza las similitudes y las diferencias.*

Funciones $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos los siguientes aspectos comunes en las cuatro gráficas:

- Su **dominio** es toda la recta real. Además son continuas.
- Su **recorrido** es $(0, +\infty)$. Es decir, "y" nunca es cero ni negativo.
- Pasan todas por los puntos (0, 1), (1, b) y (–1, 1/b).
- La gráfica de $y = a^x$ y la de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje OY.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Y observamos también aspectos diferenciados en ambas ilustraciones:

Cuando la base es b > 1

Son funciones **crecientes**. Cuanto mayor es la base el crecimiento es más rápido.
Cuando $x \to -\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte izquierda del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

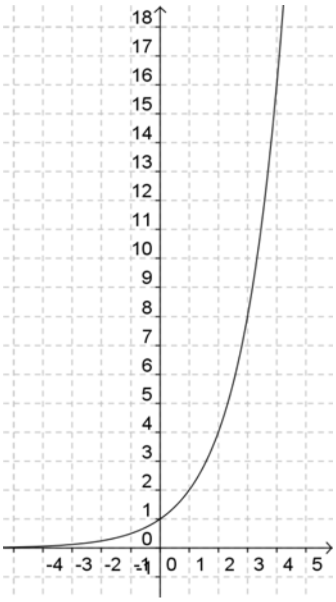
Cuando la base es 0 < b < 1

Son funciones **decrecientes**. Cuanto menor es la base el decrecimiento es más rápido.
Cuando $x \to +\infty$ la función tiende a 0. Por tanto presenta una **asíntota horizontal** en la parte derecha del eje OX.
Aunque en algunos casos pueda aparentarlo, no presentan asíntota vertical, pues no se aproximan a ninguna recta.

- *Representa gráficamente las siguientes funciones exponenciales* $y = 2^x$ *e* $y = 2^{-x}$.

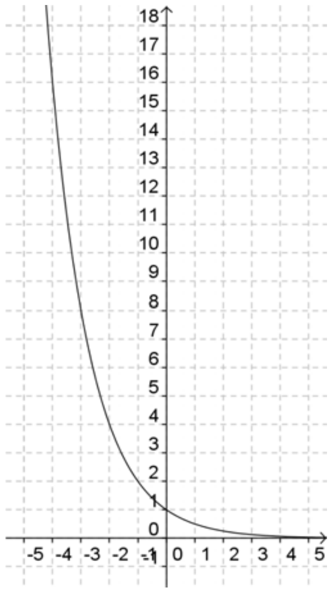
Función $y = 2^x$

x	*y*
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



Función $y = 2^{-x}$

x	*y*
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…



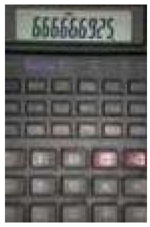
El número *e*. La función $y = e^x$

El número e tiene una gran importancia en Matemáticas, comparable incluso al número π aunque su comprensión no es tan elemental y tan popular. Para comprender su importancia hay que acceder a contenidos de cursos superiores. Su valor aproximado es e = 2,71828182846... Se trata de un número irracional (aunque al verlo puede parecer periódico). Este número aparece en las ecuaciones de crecimiento de poblaciones, desintegración de sustancias radiactivas, intereses bancarios, etc.

También se puede obtener directamente el valor de e con la calculadora (siempre como aproximación decimal, puesto que es un número irracional). Normalmente hay una tecla con la etiqueta e pero puedes usar también la tecla etiquetada e^x. Para ello tendrás que calcular el valor de e^1.

La función $y=e^x$ comparte las características descritas más arriba para funciones exponenciales de base mayor que 1.

Actividades propuestas



51. Utilizando la calculadora, haz una tabla de valores y representa en tu cuaderno las funciones $y=e^x$, $y=e^{-x}$.

52. Una persona ha ingresado una cantidad de 5.000 euros a interés del 3 % en un banco, de modo que cada año su capital se multiplica por 1,03.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, 4, 5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien qué unidades deberás utilizar en los ejes.

Cultivo de la bacteria *Salmonella*

53. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Si la cantidad a las 7 de la mañana es de 50 millones de bacterias, (a) haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 2 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también "hacia atrás"), y (b) representa gráficamente estos datos.

54. Representa en tu cuaderno las siguientes funciones y explica la relación entre sus gráficas:

a) $y=2^x$ b) $y=2^{x+1}$ c) $y=2^{x-1}$.

55. Conociendo la gráfica de la función $f(x)=2^x$, que se ha visto más arriba, y sin calcular tabla de valores, dibuja en tu cuaderno las gráficas de las funciones $g(x)=2^x-3$ y $h(x)=2^{x-3}$.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

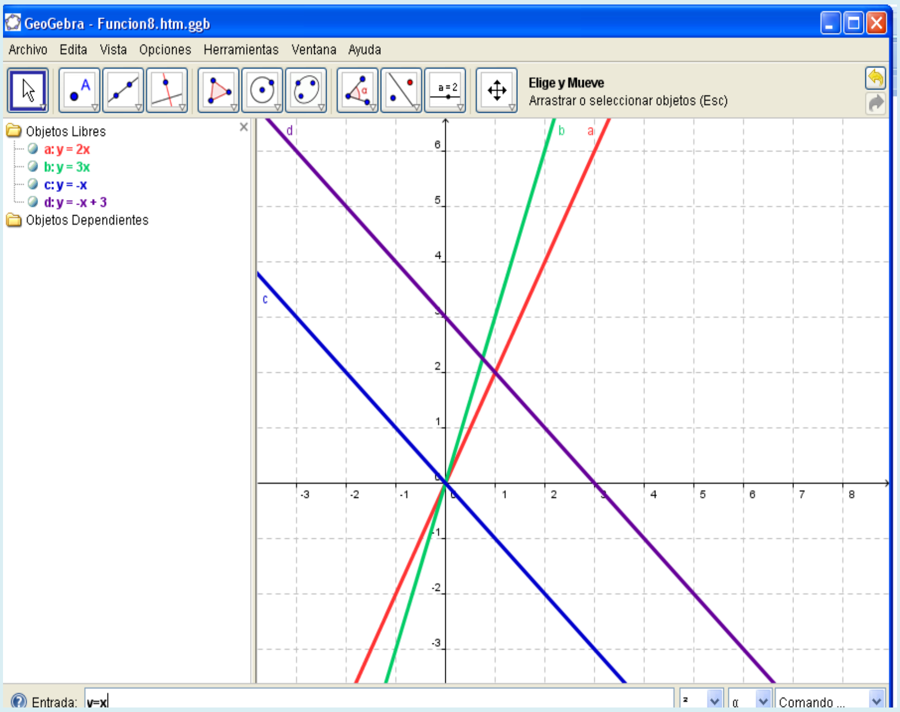
Utiliza el ordenador

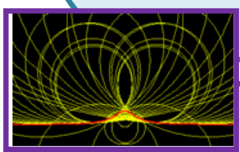
Puedes utilizar el ordenador para dibujar funciones. Para ello necesitas un programa adecuado como *Derive*, *Cabri*, *Mathematica*, *Geogebra*…

Unos son más sencillos de utilizar que otros, pero utilizando la ayuda, pronto dominarás cualquiera de ellos.

Muchas de las gráficas que has visto en este capítulo los han utilizado.

Por ejemplo, utilizando *Geogebra*, podemos dibujar rectas:





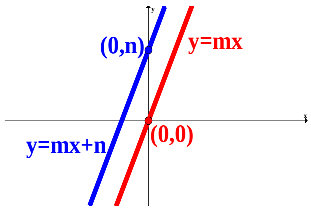
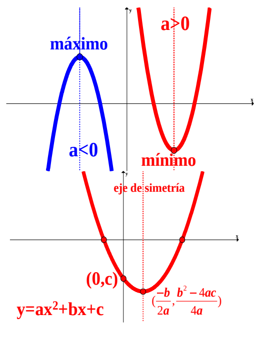
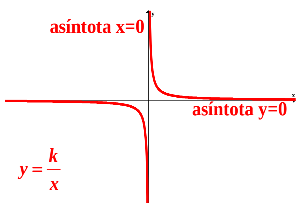
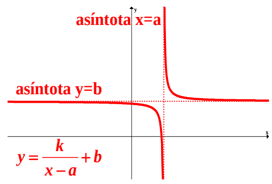
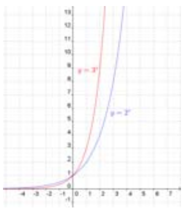
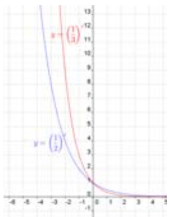
María Gaetana Agnesi

María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *In* *Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa.

Parece ser que María era sonámbula, y en ocasiones, después de trabajar intensamente, exhausta, se iba a dormir dejando un problema sin resolver sobre el escritorio. A la mañana siguiente, al despertar, veía que lo había resuelto mientras dormía. Había escrito la solución completa y había vuelto a la cama.

Si quieres saber más, busca en Internet su biografía

RESUMEN

Función	Relación entre dos magnitudes de forma que a un valor cualquiera de una le hacemos corresponder, como mucho, un único valor de la otra.	$y = 2x + 3$
Características de las funciones	Continuidad. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Simetría. Periodicidad.	La recta $y = 2x + 3$ es continua, creciente, no tiene máximos ni mínimos, ni es simétrica, ni periódica.
Función polinómica de primer grado: Rectas: $y = mx$ $y = mx + n$	Se representan mediante rectas. Hay dos tipos: - Funciones lineales o de proporcionalidad directa: $y = mx$, pasan por el origen de coordenadas. - Funciones afines: $y = mx + n$, son traslaciones en el eje y, n unidades. Pasan por el punto (0, n).	
Función polinómica de segundo grado: Parábolas $y = ax^2 + bx + c$	Se representan mediante parábolas: Vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ Puntos de corte con el eje OX: $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$. Punto de corte con el eje OY: x = 0, es el punto (0, c) Eje de simetría: es la recta $x = \frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidad inversa: Hipérbolas $y = k/x$	$\lvert k \rvert$: aleja o acerca la curva al origen de coordenadas. Dominio y recorrido: $\Re - \{0\}$ Continuidad: Discontinua en $x = 0$. Simetría: Función impar. Asíntotas: Las rectas $x = 0$ e $y = 0$.	
Hipérbolas $y = \frac{k}{x-a} + b$	Traslación de la hipérbola $y = \frac{k}{x}$ por el vector (a, b). Dominio: $\Re - \{a\}$ Recorrido: $\Re - \{b\}$ - Asíntotas: $x = a$; $y = b$.	
Función exponencial	$y = b^x$. Si $b > 1$ es creciente  Si $0 < b < 1$ es decreciente 	

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Funciones

1. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y en él, los puntos siguientes, eligiendo una escala en los ejes que permita dibujarlos todos de forma cómoda. Señala en cada caso a qué cuadrante pertenece el punto o, en su caso, en qué eje está: *A*(2, 4); *B*(0, 1); *C*(–3, 0); *D*(2, –1'5); *E*(1'5, 0); *F*(0, 0); *G*(–1, –2/3).

2. Escribe las coordenadas de tres puntos situados en el tercer cuadrante.

3. Sitúa en un sistema de referencia cartesiano los puntos siguientes:

A(0, 3); *B*(0, 1'7); *C*(0, –1); *D*(0, –4). ¿Qué tienen en común todos ellos?

4. Escribe las coordenadas y representa tres puntos del eje de abscisas. ¿Qué tienen en común?

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo con un cateto igual a 3, y el vértice del ángulo recto en el origen de coordenadas. Indica las coordenadas de todos los vértices.

6. Indica cuáles de las siguientes correspondencias son funciones:

a) A cada número natural se le asocian sus divisores primos.

b) A cada circunferencia del plano se le asocia su centro.

c) A cada circunferencia del plano se le asocia un diámetro.

7. La distancia, *d*, recorrida por un tren depende del número de vueltas, *n*, que da cada rueda de la locomotora.

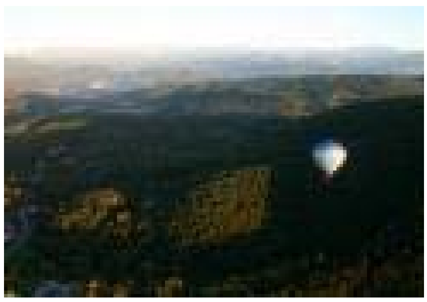
a) Escribe la fórmula que permite obtener *d* conocido *n*, sabiendo que el diámetro de las ruedas de la locomotora es de 78 cm.

b) Dibuja la gráfica.

c) ¿Qué distancia habrá recorrido el tren cuando la rueda haya dado mil vueltas? (toma como valor de π el número 3,14).

d) ¿Cuántas vueltas habrá dado la rueda al cabo de 7 km?

8. Un globo sonda utilizado por el Servicio Meteorológico de los Pirineos para medir la temperatura a distintas alturas lleva incorporado un termómetro. Se observa que cada 180 m de altura la temperatura disminuye un grado. Cierto día la temperatura en la superficie es de 9º C. Determina:



a) ¿Qué temperatura habrá a 3 km de altura?

b) ¿A qué altura habrá una temperatura de –30º C?

c) Escribe una fórmula que permita calcular la temperatura T conociendo la altura A. Confecciona una tabla y dibuja la gráfica. ¿Qué tipo de función es?

d) Si la temperatura en la superficie es de 12º C, ¿cuál es entonces la fórmula? ¿Qué tipo de función es?

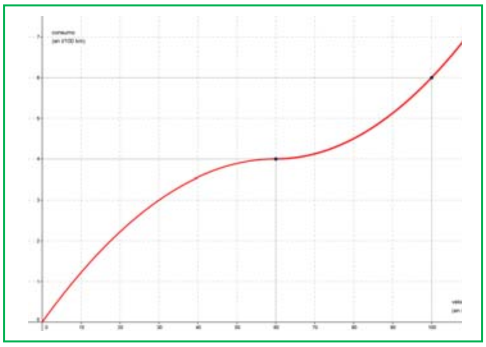
9. Dibuja la gráfica de la función *parte entera*: $y = E(x)$, que indica el número entero menor, más próximo a x, así, por ejemplo, E(2’3) = 2.

10. Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Llama x a la longitud de uno de sus lados y escribe la fórmula que da el área en función de x. Dibuja su gráfica. ¿Qué tipo de función es?

11. Una caja cuadrada tiene una altura de 20 cm. ¿Cómo depende su volumen del lado de la base? Dibuja la gráfica de la función que resulta.

12. Con una hoja de papel de 32 cm de largo y 22 cm de ancho se recorta un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas, se dobla y se construye una caja. ¿Cuál es el volumen de la caja? ¿Y si se recortan cuadrados de 3 cm? ¿Cuál es el volumen si el lado del cuadrado recortado es x? Escribe la fórmula y dibuja la gráfica.

13. Se construyen boyas uniendo dos conos iguales por la base, siendo el diámetro de la base de 90 cm. El volumen de la boya es función de la altura “*a*” de los conos. Si queremos una boya para señalar la entrada de patinetes nos basta con una altura de 50 cm: ¿qué volumen tendrá? Si es para barcos mayores se necesita una altura de 1,5 m: ¿qué volumen tendrá? Escribe la expresión de la función que calcula el volumen en función de la altura. Dibuja su gráfica.



14. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica. Utiliza la gráfica para explicar cómo varia el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.

a) ¿Cuál es la variable dependiente?

b) ¿Y la independiente?

c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?

d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?

15. Al estudiar el crecimiento de una planta observamos que durante los primeros 30 días lo hace muy de prisa, en los 15 días siguientes el crecimiento es más lento y después se mantiene con la misma altura. Realiza un esbozo de la gráfica que relaciona el tiempo con la altura alcanzada por la planta.

Si tenemos más información podemos mejorar el boceto. Por ejemplo, haz la tabla y la gráfica en el caso de que el crecimiento de la planta se ajuste a las siguientes fórmulas (el tiempo se expresa en días y la altura en centímetros):

a) Durante los primeros 30 días: altura = 4 · tiempo

b) En los 15 días siguientes: altura = 90 + tiempo

c) A partir del día 45: altura = 135.

Características de una función

16. Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado *n* años.

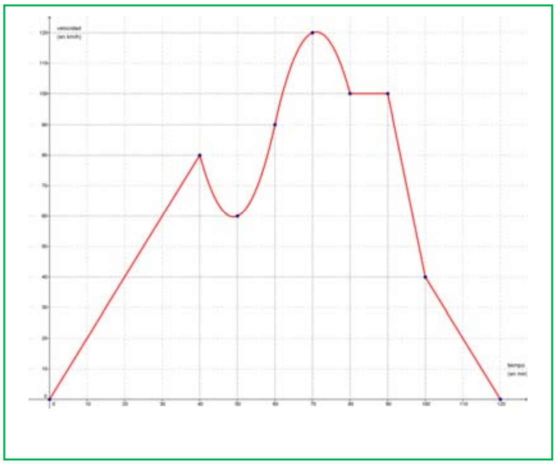
17. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1’20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?

b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?

c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

18. Durante un viaje, la velocidad del coche varía dependiendo del tipo de carretera, de las condiciones en que se encuentra, del tiempo meteorológico… La siguiente gráfica refleja la velocidad de un vehículo en cada instante del trayecto que ha seguido.



a) ¿Es funcional la relación de dependencia entre el tiempo y la velocidad?

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

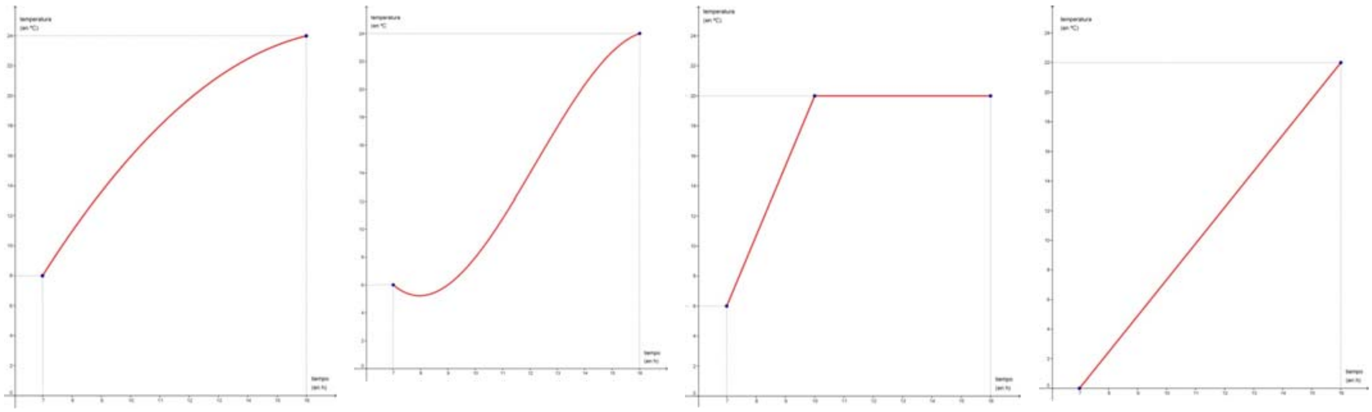
c) ¿A qué velocidad iba cuando llevaba una hora de viaje? ¿En qué momentos iba a una velocidad de 40 km/h?

d) Indica los intervalos en los que la velocidad ha aumentado y disminuido. ¿Ha sido constante en algún momento? ¿Cuándo? ¿Durante cuánto tiempo?

e) ¿Cuál ha sido la velocidad máxima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿En qué momento se alcanzó? ¿Y durante la primera hora del mismo?

f) ¿Cuál ha sido la velocidad mínima alcanzada a lo largo de todo el viaje? ¿Cuándo se alcanzó? ¿Y entre la primera media hora y la hora y media?

19. Las gráficas siguientes muestran la evolución, un día cualquiera, de la temperatura alcanzada entre las 7 de la mañana y las 4 de la tarde en cuatro ciudades (Madrid, Granada, Valladolid y Sevilla):



a) Explica la monotonía de todas las gráficas.

b) ¿En alguna ciudad la temperatura se ha mantenido constante durante todo el intervalo? ¿Y en parte de él?

c) ¿Qué ciudad crees que presenta un cambio de temperatura más suave a lo largo de toda la mañana?

d) Teniendo en cuenta que en Madrid el incremento de la temperatura ha sido siempre lineal, en Granada la temperatura mínima se ha alcanzado después de las 7 h, en Sevilla a veces se ha mantenido constante, indica qué gráfica corresponde a cada una de las ciudades y explica cuáles han sido las temperaturas máximas y mínimas en cada una de ellas.

20. Un viaje realizado por un tren, en un cierto intervalo del mismo, viene dado de la siguiente forma: Durante las dos primeras horas, la distancia "*d*" (en kilómetros) al punto de partida es: $2 \cdot t + 1$, donde "*t*" es el tiempo (en horas) de duración del trayecto. Entre la 2ª y 3ª hora, dicha distancia viene dada por $-t + 7$. Entre la 3ª y 4ª hora, ambas inclusive, $d = 4$. Desde la 4ª y hasta la 6ª (inclusive), la distancia se ajusta a $3 \cdot t - 8$.

a) Realiza una tabla y una gráfica que recoja dicho viaje de la forma más precisa posible (para ello debes calcular, como mínimo, los valores de la variable tiempo en los instantes 0, 2, 3, 4 y 6).

b) Explica si la relación anteriormente explicada entre la distancia recorrida y el tiempo tardado en recorrerla es funcional.

c) La relación anterior, ¿presenta alguna discontinuidad?

d) ¿En qué momento la distancia al punto de partida es de 7 km?

e) ¿Qué indican los puntos de corte de la gráfica con los ejes?

f) Determina los intervalos donde la función es creciente, decreciente y constante.

g) Encuentra los puntos donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y absolutos. Interpreta el significado que puedan tener.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

21. Representa gráficamente las siguientes funciones, estudiando en ella todas las características que se han trabajado en el capítulo: continuidad, monotonía, extremos, simetría y periodicidad.

a) Valor absoluto de un número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, si\ x > 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$.

b) Opuesto e inverso del número *x*: $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Tipos de funciones

22. Escribe la ecuación de la recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada en el origen 6.

23. Sin representarlos gráficamente, di si están alineados los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ y $C(12, 15)$.

24. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.

25. Dibuja en tu cuaderno, en un mismo sistema coordenado, las rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. ¿Cómo son?

26. Una empresa de alquiler de vehículos ofrece dos fórmulas diferentes. Fórmula 1: Lo alquila por 300 euros al día con kilometraje ilimitado. Fórmula 2: Lo alquila por 200 euros al día y 7 euros el kilómetro. Queremos hacer un viaje de 10 días y mil kilómetros, ¿cuánto nos costará con cada una de las fórmulas? Como no sabemos el kilometraje exacto que acabaremos haciendo, nos interesa hacer un estudio para saber la fórmula más beneficiosa. Escribe las fórmulas de ambas situaciones y dibujas sus gráficas. Razona, a partir de dichas gráficas, qué fórmula es más rentable según el número de kilómetros que vayamos a hacer.

27. Halla la ecuación y dibuja la gráfica de las rectas siguientes:

a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es 5.

b) Pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(0, 9)$.

c) Su ordenada en el origen es 0 y su pendiente es 0.

d) Pasa por los puntos $C(-2, 7)$ y $D(-3, 10)$.

e) Pasa por el punto (a, b) y tiene de pendiente m.

28. Dibuja en tu cuaderno, sin hallar su ecuación, las rectas siguientes:

a) De pendiente 2 y ordenada en el origen 0.

b) Pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 1)$.

c) Su pendiente es 2 y pasa por el punto (4, 5).

29. Calcula el vértice, el eje de simetría y los puntos de intersección con los ejes de las siguientes parábolas. Dibuja sus gráficas.

a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

30. Dibuja la gráfica de $y = 2x^2$. Haz una plantilla. Determina el vértice de las siguientes parábolas y utiliza la plantilla para dibujar su gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ayuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

31. Ajusta una función polinómica a los datos de la tabla:

***x*:**	0	1	2	3	4	5	6
***y*:**	1	5	11	19	29	41	55

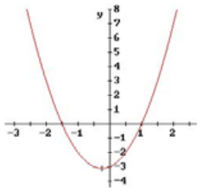
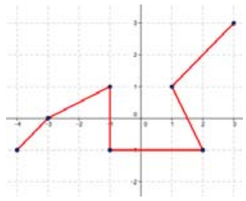
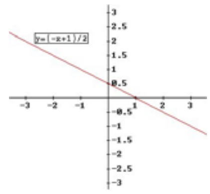
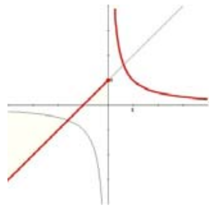
32. Dibuja las gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso los puntos de discontinuidad y las asíntotas.

33. Dibuja las gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

Autores: José Gallegos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

1. La única gráfica que no corresponde a una función es:

a)  b)  c)  d) 

2. La única tabla que no puede ser de una relación funcional es:

a)

x	***y***
0	5
1	7
2	32
3	41

b)

x	***y***
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2

c)

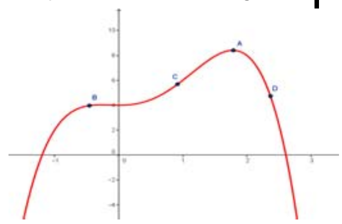
x	***y***
–3	1
–1	2
0	3
2	4

d)

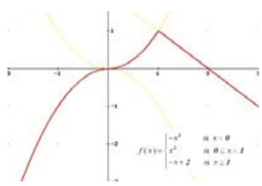
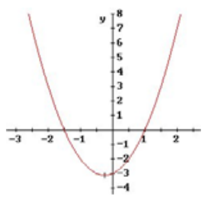
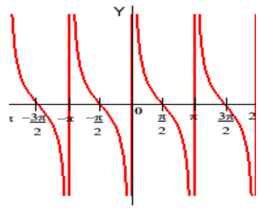
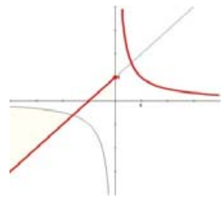
x	***y***
0	1
1	2
4	3
0	4

3. El máximo absoluto de la función se alcanza en el punto:

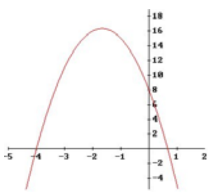
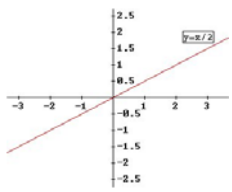
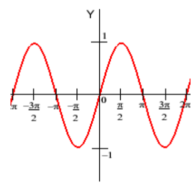
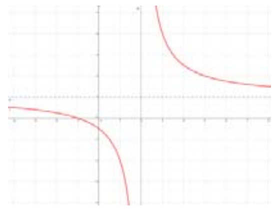
a) b) c) d



4. La única gráfica que corresponde a una función periódica es:

a)  b)  c)  d) 

5. La única gráfica que corresponde a una función que es siempre creciente es:

a)  b)  c)  d) 

6. La única función afín que, además, es lineal es:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

7. La única función cuadrática es:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -2x^3 - 3x$

8. La función cuadrática que tiene su vértice en el punto (2, 0) es:

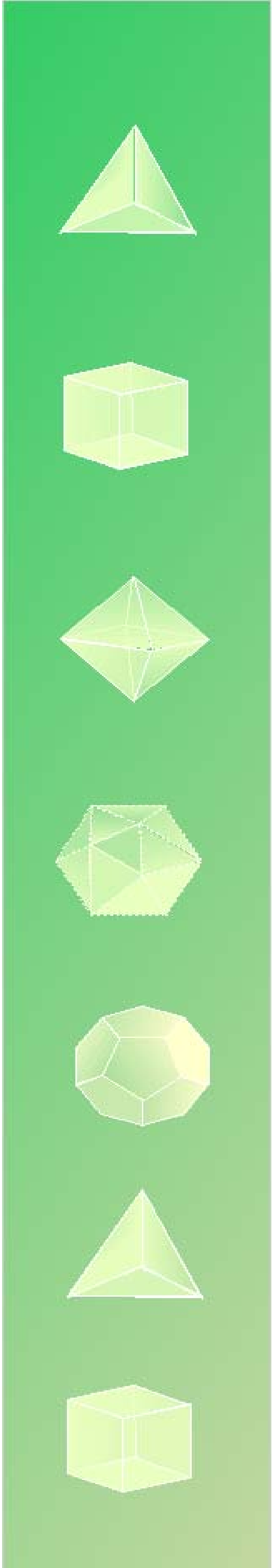
a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. La hipérbola de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ es:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. La única función exponencial es:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$



Formación Profesional Básica

Matemáticas II

Capítulo 4: Geometría elemental del plano

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de Marea Verde. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado el siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de Marea Verde **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

CAPÍTULO 8. Figuras planas de **1º ESO** de autora: **Milagros Latasa Asso.**

ÍNDICE

Resumen

En los mosaicos de la Alhambra como el de la fotografía puedes observar distintas figuras geométricas como rectas paralelas y rectas secantes, estrellas de 5 y de 10 puntas, polígonos…

En este capítulo vas a revisar tus conocimientos de geometría y a aprender muchas cosas nuevas sobre las figuras geométricas planas lo que te va a permitir ver con unos ojos nuevos el mundo que te rodea observando rectas paralelas en los edificios, ángulos interiores o exteriores, o como en el mosaico anterior, los motivos geométricos que lo forman. Estas formas geométricas pueden permitirte diseñar interesantes decoraciones.

1. ELEMENTOS DEL PLANO

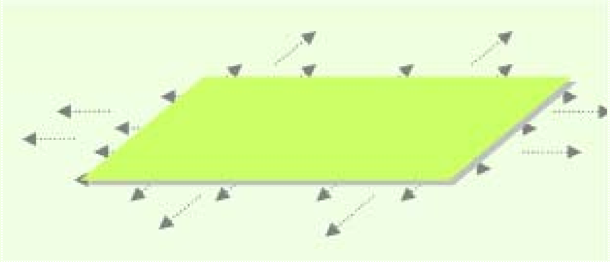
1.1. Puntos, rectas, semirrectas, segmentos.

El elemento más sencillo del plano es el **punto**. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Es muy útil nombrarlo y para ello se utilizan letras mayúsculas A, B, C,…

Al igual que el punto, **la recta** es un objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas *r, s, t,…*

Una **semirrecta** es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta *p*, …

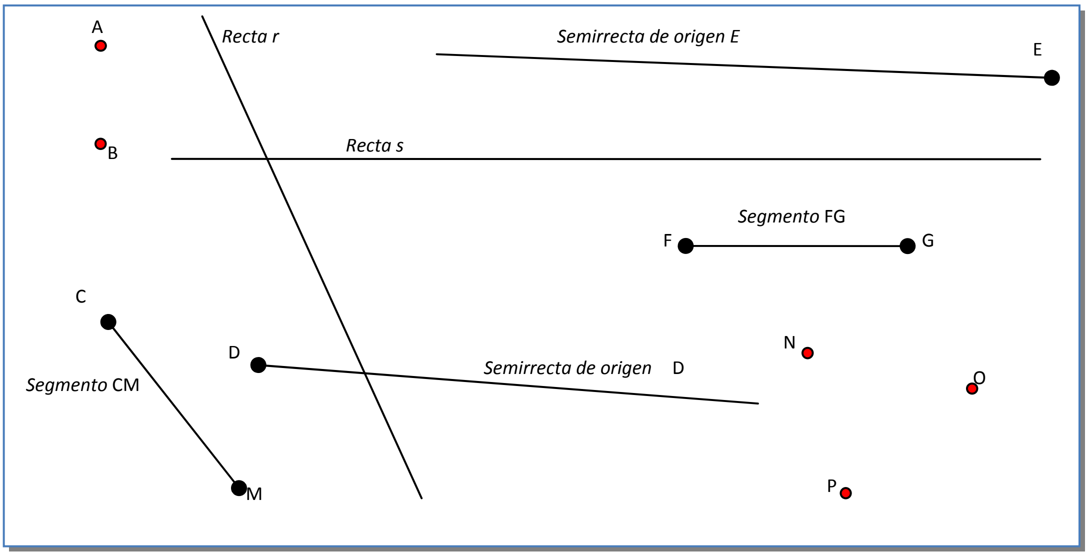
Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento $\overline{AB}$ o segmento de extremos A, B.



Imagina que cada uno de los límites de la hoja de tu cuaderno, de la pizarra o de cada una de las paredes de la habitación en la que estás, se prolonga indefinidamente sin cambiar su inclinación o posición. Los objetos resultantes serían ejemplos de planos.

Para representarlos y estudiar bien sus elementos, nos quedaremos solo con una parte de cada uno. Por ejemplo, en los casos anteriormente citados, con la misma hoja, la pizarra o la pared tal como las vemos.

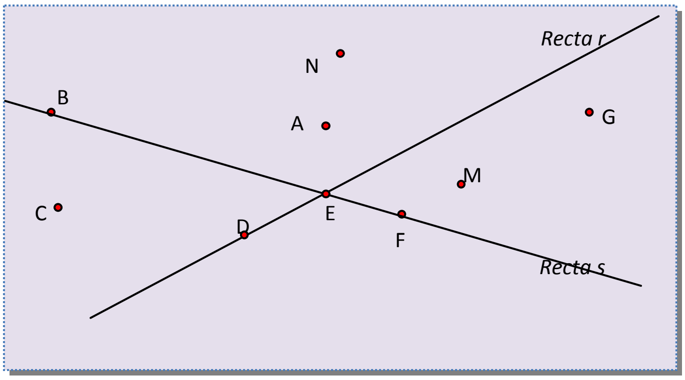
Ejemplo:



Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Copia en tu cuaderno el siguiente dibujo y realiza las siguientes actividades.



Dibuja tres segmentos que tengan sus extremos fuera de las rectas *r* y *s*.

¿El punto *B* pertenece a la recta *s*? ¿Y a la recta *r*?

Dibuja un segmento que tenga como extremos *A* y un punto que esté en las rectas *r* y *s*

Dibuja una semirrecta de origen *C* y que pase por *B*.

¿Es posible dibujar una recta que pase a la vez por *M, F* y *G*? ¿Y por *N, A* y *E*?

1.2. Rectas paralelas y secantes

Pensemos ahora en las diferentes posiciones que pueden ocupar dos rectas en un plano:

Rectas paralelas*:* No tienen ningún punto común

Rectas secantes*:* Tienen un único punto común

Rectas coincidentes*:* Todos sus puntos son comunes

Por un punto P exterior a una recta r solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

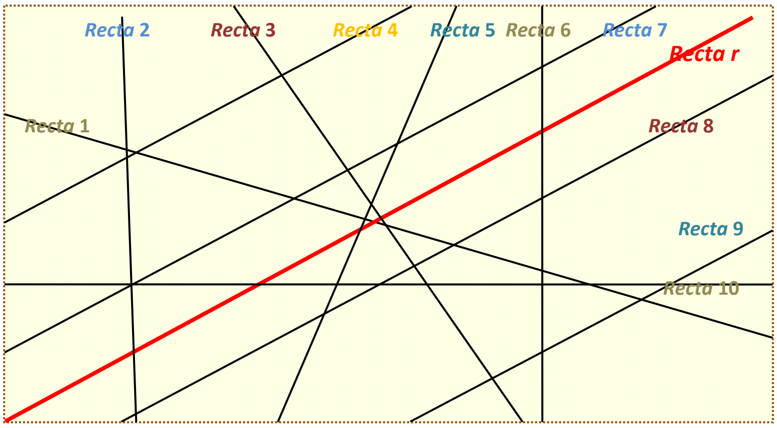
Ejemplo:

- A nuestro alrededor encontramos objetos cotidianos en los que se aprecian paralelas y secantes


Actividades propuestas

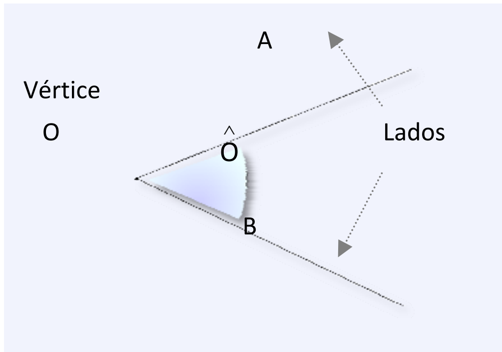
2. Dibuja cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.

3. Observa el siguiente dibujo e indica qué rectas son paralelas a *r* y qué rectas son secantes a *r.*



1.3. Ángulos. Tipos de ángulos

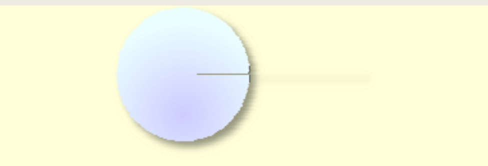
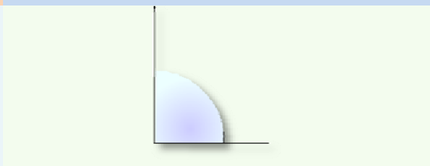
Se llama ***ángulo*** a la región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman **lados** y el origen **vértice.**



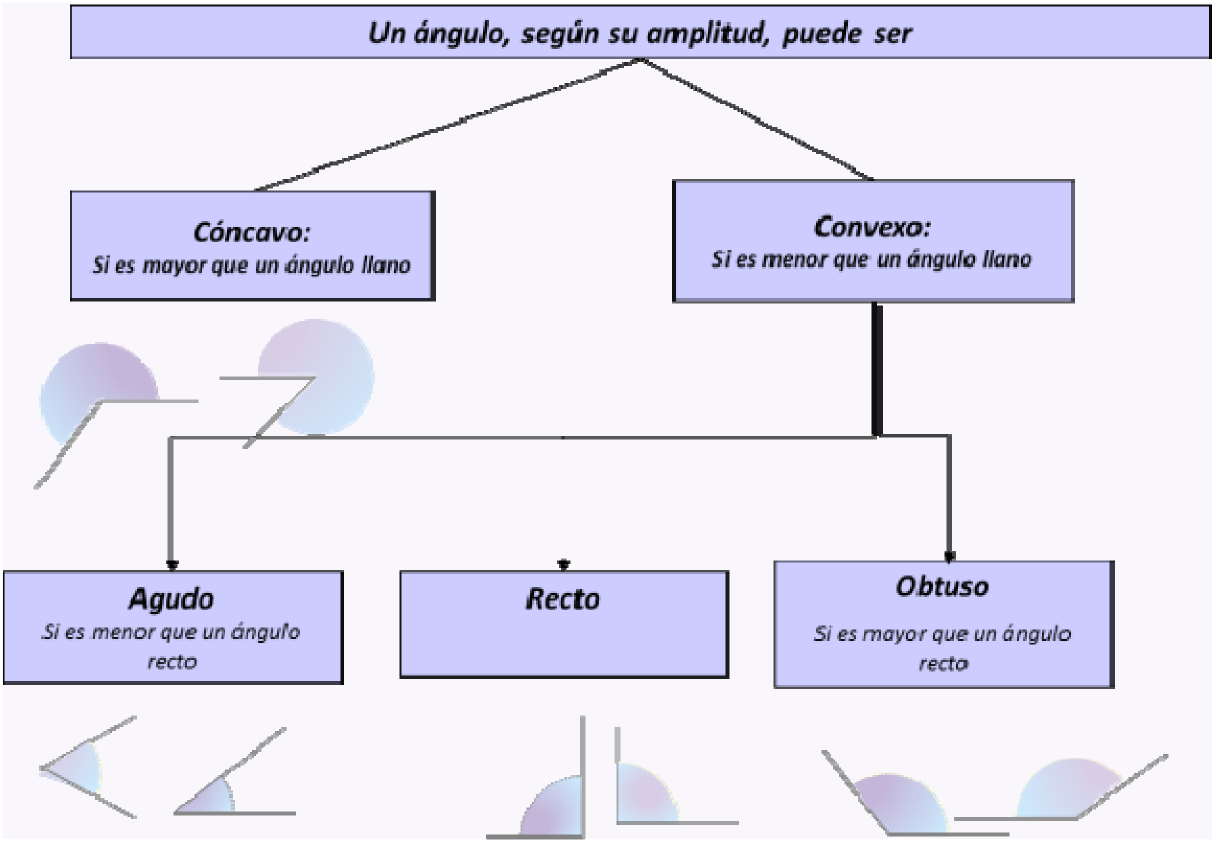
Para nombrar un ángulo podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último puntos sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo ^.

En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = A\hat{O}B$

Asociados a semirrectas especiales definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas. Nos referimos a ángulos **completos**, **llanos** y **rectos**.

Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.	**Ángulo llano**: Es la mitad de un ángulo completo.	**Ángulo recto**: Es la mitad de un ángulo llano.
		

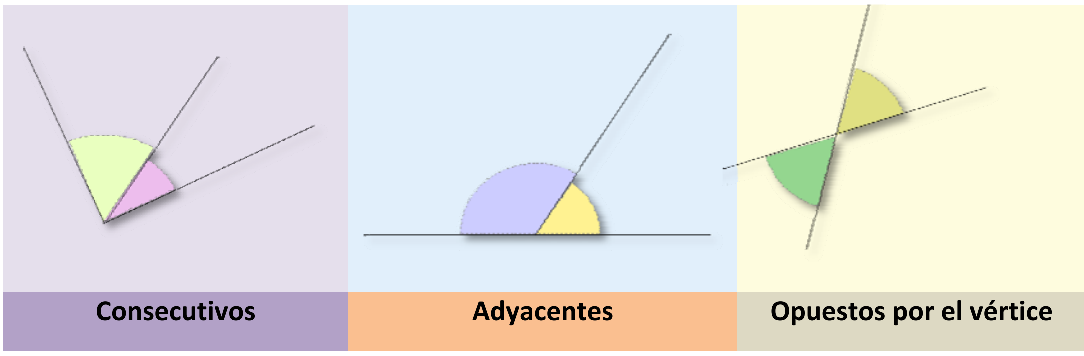
Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Se llaman ángulos ***consecutivos*** a dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común. Un caso particular son los ángulos ***adyacentes*** que son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo llano.

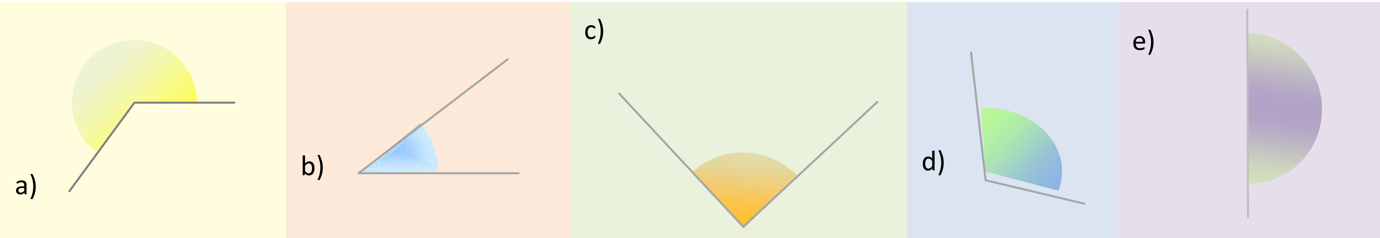
Se llaman ángulos ***opuestos por el vértice*** a los ángulos que tienen el mismo vértice y tales que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Ejemplo:

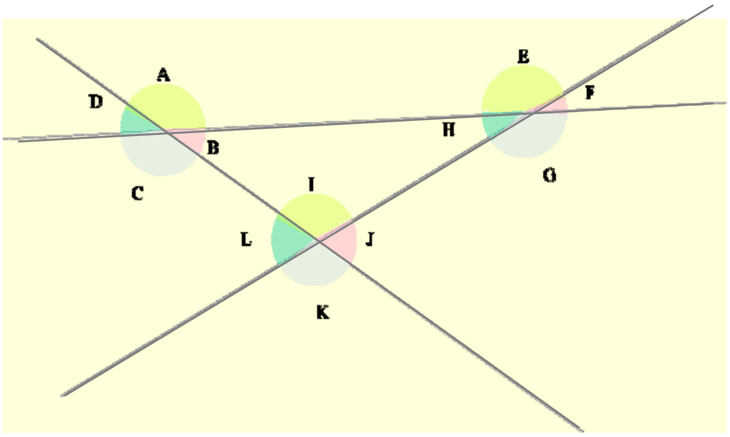


Actividades propuestas

4. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



5. Indica todas las parejas de ángulos adyacentes, consecutivos y opuestos por el vértice que se encuentran en el siguiente dibujo:



1.4. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo **°** y se define como 1/360 de un ángulo completo.

1° = 1 / 360 parte de un ángulo completo.

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto: 1 minuto = 1´ = 1/ 60 parte de un grado.

Segundo: 1 segundo = 1´´ = 1 / 60 parte de un minuto.

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma compleja*. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360 °

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1° = 60 minutos = 3600 segundos

1 minuto = 60 segundos

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Forma compleja: A = 12º 40´ 32´´ B = 13´ 54´´ C = 120º 23´´
- Forma incompleja: D = 35000´´ E = 23º F = 34´

Ejemplo:

- Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9º**
200			

D = 35000´´ = 583´ 20´´= 9º 43´ 20´´

Ejemplo:

- A = 12º 23´10´´ = 12. 3600´´+ 23.60´´+ 10´´ = 44590´´

Actividades propuestas

6. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

a) 12500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17600´´

7. Pasa de forma compleja a forma incompleja

a) 12º 34´ 40´´ b) 13º 23´ 7´´ c) 49º 56´ 32´´ d) 1º 25´ 27´´

8. Completa la tabla:

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8465”		
	245´ 32´´	
		31º 3´ 55´´

1.5. Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo:

24º	43´	29´´	77´´	60	73´	60
45º	29´	48´´	**17´´**	1´	**13´**	1º
69º	72´	77´´	Nº minutos = 72´+ 1´= 73´		Nº de grados= 69º + 1º = 70º	

24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´ = 69º 72´ 77´´ = 69º 73´ 17´´ = **70º 13´ 17´´**

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Para restar datos de medida de ángulos, ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

65º 48´ 50´´ 45º 29´ 48´´ **20º 19´ 2´´**	65º 48´ 50´´ - 45º 29´ 48´´= **20º 19´ 2´´**

Ejemplo:

37º 60´ ~~38º~~ 12´ 14´´ 15º 15´ 15´´	71´ 60´´ ~~37º~~ 72´ 14´´ 15º 15´ 15´´	37º 71´ 74´´ 15º 15´ 15´´ **22º 56´ 59´´**
38º 12´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 72´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 71´ 74´´ – 15º 15´ 15´´ = **22º 56´ 59´´**		

Actividades propuestas

9. Calcula:

a) 34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´ b) 16 º 30´ 1´´+ 12 º 13´ 12´´ + 2 º 1´

c) 16 º 45' + 23 º 13'' + 30 º 20´ 30´´ d) 65 º 48´ 56´´ - 12 º 33´ 25´´

e) 35 º 54´ 23´´ - 15 º 1´ 35'' f) 43 º 32´ 1 ´´ - 15 º 50´ 50''

1.6. Ángulos complementarios y suplementarios

Se llaman **ángulos complementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90 º)

Se llaman **ángulos suplementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180 º)

Ejemplo:

- En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y B son ángulos complementarios. C y D son suplementarios.

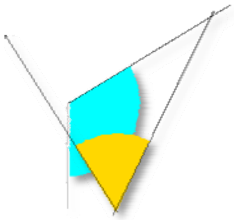
Ejemplo:

- El ángulo = 12 º es el complementario de = 78 º y el suplementario de = 168 º

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

10. Copia en tu cuaderno y dibuja el complementario del ángulo y el suplementario del ángulo .



Calcula los ángulos complementario y suplementario de:

a) 35º 54´ 23´´ b) 65º 48´ 56´´

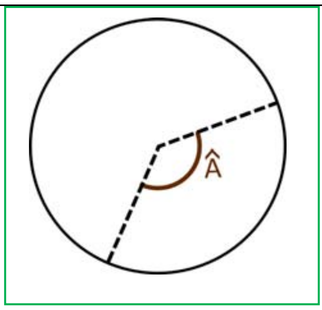
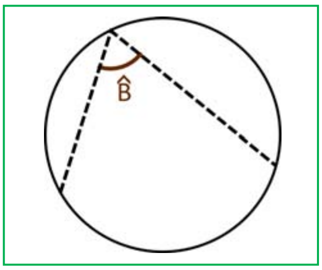
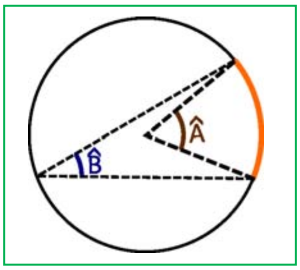
c) 43º 32´ 1´´ d) 30º 20´ 30´´

11. Indica si las siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o ninguna de las dos cosas:

a) 15º 34´ 20´´ y 164º 25´ 40´´ b) 65º 48´ 56´´ y 24º 12´ 4´´ c) 43º 32´ 1´´ y 30º 26´ 59´´

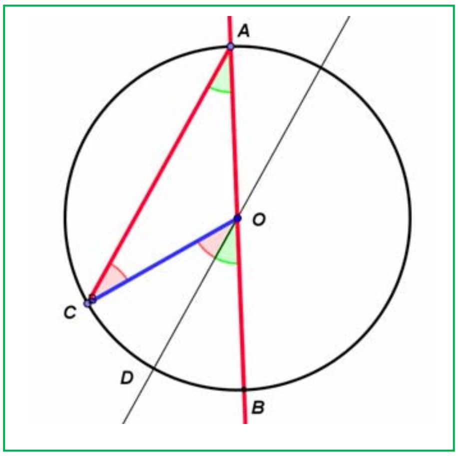
1.7. Ángulos en la circunferencia

En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

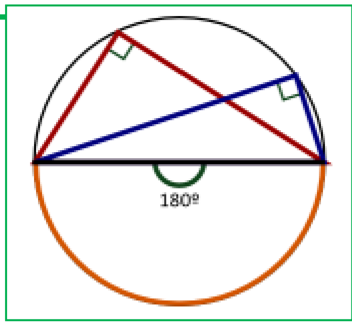
Demostración:



Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

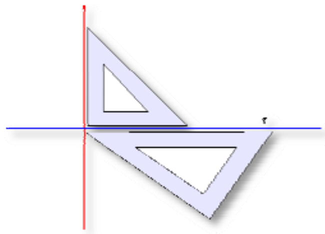


12. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.

13. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?

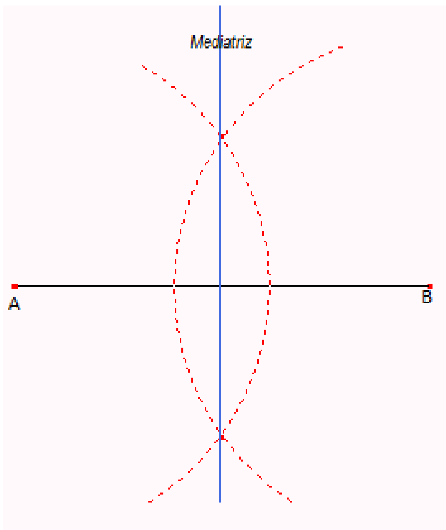
1.8. Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento

Dos rectas son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. Es un caso especial de rectas secantes.



Para construir una recta perpendicular a una recta dada r, se adapta un cartabón a r y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.

La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio



Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

Con un compás y una regla podemos trazar fácilmente la mediatriz de un segmento dado. Debemos seguir los pasos

Se dibuja el segmento AB.

Con centro en A y con radio R mayor que la mitad del segmento, se traza un arco que corte al segmento AB.

Con el mismo radio se traza un arco de centro B.

Se unen los puntos comunes de los dos arcos. Esta recta es la mediatriz.

Actividades propuestas

14. ¿Es posible dibujar tres rectas, secantes dos a dos de modo que haya exactamente: a) Una pareja de rectas perpendiculares? b) ¿Dos parejas de rectas perpendiculares? c) ¿Las tres parejas de rectas sean perpendiculares?

15. Dibuja la mediatriz de un segmento de 6 cm de longitud.

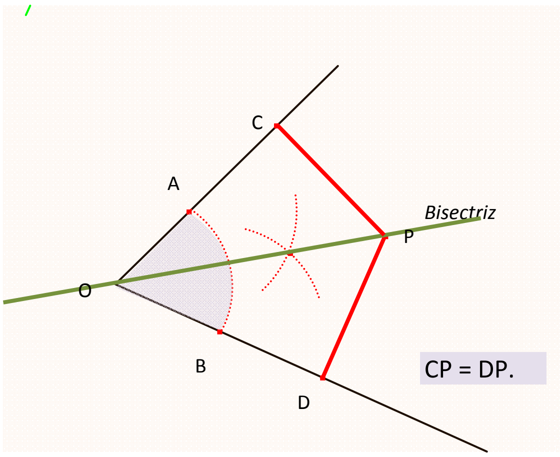
16. Dibuja un segmento de longitud 8 cm, su mediatriz y una recta perpendicular al segmento de partida que esté a una distancia de 5 cm de la mediatriz. ¿Qué posición ocupa esta recta con respecto al segmento de partida?

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.9. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz d**e un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los 2 lados del ángulo. Puedes observar que en la figura del ejemplo adjunto que: CP = DP.

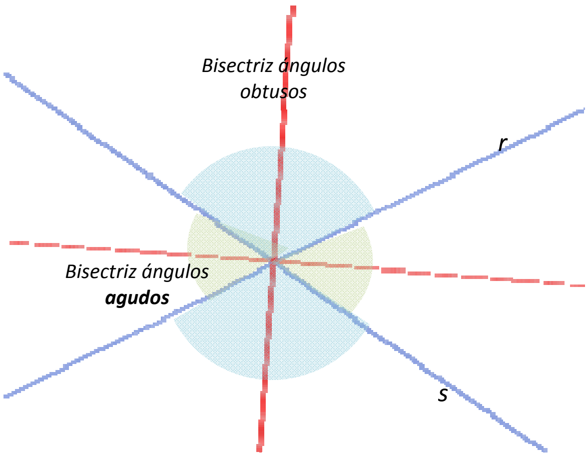


Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice O, se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, A y B. A continuación, con centros en A y B respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia AB, trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice O nos da la bisectriz.

Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.

Ejemplo:

- *En la figura inferior observamos que las bisectrices de los ángulos que forman r y s son perpendiculares.*



Actividades propuestas

17. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:

a) 45° b) 130° c) 70° d) 45°

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.10. Primeros pasos con Geogebra

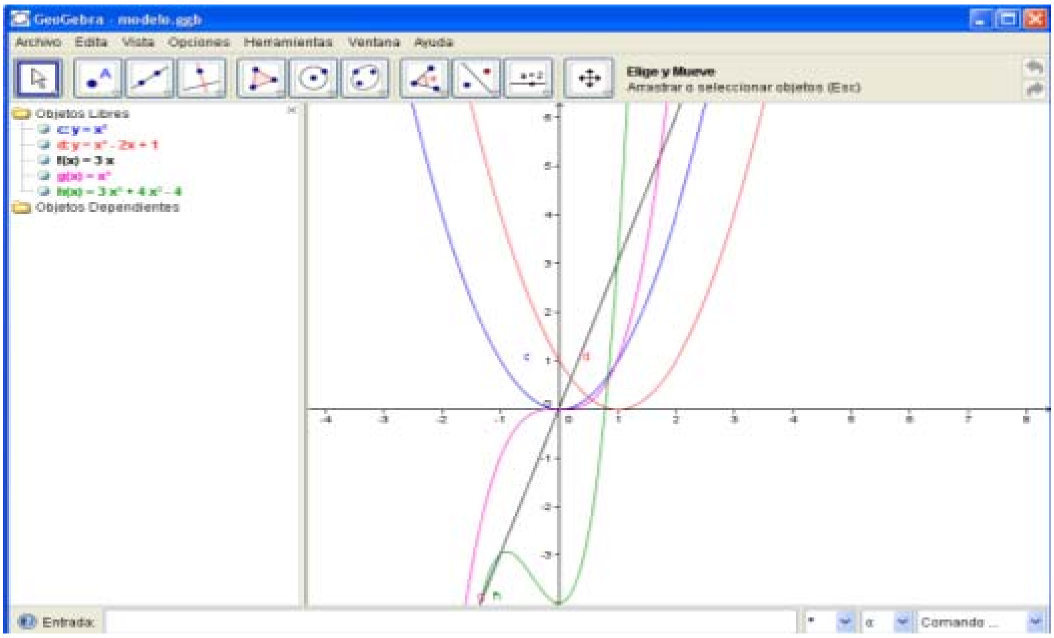
La ventana de Geogebra

Al ejecutar el programa *Geogebra* la ventana que aparece tiene muchos componentes comunes con cualquier ventana de Windows.

El elemento más característico de este programa es la **barra de herramientas** en la que aparecen iconos. Cada uno de ellos se activa al hacer clic con el ratón sobre él y se desactiva cuando se selecciona otro. Estos primeros iconos que aparecen se corresponden con la primera opción que encontramos en el menú desplegable que se obtiene al mantener pulsado el ratón sobre cada uno de ellos.

Otra particularidad es que el área de trabajo está dividida en dos partes la **ventana geométrica**, donde se realizan las construcciones geométricas, y la **ventana algebraica** en la que aparecen características de los elementos que se construyen en la ventana geométrica como son las coordenadas de los puntos, las longitudes de los segmentos, el área de los polígonos, las ecuaciones de rectas, circunferencias, ….

También se pueden realizar operaciones introduciendo los números o el nombre de los elementos en el **Campo de Entrada** que se encuentra en la parte inferior de la ventana, los resultados aparecen en la ventana algebraica. Con las opciones de **Visualiza** de la barra de menús se puede ocultar o mostrar, la



ventana algebraica, el campo de entrada así como los ejes y la cuadrícula de la ventana geométrica.

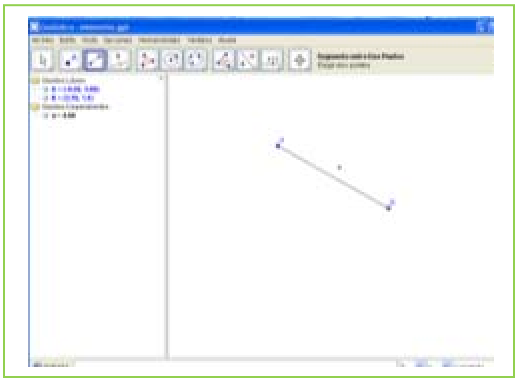
Los iconos **Deshace** y **Rehace** que se encuentran en la parte superior derecha de la ventana geométrica y como opciones del menú **Edita** permiten eliminar o volver a mostrar una acción realizada.

El **menú contextual**, el que se obtiene al hacer clic con el botón derecho del ratón sobre el objeto de la ventana geométrica o de la algebraica, tiene múltiples posibilidades, permite entre otras funciones borrar, ocultar, cambiar el nombre y modificar la apariencia de los objetos construidos.

Autores: Milagros Latasa y David Miranda

Elementos geométricos

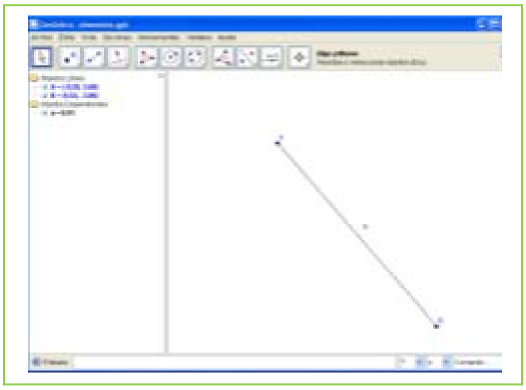
Actividades resueltas



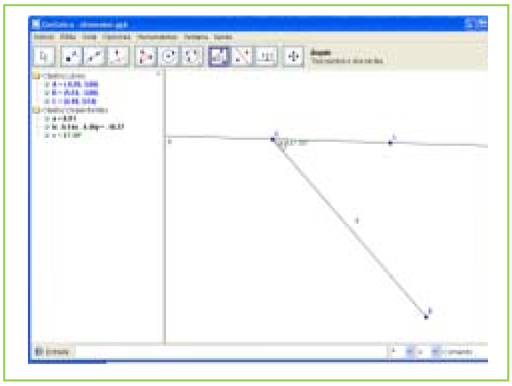
- Antes de comenzar comprueba en la opción del menú **Visualiza** que está activada la ventana algebraica y desactiva ejes y cuadrícula.

- Con la herramienta **Nuevo punto** dibuja un punto en la ventana geométrica, el sistema lo denomina *A* y sus coordenadas aparecen en la ventana algebraica, en la carpeta de los objetos libres.

- Dibuja otro punto *B* y con la herramienta **Segmento entre dos puntos** traza el segmento, *a*, que pasa por los puntos *A* y *B*. En la ventana algebraica aparece la longitud del segmento en la carpeta de objetos dependientes.



- Con la herramienta **Desplaza**, la primera de la barra de herramientas, agarra el punto *B* y cambia su posición, observa de qué forma cambian sus coordenadas y la longitud del segmento.

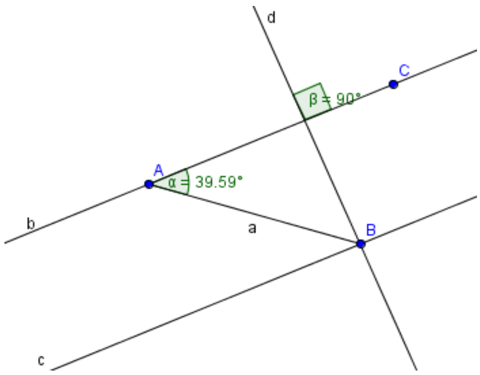


- Dibuja otro punto *C,* que no pertenezca al segmento, y con la herramienta **Recta que pasa por 2 puntos** traza la recta, *b*, que pasa por *A* y *C*.

- Activa la herramienta **Ángulo** y señala con el ratón los puntos *B*, *A* y *C*, obtienes la medida del ángulo que has señalado. El orden para señalar los puntos *B* y *C* debe ser el contrario al de las agujas del reloj.

Rectas paralelas y perpendiculares

Actividades resueltas



- Con la herramienta **Recta paralela** traza una recta, *c*, que pasa por el punto *B* y es paralela a la recta *b* que pasa por los puntos *A* y *C*.

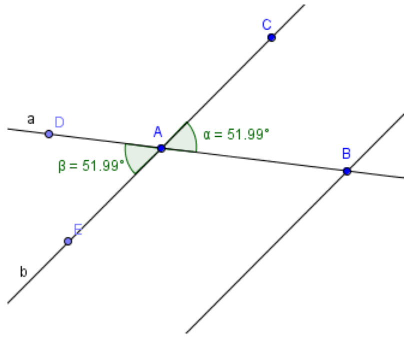
- Utiliza la herramienta **Recta perpendicular** para trazar una recta, *d*, que pasa por el punto *B* y es perpendicular a la recta *b*.

- Calcula la medida del **ángulo** que forman las rectas *b* y *d*.

- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos *A, B* y *C* y observa que cambian de posición pero se mantienen las propiedades geométricas de la construcción, por ejemplo, las rectas *b* y *c* permanecen paralelas entre sí y perpendiculares a la recta *d*.

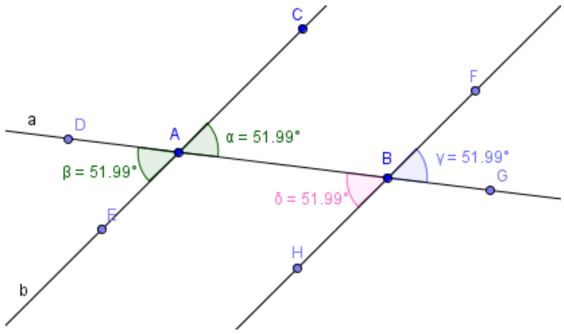
Ángulos

Actividades resueltas



- Abre una nueva ventana de *Geogebra,* en el menú **Visualiza** desactiva **Ejes** y **Cuadricula**

- Determina tres **puntos** *A*, *B* y *C*, no alineados, la **recta**, *a*, que pasa por *A* y *B* y la recta, *b*, que pasa por los puntos *A* y *C*.
- Traza la **recta paralela**, *c***,** que pasa por *B* y es paralela a la recta *a*.
- Calcula la medida del **ángulo,** α, que determinan los puntos *B, A* y *C,* señalando los puntos *B* y *C* en orden contrario al sentido de las agujas del reloj.
- Elige un punto *D* de la recta *a* y otro *E* de la recta *b* para determinar y medir un ángulo, β, *opuesto por el vértice* al ángulo α.



- Determina y mide un ángulo γ tal que los ángulos α y γ sean *correspondientes entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Determina y mide un ángulo δ tal que los ángulos α y δ sean *alternos internos entre paralelas* y con la opción **propiedades** del menú contextual cambia su color.
- Con la herramienta **Desplaza**, mueve los puntos *A, B* y *C* y observa que cambian de posición pero los ángulos α, β, γ y δ miden lo mismo.
- Indica dos ángulos de los que has dibujados que sean *alternos externos entre paralelas*.

Actividades propuestas

18. Repite la actividad resuelta de elementos geométricos. Colócate encima del segmento *a*, aprieta el botón derecho, entra en **Propiedades** y modifica el color, haz que sea rojo. Lo mismo con la recta *b*, pero ahora coloréala en azul. Mueve el punto *B* para observar cómo se modifican las longitudes y el ángulo.

19. Dibuja con *Geogebra* cuatro rectas de modo que haya dos paralelas, dos perpendiculares y dos secantes no perpendiculares.

20. Dibuja con *Geogebra* dos rectas paralelas cortadas por una secante y mide todos los ángulos que se formen.

21. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados paralelos y comprueba que miden lo mismo.

22. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos con lados perpendiculares y comprueba que miden lo mismo.

23. Dibuja con *Geogebra* dos ángulos que sean complementarios y dos que sean suplementarios.

24. Dibuja con *Geogebra* un ángulo inscrito en la circunferencia y el central que abarca el mismo arco. Comprueba que el ángulo inscrito mide la mitad del central. Mueve uno de los puntos sobre la circunferencia y comprueba que esa relación permanece.

2. POLÍGONOS

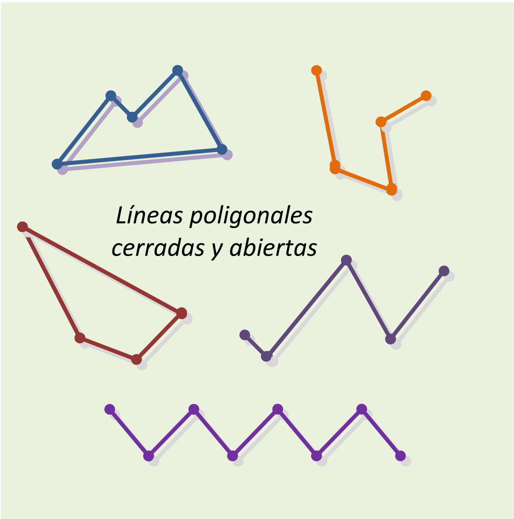
2.1. Líneas poligonales y polígonos.

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente.

Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es *abierta*.

Un **polígono** es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Ejemplo:



2.2. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales

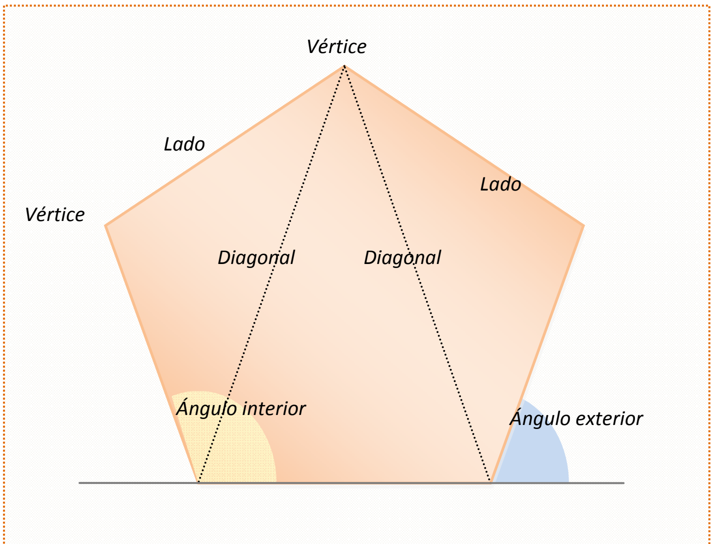
Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono

Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices.**

Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal.**



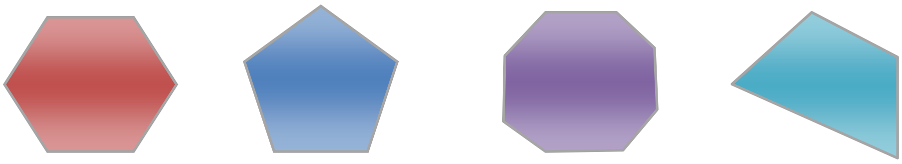
Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Dos polígonos son **iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales. En algunos casos basta con saber que se cumplen condiciones menos exigentes (llamadas criterios de igualdad) para garantizarlo. Veremos por ejemplo tres criterios de igualdad de triángulos.

Actividades propuestas

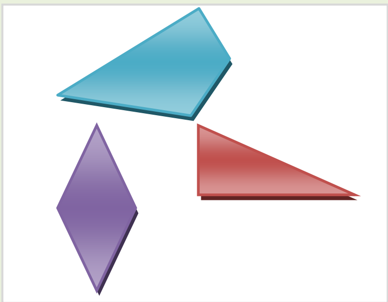
25. Copia los dibujos siguientes y traza todas las diagonales de cada polígono:



A) B) C) D)

2.3. Clasificación de los polígonos

Según *los ángulos* los polígonos se clasifican en dos grandes grupos:



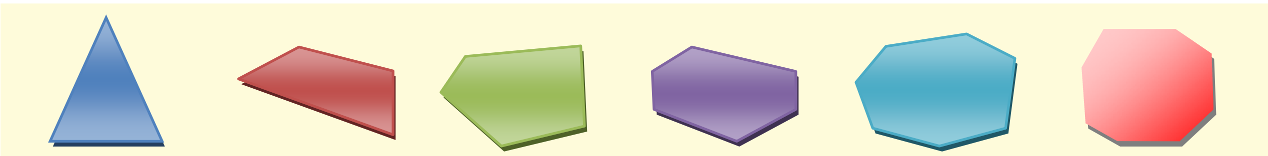
Convexos

Si todos sus ángulos son convexos.

Cóncavos

Si al menos uno de sus ángulos es cóncavo

Por *el número de lados,* los polígonos se clasifican en



Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono
Tres lados	*Cuatro lados*	*Cinco lados*	*Seis lados*	*Siete lados*	*Ocho lados*

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**.

Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares.** Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular.**

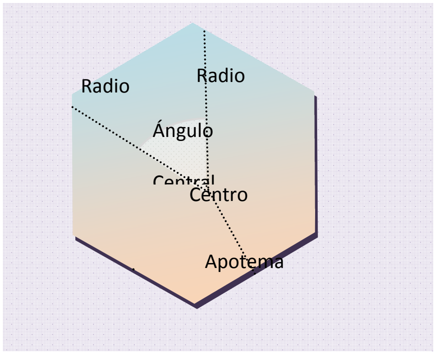
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. El apotema es perpendicular al lado.



Actividades propuestas

26. Dibuja los polígonos siguientes y traza todas sus diagonales:

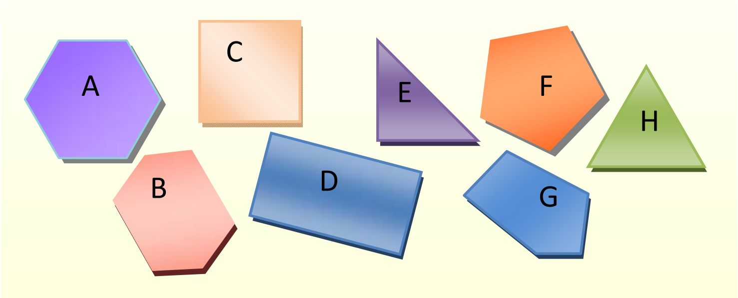
a) Hexágono b) Pentágono c) Octógono d) Trapezoide

27. Dibuja, si es posible, un ejemplo de polígono que sea:

a) triángulo cóncavo b) pentágono convexo

c) hexágono cóncavo d) cuadrilátero convexo regular.

28. Observa la figura adjunta e indica qué polígonos son equiángulos, equiláteros, regulares e irregulares. Puedes copiar la tabla inferior en tu cuaderno y completarla



	A	B	C	D	E	F	G	H
EQUIÁNGULO								
EQUILÁTERO								
REGULAR								
IRREGULAR								

29. Dibuja en tu cuaderno el apotema de:

a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un hexágono regular.

Autores: Milagros Latasa y David Miranda

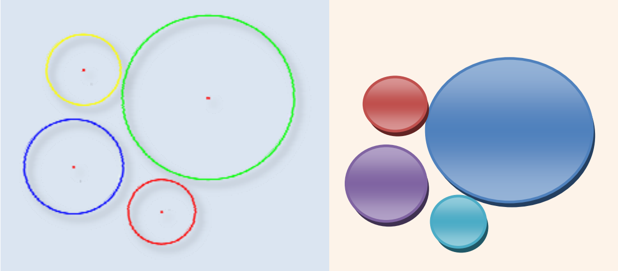
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

3.1. Circunferencia y círculo

Una **circunferencia** es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama **círculo.**



Circunferencias *Círculos*

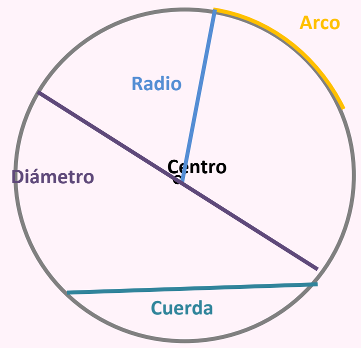
3.2. Elementos de una circunferencia

Se llaman elementos de una circunferencia a ciertos puntos y segmentos singulares de la misma. Los describimos a continuación

El **centro** es el punto interior equidistante de todos los puntos de la circunferencia.

El **radio** de una circunferencia es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Se nombra con la letra *r* o bien con sus puntos extremos. La medida del radio es constante.

El **diámetro** de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.



Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima.

Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama **arco**.

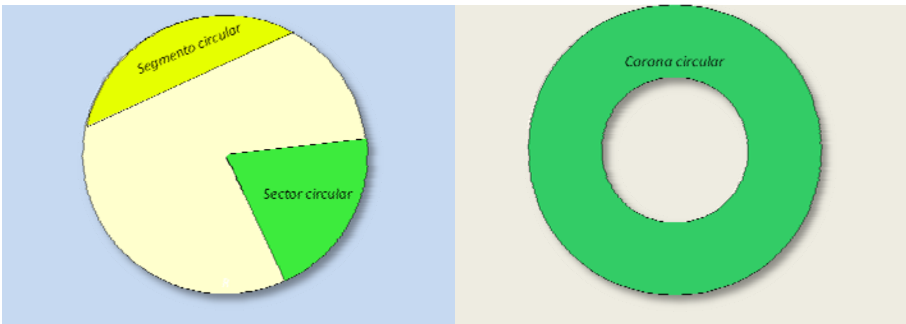
Un arco de circunferencia se denota con el símbolo ∩ sobre las letras que designan los puntos extremos del arco. Por ejemplo el arco de extremos A, B se escribe . Un caso particular es la semicircunferencia, arco delimitado por los extremos de un diámetro

3.3. Sector circular y segmento circular. Corona circular

Un **sector circular** es la porción de círculo comprendida entre dos radios.

Un **segmento circular** es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos.

Una **corona circular** es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.



El ángulo que forman los dos radios que determinan un sector circular, se llama ángulo central. Si el ángulo central es llano, el sector circular es un semicírculo.

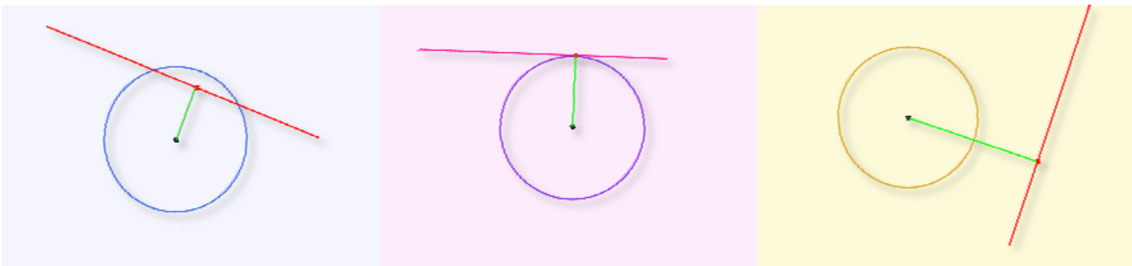
Actividades propuestas

30. Dibuja una circunferencia de radio 4 cm y en ella un sector circular de 30º de amplitud.

31. En la circunferencia anterior, indica si es posible trazar una cuerda en cada uno de los casos siguientes y hazlo en caso afirmativo: a) de 4 cm de longitud, b) de 8 cm, c) mayor de 8 cm.

3.4. Posiciones entre una recta y una circunferencia

Una recta puede tener dos puntos comunes con una circunferencia, uno o ninguno.



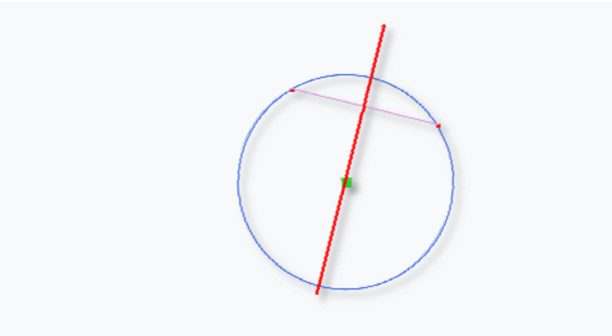
SECANTES Dos puntos en común	TANGENTES Un punto en común	RECTA EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA Ningún punto común

El punto común de una circunferencia y una recta tangentes, se llama **punto de tangencia**

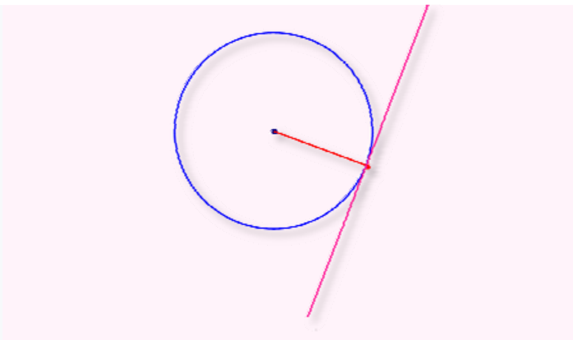
La distancia del centro de la circunferencia a una recta es menor, igual o mayor que el radio, dependiendo de que sean secantes, tangentes o exteriores

3.5. Propiedades importantes de las circunferencias y sus elementos

Algunas construcciones geométricas como el trazado de la circunferencia que pasa por tres puntos dados, la búsqueda del centro de un arco de circunferencia o el dibujo de una recta tangente a una circunferencia cuando se conoce el punto de tangencia, se pueden resolver gracias a estas propiedades que seleccionamos



Las mediatrices de todas las cuerdas de una circunferencia pasan por el centro.



La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.

Actividades propuestas

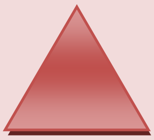
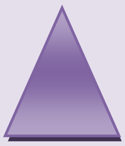
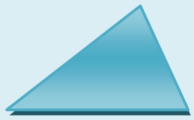
32. Dibuja tres puntos que no estén en línea recta de modo que el primero esté a 2 cm de distancia del segundo y el segundo a 3 cm del tercero. Finalmente traza la circunferencia que pase por los tres.

4. TRIÁNGULOS

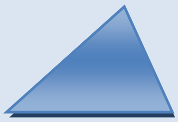
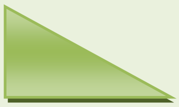
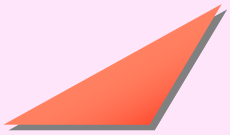
Como hemos visto antes, un triángulo es un polígono de tres lados. Estudiaremos en este párrafo dos clasificaciones de los triángulos, dos propiedades importantes comunes a todos los triángulos y descubriremos los llamados rectas y puntos notables de un triángulo.

4.1. Clasificación de los triángulos

Según *los lados* los triángulos se clasifican en

		
Equiláteros	**Isósceles**	**Escalenos**
Tienen tres lados iguales	*Tienen exactamente dos lados iguales*	*Los tres lados son desiguales*

Según *los ángulos* los triángulos se clasifican en

		
Acutángulos	**Rectángulos**	**Obtusángulos**
Tienen tres ángulos agudos	*Tienen un ángulo recto*	*Tienen un ángulo obtuso*

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos* y el tercero se denomina *hipotenusa*.

4.2. Propiedades fundamentales de un triángulo

La suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

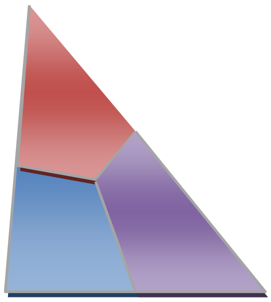
De esta propiedad se deducen las consecuencias siguientes:

LOS ÁNGULOS AGUDOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO SON COMPLEMENTARIOS.
CADA ÁNGULO DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO VALE 60º.

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Es preciso tener en cuenta esta propiedad para saber si tres segmentos dados pueden o no ser los lados de un triángulo

Actividades propuestas



33. Dibuja en un papel un triángulo, divídelo en tres partes y coloréalas con tres colores diferentes. Después recórtalas y forma con ellas un ángulo llano. De esta forma, habrás demostrado que la suma de sus ángulos es 180º

34. Calcula el valor del tercer ángulo de un triángulo si dos de ellos miden respectivamente:

a) 30^o y 80^o b) 20^o y 50^o c) 15^o y 75^o d) 40^o 30´ y 63^o 45´.

35. Clasifica, según sus ángulos, los triángulos del ejercicio anterior.

36. Construye un triángulo rectángulo isósceles.

37. Indica razonadamente si es posible construir un triángulo cuyos lados midan:

a) 5 cm, 4 cm y 3 cm b) 10cm, 2 cm y 5 cm c) 2dm, 2dm 4 dm d) 13 m, 12 m y 5 m

4.3. Rectas y puntos notables de un triángulo

En un triángulo se definen cuatro tipos de rectas denominadas, genéricamente, rectas notables. Esas rectas son: mediatrices, bisectrices, medianas y alturas.

En todo triángulo existen tres rectas de cada uno de los tipos mencionados y tienen la propiedad de pasar por un mismo punto. Los puntos de intersección de estos grupos de rectas se denominan puntos notables

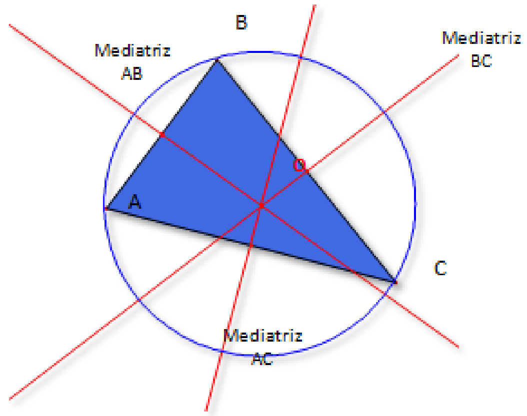
Las mediatrices de los tres lados del triángulo concurren en un punto llamado **circuncentro** (O en la figura izquierda de un ejemplo). Dicho punto equidista de los vértices y, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto llamado incentro (I en la figura de la izquierda de un ejemplo). Dicho punto equidista de los lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

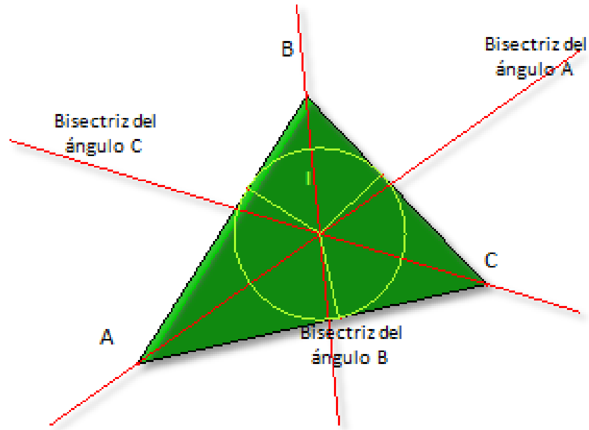
Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Circuncentro O



Incentro I

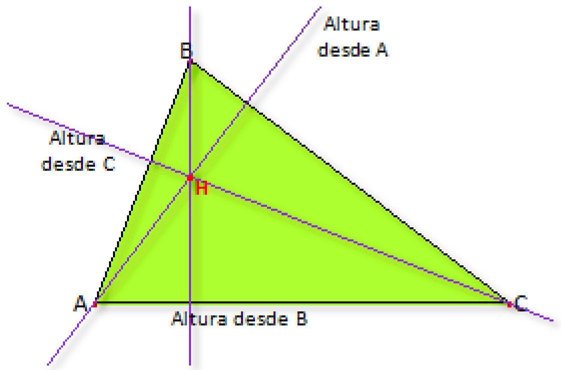


Se llama **altura** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

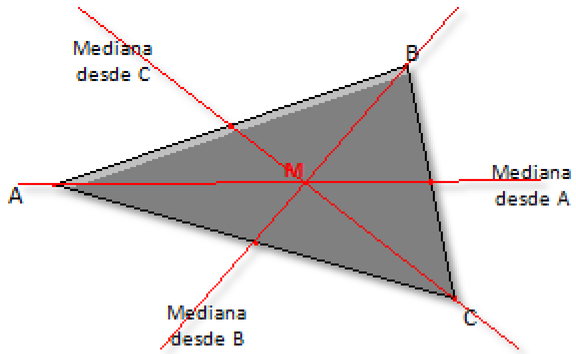
Las tres alturas de un triángulo se cortan en el **ortocentro.**

Se llama **mediana** de un triángulo a la recta que pasa por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. El punto de corte de las medianas se llama **baricentro**.

Ejemplo:



Ortocentro H



Baricentro M

Actividades propuestas

38. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado y comprueba que todos los puntos notables coinciden.

39. Calcula el circuncentro de un triángulo rectángulo. ¿Dónde se encuentra?

40. Calcula el ortocentro de un triángulo obtusángulo.

4.4. Igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales si los tres lados y los tres ángulos son iguales.

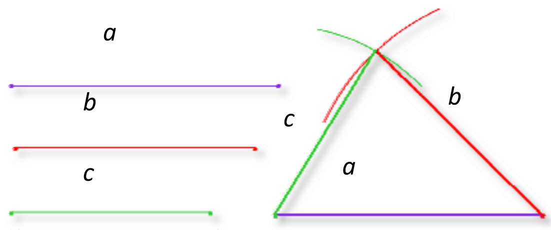
Para comprobar que dos triángulos son iguales es suficiente comprobar que se cumple uno de los tres criterios siguientes:

1º Tienen los tres lados iguales.

Es posible construir un triángulo tomando como punto de partida las longitudes de los tres lados: *a, b, c*

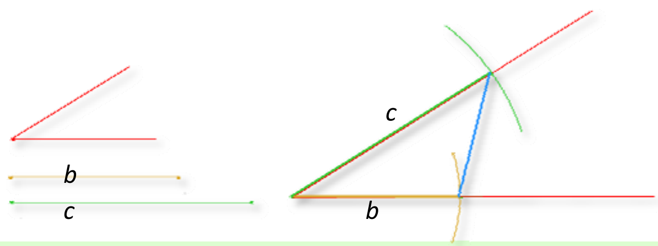
Para ello, se dibuja un segmento de longitud igual a uno de ellos (*a* por ejemplo). Sus extremos serán dos vértices del triángulo.

A continuación desde un extremo se traza un arco con radio *b* y desde el otro se traza un arco con radio *c*. El punto común de los dos arcos es el vértice que falta:

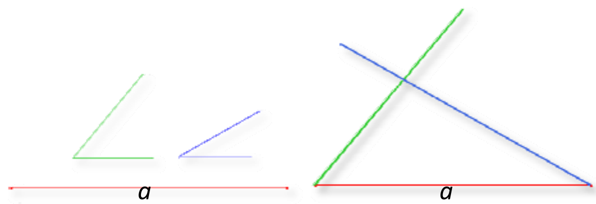


2º Tienen dos lados iguales e igual el ángulo comprendido entre ambos.

Pongamos que los datos son las longitudes b y c y el ángulo . Se dibuja en primer lugar el ángulo . Su vértice es un vértice del triángulo. Sobre sus lados se llevan con un compás las medidas b y c, estos arcos son los dos vértices restantes.



3º Tienen un lado igual adyacente a dos ángulos también iguales.



Suponemos conocido el lado a y los ángulos y Podemos construir el triángulo con facilidad también en este caso.

Se dibuja en primer lugar el segmento *a*. Sus extremos son dos vértices de nuestro triángulo. En sus extremos, se dibujan los ángulos y de modo que el segmento *a* sea un lado de cada uno de ellos. Por último, se prolongan los lados de y hasta que se corten.

Actividades propuestas

41. Dibuja un triángulo en los siguientes casos:

a) Sus lados miden 12 cm, 10 cm y 8 cm

b) Un lado mide 10 cm y sus ángulos adyacentes 30^{o} y 65^{o}.

c) Dos lados miden 10 cm y 8 cm y el ángulo comprendido entre ellos 50^{o}.

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

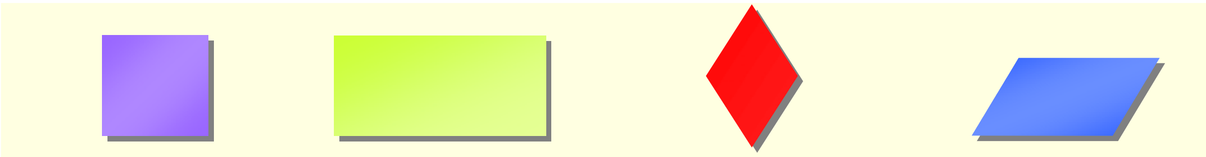
6. CUADRILÁTEROS

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos. Además, podemos distinguir varios tipos de cuadriláteros convexos.

6.1. Clasificación de los cuadriláteros convexos.

cuadriláteros convexos se clasifican en **paralelogramos** y **no paralelogramos.**

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



Cuadrado	**Rectángulo**	**Rombo**	**Romboide**
Los cuatro lados y los cuatro ángulos son iguales	*Sus lados son distintos y sus cuatro ángulos iguales*	*Los cuatro lados son iguales y los ángulos distintos*	*Lados y ángulos distintos*

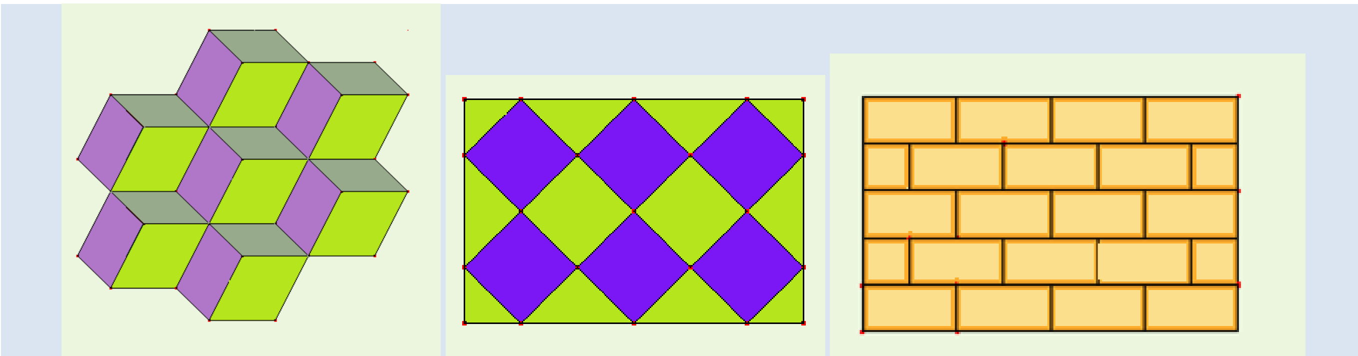
Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:

Trapecios	**Trapezoides**
Tienen exactamente dos lados paralelos	*No tienen ninguna pareja de lados paralelos*

Además, si un trapecio tiene dos lados iguales, se llama trapecio isósceles y si tiene dos ángulos rectos, se llama trapecio rectángulo.

Ejemplo:

Los paralelogramos tienen muchas y variadas aplicaciones en diseño y construcción

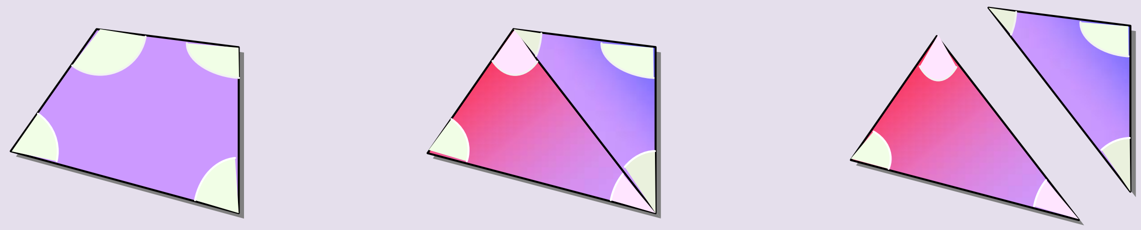


Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6.2. Propiedades de los cuadriláteros

1. La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360 º.

Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero queda dividido en dos triángulos. La suma de los ángulos de ambos coincide con la suma de los ángulos del cuadrilátero.



Nombramos los ángulos del cuadrilátero

Dibujamos una diagonal y nombramos también los nuevos ángulos que aparecen :

= =

= 180º
= 180º

=
= 180º+ 180º = 360º

Otras propiedades de los cuadriláteros son

2. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.

3. Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.

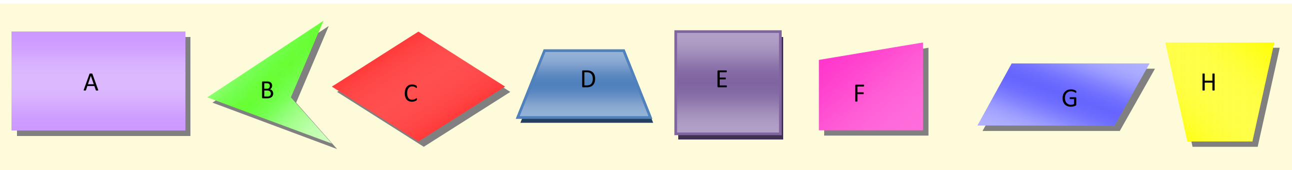
4. Las diagonales tanto de un rombo como de un cuadrado, son perpendiculares.

5. Al unir los puntos medios de un cuadrilátero, se forma un paralelogramo.

Actividades propuestas

42. Fíjate en el dibujo e indica qué cuadriláteros son:

a) cóncavos b) paralelogramos c) isósceles d) trapecios e) trapezoides f) regulares



43. Averigua qué tipo de paralelogramo aparece si se unen los puntos medios de:

a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) un trapecio e) un trapezoide.

44. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32º. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

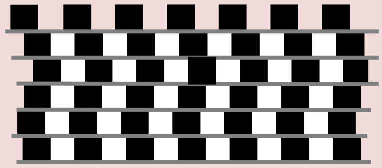
EUCLIDES, UN GRAN GEÓMETRA

En el siglo III a. C. Euclides enseñaba Matemáticas en la escuela de Alejandría. Su obra principal fueron Los Elementos, que han sido durante siglos la base de la geometría.
Las aportaciones más interesantes de Euclides fueron definiciones y postulados como éstos:

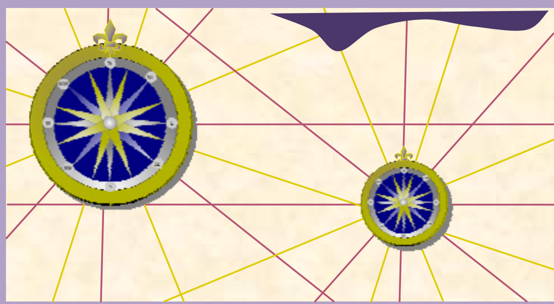
"Un punto es aquello que no tiene partes"
"Una línea es una longitud sin anchura"
"Las extremidades de una línea son puntos"

ILUSIONES ÓPTICAS

¿Son rectas paralelas o curvas las líneas grises?



LA ROSA DE LOS VIENTOS

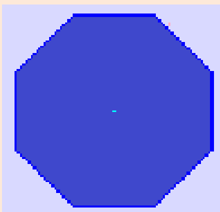


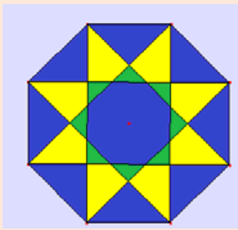
La *rosa de los vientos* ha aparecido en gráficas y mapas desde el año 1300. La base de su dibujo es un polígono estrellado. Las rectas que unen vértices opuestos son los rumbos de navegación.

POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS

Un polígono regular estrellado puede construirse a partir del regular convexo uniendo vértices no consecutivos de forma continua.

Si N es el número de vértices del polígono regular convexo y M el salto entre vértices, la fracción N/M ha de ser irreducible, de lo contrario no se genera el polígono estrellado.



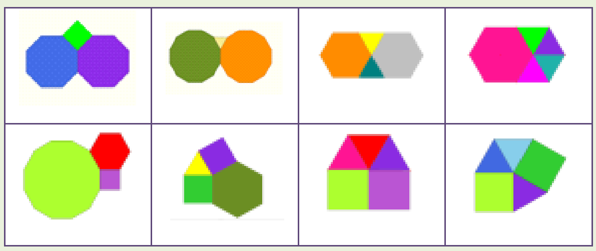


MOSAICOS

¿Sabes qué es un mosaico? .Se llama mosaico a todo recubrimiento del plano mediante piezas que no pueden superponerse, ni pueden dejar huecos sin recubrir.

Los más sencillos son los **mosaicos regulares** formados por polígonos regulares todos iguales. Solo hay tres posibilidades para construir mosaicos regulares. Búscalas.

Un **mosaico semiregular** es el formado por polígonos regulares de forma que en cada vértice tengan la misma distribución. Solo hay ocho



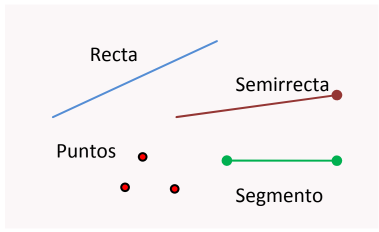
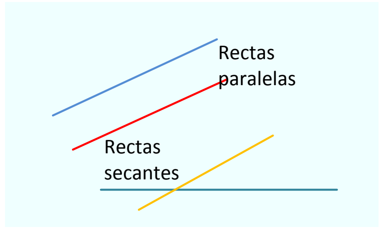
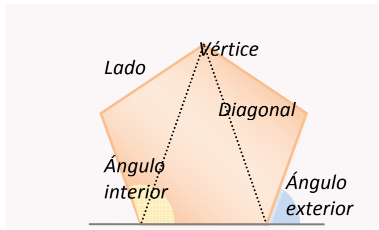
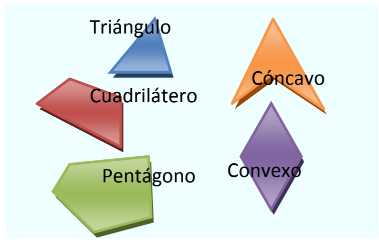
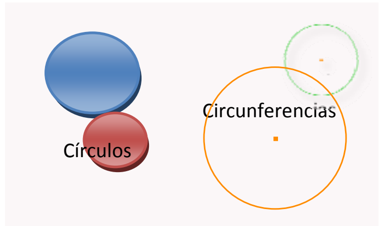
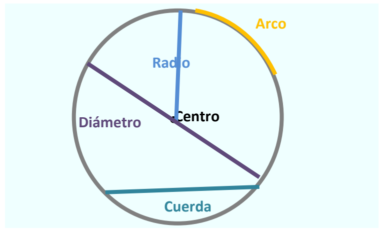
GRACE CHISHOLM YOUNG

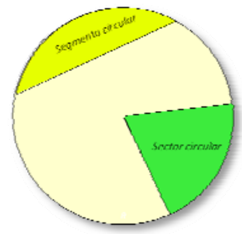
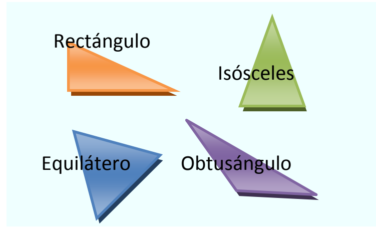
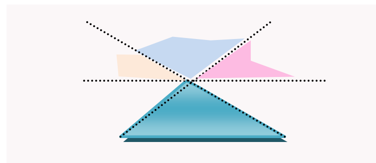
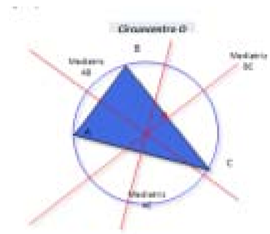
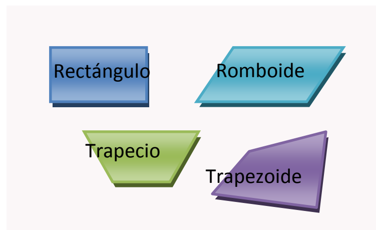
(1868 - 1944)

Grace Chisholm Young incluyó en su obra "Primer libro de Geometría" múltiples diagramas de figuras tridimensionales para ser recortadas y construidas.
Su innovadora forma de plantear la enseñanza de la Geometría, ha trascendido hasta el momento actual.

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Elementos del plano	Los elementos fundamentales del plano son: puntos, rectas, semirrectas, segmentos	
Posición relativa de dos rectas	Dos rectas distintas pueden ser paralelas o secantes	
Polígonos. Elementos de un polígono	Un polígono es una línea poligonal cerrada. Los elementos de un polígono son lados, vértices, diagonales, ángulos interiores y exteriores	
Clasificación de los polígonos	Por el tipo de ángulos cóncavos y convexos. Regulares o irregulares según tengan todos sus lados y ángulos iguales o no. Por el número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos,…	
Circunferencia y círculo	Una circunferencia es una línea cerrada que cumple que todos sus puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. Un círculo es la parte de plano que encierra una circunferencia.	
Elementos de una circunferencia	Centro, radio, diámetro, cuerda, arco.	

Sector circular, segmento circular y corona circular	Un sector circular es la porción de círculo comprendida entre dos radios. Un segmento circular es la porción de círculo comprendido entre una cuerda y el arco que tiene sus mismos extremos. Una corona circular es la superficie comprendida entre dos círculos concéntricos.	
Clasificación de triángulos	Según los ángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos. Según los lados: equiláteros, isósceles y escalenos,	
Propiedades	La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En todo triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.	
Rectas y puntos notables en un triángulo	Las mediatrices concurren en el circuncentro, las bisectrices en el incentro, las alturas en el ortocentro y las medianas en el baricentro.	
Clasificación de los cuadriláteros	Paralelogramos si sus lados son paralelos e iguales dos a dos y no paralelogramos. Los paralelogramos se dividen en cuadrados, rectángulos, rombos y romboides. Los no paralelogramos pueden ser trapecios o trapezoides.	

Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja una recta horizontal y otra que forme un ángulo de 60 ^{o} con ella.
2. Dibuja cuatro rectas de modo que tres de ellas pasen por un mismo punto y la cuarta sea paralela a una de ellas.
3. Dibuja dos rectas secantes y un segmento que tenga un extremo en cada una de ellas.
4. Si dos rectas *r* y *s* son perpendiculares y trazas una tercera recta *p* paralela a una de ellas, por ejemplo a *r*, ¿cómo son las rectas *s* y *p*? Haz un dibujo.
5. Un ángulo mide ¾ de recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
6. Calcula :

   a) 54^{o} 25´ 10´´ + 32 ^{o} 17´ 14´´

   b) 14 ^{o} 30´ 15´´+ 62 ^{o} 1´ 16´´ + 42 ^{o} 1´´

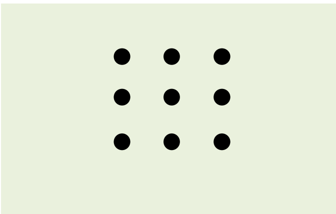
   c) 15 ^{o} 23' + 73 ^{o} 10'' + 70 ^{o} 28´ 38´´

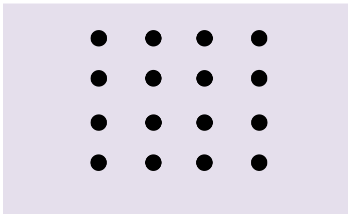
   d) 45 ^{o} 45´ 45´´ – 12 ^{o} 48´ 85 ‘’

   e) 67 ^{o} 4´ 23´´ – 15 ^{o} 4´ 37''

   f) 33 ^{o} 32´ 1 ´´ – 15 ^{o} 35´ 20''

7. La suma de dos ángulos es 125^{o} 46' 35''. Si uno de ellos mide 57^{o} 55' 47'', ¿cuánto mide el otro?
8. Cinco guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos
9. En un tablero de 3 × 3, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono? ¿Y en uno de 4 × 4?





10. La fotografía representa un mosaico de La Alhambra de Granada. Observa que está constituido por motivos geométricos.

    a. Este mosaico tiene dos tipos de polígonos regulares: ¿Cuáles son?
    b. Describe el polígono blanco. ¿Es cóncavo o convexo?
    c. El mosaico de la fotografía no es un mosaico regular. Si lo fuera estaría formado únicamente por polígono regulares todos iguales.
    d. Describe un octógono regular: número de lados, cuánto mide su ángulo central, cuánto mide sus ángulos interiores…

11. Calcula el número de diagonales que tienen los siguientes polígonos:

    a) Rombo b) trapecio c) trapezoide d) cuadrado e) rectángulo f) hexágono.

12. Dibuja un hexágono regular y un cuadrado. Marca el centro y sitúa en cada uno de ellos dos apotemas y dos radios.

13. Dibuja un decágono y todas sus diagonales.

14. Completa:

    a. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo …………………..

    b. Un triángulo……………………………. tiene un ángulo obtuso.

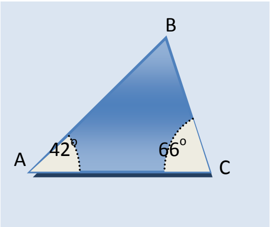
    c. Un triángulo……………………………. tiene los tres ángulos agudos.

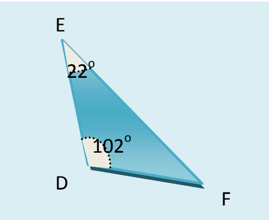
15. Construye un triángulo sabiendo que *a = 9 cm* , *b = 7 cm* y el ángulo *C = 50 °* .

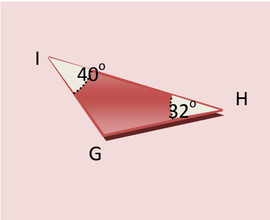
16. ¿Se puede construir un triángulo de modo que sus ángulos midan 105^{o}, 45^{o} y 35^{o}. Razona tu respuesta.

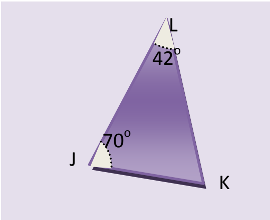
17. Dibuja un triángulo obtusángulo. ¿Crees que las tres alturas son iguales?

18. Observa las figuras y calcula los ángulos que faltan

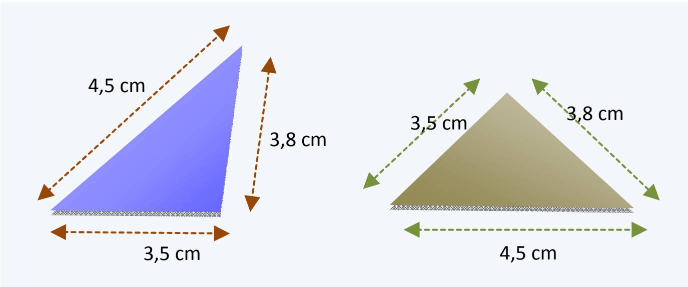








19. Dados tres segmentos de cualquier medida, ¿es siempre posible construir un triángulo? ¿Por qué? Recorta tiritas de papel de longitudes de 10 cm, 8 cm y 6 cm, ¿puedes construir un triángulo con ellas?



20. ¿Puedes asegurar que son iguales los triángulos de la figura derecha?

21. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 50^{o}, indica el valor de los demás. Dibuja un triángulo rectángulo con estos ángulos y un cateto de 5 cm.

22. Si dos de los ángulos de un triángulo miden 30^{o} y 70^{o}, ¿cuánto mide el menor de los ángulos que forman las bisectrices correspondientes?

23. Construye un triángulo sabiendo que *a = 10 cm* , *los* ángulos *B = 45°* *C = 50°*

24. Calcula el incentro del triángulo anterior y dibuja la circunferencia inscrita al triángulo.

25. ¿En qué punto colocarías un pozo para que tres casas de campo no alineadas, estén a la misma distancia del mismo? Haz un gráfico esquemático en tu cuaderno y calcula el punto en tu dibujo.

26. Desde uno de los vértices de un hexágono se trazan tres diagonales que dividen al polígono en cuatro triángulos.
   a. Calcula la suma de los ángulos del hexágono.
   b. Si el hexágono es regular, calcula el valor de cada uno de sus ángulos interiores.
   c. En el mismo supuesto, calcula el valor del ángulo central.

27. Dibuja un polígono de 9 lados. ¿Cómo se llama?

   a. ¿Cuántos triángulos puedes formar al trazar todas las diagonales que parten de un vértice?

   b. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos del polígono inicial?

28. Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

“Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, se trata de un rombo”

“Los trapecios rectángulos tienen todos sus ángulos iguales”

“Los rectángulos son polígonos equiángulos”.

“Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio”

Justifica tus respuestas y haz un dibujo que acompañe a cada una.

29. Consigue un hilo grueso y un trozo de papel de color. Recorta el hilo o el trozo de papel, según proceda y construye:

a) Una circunferencia, b) un círculo, c) un radio , d) un segmento circular, e) un sector circular .

30. Dibuja una circunferencia de 3 cm de radio y dos arcos iguales así como las cuerdas que tienen sus mismos extremos. Comprueba que las cuerdas también son iguales.

31. En el dibujo hecho para dar respuesta al ejercicio anterior, traza dos diámetros perpendiculares a las cuerdas. Mide después la distancia de cada cuerda al centro. ¿Qué observas?

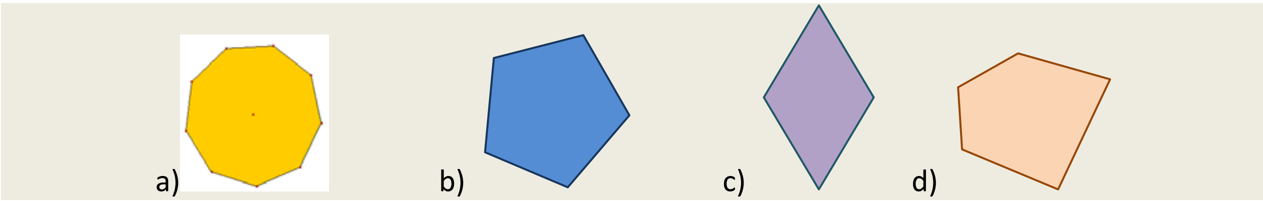
32. Dibuja dos rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea de 5 cm. Dibuja después una circunferencia tangente a ambas.

AUTOEVALUACIÓN

1. Dibuja tres puntos A, B, C que no estén alineados y :
    a. Las rectas r que pasa por A y B y s que pasa por B y C.
    b. La recta perpendicular a r y que pasa por el punto C.
    c. La recta perpendicular a s que pasa por B.
    d. La recta paralela a s que pasa por A.
2. Calcula el complementario y suplementario de los ángulos siguientes:

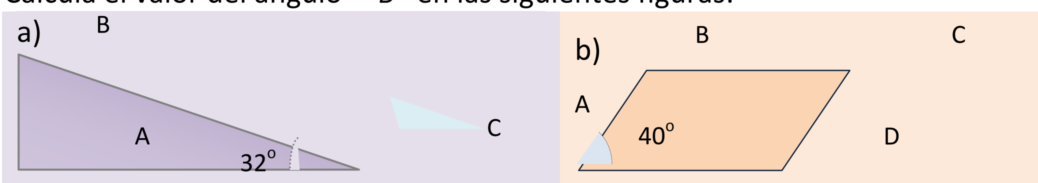
    a) 54^{o} b) 73^{o} 40´ 56´´

3. ¿Cuánto valen los ángulos interior y exterior de un pentágono regular?
4. Dibuja un hexágono y todas sus diagonales.
5. Clasifica los siguiente polígonos, completando la tabla:

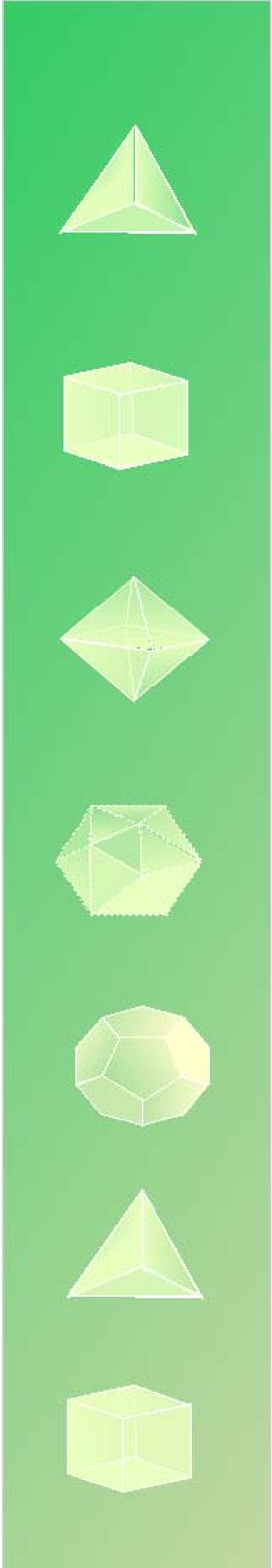


POLÍGONO	CÓNCAVO	REGULAR	EQUIÁNGULO	EQUILÁTERO	POR EL NÚMERO DE LADOS ES UN
a)	NO	SÍ	SI	SI	ENEÁGONO
b)					
c)					
d)					
e)			SI	NO	CUADRILÁTERO

6. Dibuja un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 6 cm y 5 cm y traza sus tres alturas.
7. a) Dibuja un sector circular de radio 4 cm de modo que su amplitud sea de 82^{o} . b) Dibuja una corona circular definida por dos círculos de radios 4 cm y 2 cm.
8. Dibuja un triángulo en el que a = 6 cm, y 45^{o}. Calcula después su circuncentro.
9. Dibuja un trapecio isósceles, un trapecio rectángulo, un romboide, traza sus diagonales y estudia si se cortan en el punto medio.
10. Calcula el valor del ángulo $\hat{B}$ en las siguientes figuras:



Autores: Milagros Latasa y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF



Formación Profesional Básica
Matemáticas II
Capítulo 5: Áreas y perímetros de figuras planas

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 6: Longitudes y áreas de 2º de ESO y del capítulo 9: Longitudes y áreas de 1º de ESO, de autores Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo

ÍNDICE

Resumen

En este capítulo estudiaremos el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos, que nos ayudará en el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas.

Estudiaremos el teorema de Tales y la semejanza, con los criterios para reconocer cuando dos triángulos son semejantes, y la razón de semejanza (escala) en mapas y en áreas y volúmenes.

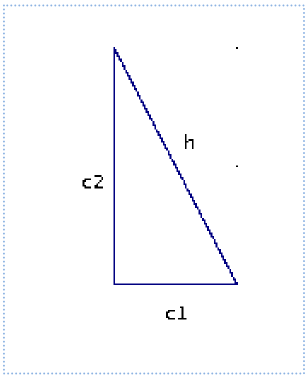
Aprenderemos a hallar el perímetro y el área de las principales figuras: triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecio, circunferencia, círculo, …

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo llamamos **catetos** a los lados incidentes con el ángulo recto e **hipotenusa** al otro lado.

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Es decir,

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

- Del teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

- También podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 *cm* y 4 *cm*, su hipotenusa vale 5 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \ \ cm.$$

Actividades resueltas

- Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 *dm* y uno de sus catetos mide 12 *dm*, halla la medida del otro cateto:

Solución: Por el teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Actividades propuestas

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 *cm* y su hipotenusa 26 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 *cm*. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

Interpretación del teorema de Pitágoras

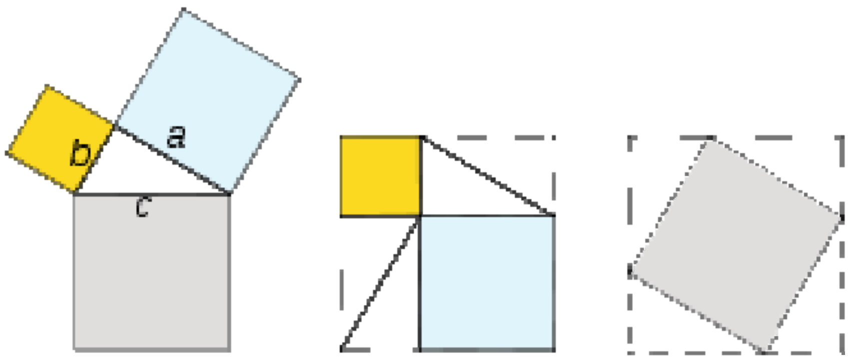
Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa *h* de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2, c_2^2. Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*, en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.

Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Actividades propuestas

2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 8 *cm* y 6 *cm* b) 12 *m* y 9 *m*

c) 6 *dm* y 14 *dm* d) 22,9 *km* y 36,1 *km*.

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 27 *cm* y 12 *cm* b) 32 *m* y 21 *m*

c) 28 *dm* y 12 *dm* d) 79,2 *km* y 35,6 *km*

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 *m*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 *cm*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.

6. Calcula el volumen de un tetraedro regular de arista 5 *dm*.

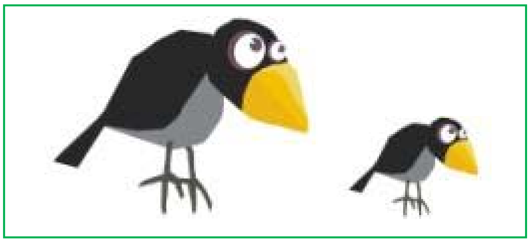
7. Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 *dm*.

8. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 *m*.

9. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 *cm* y altura 5 *cm*.

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes



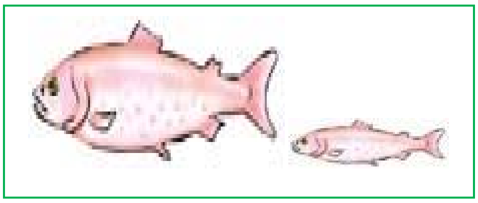
Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*.

Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible.

La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos figuras son **semejantes** si sus longitudes son proporcionales y sus ángulos son iguales.

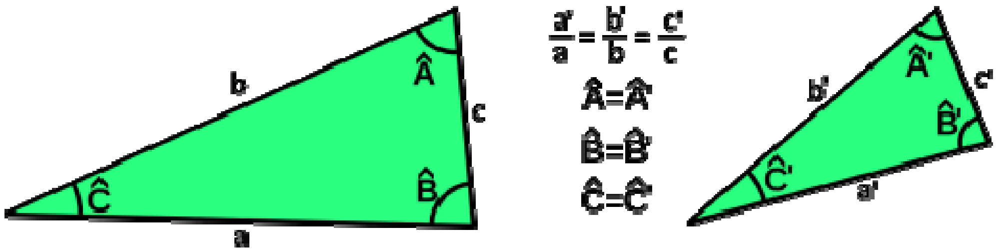
Ejemplo:



- *Las figuras del margen **no** son semejantes*

2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza

Dos triángulos son **semejantes** si tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para saber si dos triángulos son semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

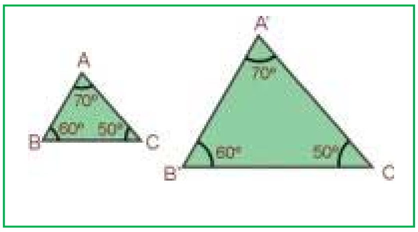
Dos triángulos son semejantes sí:

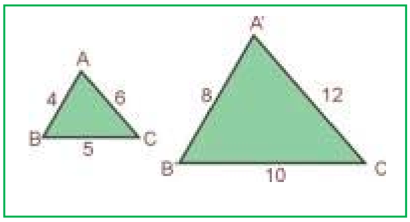
- **Primero:** Tienen dos ángulos iguales.
- **Segundo: Tienen los tres lados proporcionales.**
- **Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.**

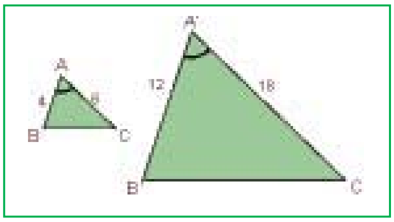
La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta, por ejemplo, que tengan un lado y dos ángulos iguales.

Si tienen dos ángulos iguales, el tercer ángulo también es igual, y necesariamente los lados son proporcionales. Si los lados son proporcionales, entonces los tres ángulos son iguales. Con más cuidado es preciso mirar el tercer criterio, y en otro curso se demostrará con más rigor.

Ejemplo







Actividades propuestas

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.
c) *A* = 30º, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'*= 30º, *b'* = 14 cm, *c'* = 18 cm
d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 20 cm, *b'* = 25 cm, *c'* = 35 cm

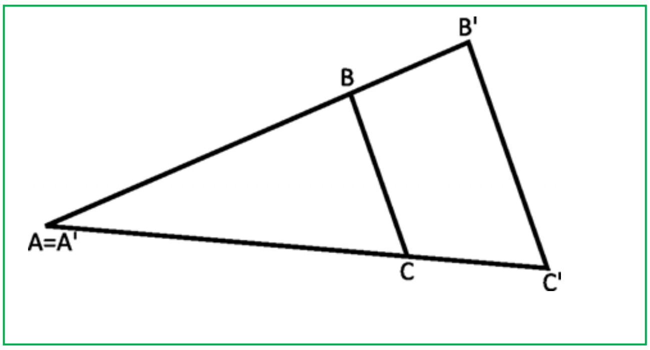
11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) *a* = 18 cm, *b* = 12 cm, *c* = 24 cm. *a*' = 6 cm, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?

b) *A* = 45º, *b* = 16 cm, c = 8 cm. *A'* = 45º, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?

12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

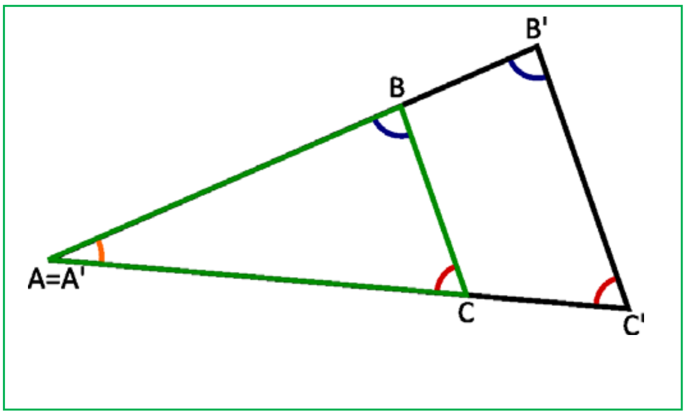
2.3. Triángulos en posición de Tales



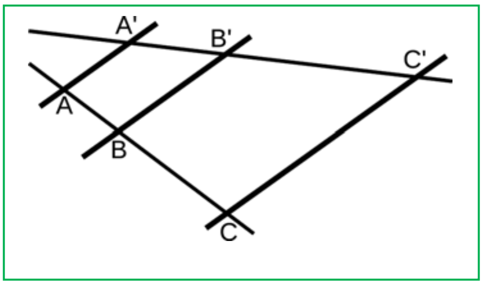
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros, por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los lados son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$



2.4. Teorema de Tales



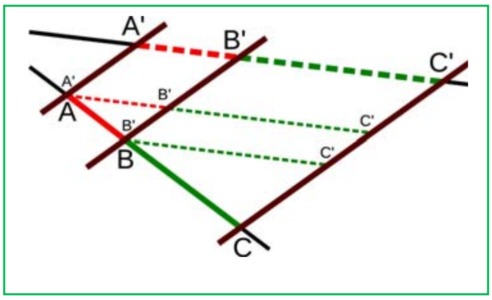
El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

Dadas dos rectas, y varias rectas paralelas entre sí, que las cortan respectivamente en los puntos *A, B, C* y *A', B', C'*. Entonces el **Teorema de Tales** afirma que los segmentos son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes en posición Tales, y que por lo tanto se puede deducir que sus lados son proporcionales:

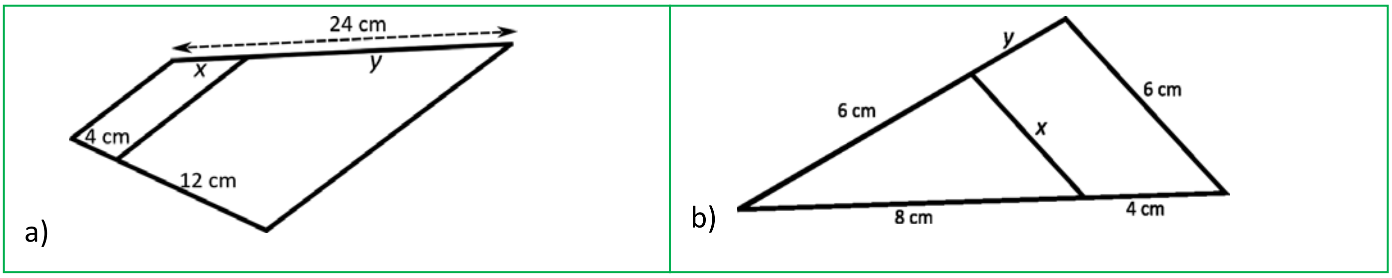
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$



Observación: En este caso no relacionamos los segmentos *AA'*, *BB'* y *CC'* que se forman sobre los lados paralelos.

Actividades propuestas

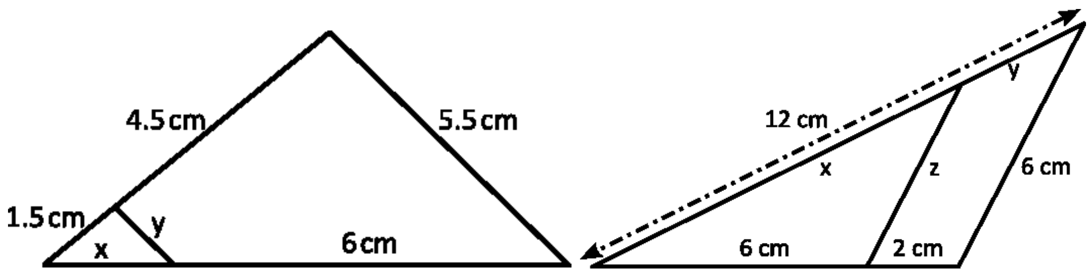
13. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.



14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?

16. Calcula las longitudes que se indican:



Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.5. Proporcionalidad en longitudes, áreas y volúmenes

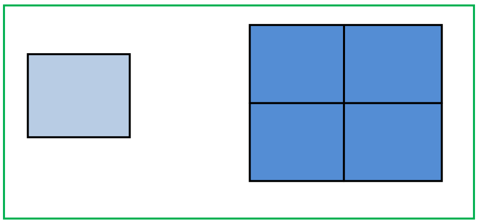
Ya sabes que:

Dos figuras son **semejantes** si las longitudes de elementos correspondientes son proporcionales. Al coeficiente de proporcionalidad se le llama **razón de semejanza**. En mapas, planos… a la razón de semejanza se le llama **escala**.

Áreas de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

Ejemplo:



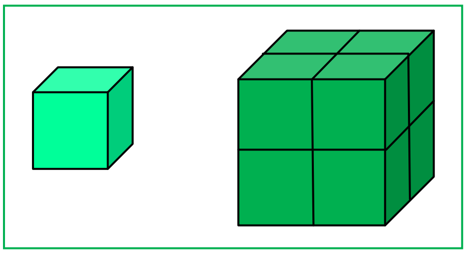
- *Observa la figura del margen:*

Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es $2^2 = 4$ veces la del pequeño.

Volúmenes de figuras semejantes

Si la razón de semejanza entre las longitudes de una figura es k, entonces la razón entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:



- Observa la figura del margen:

Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) el del cubo pequeño.

Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese sólo un kilo, ¿qué altura tendrá? ¿Será mayor o menor que un lápiz?*

El peso está relacionado con el volumen. La Torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material, que pese 1 kilo. Por tanto $k^3 = 8000000/1 = 8\,000\,000$, y $k = 200$. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m*, y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1{,}5$ *m*. ¡Mide metro y medio! ¡Es mucho mayor que un lápiz!

Actividades propuestas

17. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

18. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 25 *cm* y 40 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

19. Estamos diseñando una maqueta para depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

20. La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es $k = 100$. ¿Cuánto mide la pirámide real?

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.6. Escalas: planos y mapas

Los dibujos, fotografías, mapas o maquetas representan objetos, personas, edificios, superficies, distancias...

Para que la representación sea perfecta, deben guardar en todos sus elementos una misma razón de proporcionalidad que denominamos **"escala"**

La **escala** es una razón de proporcionalidad entre la medida representada y la medida real, expresadas en una misma unidad de medida

Ejemplo:

En un mapa aparece señalada la siguiente escala **1 : 5 000 000** y se interpreta que 1 cm del mapa representa 5 000 000 cm en la realidad, es decir, a 50000 m, es decir a 50 km.

Ejemplo:

Hemos fotografiado la catedral de Santiago de Compostela. El tamaño de la foto nos da una escala:

1 : 600.

Las dos torres de la fachada tienen en la foto una altura de 3,5 cm. La altura real de las torres será:

$$3{,}5 \cdot 600 = 2100 \text{ cm} = 21 \text{ m}.$$

CATEDRAL DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Las escalas nos permiten observar que la imagen real y la del dibujo son **semejantes.**

Ideas claras

La **escala** utiliza el cm como unidad de referencia y se expresa en comparación a la unidad.

Por ejemplo: 1 : 70000

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma y sus lados son proporcionales.

Actividades propuestas

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0,05 m	

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 cm	0,7 hm	
4 cm	20 km	

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

3.1. Concepto de perímetro y de área de una figura plana

El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.

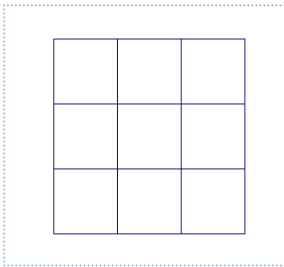
El **área** de una figura plana es lo que mide la región limitada por los lados de la figura.

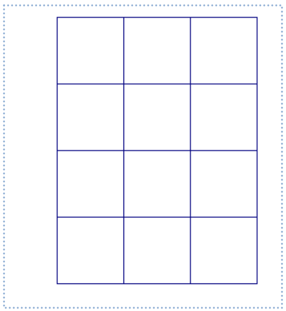
Las unidades para el perímetro son centímetros (*cm*), decímetros (*dm*), metros (*m*)…

Las unidades para el área son cm^2, dm^2, m^2, …

Ejemplo:

- Si tenemos un cuadrado de lado 3 *cm*, su perímetro es 3 + 3 + 3 + 3 = 12 *cm* y su área es 9 cm^2 porque podemos meter en él 9 cuadraditos de lado 1 *cm*:





Ejemplo:

- Si tenemos un rectángulo de base 3 *cm* y altura 4 *cm*, su perímetro es 3 + 4 + 3 + 4 = 14 *cm* y su área es 12 cm^2 porque podemos meter en él 12 cuadraditos de lado 1 *cm*:

Actividades resueltas

- Halla los siguientes perímetros y áreas:

El perímetro de un cuadrado de lado 4 *dm*: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *dm*

El área de un cuadrado de lado 4 *km*: $4 \cdot 4 = 16\ km^2$

El perímetro de un rectángulo de base 4 *m* y altura 5 *dm* en *m*: 4 + 0,5 + 4 + 0,5 = 9 *m*

El área de un rectángulo de base 4 *m* y altura 5 *dm* en m^2: $4 \cdot 0.5 = 2\ m^2$

Actividades propuestas

25. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un cuadrado de lado 5 *cm* son:

a) 10 *cm* y 25 cm^2 b) 20 *cm* y 25 cm^2

c) 20 *cm* y 5 cm^2 d) 20 *cm* y 20 cm^2

26. Indica la respuesta correcta: El perímetro y el área de un rectángulo de base 7 *dm* y altura 3 *cm* son:

a) 146 *cm* y 210 cm^2 b) 20 *cm* y 49 cm^2

c) 20 *cm* y 21 cm^2 d) 21 *cm* y 21 cm^2

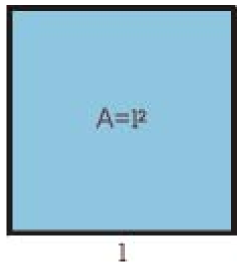
3.2. Área del cuadrado y del rectángulo

El **área de un cuadrado** es el cuadrado de uno de sus lados:

$$\textit{Área}_{\ cuadrado} = \textit{lado}^2$$

El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura:

$$\text{Área}_{\ \text{rectángulo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$



Ejemplo:

- Si tenemos un cuadrado de 13 *dm* de lado, el área de dicho cuadrado es 169 dm^2 ya que:

$$\textit{Área}_{\ cuadrado} = \textit{lado}^2 = 13^{\ 2} = 169 \text{ dm}^2.$$

Actividades resueltas

- Calcula el área de la baldosa de la figura de 7 *cm* de lado

Solución: La baldosa de la figura es cuadrada. Por lo tanto:

$$\textit{Área}_{\ cuadrado} = \textit{lado}^2 = 7^{\ 2} = 49 \ cm^2.$$

Baldosa cuadrada

- Calcula el área de un rectángulo de 9 cm de base y 4 cm de altura

Solución: Por tratarse de un rectángulo:

$$\textit{Área}_{\ rectángulo} = \textit{base} \cdot \textit{altura} = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2.$$

Actividades propuestas

27. Las baldosas de la figura miden 12 *cm* de largo y 6 *cm* de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?

Baldosas rectangulares

28. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?

29. Estas molduras miden 175 cm de ancho y 284 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

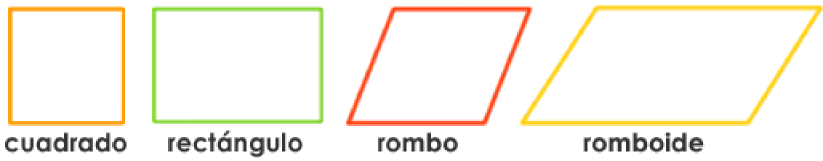
3.3. Área de paralelogramo y del triángulo

Recuerda que:

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero (cuatro lados) cuyos lados opuestos son paralelos.

Los cuadrados, los rectángulos y los rombos son paralelogramos.

Los que no son de ninguno de esos tipos se llaman **romboides.**

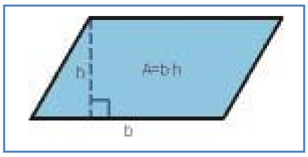


Los paralelogramos tienen las siguientes propiedades:

- Los lados opuestos son iguales
- Sus diagonales se cortan en sus puntos medios
- Tienen un centro de simetría
- Los romboides no tienen eje de simetría

El área de un **paralelogramo** es el producto de su base por su altura, igual que el área de un rectángulo:

$$\text{Área}_{\text{Paralelogramo}} = \text{base} \cdot \text{altura}$$

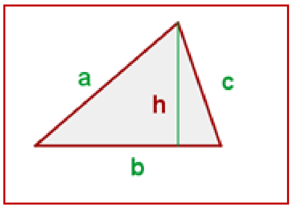


Mira el paralelogramo de la figura. Puedes convertirlo en un rectángulo cortando un triángulo y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

El **área de un triángulo** es la mitad del área de un paralelogramo:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2}$$



Ejemplo:

- El área de un triángulo de base b = 5 *cm* y altura h = 8 *cm* es 20 cm^2 ya que:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20\ cm^2.$$

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda

Actividades resueltas

- La vela de un barco tiene forma triangular. La base de la vela mide 3 metros y su altura son 6 metros, ¿qué superficie ocupa dicha vela?

Solución: Como la vela tiene forma triangular:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ m^2.$$

- Halla los siguientes perímetros y áreas:

a) Un cuadrado de 4 metros de lado:

Perímetro: La suma de sus cuatro lados: 4 + 4 + 4 + 4 = 16 *m*.

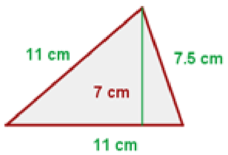
Área: lado · lado = 4 · 4 = 16 m^2.

b) Un rectángulo de 5 metros de ancho y 3 *m* de largo

Perímetro: Suma de sus lados: 5 + 5 + 3 + 3 = 16 *m*.

Área: Largo por ancho = 5 · 3 = 15 m^2.

c)



Área: $A = \frac{11 \cdot 7}{2} = 38.5\ cm^2$

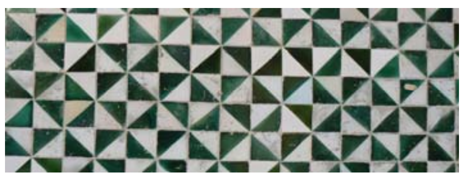
Perímetro: $P = 11 + 11 + 7.5 = 29.5\ cm$

Recuerda que:

Un **triángulo** es **rectángulo**, si tiene un ángulo recto.

Actividades propuestas

30. Cada uno de los triángulos de la figura tiene una base de 10 *mm* y una altura de 6 *mm*. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?

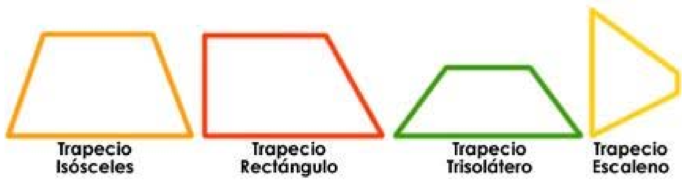


Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda

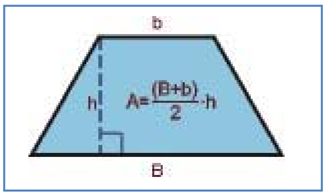
3.4. Área del trapecio, rombo y romboide

Recuerda que:

- Un **trapecio** es un cuadrilátero con dos lados paralelos y dos lados no
- Un trapecio con dos ángulos rectos se llama **rectángulo**
- Un trapecio con los dos lados no paralelos iguales se llama **isósceles**
- Un trapecio con los tres lados desiguales se llama **escaleno**



Imagina un trapecio. Gíralo 180º. Une el primer trapecio con el trapecio que acabas de girar por un lado. ¿Qué obtienes? ¿Es un paralelogramo? Tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad es la semisuma de las bases por la altura.

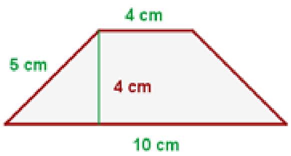


El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura:

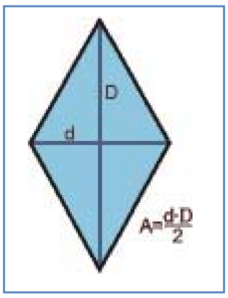
$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$

Ejemplo:

- Tenemos el siguiente trapecio cuyas medidas son: B = 10 *cm*, b = 4 *cm*, h = 4 *cm*, su área es:



$$A = \frac{(10+4)\cdot 4}{2} = 28 \text{ cm}^2$$



Piensa en un rombo. Está formado por dos triángulos iguales

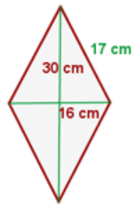
El **área de un rombo** es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

$$A = \frac{D\cdot d}{2}$$

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda

Ejemplo:

- Si tenemos un rombo cuyas diagonales miden D = 30 *cm* y d = 16 *cm* respectivamente y un lado mide 17 *cm*, el área será



$$A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\ cm^2$$

Y el perímetro **P = 17 · 4 = 68 *cm*** al ser todos los lados iguales.

Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados: 15 *cm*, (la mitad de la diagonal D), 8 *cm* (la mitad de la diagonal d), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa 17 *cm*, el lado del rombo.

El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos.

Comprobamos que el valor coincide con el anterior:

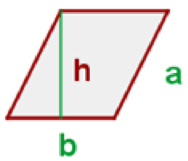
$$(8 \cdot 15 : 2) \cdot 4 = 60 \cdot 4 = 240\ cm^2.$$

Ya sabes que el romboide es un caso particular de paralelogramo.

El **área de un romboide** es el producto de su base y su altura:

$$\text{Área}_{\text{romboide}} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$


romboide



Ejemplo:

- Si tenemos un romboide de 5 *cm* de base y 4 *cm* de altura su área es 5 · 4 = 20 cm^2.

Si el lado vale 4, el perímetro es 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

Actividades resueltas

- Calcula el área de las siguientes figuras planas:

a) Un trapecio de bases 10 y 4 cm y de altura 3 cm

b) Un rombo de diagonales 16 y 12 cm

Solución:

$$\text{Área}_{trapecio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(10+4)\cdot 3}{2} = 21\ cm^2.$$

$$\text{Área}_{rombo} = \frac{D\cdot d}{2} = \frac{16\cdot 12}{2} = 96\ cm^2.$$

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 84 y 35 *cm*. ¿Cuánto mide el área de la cometa?

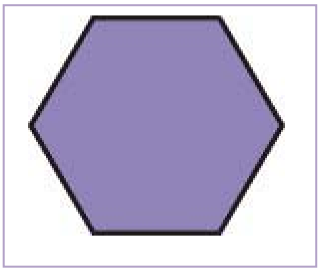
32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 1,2 y 0,8 *m* y altura 0,5 *m*. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

33. Calcula el área de un romboide de 15 *cm* de base y 12 *cm* de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

3.5. Área de polígonos regulares

Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área: (base · altura)/2. La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, el apotema del polígono.

Ejemplo



- El hexágono regular de lado 4 *cm* y apotema 3,5 *cm* lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 *cm* y altura 3,5 *cm*, por lo que su área es:

$$Área_{\ triángulo} = \frac{4 \cdot 3{,}5}{2} = 7\ cm^2.$$

El área del hexágono es por tanto:

$$Área_{\ hexágono} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}5}{2} = \left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right) \cdot 3{,}5 = 42\ cm^2.$$

Al ser $\left(\frac{6 \cdot 4}{2}\right)$ el semiperímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

El **área de un polígono regular** es igual al semiperímetro por la apotema.

Área = semiperimetro · apotema

Actividades resueltas

- Calcula las áreas de un triángulo y un hexágono regular de lado 6 *cm*.

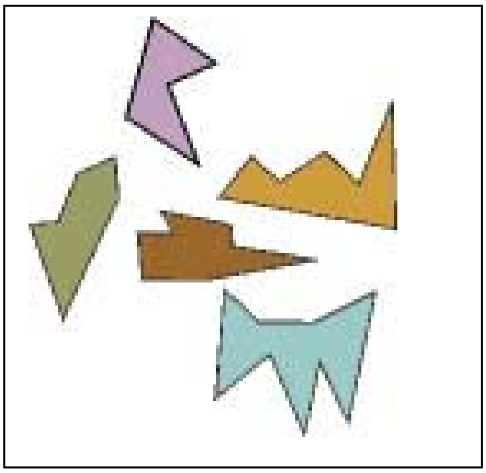
Solución: El semiperímetro del triángulo es 9 *cm* y el del hexágono es 18 *cm*. Las apotemas las puedes calcular utilizando el teorema de Pitágoras y valen, para el triángulo y para el hexágono aproximadamente 5,2 *cm*, luego las áreas valen:

$$A_{\ triángulo} = 9 \cdot 5{,}2 = 46{,}8\ cm^2.$$

$$A_{\ hexágono} = 18 \cdot 5{,}2 = 93{,}6\ cm^2.$$

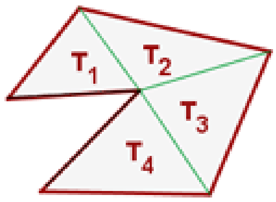
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.6. Área de polígonos irregulares



Los polígonos irregulares son aquellos que no tienen una forma conocida determinada.

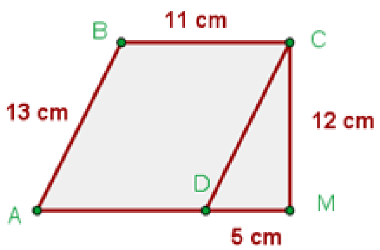
Para calcular el área de un polígono irregular, dividimos la figura en triángulos y cuadriláteros conocidos para poder aplicar las fórmulas aprendidas anteriormente.



$A = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

Ejemplo:

- Hallar el perímetro y el área de la figura:



AD = BC; AB = DC ⟶ Romboide

P = 13 + 11 + 12 + 5 + 11= 52 *cm*

$A = A_R + A_T$

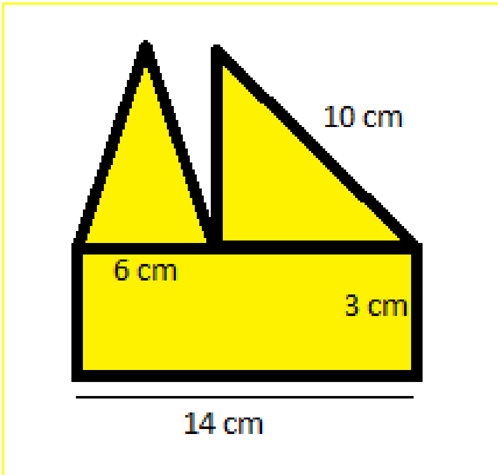
A_R = área del romboide A_T = área del triángulo

$A = 11 \cdot 12 + (12 \cdot 5) : 2 = 162\ cm^2$

Ejemplo:

- El área de esta figura irregular es 84 cm^2. ¿Qué hemos hecho para calcularla?

Dividimos la figura en dos triángulos y un rectángulo y calculamos el área de cada una de las figuras. Previamente utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura de los triángulos y obtenemos que mide 6 *cm*.



$$Área_{triángulo\ 1} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ cm^2.$$

$$Área_{triángulo\ 2} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2.$$

$$Área_{rectángulo} = b \cdot h = 14 \cdot 3 = 42\ cm^2.$$

Para calcular el área total, sumamos las tres áreas obtenidas:

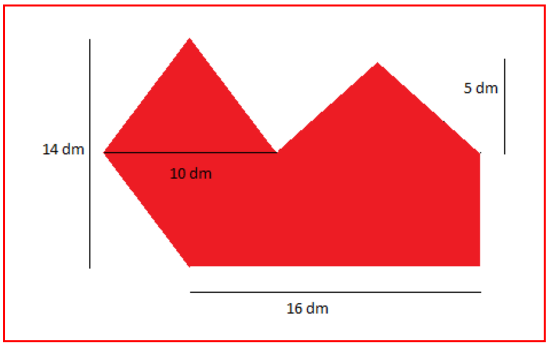
$$A_{total} = 18 + 24 + 42 = 84\ cm^2.$$

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades resueltas

- Para calcular el área de la figura de la derecha, la dividimos primero en cuadriláteros conocidos.

Tenemos un rombo, un trapecio y un triángulo:



Calculamos el área del rombo, el trapecio y el triángulo:

$$\text{Área}_{\,rombo} = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 10}{2} = 70\ dm^2.$$

El trapecio tiene de base mayor 16 dm, de base menor 16 – 5 = 11 dm, y de altura 7 dm, luego:

$$\text{Área}_{\,trapecio} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(16+11)\cdot 7}{2} = \frac{189}{2}\ dm^2.$$

La base del triángulo mide 11 *dm* y su altura 5 *dm*, luego su área mide:

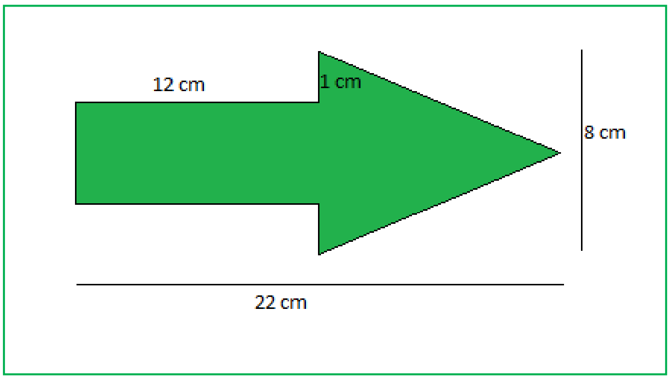
$$\text{Área}_{\,triángulo} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{11 \cdot 5}{2} = \frac{55}{2}\ dm^2.$$

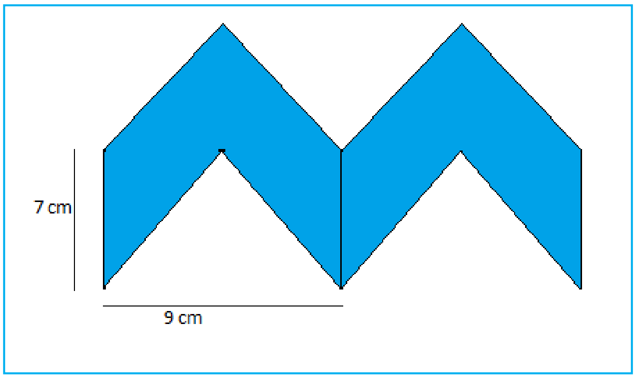
Sumando todas las áreas obtenidas:

$$\text{Área}_{\,TOTAL} = 70 + \frac{189}{2} + \frac{55}{2} = 192\ dm^2.$$

Actividades propuestas

34. Estima el área de los siguientes polígonos irregulares:





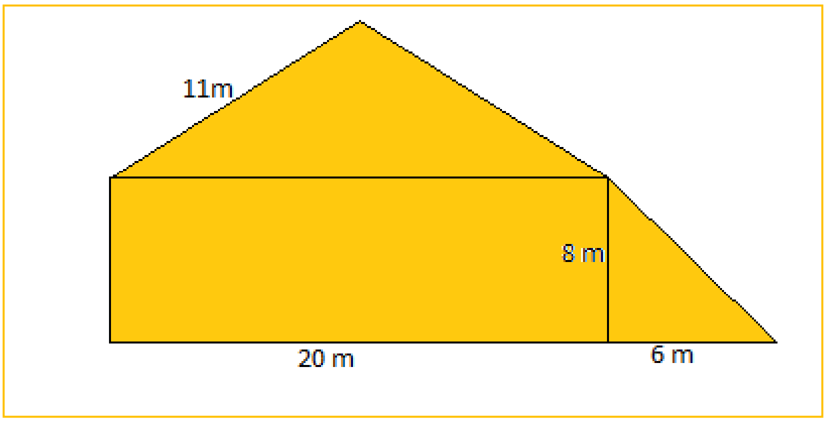
Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda

3.7. Perímetros de polígonos

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados

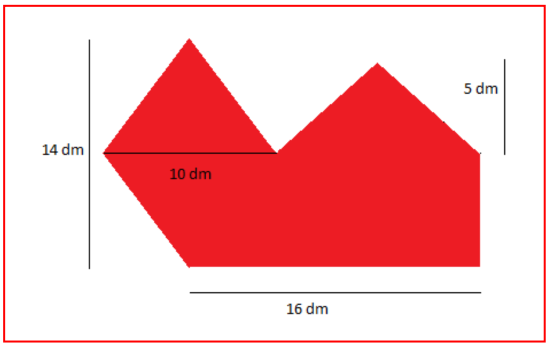
Actividades propuestas

35. Estima el perímetro del polígono de la figura:



36. Estima el perímetro de los polígonos de la actividad 34.

37. Estima el perímetro del polígono de la figura:



4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

4.1. Longitud de una circunferencia

El **número π** (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592.

Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

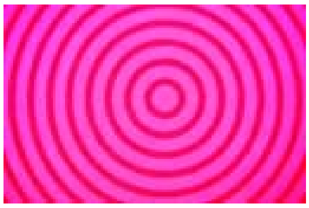
Si una circunferencia tiene un radio *r*, entonces su diámetro mide 2*r*, y su longitud, por la definición de π, mide 2·π·*r*.

Longitud de la circunferencia = 2·π·*r*.

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 3 *cm* tiene una longitud L = 2·π·*r* = 2·π·3 = 6·π ≈ 18,84.

Actividades propuestas



38. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 2 *cm*, la un poco más oscura siguiente 2,5 *cm*, la clara siguiente 3,5 *cm*, y así, aumenta unas veces medio centímetro y otras, un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.

39. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella… y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.

40. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

2.2. Longitud de un arco de circunferencia

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360 º. Por tanto:

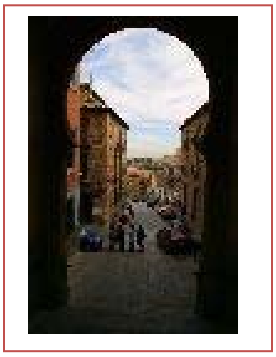
L = 2·π·*r*·α/360.

Actividades resueltas

- Las ruedas de un carro miden 60 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. La longitud del arco entre cada radio es L = 2·π·*r*·α/360 = 60·π/16 ≈ 11,78 *cm*.

Actividades propuestas

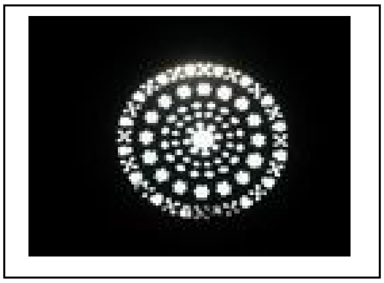
41. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?



42. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de 8'4 *m*. ¿Cuál es la longitud del arco?

43. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

44. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 3 *m*, y la de la siguiente figura es de 2,5 *m*.



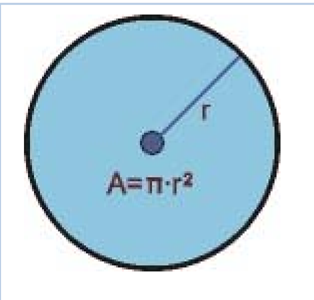
a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.

b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas

4.3. Área del círculo

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$\mathbf{A = \pi \cdot r^2.}$$



Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio *r*, con cada vez más lados. Entonces:

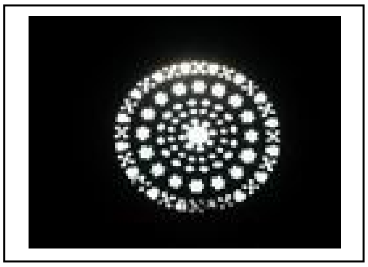
i) La apotema del polígono se aproxima al radio.

ii) El perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia.

Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semiperímetro por la apotema, es igual a:

$$(2 \cdot \pi \cdot r/2) \cdot r = \pi \cdot r^2.$$

Actividades resueltas



- El área de un círculo de radio 7 *cm* es A = 49 π ≈ 153,86 cm^2. Y el de un círculo de 1 *cm* de radio es A = π ≈ 3,14 cm^2.
- El área de un círculo de diámetro 4 m es A = 2^2 π = 4 π ≈ 12,56 m^2. Y el de un círculo de 2 *m* de diámetro es A = 1^2π = π ≈ 3,14 m^2.

Actividades propuestas

45. Calcula el área encerrada por la circunferencia exterior del rosetón de 3 *m* de radio.

46. Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 1,3 *m*.

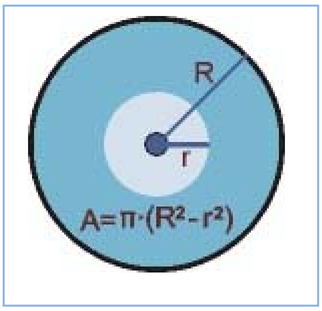
47. Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.4. Área de la corona circular

El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

$$\mathbf{A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi\cdot(R^2 - r^2)}$$



Actividades resueltas

- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 97,5 *cm* y 53,2 *cm* es igual a: $A = \pi\cdot(R^2 - r^2) = \pi\cdot(97{,}5^2 - 53{,}2^2) = \pi\cdot(9506{,}25 - 2830{,}24) = \pi\cdot6676{,}01 \approx 20962{,}6714\ cm^2$.

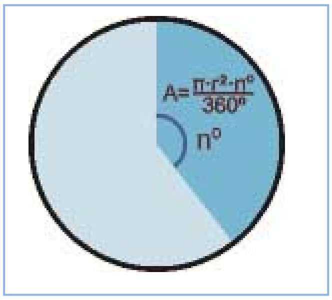
Actividades propuestas

48. Calcula el área de la corona circular de radios 7 y 3 *cm*.

4.5. Área del sector circular

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de *n* grados es igual a:

$$\mathbf{A = \pi\cdot r^2\cdot n/360.}$$



Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo construido sobre los radios.

Actividades resueltas

- Para hallar el área del *sector* circular de radio 7 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área del círculo completo: $\pi\cdot7^2 = 49\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_S = 49\pi\cdot90/360 = 12{,}25\pi \approx 38{,}465\ m^2.$$

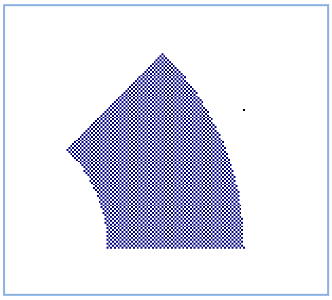
Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 7 *m* y altura 7 *m*, $A_T = 7\cdot7/2 = 24{,}5\ m^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 38{,}465 - 24{,}5 = 13{,}965\ m^2.$$

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.6. Otras áreas

Para hallar el **área de un sector de corona circular** restamos al área del sector circular de mayor radio el área del sector circular de menor radio.



El **área de un sector de corona circular** formada por las circunferencias concéntricas de radios r y R que abarca un ángulo de n grados es igual a:

$$\mathbf{A = \pi \cdot R^2 \cdot (n/360) - \pi \cdot r^2 \cdot (n/360) = \pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n/360.}$$

Actividades resueltas

- Para hallar el área del *sector* de corona circular de radios 7 m y 8 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área de la corona circular completa: $\pi \cdot (8^2 - 7^2) = 15\ \pi$, y hallamos la proporción:

$$A_C = 15\ \pi \cdot 90/360 = 3{,}75\ \pi \approx 11{,}78\ m^2.$$

También se puede hallar con la fórmula anterior:

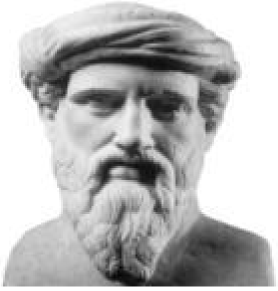
$$A_C = \pi \cdot (8^2 - 7^2) \cdot 90/360 \approx 11{,}78\ m^2.$$

Actividades propuestas

49. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 *cm* y 12 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

CURIOSIDADES. REVISTA

Biografía de Pitágoras

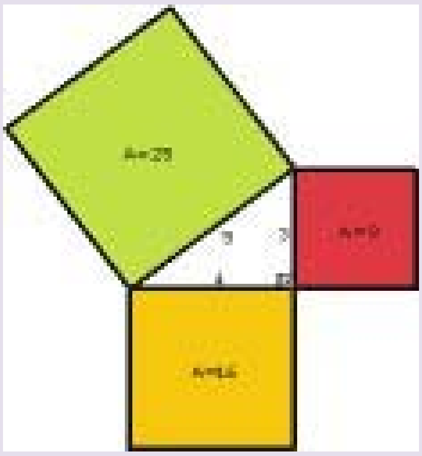


Pitágoras de Samos nació aproximadamente en el año 580 a. C. y falleció aproximadamente en el 495 a. C. Destacó por sus contribuciones en Matemáticas, Filosofía y Música. Entre sus hallazgos matemáticos destaca el teorema de Pitágoras. Pitágoras fundó la Escuela Pitagórica, en la que todos los descubrimientos eran de la comunidad, y que mantenía entre otras normas muy estrictas, la de ser vegetariano. El lema de los Pitagóricos era: "*Todo es número*". Cuando Pitágoras murió quedó su mujer, Teano, dirigiendo la Escuela. Curiosidad: Los Pitagóricos mostraban odio a las judías. No se conoce el origen de esa aversión. ¿Preferirían contar con lentejas?

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los grandes tesoros de la Geometría. Se habla de las 370 demostraciones del Teorema de Pitágoras: chinos, hindúes, árabes... tienen la suya.

Teorema de Pitágoras y los egipcios



Dos mil años antes de Cristo, en las orillas del Nilo, los egipcios utilizaban una cuerda con trece nudos para trazar ángulos rectos. Sabían que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 era un triángulo rectángulo.

Incluso hoy algunos albañiles verifican la perpendicularidad de los marcos de las puertas y de las ventanas mediante la regla que llaman: *6, 8 y 10*.

El número π (PI)

Es un número sorprendente con infinitas cifras decimales no periódicas.

Su rastro más antiguo se encuentra en el Papiro de Ahmes donde se le da un valor de 3,16.

Arquímedes lo valoró como 22/7 que es 3,1429.

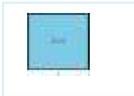
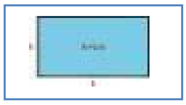
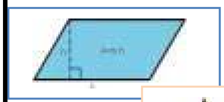
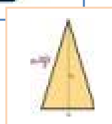
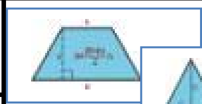
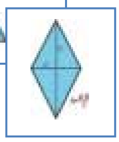
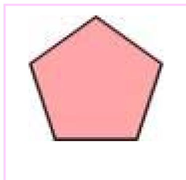
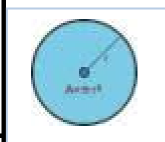
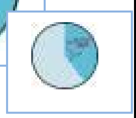
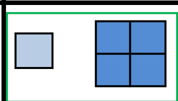
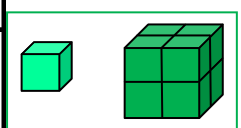
Actualmente, con ayuda del ordenador, se calculan más y más de sus cifras decimales. En 2009 se hallaron más de dos billones y medio de decimales de pi: π = 3,141592…

Medida del radio de la Tierra

Eratóstenes de Cirene estimó, de forma muy precisa para su época, el radio de la Tierra. Para ello debió medir con cuidado longitudes (entre la ciudad de Syena cerca de Assuan y Alejandría), ángulos (del Sol en el solsticio de verano). Como ese ángulo era 1/50 de la circunferencia determinó que el radio de la Tierra era 50 veces la distancia calculada.

Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández, José Antonio Encabo y David Miranda

RESUMEN

Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos: $a^2 = b^2 + c^2$		$25 = 5^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16$
Área del cuadrado	A = lado^2 = l^2 		Si l = 4 *cm* ⇒ A = 16 cm^2
Área del rectángulo	A = base por altura = $a \cdot b$		Si a = 3 *cm*, b = 5 *cm* ⇒ A = 15 cm^2.
Área del paralelogramo	A = base por altura = $a \cdot b$		a = 7 *m*, b = 9 *m* ⇒ A = 63 m^2
Área del triángulo	A = (base por altura)/2 = $a \cdot b/2$		a = 5 m, b = 6 m ⇒ A = 15 m^2
Área del trapecio	Área igual a la semisuma de las bases por la altura		B = 7; b = 3; h = 5 ⇒ A = 25
Área del rombo	Área igual al producto de las diagonales partido por 2		D = 4, D = 9 ⇒ A = 36/2 = 18
Perímetro de un polígono	Perímetro es igual a la suma de los lados		Lado = 6 *cm*, apotema = 5 *cm*, número de lados = 5 ⇒ Perímetro = 6 · 5 = 30 *cm*; Área = 15 · 5 = 75 cm^2.
Área de un polígono regular	Área es igual al semiperímetro por la apotema		
Longitud de la circunferencia	Si el radio es r la longitud es igual a $2\pi r$. Longitud de un arco de circunferencia: $2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha/360$		Radio = 3 *cm* ⇒ Longitud = 6π ≈ 18,84 *cm*. Área = 9π ≈ 28,26 cm^2. Si α = 30º y r = 3 *cm* ⇒Longitud del arco = 2·π·3·30/360 = 0,5π ≈ 1,57 *cm*
Área del círculo	Si el radio es r, el área es igual a $\pi \cdot r^2$.		
Área de la corona circular. **Área del sector circular**	Es la diferencia entre el área del círculo mayor menos la del círculo menor. Si abarca un arco α grados, el área es igual a $\pi \cdot r^2 \cdot \alpha/360$.		R = 7, r = 3 ⇒ A = $\pi(7^2 - 3^2)$ = π(49 – 9) = 40π ≈ 125,6 u^2 R = 4 *cm*, α = 60º ⇒ A = π·16·60/360 ≈ 8,373 cm^2
Semejanza	Dos figuras son semejantes si sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales		Si el lado del cuadrado mide 5 *m*, otro semejante de lado 15 m, k = 3, tiene un área multiplicada por 9, y el volumen del cubo multiplicado por 27.
Razón de semejanza	Si la razón de semejanza es k, la razón entre las áreas es k^2, y entre los volúmenes k^3.		

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Teorema de Pitágonas

1. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 *cm* y 6 *cm* de medida de sus catetos y 15 *cm* de hipotenusa? Razona tu respuesta

2. Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.

3. Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.

4. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8,2 *cm* y 6,9 *cm*?

5. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 16 *cm* y 12 *cm* b) 40 *m* y 30 *m*

c) 5 *dm* y 9,4 *dm* d) 2,9 *km* y 6,3 *km*.

6. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 25 *cm* y 15 *cm* b) 35 *m* y 21 *m*

c) 42 *dm* y 25 *dm* d) 6,1 *km* y 4,2 *km*

7. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 *m*.

8. Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm

9. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

Semejanza

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 30º y otro de 20º. Un ángulo de 120º y otro de 20º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80º. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50º.

c) A = 40º, b = 8 cm, c = 12 cm. A'= 40º, b' = 4 cm, c' = 6 cm

d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 12 cm, b' = 16 cm, c' = 24 cm

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

b) A = 50º, b = 3 cm, c = 7 cm. A' = 50º, b' = 18 cm, ¿a'?

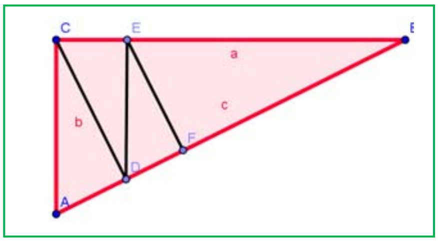
12. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

13. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?

14. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?

15. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?

16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados $a = 60$, $b = 45$ y $c = 75$, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.



17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

18. El mapa a escala 1:5000000 de un pueblo tiene un área de 700 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?

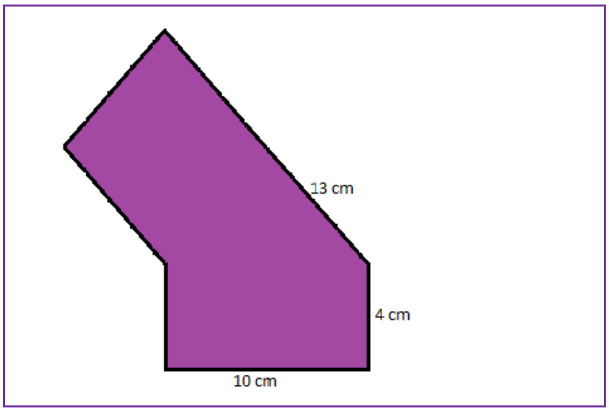
19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

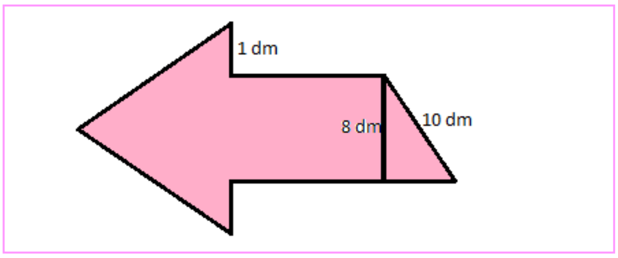
20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Longitudes y áreas de polígonos

21. Una señal de tráfico tiene forma triangular. Su base mide 23 cm y su altura 36 cm. ¿Cuál es el área de la señal de tráfico?

22. Estima el área de los siguientes polígonos irregulares:





23. La pizarra de una clase tiene 150 cm de altura y 210 cm de base. ¿Cuál es la superficie de la pizarra?

24. El tejado de una casa tiene forma de trapecio. La base pegada al techo de la vivienda mide 53 m y la otra base mide 27 m. Sabiendo que la altura del tejado son 8 m, ¿Cuánto mide su área?

25. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? ¿Cuál es menor? Sólo tenemos 50 cm de reborde, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? Calcula el área de cada uno.

26. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

27. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3,4 cm de radio.

28. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.

29. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.

30. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.

31. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.

32. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?

33. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?

34. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.

35. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 *cm* y su perímetro mide 20 *cm*.

36. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 *cm* y su altura 5 *cm*?

37. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 *cm* respectivamente.

Longitudes y áreas de figuras circulares

38. Calcula la longitud de una circunferencia de radio 7 cm.

39. Una circunferencia de 98,27 cm de longitud, ¿qué radio tiene? ¿y qué diámetro?

40. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia de 270 º si el radio mide 17 cm?

41. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un hexágono de lado 5 cm.

42. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 5 cm.

43. Calcula la longitud de una circunferencia circunscrita en un cuadrado de lado 5 cm.

44. Calcula el área en m^2 de los círculos de radio *r* igual a:

a) $r = 53\ cm$ b) $r = 9\ m$ c) $r = 8{,}2\ dam$ d) $r = 6{,}2\ dm$

45. Calcula el radio de un círculo de área 28,26 m^2.

46. Calcula el área de un círculo de diámetro 73,6 cm.

47. Calcula el área de las coronas circulares de radios, respectivamente:

a) R = 8 *m*; r = 3 *m* b) R = 72 *cm*; r = 41 *cm* c) R = 9 *m*; r = 32 *cm* d) R = 5 *dm*; r = 4 *cm*

48. En una habitación rectangular de lados 3 y 5 m, cubrimos un trozo con una alfombra circular de radio 2 m, ¿qué parte de suelo queda sin cubrir?

49. Calcula el área, en cm^2, de los sectores circulares de radio *r* y ángulo α siguientes:

a) r = 6 m; α = 30º b) r = 3,7 cm; α = 45º c) r = 2,7 dm; α = 60º d) r = 4 m; α = 90º

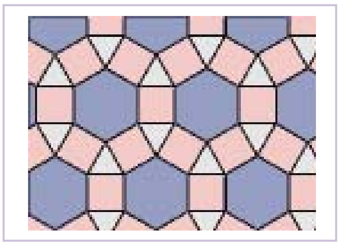
50. Dibuja en tu cuaderno el diseño de tapiz del margen de forma que el lado del cuadrado pequeño oscuro sea de 1 cm, el lado del cuadrado de borde amarillo, de 3 cm, y el borde del cuadrado de fondo rojo, de 6 cm. Estima el área del círculo rojo, del círculo oscuro, de la figura en rojo y de las líneas amarillas.

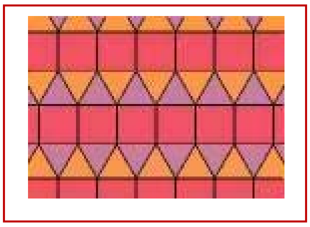
51. En una alfombra circular de 3 m de diámetro ha caído en el centro una mancha de medio metro de radio. a) ¿Qué área ocupa la parte limpia de la alfombra? b) Tapamos la mancha con otra alfombra cuadrada de 1,5 m de lado, ¿qué área de la alfombra circular queda sin tapar?

52. En un círculo cortamos dos círculos tangentes interiores de radios 5 y 2 cm, ¿qué área queda sin cortar?

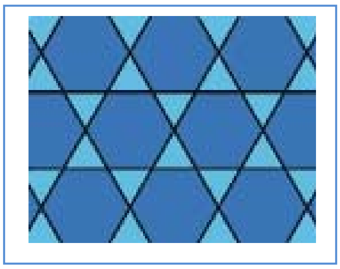
Problemas

53. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo; c) El área del hexágono. d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.





54. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula: a) El área del cuadrado; b) El área del triángulo. c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.



55. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?

56. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 *m*, y se separa de la pared una distancia de 2 *m*, ¿cuál es su longitud?

57. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 *m* de largo y 60 *m* de ancho. Calcula:

a) La diagonal del terreno cuadrado.
b) La diagonal del rectángulo
c) El área de cada terreno.
d) ¿Cuál tiene mayor superficie?

58. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso? c) ¿Cuál es menor? d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular? e) Calcula el área de cada uno.

59. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1,2 m de ancho y 1,5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?

60. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

AUTOEVALUACIÓN

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 *cm* mide:

a) 6,32 *cm* b) 7 *cm* c) 0,05 *m* d) 627 *mm*

2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 *m* y un cateto 7 *m*, el otro cateto mide:

a) 714 *cm* b) 7,4 *m* c) 8 *m* d) 8925,1 *mm*

3. El lado de un hexágono regular mide 7 *m*, entonces su área mide aproximadamente:

a) 4,3 dam^2 b) 21 m^2 c) 40 m^2 d) 1273057 cm^2

4. El área de un rectángulo de 10 cm de diagonal y 8 cm de base es:

a) 53 cm^2 b) 80 cm^2 c) 48 cm^2 d) 62 cm^2

5. El rombo de diagonales 54 *dm* y 72 *dm* tiene aproximadamente como perímetro:

a) 45 *dm* b) 181 *dm* c) 126 *dm* d) 200 *m*

6. El área del círculo de radio 83,6 *m* mide aproximadamente:

a) 2,19 hm^2 b) 234 dam^2 c) 295413344 cm^2 d) 0,2 km^2

7. La longitud de la semicircunferencia de radio 7,3 *cm* mide aproximadamente:

a) 0,3 *m* b) 45,8 *cm* c) 22,922 *cm* d) 25,7 *cm*

8. El trapecio de bases 7 *cm* y 5 *cm* y lado 8 *cm*, tiene como área:

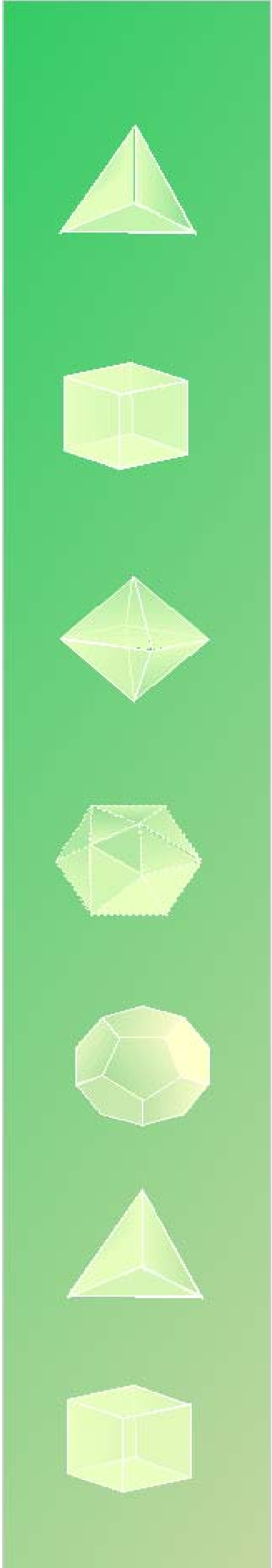
a) 49 cm^2 b) 48 cm^2 c) 50 cm^2 d) 48,37 cm^2

9. La longitud de la circunferencia de radio 4,6 *cm* mide aproximadamente:

a) 0,2 *m* b) 30 *cm* c) 28,9 *cm* d) 25,7 *cm*

10. La longitud del arco de circunferencia de radio 27,4 *m* que abarca un arco de 30º mide aproximadamente:

a) 28,6 *m* b) 100 *cm* c) 28,9 *cm* d) 14,34 *m*



Formación Profesional Básica
Matemáticas II
Capítulo 6: Geometría del plano y el espacio

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de **Marea Verde**. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 9: **Geometría en el espacio. Globo terráqueo** de 3º A ESO de autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez

ÍNDICE

Resumen

Muchas plantas distribuyen sus flores en forma esférica buscando un aprovechamiento óptimo del espacio. El átomo de hierro dispone sus electrones en forma de cubo, los sistemas de cristalización de los minerales adoptan formas poliédricas, los panales de las abejas son prismas hexagonales. Éstos son algunos ejemplos de la presencia de cuerpos geométricos en la naturaleza.

Nos movemos en el espacio, caminamos sobre un plano, observamos la línea del horizonte, habitamos y nos movemos habitualmente en poliedros. La información que percibimos por medio de nuestros sentidos la interpretamos en términos geométricos. Precisamos de las fórmulas de áreas y volúmenes de los cuerpos geométricos para calcular las medidas de los muebles que caben en nuestro salón, o para hacer un presupuesto de la reforma de nuestra vivienda.

La Geometría es una de las ramas más antiguas de las Matemáticas y su estudio nos ayuda a interpretar mejor la realidad que percibimos. En este tema recordarás las fórmulas que estudiaste ya el año pasado y profundizarás sobre sus aplicaciones en la vida real.

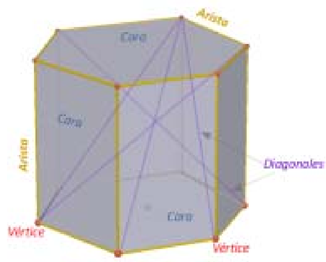
ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA

1. POLIEDROS

1.1. Poliedros. Elementos de un poliedro

Un *poliedro* es una región cerrada del espacio limitada por polígonos.

En todo poliedro podemos considerar los siguientes elementos: *caras, aristas, vértices, ángulos diedros* y *poliedros*, así como las *diagonales*.



Las *caras* son los polígonos que lo limitan, las *aristas y vértices* los lados y vértices de los polígonos que forman las caras.

Los *ángulos diedros* están formados por dos caras que tienen una arista común. Los *ángulos poliedros* están formados por varias caras que tienen un vértice común.

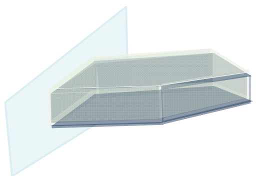
Una *diagonal* de un poliedro es un segmento que une dos vértices pertenecientes a caras diferentes.

Un *plano diagonal* es un plano que contiene tres vértices que no pertenecen a la misma cara.

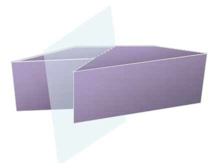
Es posible clasificar poliedros atendiendo a diferentes criterios. Si nos fijamos en la amplitud de sus ángulos diedros, se clasifican en ***cóncavos y convexos.***

Un poliedro es *convexo* si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro, está dentro del mismo. En poliedros convexos, únicamente uno de los dos semiespacios que determina cada uno de los planos que contienen a las caras, contiene también al resto del poliedro.

Un poliedro es *cóncavo* en caso contrario. En los poliedros cóncavos alguno de los planos que contienen a las caras divide al poliedro en dos cuerpos que pertenecen a semiespacios distintos.



Poliedro convexo



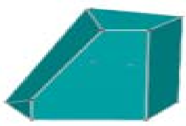
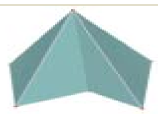
Poliedro cóncavo

En los poliedros convexos se cumple el llamado *Teorema de Euler* que relaciona las caras, vértices y aristas y afirma que en todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2. Si caras, vértices y aristas se representan por sus iniciales, se escribe: ***C* + *V* = *A* + 2**

Existen poliedros cóncavos que cumplen esta relación y poliedros cóncavos que no la cumplen.

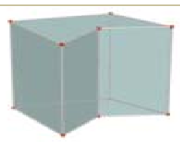
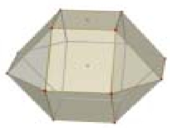
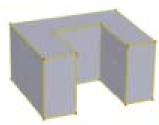
Actividades resueltas

- *Comprueba que los siguientes cuerpos geométricos verifican el teorema de Euler.*

 Hay dos caras ocultas que son cuadriláteros	Este cuerpo geométrico es un poliedro convexo. Tiene 7 caras de las cuales 5 son cuadriláteros, 1 es un pentágono y 1 es un triángulo. Tiene 9 vértices y para calcular el número de aristas sumamos el total de lados de las caras y dividimos entre 2, ya que cada arista es lado de dos caras: Tiene 14. *C* + *V* = 7 + 9 = 16 A +2 = 14 + 2 = 16 → Cumple el teorema de *Euler*
 Todos los vértices están a la vista	Si se ven todos los vértices, hay dos caras ocultas: una de ellas es un triángulo y la otra es un pentágono cóncavo. Es un poliedro cóncavo. Tiene un total de 6 caras, 6 vértices y Nº de aristas = —— . *C* + *V* = 6 + 6 = 12 A +2 = 10 + 2 = 12 → Verifica el teorema de *Euler.*

Actividades propuestas

1. Investiga si los siguientes cuerpos son poliedros y, en caso afirmativo, si cumplen el teorema de *Euler*. Indica también si son cóncavos o convexos

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

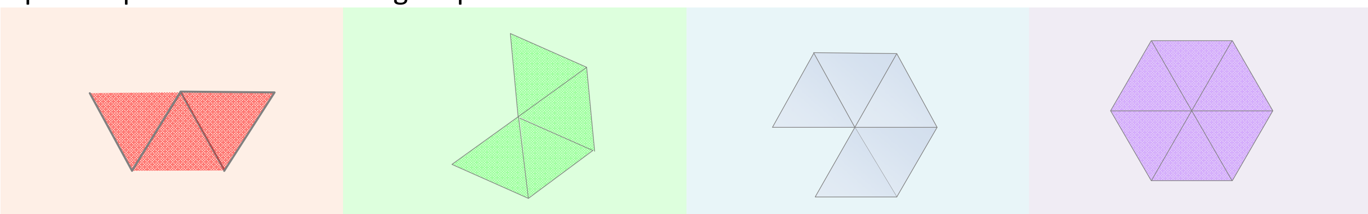
1.2. Poliedros regulares

Un poliedro regular es un poliedro que cumple que todas sus caras son polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales.

En todo poliedro regular coinciden el mismo número de caras en cada vértice. Es sencillo probar que sólo existen cinco poliedros regulares.

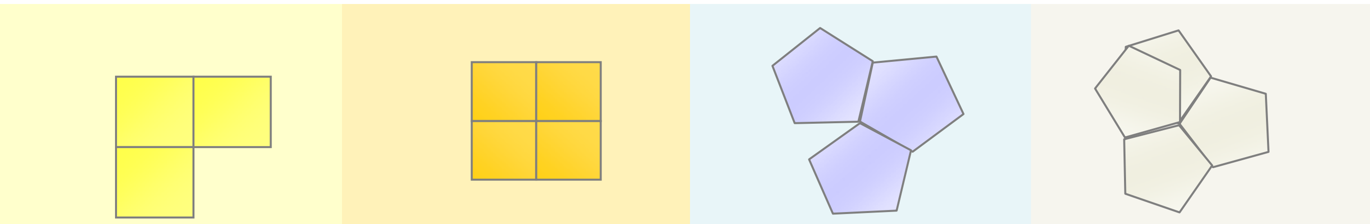
El polígono regular con menos lados es el triángulo equilátero. Busquemos los poliedros regulares que pueden construirse con caras triangulares:

Como mínimo son necesarios tres triángulos por vértice y como máximo pueden concurrir cinco para que sea posible formar un ángulo poliedro



Si unimos tres triángulos equiláteros iguales por vértice, se forma un tetraedro. El octaedro aparece al unir cuatro triángulos equiláteros iguales en cada vértice. Con cinco triángulos equiláteros, también iguales, por vértice, se forma un icosaedro. Si unimos seis triángulos equiláteros en un vértice, la suma de los ángulos de las caras concurrentes es 360º y no se puede formar ninguno ángulo poliedro, así que no hay más poliedros regulares con caras triangulares.

Estudiemos ahora los poliedros regulares que es posible construir con caras cuadradas y pentagonales



Con tres cuadrados iguales en cada vértice construimos un cubo. Al unir cuatro cuadrados en un vértice, la suma de los ángulos en el vértice común a los cuatro es 360º con lo que no podemos formar ningun poliedro mas que el cubo de caras cuadradas.

Sólo es posible construir un poliedro regular con caras pentagonales uniendo tres pentágonos en cada vértice. Es el dodecaedro. Un número mayor de pentágonos por vértice daría una suma de ángulos superior a 360º.

Entonces queda probado que sólo existen cinco poliedros regulares:

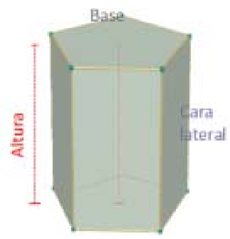
Los poliedros regulares son *desarrollables* porque pueden ser construidos a partir de un desarrollo plano formado por todas sus caras.

Todos cumplen la relación de Euler para poliedros convexos. Puedes comprobarlo:

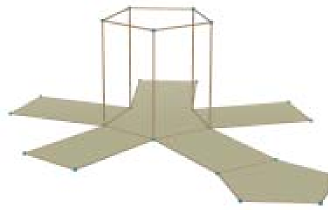
	TETRAEDRO	CUBO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
N° DE CARAS	4	6	8	12	20
N° DE VÉRTICES	4	8	6	20	12
N° DE ARISTAS	6	12	12	30	30
FORMA DE LAS CARAS	TRIANGULARES	CUADRADAS	TRIANGULARES	PENTAGONALES	TRIANGULARES

1.3. Prismas

Un *prisma* es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases.



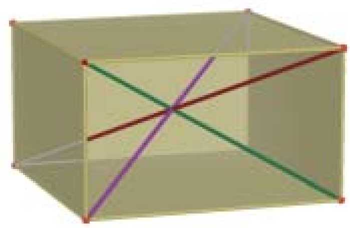
Los prismas son cuerpos desarrollables. El desarrollo de un prisma recto está compuesto por sus dos bases y por tantos paralelogramos como caras laterales tenga.
La altura del prisma es la distancia entre las bases.
Es posible clasificar un prisma atendiendo a diferentes conceptos:
Por la forma de las caras laterales pueden ser *rectos u oblicuos*. Son *rectos* si las citadas caras son rectángulos y son *oblicuos* si son rombos o romboides.



Por la forma de las bases pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, hexagonales dependiendo de que el polígono de la base sea triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono, etc...
Si además un prisma es recto y tiene polígonos regulares como bases, el prisma se llama *regular*. En cualquier otro caso el prisma se llama *irregular*.
Por la forma de sus ángulos diedros pueden ser cóncavos y convexos.

1.4. Paralelepípedos

Los paralelepípedos son prismas en los que las bases son paralelogramos.



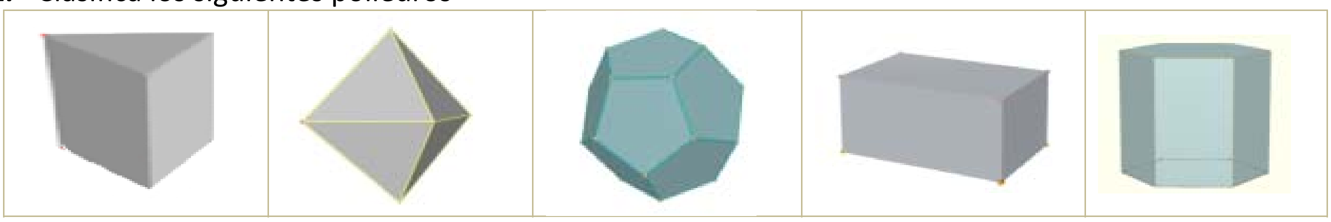
Además, todas las caras laterales son también paralelogramos y las caras opuestas son iguales entre sí por lo que cualquier cara puede tomarse como base.

Los paralelepípedos pueden ser*: cubos* si tienen todas sus caras cuadradas, *ortoedro*s si todas sus caras son rectángulos, *romboedros* si todas sus caras son rombos o *romboiedros* si todas sus caras son romboides.

Una propiedad importante de todos los paralelepípedos es que las cuatro diagonales se cortan en el punto medio.

Actividades propuestas

2. Clasifica los siguientes poliedros



3. ¿Es posible construir un prisma cóncavo triangular? ¿Y un prisma cóncavo regular? Razona las respuestas.
4. Entre los poliedros regulares, ¿hay alguno que sea prisma? En caso afirmativo clasifícalo.
5. ¿Basta que un paralelepípedo tenga dos caras rectangulares para que sea un prisma recto?
6. Dibuja un prisma pentagonal regular y comprueba que cumple la relación de Euler.
7. Una caja tiene forma cúbica de 2 dm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Pirámides

Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común como lados tiene la base.

El punto donde convergen todos los triángulos laterales se denomina *vértice* o cúspide.

Las pirámides se pueden clasificar por conceptos análogos a los de los prismas. Así destacamos que las pirámides, según la forma de la base, se clasifican en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,…*

Una pirámide es *regular* cuando lo es el polígono de la base y además las caras laterales son triángulos isósceles iguales. La altura de estos triángulos laterales se llama *apotema de la pirámide*. No debes confundir el apotema de una pirámide regular con el apotema del polígono de la base.

La *altura* de una pirámide es la distancia del vértice a la base. Si una pirámide es regular, coincide con la distancia entre el vértice de la pirámide y el centro del polígono de la base.

Las pirámides son desarrollables. El desarrollo de una pirámide lo forman el polígono de la base y tantas caras triangulares como lados tenga la base. Si la pirámide es regular, los triángulos son isósceles e iguales.

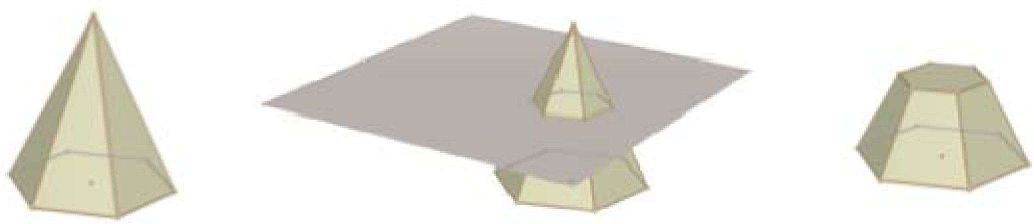
Actividades propuestas

8. ¿Hay alguna pirámide regular que sea poliedro regular? ¿Y pirámides con caras paralelas? En caso afirmativo pon un ejemplo y en caso negativo, justifica tus respuestas.

9. Dibuja una pirámide hexagonal regular y distingue la apotema de la pirámide del apotema de la base. Dibuja también su desarrollo.

Tronco de pirámide

Un tronco de pirámide es el poliedro resultante al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base. Las bases son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios.



Un tronco de pirámide es regular cuando es una porción de pirámide regular. En este caso las caras laterales son trapecios isósceles y las bases son polígonos regulares semejantes.

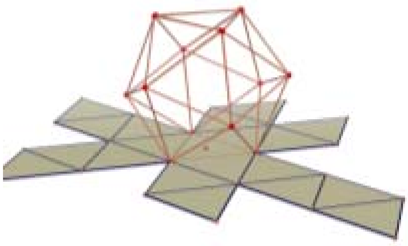
Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. ÁREA LATERAL Y TOTAL DE UN POLIEDRO

2.1. Área total de un poliedro regular

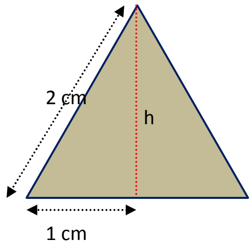
Como las caras de los poliedros regulares son iguales, el cálculo del área total de un poliedro regular se reduce a calcular el área de una cara y después multiplicarla por el número de caras.

Actividades resueltas



- *Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.*

Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos la altura h que divide a la base en dos segmentos iguales



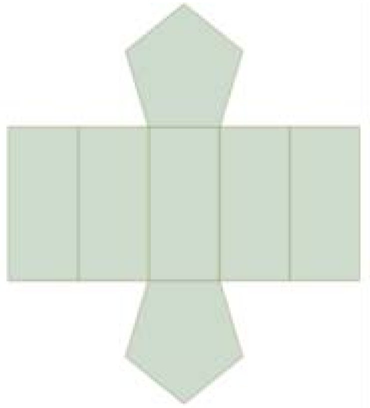
$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \quad \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

Luego el área de una cara será:

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b\,.\,h}{2} = \dfrac{2\,.\,\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$ y por tanto Área icosaedro = $20\sqrt{3}$ cm^2

2.2. Áreas lateral y total de un prisma

El área lateral de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales.



Como las caras laterales son paralelogramos de la misma altura, que es la altura del prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma de las áreas de las caras laterales =

= Perímetro de la base · altura del prisma.

Si denotamos por *h* la altura y por P_B el perímetro de la base:

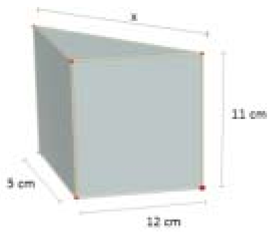
Área lateral = $A_L = P_B\,.\,h$

El área total de un prisma es el área lateral más el doble de la suma del área de la base:

Área total = $A_T = A_L + 2.\ A_B$

Actividades resueltas

- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*



Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{169} = 13$ cm

$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm$; $A_B = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$

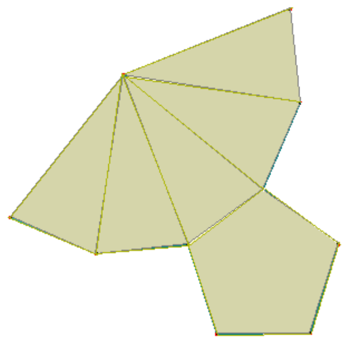
$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.3. Áreas lateral y total de una pirámide y de un tronco de pirámide regulares

El área lateral de una pirámide regular es la suma de las áreas de las caras laterales.

Desarrollo de pirámide pentagonal regular



Son triángulos isósceles iguales por lo que, si la arista de la base mide *b*, el apotema de la pirámide es *Ap* y la base tiene *n* lados, este área lateral es:

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

y como $n \cdot b$ = Perímetro de la base

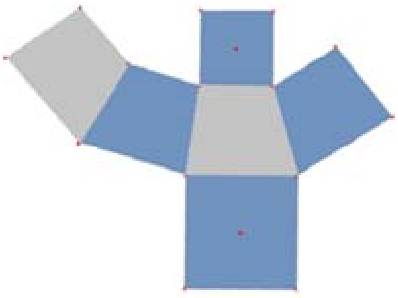
$$A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} = \frac{\text{Perímetro de la base} \cdot \text{Apotema de la pirámide}}{2}$$

El área total de una pirámide es el área lateral más el área de la base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronco de pirámide regular es un cuerpo geométrico desarrollable. En su desarrollo aparecen tantas caras laterales como lados tienen las bases. Todas ellas son trapecios isósceles.

Desarrollo de tronco de pirámide cuadrangular



Si *B* es el lado del polígono de la base mayor, *b* el lado de la base menor, *n* el número de lados de las bases y *Ap* es la altura de una cara lateral

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{(B+b) \cdot Ap}{2} = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} =$$

$$= \frac{\text{Suma de perímetro de las bases} \cdot \text{Apotema del tronco}}{2}$$

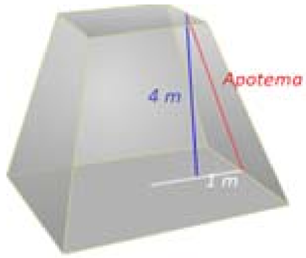
El área total de un tronco de pirámide regular es el área lateral más la suma de áreas de las bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resueltas

- *Calculemos el área total de un tronco de pirámide regular de 4 m de altura si sabemos que las bases paralelas son cuadrados de 4 m y de 2 m de lado.*

En primer lugar calculamos el valor del apotema. Teniendo en cuenta que el tronco es regular y que las bases son cuadradas se forma un triángulo rectángulo en el que se cumple:



$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12 \text{ m}$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{(16+8) \cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 \text{ m}^2 + 16 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2 = 69{,}44 \text{ m}^2$$

Actividades propuestas

10. Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular regular sabiendo que las aristas de las bases miden 2 cm y cada arista lateral 8 cm.

11. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 63 m^2 y tiene 7 m de altura. Calcula el perímetro de la base.

12. El lado de la base de una pirámide hexagonal regular es de 6 cm y la altura de la pirámide 10 cm. Calcula el apotema de la pirámide y su área total.

13. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular, sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 4 y 7 dm y que la altura de cada cara lateral es de 8 dm.

14. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular, de 4 cm de lado de la base, es 104 cm^2, calcula la apotema de la pirámide y su altura.

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

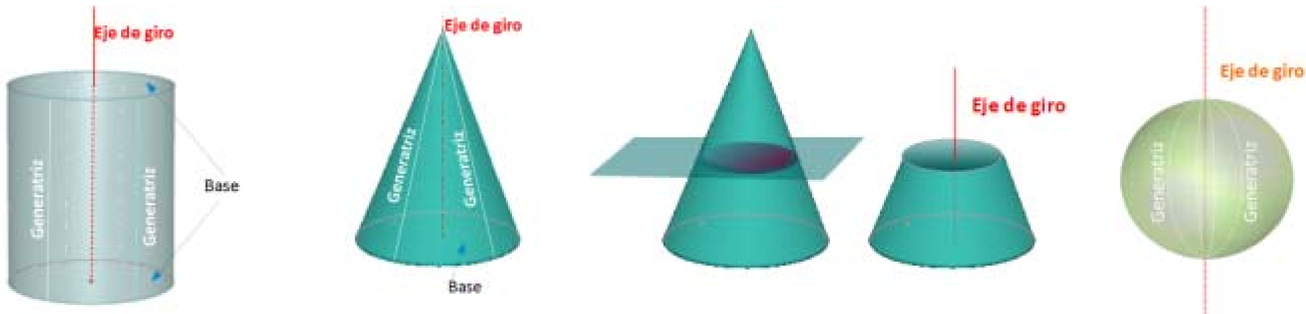
3. CUERPOS DE REVOLUCIÓN

3.1. Cuerpos de revolución: Cilindros, conos y esferas

Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*.

También puede obtenerse un cuerpo de revolución mediante el giro de una figura plana alrededor de un eje de giro.

Los principales cuerpos de revolución son: *cilindros, conos* y *esferas*.



CILINDRO CONO TRONCO DE CONO ESFERA

La generatriz de un cilindro es una recta paralela al eje de giro. La de un cono es una recta secante con el eje y la de una esfera es una semicircunferencia cuyo centro está en el eje de giro

3.2. Áreas lateral y total de un cilindro

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y una región rectangular. De esta manera se obtiene su desarrollo.

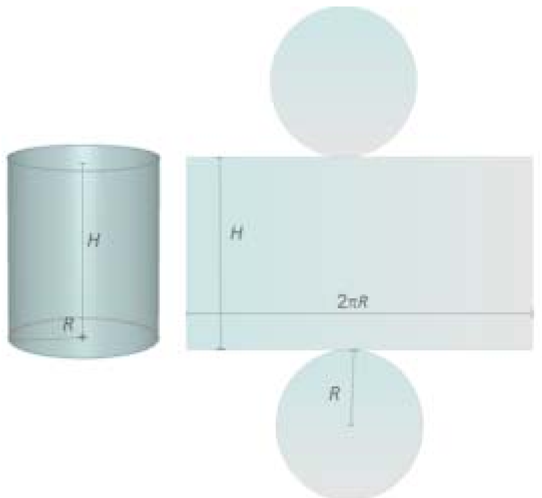
A partir de éste, podemos ver que el área lateral de cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.

Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

A_L = *Longitud de la base . Altura* = $(2\pi R).H = 2\pi RH$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos de que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$



Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Áreas lateral y total de un cono

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora *R* al radio de la base y G a la generatriz. El área lateral del cono es el área del sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{A \text{ Lateral del cono}}{\text{Longitud de arco correspondiente al sector}} = \frac{A \text{ total del círculo de radio } G}{\text{Longitud de la circunferencia de radio } G}$$

Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos:

$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi\, R\, G$$

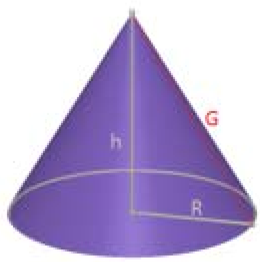
Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base mide 18,84 dm .(Toma 3,14 como valor de π)*

  Calculamos en primer lugar el radio *R* de la base:

  $$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3 \text{ dm.}$$

  Calculamos ahora la generatriz *G*:

  $$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37 \text{ dm.}$$

Entonces $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79 \text{ dm}^2$.

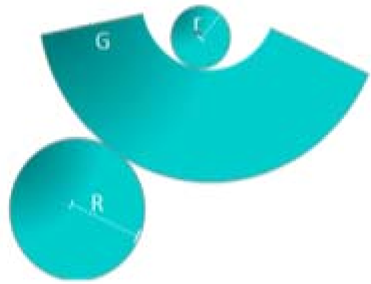
Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.4. Áreas lateral y total de un tronco de cono

Al cortar un cono por un plano paralelo a la base, se obtiene un tronco de cono. Al igual que el tronco de pirámide, es un cuerpo desarrollable y su desarrollo lo constituyen los dos círculos de las bases junto con un trapecio circular, cuyas bases curvas miden lo mismo que las circunferencias de las bases.

Llamando *R* y *r* a los radios de las bases y *G* a la generatriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



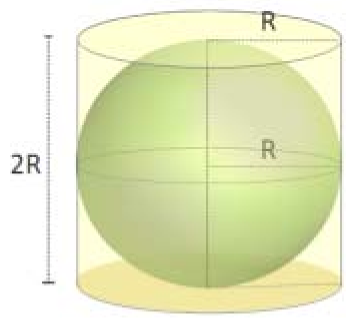
Si a la expresión anterior le sumamos las áreas de los círculos de las bases, obtenemos el área total del tronco de cono:

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

3.5. Área total de una esfera

La esfera no es un cuerpo geométrico desarrollable, por lo que es más complicado que en los casos anteriores encontrar una fórmula para calcular su área.

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.



Si llamamos *R* al radio de la esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos.

Actividades propuestas

15. Una columna cilíndrica tiene 76 cm de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?

16. El radio de la base de un cilindro es de 38 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

17. Calcula el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 50 dm y su radio de la base 30 dm.

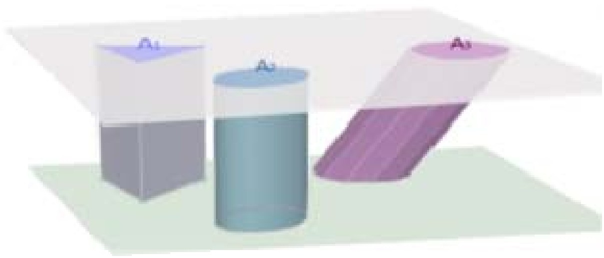
18. La circunferencia de la base de un cono mide 6, 25 m y su generatriz 8 m. Calcula el área total.

19. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula: a) la longitud de la circunferencia máxima; b) el área de la esfera.

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda

4. VOLUMEN DE UN CUERPO GEOMÉTRICO

4.1. Principio de *Cavalieri*



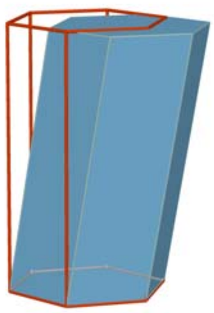
Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII enunció el principio que lleva su nombre y que afirma:

"Si dos cuerpos tienen la misma altura y al cortarlos por planos paralelos a sus bases, se obtienen secciones con el mismo área, entonces los volúmenes de los dos cuerpos son iguales"

Ejemplo:

En la figura adjunta las áreas de las secciones A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo a las bases, son iguales, entonces, según este principio los volúmenes de los tres cuerpos son también iguales.

4.2. Volumen de un prisma y de un cilindro



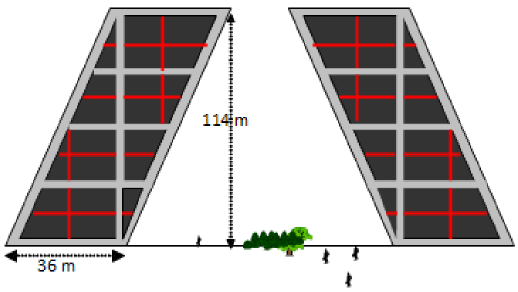
El volumen de un prisma recto es el producto del área de la base por la altura. Además, según el principio de *Cavalieri*, el volumen de un prisma oblicuo coincide con el volumen de un prisma recto con la misma base y altura. Si denotamos por V este volumen, A_B el área de la base y *h* la altura:

$$\text{Volumen prisma} = V = A_B \cdot h$$

También el volumen de un cilindro, recto u oblicuo es área de la base por altura. Si llamamos *R* al radio de la base, A_B el área de la base y *h* la altura, el volumen se escribe:

$$\text{Volumen cilindro} = V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Actividades resueltas



- *Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa.*
  Cada una de ellas es un prisma oblicuo cuya base es un cuadrado de 36 metros de lado y tienen una altura de 114 metros. El volumen interior de cada torre puede calcularse con la fórmula anterior:

$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744 \text{ m}^3$$

Actividades propuestas

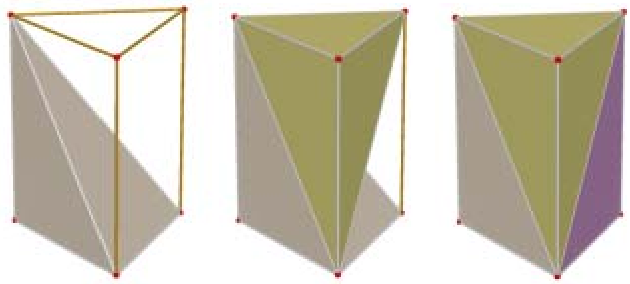
20. Calcula el volumen de un prisma recto de 12 dm de altura cuya base es un hexágono de 4 dm de lado.

21. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.

4.3. Volumen de una pirámide y de un cono

También en los casos de una pirámide o cono, las fórmulas del volumen coinciden en cuerpos rectos y oblicuos.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma que tiene la misma base y altura.



Volumen pirámide = $V = \dfrac{A_B \,.\, h}{3}$

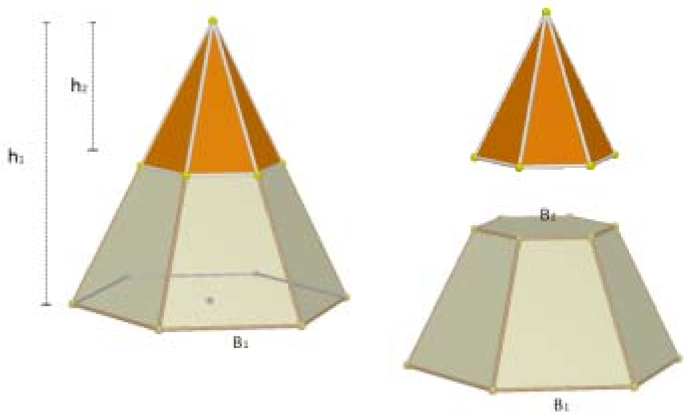
Si comparamos cono y cilindro con la misma base y altura, concluimos un resultado análogo

Volumen cono = $V = \dfrac{A_B \,.\, h}{3} = \dfrac{\pi\, R^2 \,.\, h}{3}$

4.4. Volumen de un tronco de pirámide y de un tronco de cono

Existe una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide regular pero la evitaremos. Resulta más sencillo obtener el volumen de un tronco de pirámide regular restando los volúmenes de las dos pirámides a partir de las que se obtiene.

Si representamos por A_{B1} y A_{B2} las áreas de las bases y por h_1 y h_2 las alturas de las pirámides citadas, el volumen del tronco de pirámide es:



Volumen tronco de pirámide =

$V = \dfrac{A_{B1} \,.\, h_1}{3} - \dfrac{A_{B2} \,.\, h_2}{3}$

El volumen del tronco de cono se obtiene de modo parecido. Si R_1 y R_2 son los radios de las bases de los conos que originan el tronco y h_1 y h_2 sus alturas, el volumen del tronco de cono resulta:

Volumen tronco de cono = $V = \dfrac{\pi \,.\, R_1^2 \,.\, h_1}{3} - \dfrac{\pi \,.\, R_2^2 \,.\, h_2}{3}$

Actividades resueltas

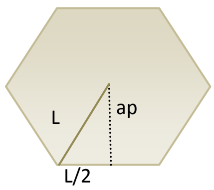


Figura 1

Calcula el volumen de un tronco de pirámide regular de 10 cm de altura si sus bases son dos hexágonos regulares de lados 8 cm y 3 cm.

Primer paso: calculamos las apotemas de los hexágonos de las bases:

Para cada uno de estos hexágonos:

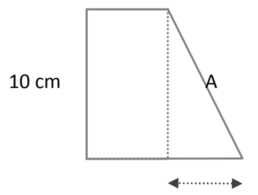


Figura 2

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow \ ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Luego las apotemas buscadas miden: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\,cm \quad ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\,cm$

Como segundo paso, calcularemos el apotema del tronco de pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\,cm$$

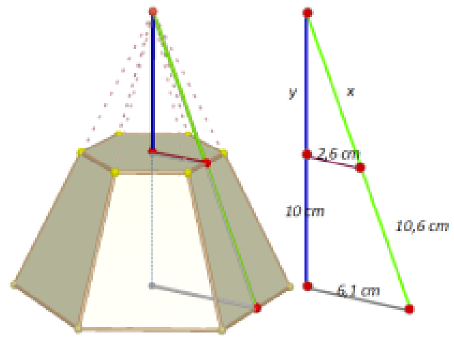


Figura 3

En tercer lugar, calcularemos el valor del segmento *y* de la figura 3 que nos servirá para obtener las alturas de las pirámides que generan el tronco con el que trabajamos:

Por el teorema de *Tales*:

$$\frac{6{,}1}{2{,}6} = \frac{10+y}{y} \Rightarrow 6{,}1y = 2{,}6(10 + y) \Rightarrow 6{,}1y - 2{,}6y = 26 \Rightarrow \ y = \frac{26}{3{,}5} \approx 7{,}5\,cm.$$

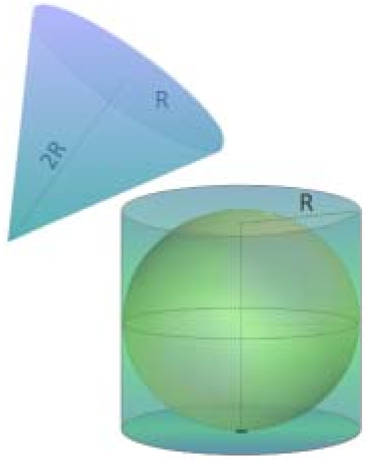
Luego las alturas de las pirámides generadoras del tronco miden 10 + 7,5 = 17,5 cm y 7,5 cm.

Por último calculamos el volumen del tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1}\,.\,h_1}{3} - \frac{A_{B2}\,.\,h_2}{3} = \frac{1}{3}.\frac{42\,.\,6{,}1}{2}.17{,}5 - \frac{1}{3}.\frac{18\,.\,2{,}6}{2}.7{,}5 = \frac{4483{,}5}{6} - \frac{351}{6} = 688{,}75\ cm^3$$

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

4.5. Volumen de la esfera



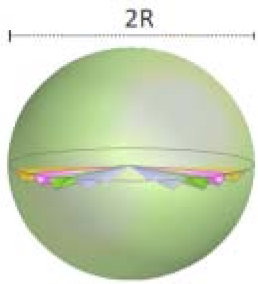
Volvamos a pensar en una esfera de radio *R* y en el cilindro que la circunscribe. Para rellenar con agua el espacio que queda entre el cilindro y la esfera, se necesita una cantidad de agua igual a un tercio del volumen total del cilindro circunscrito.

Se deduce entonces que la suma de los volúmenes de la esfera de radio *R* y del cono de altura *2R* y radio de la base *R*, coincide con el volumen del cilindro circunscrito a la esfera de radio *R*. Por tanto:

Volumen $_{\text{esfera}}$ = Volumen $_{\text{cilindro}}$ - Volumen $_{\text{cono}}$ $\Rightarrow$

$$\text{Volumen}_{\text{ esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Existen demostraciones más rigurosas que avalan este resultado experimental que hemos descrito. Así por ejemplo, el volumen de la esfera se puede obtener como suma de los volúmenes de pirámides que la recubren, todas ellas de base triangular sobre la superficie de la esfera y con vértice en el centro de la misma.



Actividades propuestas

22. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π).
b. Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

23. Comprueba que el volumen de la esfera de radio 5 dm sumado con el volumen de un cono del mismo radio de la base y 10 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 10 dm de altura y 5 dm de radio de la base.

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

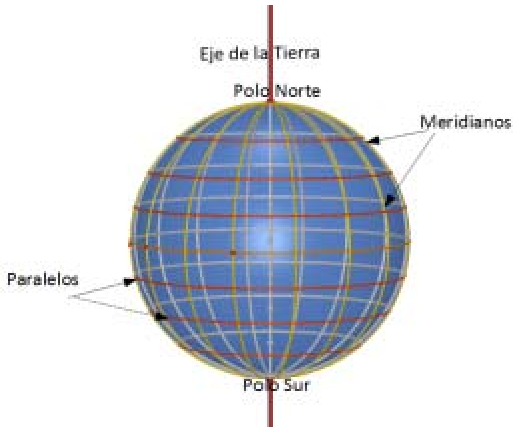
5. GLOBO TERRÁQUEO

5.1. El globo terráqueo

La Tierra tiene una forma de esfera algo achatada por los polos. En su movimiento de rotación gira alrededor de una línea imaginaria que se denomina *eje.* Los *polos geográficos Norte y Sur* son los puntos de corte del eje con la superficie de la Tierra.

Un *globo terráqueo* es una representación tridimensional a escala de la Tierra.

Es la representación más precisa que existe porque no presenta distorsiones a la hora de tomar datos para calcular ángulos y distancias.



El resto de las representaciones a escala de la Tierra son bidimensionales y entre ellas destacan *los planisferios* que son proyecciones del globo terráqueo sobre el plano.

El objetivo de estas representaciones de la Tierra es la ubicación precisa de cualquier punto geográfico. Para lograrlo, en el globo terráqueo se definen un conjunto de líneas imaginarias que se denominan *meridianos* y *paralelos*.

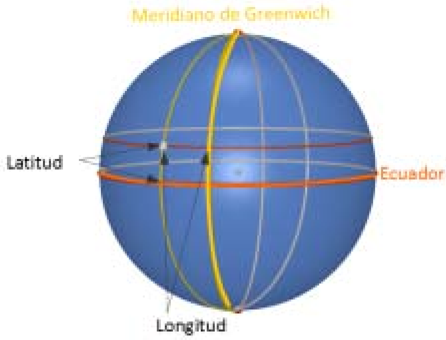
Los *meridiano*s son semicircunferencias centradas en el centro de la Tierra y que pasan por los polos. Entre ellos destacan el llamado meridiano de Greenwich o meridiano cero que pasa por Londres y el Antimeridiano, ubicado en el Océano Pacífico.

Los *paralelos* son circunferencias que tienen su centro en el eje de la Tierra y que cortan al globo terráqueo. Sólo uno de ellos tiene como centro el de la Tierra. Se denomina *Ecuador o paralelo cero y* es una circunferencia de radio máximo.

Otros paralelos destacados son los *Trópicos de Cáncer* y *Capricornio*, cercanos al Ecuador en el norte y sur respectivamente y también el *Círculo Polar Ártico* en el Polo Norte y el *Círculo Polar Antártico* en el Polo Sur.

El Ecuador divide a la Tierra en dos semiesferas, denominadas *hemisferio norte* (N) y *hemisferio sur*(S). El meridiano de Greenwich divide a la Tierra en los *hemisferios este* (E) y *oeste* (W).

5.2. Longitud y latitud. Coordenadas geográficas



Tomando como sistema de referencia el Ecuador y el meridiano de Greenwich, a cada punto de la Tierra se le asocia una pareja de números que son sus *coordenadas geográficas* y que reciben el nombre de *latitud y longitud*. Estas coordenadas se expresan en grados sexagesimales.

La *latitud* es la distancia que existe entre un punto cualquiera del globo terráqueo y el Ecuador. Se mide sobre el meridiano que pasa por dicho punto.

La *longitud* es la distancia que existe entre un punto cualquiera y el Meridiano de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.

Si un punto está en el hemisferio norte, diremos que tiene latitud norte y escribiremos latitud N. Análogamente si está en el hemisferio sur, diremos que tiene latitud sur y escribiremos latitud S.

También hablaremos de longitud este y longitud oeste y escribiremos longitud E o longitud W dependiendo de que un punto se encuentre a la izquierda o derecha del meridiano de Greenwich. Suele identificarse la longitud E con longitud negativa y la longitud W con longitud positiva

5.3. Husos horarios

Durante mucho tiempo la hora se determinaba mediante cálculos basados en los movimientos de los astros y la hora oficial era la hora solar. Esto ocasionaba múltiples problemas en los horarios de los transportes entre diferentes localidades por lo que se acordó establecer un horario oficial coordinado. En un principio este horario estaba basado en la llamada hora media de *Greenwich* (**GMT**) que se calculaba haciendo la media de la hora solar de todas las localidades pertenecientes al meridiano de *Greenwich*. Hoy día la hora solar ha sido sustituida por la hora que calculan relojes atómicos mucho más precisos. Con ellos la hora **GMT** ha dado paso a la hora universal coordinada (**UTC**).

La Tierra da una vuelta completa en 24 horas, recorre $360^{\circ} : 24 = 15^{\circ}$ en una hora. Se produce entonces una diferencia de una hora de tiempo por cada diferencia de 15° de longitud entre dos puntos geográficos.

Se llama ***huso horario*** a una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15° de longitud. La velocidad de la Tierra en su movimiento de rotación origina 24 *husos horarios*. Partiendo del meridiano de *Greenwich* se numeran según su distancia al Este o al Oeste de Greenwich.

Dentro de cada huso horario todos los relojes deben marcar la misma hora, y entre un huso y el siguiente hay una diferencia de una hora. Generalmente, los husos horarios están determinados por meridianos de una longitud que es múltiplo de 15°; sin embargo, como consecuencia de las fronteras políticas, las delimitaciones pueden seguir líneas que adoptan formas muy irregulares.

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda

Teniendo en cuenta que el movimiento de rotación es un giro de oeste a este, si nos desplazamos de un huso horario a otro en dirección Este- Oeste, debemos retrasar el reloj una hora y, si el desplazamiento se produce de Oeste a Este debemos adelantarlo una hora.

Atravesar el Antimeridiano supone el cambio de fecha, exactamente un día.

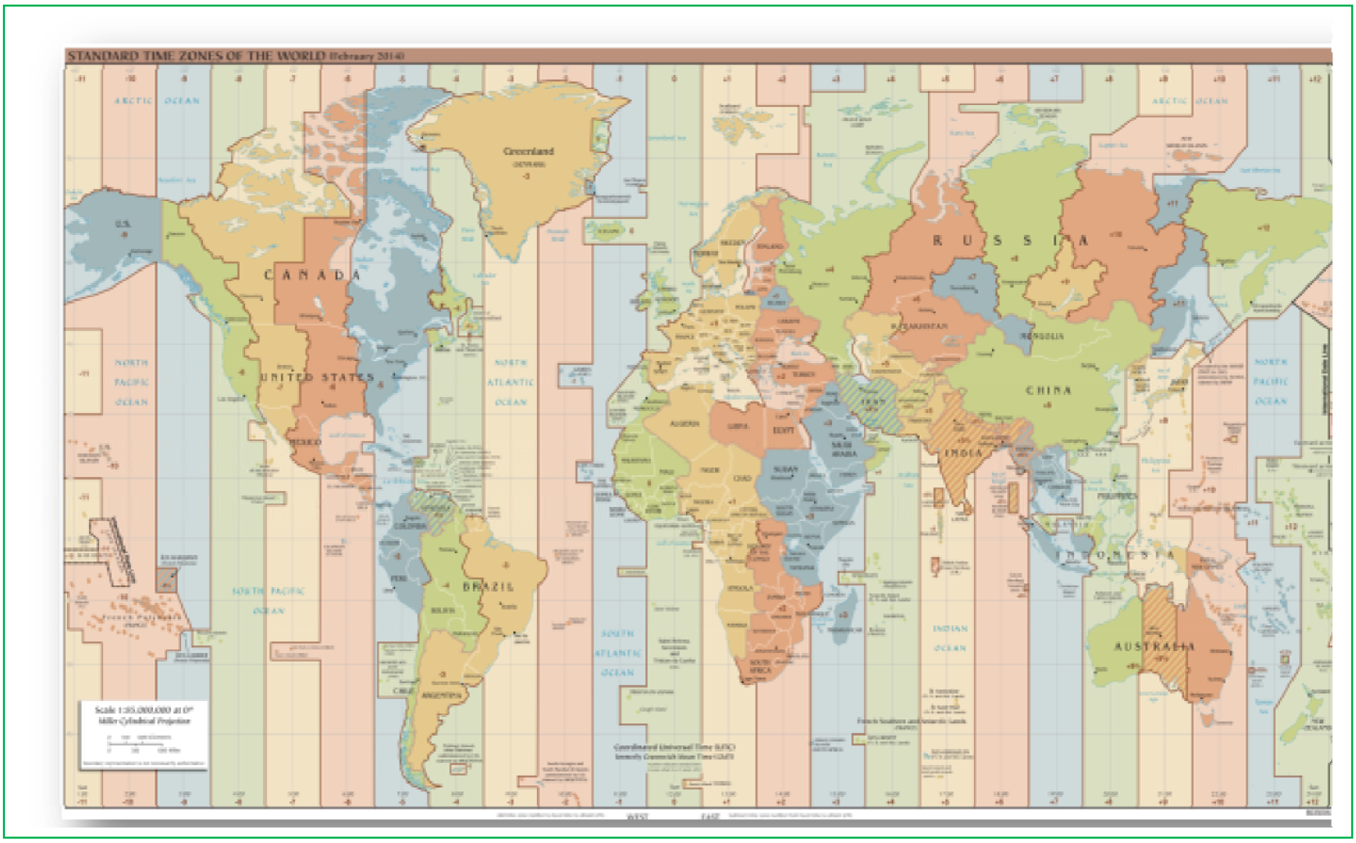
Actividades propuestas

24. Un avión recorre 20^{o} en dirección Oeste a lo largo del Ecuador. Si llega a un punto cuya longitud es de 170^{o} Este, ¿cuáles son las coordenadas del lugar de partida?

25. Juan sale de su casa y recorre 10 Km en dirección sur, 20 Km hacia el este y 10 Km hacia el norte. Si se encuentra de nuevo en casa, ¿Dónde está situada su casa?

26. En la esfera terrestre, ¿qué paralelo mide más?, ¿qué meridiano mide más? Razona tus respuestas.

27. Busca las coordenadas geográficas del lugar en el que vives.



MAPA DE HUSOS HORARIOS DE 30 MARZO 2014 (ORIGEN DE LA IMAGEN: WIKIPEDIA)

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

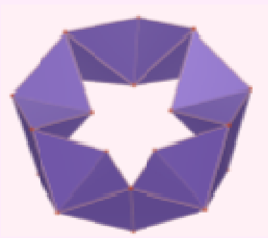

Arquímedes pensativo y ***Cicerón y los magistrados descubriendo la tumba de Arquímedes en Siracusa***

ORIGEN DE LAS IMÁGENES: WIKIPEDIA

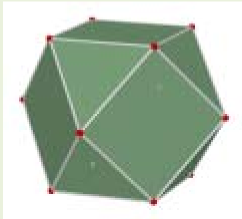
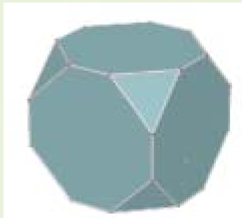
Arquímedes (287 a.C.- 212 a.C.) Matemático, ingeniero, físico, realizó múltiples aportaciones a la ciencia. Entre otras y como has estudiado en este tema, la demostración de las fórmulas del área y volumen de una esfera. Se dice que resultaron sus descubrimientos favoritos. En su tumba se grabaron un cilindro con una esfera inscrita como homenaje.

El matemático inglés **Thomas Harriot** (1560-1621), planteó el problema del ***empaquetamiento de esferas*** que estriba en encontrar la forma de apilar esferas del mismo radio de modo que el espacio comprendido entre ellas sea mínimo. El astrónomo alemán **Johannes Kepler** (1571-1630) lo resolvió, llegando a la conclusión de que la mejor colocación era la que entonces se hacía espontáneamente en los barcos para apilar las balas de cañón o la que utilizan los tenderos para apilar las naranjas en los puestos del mercado.

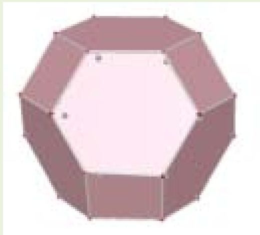
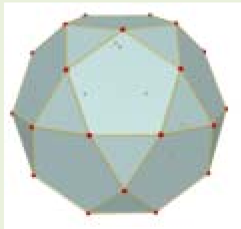
Un anillo de tetraedros o caleidociclo es un anillo tridimensional compuesto por tetraedros unidos por sus aristas. Pueden girar sobre sí mismos en torno a su centro infinitas veces sin romperse ni deformarse.



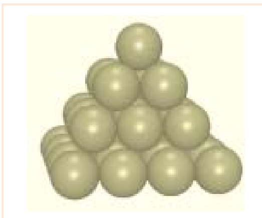

Los ***sólidos arquimedianos*** o **sólidos de Arquímedes** son un grupo de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos. En todos los sólidos de Arquímedes concurren el mismo número de caras en cada vértice y con las mismas formas. Algunos de ellos se obtienen truncando los sólidos platónicos (poliedros regulares).

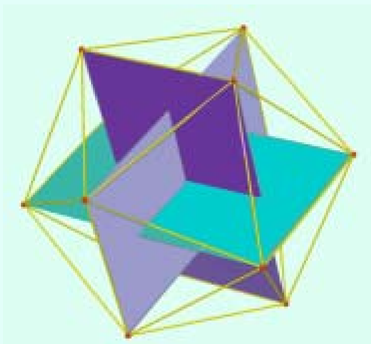
Cubos truncados

Octaedro truncado *Dodecaedro truncado*

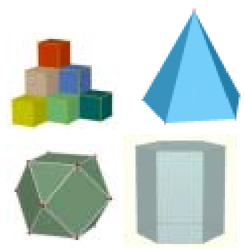
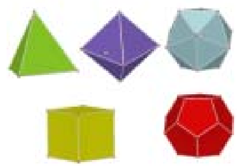
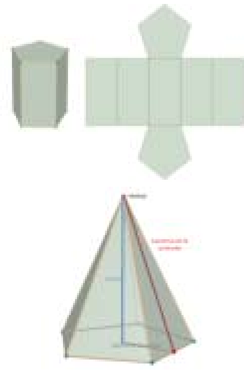
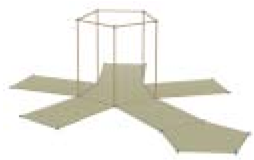
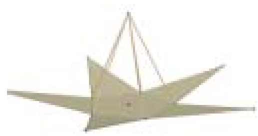
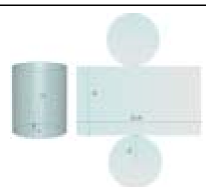


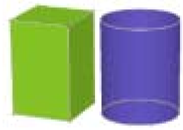
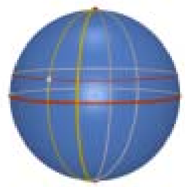
Los vértices del icosaedro determinan 3 rectángulos áureos perpendiculares dos a dos. En el icosaedro podemos encontrar un total de 15 rectángulos áureos. Cada uno de ellos tiene dos lados paralelos que son aristas opuestas del poliedro.



Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda

RESUMEN

Poliedro. Elementos de un poliedro. Tipos de poliedros	Un poliedro es una región cerrada del espacio limitada por polígonos. Sus principales elementos son: caras, aristas, vértices, ángulos diedros y poliedros, así como las diagonales. Los poliedros pueden ser cóncavos y convexos dependiendo de que alguna de sus caras sea un polígono cóncavo o ninguna lo sea. Entre los poliedros destacan poliedros regulares, prismas y pirámides.	
Teorema de Euler:	En todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2.	C + V = A+2
Poliedros regulares	Un poliedro regular es un poliedro que tiene todas sus caras polígonos regulares iguales y que sus ángulos poliedros son iguales. Hay cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro	
Prismas y pirámides	Un prisma es un poliedro determinado por dos caras paralelas que son polígonos iguales y tantas caras laterales, que son paralelogramos, como lados tienen las bases. Destacan los paralelepípedos que son prismas con todas sus caras paralelogramos y dentro de éstos los ortoedros que son paralelepípedos con todas sus caras rectangulares Una pirámide es un poliedro determinado por una cara poligonal denominada base y tantas caras triangulares con un vértice común, como lados tiene la base.	
Áreas lateral y total de un prisma	$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2\,Área_{Base}$	
Áreas lateral y total de una pirámide regular	$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$	
Cuerpos de revolución	Entre los cuerpos de revolución destacan cilindros, conos y esferas.	
Áreas lateral y total de un cilindro	$A_{Lateral} = 2\pi R H$ $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$	

Áreas lateral y total de un cono	$A_{Lateral} = \pi R G$ $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$	
Área total de una esfera	$A_{total} = 4 \pi R^2$	
Volumen de un prisma y de un cilindro	$Volumen = Área_{base} . Altura$	
Volumen de una pirámide y de un cono	$Volumen = \dfrac{Área_{base} . Altura}{3}$	
Volumen de una esfera	$Volumen = \dfrac{4}{3} \pi R^3$	
Coordenadas geográficas	**Latitud**: Distancia del punto geográfico al Ecuador medida sobre el meridiano que pasa por el punto. **Longitud:** Distancia del punto geográfico al meridiano cero o de Greenwich, medida sobre el paralelo que pasa por el punto.	
Husos horarios	Cada **huso horario** es una zona del globo terráqueo comprendida entre dos meridianos que se diferencian en 15^{o} de longitud.	

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.

2. ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?

3. ¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?

4. Dibuja un prisma regular de base cuadrada y señala: a) dos aristas que sean paralelas, b) dos aristas que sean perpendiculares y coplanarias, c) dos aristas perpendiculares y no coplanarias, d) dos caras paralelas, e) dos caras perpendiculares.

5. Si un poliedro convexo tiene 16 vértices y 24 aristas, ¿cuántas caras tiene? ¿Podría ser una pirámide? ¿Y un prisma?

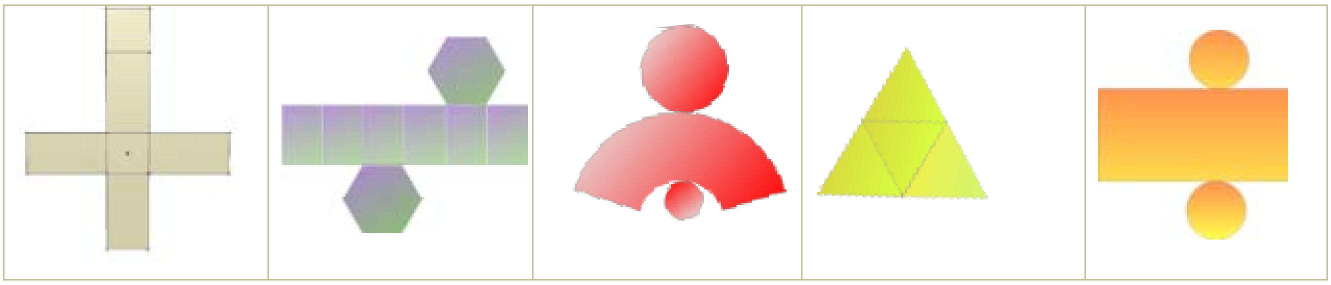
6. Con 12 varillas de 5 cm de largo cada una, usando todas las varillas ¿qué poliedros regulares se pueden construir?

7. De un prisma sabemos que el número de vértices es 16 y que el número de aristas es 24, ¿cuántas caras tiene?

8. Clasifica los siguientes cuerpos geométricos e indica, cuando sean poliedros, el número de vértices, caras y aristas que tienen. ¿Cuáles cumplen el teorema de Euler?

9. Describe la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo. ¿Es suficiente que un paralelepípedo tenga dos caras paralelas rectangulares para que sea un ortoedro?

10. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:



11. Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

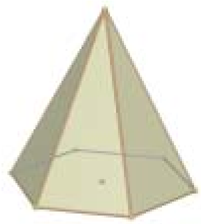
12. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 4 cm de arista basal y 1 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.

13. Un prisma pentagonal regular de 12 cm de altura tiene una base de 30 cm^2 de área. Calcula su volumen.

14. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 3,5 dm, 8,2 dm y 75 cm.

15. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 8 m de altura y 5cm de radio de la base.

16. Calcula el área total de una esfera de 5 cm de radio.



17. Calcula el apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 120 m^2 y su base es un hexágono de 5 m de lado.

18. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 32 dm y la altura de la pirámide es de 4 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

19. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm gira alrededor de uno de sus catetos generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

20. Tres bolas de metal de radios 12 dm, 0,3 m y 4 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

21. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,20 m de diámetro y 20 metros de profundidad?

22. ¿Cuánto cartón necesitaremos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 10 cm y que su altura sea de 25 cm?

23. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm^3 de volumen.

24. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,20 m de alto y 248 dm^3 de volumen?

25. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 12 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

26. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene 2 cm de arista.

27. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 8 dm de altura, resultó un rectángulo de 1 metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

28. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 1 m de lado de la base y 2 m de altura.

29. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

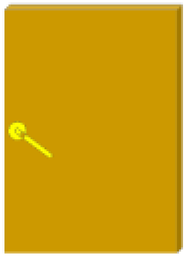
30. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 3, 5 y 7. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 14,5 m.

31. Un ortoedro tiene 1 dm de altura y 6 dm^2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

32. Si el volumen de un cilindro de 10 cm de altura es de 314 cm^3, calcula el radio de la base del cilindro. (Utiliza 3,14 como valor de π).

33. (**CDI Madrid 2011**) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m^3. (Tomar π=3,14). b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

34. (**CDI Madrid 2012**) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.



35. Una circunferencia de longitud 2,24 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen. (Tomar π=3,14).

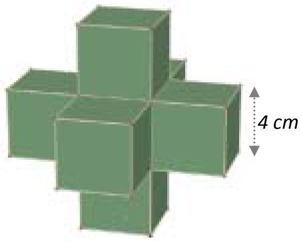
36. Una puerta mide 2 m de alto, 80 cm de ancho y 4 cm de espesor. El precio de instalación es de 200 € y se cobra 6 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 300 € cada m^3. A) Calcula el volumen de madera de una puerta. B) El coste de la madera de una puerta más su instalación. C) El coste del barnizado de cada puerta, si sólo se cobra el barnizado de las dos caras principales.

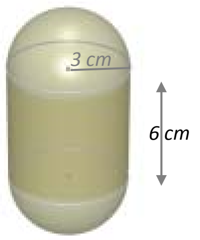
37. El agua contenida en un recipiente cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

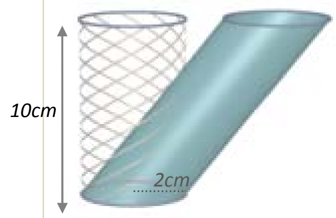
38. Según Arquímedes ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 5 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

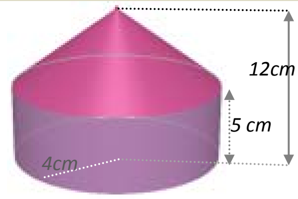
39. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que una circunferencia máxima mide 31,40 m?

40. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

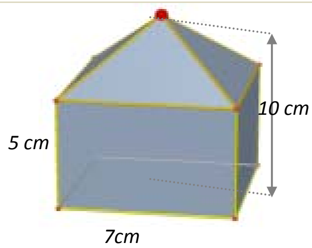




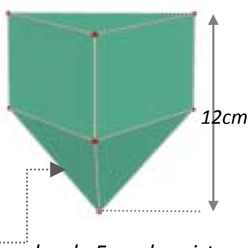




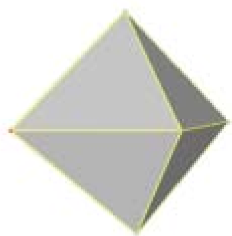
41. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



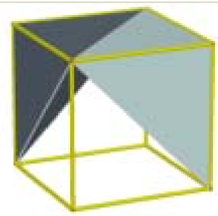
La base es cuadrada



Tetraedro de 5cm de arista



Octaedro de 6cm de arista



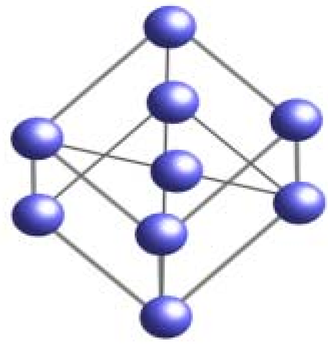
Pirámides construidas en el interior de una estructura cúbica de 5 dm de arista.

42. En la construcción de un globo aerostático de radio de 2,5 m se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m^2. Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

43. Calcula el radio de una esfera que tiene 33,51 dm^3 de volumen.

44. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m de diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?

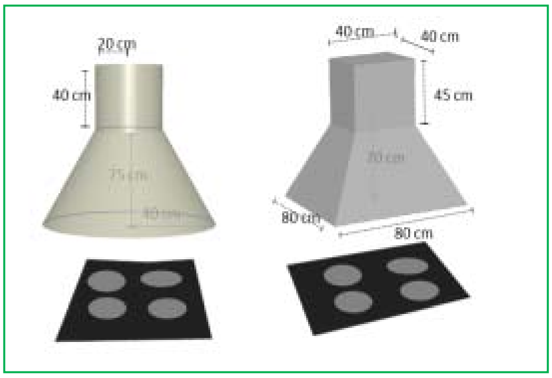


45. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

46. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.

a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m^2?

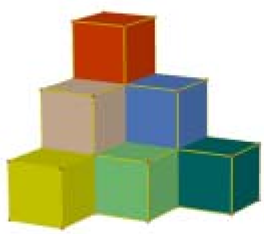


47. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

48. En una vasija cilíndrica de 8 dm de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,3 metros el nivel del agua?

49. El precio de las tejas es de 14,30 €/m^2 ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 4 metros de altura y 8 metros de lado de la base?

50. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 30 cm y 25 cm de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?



51. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volumen?

52. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1,5 cm y la altura total es de 15 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

53. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 50 cm de altura y bases de radios 20 y 30 cm. Calcula su superficie.

54. Un bote cilíndrico de 10 cm de radio y 40 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3,5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

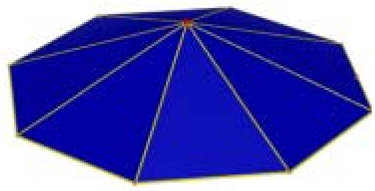
55. Construimos un cono con cartulina recortando un sector circular de 120° y radio 20 cm. Calcula el volumen del cono resultante.

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

56. Un embudo cónico de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad, ¿cuál será su altura?

57. En un depósito con forma de cilindro de 25 cm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de un cuarto de hora?

58. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 1 m de altura y 45 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1,80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué espacio de sombra determina?



59. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 56 litros de agua. Si tiene 48 cm de largo y 36 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?

60. Un rectángulo de 1 m de base y 10 m de altura gira 360º alrededor de una recta paralela a la altura, que está situada a 2 m de distancia. Calcula la superficie y el volumen del cuerpo que resulta.

61. En un helado de cucurucho la galleta tiene 15 cm de altura y 5 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos gramos de helado contiene?

Husos horarios

62. ¿Qué diferencia de longitud existe entre dos ciudades si la diferencia horaria entre ambas es de 5 horas? ¿Podemos saber si existe diferencia entre sus latitudes?

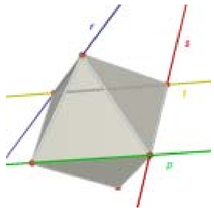
63. Un avión emprende viaje hacia una ciudad situada al oeste de Madrid. El viaje dura 10 horas y su rumbo mantiene en todo momento la latitud de partida. Si la diferencia de longitud entre Madrid y la ciudad de llegada es de 45º y el avión despega del aeropuerto Adolfo Suárez a las 9 de la mañana. ¿A qué hora local aterrizará en la ciudad de destino?

64. La distancia entre Londres y Pekín es de 8149 Km y la distancia entre Londres y Sao Paulo es de 9508 Km, sin embargo en Pekín el reloj marca 7 horas más que en Londres y en Sao Paulo 3 horas menos que en Londres. ¿Cómo explicas esta diferencia?

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
LONDRES	0^{o}	51^{o} 30´latitud N
PEKIN	116^{o} longitud E	40^{o} latitud N
SAO PAULO	46^{o} 30´de longitud W	23^{o} 30´de latitud S

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOEVALUACIÓN

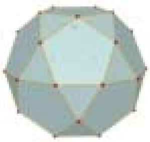
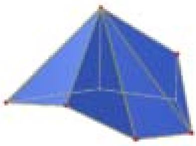


1. Cada una de las rectas *r, s, t* y *p* pasa por dos vértices consecutivos de un octaedro tal como se observa en la figura. Señala qué afirmación de las siguientes es verdadera:

a) Las rectas *r* y *s* son coplanarias y secantes. **b)** Las rectas *t* y *p* no son coplanarias.

c) Las rectas *r* y *p* se cruzan. **d)** *r* y *s* contienen aristas de una misma cara del octaedro

2. Observa los siguientes cuerpos geométricos y selecciona la opción verdadera:

I)	II)	III)	IV)	V)	VI)
					

a) Los cuerpos I), II), IV) y V) cumplen la relación de Euler. **b)** . Hay dos cuerpos de revolución III) y VI).

c) Son poliedros regulares II) y IV). **d)** Son cóncavos I) y V).

3. Si la altura de un prisma de base cuadrada es 10 cm y el lado de la base es 4 cm, su área total es:

a) 160 cm^2 **b)** 320 cm^2 **c)** 400 cm^2 **d)** 192 cm^2

4. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. Si sólo contiene las tres cuartas partes de su capacidad, el número aproximado de litros de agua que hay en él es:

a) 13000 L **b)** 9750 L **c)** 3750 L **d)** 3520 L

5. El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura y 80 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, en total se utilizarán:

a) 38 tejas **b)** 76 tejas **c)** 72 tejas **d)** 36 tejas

6. Una caja de dimensiones $30 \times 20 \times 15 \quad cm$, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 cm **b)** 65 cm **c)** 75 cm **d)** 90 cm

7. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ dm **b)** $\sqrt[3]{75}$ dm **c)** 150 cm **d)** $\sqrt[3]{2250}$ cm

8. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 **b)** 10 **c)** 42 **d)** 45

9. El área lateral de un tronco de cono que tiene 20 cm de altura y bases de radios 30 y 15 cm, es:

a) 2250 π cm^2 **b)** 900 π cm^2 **c)** 1125 π cm^2 **d)** 450 π cm^2

10. A partir de las coordenadas geográficas de las ciudades A, B , C deduce qué afirmación es correcta

CIUDAD	LONGITUD	LATITUD
A	15° E	15° N
B	15° W	15° N
C	15° E	15° S

a) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas menos.

b) Las ciudades A y B tienen la misma hora y la ciudad C dos horas más.

c) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas más.

d) Las ciudades A y C tienen la misma hora y la ciudad B dos horas menos.

Autores: Milagros Latasa, Fernanda Ramos y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Formación Profesional Básica

Matemáticas II

Capítulo 7: Estadística

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de Marea Verde. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de Marea Verde **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 11: **Estadística y probabilidad** de **3ª ESO A** de autor: **Fernando Blasco** y revisor: David Hierro

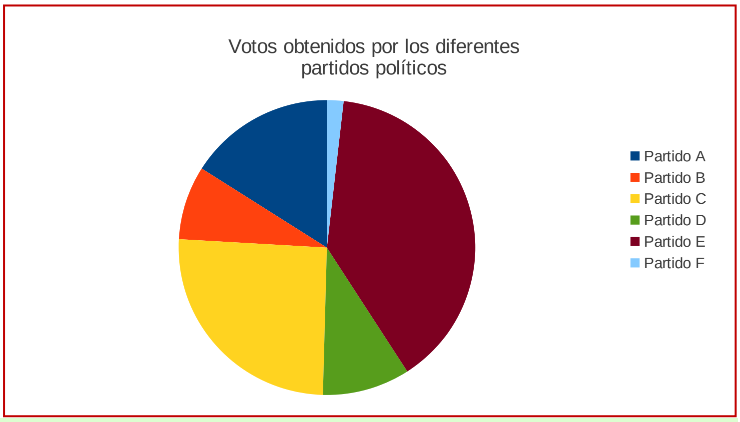
Capítulo 6: **Estadística** de Bachillerato: Matemáticas aplicadas a las **CCSS I** de autor: **Ignasi Clausell** y revisora: Raquel Caro

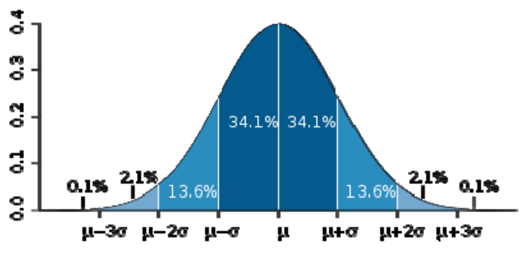
ÍNDICE

Resumen

La Estadística es una Ciencia que surgió para llevar la contabilidad del Estado. De ahí viene su nombre. En el siglo XX se desarrollaron sus técnicas y se separó de las Matemáticas, pasando a ser una ciencia con entidad propia.

En los medios de comunicación encontramos frecuentes estadísticas. En medicina se necesitan métodos estadísticos para probar nuevos medicamentos. En todo experimento científico, tras la recogida de datos, se necesita utilizar pruebas estadísticas que permitan sacar información de esos datos.





Media y desviación típica. Imagen de wikipedia

Vamos a estudiar conceptos de estadística unidimensional, como las tablas de frecuencias y los gráficos estadísticos, calcular las medidas de centralización, media, mediana y moda y las medidas de dispersión, varianza y desviación típica.

Aunque el nombre de Estadística proviene del s. XIX, sin embargo ya se utilizaban representaciones gráficas y otras medidas en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para controlar el número de personas, animales o ciertas mercancías desde la Prehistoria. Los babilonios usaban ya envases de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides. Los antiguos griegos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia 600 a C.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. LA TOMA DE DATOS

1.1. Un ejemplo para realizar un análisis

Ejemplo:

La Casa de la Moneda quiere estudiar cuántas monedas debe emitir, teniendo en cuenta las que están en circulación y las que se quedan atesoradas (bien en casas particulares, o en máquinas de refrescos, o depositadas en un banco). Se ha hecho una encuesta a pie de calle a 60 personas y se ha apuntado cuántas monedas llevaba cada una de ellas en el bolsillo. Hemos obtenido estos datos:

12	7	11	8	8	9	6	12	7	7	13	0	10	9	13	18	7	6	11	12	16	0	10	10	8	8	9	11	10	8
16	8	5	2	12	8	14	14	16	6	2	0	18	10	10	12	14	6	7	3	12	11	10	18	9	7	12	1	15	8

El primer paso consiste en hacer un esquema para el recuento: usaremos una tabla y marcaremos palotes cada vez que aparezca ese número.

0	///
1	/
2	//
3	/
4	
5	/
6	////

7	///// /
8	///// ///
9	////
10	///// //
11	////
12	///// //
13	//

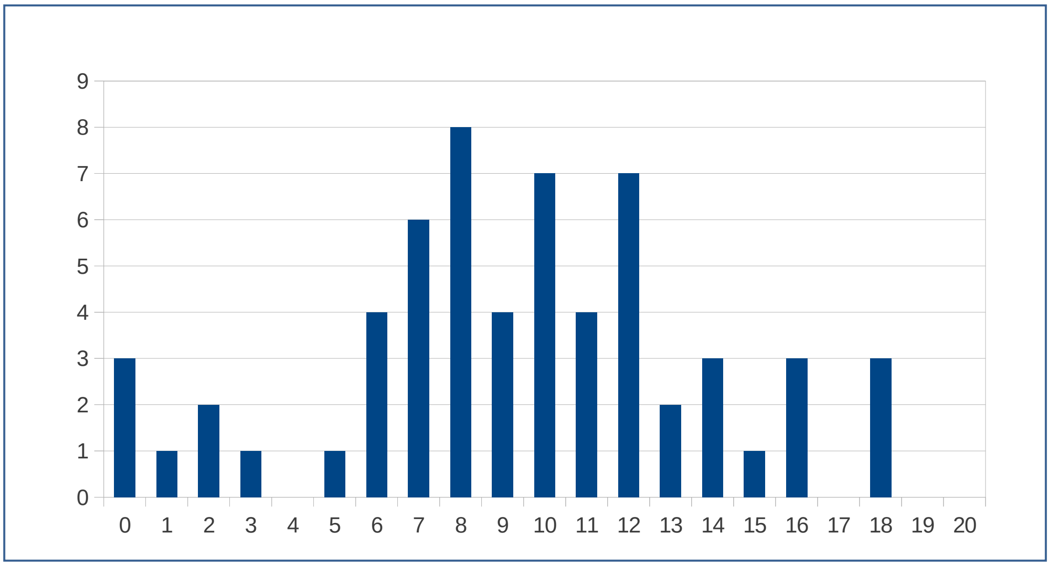
14	///
15	/
16	///
17	
18	///
19	
20	

Pasar de ese recuento a una tabla de **frecuencias absolutas** es muy sencillo: solo hay que sustituir los palotes por el número que representan.

0	3		**7**	6		**14**	3

1	1		**8**	8		**15**	1
2	2		**9**	4		**16**	3
3	1		**10**	7		**17**	0
4	0		**11**	4		**18**	3
5	1		**12**	7		**19**	0
6	4		**13**	2		**20**	0

Es mucho mejor analizar los datos de modo visual. Estamos más acostumbrados a trabajar de esa manera. Podemos representar los datos de la tabla de frecuencias en un **diagrama de barras**, donde la altura de cada barra representa la frecuencia de aparición.



El procesamiento de datos estadísticos se utiliza mucho. Obviamente no se hacen las operaciones a mano, sino que se utilizan calculadoras u hojas de cálculo. Disponer de esos medios tecnológicos será un buen complemento para el capítulo, aunque recordamos que lo más importante es comprender qué se hace en cada momento.

Comenzaremos introduciendo algo de **nomenclatura**. Casi todos estos nombres los has escuchado puesto que los medios de comunicación los utilizan muchísimo

Población es el colectivo sobre el que se quiere hacer el estudio.

Muestra es un subconjunto de la población de modo que a partir de su estudio se pueden obtener características de la población completa.

Individuo es cada uno de los elementos de la población o la muestra.

Ejemplo:

Se quiere hacer un estudio sobre hábitos alimenticios de los estudiantes de 3º de ESO de todo Madrid. Pero como es muy costoso entrevistar a todos los estudiantes se decide tomar un IES por cada distrito y entrevistar a los alumnos de 3º de ESO de esos colegios elegidos.

La **población** objeto del estudio serán todos los estudiantes madrileños matriculados en 3º de ESO.

La **muestra** son los estudiantes de 3º de ESO matriculados en los institutos elegidos.

Cada uno de los estudiantes de 3º de ESO es un **individuo** para este estudio estadístico.

Actividades propuestas

1. Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elige 10 compañeros al azar y anota en tu cuaderno cuántas monedas lleva cada uno.

a) ¿Cuál es la población objeto del estudio?

b) ¿Cuál es la muestra elegida?

c) Especifica 5 individuos que pertenezcan a la población y no a la muestra.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda

1.2. Variables estadísticas

Ejemplo:

En un estudio estadístico se puede preguntar cosas tan variopintas como

- ¿Qué frutas comes a lo largo de una semana?
- ¿Cuántas piezas de fruta comes al día?
- ¿Cuántas monedas llevas en el bolsillo?
- ¿Cuál es tu altura?
- ¿Cuántas marcas de chocolate recuerdas?
- ¿Cuáles son las marcas de chocolate que recuerdas?
- ¿Cuántos hermanos tienes?
- ¿Cuál es tu color favorito para un coche?
- ¿Cuánto tiempo pasas al día viendo la televisión?
- ¿Cuántos seguidores tienes en twitter?

Esas preguntas pueden corresponder a estudios de salud, económicos, publicitarios o socioeconómicos. Algunas se responden con un número y otras se responden con un nombre o un adjetivo. Incluso hay diferencias entre las que se responden con números: el número de monedas que llevas o el número de seguidores de *twitter* se contestan con números enteros, mientras que para hallar tu altura o las horas que pasas delante del televisor necesitamos utilizar números reales (normalmente con representación decimal).

Una variable se dice **cuantitativa** si sus valores se expresan con números.

Las variables cuantitativas pueden ser

- **discretas** si solo admiten valores aislados
- **continuas** si entre dos valores pueden darse también todos los intermedios

Una variable estadística es **cualitativa** cuando sus valores no se expresan mediante un número, sino con una cualidad.

Actividades propuestas

2. Clasifica en variables cualitativas y cuantitativas las que aparecen en el primer ejemplo de esta sección. Para las cuantitativas indica si son continuas o discretas.

1.3. Las fases de un estudio estadístico

En un estudio estadístico hay 6 fases fundamentales:

1. Determinación del objeto del estudio. Esto es, saber qué queremos estudiar.
2. Selección de las variables que se van a estudiar.
3. Recogida de los datos.
4. Organización de los datos.
5. Representación y tratamiento de los datos.
6. Interpretación y análisis.

2. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

2.1. Método estadístico

La **Estadística** es la Ciencia que se encarga de la recopilación, representación y el uso de los datos sobre una o varias características de interés para, a partir de ellos, tomar decisiones o extraer conclusiones generales.

Ejemplo 1:

- *El gobierno desea averiguar si el número de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello ha entrevistado a 50 familias y les ha preguntado por el número de hijos obteniendo los siguientes datos:*

2 2 2 4 1 2 4 2 3 0   2 2 2 3 2 6 2 3 2 2   3 2 3 3 4 3 3 4 5 2   1 3 2 0 3 2 1 2 3 2   2 3 1 4 2 3 2 4 3 3.

Ejemplo 2:

Un nuevo hotel va a abrir sus puertas en nuestra ciudad. Antes de decidir el precio de sus habitaciones, el gerente investiga los precios por habitación de los 40 hoteles de la misma categoría que hay cerca de nuestra ciudad. Los datos obtenidos son:

53 39 43 50 60 47 51 50 44 57 33 39 43 50 60 47 51 42 44 58 33 43 41 58 44 38 61 43 53 45 40 54 39 47 33 45 47 42 45 48.

La Estadística descriptiva es la parte de la estadística que se encarga de organizar, resumir y dar una primera descripción (sin conclusiones generales) de los datos.

En Estadística se sigue un **método estadístico** que está formado por distintas fases según se trata la información recibida.

0. Planteamiento del problema en términos precisos: ámbito de aplicación (población) y características a estudio (variables).
1. Recogida de datos de la población de interés: *Muestreo*.
2. Organización, presentación y resumen de los datos (o de la muestra): *Estadística descriptiva*.
3. Modelos matemáticos: *Teoría probabilidad*.
4. Obtener conclusiones generales o verificar hipótesis.

Población. Es el conjunto de individuos o entes sujetos a estudio.

Ejemplo 1:

Conjunto de todas las familias españolas.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo 2:

- Todos los hoteles de esta categoría de las cercanías.

Algunas poblaciones son finitas y pueden conocerse en su totalidad, otras en cambio pueden ser infinitas y abstractas.

Muestra: Es el número de datos que tomamos de la población para realizar nuestro estudio.

Ejemplo 1:

- Las 50 familias a las que se ha preguntado por el número de hijos.

Ejemplo 2:

- Los 40 hoteles.

Tamaño muestral: Número de observaciones en la muestra.

Habitualmente se denotará por n.

Ejemplo 1:

- $n = 50$.

Ejemplo 2:

- $n = 40$.

Dato: Cada valor observado de la variable.

Ejemplo 1:

- 2 2 2 4 1 2 4 2 3 0   2 2 2 3 2 6 2 3 2 2   3 2 3 3 4 3 3 4 5 2   1 3 2 0 3 2 1 2 3 2   2 3 1 4 2 3 2 4 3 3.

Ejemplo 2:

- 53 39 43 50 60 47 51 50 44 57 33 39 43 50 60 47 51 42 44 58 33 43 41 58 44 38 61 43 53 45 40 54 39 47 33 45 47 42 45 48.

Variable: Característica que estamos midiendo.

Ejemplo 1:

Número de hijos.

Ejemplo 2:

- Precio de la habitación.

Las variables suelen denotarse por las letras mayúsculas X, Y …..

2.2. Tipos de variables

Cualitativas o categóricas: Aquellas que no son medibles, es decir aquellas cuyas observaciones no tienen carácter numérico. Expresan cualidades o categorías.

Ejemplos:

- Sexo, profesión, estado civil…

Cuantitativas: Aquellas que son medibles, es decir, sus observaciones tienen carácter numérico. Estas se dividen en:

Discretas: Toman valores numéricos fijos.

Ejemplos:

- Número de habitaciones, número de hijos de una familia, número de trabajadores de una fábrica…

Continuas: Toman valores en intervalos de números

Ejemplos:

- Peso, estatura,… cuando se organizan los datos en intervalos.

2.3. Distribuciones de frecuencias

Observando los datos de los ejemplos es fácil adivinar cuál será el primer paso. Consistirá en agrupar los datos que se repiten varias veces.

Tenemos las siguientes definiciones:

Frecuencia absoluta (n_i): Es el número de veces que se repite en la muestra un determinado valor (x_i) de la variable.

Ejemplo:

En el ejemplo 1 de número de hijos, para el dato $x_1 = 0$, $n_1 = 2$; para el dato $x_4 = 3$, $n_4 = 15$.

Propiedad:

La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al tamaño muestral.

$$\sum n_i = n$$

Frecuencias relativas (f_i): Es igual a la frecuencia absoluta dividida por el número total de datos, es decir por el tamaño muestral.

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Ejemplo:

$f_1 = \frac{2}{50} = 0'04$ $\qquad$ $f_4 = \frac{15}{50} = 0'3$

Propiedad:

La suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1.

Frecuencias acumuladas (N_i): Nos dice el número de datos que hay igual o inferiores a uno determinado.

Se calcula sumando el número de frecuencias absolutas que hay anteriores a llegar a la que queremos calcular.

Ejemplo:

$N_1 = 2$ $N_4 = 42$.

Propiedad:

La última frecuencia acumulada es igual al tamaño muestral, al número total de datos.

Frecuencia relativa acumulada (F_i): Es el resultado de dividir cada frecuencia acumulada por el número total de datos.

$$F_i = \frac{N_i}{n}$$

Ejemplo:

$F_1 = 0'04$ $F_4 = \frac{42}{50} = 0'84$

Propiedad:

La última frecuencia relativa acumulada es siempre 1.

Tabla o distribución de frecuencias de una variable

Llamamos así a una tabla conteniendo el conjunto de diferentes valores que ha tomado una variable (los datos sin repetir) ordenados de menor a mayor con sus correspondientes frecuencias.

Actividades resueltas

La tabla de valores del ejemplo 1 del número de hijos

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	2	0’04	2	0’04
1	4	0’08	6	0’12
2	21	0’42	27	0’54
3	15	0’3	42	0’84
4	6	0’12	48	0’96
5	1	0’02	49	0’98
6	1	0’02	50	1

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

¿Cuál es el número de familias que tiene como máximo dos hijos?

Miramos la columna segunda $n_{i:}$ 2 + 4 + 21 = 27 o miramos la columna cuarta, tercera fila: $N_{i:}$ nos da 27

¿Cuántas familias tienen más de un hijo pero como máximo 3?

Miramos la columna segunda: 21 + 15 = 36 o miramos la columna cuarta y restamos las filas cuarta menos segunda 42 – 6 = 36.

¿Qué porcentaje de familias tiene más de 3 hijos?

Miramos en la columna tercera: 0'12 + 0'02 + 0'02 = 0'16 $\rightarrow$ 16 % o en la columnas quinta restando a la última fila la cuarta fila, es decir, 1 – 0'84 = 0'16 $\rightarrow$ 16 %.

Distribuciones de frecuencias agrupadas

Ahora vamos a trabajar con una distribución de frecuencias agrupadas con el ejemplo del precio de una habitación de hotel.

Ejemplo 2:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
36	0	0	0	0
37	0	0	0	0
38	1	0,025	1	0,025
39	3	0,075	4	0,1
40	1	0,025	5	0,125
41	1	0,025	6	0,15
42	2	0,05	8	0,2
43	4	0,1	12	0,3
44	3	0,075	15	0,375
45	3	0,075	18	0,45
47	0	0	18	0,45
48	4	0,1	22	0,55
49	1	0,025	23	0,575
50	0	0	23	0,575
51	3	0,075	26	0,65
53	2	0,05	28	0,7
54	0	0	28	0,7
56	2	0,05	30	0,75
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…

Esta tabla es demasiado grande y muy poco operativa.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cuando la variable toma muchos valores, la tabla que se obtiene es demasiado grande y por tanto poco práctica. Esto nos va a ocurrir frecuentemente en el caso en que la variable a estudiar sea continua. La solución a este problema está en agrupar los diferentes valores de la variable en intervalos o **intervalos de clase**. Teniendo en cuenta que lo que ganamos en manejabilidad lo perdemos en información, es decir, los resultados serán aproximados.

Obtener intervalos de clase consiste en agrupar los datos en números relativamente pequeño de intervalos que cumplan:

- No se superpongan entre sí, de forma que no exista ambigüedad con respecto a la clase a que pertenece una observación particular.
- Cubran todo el rango de valores que tenemos en la muestra.

Llamamos:

- ✓ A las fronteras del intervalo, *límites inferior y superior* de clase y los denotaremos por l_i, L_i respectivamente.
- ✓ *Marca de clase* (c_i) al punto medio del intervalo, es decir, al promedio aritmético entre el límite inferior y el superior: $c_i = \frac{L_i + l_i}{2}$. Es el valor que tomaremos como representativo del intervalo o clase.
- ✓ *Amplitud* (a_i) es la diferencia entre el extremo superior e inferior: $a_i = L_i - l_i$.
- ✓ Al número de observaciones de una clase se le llama *frecuencia de clase* (n_i). Si dividimos esta frecuencia por el número total de observaciones, se obtiene la *frecuencia relativa de clase* (f_i), y del mismo modo que lo hacíamos para datos sin agrupar definimos (N_i) y (F_i).

Cómo construir una distribución de frecuencias agrupada en intervalos

1. Empezamos determinando el recorrido de la variable (Re) o *rango* de valores que tenemos en la muestra. Se define como la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable.
2. *Número de clases*. Depende del tamaño de la muestra. Para muestras de tamaño moderado n menor que 50, se suele elegir un número de clases o intervalos igual a $\sqrt{n}$. Para muestras mayores se utiliza la fórmula de *Sturges* $\frac{log(n)}{log(2)} + 1$, en general el número de intervalos no debe sobrepasar de 15 o 20, en casos de muestras muy grandes.
3. Determinamos la *amplitud de los intervalos*. Es más cómodo que la amplitud de todas las clases sea la misma (siempre que sea posible y excepto el primero y el último), si es así $a_i = a =$ Re/nº intervalos.
4. Tomaremos como regla general, a no ser que se indique lo contrario, hacer que el intervalo esté cerrado por la izquierda y abierto por la derecha (excepto el último intervalo).

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

Representa la distribución de frecuencias agrupadas para los datos del ejemplo del precio de las habitaciones de un hotel.

Recorrido: El menor valor es 33 y el mayor es 61, la diferencia es 28 y por tanto el recorrido es: Re = 28.

Número de clases: N = 40, hacemos que la tabla tenga 6 clases, pues $\sqrt{40} \approx 6$.

Amplitud: a = 28/6 = 4'67

Como la amplitud nos sale un número con decimales los intervalos nos van a quedar raros por tanto hacemos el arreglo siguiente:

Para que los intervalos nos queden con amplitud 5 tomamos como primer valor el 32'5 en lugar del 33 y como último el 62'5 en lugar del 61.

Amplitud: a = 5.

Así pues la tabla queda:

$[l_i, L_i[$	c_i	n_i	f_i	N_i	F_i
[32'5, 37'5[	35	3	0'075	3	0'075
[37'5, 42'5[	40	8	0'2	11	0'275
[42'5, 47'5[	45	14	0'35	25	0'625
[47'5, 52'5[	50	6	0'15	31	0'775
[52'5, 57'5[	55	4	0'1	35	0'875
[57'5, 62'5]	60	5	0'125	40	1

¿Cuántos hoteles tienen un precio entre 32'5 y 37'5 euros?

3

¿Cuántos hoteles tienen un precio superior a 47'5 €?

6 + 4 + 5 = 15

¿Qué porcentaje de hoteles cuestan como mucho 42'5 €?

27'5 %.

Actividades propuestas

3. Completa los datos que faltan en la tabla.

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0'05	2	0'05
13	4	0'1	6	0'15
16			16	0'4
19	15			
22	6	0'15	37	0'925
25				

4. Completa los datos que faltan en la tabla.

$[l_i, L_i[$	n_i	f_i	N_i
[0, 10[	60		60
[10, 20[		0'4	
[20, 30[	30		170
[30, 40[		0'1	
[40, 50]			200

1.4. Gráficos

La forma de la distribución de frecuencias se percibe más rápidamente y quizás se retiene durante más tiempo en la memoria si la representamos gráficamente.

Diagrama de barras

Es la representación gráfica usual para las variables cuantitativas sin agrupar o para variables cualitativas. En el eje de abscisas representamos los diferentes valores de la variable x_i. Sobre cada valor levantamos una barra de altura igual a la frecuencia (absoluta o relativa).

Diagrama de sectores o pastel

Es el más usual en variables cualitativas. Se representan mediante círculos. A cada valor de la variable se le asocia el sector circular proporcional a su frecuencia.

Para hallar el ángulo usamos una regla de tres:

n ______________ 360º   o   1 ______________ 360º

$\boldsymbol{n_i}$ ______________ *ángulo*$_i$ $\boldsymbol{f_i}$ ______________ *ángulo*$_i$

Ejemplo 3:

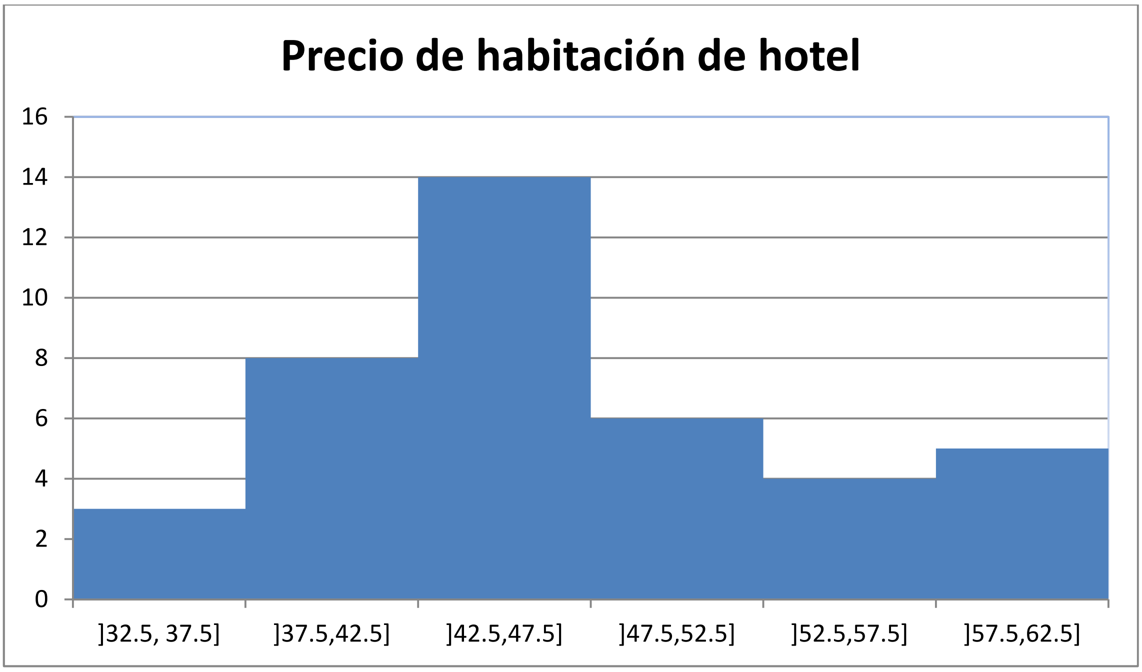
En unas votaciones de una comunidad de vecinos para decidir si cambia la antena de televisión de la comunidad, de 50 vecinos 25 votan a favor, 15 en contra y 10 se abstienen. Representa los datos mediante un diagrama de sectores.

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{f_i}$
A favor	0’5
En contra	0’3
Abstención	0’2

Histogramas

Es la representación gráfica equivalente al diagrama de barras para datos agrupados. En el eje de ordenadas representamos las clases y levantamos sobre cada clase rectángulos unidos entre sí de altura igual a la frecuencia de la clase (absolutas o relativas) si todas las clases tienen la misma amplitud y $\frac{n_i}{a_i}$ o $\frac{f_i}{a_i}$ si tienen distintas amplitudes.

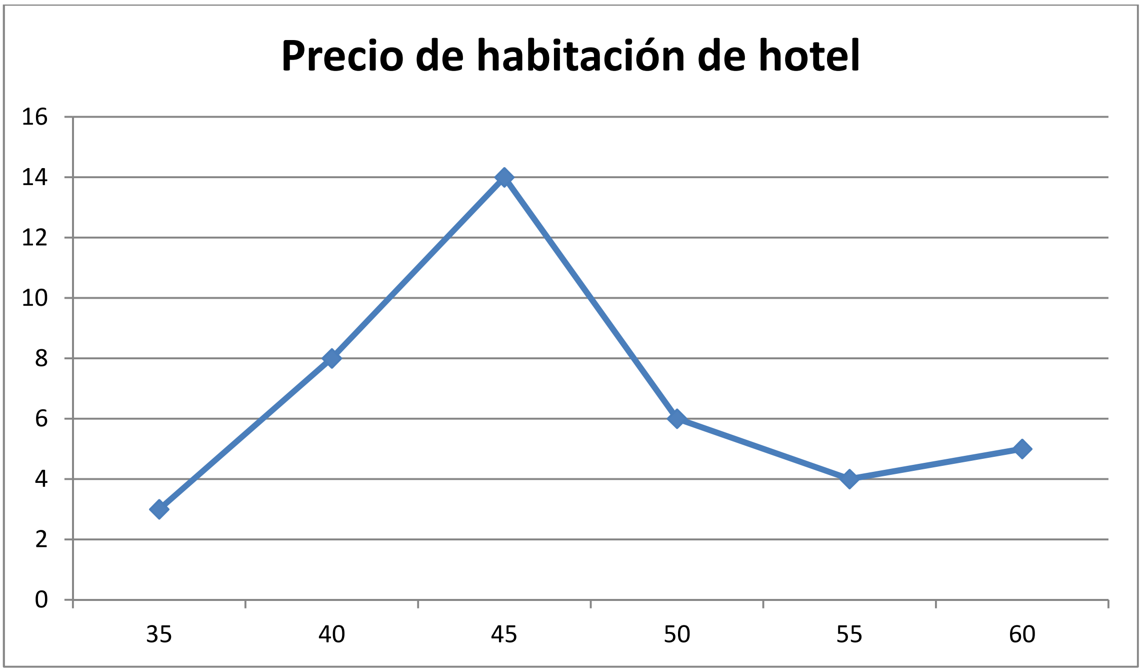
En cualquier caso, observa que, en un histograma el área de los rectángulos es proporcional a la frecuencia representada.



El histograma o diagrama de barras proporcionan mucha información respecto a la estructura de los datos (y si la muestra es representativa de la población, respecto a la estructura de la población): el valor central de la distribución, su dispersión y la forma de la distribución.

Polígono de frecuencias

Es la representación habitual para datos cuantitativos agrupados de las frecuencias (absolutas o relativas, acumuladas absolutas o relativas), mediante puntos se representan las frecuencias en el eje de ordenadas y la marca de clase en el de abscisas. Después se unen estos puntos por segmentos de rectas.



1.5. Parámetros estadísticos

Para datos cualitativos, la distribución de frecuencias proporciona un resumen conciso y completo de la muestra, pero para variables cuantitativas puede complementarse este resumen utilizando medidas descriptivas numéricas extraídas de los datos. Estas medidas son valores numéricos calculados a partir de la muestra y que nos resumen la información contenida en ella.

Parámetros estadísticos de posición

Media aritmética

Es el promedio aritmético de las observaciones, es decir, el cociente entre la suma de todos los datos y el número de ellos. (Teniendo en cuenta que si un valor se repite hay que considerar estas repeticiones).

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

Si los datos están agrupados en intervalos utilizaremos las marcas de clase, c_i, en vez de x_i.

Es la medida de centralización más importante.

Ejemplo 1.

Número medio de hijos.

$$\overline{x} = \frac{0\cdot 2+1\cdot 4+2\cdot 21+3\cdot 15+4\cdot 6+5\cdot 1+6\cdot 1}{50} = \frac{126}{50} = 2'52 \quad \text{hijos.}$$

Utilizando los datos de las frecuencias relativas.

$$\overline{x} = 0\cdot 0'04+1\cdot 0'08+2\cdot 0'42+3\cdot 0'043+4\cdot 0'12+5\cdot 0'02+6\cdot 0'02 = 2'52 \quad \text{hijos.}$$

Ejemplo 2.

Precio medio.

Como tenemos los datos agrupados en intervalos utilizamos las marcas de clase:

$$\overline{x} = \frac{35\cdot 3+40\cdot 8+45\cdot 14+50\cdot 6+55\cdot 4+60\cdot 5}{40} = \frac{1875}{40} = 46'875 \quad €$$

O equivalentemente:

$$\overline{x} = 35\cdot 0'075+40\cdot 0'2+45\cdot 0'35+50\cdot 0'15+55\cdot 0'1+60\cdot 0'125 = 46'875 \quad €.$$

Propiedades.

1. Si a todos los valores de una variable les sumamos una constante, la media aritmética queda aumentada en esa constante.
2. Si a todos los valores de una variable los multiplicamos por una constante, la media aritmética queda multiplicada por la misma constante.
3. Si consideramos $y_i = a + bx_i$ siendo a y b dos constantes cualesquiera, la nueva media aritmética quedaría $\overline{y} = a + b\overline{x}$
4. La suma de todos los valores de la variable restándoles la media es cero.

Mediana

Es aquel valor que, al ordenar las observaciones de menor a mayor, ocupa el lugar central, dividiendo al conjunto de observaciones en dos partes iguales. Es decir, que deja a su derecha y a su izquierda el 50 por ciento de las observaciones.

Si el tamaño de la muestra, $\boldsymbol{n}$, es impar, necesariamente existe un dato que ocupa el lugar central, concretamente el dato que al ordenarlos está en la posición $(n+1)/2$; pero si n es par, son dos los datos que encontramos en el lugar central, los que ocupan los lugares $n/2$ y $(n/2)+1$, calculando entonces la mediana como el punto medio entre ambos datos.

Ejemplo:

Si tenemos los datos de 30 valores sobre el peso de los estudiantes de una clase ordenados de menor a mayor.

26’14 28’60 45’41 48’95 52’35 52’44 56’00 56’74 57’29 57’79 58’34 59’44 65’10
65’85 68’26 68’34 68’47 69’24 71’48 74’82 78’37 81’43 81’72 81’84 83’62 86’62
87’82 91’93 92’78 96’97

Como n = 30 es par, la mediana será el valor medio de los valores que ocupan las posiciones 15 y 16 en la tabla: 68’26 68’34

Mediana = Me = (68’26 + 68’34)/2 = 68’3 kg.

Ejemplo:

Las 13 primeras observaciones correspondientes al número de chocolatinas consumidas en un día por los estudiantes de una clase son:

0 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3.

El dato que ocupa el valor central, es el que ocupa el lugar séptimo ya que hay 13 valores, ese dato es la mediana, por tanto la mediana es 2.

Me = 2.

Moda

Es aquel valor que tiene mayor frecuencia.

En el caso de las frecuencias agrupadas en intervalos se toma el intervalo que más veces se repite como la moda

Ejemplo:

Para la variable consumo de chocolatinas del ejemplo anterior la moda es Mo = 2

Ejemplo:

Para los datos del ejemplo 2 es el intervalo [42’5, 47’5).

Percentiles

El percentil p-ésimo es aquel valor que verifica la condición de que el p % de los datos son menores o iguales a él.

Así, el percentil 70 supone que el 70 % de los datos son menores o iguales a él.

Ejemplo:

Queremos calcular el percentil 30 de los datos del ejemplo sobre el peso de estudiantes, tendremos en cuenta que el 30 % de 30 datos que hay es 9, así buscamos el dato que ocupa esa posición en la ordenación del ejemplo 5, que es 57’29.

Si queremos calcular el percentil 15, tenemos en cuenta que el 15 % de 30 es 4’5, pero como este dato no pertenece a ninguna posición tomamos la aproximación por exceso, o sea tomamos el dato que ocupa la posición 5 por tanto el percentil 15 seria el dato 52’35. También es posible aproximarlo mejor mediante una interpolación lineal.

Nota:

Los percentiles 25, 50 y 75 reciben el nombre de **primer cuartil**, segundo cuartil y **tercer cuartil**.

Además el segundo cuartil que es el percentil 50 coincide con la **mediana**.

Si los datos están ordenados en intervalos tomamos el intervalo correspondiente al porcentaje del percentil como valor del percentil correspondiente.

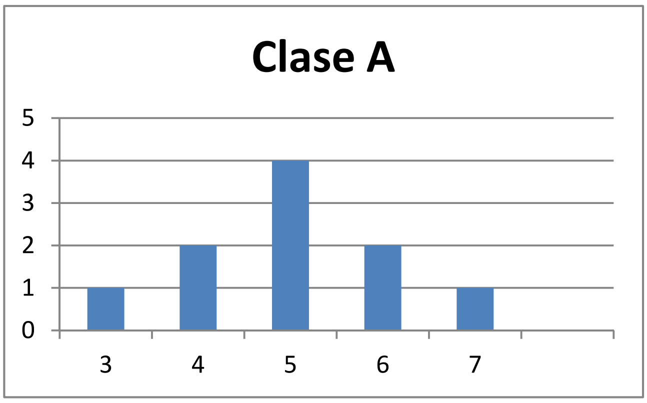
Parámetros estadísticos de dispersión

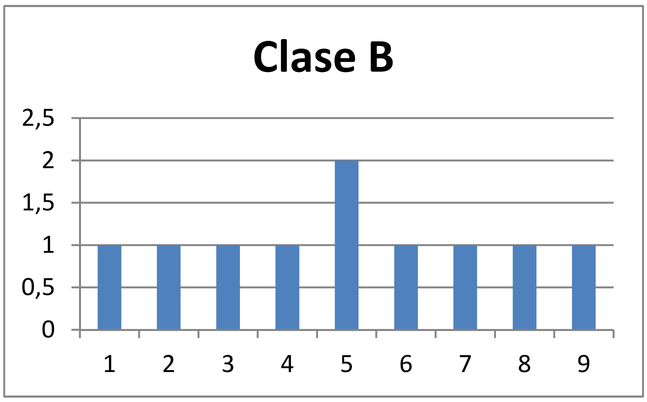
Las medidas de posición estudiadas en el apartado anterior, nos dan una información incompleta, por parcial, acerca de los datos.

Veamos un ejemplo:

Supongamos las notas de matemáticas de los estudiantes pertenecientes a dos clases distintas clase A y clase B, con 10 estudiantes cada una.

Clase A	4, 3, 5, 6, 4, 5, 5, 7, 5, 6
Clase B	1, 4, 3, 5, 6, 8, 2, 7, 5, 9





En los dos casos la media, como podemos calcular es 5, pero sus diagramas de frecuencias son muy distintos.

Los diagramas de frecuencias anteriores nos muestran que los valores se distribuyen simétricamente respecto a la nota 5, pero en la clase A existe una menor dispersión que en la clase B. ¿Cómo medir la distinta manera en que los valores se agrupan alrededor de la media? Las distintas medidas de dispersión proporcionan esta información. Al igual que ocurre para la posición, existen diversas formas para medir la dispersión, de entre ellas estudiaremos: rango, desviación típica, varianza y rango intercuartílico.

Rango

Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.

Así por ejemplo

- El rango de las notas de la clase A vale 7 – 3 = 4 y el rango en la clase B vale 9 – 1 = 8, denotando mayor dispersión de la variable en la clase B.

La varianza y la desviación típica

Puesto que se trata de medir cómo se agrupan los datos alrededor de la media, podríamos utilizar como criterio las desviaciones de dichos datos respectos aquella, es decir, las diferencias entre la media y los datos y más concretamente la media de esas diferencias. Aunque a primera vista la sugerencia pueda ser buena, vamos a aplicarla a los valores de las notas de clase para evidenciar el inconveniente insalvable que una medida de este tipo tiene.

En los cuadros aparecen las notas de cada clase y en columnas sucesivas sus desviaciones respecto a la media y el cuadrado de estas desviaciones, al que aludiremos más tarde.

Al tratar de obtener la media de las diferencias, que recordemos es la suma de todas ellas divididas por su número, nos encontramos que dicha media es 0 en ambos casos, porque existiendo desviaciones positivas y negativas, unas anulan los efectos de las otras.

En realidad eso nos ocurrirá con cualquier otro conjunto de datos, porque puede demostrarse que esa es una propiedad que tienen las desviaciones respecto de la media.

Clase A		
Nota	$x_i - \overline{x}$	d_i^2
4	1	1
3	2	4
5	0	0
6	–1	1
4	1	1
5	0	0
5	0	0
7	–2	4
5	0	0
6	–1	1
Suma	0	12

Clase B		
Nota	$x_i - \overline{x}$	d_i^2
1	4	16
4	1	1
3	2	4
5	0	0
6	–1	1
8	–3	9
2	3	9
7	–2	4
5	0	0
9	–4	16
Suma	0	60

En las tablas aparecen las desviaciones respecto de la media y sus cuadrados para las notas de las dos clases.

Puesto que el uso de las desviaciones respecto de la media parece razonable, ¿cómo resolver el problema de que las sumas den 0? Una sencilla manera de hacerlo es utilizar, no las desviaciones, sino sus cuadrados. Al ser éstos cantidades positivas, su suma nunca podrá ser cero. De acuerdo con esto la varianza se define por la fórmula.

$$Varianza = s^2 = \frac{suma\ del\ cuadrado\ de\ las\ desviaciones}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i)^2 \cdot n_i}{n} - \bar{x}^2$$

La **desviación típica** se define como la raíz cuadrada de la varianza y la designaremos por s.

$$s = \sqrt{Varianza}$$

Ejemplo:

- Para el ejemplo de las notas de las clases.

Clase A $\quad s^2 = \frac{12}{9} = 1'33 \quad s = \sqrt{1'33} = 1'15$

Clase B $\quad s^2 = \frac{60}{9} = 6'66 \quad s = \sqrt{6'66} = 2'58$

Que ponen de manifiesto la diferente distribución de los valores en un caso y en el otro.

Propiedad de la desviación típica

1. Aproximadamente el 68 % de los datos distan como mucho una desviación típica de la media.
2. Aproximadamente el 95 % de los datos distan como mucho dos desviaciones típicas de la media.
3. Aproximadamente más del 99 % de los datos distan como mucho tres desviaciones típicas de la media.

Rango intercuartílico.

Se define como la diferencia entre el tercer y el primer cuartil. El intervalo intercuartílico es el intervalo definido por los cuartiles primero y tercero, cuya longitud es, el rango intercuartílico. Este intervalo así definido contiene el 50 % de los datos.

Coeficiente variación

Si queremos comparar dos secuencias de datos, y decir en cual hay mayor dispersión, sobre todo en el caso en que sean datos expresados en diferentes unidades, con los parámetros definidos, desviación típica, intervalo intercuartílico, lo tenemos complicado, por eso se hace necesario definir el coeficiente de variación como,

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

Ejemplo:

- En el ejemplo de las calificaciones de dos clases nos permite comparar las dos secuencias de datos.

Clase A CV = (1'15/5)·100 = 23 %.

Clase B CV = (2'58/5)·100 = 51'6 %.

Llegando a la misma conclusión que percibíamos en los histogramas ya que la clase B tiene una mayor dispersión de las notas.

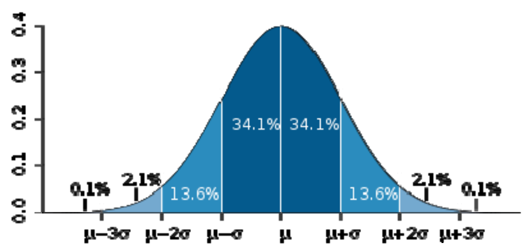
2.6. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica

Hemos visto que la desviación típica nos mide la distancia de los datos respecto de la media. Nos da mucha información. Informa sobre cómo se agrupan los datos alrededor de la media.

La media y la desviación típica están relacionadas.

1. Aproximadamente el 68 % de los datos distan como mucho una desviación típica de la media.
2. Aproximadamente el 95 % de los datos distan como mucho dos desviaciones típicas de la media.
3. Aproximadamente más del 99 % de los datos distan como mucho tres desviaciones típicas de la media.

Si los datos que hemos recogido tuvieran una distribución normal (de momento no sabemos lo que esto significa exactamente dentro de la Estadística, pero puedes suponer que significa eso, que son normales, que no les pasa nada raro) resulta que en el intervalo entre la media menos una desviación típica y la media más una desviación típica están más del 68 % de los datos. En el intervalo entre la media menos 2 desviaciones típicas y la media más 2 desviaciones típicas están más del 95 % de los datos, y entre la media menos 3 desviaciones típicas y la media más 3 desviaciones típicas están más del 99'7 % de los datos.



Media y desviación típica. Imagen de wikipedia

Se podría decir que algo, por ejemplo la inteligencia de una persona, la altura de una planta o el peso de un animal... es normal si está dentro de ese intervalo ($\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$), que es inteligente, alto o pesado si está entre ($\bar{x} + \sigma$, $\bar{x} + 2\sigma$), o que es un genio, gigante o muy pesado si está en el intervalo ($\bar{x} + 2\sigma$, $\bar{x} + 3\sigma$).

Observa que estamos diciendo que prácticamente todos los datos distan de la media menos de tres desviaciones típicas y que más del 68 % distan menos de una desviación típica. Esto va a ser de gran utilidad pues conecta con otras ramas de la Estadística. Hasta ahora hemos estado describiendo lo que ocurre. Ahora vamos a poder tomar decisiones, inferir o predecir con una cierta probabilidad lo que va a ocurrir. Por eso vamos a estudiar a continuación las probabilidades.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

5. Clasifica las siguientes variables como cualitativas o cuantitativas, y estas últimas como continuas o discretas.

a) Intención de voto de un partido
b) Número de correos electrónicos que recibes en un mes.
c) Número de calzados.
d) Número de kilómetros recorridos en fin de semana.
e) Marcas de cerveza
f) Número de empleados de una empresa
g) Altura
h) Temperatura de un enfermo.

6. Muchas personas que invierten en bolsa lo hacen para conseguir beneficios rápidos, por ello el tiempo que mantienen las acciones es relativamente breve. Preguntada una muestra de 40 inversores habituales sobre el tiempo en meses que han mantenido sus últimas inversiones se recogieron los siguientes datos:

10’5 11’2 9’9 15’0 11’4 12’7 16’5 10’1 12’7 11’4 11’6 6’2 7’9 8’3 10’9
8’1 3’8 10’5 11’7 8’4 12’5 11’2 9’1 10’4 9’1 13’4 12’3 5’9 11’4 8’8
7’4 8’6 13’6 14’7 11’5 11’5 10’9 9’8 12’9 9’9

Construye una tabla de frecuencias que recoja esta información y haz alguna representación gráfica.

7. Investigados los precios por habitación de 50 hoteles de una provincia se han obtenido los siguientes resultados.

70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120
80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50 30 40 70 40 70 50 40 70 100
75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

Determinar:

a) Distribución de frecuencia de los precios, sin agrupar y agrupando en 5 intervalos de la misma amplitud.

b) Porcentaje de hoteles con precio superior a 75.

c) ¿Cuántos hoteles tienen un precio mayor o igual que 50 pero menor o igual a 100?

d) Representa gráficamente las distribuciones del apartado a).

8. El gobierno desea saber si el número medio de hijos por familia ha descendido respecto a la década anterior. Para ello se ha encuestado a 50 familias respecto al número de hijos y se ha obtenido los datos siguientes.

2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3
3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.

a) Construye la tabla de frecuencias con estos datos.

b) ¿Cuántas familias tienen exactamente 3 hijos?

c) ¿Qué porcentaje de familias tienen exactamente 3 hijos?

d) ¿Qué porcentaje de familias de la muestra tiene más de dos hijos? ¿Y menos de tres?

e) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias no acumuladas.

f) Construye el gráfico que consideres más adecuado con las frecuencias acumuladas.

9. En un hospital se desea hacer un estudio sobre los pesos de los recién nacidos. Para ello se recogen los datos de los 40 bebes y se tiene:

3’2 3’7 4’2 4’6 3’7 3’0 2’9 3’1 3’0 4’5 4’1 3’8 3’9 3’6 3’2 3’5 3’0
2’5 2’7 2’8 3’0 4’0 4’5 3’5 3’5 3’6 2’9 3’2 4’2 4’3 4’1 4’6 4’2 4’5
4’3 3’2 3’7 2’9 3’1 3’5

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Si sabemos que los bebes que pesan menos de 3 kilos lo hacen prematuramente ¿Qué porcentaje de niños prematuros han nacido entre estos 40?

c) Normalmente los niños que nacen prematuros que pesan más de 3 kilos y medio no necesitan estar en incubadora. ¿Puedes decir que porcentaje de niños están en esta situación?

d) Representa gráficamente la información recibida.

10. En una finca de vecinos de Benicasim, se reúnen la comunidad de vecinos para ver si contratan a una persona para que les lleve la contabilidad. El resultado de la votación es el siguiente: 25 vecinos a favor de la contratación, 15 vecinos en contra y 5 vecinos se abstienen. Representa la información mediante un diagrama de sectores

11. Se toman ocho mediciones del diámetro interno de los anillos para los pistones del motor de un automóvil. Los datos en mm son:

74’001 74’003 74’015 74’000 74’005 74’002 74’005 74’004

Calcula la media y la mediana de estos datos. Calcula también la varianza, la desviación típica y el rango de la muestra.

12. Dada la distribución de datos 38432 384343 38436 38438 38440 con frecuencias 4, 8, 4, 3, 8, halla la media de la distribución.

13. La distribución de los salarios en la industria turística española es la que figura en la tabla. Calcula:

a) El salario medio por trabajador (marcas de clase del último intervalo 20000

b) El salario más frecuente.

c) El salario tal que la mitad de los restantes sea inferior a él.

[l_i, L_i[	n_i
[0,1500[	2145
[1500, 2000[	1520
[2000, 2500[	840
[2500, 3000[	955
[3000, 3500[	1110
[3500, 4000[	2342
[4000, 5000[	610
[5000, 10000[	328
≥10000	150

14. Calcula la mediana, la moda, primer y tercer cuartil y nonagésimo percentil de la distribución:

x_i	n_i
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2

15. Se han diseñado dos unidades gemelas de plantas pilotos y han sido puestas en funcionamiento en un determinado proceso. Los resultados de los diez primeros balances en cada una de las unidades han sido los siguientes:

Unidad A 97'8 98'9 101'2 98'8 102'0 99'0 99'1 100'8 100'9 100'5

Unidad B 97'2 100'5 98'2 98'3 97'5 99'9 97'9 96'8 97'4 97'2

a) Haz una representación gráfica de estas muestras.

b) Determina las medias y las varianzas.

16. En cierto barrio se ha encontrado que las familias residentes se han distribuido, según su composición de la forma siguiente:

Composición	***Nº de familias***
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

a) ¿Cuál es el número medio de personas por familia?

b) ¿Cuál es el tamaño de la familia más frecuente?

c) Si solo hubiera plazas de aparcamiento para el 75 % de las familias y estas se atendieran por familias de mayor tamaño a menor, ¿qué componentes tendría que tener una familia para entrar en el cupo?

d) Número de miembros que tienen como máximo el 85 % de las familias.

17. Al lanzar 200 veces un dado se obtuvo la siguiente distribución de frecuencias.

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	a	32	35	33	b	35

Halla la mediana y la moda de la distribución, sabiendo que la media aritmética es 3'6.

18. Los siguientes datos son medidas de la capacidad craneal de un grupo de homínidos:

84, 49,61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.

a) Calcula la media y la mediana muestrales.

b) Halla los cuartiles primero y tercero.

c) Halla los percentiles cincuenta y noventa.

d) Calcula el rango muestral.

e) Calcula la varianza muestral y la desviación estándar muestral.

19. Los siguientes datos proceden de un estudio de contaminación del aire.

6'5 2'1 4'4 4'7 5'3 2'6 4'7 3'0 4'9 8'6 5'0 4'9 4'0 3'4 5'6 4'7 2'7 2'4 2'7 2'2 5'2 5'3 4'7 6'8 4'1 5'3 7'6 2'4 2'1 4'6 4'3 3'0 4'1 6'1 4'2

a) Construye un histograma.

b) Determina los cuartiles.

c) Calcula la media y la desviación típica.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

CONTRA LA SUPERSTICIÓN, ESTADÍSTICA

Vivimos en un mundo dominado por la ciencia y la tecnología, a pesar de ello las supersticiones y las creencias seudocientíficas siguen dominando entre la población general, incluso más que en otras épocas. La Estadística es un arma importante para desenmascarar algunas afirmaciones que circulan impunemente y que mucha gente cree, como las derivadas de la astrología. Existen cientos de estudios que prueban que aunque existan coincidencias entre el signo astrológico de las personas y sus formas de ser, gustos, comportamientos, profesiones, etc. éstas están siempre en torno a la media estadística.

Una creencia muy habitual es que los nacimientos se producen con mayor frecuencia durante los días, y especialmente las noches, de luna llena. Resultaría sencillo coger los registros civiles y comprobar si eso es verdad, pero los que afirman semejante dato nunca se molestan en hacerlo. Recientemente se ha puesto de manifiesto mediante el análisis de los datos de un conjunto de estudios al respecto que las variaciones de nacimientos entre fases lunares son de apenas un 1 %, sin embargo también el mismo estudio ha puesto de manifiesto que el 60 % de los nacimientos se producen entre las 6 de la mañana y las seis de la tarde, mostrando así una diferencia mucho más significativa que suele tener su explicación en la organización de los hospitales.

EL EFECTO PLACEBO Y EL EFECTO NOCEBO

Antes de que un medicamento pueda comercializarse debe superar una serie de estrictas pruebas que arrojen seguridad acerca de su eficacia curativa.

Una de las pruebas más comunes consiste en seleccionar una muestra de enfermos y dividirlos aleatoriamente en dos grupos; un grupo recibe el medicamento, y el otro, sin saberlo, una sustancia en apariencia igual, pero sin ningún poder terapéutico: un placebo.

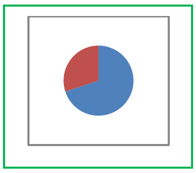
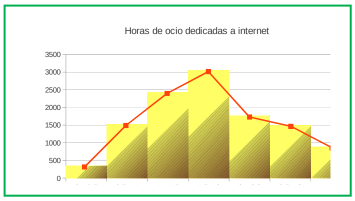
De esta forma, al final del ensayo pueden compararse los resultados entre los dos grupos y determinar la eficacia del medicamento. Para ello se emplean herramientas estadísticas como la correlación.

Sorprendentemente, hay un número significativo de pacientes que, habiendo recibido el placebo, mejoran de forma ostensible. Por ejemplo, esta contrastado que, en muchas enfermedades relacionadas con el dolor, entre el 10 % y el 15 % de los pacientes experimenta un alivio notable habiendo seguido un tratamiento exclusivamente de placebo.

Este fenómeno se conoce como efecto placebo, y se sabe que lo causan las sustancias neurotransmisoras que produce el cerebro ante la expectativa de que la dolencia va a mejorar. Y tiene su contrapartida: el **efecto nocebo**, el empeoramiento que se produce a causa de la creencia de que una medida terapéutica va a resultar perjudicial.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda

RESUMEN

Población	Colectivo sobre el que se hace el estudio	Estudiantes de todo Madrid
Muestra	Subconjunto de la población que permita obtener características de la población complete.	Alumnos se 3º de ESO seleccionados
Individuo	Cada uno de los elementos de la población o muestra	Juan Pérez
Variables estadística	Cuantitativa discreta Cuantitativa continua Cualitativa	Número de pie que calza Estatura Deporte que practica
Gráficos estadísticos	Diagrama de barras Histograma de frecuencias Polígono de frecuencias Diagrama de sectores 	
Media	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ $\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$	Con los datos: 8, 2, 5, 10 y 10 *Media* = 35/5 = 7 $\bar{x} = \frac{0\cdot2+1\cdot4+2\cdot21+3\cdot15+4\cdot6+5\cdot1+6\cdot1}{50} = \frac{126}{50} = 25$
Moda	Es el valor más frecuente	*Mo* = 10
Mediana	Deja por debajo la mitad	4 < 6 < **8** < 10 = 10. *Me* = 8.
Rango o recorrido	Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.	10 – 2 = 8
Desviación media	Es la media de las distancias de los datos a la media de los datos de los que dispongamos.	(|8–7|+|2–7|+|5–7|+|10–7|+|10–7|)/5 =(1+5+2+3+3)/5 = 14/5 = DM
Varianza	Es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2$ $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i)^2 \cdot f_i}{n} - \bar{x}^2$	V = (1 + 25 + 4 + 9 + 9)/5 = 47/5 = 9,4
Desviación típica	Es la raíz cuadrada de la varianza= $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - m^2}$	$\sigma = \sqrt{47/5} = 3{,}06$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se han recogido los datos sobre el número de hijos que tienen 20 matrimonios. ¿Cómo es la variable utilizada? Escribe una tabla de frecuencias de los datos recogidos y representa los datos en un diagrama de sectores:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Con los datos del problema anterior calcula la media, la mediana, la moda y los cuartiles.
3. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el intervalo intercuartílico.
4. Representa esos datos en un diagrama de cajas.
5. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talla	1,50 – 1,56	1,56 – 1,62	1,62 – 1,68	1,68 - 1,74	1,74 - 1,80	1,80-1,92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

a) Representa los datos en un histograma.

b) Calcula la media y la desviación típica.

c) Determina el intervalo donde se encuentran la mediana.

6. Se pregunta a un grupo de personas por el número de televisores que hay en su hogar y los resultados son:

Número de televisores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de hogares	2	27	15	4	2	1

¿Qué tipo de variables es? Representa los datos en la representación que te parezca más adecuada.

Calcula la media y la desviación típica-

7. Con los datos del problema anterior calcula la mediana y el intervalo intercuartílico.
8. En un centro escolar se ha recogido información sobre el número de ordenadores en las casas de 100 familias y se han obtenido los siguientes resultados:

Número ordenadores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa los datos en un diagrama de barras y calcula la media, la mediana y la moda.

9. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica. Haz un diagrama de cajas.
10. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de personas:	13	18	7	5	7

Representa los datos en un diagrama de sectores y calcula la media, la mediana y la moda.

11. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de personas:	13	18	7	5	7

Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

12. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristianos; S: socialistas; L: Liberales; V: verdes; C: conservadores; I: izquierda unitaria; LD: Libertad y democracia; NI: No inscritos; Otros).

Partidos	**DM**	**S**	**L**	**V**	**C**	**I**	**LD**	**NI**	**Otros**	**Total**
Escaños	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla?

13. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por alguno de los estados miembro:

Estado	**Alemania**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Polonia**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Otros**	**Total**
Escaños	96	54	74	73	51	73	21	21		751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Determina el número de escaños de los otros países miembros de la Unión Europea.

14. En las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	**Alemania**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Bélgica**	**% total**
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Ordena a los países de mayor a menos porcentaje de votantes en las elecciones de 2014.

15. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004’ 2009’ 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	**Alemania**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Bélgica**	**% total**
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

Representa en un polígono de frecuencias los porcentajes de participación del total de los estados miembros.

Autores: Fernando Blasco, Ignasi Clausell y David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

16. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Separa los Estados Miembros en dos grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al porcentaje medio y los que lo tuvieron menor en 2004. Haz lo mismo para 2014. ¿Son los mismos? Analiza el resultado.

17. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45'14	42'76	71'72	38'52	38'6	63'22	90'81	45'47
2009	43'27	44'87	40'63	65'05	34'7	36'77	52'61	90'39	43
2014	47'6	45'9	43'5	60	36	34'5	58'2	90	43'09

Calcula el porcentaje de participación medio para Alemania en esas tres convocatorias y la desviación típica. Lo mismo para España, para Bélgica y para Portugal.

18. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en blanco
35.379.097	15.920.815	19.458.282	290.189	357.339

Representa en un diagrama de sectores estos datos. Haz una tabla de porcentajes: el censo es el 100 %. Determina los otros porcentajes. ¿Consideras que ha ganado la abstención?

19. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

PP	PSOE	Izquierda plural	Podemos	UPyD	Otros	Total de votantes
4.074.363	8.001.754	1.562.567	1.245.948	1.015.994		15.920.815

Determina el número de votos de los otros partidos. Representa en un diagrama de barras estos datos. Haz una tabla de porcentajes para cada partido. Tienes que distribuir 54 escaños, ¿cómo los distribuirías por partidos?

20. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m3 durante 10 semanas, en un municipio pequeño:

25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6

Calcula:

a) Las medidas de **centralización**: la media, mediana, moda

b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

c) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

21. Una compañía de seguros desea establecer una póliza de accidentes. Para ello, selecciona al azar a 100 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil. Se han agrupado en intervalos los valores de la variable obtenidos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Número de personas	20	20	10	20	20	10

a) Calcula las marcas de clase y escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas.
b) Representa los datos en un diagrama de barras, otro de líneas y uno de sectores.
c) Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.
d) Calcula la media y la desviación típica.
e) Calcula la mediana y los cuartiles.

22. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6 o más**
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas y un diagrama de líneas de frecuencias relativas.
b) Calcula la media, la mediana y la moda.

23. Se ha preguntado a 50 estudiantes de un curso por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido:

Número de hermanos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6 o más**
Número de veces	8	19	8	7	5	2	1

a) Representa los datos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un diagrama de líneas de frecuencias relativas, y en un diagrama de sectores.
b) Haz un histograma.
c) Calcula la media, la mediana y la moda. Calcula los cuartiles.
d) Calcula la varianza, la desviación típica, el recorrido y el intervalo intercuartílico.

Utiliza una hoja de cálculo con el ordenador

Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m^3 durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula, utilizando Excel u otra hoja de cálculo:

24. Parámetros estadísticos

a) Las medidas de centralización: la media, mediana, moda

b) Las medidas de **dispersión**: desviación típica, varianza, coeficiente de variación, valor mínimo, valor máximo, recorrido, primer cuartil, tercer cuartil e intervalo intercuartílico.

c) Otros coeficientes: coeficiente de asimetría y coeficiente de curtosis que encuentres. Investiga las posibilidades del ordenador para obtener parámetros estadísticos.

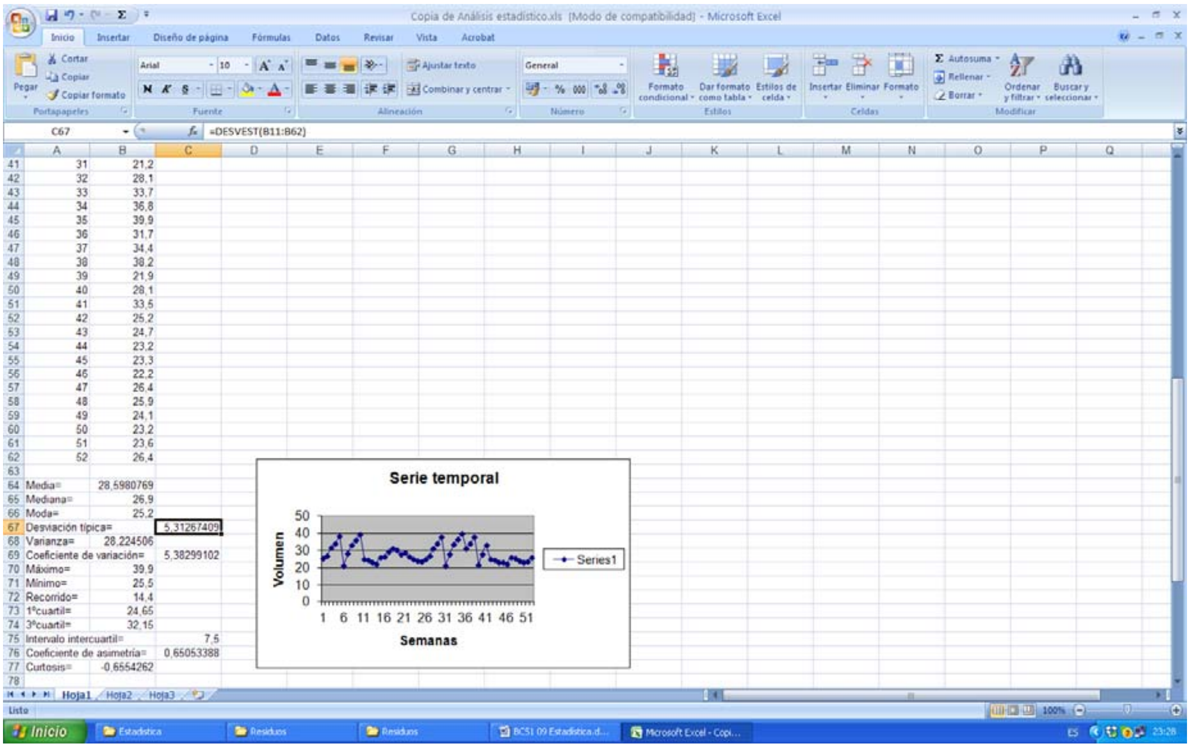
d) Haz una representación gráfica en **serie temporal**, que permita observar tendencias, ciclos y fluctuaciones. Recuerda que en una serie temporal, en el eje de abscisas está el tiempo de observación y en el eje de ordenadas la magnitud de observación.

Para ello, escribe en la casilla A12, 1, en A13, 2, y arrastra para escribir el orden de las semanas, hasta que aparezca el 52. Escribe en la columna B el volumen recogido cada semana.

En la casilla A11 un título, por ejemplo, "Residuos sólidos".

En la casilla C12 escribe Media, y en la casilla D12 calcúlala usando la función PROMEDIO. De igual forma calcula los otros parámetros.

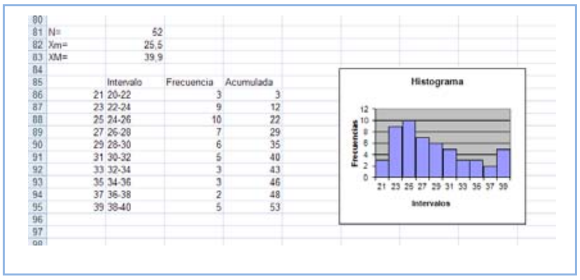
Observa un trozo de pantalla con algunos resultados:



25. Los datos de la práctica anterior se quieren representar en un **histograma** para mejor determinar su distribución. Para ello:

a) Indica el número total de datos, N, el menor valor: X_m, el mayor valor, X_M, y el recorrido R.

b) La cantidad de barras del histograma, k, se suele tomar, para menos de 50 datos, entre 5 y 7. Para N entre 50 y 100, entre 6 y 10. Para N entre 100 y 250, entre 7 y 12. Y para N mayor de 250, entre 10 y 20. En este caso N es igual a 52, luego el número de barras podría ser entre 6 y 10. Al dividir R entre 10 se obtiene 1,87 que sería el intervalo de clase. Para facilitar la división en clases fijamos el intervalo de clase, h, en 2, y el número de barras, k, en 10. Para no tener valores en los límites de clase tomamos el inicio del primer intervalo en 20. Así, los intervalos son: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ahora ya se puede construir la tabla de frecuencias y dibujar el histograma.



c) Calcula y representa en el histograma los puntos m, $m \pm s$, $m \pm 2s$, $m \pm 3s$, donde m y s son la media y la desviación típica, respectivamente

- Vamos a investigar qué ocurre al hacer un cambio de variables. Dijimos que si consideramos $\boldsymbol{y_i = a + bx_i}$ siendo a y b dos constantes cualesquiera, la nueva media aritmética quedaría $\bar{y} = a + b\bar{x}$.

a) Abre Excel. Introduce los datos: X = 255, 271, 318, 342, 389,... en la columna A, a partir de la fila 11. ¿Qué cambio de variable se ha hecho? Observa: $x = X/10$.

b) En la columna C, a partir de la fila 11 escribe los límites de clase, en la columna D el valor medio, en la columna E vamos a contar las frecuencias absolutas y en la columna F las frecuencias acumuladas. Utiliza la función CONTAR.SI para contar. Por ejemplo, escribe en E11, CONTAR.SI(A11:A63; <220). En F11 escribe =E11. En E12 escribe CONTAR.SI(A11:A63; <240)-F11. Completa la tabla de frecuencias. Escribe títulos en la fila 10.

c) Calcula la media y la desviación típica. Para ello escribe en la fila 3 y 4, columna B, las funciones =PROMEDIO(A11:A63) y =DESVEST(A11:A63). Escribe los resultados con 2 decimales.

d) ¿Cómo obtienes ahora la media y la desviación típica de los datos reales? ¿Cómo deshaces el cambio? Si no lo recuerdas, o no tienes seguridad, investígalo. Calcula la media y la desviación típica, antes y después del cambio. Escribe este resultado, en general, para un cambio de variables lineal $y = ax+b$.

e) Dibuja el histograma. No olvides nunca indicar las unidades en ambos ejes, y toda la información que ayude a comprender el gráfico. Añade siempre el tamaño, N, y los valores de la media y la desviación típica.

f) Discute el resultado. ¿Es grande la dispersión? La distribución, ¿es simétrica?

- Otra investigación: Vamos a investigar la distribución de la media. Para ello vamos a tomar muestras de tamaño 5. Utiliza la columna G. En G11 escribe =PROMEDIO(B11:B15), en G12 la media de B16 a B20, y así hasta el final. Tenemos calculadas las 10 medias de muestras de tamaño 5. Calcula la media y la desviación típica de estas medias. Compara con los resultados anteriores. Escribe en tu cuaderno las conclusiones.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se hace un estudio sobre el color que prefieren los habitantes de un país para un coche. La variable utilizada es:

a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

2. En un histograma de frecuencias la altura de los rectángulos es:

a) proporcional al área b) igual a la frecuencia absoluta

c) proporcional a la frecuencia relativa d) proporcional a la frecuencia acumulada

3. Ana ha obtenido en Matemáticas las siguientes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 y 7. Su nota media es de:

a) 7,6 b) 8,2 c) 8 d) 9

4. En las notas anteriores de Ana la mediana es:

a) 9 b) 8 c) 7,5 d) 8,5

5. En las notas anteriores de Ana la moda es:

a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 y 10

- Realizamos una prueba a 20 aspirantes a un puesto de grabador consistente en un dictado con cierto tiempo de duración (en minutos) y luego contar el número de errores cometidos al transcribirlo a ordenador. Los resultados fueron.

Tiempo	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
Errores	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

6. La media de errores es

a) 6’75 b) 7 c) 7’9 d) 6’9

7. La media de tiempos es

a) 6’75 b) 7 c) 7’9 d) 6’9

8. La desviación típica de errores es

a) 1 b) 1’41 c) 1’33 d) 1’2

9. La desviación típica de tiempos es

a) 1 b) 1’41 c) 1’33 d) 1’2

10. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los tiempos valen respectivamente:

a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 5’9, 6’1 y 7’3 d) 6, 7 y 8

11. El primer cuartil, la mediana y el tercer cuartil de los errores valen respectivamente:

a) 7, 8 y 9 b) 5, 6 y 7 c) 6’5, 7’5 y 8’5 d) 6, 7 y 8

Formación Profesional Básica

Matemáticas II

Capítulo 8: Probabilidad

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Este capítulo ha sido realizado por **David Miranda Suárez** para el alumnado que cursa Matemáticas II de Formación Profesional Básica en el Centro Salesianos Loyola - Naranjoven, en Fuenlabrada (Madrid) en los perfiles de Electricidad y Electrónica, y en el perfil de Peluquería y Estética, basándose en el currículo de la **Comunidad de Madrid** (BOCM Real Decreto 127/2014, de 28 de febrero del BOE).

El autor ha utilizado los textos de Matemáticas de Marea Verde. Para la elaboración de este capítulo se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de Marea Verde **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Capítulo 7: Probabilidad de Bachillerato, Matemáticas aplicadas a las CCSS I →
Autor: David Miranda
Revisor: Javier Rodrigo

ÍNDICE

Resumen

Todos los días estamos obligados a calcular probabilidades, aunque sea de modo intuitivo: ¿ganará la liga mi equipo favorito?, ¿lloverá mañana?, ¿le gustaré a esa persona "especial" que hay en clase?, ¿me darán una beca?

Siempre, en la televisión o en los periódicos, se usa la Probabilidad y se utiliza continuamente en todas las Ciencias, incluso en Medicina, Psicología…

Vamos a comenzar este capítulo con ejercicios de introducción que sirvan para comprender los conceptos, pero terminaremos aprendiendo cosas más complicadas, como el Teorema de *Bayes*.

El Teorema de *Bayes* nos va servir para resolver problemas como:

"Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo, calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis".

Autor: David Miranda

1. PROBABILIDAD

1.1. Introducción a la Probabilidad

Actividad de introducción

- ***Un nuevo jugador para mi equipo***

Como todos podéis observar, mi físico me ha hecho un portento del baloncesto. Mi equipo no me quiere por mi altura, sino porque hago matemáticas. El caso es que me han encargado la difícil tarea de elegir un jugador para el próximo año, y no sé cómo empezar. Me han mandado unas cosas que no sé muy bien qué significan. ¿Me podéis ayudar?

Esto es lo que me han mandado:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82

Primero vamos a intentar descifrar qué es cada cosa:

- ¿Qué significa Con?
- ¿Qué significa Int?
    - Con: son tiros conseguidos
    - Int: son tiros intentados

Ahora, lo siguiente que tenemos que hacer, es saber qué jugador queremos fichar:
- ¿Qué tiene que tener nuestro jugador para que lo fichemos?

Una primera clasificación la podríamos hacer con los puntos logrados. Es un cálculo fácil, ¿no?

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769

Me surgen nuevas preguntas con la nueva columna de Puntos Totales:
- ¿Qué significa Puntos Totales Conseguidos?
- ¿Qué significa Puntos Totales Intentados?
- ¿Me sirve de algo saber los Puntos Totales Intentados?
- ¿Es mejor presentar los nombres en ese orden o es preferible otro?

Yo creo que si los ordenamos, vemos más claramente las cosas:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631

Esta es una actividad adecuada para desarrollar en el aula en grupo, discutiendo sobre la información que aparece. Las preguntas van encaminadas a valorar la utilidad de la información, si me está diciendo algo o no. Aquí los alumnos ya estarán decidiendo qué jugador es mejor para ficharlo, así que se trata de dar razones favorables o desfavorables para justificar su intuición. Se fomenta primero que piensen, y después que expresen sus ideas, las debatan, critiquen otras y sepan escuchar críticas a las suyas,... Se puede relacionar con una competencia de lenguaje, tanto matemático como lingüístico. El tiempo adecuado para desarrollar esta actividad es de una hora de clase. Se pretende que recuerden y utilicen conceptos como experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, regla de Laplace…

También se puede hacer la clasificación según los tiros de 3, los tiros de 2 o los tiros libres.

- ¿Qué jugador es mejor en tiros de 3?
- ¿Y en tiros de 2?
- ¿Cuál es mejor en tiros libres?

Ordenado por tiros de 3:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631

Ordenado por tiros de 2:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606

Ordenado por tiros libres:

	Tiros de 3		Tiros de 2		Tiros libres		Puntos Totales	
	Con	Int	Con	Int	Con	Int	Con	Int
José Hierro	36	107	130	231	79	98	447	881
Federico García Lorca	81	188	67	132	67	76	444	904
Washington Cucurto	35	107	114	183	64	82	397	769
Nicanor Parra	59	131	33	67	62	79	305	606
Leopoldo María Panero	24	88	68	149	50	69	258	631

La ordenación de las tablas es una introducción a la representación de datos estadísticos.

Aquí podemos ver que hay un jugador que destaca en casi todas las clasificaciones:

- ¿Podemos fiarnos de estas clasificaciones?
- ¿Tendrá algo que ver el número de canastas conseguidas con el número de lanzamientos?

Otra vez cuestionamos la información hallada. En probabilidad, al hacer un experimento, es importante recoger la información que verdaderamente nos es útil, y rechazar información que no nos va a servir para nuestro experimento.

Más o menos, se va viendo un poco las características de cada jugador. Me pregunto si podemos añadir algo más que apoye nuestra decisión.

- ¿Sería interesante calcular cuántas canastas han fallado?
- ¿Por qué?
- ¿Me da alguna información saber cuántas canastas han fallado (Fall)?

Pues entonces añadimos la nueva información que es fácil de calcular. ¿Cómo se calcula? Restando las canastas intentadas a las canastas conseguidas.

Pues la nueva tabla es:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Puntos Totales		
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	447	434	881
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	444	460	904
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	397	372	769
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	305	301	606
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	258	373	631

No sé si tenemos claro ya el jugador que queremos, pero yo no estoy muy convencido. ¿Se os ocurre algún otro tipo de clasificación para que nos ayude a decidir?

A mí se me ha ocurrido estudiar los tiros totales realizados:

Si los ordeno según los tiros conseguidos:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Puntos Totales			Tiros Totales		
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	447	434	881	245	191	436
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	444	460	904	215	181	396
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	397	372	769	213	159	372
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	305	301	606	154	123	277
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	258	373	631	142	164	306

Según los tiros que han fallado:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Puntos Totales			Tiros Totales		
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	447	434	881	245	191	436
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	444	460	904	215	181	396
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	258	373	631	142	164	306
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	397	372	769	213	159	372
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	305	301	606	154	123	277

Podemos ver que el jugador que más puntos ha conseguido, que es el que más canastas ha conseguido, también es el que más canastas ha fallado:

- ¿Qué quiere decir los Tiros Totales Conseguidos?
- ¿Y los Tiros Totales Intentados?
- ¿Tiene alguna relación los Tiros Totales Conseguidos con los Tiros Totales Intentados?
- Es decir, ¿cuántos más tiros intentados, más tiros conseguidos?

La respuesta a la última pregunta es muy interesante, porque se suele creer que si se tira muchas veces, meterá muchas canastas y será el mejor jugador. Y esto no es verdad. Se puede decir que cada lanzamiento es un intento distinto.

Ahora estoy algo confuso. Hemos encontrado un jugador que mete muchos puntos, pero es el que más canastas falla. Qué podría hacer para saber, de manera más clara, qué jugador es el mejor.

Se me ocurre calcular las frecuencias relativas de tiros totales que han sido canasta.

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Tiros Totales			
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Fr
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	245	191	436	0’56
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	215	181	396	0’54
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	142	164	306	0’46
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	213	159	372	0’57
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	154	123	277	0’56

Voy a ordenarlo por la mayor frecuencia relativa de tiros totales conseguidos:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Tiros Totales			
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Fr
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	213	159	372	5 '57
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	245	191	436	0'56
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	154	123	277	0'56
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	215	181	396	0'54
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	142	164	306	0'46

- ¿Qué información me está dando esa frecuencia relativa?
- ¿Qué significa?
- ¿Qué aporta esta frecuencia relativa para la decisión?

Vamos a definir bien cada cosa:

- Con: canasta conseguida tras un lanzamiento (para abreviar, lo escribiremos como C).
- Fall: canasta fallada tras un lanzamiento (lo mismo, lo llamamos F).
- Int: es un lanzamiento, I.
- ¿Qué hemos hecho para conseguir un tiro de cualquier valor?

Lanzar a canasta. Pues podemos decir que el lanzamiento a canasta es nuestro experimento (o el **experimento aleatorio**).

- Cuando hemos lanzado a canasta, ¿qué puede suceder?

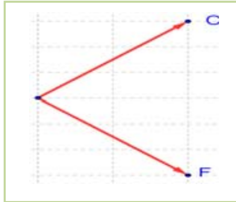
Que consigamos el tiro, es decir, C, o que lo fallemos, es decir, F (lo que calculamos más adelante). Por eso, diremos que Conseguir y Fallar son **sucesos**, para aclararnos mejor. Es decir, C y F son sucesos. Y no sólo eso, o bien se consigue o se falla el tiro.

Al realizar nuestro experimento, los resultados que obtendremos siempre van a ser estos dos sucesos. Entonces, si reunimos todos los sucesos en una caja (nosotros los matemáticos lo llamamos conjunto), diremos que este conjunto $\{C, F\}$ es nuestro **espacio muestral**.

Para que nos entendamos, fijaos en esta imagen:

- Es una carta de lo que podemos pedir. No sólo tienen un producto de cada, son todas las cosas que tienen, es una muestra de lo que puedes pedir. Este cartel, en matemáticas, lo podemos llamar "espacio muestral". Puedo pedir algo que esté en la carta, y no puedo pedir nada que no esté en la carta.

En un experimento, el espacio muestral son las cosas que nos pueden salir al realizar el experimento, y lo que no esté dentro de ese espacio, no saldrá nunca.



Pues entonces tenemos lo siguiente:

- Experimento: lanzamiento a canasta
- Espacio muestral: $\{C, F\}$.
- Sucesos:
    - o C: conseguir el lanzamiento
    - o F: fallar el lanzamiento.

Cuando calculasteis los lanzamientos fallados, ¿qué hicisteis?

Restasteis a los lanzamientos intentados, los conseguidos. Podemos escribir que:

$$F = \text{Int} - C$$

o lo que es lo mismo:

$$F = \text{Total} - C$$

Decimos que fallar la canasta es lo **contrario** de conseguir la canasta.

Por tanto, F es el **suceso contrario** (suceso opuesto, suceso complementario) de C. Lo podemos escribir de distintas formas según los autores: $F = C^c = C' = noC = \overline{C}$. Podemos decir que son complementarios porque $C \cup F$ = Total, se complementan.

Cuando hemos ido viendo las distintas clasificaciones de los jugadores, ¿por qué se dice que uno era mejor que otro?

El que metía más canastas era el mejor, pero también era el que más había fallado. Cuando calculamos los porcentajes de acierto, nos aclaró un poco la situación. La tabla era esta:

Voy a ordenarlo por la mayor frecuencia relativa de tiros totales conseguidos:

	Tiros de 3			Tiros de 2			Tiros libres			Tiros Totales			
	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Con	Fall	Int	Fr
Washington Cucurto	35	72	107	114	69	183	64	18	82	213	159	372	5 ’57
José Hierro	36	71	107	130	101	231	79	19	98	245	191	436	0’56
Nicanor Parra	59	72	131	33	34	67	62	17	79	154	123	277	0’56
Federico García Lorca	81	107	188	67	65	132	67	9	76	215	181	396	0’54
Leopoldo María Panero	24	64	88	68	81	149	50	19	69	142	164	306	0’46

Ahora el jugador que lidera esta clasificación no es el que más puntos había metido el año pasado.

Entonces, ¿qué significa esa frecuencia relativa? ¿Cómo lo habíamos calculado?

La frecuencia relativa significa que de todos los lanzamientos que intentó, 372, consiguió meter canasta 213, calculamos el cociente entre los tiros conseguidos y los lanzamientos intentados, 0’57.

Si queremos saber cuál va a ser el mejor jugador para nuestro equipo el próximo año, me gustaría que el jugador, de todos los lanzamientos que intente, consiga muchos. ¿Qué certeza tendré yo de que el próximo año, ese porcentaje de acierto sea grande? A esto es a lo que responde la probabilidad.

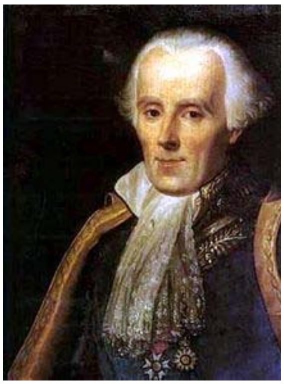
Ya sabes que, por la ley de los grandes números, cuando el número de experiencias es muy grande la frecuencia relativa tiende a estabilizarse. Y a ese número al que tiende, lo denominamos probabilidad. Recuerda que hay dos formas de asignar probabilidades, por simetría, a priori, si los sucesos elementales sabemos que son equiprobables, mediante la ley de *Laplace*, o a posteriori, haciendo un buen número de experimentos y valorando a donde tienden las frecuencias relativas.

Si la tabla que nos han proporcionado para hacer la selección recoge un número suficiente de experimentos (de tiros a canasta) entonces, mirando nuestra tabla, vemos que todos nuestro jugadores tienen una probabilidad de encestar en un tiro próxima a 1/2, pero el jugador que vamos a seleccionar es Washington Cucurto pues su probabilidad de encestar en un tiro a canasta es la mayor, 0’57.

Otra actividad de introducción

Mirada desde la perspectiva de Laplace

- Pedro y Elisa van a jugar tirando dos dados. Gana Pedro si la suma de los números de las caras superiores es menor que 7, y gana Elisa si es mayor que 7. Si es 7, ni gana ni pierde ninguno. Pero Daniel les pregunta si están seguros que ese juego es justo. ¿Puedes ayudarles a decidirlo? Han contactado con un amigo para que les ayude.



Pero es algo anticuado, esto no mola, vamos a ponerle algo.

Bueno, algo ha mejorado.

Ayúdanos desde el principio. Seguro que tú sabes.

- Quiero calcular la probabilidad de que gane Pedro y la de que gane Elisa.
  - Experimento: lanzar dos dados y sumar los números de las caras superiores
  - Sucesos:
    - A: Sumen menos de 7
    - B: Sumen más de 7
    - C: Sumen 7.
  - ¿Espacio muestral: $E = \{A, B, C\}$? No. Este espacio muestral no nos interesa. No son sucesos equiprobables. El espacio muestral $E = \{(1, 1), (1, 2),..., (6, 6)\}$ si nos interesa, porque los sucesos elementales son equiprobables. Nos dice lo que ha salido en la cara superior del primer dado, y en la del segundo.

Nos dice nuestro amigo que contemos el número total de casos posibles: (1, 1), (1, 2)… (1, 6), (2, 1), … (6, 6). ¿Cuántos son? ¿Son 36?

Que contemos aquellos casos en los que ganaría Pedro: (1, 1), (1, 2), …, (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1). ¿Cuántos son? ¿Son 15?

Y los casos en los que ganaría Elisa: (2, 6), (3, 6), …, (6, 6), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (4, 4), (5, 4), (6, 4), (5, 3), (6, 3), (6, 2). ¿Cuántos son? ¿Son 15?

Y ahora que usemos:

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables al suceso } A}{\textit{número de casos posibles}}$$

Según nuestro cálculo hay:

- Casos posibles = 36
- Casos favorables = 15

Por tanto:

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables al suceso } A}{\textit{número de casos posibles}} = \frac{15}{36} = 0'42 = P(B)$$

El juego es justo.

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0'16$$

Observa además que: $P(A)$ + $P(B)$ + $P(C)$ = 0'42 + 0'42 + 0'16 = 1. La probabilidad vale siempre un número entre 0 y 1. No existen probabilidades que valgan más que 1, ni menos de 0.

Aspectos a tener en cuenta:

- ¿Por qué se pone arriba los casos favorables?

  Estamos calculando una razón, que es una parte del total.

- ¿Puede haber una frecuencia relativa menor que 0?

  Siempre que hacemos un experimento, el valor de algo que nos sale siempre es positivo, es decir, no podemos tener –3 casos favorables.

- ¿Puede haber una frecuencia relativa mayor que 1?

  Si diese mayor que 1 querría decir que hay más casos favorables que todos los posibles.

- Se llama **suceso imposible** al que no tiene ningún caso favorable, por lo que su frecuencia relativa y su probabilidad es siempre 0.
- Si el suceso está formado por todos los casos posibles, la frecuencia relativa y la probabilidad es 1. Siempre que realizamos el experimento ocurre. Lo llamamos **suceso seguro**.
- También se podrían calcular porcentajes en lugar de frecuencias relativas. Ambos son razones, sólo que en el porcentaje el total es 100, y en la frecuencia relativa es 1.

Y otra actividad de introducción más

Actividades culturales en un centro escolar

- En una clase de 36 estudiantes, 15 quieren hacer teatro, 24 editar una revista, y 9 no quieren participar en ninguna actividad.

a) ¿Qué proporción quieren hacer teatro?
b) ¿Qué proporción quieren editar una revista?
c) ¿Qué proporción no quieren participar en ninguna actividad?
d) ¿Qué proporción quieren hacer teatro o bien editar una revista?
e) ¿Qué proporción quieren hacer teatro y además editar una revista?
f) ¿Qué proporción de estudiantes, de los que quieren editar una revista, quieren también hacer teatro? Observa que es una pregunta diferente a la anterior pues contamos aquellos estudiantes que desean hacer teatro entre los que quieren editar una revista. Es un suceso condicionado a querer editar una revista.
g) ¿Qué proporción de estudiantes, de los que quieren hacer teatro, quieren también editar una revista?

La mejor manera de resolver esto es dar nombres y dibujar un diagrama para aclararnos.

- Total de estudiantes, E: 36
- Quieren hacer teatro, T: 15
- Quieren editar una revista, V: 24
- No hacer nada, N: 9.

Por tanto, en $E - N$ hay 36 – 9 = 27 estudiantes, que son los que quieren hacer teatro o bien editar la revista, $T \cup R$.

Ayúdate de un diagrama y observa que en $T - R$ hay 3 estudiantes y en $R - T$ hay 12 estudiantes. Por tanto hay 12 estudiantes que quieren hacer teatro y además editar una revista. En $T \cap R$ hay 12 estudiantes.

Por tanto:

a) T: 15/36 = 0’42 $\rightarrow$ 42 %.
b) R: 24/36 = 0’67 $\rightarrow$ 67 %
c) N: 9/36 = 0’25 $\rightarrow$ 25 %
d) $T \cup R$: 27/36 = 0’75 $\rightarrow$ 75 %
e) $T \cap R$: 12/36 = 0’33 $\rightarrow$ 33 %

Queremos ahora saber cuántos estudiantes, de entre los que desean editar una revista, quieren hacer teatro. Hay 24 que quieren editar la revista, y 12 que desean hacer ambas cosas:

f) T/R: 12/24 = 0’5 $\rightarrow$ 50 %

Y de los 15 estudiantes que quieren hacer teatro, 12 también quieren editar una revista:

g) R/T: 12/15 = 0’8 $\rightarrow$ 80 %

1.2. Álgebra de sucesos

Recuerda que:

Experimento aleatorio

Un **fenómeno o experimento aleatorio** es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

Ejemplos:

- Son experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.

b) Lanzar dos dados y anotar los números de las caras superiores.

c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.

d) Sacar, sin reemplazamiento, dos cartas de la baraja.

e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

- No son experimentos aleatorios

a) Salir a la calle sin paraguas cuando llueve y ver si te mojas.

b) El precio de medio kilo de rosquillas, si las rosquillas cuestan a 3 € el kilo.

c) Soltar un objeto y ver si cae.

Actividades propuestas

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

a) La superficie de las provincias españolas.

b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.

c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.

d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.

e) Saber si el próximo año es bisiesto.

Autor: David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Suceso, suceso elemental, espacio muestral

Al realizar un experimento aleatorio existen varios **posibles resultados** o **sucesos posibles**. Siempre se obtendrá uno de los **posibles resultados**.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral, E**.

Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados, es decir, del espacio muestral.

Ejemplos:

- Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga cara o salga cruz. El conjunto de sucesos elementales es $\mathbf{E}$ = {cara, cruz}.

- *Al lanzar un dado, el conjunto de posibles resultados es* E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, el suceso obtener par es {2, 4, 6}, el suceso obtener impar es {1, 3, 5}, el suceso obtener múltiplo de 3 es {3, 6}, sacar un número menor que 3 es {1, 2}.

- El conjunto de posibles resultados de los experimentos aleatorios siguientes, son:

a) Extraer una bola de una bolsa con 9 bolas blancas y 7 negras es E = {*blanca*, *negra*}.

b) Sacar una carta de una baraja española es E = {As de Oros, 2O, 3O,…, SO, CO, RO, As de Copas, …, RC, As de Bastos, …, RB, As de Espadas,…, RE}

- *Al lanzar dos monedas el conjunto de posibles resultados es* E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}. El suceso *sacar cero caras* es {(+, +)}, *sacar una cara* es {(C, +), (+, C)} y *sacar dos caras* {(C, C)}.

Actividades propuestas

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "*Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no*".

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas*.

5. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Operaciones con sucesos

Dados dos sucesos A y B:

La **unión**: $A \cup B$ se verifica si se verifica A **o bien** se verifica B.

La **intersección**: $A \cap B$ se verifica si se verifica A **y además** se verifica B.

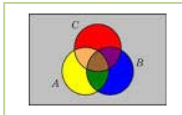
La **diferencia**: $A - B$ se verifica si se verifica A y **no** se verifica B.

La unión, intersección y diferencia de dos sucesos aleatorios, son también sucesos aleatorios.

Las operaciones con sucesos verifican las mismas **propiedades** que las operaciones con conjuntos:

Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Distributiva:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Simplificativa:	$A \cup (B \cap A) = A$	$A \cap (B \cup A) = A$
Leyes de Morgan:	$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Todas ellas puedes comprenderlas representando conjuntos usando diagramas de Venn.



Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, llamamos A al suceso obtener par*: A = {2, 4, 6}, y B al suceso obtener múltiplo de 3: B = {3, 6}. Entonces $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6}, $A \cap B$ = {6}, $A - B$ = {2, 4}.

Actividades propuestas

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

Suceso seguro, suceso imposible y suceso contrario

Se considera que el espacio muestral, E, es un suceso al que se denomina **suceso seguro**, y que el conjunto vacío, $\varnothing$, es otro suceso, al que se llama **suceso imposible**.

Dado un suceso A, se denomina **suceso contrario** (o complementario) de A, y se escribe $\overline{A}$, (o A', o A^C, o no$A$), al suceso $E - A$.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario se llaman sucesos **compatibles**.

Ejemplos:

- *Al lanzar un dado, si* A = {2, 4, 6}, y B = {3, 6}. Entonces $\overline{A}$ = {1, 3, 5}, $\overline{B}$ = {1, 2, 4, 5}, $\overline{A} \cap \overline{B}$ = {1, 5}. Los sucesos A y B son compatibles pues $A \cap B$ = {6}.

Actividades propuestas

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "*sacar un as*".

1.3. Asignación de Probabilidades

Existe una definición axiomática de probabilidad debida a *Kolmogorov* relativamente reciente (1930), pero antes ya había sido usado este concepto, por ejemplo por *Fermat* y *Pascal* en el siglo XVII que se escribieron cartas reflexionando sobre lo que ocurría en los juegos de azar. Cuando no comprendían cómo asignar una determinada probabilidad, jugaban muchas veces al juego que fuese y veían a qué valor se aproximaban las frecuencias relativas. Así, la **probabilidad de un suceso** podría definirse como el **límite al que tienden las frecuencias relativas** de ese suceso cuando el número de experimentos es muy alto. Por tanto:

Para calcular probabilidades se usan dos técnicas, una **experimental**, *a posteriori*, analizando las **frecuencias relativas** de que ocurra el suceso, y la otra por simetría, *a priori*, cuando se sabe que los sucesos elementales son **equiprobables,** es decir, que **todos ellos tienen la misma probabilidad**, entonces **se divide el número de casos favorables por el número de casos posibles,** que se conoce como **Regla de *Laplace*** y dice que:

Regla de Laplace

"Si los sucesos elementales son equiprobables, la probabilidad de un suceso A es el número de casos favorables dividido por el número de casos posibles".

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

La regla de *Laplace* está basada en el *principio de razón insuficiente*: si a priori no existe ninguna razón para suponer que un resultado se puede presentar con más probabilidad que los demás, podemos considerar que todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Ley de los grandes números

Jakob Bernoulli, en 1689, definió *probabilidad* utilizando la ley de los grandes números, que dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse cuando el número de pruebas tiende a infinito.

A ese número al que tienden las frecuencias relativas lo llamó probabilidad.

Puedes comprender que esta definición tiene graves inconvenientes. No sabemos cuántas pruebas debemos realizar. Hay que hacer *muchas* y en las mismas condiciones. Se obtiene un valor aproximado de la probabilidad.

Actividades resueltas

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, y suponemos que la moneda no está trucada. Si sospecháramos que la moneda estuviera trucada para asignar esa probabilidad habría que tirar la moneda un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener cara.
- La probabilidad de sacar un 5 al tirar un dado es 1/6 pues hay seis casos posibles {1, 2, 3, 4, 5, 6}, un único caso favorable, 5, y suponemos que el dado no está trucado, luego todos ellos son equiprobables.

- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille, pues ya te habría pillado un montón de veces. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que un bebé sea niña es aproximadamente 0'5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0'49.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas y elegimos una carta, algunos de los sucesos que pueden ocurrir son "*sacar un oro*", o "*sacar un as*", o "*sacar el caballo de copas*"… Como de antemano no sabemos lo que va a ocurrir decimos que estos sucesos son *aleatorios* o de *azar*. Antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad de, por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar un oro* es 10/40, y la de un *as* es 4/40.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar el rey de copas? ¿Y de sacar un rey? ¿Y una copa?

La probabilidad de sacar el *rey de copas* es 1/40. Pero el suceso *sacar un rey* se cumple si sale el rey de oros, o de copas, o de bastos o de espadas. Es decir, no es un suceso simple, está formado, en este caso, por 4 sucesos elementales, luego su probabilidad es 4/40 = 1/10. Lo mismo le ocurre a *sacar una copa*. Es un suceso compuesto, y como hay 10 copas su probabilidad es 10/40 = 1/4.

- En una clase hay 15 chicos y 14 chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?

Como hay 14 chicas (los casos favorables) sobre una población de 29 individuos, de acuerdo con la Ley de *Laplace*, la probabilidad pedida es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}} = \frac{14}{29}$$

- En el monedero tenemos 3 monedas de 1 céntimo, 7 monedas de 5 céntimos, 4 monedas de 10 céntimos y 2 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la cantidad obtenida sea un número par de céntimos?

Al sacar una moneda, para tener un número par de céntimos tiene que ser de 10 céntimos o de 50 céntimos. Por tanto el total de casos favorables es de 6 (hay 4 de 10 y 2 de 50). El número de casos posibles es el de monedas que tenemos en el monedero, que son 3 + 7 + 4 + 2 = 16.

La probabilidad de obtener un número par de céntimos es:

$$P(\text{par de céntimos}) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso "par de céntimos"}}{\text{número de casos posibles}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Actividades propuestas

11. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

12. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Autor: David Miranda

Definición axiomática de probabilidad debida a Kolmogorov

La definición axiomática de Kolmogorov es más complicada que la que viene a continuación. Pero esta simplificación puede servirnos:

La probabilidad de un suceso es un número que debe verificar estas propiedades:

1.- La probabilidad del suceso seguro es 1: $P(E) = 1$.

2.- La probabilidad de cualquier suceso siempre es un número no negativo: $P(A) \geq 0$, para todo A.

3.- Si dos sucesos son incompatibles entonces la probabilidad de la unión es la suma de sus probabilidades: Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Las dos últimas las verifican todas las medidas. La probabilidad es una medida.

De estos axiomas se deducen las siguientes propiedades:

a) La probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$

b) La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso: $P(\overline{A})$ **= 1** – $P(A)$.

c) La probabilidad de un suceso (finito) es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de* 40 *cartas? ¿Y de* ***no*** *sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de* ***no*** *sacar una copa?*

El suceso *no sacar un as* es el suceso **contrario** al de *sacar un as*. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Observa que se obtiene que $P(as) + P(no\ as)$ = 1/10 + 9/10 = 10/10 = 1.

La probabilidad de *sacar copa* es 10/40, y hay 30 cartas que no son copas, luego la probabilidad de ***no*** *sacar copa* es 30/40, y 10/40 + 30/40 = 1.

Actividades propuestas

13. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

14. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Sucesos compatibles e incompatibles

Ejemplo:

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar una copa o un oro?

Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

- ¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar un as o un oro?

Hay 4 ases y hay 10 oros, pero hay el *as de oros*, luego las cartas que son o bien un as o bien un oro son 13, luego la probabilidad es 13/40.

Llamamos **sucesos incompatibles** a los que, como copa y oro, no pueden realizarse a la vez, y **sucesos compatibles** a los que, como as y oro, pueden realizarse a la vez.

Designamos $P(A \cup B)$ a la probabilidad del suceso "*se verifica A o bien se verifica B*". Hemos visto en el ejemplo que si los sucesos son incompatibles su probabilidad es igual a la suma de las probabilidades.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si A y B son incompatibles.

Pero si A y B sí pueden verificarse a la vez habrá que restar esos casos, esas veces en que se verifican A y B a la vez.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son compatibles.

Esta segunda expresión es más general que la primera, ya que en el caso en que A y B son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de los sucesos siguientes: a) Sacar un rey o una figura; b) No sale un rey o sale un rey; c) Sacar un basto o una figura.*

a) Hay 4 reyes y hay 4 · 4 = 16 figuras (as, sota, caballo y rey), pero los cuatro reyes son figuras, por tanto P(Rey $\cup$ Figura) = 4/40 + 16/40 – 4/40 = 16/40 = 0'4.

b) Hay 40 – 4 = 36 cartas que no son reyes, y hay 4 reyes, luego P(no rey $\cup$ rey) = 36/40 + 4/40 = 1. Esta conclusión es más general. Siempre:

$P(\bar{A} \cup A) = 1$,

pues un suceso y su contrario ya vimos que verificaban que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

c) Hay 10 bastos y hay 16 figuras, pero hay 4 figuras que son a la vez bastos (as, sota, caballo y rey), luego P(Basto $\cup$ Figura) = 10/40 + 16/40 – 4/40 = 22/40 = 11/20.

Sucesos dependientes e independientes

Ejemplo:

- Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar una bola roja*? Si sacamos dos bolas, ¿cuál es la probabilidad de *sacar dos bolas rojas*?

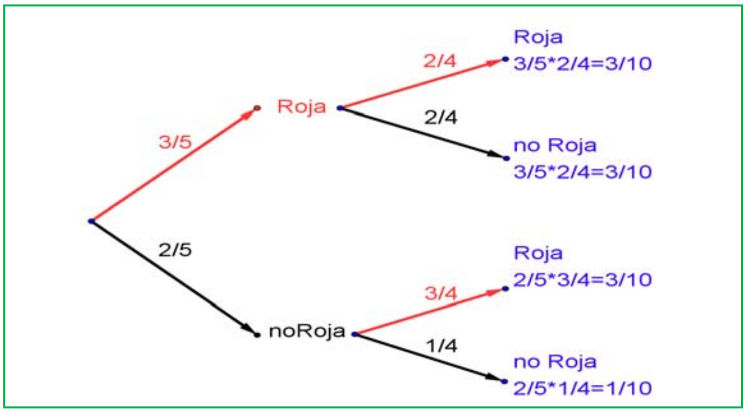
La probabilidad de sacar una bola roja es 3/5. Pero la de sacar dos bolas rojas, ¡depende!

Depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola roja, o si la dejamos fuera.

En el primer caso decimos que es **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

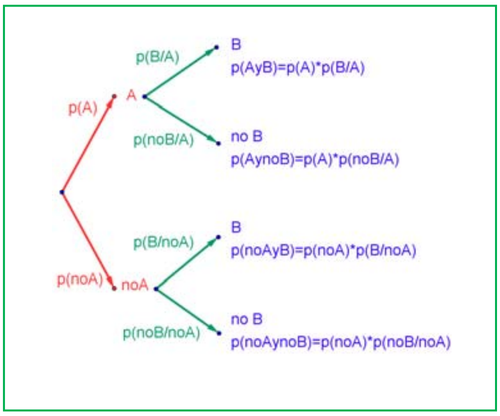
Si la volvemos a meter, la probabilidad de sacar bola roja volverá a ser 3/5, y la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25. La probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que ya hayamos sacado, y en este caso la probabilidad se obtiene multiplicando.

Si los sucesos A y B son **independientes:** $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.



Pero si la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4, y está condicionada por lo que antes hayamos sacado. Se escribe: P(Roja/Roja) y se lee *"probabilidad de Roja condicionado a haber sacado Roja"*. La probabilidad de sacar dos bolas rojas es ahora: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

Observa el diagrama de árbol y comprueba que la probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no Roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra (no Roja) y luego bola Roja es 2/5·3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5·1/4 = 2/20 = 1/10.



Pero observa más cosas. Por ejemplo, sumando las probabilidades de Roja y noRoja se obtiene: 3/5 + 2/5 = 1; y lo mismo en las otras ramas del árbol: 2/4 + 2/4 = 1; 3/4 + 1/4 = 1; e incluso sumando todas las probabilidades finales:

$$P(E) = P(A_1)+P(A_2)+ \ldots +P(A_n) = 3/10 + 3/10 + 3/10 + 1/10 = 1.$$

Los sucesos no son independientes. El que ocurra A, o no ocurra A, afecta a la probabilidad de B. Por eso se dice que B **está condicionado** a A.

Si los sucesos A y B son **dependientes** entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Actividades resueltas

- *Sacamos dos cartas de una baraja de* 40 *cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?*

Si fuera con reemplazamiento la probabilidad sería 4/40 · 4/40, pero al ser sin reemplazamiento la probabilidad del segundo *as* viene condicionada por que hayamos sacado un *as* previamente. Ahora en la baraja ya no quedan 40 cartas sino 39, y no quedan 4 ases sino sólo 3, luego la probabilidad es:

$$4/40 \cdot 3/39 = 1/130.$$

Observa que:

Si dos sucesos son **dependientes** entonces: $\boldsymbol{P(B/A) \neq P(B)}$.

Pero si dos sucesos son **independientes** entonces: $\boldsymbol{P(B/A) = P(B/\overline{A}) = P(B)}$.

Actividades propuestas

15. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos A y B: A = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y B = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

16. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

17. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

18. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

19. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. *Ayuda*: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no sacar ningún* 6, y utilizar el suceso contrario.

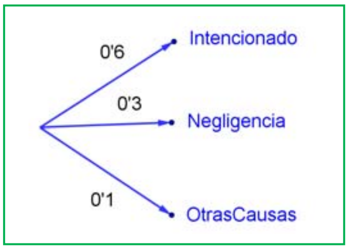
20. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Comprueba que $P(A)$ = 5/36 (*casos favorables*: 2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2) y que $P(B)$ = 8/36 (*casos favorables*: (1, 3), (2, 4), …). b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \overline{B})$; $P(\overline{A} \cap B)$; $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/\overline{B})$; $P(\overline{A}/B)$.

1.4. Tablas de contingencia y diagramas de árbol

Diagramas de árbol

Ejemplo:

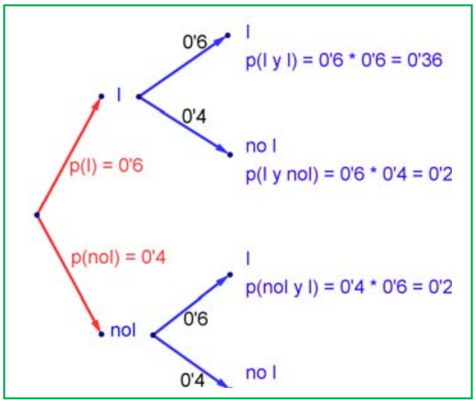
- *Se hace un estudio sobre los incendios y se comprueba que en una determinada zona el* 60 % de los incendios son intencionados, un 30 % se deben a negligencias y 10 % a causas naturales como rayos o a otras causas. Representa esta situación con un diagrama de árbol.



Actividades resueltas

- Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es 0'6, ¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?

Llamamos I al suceso "ser intencionado" y $\bar{I}$ = no$I$ al suceso "no ser intencionado". Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:



$P(I, I) = 0'6 \cdot 0'6 = 0'36$

$P(I, \bar{I}) = 0'6 \cdot 0'4 = 0'24$

ya que es la probabilidad de que el primer incendio sea intencionado y el segundo no.

$P(\bar{I}, I) = 0'4 \cdot 0'6 = 0'24$

$P(\bar{I}, \bar{I}) = 0'4 \cdot 0'4 = 0'16$

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de (I, I), $(I, \bar{I})$, y $(\bar{I}, I)$ que es 0'36 + 0'24 + 0'24 = 0'84. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario P(no$I$, no$I$) = $P(\bar{I}, \bar{I})$ = 0'16 y restarla de 1:

P(al menos uno intencionado) = 1 – 0'16 = 0'84.

Actividades propuestas

21. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I)$ = 0'6.

22. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A)$ = 0'96; $P(B)$ = 0'98 y $P(C)$ = 0'99. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

23. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0'3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

24. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Tablas de contingencia

Ejemplo:

- Se han estudiado 500 enfermos del hígado analizando por un procedimiento nuevo si las lesiones son benignas o malignas. Luego se les volvió a analizar por el procedimiento usual determinando qué diagnósticos habían sido correctos y cuáles incorrectos. Los valores obtenidos se representan en la tabla:

	Diagnóstico correcto	**Diagnóstico incorrecto**	**Totales**
Lesión maligna	206	12	218
Lesión benigna	268	14	282
Totales	474	26	500

Determinamos la tabla de frecuencias relativas:

	Diagnóstico correcto (C)	**Diagnóstico incorrecto (I)**	**Totales**
Lesión maligna (M)	0’412	0’024	0’436
Lesión benigna (B)	0’536	0’028	0’564
Totales	0’948	0’052	1

Actividades resueltas

- *Imagina que estas frecuencias relativas pudieran tomarse como probabilidades. Interpreta entonces el significado de cada uno de estos valores.*

  0’412 sería la probabilidad de que el diagnóstico de lesión maligna fuese correcto: $P(M \cap C)$.

  0’024 = $P(M \cap I)$; 0’536 = $P(B \cap C)$; 0’028 = $P(B \cap I)$.

  ¿Y 0’436? El número de lesiones malignas es 218, luego 0’436 = $P(M)$.

  Del mismo modo: 0’564 = $P(B)$; 0’948 = $P(C)$; 0’052 = $P(I)$.

  Observa que $P(M) + P(B) = 1$ y que $P(C) + P(I) = 1$. Son sucesos contrarios.

- *¿Son dependientes o independientes los sucesos* M *y* C*?*

Solución:

$P(M \cap C) = P(M) \cdot P(C/M)$, por tanto: 0’412 = 0’436 · $P(C/M)$, de donde $P(C/M)$ = 0’412/0’436 = 0’945 que es distinto de 0’948 que es la probabilidad de C. Se puede afirmar que M y C son dependientes ya que $P(C/M) \neq P(C)$. Pero si redondeamos a dos cifras decimales $P(C/M)$ = 0’95 = $P(C)$, y en este caso consideramos que son sucesos independientes.

En general se denomina **tabla de contingencias** a:

	A	No A = $\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
No B = $\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

En una tabla de contingencia figuran todas las probabilidades o contingencias de los sucesos compuestos.

Observa que:

Como sabemos por la probabilidad del suceso contrario:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ y } P(B) + P(\overline{B}) = 1.$$

Observa también que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}), \text{ del mismo modo que } P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

pues se obtienen sumando respectivamente la primera columna y la primera fila.

También:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) \text{ y } P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Actividades propuestas

25. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	**Accidente en zona urbana (U)**	**Totales**
Accidente con víctimas (V)	0’27		0’56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0’58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap \text{U})$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U/V)$; $P(C/V)$; $P(V/U)$; $P(V/C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

26. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). *Observa que* lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

Autor: David Miranda
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Diagramas de árbol y tablas de contingencia

Los diagramas de árbol y las tablas de contingencia están relacionados. Dado un árbol puedes obtener una tabla de contingencia, y viceversa. Tiene interés esta relación pues con los datos del problema a veces es más sencillo construir uno de ellos y dar la solución pasando al otro.

Actividades resueltas

- Dada la tabla de contingencia, obtener el diagrama de árbol que comienza con A y no$A$ = $\overline{A}$.

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	2/9	5/9	7/9
No B = $\overline{B}$	1/9	1/9	2/9
	3/9 = 1/3	6/9 = 2/3	1

Conocemos la $P(A)$ = 3/9 = 1/3, $P(\overline{A})$ = 6/9 = 2/3, $P(B)$ = 7/9 y $P(\overline{B})$ = 2/9.

También conocemos $P(A \cap B)$ = 2/9; $P(A \cap \overline{B})$ =1/9; $P(\overline{A} \cap B)$ = 5/9 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 1/9.

Nos falta conocer $P(B/A)$ que podemos obtener dividiendo $P(A \cap B)$ entre $P(A)$:

$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = 2/9 : 3/9 = 2/3.$$

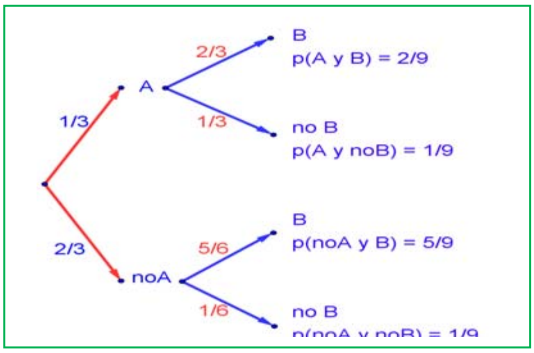
Del mismo modo calculamos:

$$P(\overline{B}/A) = P(A \cap \overline{B})/P(A) = 1/9 : 3/9 = 1/3$$

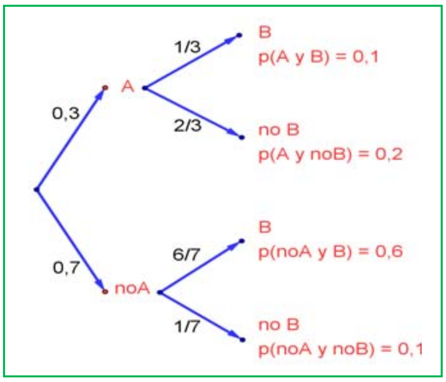
$$P(B/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)/P(\overline{A}) = 5/9 : 6/9 = 5/6$$

$$P(\overline{B}/\overline{A}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})/P(\overline{A}) = 1/9 : 6/9 = 1/6.$$

El árbol es:



Actividades resueltas



- Recíprocamente, dado el diagrama de árbol obtener la tabla de contingencia:

Ahora conocemos $P(A)$ = 0'3 y $P(\overline{A})$ = 0'7. Además conocemos $P(B/A)$ = 1/3; $P(B/\overline{A})$ = 6/7; $P(\overline{B}/A)$ = 2/3 y $P(\overline{B}/\overline{A})$ = 1/7.

Calculamos, multiplicando: $P(A \cap B)$ = 0'3·(1/3) = 0'1; $P(A \cap \overline{B})$ = 0'3·(2/3) = 0'2; $P(\overline{A} \cap B)$ = 0'7·(6/7) = 0'6 y $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ = 0'7·(1/7) = 0'1 que ponemos también en el árbol.

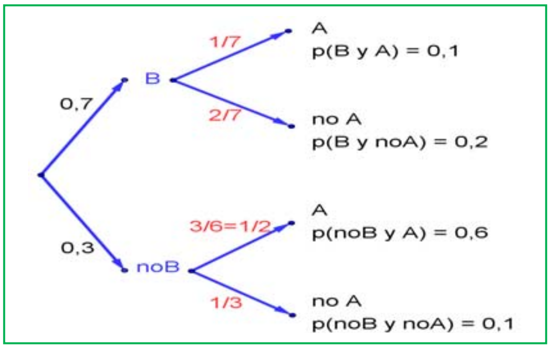
Rellenamos con estos datos una tabla de contingencia:

	A	**No** A = $\overline{A}$	
B	0'1	0'6	
No B = $\overline{B}$	0'2	0'1	
	0'3	0'7	1

Calculamos, sumando, las casillas que nos faltan, $P(B)$ = 0'1 + 0'6 = 0'7 y $P(\overline{B})$ = 0'2 + 0'1 = 0'3.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0'1	0'6	0'7
No B = $\overline{B}$	0'2	0'1	0'3
	0'3	0'7	1

Puede ser muy interesante pasar de un diagrama de árbol a la tabla de contingencia y de ésta, al otro diagrama de árbol, con el que podemos conocer:



$P(A/B)$ = 0'1/0'7 = 1/7;

$P(\overline{A}/B)$ = 0'2/0'7 = 2/7;

$P(A/\overline{B})$ = 0'3/0'6 = 3/6 = 1/2;

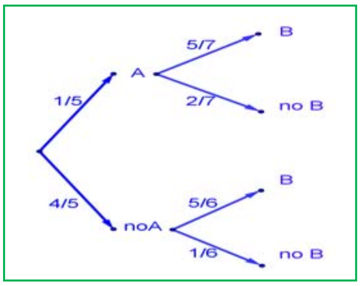
$P(\overline{A}/\overline{B})$ = 0'1/0'3 = 1/3.

Actividades propuestas

27. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	No A = $\overline{A}$	
B	0'4	0'2	0'6
No B = $\overline{B}$	0'15	0'25	0'4
	0'55	0'45	1

28. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



29. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?

30. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	Placebo (no M)	
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento. *Ayuda*: $P(M/C)$

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo. *Ayuda*: $P(\overline{M}/C)$.

1.5. Teorema de *Bayes*

Thomas Bayes en 1763 enunció el teorema que lleva su nombre. Sirve para resolver problemas del tipo de la página inicial: "Conocemos la probabilidad de que un enfermo que tiene hepatitis esté algo amarillo. Calcula la probabilidad de que alguien que esté algo amarillo, tenga hepatitis". Es decir permite calcular la probabilidad de A/B conociendo la probabilidad de B/A (o mejor, las probabilidades de B condicionado a un conjunto de sucesos A_i tales que son incompatibles dos a dos y cuya unión es todo el espacio muestral). Vamos a enunciarlo, pero ¡no te asustes! ¡Ya sabes resolver problemas en los que se usa el Teorema de *Bayes*! ¡No hace falta que te aprendas la fórmula!

Enunciado del teorema de Bayes

Sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un sistema completo de sucesos incompatibles dos a dos, con probabilidades no nulas, suma de probabilidades 1. Sea B otro suceso del que conocemos las probabilidades condicionadas: $P(B/A_i)$. Entonces:

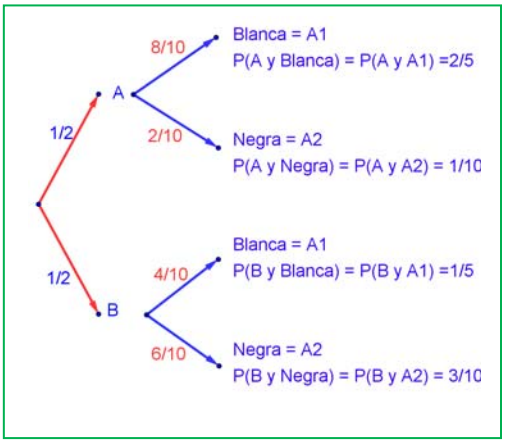
$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$$

Vamos a comprobar que ya lo sabes con un ejemplo sencillo, que ya has resuelto en las actividades propuestas del apartado anterior.

Para resolver problemas tipo *Bayes* basta construir un diagrama de árbol, luego la tabla de contingencia asociada, y a continuación el otro diagrama de árbol.

Actividades resueltas

- Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?



Debemos calcular $P(B/Negra)$.

Para que se parezca más al enunciado del teorema vamos a llamar a Blanca = A_1 y a Negra = A_2. El conjunto de sucesos $\{A_1, A_2\}$ verifica las condiciones del teorema de *Bayes*. Por tanto queremos calcular $P(B/A_2)$.

Podemos construir el árbol del margen. Por el enunciado conocemos las siguientes probabilidades.

Nos dicen que la elección de urna es al azar, por tanto $P(A) = P(B) = 1/2$.

Si sacamos una bola de la urna A sabemos que $P(Blanca/A) = P(A_1/A) = 8/10$, pues en la urna A hay 10 bolas de las que 8 son bolas blancas.

Del mismo modo sabemos:

$P(Negra/A) = P(A_2/A) = 2/10$; $P(Blanca/B) = P(A_1/B) = 4/10$, y $P(Negra/B) = P(A_2/B) = 6/10$.

Multiplicando calculamos las probabilidades de los sucesos compuestos:

$P(A \cap A_1) = 2/5$, $P(A \cap A_2) = 1/10$, $P(B \cap A_1) = 1/5$, $P(B \cap A_2) = 3/10$.

Estos datos nos permiten construir la tabla de contingencia asociada:

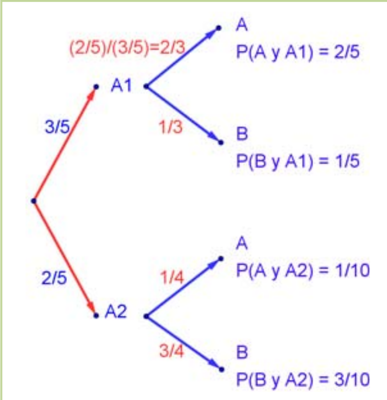
	Blanca = A_1	Negra = A_2	
A	$P(A \cap A_1) = 2/5$	$P(A \cap A_2) = 1/10$	$P(A) = 2/5 + 1/10 = 1/2$
B	$P(B \cap A_1) = 1/5$	$P(B \cap A_2) = 3/10$	$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2$
	$P(A_1) = 2/5 + 1/5 = 3/5$	$P(A_2) = 1/10 + 3/10 = 4/10 = 2/5$	1

Observa que:

$$P(B) = 1/5 + 3/10 = 1/2 = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2)$$

En general, si hubiera un conjunto de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se escribiría:

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n)\cdot P(A_n)$$



Construimos el otro diagrama de árbol. Conocemos $P(A_1) = 3/5$ y $P(A_2) = 2/5$, además de las probabilidades de las intersecciones, por lo que podemos calcular las probabilidades condicionadas, dividiendo:

Por ejemplo: $P(A/A_1) = P(A \cap A_1)/P(A_1) = (2/5)/(3/5) = 2/3$.

Con lo que tenemos resuelto nuestro problema pues:

$P(B / Negra) = P(B / A_2) = 3/4$.

Vamos a comprobar que es el mismo resultado (y los mismos cálculos) que hubiéramos obtenido usando la expresión del teorema de *Bayes*:

$$P(B/A_2) = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2/B)\cdot P(B)}{P(A_2/A)\cdot P(A) + P(A_2/B)\cdot P(B)} = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap A) + P(A_2 \cap B)} = \frac{3/10}{1/10 + 3/10} = \frac{3}{4}$$

Actividades propuestas

Problemas propuestos en Selectividad

31. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. *Ayuda*: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

32. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

33. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 3/5 y la de cruz es 2/5. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

CURIOSIDADES. REVISTA

Galileo

En el siglo XVI planteó el siguiente problema: Al tirar tres dados, ¿por qué es más probable obtener que la suma de las caras superiores sea 10, que sea 9?

Continuaba la reflexión con las posibles descomposiciones en esas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos casos hay 6 descomposiciones posibles, sin embargo, tirando muchas veces los 3 dados comprobaba que es más probable sacar un 10.

Si haces un diagrama en árbol comprobarás que todas esas descomposiciones no son igualmente probables.

Por ejemplo: (3, 3, 3) tiene una probabilidad de 1/216, mientras que la suma 6 + 2 + 2, puede salir con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) y (2, 2, 6), luego su probabilidad es 3/216.

Si quieres saber más, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

La ruleta

William Jaggers llegó a Montecarlo con unos pocos francos en el bolsillo y, durante un mes anotó los números que salían en cada ruleta, y en cuatro días ganó dos millones cuatrocientos mil francos. *Jaggers* consiguió quebrar a la banca en *Montecarlo* analizando las frecuencias relativas de cada número de la ruleta y observando que se había desgastado algo del mecanismo de una de ellas, con lo que todos los valores no tenían igual probabilidad. Apostó a los números más probables y ganó.

RESUMEN

Sucesos	Al realizar un experimento aleatorio existen varios posibles resultados o **sucesos posibles**. Un **suceso** es un subconjunto del conjunto de posibles resultados.	Tiramos un dado. Posibles resultados = {1, 2, 3, 4, 5, 6} Suceso *obtener múltiplo de* 3 = {3, 6}
Asignación de probabilidades	Una medida Límite al que tienden las frecuencias relativas. Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables entonces: p = casos favorables / casos posibles.	$P(5) = 1/6$. P(sacar múltiplo de 3) = 2/6
Axiomática de Kolmogorov	*1.* $P(E) = 1$. 2. $P(A) \geq 0$, para todo *A*. *3.* Si $A \cap B = \varnothing$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.	
Teoremas de Probabilidad	Suceso contrario: $P(X) + P(noX) = 1$. Intersección: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$. Unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	P(no 5) = 1 – 1/6 = 5/6. $P(5 \cup$ múl. 3) = 1/6 + 2/6 =3/6 *P* sacar primero un 5 y luego múltiplo de 3 =1/6·2/6 =2/36
Teorema de *Bayes*	$P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \dfrac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$	

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés? En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?
2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.
3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.
4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.
5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.
6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.
7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …. sea 12.
8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" y el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que *Galileo*!
9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par". B al suceso "Salga cruz y un número primo" y C al suceso "salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.
10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las primeras 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Razona la respuesta.
11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y de obtener cruz al tirar la moneda.
12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.
13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) $P(A) + P(noA) = 1$

b) $P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento “tirar dos monedas y contar el número de caras” es:

a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

7. Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

8. Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:

a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

9. En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es:

a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

10. Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es:

a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6