Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO

Capítulo 1: Números reais

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti

Revisor: Javier Rodrigo e María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

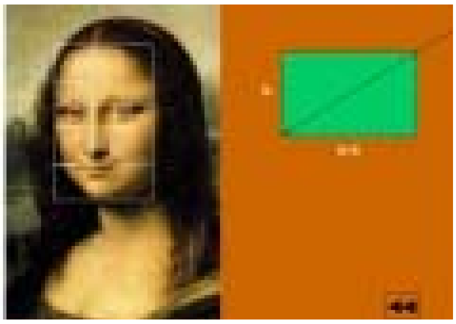
Resumo

Xa coñeces os números naturais, os números enteiros e os números racionais. Neste capítulo imos estudar os números reais que están formados polos números racionais e os irracionais.

Con algúns números reais irracionais xa te atoparas, como con $\sqrt{2}$, ou con π… Pero hai moitos, moitos máis. Hai moitos máis números irracionais que racionais. E preguntaraste, como se pode dicir iso se son infinitos? Resulta que hai uns infinitos máis grandes que outros. Ao infinito dos números naturais chámaselle "*infinito numerable*". O infinito dos números enteiros e o dos números racionais tamén é "*infinito numerable*", pero o dos números reais xa non é numerable, é moito maior, é denominado "*a potencia do continuo*".

Unha das propiedades máis importantes dos números reais é a súa relación cos puntos dunha recta, polo que aprenderemos a representalos na recta "*real*" na que non deixan "buratos".

O número de ouro na Gioconda



Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Neste primeiro capítulo imos repasar moitas cosas que xa coñeces, como as operacións cos números, representar os números nunha recta, as potencias… se todo iso o dominas suficientemente, o mellor é que pases moi á présa por el, e dediques o teu tempo a outros capítulos que che resulten máis novos. Porén, seguro que hai pequenos detalles que si poden resultarche novos, como por exemplo que os números irracionais, xunto cos números racionais, forman o conxunto dos *números reais*, e que a cada número real lle corresponde un punto da recta (propiedade que xa tiñan os números racionais) e a cada punto da recta lle corresponde un número real. Por iso, á recta numérica imos chamala *recta real*.

Empezamos cun problema para que midas o que recordas sobre operacións con fraccións:

Actividades propostas

1. *As perlas do raxá*: Un raxá deixoulles á súas fillas certo número de perlas e determinou que o reparto se fixera do seguinte modo. A filla maior tomaría unha perla e un sétimo do que quedara. A segunda filla recibiría dúas perlas e un sétimo do restante. A terceira moza recibiría tres perlas e un sétimo do que quedara. E así sucesivamente. Feita a división cada unha das irmás recibiu o mesmo número de perlas. Cantas perlas había? Cantas fillas tiña o raxá?

1. DISTINTOS TIPOS DE NÚMEROS

1.1. Operacións con números enteiros, fraccións e decimais

Operacións con números enteiros

Recorda que:

Os números **naturais** son: $\mathbb{N}$ = **{1, 2, 3 …}**.

Existen ocasións da vida cotiá nas que é preciso usar números diferentes dos números naturais. Fíxate nestes exemplos:

Exemplos:

- Se se teñen 20 € e se gastan 30 euros, terase unha débeda de 10 euros, é dicir –10 €.
- Cando vai moito frío, por exemplo 5 graos baixo cero, indícase dicindo que fai –5 °C.
- Ao baixar no ascensor ao soto 3, baixaches ao andar –3.

Os **números enteiros** son unha ampliación dos números **naturais** ($\mathbb{N}$). Os números enteiros **positivos** son os números naturais e escríbense precedidos do signo +: +1, +2, +3, +4, +5… Os enteiros **negativos** van precedidos do signo –: –1, –2, –3… O **cero** é o único número enteiro que non é nin negativo nin positivo e non leva signo.

O conxunto dos números enteiros represéntase por $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ = **{… –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 …}.**

Recorda que:

Para **sumar** (ou restar) números enteiros podemos sumar por un lado todos os números enteiros positivos e os negativos polo outro, restando o resultado.

Exemplo:

- Se *a, b* e *c* son números enteiros entón:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Para **multiplicar** ou dividir números enteiros tense en conta a regra dos signos.

Exemplo:

- **(+5) · (+4) = +20 (–3) · (–5) = +15 (+5) · (–4) = –20 (–6) · (+5) = –30**

Actividades propostas

2. Realiza as seguintes operacións:

a) +8 + (–1) · (+6) b) –6 + (–7) : (+7) c) +28 – (–36) : (–9 –9)

d) +11ab + (+7) · (+6ab– 8ab) e) –7a^2b – [+4a^2b – (–6a^2b) : (+6)] f) +9 + [+5 + (–8) · (–1)]

3. Utiliza a xerarquía de operacións para calcular no teu caderno:

a. 6 · (– 5) – 3 · (–7) + 20 b. –8 · (+5) + (–4) · 9 + 50

c. (–3) · (+9) – (–6) · (–7) + (–2) · (+5) d. –(–1) · (+6) · (–9) · (+8) – (+5) · (–7)

Operacións con fraccións

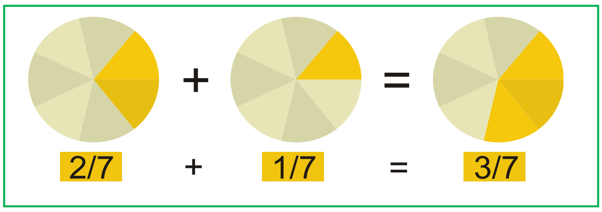
Recorda que:

Unha ***fracción*** é unha expresión da forma $\frac{m}{n}$ onde tanto m como n son números enteiros. Para referírmonos a ela dicimos *"m partido por n"*; m recibe o nome de ***numerador*** e n o de ***denominador***.

As fraccións cuxo numerador é maior có denominador reciben o nome de **fraccións impropias**. As fraccións cuxo numerador é menor có denominador reciben o nome de **fraccións propias.**

Para **sumar** ou restar fraccións que teñen o **mesmo denominador** realízase a suma, ou a resta, dos numeradores e mantense o mesmo denominador.

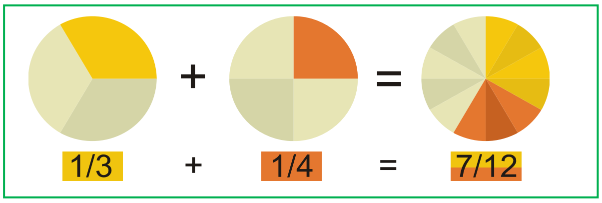
Para sumar ou restar fraccións con **distinto denominador**, redúcense a común denominador, buscando o mínimo común múltiplo dos denominadores.



Exemplos:

- a) $\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

- b) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$



Os denominadores son diferentes, 3 e 4. O seu mínimo común múltiplo é 12. Ao dividir 12 entre 3 dános 4 e ao facelo entre 4 obtemos 3.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

4. Efectúa as seguintes operacións con fraccións:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

5. Simplifica as seguintes fraccións:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Operacións con expresións decimais

Unha **expresión decimal** consta de dúas partes: a súa **parte enteira**, o número que está á esquerda da coma, e a súa **parte decimal**, o que se encontra á dereita da coma.

Observa que:

A coma pódese escribir arriba: 3’5 (aínda que actualmente a RAG o considera falta de ortografía), ou abaixo: 3,5, ou tamén se utiliza un punto: 3.5. Neste capítulo imos utilizar o punto.

Para **sumar ou restar** expresións decimais basta conseguir que teñan o mesmo número de cifras decimais.

Exemplo:

a) 24.7 + 83.15 – 0.05 = 24.70 + 83.15 – 0.05 = 107. 80 b) 53.39 – 56 + 0.06 = 53.45 – 56.00 = –2.55

Para **multiplicar** dúas expresións decimais, multiplícanse ignorando a coma que posúe cada unha delas. Ao resultado dese produto pónselle unha coma para que xurda unha expresión decimal cunha parte decimal de lonxitude igual á suma das cantidades de cifras decimais que teñen as expresións decimais multiplicadas.

Exemplo:

- $5.7a \cdot 3.2a \cdot 7.14a = 130.2336a^3$

Para **dividir** expresións decimais igualamos o número de cifras decimais de ambos os números e logo dividimos.

Exemplo:

- $$\frac{9.3}{4.81}=\frac{9.30}{4.81}=\frac{930}{481}=1.9$$

Actividades propostas

6. Realiza as operacións:

a) $31.3+5.97$ b) $3.52\cdot 6.7$ c) $11.51-4.8$ d) $19.1-7.35$

e) $4.32+32.8+8.224$ f) $46.77-15.6+2.3$ g) $1.16\cdot 3.52$ h) $3.2\cdot 5.1\cdot 1.4$

i) $2.3\cdot 4.11\cdot 3.5$ j) $4\cdot(3.01+2.4)$ k) $5.3\cdot(12+3.14)$ l) $3.9\cdot(25.8-21.97)$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Números racionais. Fraccións e expresións decimais

Toda expresión decimal exacta, ou periódica, pode poñerse como fracción.

Unha expresión **decimal exacta** convértese na fracción cuxo numerador coincide co número decimal, tras eliminar a coma, e o denominador é o número 1 seguido de tantos ceros como cifras tiña a parte decimal do número en cuestión.

Exemplo:

- $93.15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$

Para escribir en forma de fracción unha expresión **decimal periódica** como, por exemplo, *N* = 1.725252525…, temos que conseguir dous números coa mesma parte decimal para que ao restar desaparezan os decimais:

$$N = 1.7252525\ldots$$
$$1\,000N = 1\,725.2525\ldots$$
$$10N = 17.2525\ldots$$
$$Se\ restamos: 990N = 1\,708 \Rightarrow N = \frac{1\,708}{990} = \frac{854}{495}$$

Para isto multiplicamos o *N* de forma que a coma quede despois do primeiro período, neste caso despois de 1 725. Tamén multiplicamos o *N* de maneira que a coma quede ao principio do primeiro período, neste caso detrás de 17. Agora 1 000*N* e 10*N* teñen a mesma parte decimal (infinita) que se restamos desaparece, e podemos despexar *N*.

Actividades propostas

7. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais e redúceas. Comproba coa calculadora que está ben:

a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23; d) 2.353535…..

e) 87.2365656565….; f) 0.9999…..; g) 26.5735735735…..

Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica.

Recorda que:

Se o denominador (da fracción irredutible) só ten como factores primos potencias de 2 ou 5 a súa expresión decimal é exacta.

Exemplo:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0.025\ xa\ que\ \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, e isto é xeral xa que sempre haberá unha potencia de 10 que sexa múltiplo do denominador se este só contén douses ou cincos. Fíxate que o número de decimais é o maior dos expoñentes de 2 e 5.

Se o denominador (da fracción irredutible) ten algún factor primo que non sexa nin 2 nin 5 a fracción terá unha expresión decimal periódica.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Se dividimos 1 entre 23 obtemos un primeiro resto que é 10, logo outro que é 8 e seguimos, pero, repetirase algunha vez o resto e, polo tanto, as cifras do cociente? A resposta é que si, seguro que si, os restos son sempre menores có divisor, neste caso do 1 ao 22, se eu obteño 22 restos distintos (como é o caso) ao sacar un máis ten que repetirse! É o chamado *Principio do Pombal*. E a partir de aí os valores do cociente repítense. Polo tanto, a expresión decimal é periódica e o número de cifras do período é como máximo unha unidade inferior ao denominador (non sempre ocorre isto 1/23 ten un período de 22 cifras, 1/97 teno de 96 cifras porén 1/37 ten un período de só 3 cifras).

Chámanse **números racionais** aqueles cuxa expresión decimal é finita ou periódica e son representados por Q. Acabamos de ver que se poden escribir en forma de fracción polo que se pode definir o conxunto dos números racionais como:

$$\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

Por que impoñemos que o denominador sexa distinto de cero? Observa que non ten sentido unha fracción de denominador 0.

Actividades propostas

8. Mentalmente decide cales das seguintes fraccións teñen unha expresión decimal exacta e cales a teñen periódica.

a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

9. Calcula a expresión decimal das fraccións do exercicio anterior e comproba se a túa dedución era correcta.

1.3. Números irracionais. Expresión decimal dos números irracionais

Existen outros números cuxa expresión decimal é infinita non periódica. Xa coñeces algúns: π, $\sqrt{2}$ … Cando os gregos demostraron que existían números como $\sqrt{2}$, ou como o número de ouro, que non se podían poñer en forma de fracción e que tiñan, polo tanto, infinitas cifras decimais non periódicas, pareceulles algo insólito. Por iso estes números recibiron ese estraño nome de "*irracionais*". Non o podían entender dentro da súa filosofía. O interesante é que existe unha lonxitude que mide exactamente $\sqrt{2}$ que é a diagonal de cadrado de lado 1 ou a hipotenusa do triángulo rectángulo isósceles de catetos 1.

O método para demostrar que $\sqrt{2}$ non se pode escribir en forma de fracción denomínase "redución ao absurdo" e consiste en supoñer que si se pode, e chegar a unha contradición. Este procedemento serve igual para **todas as raíces non exactas**, como con $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ …

Pero non vale para todos os irracionais. Para demostrar que π é un número irracional hai que estudar moito. Está relacionado co interesante problema da *cuadratura do círculo*. Foi demostrado a finais do século XVIII por *Lambert*. Ata ese momento aínda se seguían calculando decimais para atopar un período que non ten.

Estes números cuxa expresión decimal é infinita e non periódica denomínanse **números irracionais**.

Chámase **números reais** ao conxunto formado polos números racionais e os números irracionais.

Con estes números temos resolto o problema de poder medir calquera lonxitude. Esta propiedade dos números reais coñécese co nome de *completitude*.

A cada número real correspóndelle un punto da recta e a cada punto da recta correspóndelle un número real.

Observa que tamén a cada número racional lle corresponde un punto da recta, pero non ao contrario, pois $\sqrt{2}$ é un punto da recta que non é racional.

Actividades propostas

10. Debuxa un segmento de lonxitude $\sqrt{2}$. O Teorema de *Pitágoras* pode axudarche, é a hipotenusa dun triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Mídeo cunha regra. A súa lonxitude non é 1.4 pois $(1.4)^2$ é distinto de 2; non é 1.41 pois $(1.41)^2$ é distinto de 2; nin 1.414 pois $(1.414)^2$ é distinto de 2; e porén $(\sqrt{2})^2 = 2$.

11. Calcula a expresión decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Vimos que non é un número racional polo que non pode ter unha expresión decimal finita, ou periódica, de modo que a súa expresión decimal ten infinitas cifras que non se repiten periodicamente. E porén puideches debuxalo exactamente (ben como a diagonal do cadrado de lado 1 ou ben como a hipotenusa do triángulo rectángulo isósceles de catetos 1).

1.4. Distintos tipos de números

Xa coñeces distintos tipos de números:

Naturais ➔ $\mathbb{N}$ = {1, 2, 3, …}

Son os números que se usan para contar e ordenar. O 0 non soe considerarse un número natural.

Notación:

$\in$ significa "pertence a".

$\cup$ significa "unión".

$\subset$ significa "incluído en".

$\cap$ significa "intersección".

Enteiros ➔ $\mathbb{Z}$ = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …}

Son os números naturais, os seus opostos e o cero. Non teñen parte decimal, de aí o seu nome. Inclúen os Naturais.

Os números que se poden expresar en forma de cociente de dous números enteiros son denominados números **racionais** e represéntanse coa letra $\mathbb{Q}$. Polo tanto,

Racionais➔ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Os números racionais inclúen os enteiros.

Tamén conteñen os números que teñen expresión decimal exacta (0.12345) e os que teñen expresión decimal periódica (7.01252525…) pois poden escribirse en forma de fracción.

Os números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ π… son os números **irracionais** e teñen unha expresión decimal infinita non periódica. Xunto cos números racionais forman o conxunto dos números reais. Polo tanto,

Irracionais ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathbb{Q}$.

Son números irracionais aqueles números que non poden poñerse como fracción de números enteiros. Hai máis dos que podería parecer (de feito hai máis que racionais!), son todos aqueles que teñen unha expresión decimal que non é exacta nin periódica, é dicir, **infinitas cifras decimais e sen período.**

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplos: 17.6766766676… que acabo de inventar ou 0.1234567891011… que inventou *Carmichael*. Inventa un, busca en Internet e se non o atopas, pois é teu (por agora ☺).

Reais ➔ $\mathfrak{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

É a unión dos números racionais e dos irracionais.

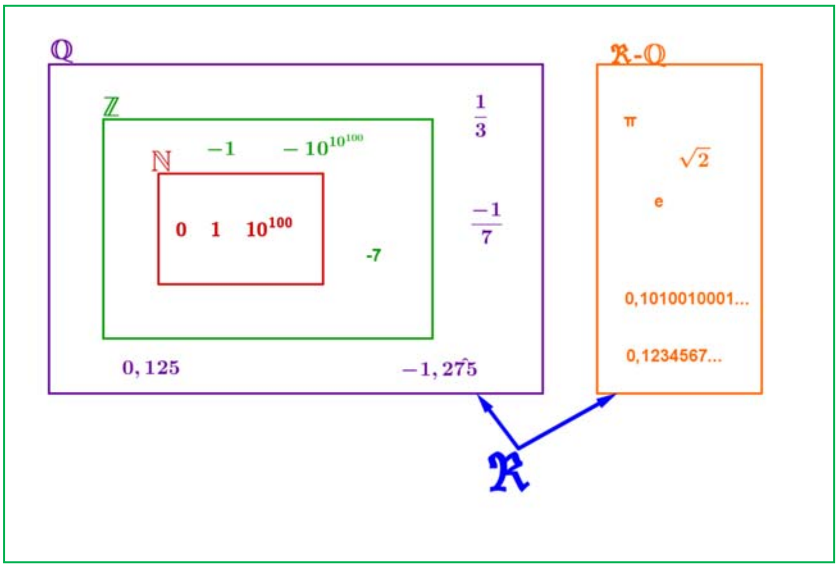
Temos polo tanto que:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \mathfrak{R}.$$

$$\mathrm{I} \subset \mathfrak{R}$$

Son estes todos os números?

Non, os reais forman parte dun conxunto máis amplo que é o dos Números Complexos C (en 1º de Bacharelato estúdanse na opción de Ciencias).



Actividades propostas

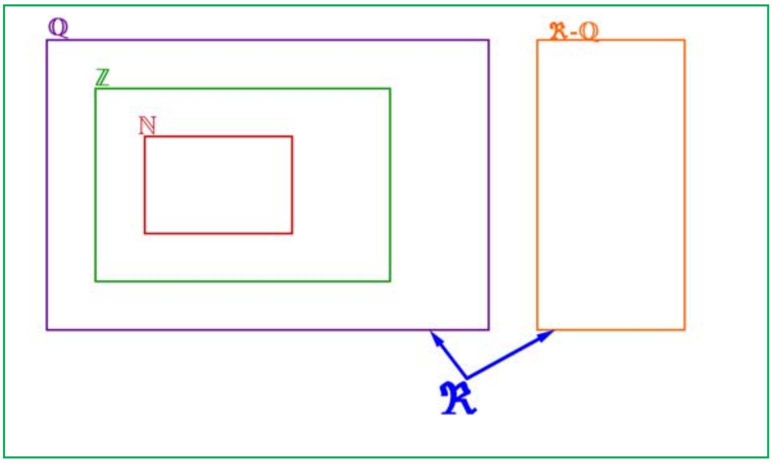
12. Copia no teu caderno a táboa adxunta e sinala cun X a que conxuntos pertencen os seguintes números:

Número	N	Z	Q	I	$\mathfrak{R}$
–7.63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0.121212…					
π					
1/2					
1.99999…					

13. Copia no teu caderno o esquema seguinte e coloca os números do exercicio anterior no seu lugar:

14. Podes demostrar que 4.99999… = 5?, canto vale 2.5999…? Escríbeos en forma de fracción.

15. Cantas cifras pode ter como máximo o período de $\frac{1}{53}$?



Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

2. POTENCIAS

2.1. Repaso das potencias de expoñente natural

Recorda que:

Para calcular a **potencia** de expoñente un número natural e de base un número calquera multiplícase a base por si mesma tantas veces como indique o expoñente.

Exemplos:

- a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$ b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

  c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$ d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Convén ter en conta algunhas particularidades que nos axudan a abreviar o cálculo:

As potencias de **base negativa** e expoñente **par** son números positivos.

As potencias de **base negativa** e expoñente **impar** son números negativos

$(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

- *Exemplos:*

$(-5)^2 = +25$

$(-5)^3 = -125$

Actividades propostas

16. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

2.2. Potencias de expoñente fraccionario

Se o expoñente é, por exemplo, –2, non sabemos multiplicar algo *menos dúas* veces. Tampouco sabemos multiplicar algo por si mesmo *cero* veces. Agora a definición anterior non nos serve. As definicións que se van dar van manter as propiedades que coñecemos das operacións con potencias de expoñente natural, que van seguir sendo válidas.

Defínese: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ e defínese $a^0 = 1$

En efecto, $\frac{a^3}{a^3} = 1$ e $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Para que continúen verificándose as propiedades das operacións con potencias defínese $a^0 = 1$.

Recorda

Sempre se verifica que:

$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$

$c^m : c^n = c^{m-n}$

$((d)^m)^n = d^{m \cdot n}$

Tamén $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ e $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Para que continúen verificándose as propiedades das operacións con potencias defínese $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Actividades propostas

17. Expresa como única potencia:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\dfrac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

2.3. Operacións con radicais

A raíz enésima dun número *a* é un número *x* que, ao elevalo a *n*, dá como resultado *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

A **raíz cadrada** dun número real non negativo *a é* un *único* número non negativo *x* que elevado ao cadrado nos dá *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a \geq 0,\ x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ non existe no campo real. Ningún número real ao elevalo ao cadrado dá un número negativo. Só podemos calcular raíces de expoñente par de números positivos. Porén $\sqrt[3]{-1} = -1$ si existe, pois $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Observa que: $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, polo que se define:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Exemplo:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podemos **operar** con radicais utilizando as mesmas propiedades das potencias de expoñente fraccionario.

Exemplo:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3\cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$
- $\dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \dfrac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

Recorda

Hai operacións con radicais que non están permitidas.

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64+36}$ que é distinto de:

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14.$

En ocasións é posible **extraer factores** dun radical.

Exemplo:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Actividades propostas

19. Simplifica os radicais $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usando potencias de expoñente fraccionario.

20. Calcula $\sqrt{484}$ e $\sqrt[3]{8\,000}$ factorizando previamente os radicandos.

21. Calcula e simplifica: $\sqrt{3}\,(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

22. Calcula $25^{0.5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ e $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

23. Expresa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

2.4. Notación científica

Un número expresado en **notación científica** está formado por un número decimal cuxa parte enteira está entre 1 e 9, multiplicado por 10^n, sendo n un número enteiro positivo ou negativo.

$$a \cdot 10^n \quad \text{sendo} \quad 1 \le a \le 9$$

Se o expoñente ***n*** é positivo utilízase para expresar números grandes e se o expoñente ***n é*** negativo para expresar números pequenos.

Exemplo:

- 7 810 000 000 000 = $7.81 \cdot 10^{12}$ 0.000000000038 = $3.8 \cdot 10^{-11}$
- 500 000 = $5 \cdot 10^5$ 0.00002 = $2 \cdot 10^{-5}$
- Hai galaxias que están a 200 000 000 000 000 km de nós, e escribímolo $2 \cdot 10^{14}$.
- A masa dun electrón é aproximadamente de 0.000000000000000000000000000911 gramos, que se escribe como $9.11 \cdot 10^{-28}$.

Actividades resoltas

- Na lenda do xadrez utilizamos números moi grandes. Se non nos interesa tanta aproximación, senón facérmonos unha idea unicamente do grande que é, podemos usar a notación científica.

Unha aproximación para o número de grans de trigo da casa 64 é $9 \cdot 10^{18}$, co que nos facemos unha idea mellor do enorme que é que co número: 9 223 372 036 854 775 808 que dá un pouco de mareo.

- Escribe en notación científica: 2^{16}, 2^{32} e 2^{64}

$2^{16} = 65\,536 \approx 6.5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4\,294\,967\,296 \approx 4.29 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 \approx 1.8 \cdot 10^{19}$

Actividades propostas

24. Escribe en notación científica:

a) 400 000 000 b) 45 000 000 c) 34 500 000 000 000 d) 0.0000001 e) 0.00000046

Operacións con notación científica

Para realizar **sumas e restas**, con expresións en notación científica, transfórmase cada expresión decimal de maneira que se igualen os expoñentes de 10 en cada un dos termos.

Exemplo:

- Para calcular $4 \cdot 10^8 + 2.3 \cdot 10^6 - 6.5 \cdot 10^5$ expresamos todos os sumandos coa mesma potencia de 10, elixindo a menor, neste caso 10^5:$4\,000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6.5 \cdot 10^5$. Sacamos factor común: $10^5 \cdot (4\,000 + 23 - 6.5) = 4\,016.5 \cdot 10^5 = 4.0165 \cdot 10^8$

O **produto** (ou o **cociente**) de dúas expresións en notación científica é o resultado de multiplicar (ou de dividir) os números decimais e sumar (ou restar) os expoñentes de base 10.

Exemplo:

- $2.5 \cdot 10^5 \cdot 1.36 \cdot 10^6 = (2.5 \cdot 1.36) \cdot 10^{5+6} = 3.4 \cdot 10^{11}$
- $5.4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5.4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1.35 \cdot 10^2$
- Para facer o cociente para calcular 2^{63} dividindo 2^{64} entre 2 en notación científica:

  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1.8 \cdot 10^{19} / 2 = 0.9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa a calculadora

As calculadoras utilizan a notación científica. Moitas calculadoras para escribir $9 \cdot 10^{18}$ escriben 9e+18.

25. Utiliza a túa calculadora para obter 2^{16}, 2^{32} e 2^{64} e observa como dá o resultado.

26. Utiliza a calculadora para obter a túa idade en segundos en notación científica.

Actividades propostas

27. Efectúa as operacións en notación científica:

a) $0.000481 + 2.4 \cdot 10^{-5}$ b) $300\,000\,000 - 5.4 \cdot 10^6 + 7.2 \cdot 10^5$

c) $(2.9 \cdot 10^5) \cdot (5.7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3.8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3.5 \cdot 10^6) \cdot (8.1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4.8 \cdot 10^{-8}) : (3.2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6.28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2.9 \cdot 10^2) : (3.98 \cdot 10^{-7})$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

3. REPRESENTACIÓN NA RECTA REAL DOS NÚMEROS REAIS

3.1. Representación de números enteiros e racionais

Recorda que:

Para representar un número enteiro na recta numérica trázase unha recta horizontal na que se marcan o cero, que se denomina orixe, e o 1. Divídese a recta en segmentos iguais, de lonxitude 1. Represéntanse os números positivos a partir do cero á dereita e os números negativos a partir do cero á esquerda.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

Desta forma quedan ordenados os números enteiros. Canto máis á dereita estea un número situado na recta numérica é maior, e canto máis á esquerda estea situado é menor.

Exemplo 6:

- Representa nunha recta numérica e ordena os números enteiros seguintes:

–2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 e 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Orden de menor a maior: –7 < –3 < –2 < –1 < 0 < 2 < 4 < 8.

Orden de maior a menor: 8 > 4 > 2 > 0 > –1 > –2 > –3 > –7.

Actividades propostas

28. Representa nunha recta numérica no teu caderno os seguintes números e ordénaos de menor a maior: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 e 0.

29. Representa nunha recta numérica no teu caderno os seguintes números e ordénaos de maior a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –7

30. *Pitágoras* viviu entre o 569 a. C. e o 475 a. C. e *Gauss* entre o 1777 e o 1855, que diferenza de séculos hai entre ambas as datas?

31. Representa graficamente e ordena en sentido crecente, calcula os opostos e os valores absolutos dos seguintes números enteiros: 10, –4, –7, 5, –8, 7, –6, 0, 8.

Para representar unha fracción na recta numérica:

Distinguimos entre fraccións propias e impropias.

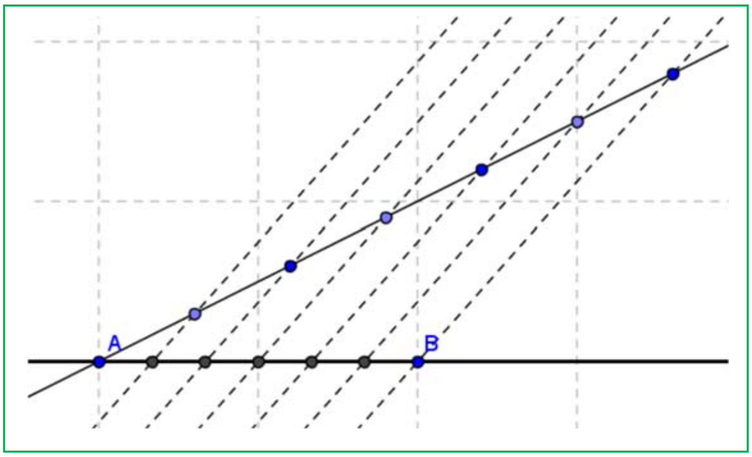
En calquera caso, debemos recordar como se divide un segmento en partes iguais.

Actividades resoltas

- Se a fracción é **propia** (numerador menor có denominador, valor menor que 1), por exemplo $\frac{5}{6}$ bastará con dividir a primeira unidade en 6 partes iguais e tomar 5. En caso de ser negativa contaremos cara á esquerda (ver figura).

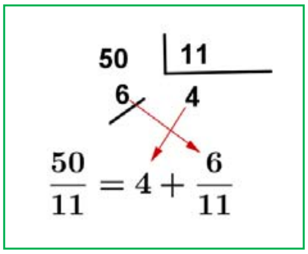
Dividir un segmento en parte iguais

Para dividir o segmento AB en, por exemplo, 6 partes iguais, trazamos por A unha liña auxiliar oblicua calquera, abrimos o compás unha abertura calquera e marcamos 6 puntos na recta anterior a distancia igual. Unimos o último punto con B e trazamos paralelas que pasen polos puntos intermedios da recta oblicua. Polo *Teorema de Tales*, o segmento AB quedou dividido en 6 partes iguais. Para representar 5/6, tomamos 5 desas partes.



Normalmente non che esixirán que o fagas tan exacto, faralo de forma aproximada, pero ten coidado en que as partes parezan iguais.

- Se a fracción é **impropia** (o numerador maior que o denominador e polo tanto valor maior que 1) faremos a división enteira (sen decimais) quedando co cociente e o resto. Isto permítenos poñela en forma mixta (suma dun enteiro e dunha fracción propia). Así, por exemplo, $\frac{50}{11} = 4 + \frac{6}{11}$ xa que ao dividir 50 entre 11 obtemos 4 de cociente e 6 de resto. O *cociente é a parte enteira e o resto o numerador da fracción propia*.



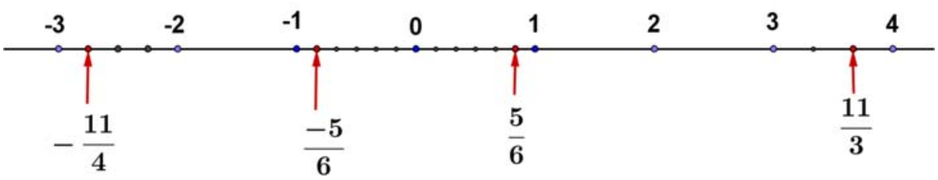
Para representala só temos que ir onde di a parte enteira (4) e a unidade seguinte (a que vai do 4 ao 5) dividímola en 11 partes iguais e tomamos 6.

- Outro exemplo: $\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$, pois a división dá 2 de cociente e 3 de resto.

Imos ao 2, dividimos a unidade seguinte (do 2 ao 3) en 7 partes iguais e tomamos 3.

- **En caso de ser negativa**: $-\frac{11}{4} = -\left(2 + \frac{3}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4}$, farase igual pero contando cara á esquerda.

  Imos ao –2, a unidade que vai do –2 ao –3 divídese en 4 partes e tomamos 3 (pero contando do –2 ao –3, claro!).



Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

32. Representa na recta numérica os seguintes números: $\frac{7}{6}$; $\frac{-17}{4}$; 2.375; $-3.\overset{\frown}{6}$

33. Representa na recta numérica 6.5; 6.2; 3.76; 8.43; 8.48; 8.51 e 8.38.

34. Ordena os seguintes números de maior a menor: +1.47; –4.32; –4.8; +1.5; +1.409; 1.4; –4.308.

3.2. Representación na recta real dos números reais

Elixida a orixe de coordenadas e o tamaño da unidade (ou o que é igual, se colocamos o 0 e o 1) todo número real ocupa unha posición na recta numérica e, ao revés, todo punto da recta pódese facer corresponder cun número real.

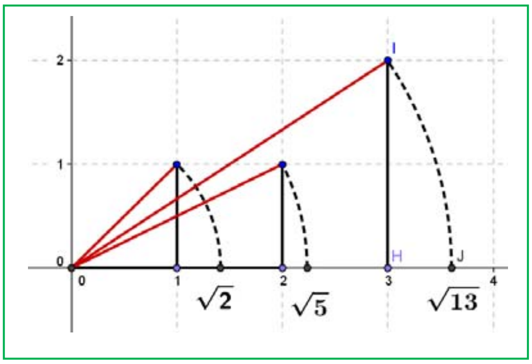
Esta segunda parte é a propiedade máis importante dos números reais e a que os distingue dos números racionais.

Vexamos como representar de forma exacta **algúns** números reais:

Representación na recta das raíces cadradas

Para representar raíces cadradas usamos o *Teorema de Pitágoras*. Se nun triángulo rectángulo a hipotenusa é *h* e os catetos son *a*, *b* temos que $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Actividades resoltas



- Representa na recta $\sqrt{2}$

Se *a* = *b* = 1 temos que $h = \sqrt{2}$. Só temos que construír un triángulo rectángulo de catetos 1 e 1, a súa hipotenusa mide $\sqrt{2}$, (a diagonal do cadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$). Agora utilizando o compás, levamos esa distancia ao eixe X (ver figura).

- Representa na recta $\sqrt{5}$.

Como $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ só hai que construír un triángulo rectángulo de catetos 2 e 1, e a súa hipotenusa mide $\sqrt{5}$.

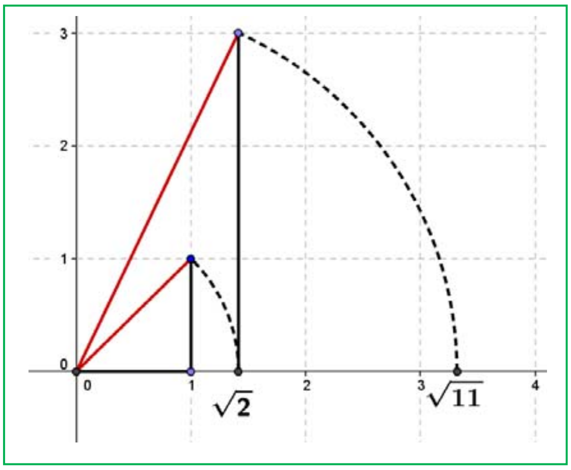
Pillaches o truco?, o radicando hai que expresalo como suma de 2 cadrados. O triángulo rectángulo terá como catetos eses dous números.

- Así, para representar $\sqrt{13}$, expresamos 13 como suma de 2 cadrados: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ logo nun triángulo rectángulo de lados 3 e 2 a hipotenusa será $\sqrt{13}$.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

- Pero, e se o número non pode poñerse como suma de 2 cadrados? Por exemplo o 11 (sempre complicando as cousas! ☹).

Haberá que facelo en 2 pasos. 11 = 2 + 9, hai algún número cuxo cadrado sexa 2?, por suposto que si, $\sqrt{2}$. Polo tanto $\sqrt{11}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2}$, temos que facer un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ e 3. Para iso primeiro constrúese $\sqrt{2}$ como antes e trázase unha perpendicular de lonxitude 3 (ver figura).



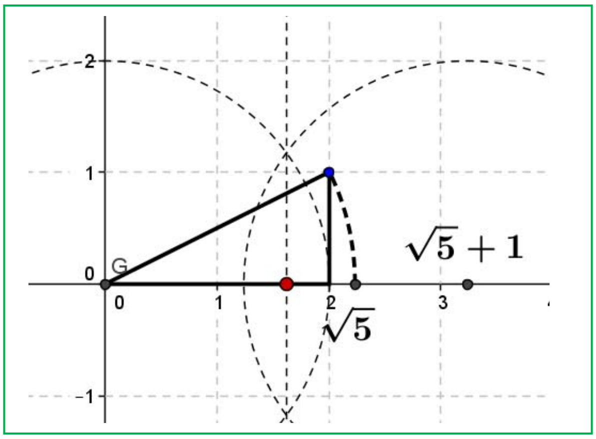
Poden debuxarse xa así todas as raíces?, non. Hai algunhas para as que hai que facer máis pasos ($\sqrt{7}$ por exemplo require 3), pero mellor deixámolo aquí, non?

Actividades resoltas

- Representa na recta numérica de forma exacta o número de ouro $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Oíches falar do número de ouro?

O número de ouro (ou razón áurea ou proporción harmónica ou divina proporción) é igual a $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

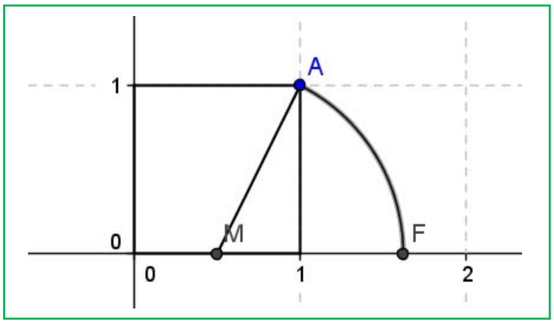


- Como o representamos na recta?

Só hai que construír $\sqrt{5}$ como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidade co compás) e dividir entre 2 calculando o punto medio (coa mediatriz), feito.

- Outra forma distinta:

Construímos un cadrado de lado 1 (un que?, un o que queiras!). Calculamos o punto medio do lado inferior (*M*) e levamos a distancia *MA* co compás ao eixe horizontal, *OF* é o número de ouro.



Vexamos:

$$MA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF=\frac{1}{2}+MA=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

35. Busca *rectángulo áureo* e *espiral áurea* en Internet.

36. Xa de paso busca a relación entre o *número de ouro* e a *sucesión de Fibonacci*.

37. Busca en Youtube "algo pasa con phi" e cóntasme.

38. Representa na recta numérica de forma exacta:

$$\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Densidade dos números reais

Os números reais son **densos**: entre cada dous números reais hai infinitos números reais no medio.

Iso é fácil de deducir, se *a*, *b* son dous números con *a* < *b* sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, é dicir, a media está entre os dous números. Como isto podemos facelo as veces que queiramos, pois de aí o resultado.

Curiosamente os racionais son tamén densos nos números reais, así como os irracionais.

Actividades propostas

39. Calcula 3 números reais que estean entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e 1.

40. Calcula 5 números racionais que estean entre $\sqrt{2}$ e 1.5

41. Calcula 5 números irracionais que estean entre 3.14 e π.

3.3. Ferramenta informática para estudar a proporción áurea

Nesta actividade vaise utilizar o programa *Xeoxebra* para realizar un estudo da proporción áurea.

Un segmento está dividido en dúas partes que están en proporción áurea se a razón entre a lonxitude do segmento e a lonxitude da parte maior coincide coa razón entre a lonxitude da parte maior e a da parte menor.

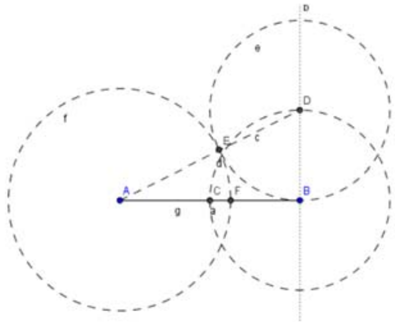
Actividades resoltas

- *Utiliza Xeoxebra para dividir un segmento en dúas partes que estean en proporción áurea.*

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Determina con **Novo punto** os puntos *A* e *B* e debuxa o segmento, *a*, que os une.
- Traza un segmento *BD* perpendicular ao segmento *AB* no punto *B*, cuxa lonxitude sexa a metade de *AB,* podes seguir as seguintes instrucións:
  - Calcula o **Punto medio ou centro do** segmento *AB* e chámao *C*.
  - Debuxa con **Circunferencia con centro e punto que cruza** a que ten centro en *B* e pasa por *C*.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF



- ➢ Traza a **Recta Perpendicular** ao segmento *AB* que pase por *B*.
- ➢ Define *D* como o **Punto de Intersección** entre esta recta e a circunferencia.

- Debuxa o segmento *AD* e unha circunferencia con centro *D* que pase por *B*. Sexa *E* o **Punto de Intersección** desta circunferencia co segmento *AD*.
- Con centro en *A* traza a circunferencia que pasa por *E* e determina o **punto de Intersección,** *F*, desta circunferencia co segmento *AB*.
- Traza o segmento, *g*, que une os puntos *A* e *F*.
- Comproba que o punto *F* divide ao segmento *AB* en dúas partes que están en proporción áurea:
  - ➢ Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais**.
  - ➢ Calcula na liña de **Entrada os** cocientes *a/g e g/(a-g).*

Observa na **Ventá alxébrica** que estes valores coinciden, calculaches un valor aproximado do número de ouro, Φ.

- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e comproba que o cociente entre as lonxitudes dos segmentos *AF* e *FB* permanece constante.
- Para visualizar mellor a construción podes debuxar os elementos auxiliares con trazo descontinuo, elixindo no menú contextual, **Propiedades e Estilo de trazo**.

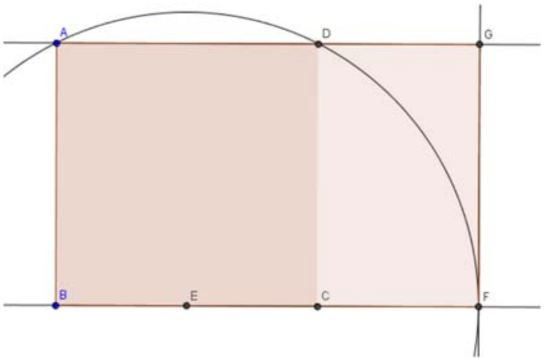
Un rectángulo é áureo se os seus lados están en proporción áurea.

Se a un rectángulo áureo lle quitamos (ou lle engadimos) un cadrado obtemos un rectángulo semellante ao de partida e polo tanto tamén áureo.

Utiliza Xeoxebra para debuxar un rectángulo áureo.

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Define dous puntos *A* e *B* que van ser os extremos do lado menor do rectángulo e coa ferramenta **polígono regular** debuxa, a partir dos puntos *A* e *B*, o cadrado *ABCD* e oculta os nomes dos lados coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo**.



- Calcula o **Punto medio**, *E*, do lado *BC*. Con centro en *E* debuxa a **Circunferencia** con centro en *E* que pasa por *A*.
- Traza a recta, *a*, que pasa por *BC* e define como *F* o **Punto de intersección** entre esta recta e a circunferencia.
- Debuxa a **Recta perpendicular** á recta *a* que pasa por *F*, e a **recta** que pasa polos puntos *A e D*, chama *G* ao **Punto de intersección** destas rectas e define con **Polígono** o rectángulo *ABFG*.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

- Na ventá alxébrica aparecen as lonxitudes dos lados do rectángulo como *f* e *g*, introduce na liña de **Entrada** *g/f* e observa nesta ventá que aparece o valor *e* que é unha aproximación ao número áureo. Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais.**
- Debuxa o **segmento** *CF*, na ventá alxébrica aparece a súa lonxitude, *h*, introduce na liña de **Entrada** *f/h*, observa que este cociente coincide con *g/f* e é unha aproximación do número áureo.
- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e observa que o cociente entre as lonxitudes dos lados dos rectángulos é constante.

O rectángulo *ABFG é* áureo xa que o cociente entre a lonxitude do seu lado maior e a do menor é o número de ouro, ademais o rectángulo *DCFG*, que se obtén ao quitar un cadrado de lado o menor do rectángulo, é tamén áureo e polo tanto semellante ao primeiro.

- *Crea as túas propias ferramentas con Xeoxebra. Crea unha que debuxe rectángulos áureos.*

Vaise crear unha ferramenta que a partir de dous puntos *A* e *B* debuxe o rectángulo áureo no que o segmento *AB* é o lado menor.

- Na figura anterior oculta o nome dos puntos *C, D, E, F* e *G* coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo** facendo clic co rato sobre eles, na área de traballo ou na ventá alxébrica.
- Activa no menú **Ferramentas**, a opción **Creación de nova ferramenta** e define:

Obxectos de saída: o polígono cadrado, o polígono rectángulo e os puntos *C, D, F*, e *G*.

Obxectos de entrada: os dous puntos iniciais *A* e *B*.

E elixe como **nome da ferramenta** *rectanguloaureo*. Observa que aparece na barra de ferramentas.

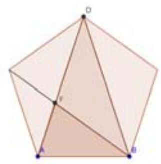
Na opción **Manexo de útiles** do menú **Ferramentas** grava a ferramenta creada como *rectanguloaureo*, que se garda como *rectanguloaureo.ggt*

Utiliza a ferramenta **Desprazamento da zona gráfica** para ir a unha parte baleira da pantalla e comprobar que a ferramenta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

Actividades propostas

42. Comproba que a lonxitude do lado do pentágono regular e a da súa diagonal están en proporción áurea.

43. Calcula con Xeoxebra unha aproximación da razón de semellanza entre un pentágono regular e o que se forma no seu interior ao debuxar as súas diagonais. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous pentágonos.



44. Comproba que os triángulos *ABD* e *ABF* da figura son semellantes e calcula aproximadamente con *Xeoxebra* a súa razón de semellanza.

45. Calcula con *Xeoxebra* o valor aproximado da razón de semellanza entre un decágono regular e o decágono que se forma ao trazar as diagonais da figura. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous polígonos.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS E ENTORNOS

Como xa sabemos, entre dous números reais hai infinitos números. Hai unha notación especial para referirse a eses infinitos números que deberás dominar para este e futuros cursos.

4.1. Intervalos. Tipos e significado

(Do lat. *intervallum*): **2.** m. Conxunto da recta real limitado por dous valores. RAG.

Definición:

Un subconxunto de $\Re$ é un intervalo se para calquera par de elementos, *a* e *b*, dese subconxunto se verifica que se $a < x < b$ entón *x* debe pertencer a este subconxunto.

Imos estudar neste apartado intervalos acotados de distintos tipos: os intervalos abertos, os intervalos pechados e os intervalos semiabertos (ou semipechados).

Intervalos abertos

Se nos queremos referir ao conxunto dos números que hai entre dous valores pero sen contar os extremos, usamos un **intervalo aberto.**

Exemplo:

- Os números superiores a 2 pero menores ca 7 represéntanse por (2, 7) e lese "*intervalo aberto de extremos 2 e 7*". A el pertencen infinitos números como 2.001; 3.5; 5; 6.999; … pero non son deste conxunto nin o 2 nin o 7. Iso representan as parénteses, que entran todos os números do medio pero non os extremos.

Exemplo:

- Os números positivos menores que 10 represéntanse por (0, 10), o intervalo aberto de extremos 0 e 10. Fíxate que 0 non é positivo, polo que non entra e o 10 non é menor que 10, polo que tampouco entra.

Nota: *non* se admite poñer (7, 2), o menor sempre á esquerda!

Tamén hai que dominar a expresión destes conxuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \Re;\ 2 < x < 7\}.$$

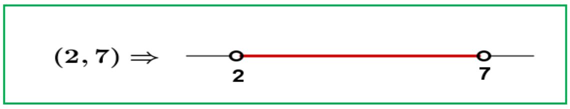
Traducimos: as chaves utilízanse para dar os elementos dun conxunto, dentro delas enuméranse os elementos ou dáse a propiedade que cumpren todos eles. Utilízase o *x* para denotar un número real, a / significa "tal que" (en ocasións utilízase un punto e coma ";" ou unha raia vertical "|") e, por último, dise a propiedade que cumpren mediante unha dobre desigualdade. Así que non te asustes, o de arriba lese: os *números reais tal que son maiores que 2 e menores que 7*.

Usaremos indistintamente varias destas nomenclaturas para que todas che resulten familiares.

É necesario dominar esta linguaxe matemática pois a oración en galego pode non entenderse noutros países pero asegurámosche que iso das chaves e a | enténdeno todos os estudantes de matemáticas do mundo (ben, case todos).

O outro exemplo: $(0, 10) = \{x \in \Re;\ 0 < x < 10\}$.

Por último a **representación gráfica**:



Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Póñense **puntos sen encher** nos extremos e resáltase a zona intermedia.

En ocasións tamén se poden poñer no 2 e no 7 parénteses: "( )", ou corchetes ao revés: "] [".

Pregunta: Cal é número que está máis preto de 7, sen ser 7?

Pensa que 6.999…=7 e que entre 6.999 e 7 hai "moitos, moitísimos …" números.

Nota:

Nalgúns textos os intervalos abertos represéntanse así:]2, 7[o cal ten algunhas vantaxes como que os estudantes non confundan o intervalo (3, 4) co punto do plano (3, 4), que aseguramos que ocorreu (pero ti non serás un destes, non?), ou a cargante necesidade de poñer (2,3 ; 3,4) porque (2,3,3,4) non o entendería nin Gauss.

Intervalos pechados

Igual que os abertos pero agora si pertencen os extremos.

Exemplo:

- O intervalo dos números maiores ou iguais que –2 pero menores ou iguais que 5. Agora o –2 e o 5 si entran. Faise igual pero poñendo corchetes: [–2, 5].

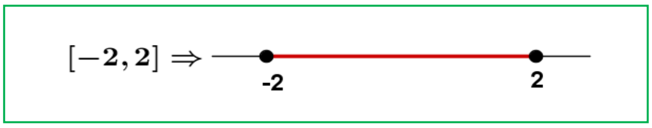
En forma de conxunto escríbese:

$$[-2, 5] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq 5\}.$$

Fíxate que agora poñemos $\leq$ que significa "*menor ou igual*".

Exemplo:

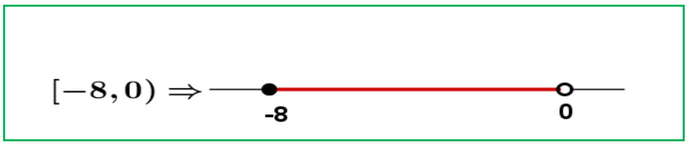
- O intervalo dos números cuxo cadrado non é superior a 4. Se o pensas un pouco verás que son os números entre o –2 e o 2, ambos os dous incluídos (non superior $\Leftrightarrow$ menor ou igual). Polo tanto: $[-2, 2] = \{x \in \Re; -2 \leq x \leq 2\}$.



A representación gráfica é igual pero poñendo **puntos recheos**. En ocasións tamén se pode representar graficamente con corchetes: "[ ]".

Intervalos semiabertos (ou semipechados, a elixir)

Por suposto que un intervalo pode ter un extremo aberto e outro pechado. A notación será a mesma.



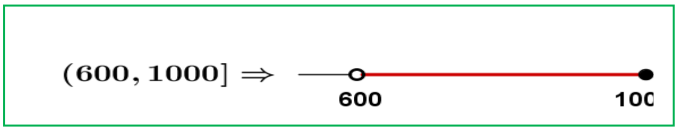
Exemplo:

- Temperatura negativa pero non por debaixo de –8 °C: $[-8, 0) = \{x \in \Re; -8 \leq x < 0\}$.

É o intervalo pechado á esquerda de extremos –8 e 0.

- Números superiores a 600 pero que non excedan de 1 000.

  $(600, 1\,000] = \{x \in \Re; 600 < x \leq 1\,000\}$.



É o intervalo pechado á dereita de extremos 600 e 1 000.

4.2. Semirrectas

Moitas veces o conxunto de interese non está limitado por un dos seus extremos.

Exemplo:

- Os números reais positivos: non hai ningún número positivo que sexa o maior. Recórrese entón ao símbolo ∞ e escríbese: $(0, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R}; x > 0\}$.

Nótese que é equivalente poñer $x > 0$ que poñer $0 < x$, pódese poñer de ambas as formas.

Exemplo:

- Números non maiores que 5: $(-\infty, 5] = \{x \in \mathfrak{R}; x \leq 5\}$.

Aquí o 5 si entra e por iso o poñemos pechado ("non maior" equivale a "menor ou igual").

Exemplo:

- Solución de $x > 7$: $(7, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R}; x > 7\}$.
  Nota: **o extremo non acoutado sempre se pon aberto**. Non queremos ver isto: $(7, +\infty]$.

$(0, +\infty) \Rightarrow$

$(-\infty, 5] \Rightarrow$

As semirrectas tamén son intervalos. Son intervalos non acotados.

Mesmo a recta real é un intervalo: $(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R}; -\infty < x < +\infty\} = \mathfrak{R}$.

É o único intervalo non acoutado nin superior nin inferiormente.

Observa que con esta nomenclatura estamos dicindo que $-\infty$ e que $+\infty$ non son números reais.

4.3. Entornos

É unha forma especial de representar os intervalos abertos.

Defínese o entorno de centro *a* e radio *r* e denótase E(*a*, *r*) (outra forma usual é $E_r(a)$) como o conxunto de números que están a unha **distancia de *a* menor que *r***.

E(*a*, *r*) = (*a* − *r*, *a* + *r*)

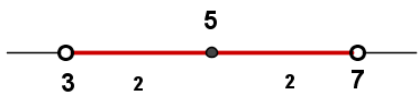
Observa que un entorno é sempre un intervalo aberto e acoutado.

Cun exemplo enténdelo mellor:

Exemplo:

- O entorno de centro 5 e radio 2 son os números que están de 5 a unha distancia menor que 2. Se o pensamos un pouco, serán os números entre 5 – 2 e 5 + 2, é dicir, o intervalo (3, 7). É como coller o compás e con centro en 5 marcar con abertura 2.

$E(5, 2) = (3, 7) \Rightarrow$



Fíxate que o 5 está no centro e a distancia do 5 ao 7 e ao 3 é 2.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- E(2, 4) = (2 – 4, 2 + 4) = (–2, 6)

É moi fácil pasar dun entorno a un intervalo. Imos facelo ao revés.

Exemplo:

- Se teño o intervalo aberto (3, 10), como se pon en forma de entorno?

Calculamos o punto medio $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$ = 6.5 que será o centro do entorno. Fáltanos calcular o radio:

(10 – 3) : 2 = 3.5 é o radio (a metade do ancho).

Polo tanto, (3, 10) = E(6.5, 3.5)

En xeral:

O intervalo (*b*, c) é o entorno $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Exemplo:

- O intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}) = E(-3.5, 4.5)$.

Actividades propostas

46. Expresa como intervalo ou semirrecta, en forma de conxunto (usando desigualdades) e representa graficamente:

a) Porcentaxe superior ao 15 %.
b) Idade inferior ou igual a 21 anos.
c) Números cuxo cubo sexa superior a 27.
d) Números positivos cuxa parte enteira ten 2 cifras.
e) Temperatura inferior a 24 °C.
f) Números que estean de 2 a unha distancia inferior a 3.
g) Números para os que existe a súa raíz cadrada (é un número real).

47. Expresa en forma de intervalo os seguintes entornos:

a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0.001)

48. Expresa en forma de entorno os seguintes intervalos:

a) (1, 7) b) (–5, –1) c) (–4, 2)

49. Os soldos superiores a 500 € pero inferiores a 1 000 € pódense poñer como intervalo de números reais? **Pista:* 600.222333€ pode ser un soldo?

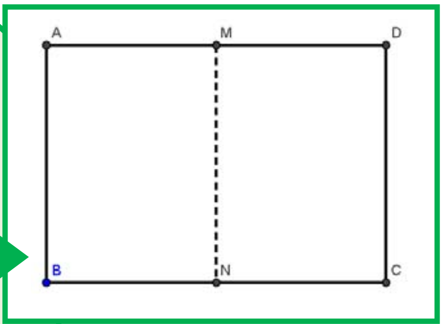
Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios e $\sqrt{2}$

Xa sabemos que un cadrado de lado L ten unha diagonal que vale $\sqrt{2}$ *L*, vexamos algo máis:

A imaxe representa un folio coa norma DIN 476 que é a máis utilizada a nivel mundial.



Esta norma especifica que un folio DIN A0 ten unha superficie de 1 m^2 e que ao partilo pola metade obteremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semellante ao anterior. Partindo o A1 en 2 iguais obtemos o DIN A2, despois o DIN A3 e o DIN A4 que é o máis usado. Todos son semellantes aos anteriores.

Que significa ser semellante?

Pois que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$, pero AM = AD/2 logo

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Polo tanto, nos folios DIN 476 a razón entre o longo e o ancho é $\sqrt{2}$.

Unha táboa

	Longo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	118.92	84.09	10000
A1	84.09	59.46	5000
A2	59.46	44.04	2500
A3	42.04	29.83	1250
A4	29.73	21.02	625
A5	21.02	14.87	415.2

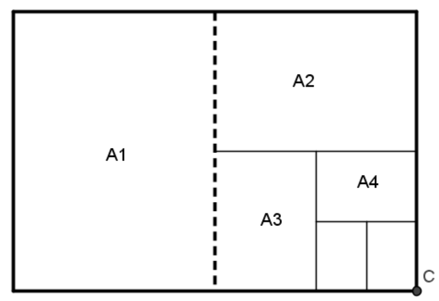
Non queda aquí a cousa, fíxate que ao partir o folio en 2 partes iguais o novo folio ten o lado maior que coincide co lado menor do orixinal: *AB* é agora o lado maior e antes era o menor. Como *AB* = *AD*/$\sqrt{2}$ resulta que a razón de semellanza é $\sqrt{2}$. É dicir, para pasar dun folio A0 a outro A1 dividimos os seus lados entre $\sqrt{2}$. O mesmo para os seguintes.

Calculemos as dimensións:

Para o A0 temos que a área é *AD* · *AB* = 1m^2

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189 \text{ m;}$$

AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx$ 0.841 m. Para obter as medidas do A4 dividimos 4 veces entre $\sqrt{2}$:



Longo = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4} \approx$ 0.297 m = 29.7 cm

Ancho= Longo/$\sqrt{2} \approx$ 0.210 m = 21.0 cm

Cuestións

1) Comproba os valores da táboa anterior (hai polo menos tres valores equivocados ☺)
2) Cantos folios A4 caben nun folio A0?
3) Cales son as dimensións do A6?, e do A7?

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O número de ouro

Dividimos un segmento en dúas partes de forma que se dividimos a lonxitude do segmento total entre a parte maior debe dar o mesmo que ao dividir a parte maior entre a parte menor.
Temos que $(a + b)/a = a/b$.

O número de ouro (ou razón áurea) chamado Φ (fi) é precisamente o valor desa proporción, así:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$$

Xa temos dúas curiosidades:

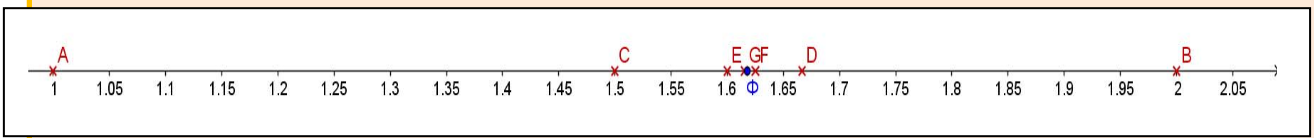
1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

Onde F_n é o *n*-ésimo número de *Fibonacci*. Estes números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… onde cada termo a partir do terceiro se obtén sumando os dous anteriores.
Máis relacións entre o número de ouro e a sucesión de *Fibonacci*:
a) se imos dividindo un número da sucesión entre o seu anterior obtemos: 1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1.5; 5/3 = 1.666…; 8/5 = 1.6; 13/8 = 1.625



Como pode verse, achegámonos rapidamente ao valor do número de ouro, primeiro por debaixo, despois por arriba, por debaixo… alternativamente.

b) Formula de *Binet*:

Para calcular un número de *Fibonacci*, por exemplo, o que ocupa o lugar 20 hai que calcular os 19 anteriores.
Isto non ten que ser necesariamente así pois *Binet* deduciu esta fórmula, que para os autores é unha das máis bonitas das matemáticas.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Se por exemplo substituímos *n* por 20 obtemos F_{20} = 6 765.
Realmente podemos prescindir do 2º termo do numerador, para *n*> 3 faise moito máis pequeno que o primeiro. Por exemplo, para *n*= 6, se facemos $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtemos 8.0249 que redondeado é 8, o valor correcto.

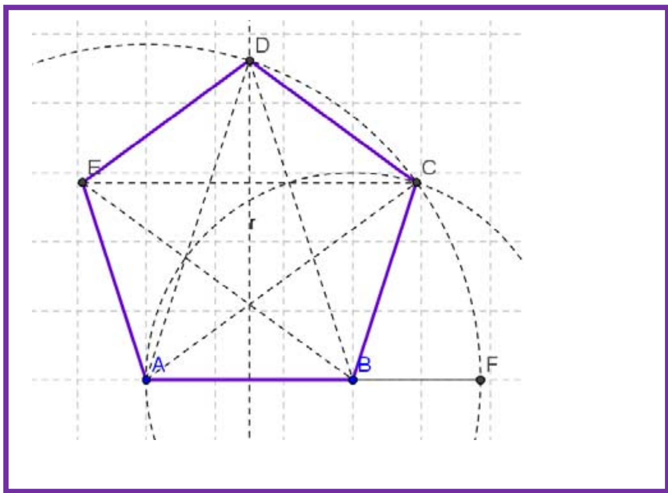
Actividades

a) Calcula F_{31} e F_{30} coa fórmula de Binet.

b) Fai o cociente e mira se é unha boa aproximación do número de ouro.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O pentágono regular e o número de ouro.



Nun pentágono regular a razón entre unha diagonal e o lado é Φ. Como sabemos construír Φ, a construción dun pentágono regular é moi sinxela:

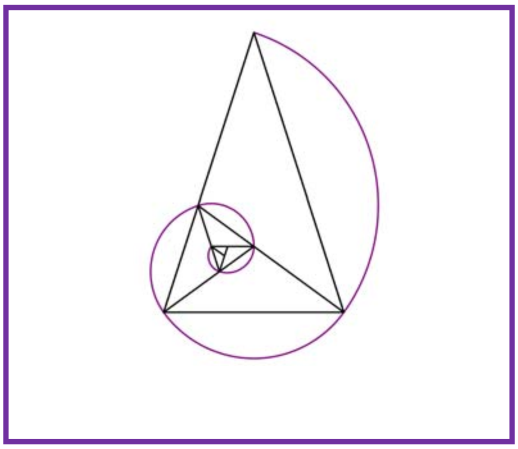
Se *AB* vai ser un lado do noso pentágono, construímos o punto *F* aliñado con *A* e *B* que cumpra *AF/AB* igual a Φ (indícase como facelo no texto).

Entón *AB* será o lado e *AF* a medida da diagonal.

Trazamos a mediatriz de *AB* e unha circunferencia de centro *A* e radio *AF*. Córtanse en *D* que é un vértice do pentágono.

Trazamos agora unha circunferencia con centro *B* e radio *AB*, córtase coa anterior en *C* que é outro vértice do pentágono. Só queda calcular *E* que é moi fácil.

O pentágono regular coas súas diagonais coñécese como "pentagrama místico" e parece ser que volvía toliños aos pitagóricos, nel o número de ouro aparece de forma desmesurada.



Do pentagrama sacamos este triángulo, chamado triángulo áureo que permite obter máis triángulos áureos facendo a bisectriz nun dos ángulos iguais e formar esta espiral. Esta espiral é parecida á espiral áurea, á de *Fibonacci* e á espiral logarítmica que aparece en: galaxias, furacáns, cunchas, xirasoles…

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O xadrez

Conta a lenda que cando o inventor do xadrez lle amosou este xogo ao rei *Shirham* da India, este se entusiasmou tanto que lle ofreceu regalarlle todo o que quixera.

O inventor pediu un gran de trigo para a primeira casa do xogo, dous para a segunda, 4 para a terceira, e así duplicando a cantidade en cada casa.

Ao rei pareceulle unha petición modesta pero… como se pode comprobar ese número de grans dan pouco máis de 15 billóns de toneladas métricas o que corresponde á produción mundial de trigo de 21 685 anos.

Imposible que o rei tivese tanto trigo!

Gústache facer maxia!

Podes facer este xogo cos teus amigos. Para facelo precisas papel e lapis, ou mellor, unha calculadora, ou aínda mellor, unha folla de cálculo.

Escribe nunha columna os números do 1 ao 20. Ao lado do 1 escribe o número que che diga o teu amigo ou amiga, dunha, dúas ou tres cifras (376). Ao lado do 2 escribe tamén outro número inventado de 1, 2 ou 3 cifras (712). Ao lado do 3, a suma dos dous números anteriores (1 088). Ao lado do 4, o mesmo, a suma dos dous números anteriores (agora os do lado do 2 e do 4), e así ata chegar á casa 20.

Agora divide o número do lado do 20 (3 948 456) entre o número do lado do 19 (2 440 280), e maxia!, podes adiviñar o resultado. Aproxímase ao número de ouro!

1.618…

Por que? Sabes algo da sucesión de *Fibonacci*? Búscaa en Internet.

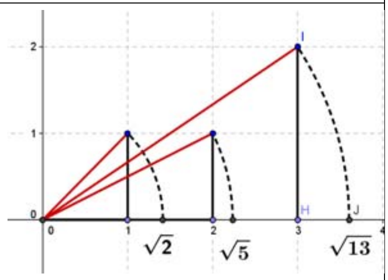
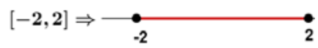
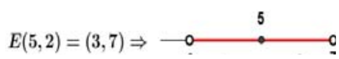
Fai unha folla de cálculo como a da marxe.

E22 =B21/B20

	A	B	C	D	E
1	Gústache facer maxia!				
2	1	376			
3	2	712			
4	3	1088			
5	4	1800			
6	5	2888			
7	6	4688			
8	7	7576			
9	8	12264			
10	9	19840			
11	10	32104			
12	11	51944			
13	12	84048			
14	13	135992			
15	14	220040			
16	15	356032			
17	16	576072			
18	17	932104			
19	18	1508176			
20	19	2440280			
21	20	3948456			
22	3948456	dividido por	2440280	é igual a	1,618

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Conxuntos de números	**Naturais** ➔ $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; **Enteiros** ➔ $\mathrm{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **Racionais** ➔ $\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionais** ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathrm{Q}$; $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$	
Fraccións e expresión decimal	Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica. Toda expresión decimal exacta ou periódica pode poñerse como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1\,000} = \frac{7}{40}$ $x = 1.7252525\ldots = 854/495$
Números racionais	A súa expresión decimal é exacta ou periódica.	2/3; 1.5; 0.333333333....
Representación na recta real	Fixada unha orixe e unha unidade, existe unha bixección entre os números reais e os puntos da recta. A cada punto da recta correspóndelle un número real e viceversa.	
N. Reais	Toda expresión decimal finita ou infinita é un número real e reciprocamente.	0.333333; π; $\sqrt{2}$
Intervalo aberto	Intervalo aberto no que os extremos non pertencen ao intervalo.	$(2, 7) = \{x \in \Re;\ 2 < x < 7\}$. 
Intervalo pechado	Os extremos si pertencen ao intervalo.	$[-2, 2] = \{x \in \Re;\ -2 \leq x \leq 2\}$ 
Intervalos semiabertos (ou semipechados)	Intervalo cun extremo aberto e outro pechado.	$[-8,0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo aberto: **E(*a*, *r*) = (*a* – *r*, *a* + *r*)**	

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Números

1. Efectúa as seguintes operacións con fraccións:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realiza as operacións:

a) (24.67 + 6.91)3.2 b) 2(3.91 + 98.1) c) 3.2(4.009 + 5.9)4.8

4. Calcula o valor exacto de $\frac{0.\overset{\frown}{4}}{0.4}$ sen calculadora.

5. Di cales destas fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Calcula 3 fraccións *a, b, c* tal que $\frac{3}{4}<a<b<c<\frac{19}{25}$

7. Cantos decimais ten $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, atréveste a explicar o motivo?

8. Fai a división 999 999 : 7 e despois fai 1 : 7. Será casualidade?

9. Agora divide 999 entre 37 e despois fai 1 : 37, é casualidade?

10. Fai no teu caderno unha táboa e di a que conxuntos pertencen os seguintes números:

2.73535…; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100}; $\frac{102}{34}$; −2.5; 0.1223334444…

11. Contesta verdadeiro ou falso, xustificando a resposta.

a) $Q\cap(\Re-Q)=\{0\}$

b) $Z\subset Q$

c) a raíz cadrada dun número natural é irracional.

d) $\sqrt{7}\notin Q$

e) 1/47 ten expresión decimal periódica.

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

12. Pon exemplos que xustifiquen:

a) a suma e a resta de números irracionais pode ser racional.

b) o produto ou a división de números irracionais pode ser racional.

13. Que será a suma dun número racional con outro irracional? (Pensa na súa expresión decimal).

14. A suma de 2 números con expresión decimal periódica pode ser un enteiro?

15. Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lados $\sqrt{2}\ e\ \sqrt{8}$ m.

16. Calcula a área e o perímetro dun cadrado cuxa diagonal mide 2 m.

17. Calcula a área e o perímetro dun hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

18. Calcula a área e o perímetro dun círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

19. Calcula a área total e o volume dun cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

20. Por que número temos que multiplicar os lados dun rectángulo para que a súa área se faga o triplo?

21. Canto debe valer o radio dun círculo para que a súa área sexa 1 m^2?

22. Temos unha circunferencia e un hexágono regular inscrito nela. Cal é a razón entre os seus perímetros? (Razón é división ou cociente).

Potencias

23. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

24. Expresa como única potencia:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

25. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrae os factores posibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expresa en forma de única raíz:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

28. Expresa en forma de potencia: a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

29. Simplifica a expresión:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. Estímase que o volume da auga dos océanos é de 1 285 600 000 km^3 e o volume da auga doce é de 35 000 000 km^3. Escribe esas cantidades en notación científica e calcula a proporción de auga doce.

31. Sábese que nun átomo de hidróxeno o núcleo constitúe o 99 % da masa, e que a masa dun electrón é aproximadamente de $9.109\cdot 10^{-31}$ kg. Que masa ten o núcleo dun átomo de hidróxeno? (*Recorda*: Un átomo de hidróxeno está formado polo núcleo, cun protón, e por un único electrón).

32. A Xoán fixéronlle unha análise de sangue e ten 5 millóns de glóbulos vermellos en cada mm^3. Escribe en notación científica o número aproximado de glóbulos vermellos que ten Xoán estimando que ten 5 litros de sangue.

Representación na recta real

33. Pitágoras viviu entre o 569 e o 475 anos a. C. e Gauss entre o 1777 e o 1855, que diferenza de anos hai entre ambas as datas?

34. Representa de forma exacta na recta numérica: –2.45; 3.666…

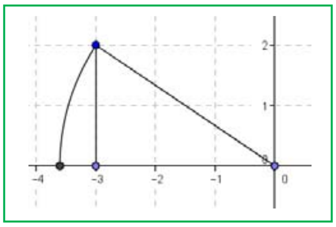
35. Sitúa na recta real os números 0.5; 0.48; 0.51 e 0.505.

36. Ordena os seguintes números de maior a menor: 2.4; –3.62; –3.6; 2.5; 2.409; –3.9999…

37. Representa na recta numérica de forma exacta os seguintes números:

$$\frac{2}{3};\ \frac{-3}{5};\ \frac{5}{2};\ 1.256;\ 3.\hat{5}$$

38. A imaxe é a representación dun número irracional, cal?



39. Representa de forma exacta na recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

40. Calcula 5 números racionais que estean entre 3.14 e π.

Intervalos

41. Expresa con palabras os seguintes intervalos ou semirrectas:

a. $(-5, 5]$ b. $\{x \in \Re;\ -2 < x \leq 7\}$.

c. $\{x \in \Re;\ x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

42. Calcula:

a. $(2, 4] \cup (3, 5]$ b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

43. Pode expresarse como entorno unha semirrecta? Razoa a resposta.

44. Expresa como entornos abertos, se é posible, os seguintes intervalos:

a. (0, 8) b. (–6, –2) c. $(2, +\infty)$

45. Expresa como intervalos abertos os seguintes entornos:

a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. E(1, 2) d. E(0, 1)

46. Que números ao cadrado dan 7?

47. Que números reais ao cadrado dan menos de 7?

48. Que números reais ao cadrado dan máis de 7?

Varios

49. Un numero irracional tan importante como Pi é o número "e", $e \approx 2.718281828\ldots$, que parece periódico pero non, non o é. É un número irracional. Defínese como o número ao que se achega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cando *n* se fai moi, pero que moi, grande. **Colle a calculadora** e dálle a *n* valores cada vez maiores, por exemplo: 10, 100, 1 000, …

Apunta os resultados nunha **táboa**.

50. Outra forma de definir *e* é $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

Que dirás ti, que son eses números tan admirados!, chámase factorial e é moi sinxelo: 4! = 4·3·2·1 = 24, multiplícase desde o número ata chegar a 1. Por exemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. Non te preocupes, que a tecla "!" está na calculadora. Podes calcular e con 6 cifras decimais correctas? **Nota:* Fíxate que agora a converxencia é moito máis rápida, só tiveches que chegar ata *n* = ?

51. Ordena de menor a maior as seguintes masas:

Masa dun electrón	$9.11 \cdot 10^{-31}$ quilogramos
Masa da Terra	$5.983 \cdot 10^{24}$ quilogramos
Masa do Sol	$1.99 \cdot 10^{30}$ quilogramos
Masa da Lúa	$7.3 \cdot 10^{22}$ quilogramos.

52. Tomando $1.67 \cdot 10^{-24}$ gramos como masa dun protón e $1.2 \cdot 10^{-15}$ metros como radio, e supoñéndoo esférico, calcula: a) o seu volume en cm^3 (Recorda o volume dunha esfera é $(4/3)\pi r^3$. b) Encontra o peso dun centímetro cúbico dun material formado exclusivamente por protóns. c) Compara o resultado co peso dun centímetro cúbico de auga (un gramo) e dun centímetro cúbico de chumbo (11.34 gramos).

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Indica que afirmación é falsa. O número –0.3333333… é un número

a) real b) racional c) irracional d) negativo

2. Operando e simplificando a fracción $\frac{a^2-4a+4}{a-2}:\frac{a-2}{a+3}$ obtense:

a) $a + 3$ b) $1/(a + 3)$ c) $a – 2$ d) $1/(a – 2)$

3. A expresión decimal 0.63636363…. escríbese en forma de fracción como

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4. Ao simplificar $\sqrt{2}$ (7 $\sqrt{2}$ – 5 $\sqrt{2}$ + 4 $\sqrt{2}$) obtés:

a) 6 $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$ (5 $\sqrt{2}$) c) 12 d) 8

5. Contesta sen facer operacións. As fraccións 4/7; 9/150; 7/50 teñen unha expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

6. O conxunto dos números reais menores ou iguais a –2 escríbese:

a) (–∞, –2) b) (–∞, –2] c) (–2, +∞) d) (–∞, –2[

7. O entorno de centro –2 e radio 0.7 é o intervalo:

a) (–3.7, –2.7) b) (–2.7, –1.3) c) (–3.3, –2.7) d) (–2.7, –1.3]

8. O intervalo (–3, –2) é o entorno:

a) E(–2.5, 1/2) b) E(–3.5, –0.5) c) (–3.5, 1/2) d) (–2.5, –0.5)

9. Ao efectuar a operación $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ obtense:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. Ao efectuar a operación 0.000078 + 2.4 · 10^{-5} obtense:

a) 3.6 · 10^{-10} b) 1.8912 · 10^{-10} c) 10.2 · 10^{-5} d) 18.72 · 10^{-5}

Autor: Paco Moya e Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF