Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

3º A da ESO
Capítulo 1:
Números Racionais

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya

Revisora: María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Neste capítulo imos recordar moitas das cousas que xa sabes de cursos anteriores, como as operacións con números naturais e enteiros, as operacións con fraccións e expresións decimais. Estudaremos os números racionais.

0.CONVENCHE RECORDAR

0.1. Prioridade das operacións

Cando non hai parénteses que nos indiquen que operación facer primeiro ou en operacións dentro dunha paréntese chegouse a un acordo para saber como actuar. Deste xeito:

1º Resólvense as parénteses interiores.

Se non hai parénteses ou dentro dunha paréntese faremos:

2º As potencias e as raíces.

3º As multiplicacións e as divisións.

4º As sumas e as restas.

Débense evitar:

Expresións do tipo 1 – 100:5·5, onde non está claro que hai que facer (a multiplicación e división teñen igual prioridade). Débense poñer parénteses para indicar cal facer primeiro. A expresión de arriba pode ser:

1 – (100:5)·5 = –99 ou ben 1 – 100:(5·5) = –3.

De todas formas, se a encontras, farás:

5º Se hai varias operacións con igual prioridade faranse de esquerda a dereita.

Exemplos:

- (5 –7) · 10 – 8 **Non podemos facer 10** – **8** (en realidade si que podes, pero non debes)

Primeiro a paréntese → –2 · 10 – 8 Despois o produto → –20 – 8 Por último a resta → –28

- 10 – 2 · 3^2 = 10 – 2 · 9 = 10 – 18 = –8. Aquí está prohibido facer 10 – 2 e facer 2 · 3.
- 3 · $(–2 + 4)^2$ – 8 – 5 · 2^2 = 3 · 2^2 – 8 – 5 · 4 = 12 – 8 – 20 = –16
- $–10^2$ vale –100 xa que primeiro se fai a potencia e ademais o signo menos non está elevado a 2. Porén $(–10)^2$ si que vale +100.
- $–10^2$ = –10 · 10 = –100
- $(–10)^2$ = (–10) · (–10) = +100
- $\sqrt{9}$ · 25 = 3 · 25 = 75. Primeiro faise a raíz.
- 10 – 9*x* **non é** 1*x* xa que non pode facerse a resta baixo ningún concepto.

Ten en conta que esta prioridade é **válida sempre**, para operacións con todo tipo de números ou outros obxectos (por exemplo: os polinomios). Merece a pena sabela, non?

0.2. Uso de parénteses

As parénteses indícannos as operacións que se teñen que facer primeiro. De feito o primeiro que faremos serán as **parénteses interiores** e seguiremos **de dentro cara a fóra**. É como vestirte: primeiro pos a camisola, logo o xersei e despois a cazadora. É complicado facelo ao revés. Por iso, antes de poñerte a calcular ao chou, mira toda a expresión para ver que se fai primeiro.

- Debe haber tantas parénteses abertas como pechadas, en caso contrario dise que "as parénteses non están ben balanceadas".
- Se algo multiplica a unha paréntese non é preciso poñer o símbolo "·".

Exemplos:

- 2 · (2 – 2 ·(2 – 2 · 2)) = 2 · (2 – 2 · (2 – 4)) = 2 · (2 – 2 · (–2)) = 2 · (2 + 4) = 2 · 6 = 12
- 2(3 – 2) = 2 · 1 = 1
- (2 – 3) · (6 – 4) = –1 · 2 = –2
- Se queremos dividir entre 2 o resultado de facer 75 – 90 ***non poñeremos isto 75 – 90 : 2***, aquí o 2 só divide a 90. Escribiremos (75 – 90) : 2

As parénteses utilízanse para meter argumentos de funcións.

Por exemplo:

- Se nun programa ou na calculadora queremos facer a raíz de 100 · 3^4, escribiremos *raíz* (100*3^4).

0.3. Operacións con enteiros

Recordamos o máis importante:

Regra dos signos para a suma:

Suma	+	-
+	+	>
-	>	-

- A suma de 2 números positivos é positiva. ***Exemplo:*** +5 + 7 = +12
- A suma de 2 números negativos é negativa. ***Exemplo:*** –10 – 17 = –27

Ponse o signo –, e súmanse os seus valores absolutos.

Exemplo:

- Se perdo 10 e despois perdo outros 17, perdín 27.

A suma dun número positivo con outro negativo terá o signo do maior en valor absoluto.

Exemplo:

- –7 + 15 = +8; +8 +(–20) = 8 – 20 = –12

Ponse o signo do máis grande (en valor absoluto) e réstanse.

Exemplo:

- Se perdo 7 e despois gaño 15, gañei 8 (son maiores as ganancias cás perdas).

Exemplo:

- Se gaño 8 pero despois perdo 20, perdín 12 (son maiores as perdas).

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Regrados signos para a multiplicación (e a división):

- Positivo x Positivo = Positivo
- Positivo x Negativo = Negativo x Positivo = Negativo
- Negativo x Negativo = Positivo.

x	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemplos:

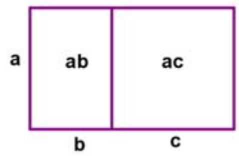
- +2 · (–7) = –14. Se recibo de herdo 2 débedas de 7 €, teño unha débeda de 14 €.
- –2 · (–7) = +14. Se me quitan 2 débedas de 7 €, gañei 14 €!

Agora algo de matemáticas serias, que xa estamos en 3º!

Demostración **rigorosa de que “0 · *x* = 0 para todo *x*” e de que “(–1) · (–1) = +1”**

Para isto imos utilizar 4 propiedades dos números que coñeces:

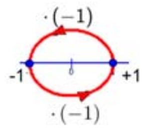
1ª) $a + 0 = a$ para todo número a (0 é o elemento neutro da suma)
2ª) **A propiedade distributiva:** $a \cdot (b + c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c$
3ª) $1 \cdot a = a$ para todo número a (1 é o elemento neutro do produto)
4ª) $-a$ é o oposto de $+a$, é dicir $-a + a = a + (-a) = 0$



Demostramos “$0{\cdot}x = 0$ para todo número x”:

Como $a - a = 0$, pola propiedade distributiva: $x(a - a) = x \cdot 0 = xa - xa = 0$

Demostramos que “(–1) · (–1) = +1”:



$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot 0 = 0$; pero pola propiedade distributiva

$(-1) \cdot (-1 + 1) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) + (-1)$.

Logo $(-1) \cdot (-1) + (-1) = 0$.

Se sumamos 1 en ambos os membros: $(-1) \cdot (-1) + (-1) + 1 = +1 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) + 0 = +1 \Rightarrow (-1) \cdot (-1) = +1$

Actividades resoltas

- *Calcula paso a paso*:

$$(((-15 - 5 \cdot (-20 - 6)) : (15 - 4^2)) + 5 - 4{\cdot}2) \cdot (-10)$$

Calculamos en primeiro lugar $-20 - 6 = -26$; $4^2 = 16$ e $4 \cdot 2 = 8$ e quédanos:

$(((-15 - 5 \cdot (-26)) : (15 - 16)) + 5 - 8) \cdot (-10) = (((-15 + 130) : (-1)) - 3) \cdot (-10) =$

$((115 : (-1)) - 3) \cdot (-10) = (-115 - 3) \cdot (-10) = -118 \cdot (-10) = +1\,180$

Actividades propostas

1. Calcula:

a) $-20 + 15$ b) $-2 \cdot (-20 + 15)$ c) $-20 : (10 - 2(-20 + 15))$ d) $(-80 - 20:(10-2(-20 + 15))){\cdot}(3- 2{\cdot}3^2)$

2. Calcula:

a) $-10 + 20 : (-5)$ b) $(-10 + 20) : (-5)$ c) $-100 : ((-20) : (-5))$
d) $(-100 : (-20)) : (-5)$ e) $\sqrt{36} \cdot 4$

3. Calcula:

a) $3-(4\cdot3-2\cdot5)^2-(3-5)^3$ b) $5-3^2-2\cdot(-5)-(7-9)^2$
c) $7-2\cdot(3-5)^2+2\cdot(-3)+8-(-2)^2$ d) $2-(2\cdot3-3\cdot4)^2-(2-4)^3$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

1. NÚMEROS RACIONAIS

1.1. Definición

Os **números racionais** son todos aqueles números que ***poden*** expresarse mediante unha fracción de números enteiros. É dicir, o número *r* é **racional** se $r = \frac{a}{b}$, con *a*, *b* números enteiros e $b \neq 0$.

Unha fracción é unha división indicada, así $\frac{7}{3} = 7:3$, pero a división non se realiza ata que o precisemos. Hai moitas ocasións nas que é mellor deixar as operacións indicadas.

Cun exemplo bastará:

- Proba a facer a división 1.142857142857…: 8, difícil, non?, porén, $\frac{8}{7}:8 = \frac{1}{7}$ é algo máis sinxela e ademais **exacta**.

O nome "racional" vén de "***razón***", que en matemáticas significa división ou cociente.

O conxunto dos números racionais represéntase por $\mathbb{Q}$.

Un número racional ten infinitas representacións en forma de fracción.

Así: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \ldots$ son infinitas fraccións que representan o mesmo número racional, chámaselles "**equivalentes**" pois teñen igual valor numérico. Se facemos as divisións no exemplo todas valen 0.333… que é a súa expresión decimal.

Os números "*enteiros*" son racionais pois poden expresarse mediante unha fracción, por exemplo $-2 = \frac{-8}{4}$

Todo número racional ten un representante que é a súa **fracción irredutible**, aquela que ten os números máis pequenos posibles no numerador e o denominador. A esta fracción chégase partindo de calquera outra dividindo o numerador e o denominador polo mesmo número. Se se quere facer nun só paso dividirase entre o Máximo Común Divisor (M.C.D.) do numerador e o denominador. Por exemplo: $\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ onde dividimos primeiro entre 10 e despois entre 2, pero podiamos ter dividido entre 20 directamente xa que 20 é o MCD(60, 80). Polo tanto $\frac{3}{4}$ é a fracción irredutible e por iso a que representa ao número racional que ten outras moitas formas de fracción como 60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20 = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36 … e por expresión decimal 0.75

1.2. Fraccións equivalentes

Dúas fraccións son equivalentes se se verifican as seguintes condicións (todas equivalentes):

- Ao facer a división obteremos a mesma **expresión decimal**. Esta é a definición.

Exemplo:

4 : 5 = 8 : 10 = 0.8 logo $\frac{4}{5}$ *e* $\frac{8}{10}$ son equivalentes e pode escribirse $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

- Os **produtos cruzados son iguais**: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a{\cdot}d = b{\cdot}c$

É doado de demostrar, multiplicamos a ambos os lados do igual por *b* e por *d*

$\frac{a}{b}{\cdot}b{\cdot}d=\frac{c}{d}{\cdot}b{\cdot}d$, como *b* : *b* = 1 e *d* : *d* = 1 quédanos *a* · *d* = *c* · *b*.

Por exemplo:

- $\frac{12}{8}=\frac{6}{4}$ posto que 12 · 4 = 8 · 6 = 48.

- **Ao simplificar as fraccións chégase á mesma fracción irredutible.**

Se A = B e C = B á forza A = C.

Exemplo:

- $\frac{80}{60}=\frac{4}{3};\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\ logo\ \frac{80}{60}=\frac{12}{9}$

- **Pódese pasar dunha fracción a outra multiplicando (ou dividindo) o numerador e o denominador por un mesmo número.**

Exemplo:

$\frac{6}{4}=\frac{24}{16}$ xa que basta multiplicar o numerador e o denominador da primeira por 4 para obter a segunda.

En xeral $\frac{a}{b}=\frac{a{\cdot}n}{b{\cdot}n}$

Redución a común denominador

Co obxecto de comparar 2 ou máis fraccións (ver cal é maior) e tamén para poder sumalas ou restalas é importante obter fraccións equivalentes que teñan o mesmo denominador.

Primeiro un ***exemplo*** e despois a teoría:

- Quero saber se $\frac{5}{6}$ é maior que $\frac{6}{7}$ sen facer a división. Buscamos un múltiplo común de 6 e de 7 (se é o mínimo común múltiplo mellor, pero non é imprescindible), 42 é múltiplo de 6 e de 7. Escribímolo como novo denominador para as 2 fraccións: $\frac{5}{6}=\frac{}{42};\frac{6}{7}=\frac{}{42}$

  Agora calculamos os novos numeradores: como o 6 o multipliquei por 7 para chegar a 42 pois o 5 multiplicámolo tamén por 7 para obter unha fracción equivalente $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 7}=\frac{35}{42}$ e como o 7 o multipliquei por 6, o 6 tamén o multiplico por 6 obtendo $\frac{6}{7}=\frac{6\cdot 6}{7\cdot 6}=\frac{36}{42}$, agora está claro cal das 2 é maior, non?

Para obter fraccións equivalentes a $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ co **mesmo denominador** buscamos un múltiplo común de *b* e *d* (se é o mínimo común múltiplo mellor) que chamamos *m* e facemos $\frac{a\cdot\frac{m}{b}}{m}$ e $\frac{c\cdot\frac{m}{d}}{m}$

1.3. Ordenación de fraccións

Para ordenar unha serie de fraccións existen varios procedementos:

i) Facer as divisións e comparar as expresións decimais.

Este procedemento é o máis fácil pero non o máis rápido (agás que teñas calculadora).

Por exemplo: Pídennos que ordenemos de menor a maior as seguintes fraccións:

$$\frac{20}{19};\frac{21}{20};\frac{-20}{19};\frac{-21}{20};\frac{29}{30};\frac{28}{29}$$

Facemos as divisións que dan respectivamente: 1.0526…; 1.05; –1.0526…; –1.05; 0.9666… e 0.9655…Mirando os números decimais sabemos que:

$$\frac{-20}{19}<\frac{-21}{20}<\frac{28}{29}<\frac{29}{30}<\frac{21}{20}<\frac{20}{19}$$

Recorda que

Os números negativos son sempre menores cós positivos e ademais entre números negativos é menor o que ten maior valor absoluto (–4 < –3).

ii) Usar a lóxica e o seguinte truco: Para fraccións positivas $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\cdot d<b\cdot c$.

Exemplo: $\frac{8}{9}<\frac{10}{11}$ xa que 8 · 11 < 9 · 10.

Demostración:

8 · 11 < 9 · 10 $\Rightarrow \frac{8{\cdot}11}{9{\cdot}11}<\frac{9{\cdot}10}{9{\cdot}11}\Rightarrow\frac{8}{9}<\frac{10}{11}$; dividimos entre 9 · 11. E simplificado.

E ao revés: $\frac{8}{9}<\frac{10}{11}\Rightarrow\frac{8{\cdot}9{\cdot}11}{9}<\frac{10{\cdot}9{\cdot}11}{11}\Rightarrow 8{\cdot}11<10{\cdot}9$; multiplicamos por 9 · 11 e simplificado.

Non é preciso que uses a demostración, poñémola só para que vexas que en matemáticas "case" todo ten a súa explicación.

E o de usar a lóxica que é?

Empezamos polo máis fácil,

Exemplo: Comparar $\frac{20}{19}$ *e* $\frac{28}{29}$

$\frac{20}{19}>1$ posto que 20 > 19. Pero $\frac{28}{29}<1$ xa que 28 < 29. Está claro que a segunda é menor.

- Un pouco máis difícil, comparamos $\frac{20}{19}$ *e* $\frac{21}{20}$:

$\frac{20}{19}=\frac{19+1}{19}=\frac{19}{19}+\frac{1}{19}=1+\frac{1}{19}$

$\frac{21}{20}=\frac{20+1}{20}=\frac{20}{20}+\frac{1}{20}=1+\frac{1}{20}$. Pero, que é maior 1/19 ou 1/20?

É maior 1/19 e polo tanto é maior a primeira. Pensa que se dividimos unha pizza en 19 anacos iguais estes son maiores que se a dividimos en 20 anacos iguais.

Se *a* e *b* son positivos $\Rightarrow a<b\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

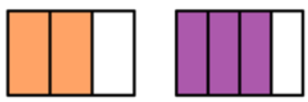
- Así que 1/3 > 1/4 por exemplo.

Máis difícil aínda:

- Comparamos $\frac{19}{20}$ *e* $\frac{18}{19}$. Agora 19/20 = 1 – 1/20 e 18/19 = 1 – 1/19.

Como 1/19 > 1/20 agora a fracción maior é 19/20 pois fáltalle menos para chegar a 1.

Con números máis sinxelos enténdese mellor: 2/3 < 3/4 pois a 2/3 fáltalle 1/3 para chegar a 1, e a 3/4 só 1/4.



2/3 < 3/4

Importante: Se *a* e *b* son positivos entón *a* > *b* $\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

iii) **Reducir a común denominador e comparar os numeradores**:

- Pídennos que ordenemos de maior a menor as seguintes

$\frac{5}{6}=\frac{5{\cdot}4}{6{\cdot}4}=\frac{20}{24}$

$\frac{7}{8}=\frac{7{\cdot}3}{8{\cdot}3}=\frac{21}{24}$

$\frac{-9}{4}=\frac{-9{\cdot}6}{4{\cdot}6}=\frac{-54}{24}$

$\frac{-7}{3}=\frac{-7{\cdot}8}{3{\cdot}8}=\frac{-56}{24}$

$\frac{-2}{1}=\frac{-2{\cdot}24}{1{\cdot}24}=\frac{-48}{24}$

fraccións:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-9}{4};\frac{-7}{3};\frac{-2}{1}$$

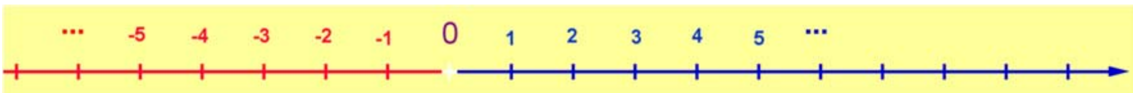
Primeiro buscamos un número que sexa múltiplo de 6, de 8, de 4 e de 3 (se é o mínimo común múltiplo mellor que mellor). Atopamos o 24 que é múltiplo de todos eles. Poñémolo como novo denominador de todas as fracción se calculamos os novos numeradores para que as fraccións sexan equivalentes: 24 : 6 = 4 logo o 6 hai que multiplicalo por 4 para chegar a 24, facemos o mesmo co 5, 5 · 4 = 20 é o novo numerador. Así coas demais.

Despois comparamos os numeradores e obtemos que:

$$\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > -2 > \frac{-9}{4} > \frac{-7}{3}$$

xa que 21 > 20 > –48 > –54 > –56

1.4. Representación na recta numérica



Esta é a recta numérica, nela todo número real ten un lugar exacto.

Recordamos cousas que xa sabes:

- Para debuxala só se poden tomar dúas decisións: onde colocamos o 0 e onde colocamos o 1, é dicir, onde está a orixe e cal é o tamaño da unidade.
- As unidades deben ser sempre do mesmo tamaño.
- Os números positivos van á dereita do 0 e os negativos á esquerda.
- O 0 non é nin positivo nin negativo.
- A recta numérica non ten nin principio nin fin. Nós só podemos debuxar unha "pequena" parte.
- Dados 2 números *a*, *b* cúmprese: ***a* < *b* se *a* está á esquerda de *b*** e viceversa.

Así por exemplo:

1 < 3; –1 < 1; –4 < –2

Todo número racional ten unha posición predeterminada na recta numérica. As infinitas fraccións equivalentes que forman un número racional caen no mesmo punto da recta. Así que 2/3 e 4/6, que son o mesmo número caen no mesmo punto.

Vexamos como representar as fraccións de forma exacta.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Fracción propia, fracción impropia e forma mixta

Fracción propia: Dise da fracción *a/b* onde ***a<b***. É dicir, o numerador é menor que o denominador.

Por exemplo:

- 4/5 ou 99/100.

Se *a* < *b* ao facer a división **a expresión decimal será menor que 1**.

Por exemplo:

- 4/5 = 4:5 = 0.8.

Fracción impropia: Dise da fracción *a/b* onde ***a* > *b*,** numerador maior que o denominador.

Exemplo:

- 15/4 ou 37/27. Se facemos a división **a expresión decimal é maior de 1.** 15/4 = 3.75 e 37/27 = 1.37037037…

Número mixto: As fraccións impropias poden escribirse como a suma dun número enteiro e dunha fracción propia.

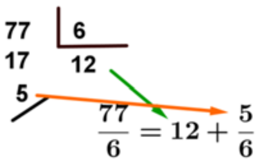
Así por exemplo:

- $\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5}$, esta última é a forma mixta.

En España non é frecuente, pero no mundo anglosaxón soe escribirse $1\frac{4}{5}$ que significa o mesmo.

A calculadora científica pasa á forma mixta, investígao.

A forma rápida e automática de escribir unha fracción en forma mixta é a seguinte:



- $\frac{77}{6}$ é impropia pois 77 > 6, para escribila en forma mixta facemos a división enteira 77:6, é dicir, sen decimais, interésannos o cociente e o resto.

O cociente é a parte enteira, o resto é o numerador da fracción e o divisor é o denominador.

É importante que o intentes facer de cabeza (cando sexa razoable), é doado, por exemplo:

- 47/6, buscamos o múltiplo de 6 máis próximo a 47 por abaixo, este é **7** · 6 = 42, polo tanto:

47/6 = 7 + 5/6

xa que de 42 a 47 van 5. Pénsao, se comemos 47/6 de pizza, temos comido 7 pizzas enteiras e ademais 5/6 de pizza.

Nota:

Tamén é doado calcular o cociente e o resto coa calculadora, por se tes présa.

Para 437/6, fai a división 437:6, obtés 72.83333..., a parte enteira é 72, só queda calcular o resto. Temos 2 camiños:

1º) Fas 437 – 72 · 6 = 5 e listo.

2º) Multiplica a parte decimal polo divisor: 0.8333... · 6 = 5, que é o resto. Se é preciso redondea (0.8333 · 6 = 4.9998 que redondeamos a 5).

Só che permitimos facer isto se sabes por que funciona; se non o sabes, esquéceo.

Se a fracción é negativa procedemos da seguinte forma:

- $\frac{-19}{5} = -\left(3 + \frac{4}{5}\right) = -3 - \frac{4}{5}$, xa que a división dá 3 de cociente e 4 de resto.

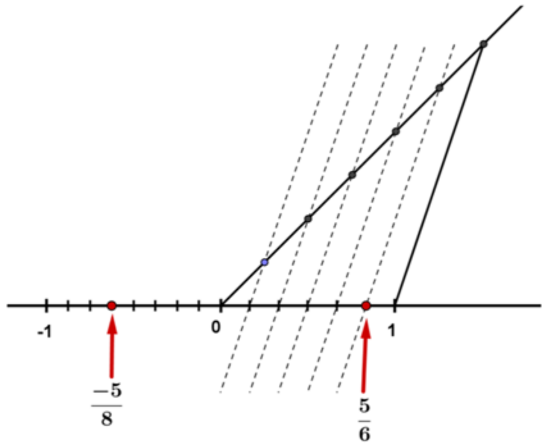
Representación de fraccións

a) Se a fracción é propia:

Por exemplo

- *Representa a fracción* 5/6: o valor está entre 0 e 1, polo tanto dividimos a primeira unidade en 6 partes iguais e tomamos 5.

Na figura indícase como facelo de forma exacta usando o ***Teorema de Tales***. Trazamos unha recta oblicua calquera que pase por 0, marcamos co compás 6 puntos a igual distancia entre si (a que sexa, pero igual). Unimos o último punto co 1 e trazamos paralelas a ese segmento que pasen polos puntos intermedios da recta oblicua (as liñas descontinuas). Estas rectas paralelas dividen o intervalo [0, 1] en 6 partes iguais.



Fíxate que para dividir en 6 partes iguais só hai que marcar 5 puntos intermedios a igual distancia, sempre un menos. Para dividir en 8 partes iguais marcamos 7 puntos intermedios.

Se a fracción é negativa faise igual pero no intervalo [–1, 0].

Na figura representamos –5/8, dividimos o intervalo [–1, 0] en 8 partes iguais e contamos 5 empezando no 0. Asegúrate de entendelo e, se non é o caso, pregunta. *Por certo, a frecha apunta ao punto e non ao espazo que hai entre eles.*

Se queremos representar a fracción propia *a/b* **divídese a primeira unidade en "*b*" partes iguais e cóntanse "*a*" divisións.**

No caso de ser **negativa** faise igual pero contando desde 0 cara á **esquerda.**

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

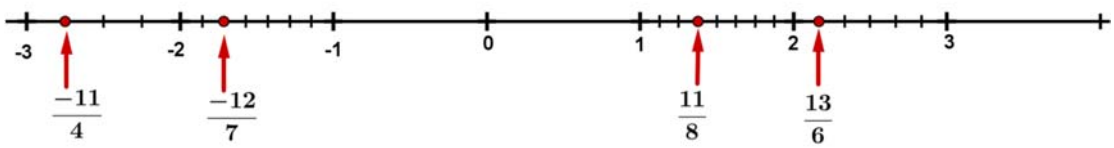
b) Se a fracción é impropia:

Actividades resoltas

- *Representamos* 13/6. O primeiro é escribila na súa forma mixta, $\frac{13}{6}=2+\frac{1}{6}$, agora é doado representala, imos ao 2, a unidade que vai do 2 ao 3 dividímola en 6 partes iguais e tomamos 1 (ver imaxe).
- Igual para $\frac{11}{8}=1+\frac{3}{8}$, imos ao 1 e a unidade que vai do 1 ao 2 dividímola en 8 partes iguais e tomamos 3.

Se a fracción é negativa procedemos así:

- *Representamos* $\frac{-12}{7}=-\left(1+\frac{5}{7}\right)=-1-\frac{5}{7}$, imos ao –1, a unidade que vai do –1 ao –2 dividímola en 7 partes iguais e contamos 5 cara á esquerda empezando en –1.
- *Representamos* $\frac{-11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, imos ao –2, dividimos en 4 partes iguais e tomamos 3, contando cara á esquerda e empezando en –2 (ver imaxe).



Actividades propostas

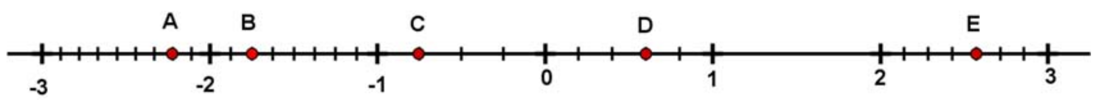
4. Pasa a forma mixta as seguintes fraccións: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$

5. Pasa a forma mixta as fraccións: $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$

6. Representa na recta numérica as fraccións: $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$

7. Pasa a forma mixta e representa as fraccións: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$

8. Calcula as fraccións que corresponden cos puntos *A, B, C, D* e *E,* expresando en forma mixta e como fraccións impropias as representadas polos puntos *A, B* e *E*.



Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

1.5. Operacións con fraccións

Imos repasar as operacións con fraccións, en concreto, a suma, a resta, o produto e a división.

Suma e resta de fraccións

A suma e a resta son as operacións máis esixentes pois só poden sumarse ou restarse cousas iguais. Non podemos sumar metros con segundos, nin € con litros. Da mesma forma **non poden sumarse terzos con quintos** nin cuartos con medios. É dicir, non se pode facer a suma $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ así tal cal, xa que os sextos e os cuartos son de distinto tamaño. Pero, haberá algunha maneira de sumalas?, si.

O primeiro é calcular 2 fraccións equivalentes que teñan o mesmo denominador, e entón xa se poderán sumar.

Vexamos o exemplo:

- Un múltiplo de 6 e 4 é 12. Escribimos 12 como novo denominador e calculamos os numeradores para que as fraccións sexan equivalentes:

  $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{12}+\frac{3\cdot 3}{12}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+9}{12}=\frac{19}{12}$, os doceavos xa se poden sumar, e o resultado son doceavos.

Outro exemplo:

- $\frac{13}{6}-\frac{51}{10}+\frac{8}{12}=\frac{13\cdot 10}{60}-\frac{51\cdot 6}{60}+\frac{8\cdot 5}{60}=\frac{130-306+40}{60}=\frac{-136}{60}=\frac{-34}{15}$

Calculamos un múltiplo de 6, de 10 e de 12 (Se é o mínimo común múltiplo mellor que mellor), escríbese como denominador común e facemos 60 : 6 = 10, logo o 13 multiplicámolo por 10, 60:10 = 6 logo o 51 multiplicámolo por 6, etc.

Cando todas as fraccións teñen igual denominador, súmanse ou réstanse os numeradores, deixando o mesmo denominador. Se é posible simplifícase a fracción resultante.

Nos casos nos que non sexa fácil calcular o mínimo común múltiplo, faise o seguinte:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Así por exemplo:

$$\frac{15}{387}+\frac{19}{155}=\frac{15\cdot 155+19\cdot 387}{387\cdot 155}=\frac{9\,678}{59\,985}=\frac{3\,226}{19\,995}$$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

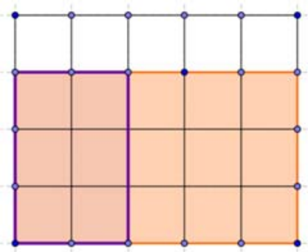
Produto e división de fraccións:

Sorprende que o produto e a división de fraccións sexan máis sinxelos que a suma e a resta.

Produto: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$, multiplícanse os numeradores entre si para obter o numerador da fracción produto e os denominadores entre si para determinar o denominador da devandita fracción. Doado, non?

Así:

$$\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 7}=\frac{15}{77}$$



Por que as fraccións se multiplican así?

Non imos demostrar o caso xeral, cun exemplo bastará.

- $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ significa dividir en 4 partes iguais e coller 3 (as 3 franxas inferiores da figura). Agora debemos facer 2/5 do que nos quedou, esas 3 franxas dividímolas en 5 partes iguais e tomamos 2. Como se pode ver quédannos 6 partes iguais das 20 totais.

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{5}{17}=\frac{\cancel{17}\cdot 5}{15\cdot\cancel{17}}=\frac{1\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{3}$$

Ás veces convén facer a multiplicación con intelixencia:

- Antes de multiplicar fixámonos en que o 17 se pode simplificar (para que imos multiplicar por 17 e logo dividir por 17?) e despois o 5 xa que 15 = 3·5.

Outro exemplo:

- $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$ faina, esperamos que chegues ao resultado correcto xa simplificado que é 1/6 ☺

Temos algo importante que dicirche, non queremos ver isto nunca, nunca:

$$\frac{\cancel{7}+3}{\cancel{7}+5}=\frac{3}{5}$$

é **absolutamente falso** (10/12 = 5/6 é o correcto). Só poden simplificarse se o número está multiplicando no numerador e no denominador (se é factor común). Isto tampouco está **nada ben**.

$$\frac{\cancel{7}\cdot 2+3}{\cancel{7}\cdot 4+5}=\frac{2+3}{4+5}$$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Fracción inversa:

A fracción inversa de $\frac{a}{b}$ é $\frac{b}{a}$ pois cúmprese que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ab}=1$ que é a definición de inverso.

Exemplos:

- A inversa de 3/4 é 4/3 e a inversa de 2 é 1/2.

División:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Polo tanto para dividir multiplícase pola inversa da fracción que divide $\frac{6}{10}:\frac{9}{15}=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{12}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{3}{4}$

Tamén podes multiplicar e logo simplificar: $\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$

Preguntarás se podes multiplicar en **X**, pois dependerá do teu profesor.

Casos curiosos:

- Dividir entre unha décima é multiplicar por 10 xa que $a:\frac{1}{10}=\frac{a}{1}\cdot\frac{10}{1}=10a$

Como caso xeral: dividir entre 1/*a* é multiplicar por *a*.

- Dividir entre un número é como multiplicar polo seu inverso: *a*: 2 = $a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$

- ***Torres de fraccións:*** Non te asustes se ves isto $\dfrac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$, é moi fácil, é o mesmo que

$\frac{6}{10}:\frac{4}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 4}=\frac{9}{4}$, non esquezas que "__" é o mesmo que ":"

Agora todo xunto.

Operacións combinadas.

Aplicaremos todo o que "sabemos" sobre prioridade e uso de parénteses.

Actividades resoltas

- *Calcula **paso a paso e simplifica**:*

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

Primeiro facemos as parénteses de dentro e a multiplicación da segunda paréntese que ten prioridade sobre a resta.

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{2}{14}\right)=$$
$$=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{5}{14}=\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right):\frac{5}{14}=\frac{11}{12}\cdot\frac{14}{5}=\frac{154}{60}=\frac{77}{30}$$

A fracción como operador

a) Fracción dun número:

- Pídennos calcular as 3 cuartas partes de 120.

Traducimos: calcular $\frac{3}{4}$ de 120. Este "de" tradúcese en matemáticas por un "por", logo:

$$\frac{3}{4}\ de\ 120 = \frac{3}{4}\cdot 120 = \frac{3\cdot 120}{4} = 3\cdot 30 = 90$$

En xeral $\frac{a}{b}\ de\ c = \frac{a}{b}\cdot c = \frac{ac}{b}$

b) Fracción dunha fracción:

Exemplos:

$$\frac{10}{6}\ de\ \frac{4}{15} = \frac{10}{6}\cdot\frac{4}{15} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

- Calcula as dúas quintas partes das dez doceavas partes de 360.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{12}\cdot 360 = \frac{2\cdot 10\cdot 360}{5\cdot 12} = \frac{20\cdot 360}{60} = 20\cdot 6 = 120$$

c) Problema inverso:

- Dinme que as tres cuartas partes dun número valen 66. Que número é?

Está claro que un cuarto será 66 : 3 = 22 e os 4 cuartos son 22 · 4 = 88.

Resumindo $66\cdot\frac{4}{3}$ = 88

O caso xeral é: $\frac{a}{b}\cdot x = c \Rightarrow x = c\cdot\frac{b}{a}$, **multiplícase o número pola fracción inversa**.

Actividades propostas

9. Calcula as catro quintas partes das tres cuartas partes de 12.

10. As cinco sextas partes dun número son 100, que número é?

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

Na vida cotiá e tamén nas Ciencias Aplicadas é preciso traballar con números aproximados.

Uns exemplos:

- Queremos comprar un terzo de metro de tea, temos que dicirlle ao dependente canto queremos e non imos ser tan idiotas como para dicirlle que nos dea 0.333… metros ou 33.333…cm que é o exacto. O normal é pedir 33 cm ou 333 mm se somos moi finos.
- Medimos un folio A4 coa regra e dános 29.7 cm, a regra chega aos mm. Queremos dividilo en 8 partes iguais, canto medirá cada parte? Se facemos 29.7 : 8 dános 3.7125 cm, pero a regra non chega a tanto, será mellor aproximar a 3.7 cm.
- Facemos un exame con 9 preguntas que valen todas igual. Temos 5 ben e as demais en branco. Que nota temos?, 10 · 5 / 9 = 5.555555556 segundo a calculadora. Poñémolas todas? Se o facemos estamos supoñendo que somos capaces de distinguir 1 parte de entre 10 000 millóns de partes iguais do exame. O razoable é 5.6 ou 5.56 se somos moi pero que moi precisos.
- Resulta curioso e debería ser delito que nas gasolineiras se anuncie: Prezo do gasóleo 1.399 €/litro. Se alguén vai e pide un litro exacto, ou 2 ou 15 non llo poden cobrar exactamente xa que non existen as milésimas de €! Deberían escribir 1.40 €/litro. É certo que desa maneira aforras 5 céntimos se botas 50 litros, pero a eles compénsalles o tema psicolóxico. A xente pouco culta en números ve 1.3 en lugar de 1.4.
- Exactamente o mesmo pasa nos supermercados: pescada 5.99 €/Kg. Son trucos baratos que unha mente adestrada sabe detectar e actuar en consecuencia. A diferenza entre 6 €/Kg e 5.99 €/Kg é que aforras 1 céntimo! Se compras 1 Kg. Se compras medio, canto aforras? Nada! 5.99:2 = 2.995 que redondeado é 3, que é o que cobran. Aínda que ben mirada, a oferta non está tan mal, se compras 5 Kg. de pescada aforras para mercar un caramelo, iso si, tes que comprar máis de medio Kg por vez.

Utilizar demasiadas cifras decimais sen estar seguro delas non é sinónimo de precisión senón de torpeza.

2.1. Redondeo

Lembrámosche como se redondean correctamente os números.

- Redondear π ás dez milésimas: π = 3.1415926535…, a cifra das dez milésimas é 5, como a cifra seguinte é 9 que é $\geq$ 5, sumámoslle 1 ao 5 e poñeremos $\pi \approx 3.1416$.

  Fíxate que π está máis preto de 3.1416 que de 3.1415.
- Redondear $\sqrt{2}$ ás centésimas: $\sqrt{2}$ = 1.41421356…, agora a cifra seguinte é 4 < 5 polo que a deixamos tal cal, $\sqrt{2} \approx 1.41$

A regra é: localizamos a cifra de redondeo, miramos a seguinte cifra (só a seguinte), se esta é menor que 5 deixamos a cifra de redondeo igual; se a cifra seguinte é 5 ou maior que 5 incrementamos en 1 a cifra de redondeo.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Máis exemplos:

Redondea

- 1.995 ás centésimas ➔ 2.00 e os ceros hai que escribilos para indicar onde redondeamos.
- 1 555 555 nos miles ➔ 1 556 000 onde hai que completar con ceros despois dos miles.
- 6.94999 nas décimas ➔ 6.9 só hai que mirar o 4.

Nota importante: Se o resultado dun problema son **€ redondearase sempre nos céntimos.**

Outra nota importante: Se queremos dar un resultado con 2 decimais nos pasos intermedios traballaremos con máis decimais, polo menos 3 ou 4, do contrario o resultado non terá a precisión que pretendemos, un exemplo:

- A = 9.65; B = 6.98 e C = 4.99. Queremos facer (A · B) · C^2. Se facemos A · B e redondeamos nas centésimas quédanos 67 . 36 e se agora multiplicamos por 4.99^2 = 24.90 sae 1 677.26.

  O resultado correcto é 1 677.20 onde só redondeamos ao final.

2.2. Cifras significativas

É o número de cifras "*con valor*" que se utilizan para expresar un número aproximado.

Uns cantos ***exemplos e*** xa o entendes:

- 2.25 ten 3 cifras significativas; 28.049 ten 5 cifras significativas.
- 5.00 ten 3; 4 000.01 ten 6;
- 10 000 non sabemos as cifras significativas que ten, pode ser 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5. Téñennos que dicir en que cifra se aproximou. Para este último caso pode recorrerse á notación científica para dicir con precisión o número de cifras significativas, así:

  1 · 10^4 ten unha cifra significativa, 1.0 · 10^4 ten 2 e así ata 1.0000 · 10^4 que ten 5.

Consideracións:

- As cifras **distintas** de 0 sempre son significativas.
- Os ceros á esquerda nunca son cifras significativas: 0.0002 ten unha cifra significativa.
- Os ceros no medio doutras cifras distintas de 0 sempre son significativos. 2 004 ten 4 cifras significativas.

Máis que o número de decimais a precisión dunha aproximación mídese polo número de cifras significativas.

Non deben utilizarse máis cifras das que requira a situación.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

11. Copia esta táboa no teu caderno e redondea co número de cifras indicado

	Cifras significativas			
Número	1	2	3	4
$\sqrt{10}$				
1/7				
95 549	100 000			
30 000	$3 \cdot 10^4$			
1.9995				2.000
20.55				

2.3. Erro absoluto e erro relativo

I.- Erro absoluto

Defínese o **erro absoluto** (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

As barras verticais lense "valor absoluto" e significan que o resultado se dará sempre positivo.

Exemplo:

- Aproximamos 1/3 de litro por 0.33 litros.

$$\text{EA} = \left|\frac{1}{3} - 0.33\right| = 0.00333\ldots \approx 0.0033 \text{ litros.}$$

Outro exemplo:

- Aproximamos 16/6 Kg. con 2 cifras significativas (2.7 Kg.)

$$\text{EA} = \left|\frac{16}{6} - 2.7\right| = |-0.0333\ldots| \approx 0.033 \text{ Kg.}$$

- **Non deben poñerse demasiadas cifras significativas no erro absoluto, 2 ou 3 son suficientes.**
- **O erro absoluto ten as mesmas unidades que a magnitude que se aproxima.**

Estes erros son grandes ou pequenos? A resposta é, comparados con que?

Para iso defínese o erro relativo que si nos dá unha medida do grande ou do pequeno que é o erro absoluto.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

II.- Erro relativo

Para comparar erros de distintas magnitudes ou números defínese o Erro Relativo (ER) como:

$$\text{ER} = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que soe multiplicarse por 100 para falar de % de erro relativo.

Se non se coñece o valor real, substitúese polo valor aproximado (a diferenza normalmente é pequena).

Calculamos o erro relativo para os exemplos de arriba:

1º) $ER = \frac{0.0033}{1/3} = 0.0099 \Rightarrow 0.99\%$ de ER   2ª) $ER = \frac{0.033}{8/3} \approx 0.0124 \Rightarrow 1.2\%$ de ER

Agora si que podemos dicir que a 1ª aproximación ten menos erro que a 2ª, xa que o erro relativo é menor.

O **erro relativo** (ER) **non ten unidades e** por iso se poden comparar erros de distintas magnitudes ou con distintas unidades.

Que facer se non se coñece o valor exacto?

Neste caso non se pode calcular o erro absoluto, porén todos os aparellos de medida teñen un erro absoluto máximo.

- Balanzas de baño que miden de 100 g en 100 g. O seu erro absoluto máximo é de 50 g.
- Cronómetros que miden centésimas de segundo. O seu erro absoluto máximo será de 0.005 s, media centésima.
- Regras normais que miden mm. O seu erro absoluto máximo será de 0.5 mm = 0.05 cm = 0.0005 m

Isto recibe o nome de **cota de erro absoluto**.

Actividades resoltas

- Pésaste nunha báscula de baño e marca 65.3 Kg, o erro absoluto máximo é de 0.05 Kg (50 g)

  Agora pesamos un coche nunha báscula especial e pesa 1 250 Kg con erro absoluto máximo de 10 Kg. Que medida é máis precisa?

  Ti ➔ $ER \leq \frac{0.05}{65.3} = 0.00077 \Rightarrow ER \leq 0.077\%$ Coche ➔ $ER \leq \frac{10}{1\,250} = 0.008 \Rightarrow ER \leq 0.8\ \%$

É moito máis precisa a báscula de baño neste caso. Porén se na mesma báscula pesamos a un bebé e marca 3.1 Kg, o erro relativo sae menor ou igual que 1.6 % (próbao) e agora a medida da báscula de baño é moito menos precisa.

Así que o erro depende da precisión da máquina e da medida que fagamos con ela.

Actividades propostas

12. Proba que 123.45 con EA = 0.005 e 0.12345 con EA = 0.000005 teñen o mesmo ER.

13. Contesta Verdadeiro ou Falso e xustifica a túa resposta:

a) Para unha mesma máquina de medir o erro cometido é menor canto máis pequena sexa a medida.

b) Non se poden comparar erros relativos de distintas magnitudes.

c) Poñer prezos como 1.99 €/Kg é un intento de engano.

d) Comprar a 1.99 €/Kg fronte a 2 €/Kg supón un aforro.

e) Poñer moitas cifras nun resultado significa que un é un gran matemático.

f) A precisión mídese polo número de cifras decimais.

3. FRACCIÓNS E DECIMAIS

Imos ver como se pasa de fracción a decimal e de decimal a fracción.

3.1. Expresión decimal dunha fracción

Toda fracción ten unha expresión decimal que se obtén dividindo o numerador entre o denominador:

$$a/b = a : b.$$

Exemplos:

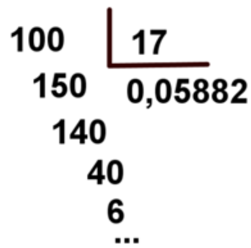
$$\frac{3}{25} = 0.12;\ \frac{68}{99} = 0.686868\ldots;\ \frac{91}{80} = 1.1375;\ \frac{177}{90} = 1.9666\ldots$$

Como podes observar unhas veces a expresión decimal é exacta (xa que o resto sae 0) e outras veces sae periódica, infinitos decimais entre os que se repite un bloque de cifras que se denomina período.

Sempre sae así, exacto o periódico?, ti mesmo contestarás cando leas o seguinte.

- Facemos 1/17 = 1:17 = 0.05882352941…, que son as cifras que amosa a calculadora, non parece ter período, pero será posible que si o teña pero que non o vexamos por ser moi longo?

Empezamos a facer a división:



Os restos obtidos son 10; 15; 14; 4; 6; …

Como sabes os restos son inferiores ao divisor e neste caso poden ser 1; 2; 3; 4; …; 15 ou 16, o 0 non pode saír, explicámolo despois.

Facemos agora 2 preguntas: que ocorre se volve saír o mesmo resto 2 veces?, ten á forza que repetirse algunha vez un resto?

A resposta á primeira pregunta é que se se repite un resto repetirase a cifra do cociente e a partir de aí repetiranse todas en forma de período.

A resposta á segunda pregunta é: Si, á forza, seguro que si! Se teño 16 posibles restos e supoñemos que saíron os 16 posibles xa, que ocorre ao sacar o seguinte?

Enténdelo mellor con caramelos. Teño moitos caramelos para repartir entre 16 persoas. Xa lle dei 1 caramelo a cada un, é dicir, todos teñen xa 1 caramelo. Dispóñome a repartir o seguinte, tocaralle a alguén que xa ten?

A isto chámaselle en matemáticas ***"Principio do Pombal"*** e é unha ferramenta moi potente. Busca algo sobre el.

- Meto 5 pelotas en 4 caixas, haberá algunha caixa con máis de 1 pelota?

Esperamos que o entenderas: **no peor dos casos** o resto número 17 ten que coincidir con algún dos anteriores, repetiranse as cifras do cociente e polo tanto a expresión decimal é periódica.

- Podes comprobar que efectivamente os restos son 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12, 1, 10, …, o peor dos casos posibles, repítese o que fai o número 17. O normal é que se repita antes. Por certo, que a división sae:

1 : 17 = 0.**0588235294117647**0588235294117647… un período de só 16 cifras!

Aínda que vimos un caso particular, esta é unha regra xeral:

A expresión decimal dunha fracción é exacta ou periódica.

O número de cifras do período de $1/n$ é menor ou igual que $n - 1$.

Cando sae exacta e cando periódica?

- Pois é fácil, dannos unha fracción como por exemplo $\frac{27}{150}$, primeiro simplificámola ata obter a irredutible: $\frac{27}{150} = \frac{9}{50}$, fixámonos só no denominador e descompoñémolo en factores primos, $50 = 5 \cdot 10 = 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5^2$, como os factores primos son só 2 e 5 a expresión decimal é exacta.

Vexamos a razón:

- $2 \cdot 5^2$ é divisor de $2^2 \cdot 5^2 = 100$ unha potencia de 10. Cúmprese $\frac{2^2 \cdot 5^2}{2 \cdot 5^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \frac{2}{100} = 0.02$, só resta multiplicar por 9 ➔ $\frac{9}{2 \cdot 5^2} = 0.02 \cdot 9 = 0.18$.
  Fíxate que o número de decimais é 2, o maior dos expoñentes de 2 e 5.

- Por exemplo $\frac{1}{2^4 \cdot 5^3} = 0.0005$ ten 4 cifras decimais pois o maior expoñente é 4.

En xeral $\frac{1}{2^n \cdot 5^m}$ ten expresión decimal exacta e o número de cifras decimais é o máximo entre *n* e *m*.

- O outro caso: $\frac{20}{42} = \frac{10}{21}$, descompoñemos o 21 en factores primos, $21 = 3 \cdot 7$, como hai factores distintos de 2 e 5 a expresión será periódica.
  Vexamos: Se a expresión fose exacta poderiamos escribir $\frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow \frac{10 \cdot 10^n}{3 \cdot 7} = a$, con "*a*" un número enteiro. Pero isto non pode ser!, 10 só ten os factores 2 e 5 e os factores 3 e 7 non poden simplificarse. Como non pode ser exacta será periódica.

$$1.175 = \frac{1\,175}{1\,000} = \frac{47}{40}$$
$$20.68 = \frac{2\,068}{100} = \frac{517}{25}$$
$$3.1416 = \frac{31\,416}{10\,000} = \frac{3\,927}{1\,250}$$

Se no denominador dunha fracción irredutible aparecen factores primos distintos de 2 e de 5 a expresión decimal será periódica.

Actividades propostas

14. Sen facer a división indica se as seguintes fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica:

a) $\frac{21}{750}$ b) $\frac{75}{21}$ c) $\frac{11}{99}$ d) $\frac{35}{56}$

3.2. Forma de fracción dunha expresión decimal

Os números decimais exactos ou periódicos poden expresarse como unha fracción. A esta fracción chámaselle **fracción xeratriz**.

$$1.175 = \frac{1\,175}{1\,000} = \frac{47}{40}$$
$$20.68 = \frac{2\,068}{100} = \frac{517}{25}$$
$$3.1416 = \frac{31\,416}{10\,000} = \frac{3\,927}{1\,250}$$

De decimal exacto a fracción:

É moi doado, mira os exemplos da dereita.

Pillaches o truco?

Para obter a fracción xeratriz ponse no numerador o número sen a coma e no denominador a unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais ten. Simplifícase a fracción.

As persoas intelixentes comproban o que fixeron, divide 47 entre 40, se che dá 1.175 está ben!, e non fai falla que ninguén cho diga ☺.

De decimal periódico a fracción:

Antes de ver o método rigoroso imos xogar un pouco.

- Colle a **calculadora** e fai as seguintes divisións e anota os resultados decimais no teu caderno:

1:9; 2:9; 3:9; 8:9; 1:99; 13:99; 37:99; 98:99; 1:999; 123:999; 567:999; 998:999.

Nota:

Ao facer 6/9 a calculadora dá 0.6666666667, realmente é 6 periódico, a calculadora faino ben e redondea na última cifra.

Se observaches ben xa sabes escribir un montón de expresións decimais periódicas á súa forma de fracción, é dicir, sabes calcular a súa **fracción xeratriz**.

Por exemplo:

- 0.444… = 4/9;
- 0.333… = 3/9 = 1/3.
- 0.171717… = 17/99;
- 0.454545… = 45/99 = 5/11;
- 0.878787 = 87/99 = 29/33
- 0.337337337… = 337/999;
- 0.549549… = 549/999 = 61/111
- Como será 0.1234512345…?, pois 12 345/99 999 = 4 115/33 333

  Así que xa o sabes, para ter un período de *n* cifras o denominador ten *n* noves.
- Pero o truco anterior non serve para 5.888…

  Adaptámolo: 5.888… = 5 + 0.888… = $5 + \frac{8}{9} = \frac{45}{9} + \frac{8}{9} = \frac{53}{9}$
- Segue sen servir para 0.7333…

Facemos 0.7333... = 0.7 + 0.0333... = $\frac{7}{10}+\frac{3}{9}:10=\frac{7}{10}+\frac{3}{90}=\frac{21}{30}+\frac{1}{30}=\frac{22}{30}=\frac{11}{15}$

Combinando os 3 trucos anteriores saen todos, pero non seguimos, deixamos que investigues ti. Nós imos explicar o método serio.

Outro exemplo:

- Pídennos expresar o número 7.3252525... á súa forma de fracción. O primeiro será poñerlle un nome, por exemplo, *N* = 7.3252525...; o segundo é **conseguir 2 números coa mesma parte decimal**.

  O ante período ten 1 cifra e o período 2. Para conseguir a mesma parte decimal multiplicamos por 1 000 e a coma vaise ata despois do primeiro período. Se multiplicamos por 10 a coma vaise para diante do primeiro período.

$$\begin{array}{rl} 1000N = & 7325{,}2\cancel{5}25\ldots \\ -\quad 10N = & 73{,}2\cancel{5}25\ldots \\ \hline 990N = & 7252 \end{array} \Rightarrow N = \frac{7252}{990} = \frac{3626}{495}$$

  Xa temos 2 números coa mesma parte decimal, se os restamos esta desaparece e podemos despexar *N*.

  Fíxate que a resta se fai nos 2 membros á vez.

Método formal:

Para obter a fracción xeratriz dunha expresión decimal multiplicamos o número pola potencia de 10 necesaria para levarmos a coma ao final do primeiro período, logo multiplicámolo outra vez para que a coma quede ao principio do primeiro período.

Outro exemplo e xa o entendes:

- *N* = 15.25636363...

  Como conseguir 2 números coa parte decimal .636363...?

  Pois o máis doado é 10 000*N* = 152 563.6363... e 100*N* = 1 525.6363...

  Restamos: 9 900*N* = 151 038 ➔ *N* = $\frac{151\,038}{9\,900}=\frac{8\,391}{550}$

  Estes son os casos máis difíciles (periódicos mixtos), cando non haxa ante período (periódico puro) só haberá que multiplicar unha vez posto que xa temos o período xusto despois da coma:

- *N* = 4.545454...

  100*N* = 454.5454...

  – 1*N* = 4.5454...

  99*N* = 450 ➔ *N* = $\frac{450}{99}=\frac{50}{11}$

Exemplos:

N	10N –	1N =	9N	
1.333…	13.333…–	1.333…=	12	N=12/9
N	100N –	10N =	90N	
5.6777…	567.77…–	56.77…=	511	N =511/90
N	1000N –	100N =	900N	
8.65888…	8 658.88…–	865.88...=	7 793	N = 7 793/900

Por último, se che din que hai un truco para facer isto en segundos e sen quentar a cabeza, é certo. Haino. Coñecémolo. É unha regra que se esquece e polo tanto non vale para nada, non é razoada.

Actividades propostas

15. Pasa a fracción e simplifica:

a) 1.4142

b) 0.125

c) 6.66

16. Pasa a fracción e simplifica:

a. 1.41424142…

b. 0.125125…

c. 6.666…

17. Pasa a fracción e simplifica:

1) 1.041424142…

2) 0.7125125…

3) 6.7666…

18. Determina a fracción xeratriz de:

A. 0.333… + 0.666…

B. 0.888… · 2.5

C. 0.65 : 0.656565…

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE FRACCIÓNS

Vemos uns cantos exemplos:

i) Cantos litros hai en 80 botellas de 3 cuartos de litro cada unha?

O primeiro que debes facer é poñer un exemplo con números máis fáciles.

Teño 10 botellas cada unha de 2 litros. Está claro que temos 20 litros, que operación fixemos?, multiplicar?, pois o mesmo facemos cos números do problema:

$$\frac{3}{4}\frac{litros}{botella}\cdot 80\ botellas = \frac{3\cdot 80}{4} = 60 litros$$

(Observa que botellas van con botellas e as unidades finais son litros).

ii) Cantas botellas de 3 oitavos de litro necesito para envasar 900 litros?

Novamente cambiamos os números por outros máis sinxelos: quero envasar 10 litros en botellas de 2 litros. Está claro que necesito 5 botellas (10:2).

Facemos o mesmo cos nosos números:

$$900 \text{ litros} : \frac{3}{8} \text{ litros/botella} = 900 : \frac{3}{8} = 900\cdot\frac{8}{3} = 300\cdot 8 = 2\,400 \text{botellas}$$

Fíxate que litros vai con litros e que as botellas que dividen no denominador ao final pasan multiplicando no numerador, polo que a unidade do resultado é "botellas".

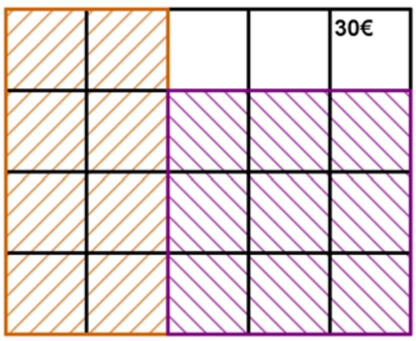
$$\frac{litros}{1} : \frac{litros}{botella} = \frac{litros\cdot botella}{litros} = botella$$

*iii) Uxía gaña certo diñeiro ao mes. Se gasta o 40 % del en pagar a letra do piso, o 75 % **do que lle queda** en facturas e lle sobran 90 € para comer. Canto gaña e canto gasta no piso e en facturas?*

O primeiro: 40 % = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ e 75 % = $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Facémolo de 2 maneiras e elixes a que máis che guste:

a) Método gráfico:



Facemos un rectángulo de 5x4 cadrados que son os denominadores.

Das 5 franxas verticais iguais quitamos 2 que é o que gasta na letra do piso.

O que queda está dividido en 4 partes iguais e quitamos 3 que é o que gasta en facturas. Quédannos 3 cadrados que son os 90 € da comida. Logo un cadrado é 90 : 3 = 30 €.

O que gaña é 30 · 20 = 600 €.

Na letra gasta **30 · 8 = 240 €** e en facturas **30 · 9 = 270 €**.

b) Con fraccións:

Se a unha cantidade lle quitamos os seus 2/5 quédannos 3/5 dela (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5)

En facturas gastamos $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$

Se tiñamos 3/5 e gastamos 9/20 quédannos $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}=\frac{12-9}{20}=\frac{3}{20}$ da cantidade inicial. Eses 3/20 dinnos que son 90 €. Polo tanto 1/20 serán 90 : 3 = 30 €.

A cantidade total son os 20/20 logo 30·20 = 600 €.

Na letra do piso gasto 2/5 de 600 = 1200:5= 240 € e en facturas 3/4 de(600 – 240) = 3/4 de 360 = 270 €.

Teño	Quito	Quédame
1	2/5	3/5
3/5	3/4 de 3/5 = 9/20	3/5 – 9/20 = 3/20

En calquera caso os problemas compróbanse.

40% de 600 = 0.4 · 600 = 240 € gasta na letra.

600 – 240 = 360 € quedan.

75% de 360 = 0.75 · 360 = 270 € gasta en facturas.

360 – 270 = 90 € que lle quedan para comer. Funciona!

iv) Unha pelota perde en cada bote 1 quinto da altura desde a que cae.

a) Cantos botes debe dar para que a altura acadada sexa inferior a 1 décimo da inicial?

b) Se despois do cuarto bote a súa altura é de 12.8 cm, cal era a altura inicial?

O primeiro é darse conta de que se perde un quinto da altura queda cos 4 quintos desta.

Polo tanto en cada bote a altura multiplícase por 4/5.

a) Temos que ver para que n se cumpre $\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{1}{10}=0.1$

E isto facémolo probando coa calculadora: $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\approx 0.107>0.1$ pero $\left(\frac{4}{5}\right)^{11}\approx 0.0859<0.1$, logo fan falla 11 botes.

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$ que é a fracción pola que se multiplicou a altura inicial.

$$\frac{256}{625}h=12.8\Rightarrow h=12.8\cdot\frac{625}{256}=31.25\ cm$$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

v) A Mariana descóntanlle a quinta parte do seu soldo bruto en concepto de IRPF e a sexta parte do mesmo para a Seguridade Social. Se cobra 600 € *netos, cal é o seu soldo bruto?*

Sumamos as dúas fraccións xa que se refiren á mesma cantidade:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6+5}{30}=\frac{11}{30}$$

que é a parte que descontan do soldo bruto para ter o neto. Quédanlle $1-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$ da cantidade inicial.

Eses 19/30 dinnos que son 600 €.

Para calcular o soldo bruto facemos:

$$600 \cdot \frac{30}{19} \approx 947.37 \text{ €}.$$

Comprobación:

1/5 de 947.37 = 189.47 € paga de IRPF

1/6 de 947.37 = 157.90 € paga á S.S.

947.37 – 189.47 – 157.90 = 600 € que é o soldo neto. Ben!

Podería haber un pequeno desfase de algún céntimo debido ás aproximacións.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Suma de infinitas fraccións

O sentido común diche que se sumamos infinitos números positivos a suma ten que ser infinita. Pois, non necesariamente!

Propoñémosche un reto, imos sumar $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ onde cada fracción é a metade da anterior.

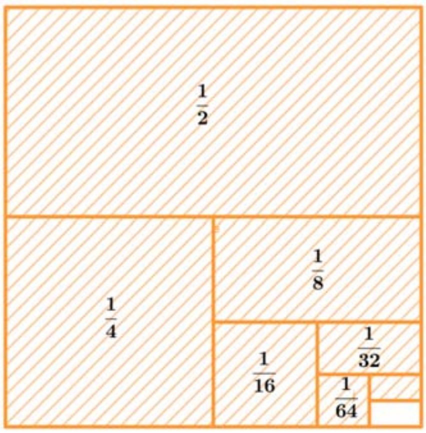
Os puntos suspensivos indican que isto non acaba nunca, en teoría deberiamos sumar e sumar e seguir sumando de forma indefinida. Na práctica non pode facerse, pero para iso están as matemáticas.

Colle a calculadora e empeza: 1:2 + 1:4 + 1:8 + 1:16 +1:32 + 1:64

Dáche 0.984375 ou se tes sorte 63/64, só falta 1/64 para chegar a 1!

Suma agora ao resultado anterior 1/128, obtemos 0.9921875 ou o que é o mesmo 127/128, só falta 1/128 para chegar a 1. Debes seguir, os seguintes números a sumar son 1/256, 1/512, 1/1024…

Se te fixaches achegámonos cada vez máis a 1. Vale, non imos chegar nunca, pero se quixeramos darlle un valor á suma infinita de arriba, cal lle darías?



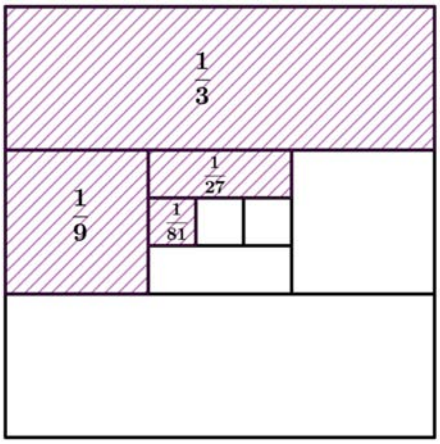
Os matemáticos danlle o valor 1.

Observa. Tes unha folla de papel cadrada de área 1. Córtala pola metade e deixas o anaco cortado enriba da mesa e o sen cortar na túa man. Volves cortar pola metade o anaco que tes na man e volves deixar enriba da mesa o anaco cortado. E segues, e segues… Sumas os anacos de papel que tes na mesa. Podería algunha vez sumar máis de 1? Non, evidentemente, son anacos dun papel de área 1. Algunha vez terías todo o papel enriba da mesa? Cada vez tes menos papel na man, e máis na mesa, pero ao cortar pola metade, nunca o terías todo. Porén os matemáticos din que no infinito esa suma vale 1.

Agora temos unha pizza e imos comela de "terzos en terzos", é dicir, primeiro 1/3, despois 1/3 de 1/3, logo 1/3 de 1/3 de 1/3, e así sucesivamente…

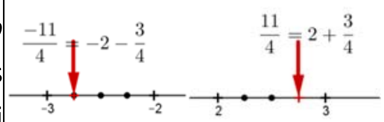
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots=$$

Canto cres que vale esta suma?



Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Prioridade das operacións	1º Parénteses interiores, 2º Potencias e raíces, 3º Produtos e divisións, 4º Sumas e restas.	$10 - 5 \cdot (4 - 3 \cdot 2^2) = 50$
Signo da suma	(+) + (+) = (+) súmanse, (–) + (–) = (–) súmanse. (+) + (–)= ? ten o signo do maior en valor absoluto.	–7/3 – 8/3 = –15/3 = –5 –12/5 + 8/5 = –4/5
Signo do produto e a división	Se teñen igual signo dá positivo. (+) · (+) = (–) · (–) = (+) Se teñen signo contrario dá negativo. (+) · (–) = (–) · (+) = (–)	–4 · (–10) = +40 +2 · (–15) = –30
Número Racional	Un número *r* é racional se pode escribirse como *r* = *a*/*b* con *a*, *b* enteiros e $b \neq 0$.	2; 3/8; –7/2 son racionais. Tamén 0.125 e 2.6777... $\sqrt{2}$ e π non o son.
Fracción irredutible	Obtense dividindo o numerador e o denominador polo mesmo número. Numerador e denominador son primos entre si.	360/840 = 3/7, a última é irredutible.
Fraccións equivalentes	Son equivalentes as fraccións que teñen igual expresión decimal. Dúas fraccións equivalentes representan ao mesmo número racional. Os seus produtos cruzados valen o mesmo.	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{15}{20}$ = 0.75 son equivalentes. 3·20 = 4·15
Ordenación de fraccións	Pásanse a común denominador ou calcúlase o seu valor decimal ou úsase a lóxica e o truco *a*/*b*<*c*/*d* se *ad*<*bc* para números positivos.	$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$ $xa\ que$ $\frac{15}{20} < \frac{16}{20} < \frac{18}{20}$ Entre outros motivos
Representación	Se é preciso pásanse á forma mixta. Para *n* + *a*/*b* dividimos a unidade que vai de *n* a *n*+1 en *b* partes iguais e tomamos *a*. Para –*n* – *a*/*b* dividimos a unidade que vai de –*n* a –*n* – 1 en *b* partes iguais e contamos *a* empezando en –*n*.	
Suma e resta de fraccións	Pásanse a común denominador e súmanse (réstanse) os numeradores.	$\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$
Produto e división	*a*/*b* · *c*/*d* = *ac*/*bd* *a*/*b* : *c*/*d* = *a*/*b* · *d*/*c* = *ad*/*bc*	$\frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{7 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ $\frac{6}{5} : \frac{14}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{14} = \frac{6}{7}$
Fracción dun número	*a*/*b* de *x* = *a*/*b* ·*x* = (*ax*)/*b*	3/4 de 60 = 3/4 · 60 = 45 3/4 de 4/5 = 3/4 · 4/5 = 3/5
Cifras significativas	É o número de cifras “*con valor*” que se utilizan para aproximar un número.	0.025 ten 2 3.020 ten 4 3 000 non sabemos as que ten

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Erros	Erro absoluto: EA = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$ Erro relativo: ER = $\dfrac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$ multiplícase por 100 para obter o % de ER.	$\dfrac{2}{3} \approx 0.7 \Rightarrow EA \approx 0.033$ $\Rightarrow ER \approx \dfrac{0.033}{2/3} \approx 0.050$ $\Rightarrow 5\ \%$
Fraccións e decimais	A expresión decimal dunha fracción sempre é exacta ou periódica. Exacta se o denominador só ten como factores primos o 2 ou o 5. Periódica no caso contrario.	3/40 = 0.075 exacta 5/12 = 0.41666... periódica
Paso de decimal a fracción	Expresión decimal exacta: divídese o número sen a coma entre a unidade seguida de tantos ceros como cifras decimais. Expresión decimal periódica: multiplícase *N* por potencias de *10* ata conseguir 2 números coa mesma parte decimal, réstanse e despéxase *N.*	3.175 = 3175/1000 = 127/40 *N* = 2.0333... 100*N* – 10*N* = 183 90*N* = 183 ➔ *N* = 183/90 = 61/30.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Calcula paso a paso

   (–5 + 4 · (–2) + 7) : (7 – (3 – 4) · (–1))

2. Ordena de menor a maior:

$$\frac{8}{9};\frac{-8}{9};\frac{4}{5};\frac{38}{45};\frac{77}{90};\frac{-9}{8}$$

3. Indica razoadamente que fracción é maior:

$$a)\ \frac{102}{101}\ e\ \frac{98}{99}\quad b)\ \frac{98}{99}\ e\ \frac{97}{98}\quad c)\ \frac{-102}{101}\ e\ \frac{-103}{102}$$

4. Demostra que 4.999… = 5

   Xeneraliza: Canto vale *n*.999…?

5. Pasa a forma mixta: $\frac{16}{9};\frac{152}{6};\frac{-17}{5};\frac{-23}{4}$

6. Representa de forma **exacta** na recta numérica:

$$\frac{760}{240};\ 3.125;\ -\frac{46}{14};\ -2.1666\ldots$$

7. Simplifica:

$$a)\ \frac{2\cdot 7\cdot 15}{21\cdot 10}\quad b)\ \frac{10+6}{10-2}\quad c)\ \frac{2\cdot 3+4}{2\cdot 5+10}$$

8. Calcula a fracción que cae xusto no medio de 3/2 e 9/4 na recta numérica.

   Pista: a media aritmética $\frac{a+b}{2}$

   Representa as 3 fraccións na recta numérica.

9. A media harmónica defínese como H(*a*, *b*) = $\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$, o inverso da media aritmética dos inversos.

   a) Demostra que H(a, b) = $\frac{2ab}{a+b}$

   b) Calcula $H\left(\frac{3}{2},\frac{11}{3}\right)$

10. Calcula a fracción inversa de $3+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}$

11. Opera e simplifica: $\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{7}{2}$