Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 1:

Números reais

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-031749

Fecha y hora de registro: 2014-02-07 13:38:38.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya

Revisores: Javier Rodrigo e Sergio Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Números reais. 4ºB da ESO

Índice

Resumo

Xa coñeces os números naturais, os números enteiros e os números racionais. Neste capítulo imos estudar os números reais que están formados polos números racionais e os irracionais. Polo tanto, con algúns números reais irracionais xa te encontraras, con $\sqrt{2}$, con π…

Pero hai moitos, moitos máis. Hai moitos máis números irracionais que racionais. E preguntaraste, como se pode dicir iso se son infinitos? Resulta que hai infinitos máis grandes que outros. O infinito dos números naturais denomínase “infinito numerable”. Resulta que o dos números enteiros e o dos números racionais tamén é “infinito numerable”, pero o dos números reais xa non é numerable, é moito maior e denomínase “a potencia do continuo”. Unha das súas propiedades máis importantes é a súa relación cos puntos dunha recta, polo que aprenderemos a representalos na recta “real” na que non deixan “buratos”.

Como os números irracionais teñen infinitas cifras decimais non periódicas é complicado utilizalos tal cal, así que aprenderemos a aproximalos e calcular o erro que por iso cometemos.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

1. NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

Recordámosche os distintos tipos de números que xa coñeces:

Naturais ➔ $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, …}

Son os números que se usan para contar e ordenar. O 0 pode incluírse ou non, dependerá do teu profesor.

Enteiros ➔ $\mathbb{Z}$ = {… , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …}

Son os números naturais e os seus opostos. Non teñen parte decimal, de aí o seu nome. Inclúen aos Naturais.

Os números que se poden expresar en forma de cociente de dous números enteiros denomínanse números **racionais** e son representados pola letra $\mathbb{Q}$.

Polo tanto

Racionais ➔ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Os números racionais inclúen aos enteiros.

Tamén conteñen aos números que teñen expresión decimal exacta (0.12345) e aos que teñen expresión decimal periódica (7.01252525…) como veremos.

Notación:
$\in$ significa **"pertence"**
$\cup$ significa **"unión"**
$\subset$ significa **"incluído"**
$\cap$ significa **"intersección"**

1.1. Expresións decimais finitas ou periódicas

Recorda que:

- Se o denominador (da fracción irredutible) só ten como factores primos potencias de 2 ou 5 a expresión decimal é exacta.

Exemplo:

Así por exemplo $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0.025$; xa que $\frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, e isto é xeral xa que sempre haberá unha potencia de 10 que sexa múltiplo do denominador se este só contén douses ou cincos. Fíxate que o número de decimais é o maior dos expoñentes de 2 e 5.

- Se o denominador (da fracción irredutible) ten algún factor primo que non sexa 2 nin 5 a fracción terá unha expresión decimal periódica.
- Se supoñemos un número *n* con factores primos distintos de 2 e 5, entón

$$\frac{1}{n} = m \cdot 10^{-a} \Rightarrow \frac{10^a}{n} = m,$$

pero o denominador non pode dar un cociente exacto ao dividir ao numerador, xa que 10 só ten os factores 2 e 5. Isto demostra que a expresión decimal non pode ser exacta.

Vexamos que é periódica:

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Exemplo:

- Cun exemplo bastará: se dividimos 1 entre 23 obtemos un primeiro resto que é 10, logo outro que é 8 e seguimos pero, repetirase algunha vez o resto e polo tanto as cifras do cociente?, a reposta é que si, seguro que si, os restos son sempre menores que o divisor, neste caso do 1 ao 22, se obteño 22 restos distintos (como é o caso) ao sacar un máis ten que repetirse! É o chamado *Principio do Pombal*. E a partir de aí os valores do cociente repítense.

Polo tanto a expresión decimal é periódica e o número de cifras do período é como máximo unha unidade inferior ao denominador (non sempre ocorre isto pero 1/23 ten un período de 22 cifras, 1/97 teno de 96 cifras, porén 1/37 ten un período de só 3 cifras, unha pista: 37 é divisor de 999).

Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica.

Actividades propostas

1. Mentalmente decide cales das seguintes fraccións teñen unha expresión decimal exacta e cales a teñen periódica:

a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11

2. Calcula a expresión decimal das fraccións do exercicio anterior e comproba se a túa dedución era correcta.

3. Calcula a expresión decimal das fraccións seguintes:

a) 1/3 b) 1/9 c) 7/80 d) 2/125 e) 49/400 36/11

1.2. Forma de fracción dunha expresión decimal

Recorda o procedemento:

Actividades resoltas

- Cálculo da forma de fracción de a) 0.175; b) 1.7252525…

a) Expresión decimal exacta: $0.175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$, divídese entre 10 elevado ao número de cifras decimais.

b)Expresión decimal periódica: Temos que conseguir 2 números coa mesma parte decimal para que ao restar desaparezan os decimais.

$$N = 1.7252525\ldots$$
$$1000N = 1725.2525\ldots$$
$$10N = 17.2525\ldots$$
$$Se\ restamos: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Primeiro levamos a coma ao final do primeiro período (fíxate que o anteperíodo e o período xuntos teñen 3 cifras), despois ao principio do primeiro período (o anteperíodo ten 1 cifra). Temos dúas expresións coa mesma parte decimal polo que, ao restar, eses decimais vanse, só queda despexar N.

Toda expresión decimal exacta ou periódica pódese poñer como fracción.

Textos Marea Verde

Actividades propostas

4. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais exactas e redúceas, comproba coa calculadora que está ben:

a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23

5. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais periódicas, redúceas e comproba que está ben:

a) 2.353535….. b) 87.2365656565…. c) 0.9999….. d) 26.5735735735…..

1.3. $\sqrt{2}$ non é un número racional

Imos utilizar un método de demostración moi habitual en Matemáticas que se chama "**Redución ao Absurdo**" que consiste en:

> Se só hai 2 posibilidades para algo que chamamos A e non A e queremos demostrar A, empezamos supoñendo que se cumpre non A, facemos algún razoamento onde se chega a unha contradición (Absurdo) e desbotamos non A, tendo que cumprirse polo tanto A.

Máis doado de entender: supón que só hai 2 posibles camiños para chegar a un sitio. Tiras por un deles e descobres que non chega a ningunha parte, pois ten que ser o outro.

Imos entón. Queremos demostrar A:

$\sqrt{2}$ **non** pode poñerse como fracción.

Supoñemos certo o seu contrario, non A:

$\sqrt{2}$ **si** pode poñerse como fracción.

Entón $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$, **fracción irredutible**. Elevamos ao cadrado nos 2 membros:

$$\Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow a^2=2b^2$$

logo a^2 é par e polo tanto *a* tamén o é (o cadrado dun número impar é sempre impar), poñemos *a* = 2*k* e substituímos:

$$(2k)^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow b^2=2k^2$$

logo b^2 é par e polo tanto *b* tamén o será.

En definitiva: *a* e *b* son os 2 números pares. CONTRADICIÓN, absurdo, dixemos que a fracción era irredutible, logo *a* e *b* non poden ser ambos os dous múltiplos de 2.

Polo tanto rexeitamos non A e quedamos con que A é certa.

Este procedemento serve igual para **todas as raíces non exactas**, de calquera índice.

Pero non vale para todos os irracionais, para demostrar que π é un número irracional hai que estudar moito. Foi demostrado a finais do século XVIII por *Lambert*. Ata ese momento aínda se seguían calculando decimais para encontrar un período que non ten.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

1.4. Distintos tipos de números

Todos estes números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, …, π… xunto cos números racionais forman o conxunto dos números reais. E aos números reais que non son números racionais chámaselles números irracionais. Polo tanto

Irracionais ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathrm{Q}$.

Son números irracionais os números que non son racionais e polo tanto aqueles números que non poden poñerse como fracción de números enteiros. Hai máis dos que podería parecer (de feito hai máis que racionais!), son todos aqueles que teñen unha expresión decimal que non é exacta nin periódica, é dicir, **infinitas cifras decimais e sen período.** Exemplos: 17.6766766676… que acabo de inventar ou 0.1234567891011… que inventou *Carmichael*. Inventa un, busca en Internet e se non o encontras, pois é teu (por agora ☺).

Reais ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

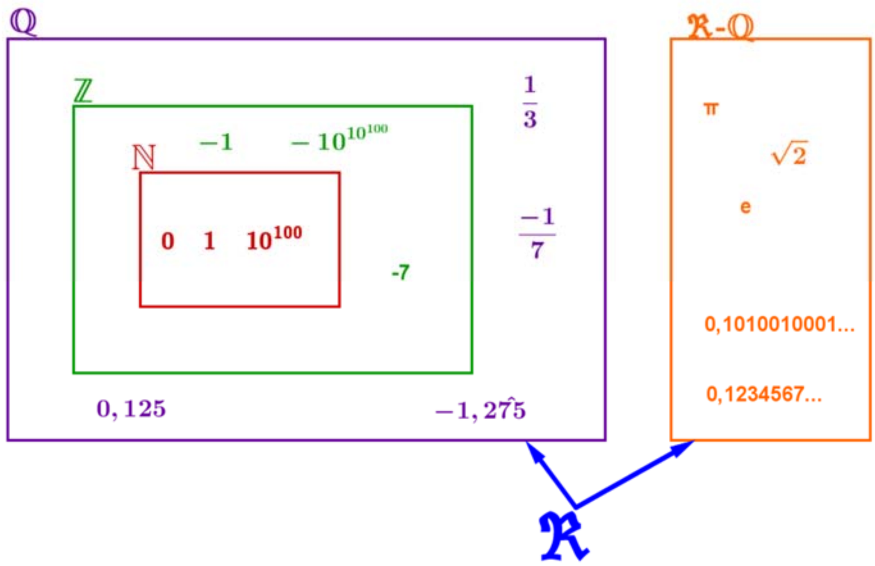
É a unión dos números racionais e dos irracionais.

Temos polo tanto que: $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re$.

$\mathrm{I} \subset \Re$

Son estes todos os números?

Non, os reais forman parte dun conxunto máis amplo que é o dos Números Complexos C (en 1º de bacharelato vense, na opción de Ciencias).



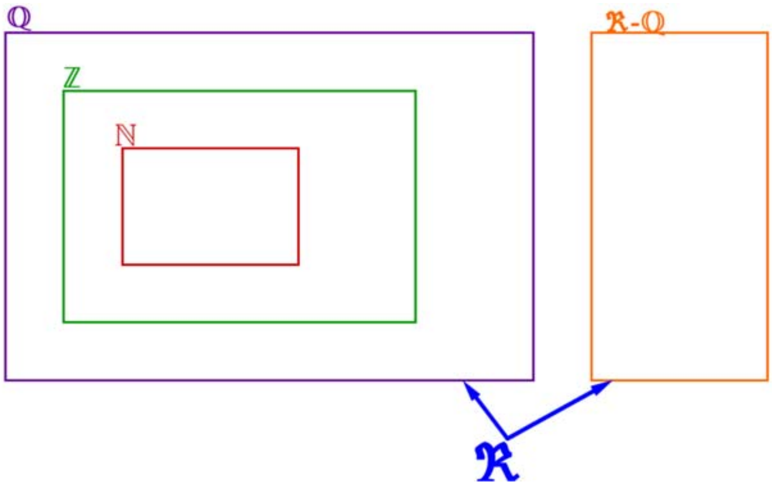
Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
BY NC SA
Textos Marea Verde

Actividades propostas

6. Copia no teu caderno a táboa adxunta e sinala cun X a que conxuntos pertencen os seguintes números:

Número	N	Z	Q	I	$\Re$
-2.01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0.121212…					
$\sqrt[3]{-1\,000}$					
1.223334…					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

7. Copia no teu caderno o esquema seguinte e mete os números do exercicio anterior no seu lugar:



8. Podes demostrar que 4.99999… = 5? Canto vale 2.5999…?

9. Demostra que $\sqrt[3]{7}$ é irracional.

10. Cantas cifras pode ter como máximo o período de $\frac{1}{47}$?

11. Cantos decimais ten $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? Atréveste a dar a razón?

12. Fai a división 999 999 : 7 e despois fai 1 : 7. Será casualidade?

13. Agora divide 999 entre 37 e despois 1 : 37. É casualidade?

Textos Marea Verde

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

Aínda que neste curso imos traballar na medida do posible con valores exactos ($\sqrt{3}$ non se substitúe por 1.73 nin π por 3.1416) hai veces nas que cómpre facer aproximacións por motivos prácticos (non lle imos dicir ao tendeiro que nos dea 2π metros de corda pola conta que nos trae) e a traballar con números aproximados por, entre outros motivos, non coñecermos os valores exactos. Así, por exemplo, se nos pesamos nunha báscula e marca 65.4 Kg, canto pesamos exactamente? Non se pode saber, é imposible, o máximo que podemos dicir é que o noso peso está entre 65.3 e 65.5 Kg se o erro máximo é de 100 g.

2.1. Erro Absoluto

Defínese o Erro Absoluto (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

As barras significan "valor absoluto" que xa sabes que quere dicir que no caso de ser negativo o convertemos en positivo.

Exemplo:

- Se aproximamos $\pi \approx$ 3.1416 teremos que o EA = $|\pi - 3.1426| = |-0.0000073...| \approx 0.0000073$ unhas 7 millonésimas.

Cota do Erro Absoluto

Aínda sen coñecer con exactitude o valor exacto, sempre podemos poñer unha cota (un valor máximo) ao erro absoluto só tendo en conta a orde de aproximación. Así, se redondeamos nas dez milésimas (como no exemplo), sempre podemos afirmar que o EA$\leq$ 0.00005, é dicir, menor ou igual que media unidade do valor da cifra de redondeo ou 5 unidades da seguinte (5 cen milésimas), que é o mesmo.

Actividades resoltas

- Calcula a cota do erro absoluto de:

N$\approx 2.1 \Rightarrow EA \leq 0.05$

$N \approx 600 \Rightarrow EA \leq 50$ se supoñemos que redondeamos nas centenas.

Cando non se coñece o valor real, non pode coñecerse o valor absoluto, pero si unha cota. Se un cronómetro ten unha precisión de décimas de segundo diremos que o EA$\leq$ 0.05 s (media décima ou 5 centésimas).

Se temos un número A e a cota do erro absoluto é ΔA (lese incremento de A) soe poñerse $A \pm \Delta A$ sobre todo nas Ciencias Experimentais.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

2.2. Erro Relativo

Para comparar erros de distintas magnitudes ou números defínese o Erro Relativo (ER) como:

$$\text{ER} = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que soe multiplicarse por 100 para falar de % de erro relativo.

Se non se coñece o valor real substitúese polo valor aproximado (a diferenza normalmente é pequena).

Actividades resoltas

- Se aproximamos raíz de 3 por 1.73, o erro relativo cometido é:

$$\sqrt{3} \approx 1.73 \Rightarrow EA \approx 0.0021 \Rightarrow ER = \frac{0.0021}{\sqrt{3}} \approx 0.00121 \Rightarrow 0.121\%$$

Se na última división poñemos o valor aproximado 1.73 o ER sae aproximadamente 0.121%.

- Nas aproximacións A = 5.2 con EA ≤ 0.05 e B = 750 con EA ≤ 5, en cal estamos cometendo proporcionalmente menor erro?

Calculamos os erros relativos:

A ➔ ER $\leq \frac{0.05}{5.2} \Rightarrow ER \leq 0.0096 \Rightarrow ER \leq 0.96\%$

B ➔ER $\leq \frac{5}{750} \Rightarrow ER \leq 0.0067 \Rightarrow ER \leq 0.67\%$

É mellor aproximación a de B.

Control do erro cometido

Non hai nada máis ignorante matematicamente falando que utilizar demasiadas cifras decimais traballando en problemas prácticos. Dicir que nunha manifestación participaron **aproximadamente** 51226 persoas dana o sentido común. Tamén é unha barrabasada dicir que a estimación de voto para o partido A é do 25.6 % de votos se o erro pode ser do 3 % (cousa que non adoita mencionarse). Poñer como nota dun exame un 6.157 é polo menos curioso pola súa aparente precisión.

Actividades resoltas

- Temos dous números **redondeados** ás décimas: A = 2.5 e B = 5.7

Imos facer operacións con eles controlando os erros.

Como o EA $\leq$ 0.05 (recorda: se redondeamos nas décimas o erro será inferior ou igual a 5 centésimas) temos que A pode estar entre 2.45 e 2.55; igualmente B estará entre 5.65 e 5.75.

Suma

O valor máis pequeno será 2.45 + 5.65 = 8.1; o valor máximo será 2.55 + 5.75 = 8.3. Se restamos dá 0.2. Se tomamos como valor da suma 8.2, que é a media, agora o EA $\leq$ 0.1 (a metade da diferenza entre o máximo e o mínimo, fíxate en que 8.2 está a distancia 0.1 de 8.1 e de 8.3) cando antes era inferior a 0.05. xa non podemos estar seguros do último decimal. Coa resta pasa o mesmo.

Textos Marea Verde

Mínimo 5.65 – 2.55 = 3.1 (Ollo!, o menor menos o maior). Máximo 5.75 – 2.45 = 3.3. A media é 3.2 e como (3.3 – 3.1) : 2 = 0.1 o EA ≤ 0.1

En cada suma ou resta o erro absoluto é a suma dos erros absolutos (demóstrao).

Se facemos varias sumas e restas, pois aumentará perigosamente.

Produto

Valor máis pequeno 2.45 · 5.65 = 13.8425; valor máximo 2.55 · 5.75 = 14.6625. A diferenza é agora de 0.82. Se tomamos como produto 14.25 temos que EA ≤ 0.41; multiplicouse por 8. Xa non debemos estar seguros nin das unidades, podería ser 14 ou 15.

Se multiplicamos A (con EA = *a*) con B (con EA = *b*) obtemos un **EA = a · B + b · A**.

Nótese que depende dos valores de A e B.

Nota:

A fórmula **EA = a · B + b · A** sae de facer (A + a) · (B + b) – (A – a) · (B – b) e dividir entre 2. Compróbaa.

Se facemos (aB + bA)/(AB) obtemos (a/A) + (b/B), é dicir:

Os erros relativos súmanse ao multiplicar dous números.

División

O valor máis pequeno posible obtense de dividir o máis pequeno entre o máis grande:

5.65 : 2.55 = 2.22;

o máis grande ao revés (o máis grande entre o máis pequeno): 5.75 : 2.45 = 2.35.

Polo tanto EA ≤ 0.065.

Agora sae aproximadamente EA = $\frac{a \cdot B + b \cdot A}{B^2}$, que se B é grande fai que saia reducido, pero se B é pequeno dános unha ingrata sorpresa.

Actividades resoltas

- Cálculo do erro absoluto e relativo se A = 5; *a* = 0.05; B = 0.5; *b* = 0.05 → A/B = 10 con EA ≤ 1.1, un 11% de erro relativo.

Non todo son malas noticias. Se dividimos un número aproximado entre un número exacto, o erro absoluto diminúe se o divisor é maior que 1. Por exemplo $(5 \pm 0.5): 20 = 0.25 \pm 0.025$. Porén o erro relativo permanece igual (próbao).

Nota:

Esta fórmula sae de facer $\frac{A+a}{B-b} - \frac{A-a}{B+b}$ e dividir entre 2, desprezamos b^2 fronte a B^2. Non hai que sabela.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Potencia

Pode rozar a catástrofe. Comproba que o mínimo sae 158 e o máximo 218. EA$\leq$ 30.

Isto é $(2.5 \pm 0.05)^{5.7 \pm 0.05} = 188 \pm 30$ o que representa un 16 % de erro relativo.

Curiosamente 188 non é $2.5^{5.7}$ que vale 185.5 aproximadamente, 188 é a media entre o mínimo e o máximo.

Actividades resoltas

- Medimos o radio dunha circunferencia cunha regra milimetrada e marca 7.0 cm. Queremos calcular a área do círculo. O erro máximo no radio é de 0.05 cm logo pode estar entre 6.95 e 7.05. Se aplicamos a fórmula πr^2 para estes valores obtemos 151.7 e 156.1, que son os valores mínimo e máximo. A diferenza é 4.4 e a súa metade é 2.2 que é a cota de erro absoluto. Diremos que

$$A = 153.9 \pm 2.2\ cm^2 .$$

A cota do erro relativo $\frac{2.2}{153.9} \cdot 100$ = 1.4 %.

O radio tiña unha cota de (0.05 : 7) · 100 = 0.71 %, polo que perdemos precisión.

Se operamos con números aproximados, é peor aínda, se o facemos en repetidas ocasións, os erros vanse acumulando ata o punto de poder facerse intolerables. Non sexas demasiado preciso se os datos de partida non son fiables.

Actividades propostas

14. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ata as centésimas e calcula os erros absoluto e relativo cometidos.

15. Calcula unha cota do erro absoluto nas seguintes aproximacións:

a) 2.1 b) 123 c) 123.00 d) 4 000 con redondeo nas decenas.

16. Unha balanza ten un erro inferior ou igual a 50 g nas súas medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azucre de 1 Kg cada un que son un lote. Determina o peso mínimo e máximo do lote. Cal é a cota do erro absoluto para o lote?

17. Os números A = 5.5 e B = 12 foron redondeados. Calcula unha cota do erro absoluto e do erro relativo para:

a) A + B
b) A · B
c) B/A
d) A^B

Nota: Determina os valores máximo e mínimo de A e B. Despois os valores máximos e mínimos de cada apartado (recorda que a resta e a división funcionan distinto).

18. Como medir o grosor dun folio cun erro inferior a 0.0001 cm coa axuda dunha regra milimetrada e a do/a conserxe do instituto?, faino.

3. REPRESENTACIÓN NA RECTA REAL DOS NÚMEROS REAIS

3.1. Densidade dos números reais

Os números reais son densos, é dicir, entre cada dous números reais hai infinitos números no medio.

Iso é fácil de deducir. Se *a*, *b* son dous números con *a* < *b* sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, é dicir, a media está entre os dous números. Como isto podemos facelo as veces que queiramos, de aí o resultado.

Curiosamente os racionais son tamén densos, así como os irracionais.

Actividades propostas

19. Calcula 3 números reais que estean entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e 1.

20. Calcula 5 números racionais que estean entre $\sqrt{2}$ *e* 1.5

21. Calcula 5 números irracionais que estean entre 3.14 e π

3.2. Representación na recta real dos números reais

Elixida a orixe de coordenadas e o tamaño da unidade (ou o que é o mesmo, se colocamos o 0 e o 1) todo número real ocupa unha posición na recta numérica e, ao revés, todo punto da recta pódese facer corresponder cun número real.

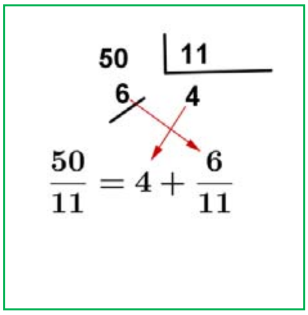
Vexamos como representar de forma exacta **algúns** números reais:

I.- Representación na recta dos números racionais

Actividades resoltas

- Se a fracción é **propia** (numerador menor que o denominador, valor menor que 1), por exemplo $\frac{5}{6}$ bastará con dividir a primeira unidade en 6 partes iguais e tomar 5. No caso de ser negativa contaremos cara á esquerda. (Ver figura).

- Se a fracción é **impropia** (numerador maior que denominador e polo tanto valor maior que 1) faremos a división enteira (sen decimais) quedando co cociente e o resto. Isto permítenos poñela en forma mixta (suma dun enteiro e dunha fracción propia). Así por exemplo: $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$ xa que ao dividir 11 entre 3 obtemos 3 de cociente e 2 de resto. O *cociente é a parte enteira e o resto o numerador da fracción propia*.

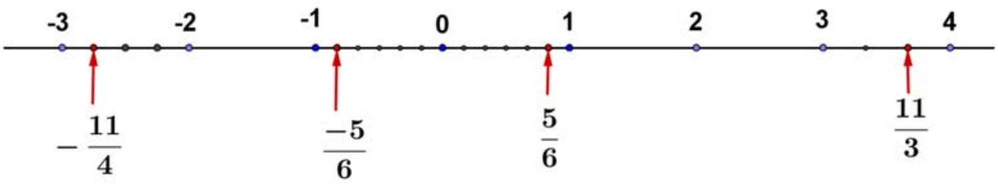


Para representala só temos que ir onde di a parte enteira (3) e a unidade seguinte (a que vai do 3 ao 4) dividímola en 3 partes iguais e tomamos 2.

- Outro exemplo: $\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}$, xa que a división dá 2 de cociente e 3 de resto.

Imos ao 2, dividimos a unidade seguinte (do 2 ao 3) en 7 partes iguais e tomamos 3.

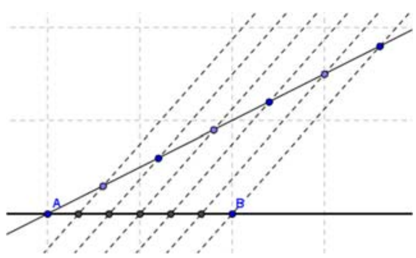
- **En caso de ser negativa**: $-\frac{11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, farase igual, pero contando cara á esquerda. Imos ao –2, a unidade que vai do –2 ao –3 divídese en 4 partes e tomamos 3 (pero contando do –2 ao –3, claro!).



Recorda que:

Para dividir un segmento en partes iguais:

Para dividir o segmento AB en, por exemplo, 6 partes iguais, trazamos por A unha liña oblicua calquera, abrimos o compás unha abertura calquera e marcamos 6 puntos na recta anterior a distancia igual. Unimos o último punto con B e trazamos paralelas que pasen polos puntos intermedios da recta oblicua. Polo *Teorema de Tales*, o segmento AB quedou dividido en 6 partes iguais.



Normalmente non che esixirán que o fagas tan exacto, faralo de forma aproximada, pero ten coidado de que as partes parezan iguais.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

II.- Representación na recta das raíces cadradas

Para representar raíces cadradas usamos o *Teorema de Pitágoras*. Se nun triángulo rectángulo a hipotenusa é *h* e os catetos son *a*, *b* temos que $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

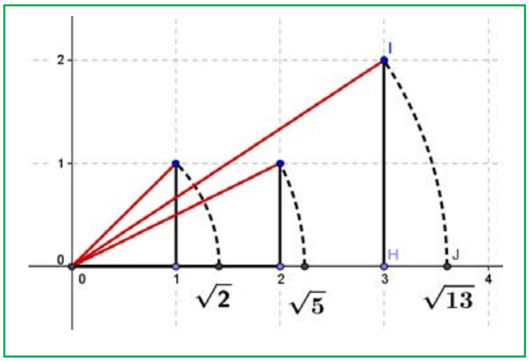
Actividades resoltas

- Representa na recta $\sqrt{2}$

Se *a* = *b* = 1 temos que $h = \sqrt{2}$. Só temos que construír un triángulo rectángulo de catetos 1 e 1, a súa hipotenusa mide $\sqrt{2}$, (a diagonal do cadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$). Agora utilizando o compás, levamos esa distancia ao eixe X (ver figura).

- Representa na recta $\sqrt{5}$.

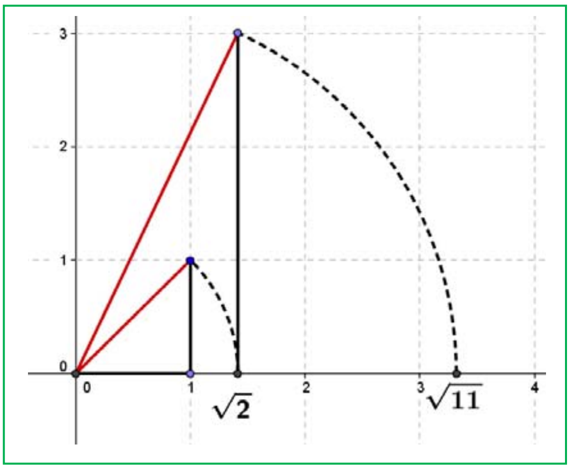
Como $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ só hai que construír un triángulo rectángulo de catetos 2 e 1, e a súa hipotenusa mide $\sqrt{5}$.



Pillaches o truco? O radicando hai que expresalo como suma de 2 cadrados. O triángulo rectángulo terá como catetos eses dous números.

- Así, para representar $\sqrt{13}$, expresamos 13 como suma de 2 cadrados: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ polo tanto nun triángulo rectángulo de lados 3 e 2 a hipotenusa será $\sqrt{13}$.

- Pero, e se o número non pode poñerse como suma de 2 cadrados?, por exemplo, o 11 (sempre complicando as cousas! ☹).



Haberá que facelo en 2 pasos. 11 = 2 + 9, hai algún número cuxo cadrado sexa 2?, por suposto que si, $\sqrt{2}$. Polo tanto $\sqrt{11} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2}$, temos que facer un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ e 3. Para iso primeiro constrúese $\sqrt{2}$ como antes e trázase unha perpendicular de lonxitude 3.

Poden debuxarse xa así todas as raíces?, non. Hai algunhas para as que hai que facer máis pasos ($\sqrt{7}$ por exemplo require 3), pero mellor deixámolo aquí, non?

Actividades propostas

22. Representa na recta numérica os seguintes números: $\frac{7}{6}$; $\frac{-17}{4}$; $2.375; -3.\overset{\frown}{6}$

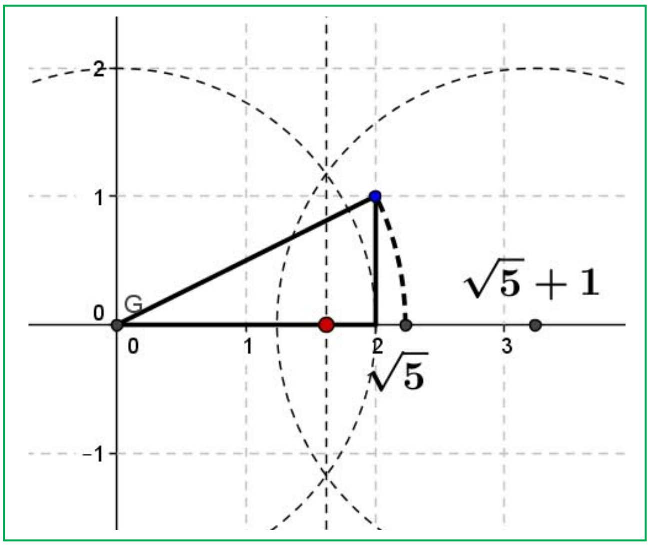
23. Representa na recta numérica: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

3.3. Un exemplo de interese matemático, natural e artístico

Oíches falar do número de ouro?

O número de ouro (ou razón áurea ou proporción harmónica ou divina proporción) é igual a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



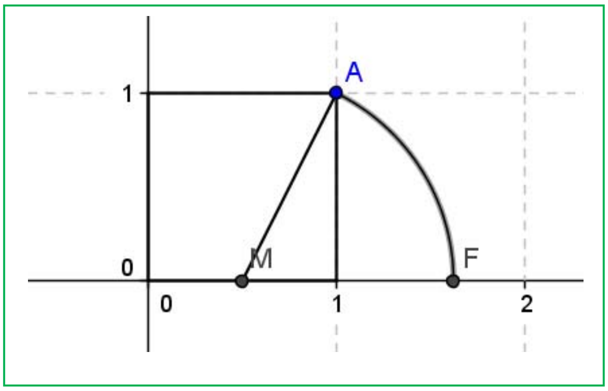
Actividades resoltas

- Como o representamos na recta?

Só hai que construír $\sqrt{5}$ como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidade co compás) e dividir entre 2 calculando o punto medio (coa mediatriz), feito.

- Outra forma distinta:

Construímos un cadrado de lado 1 (un que?, un o que queiras!). Calculamos o punto medio do lado inferior (M) e levamos a distancia MA co compás ao eixe horizontal, OF é o número de ouro.

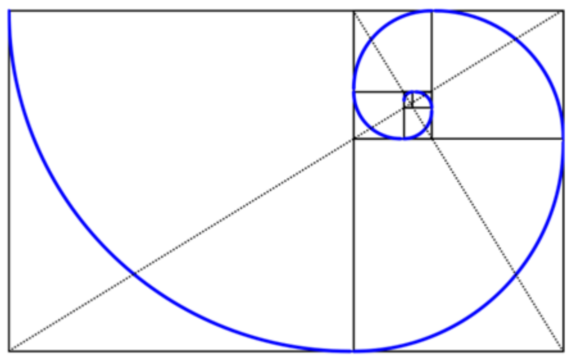


Vexamos:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Un exemplo da aplicación da razón áurea para construír unha espiral (imaxe de wikipedia).



Espiral áurea. Wikipedia

Actividades propostas

24. Busca rectángulo áureo e espiral áurea.

25. Xa de paso busca a relación entre o número de ouro e a sucesión de *Fibonacci*.

26. Busca en Youtube “algo pasa con phi” e cóntasme.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Ferramenta informática para estudar a proporción áurea

Nesta actividade vaise utilizar o programa *Xeoxebra* para realizar un estudo da proporción áurea.

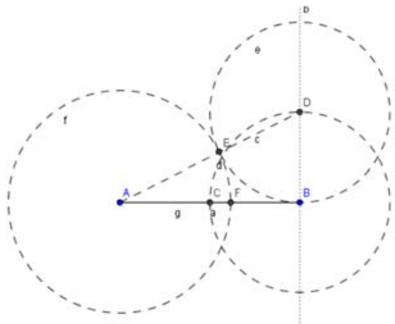
Un segmento está dividido en dúas partes que están en proporción áurea se a razón entre a lonxitude do segmento e a lonxitude da parte maior coincide coa razón entre a lonxitude da parte maior e a da parte menor.

Actividades resoltas

- *Utiliza Xeoxebra para dividir un segmento en dúas partes que estean en proporción áurea.*

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Determina con **Novo punto** os puntos *A* e *B* e debuxa o segmento, *a*, que os une.
- Traza un segmento *BD* perpendicular ao segmento *AB* no punto *B*, cuxa lonxitude sexa a metade de *AB,* podes seguir as seguintes instrucións:
    - Calcula o **Punto medio ou centro do** segmento *AB* e chámao *C*.
    - Debuxa con **Circunferencia con centro e punto que cruza** a que ten centro en *B* e pasa por *C*.
    - Traza a **Recta Perpendicular** ao segmento *AB* que pase por *B*.
    - Define *D* como o **Punto de Intersección** entre esta recta e a circunferencia.



- Debuxa o segmento *AD* e unha circunferencia con centro *D* que pase por *B*. Sexa *E* o **Punto de Intersección** desta circunferencia co segmento *AD*.
- Con centro en *A* traza a circunferencia que pasa por *E* e determina o **punto de Intersección,** *F*, desta circunferencia co segmento *AB*.
- Traza o segmento, *g*, que une os puntos *A* e *F*.
- Comproba que o punto *F* divide ao segmento *AB* en dúas partes que están en proporción áurea:
    - Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais**.
    - Calcula na liña de **Entrada os** cocientes *a/g e g/(a-g).*

Observa na **Ventá alxébrica** que estes valores coinciden, calculaches un valor aproximado do número de ouro, Φ.

- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e comproba que o cociente entre as lonxitudes dos segmentos *AF* e *FB* permanece constante.
- Para visualizar mellor a construción podes debuxar os elementos auxiliares con trazo descontinuo, elixindo no menú contextual, **Propiedades e Estilo de trazo**.

Un rectángulo é áureo se os seus lados están en proporción áurea.

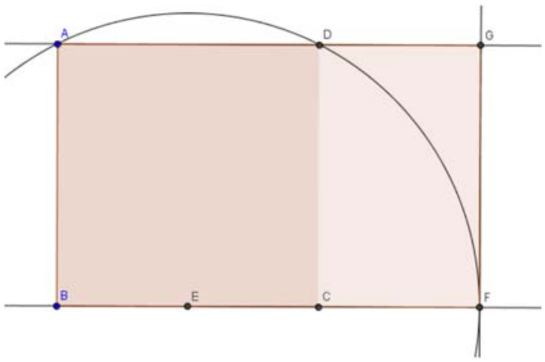
Se a un rectángulo áureo lle quitamos (ou lle engadimos) un cadrado, obtemos un rectángulo semellante ao de partida e polo tanto tamén áureo.

Textos Marea Verde

Utiliza Xeoxebra para debuxar un rectángulo áureo.

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Define dous puntos *A* e *B* que van ser os extremos do lado menor do rectángulo e coa ferramenta **polígono regular** debuxa, a partir dos puntos *A* e *B*, o cadrado *ABCD* e oculta os nomes dos lados coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo**.
- Calcula o **Punto medio**, *E*, do lado *BC*. Con centro en *E* debuxa a **Circunferencia** con centro en *E* que pasa por *A*.
- Traza a recta, *a*, que pasa por *BC* e define como *F* o **Punto de intersección** entre esta recta e a circunferencia.
- Debuxa a **Recta perpendicular** á recta *a* que pasa por *F*, e a **recta** que pasa polos puntos *A e D*, chama *G* ao **Punto de intersección** destas rectas e define con **Polígono** o rectángulo *ABFG*.



- Na ventá alxébrica aparecen as lonxitudes dos lados do rectángulo como *f* e *g*, introduce na liña de **Entrada** *g/f* e observa nesta ventá que aparece o valor *e* que é unha aproximación ao número áureo. Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais.**
- Debuxa o **segmento** *CF*, na ventá alxébrica aparece a súa lonxitude, *h*, introduce na liña de **Entrada** *f/h*, observa que este cociente coincide con *g/f* e é unha aproximación do número áureo.
- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e observa que o cociente entre as lonxitudes dos lados dos rectángulos é constante.

O rectángulo *ABFG é* áureo xa que o cociente entre a lonxitude do seu lado maior e a do menor é o número de ouro, ademais o rectángulo *DCFG*, que se obtén ao quitar un cadrado de lado o menor do rectángulo, é tamén áureo e polo tanto semellante ao primeiro.

Crea as túas propias ferramentas con Xeoxebra. Crea unha que debuxe rectángulos áureos.

Vaise crear unha ferramenta que a partir de dous puntos *A* e *B* debuxe o rectángulo áureo no que o segmento *AB* é o lado menor.

- Na figura anterior oculta o nome dos puntos *C, D, E, F* e *G* coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo** facendo clic co rato sobre eles, na área de traballo ou na ventá alxébrica.
- Activa no menú **Ferramentas**, a opción **Creación de nova ferramenta e** define:

Obxectos de saída: o polígono cadrado, o polígono rectángulo e os puntos *C, D, F*, e *G*.

Obxectos de entrada: os dous puntos iniciais *A* e *B*.

E elixe como **nome da ferramenta** *rectángulo áureo*. Observa que aparece na barra de ferramentas.

Na opción **Manexo de útiles** do menú **Ferramentas** grava a ferramenta creada como *rectanguloaureo*, que se garda como *rectanguloaureo.ggt*

Utiliza a ferramenta **Desprazamento da zona gráfica** para ir a unha parte baleira da pantalla e comprobar que a ferramenta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

Debuxa unha espiral áurea e crea unha ferramenta que debuxe espirais áureas.

Textos Marea Verde

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula** e abre o arquivo *rectanguloaureo.ggt* que acabas de crear.

- Define dous puntos *A* e *B* e aplica a ferramenta *rectanguloaureo,* obtense o rectángulo áureo *ABEF* e o cadrado *ABCD* co nome dos vértices *C, D, E e F* ocultos.
- Utiliza a ferramenta **Arco de circunferencia dados centro e dous puntos extremos** para debuxar o arco con centro o punto *C* e que pasa polos puntos *D* e *B*.

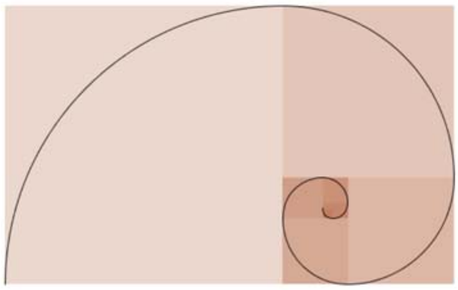
Vaise crear unha nova ferramenta que debuxe o rectángulo áureo e o arco.

- Activa no menú **Ferramentas**, a opción **Creación de nova ferramenta e** define:

  Obxectos de saída: o cadrado, o polígono rectángulo, os puntos *C, D,E*, *F* e o arco *c*.

  Obxectos de entrada: os dous puntos iniciais *A* e *B*.

Elixe como **nome da ferramenta** *espiralaurea*.



Na opción **Manexo de útiles** do menú **Ferramentas** grava a ferramenta creada como *espiralaurea,* que se grava como *espiralaurea.ggt.*

- Activa sucesivamente a ferramenta anterior, co obxecto de debuxar a espiral que resulta de unir cun arco de circunferencia dous vértices opostos dos cadrados de forma consecutiva e de maior a menor.
- Para mellorar o aspecto da espiral pódense ocultar os puntos, mellor na ventá alxébrica, coa ferramenta **Expón / Oculta obxecto**.

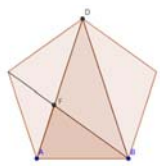
Observa que ao variar os ángulos nunha progresión aritmética de diferenza α=90º, os lados dos cadrados modifícanse segundo unha progresión xeométrica de razón: Φ.

Actividades propostas

27. Comproba que a lonxitude do lado do pentágono regular e a da súa diagonal están en proporción áurea.

28. Calcula con Xeoxebra unha aproximación da razón de semellanza entre un pentágono regular e o que se forma no seu interior ao debuxar as súas diagonais. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous pentágonos.

29. Comproba que os triángulos *ABD* e *ABF* da figura son semellantes e calcula aproximadamente con *Xeoxebra* a súa razón de semellanza.



30. Calcula con *Xeoxebra* o valor aproximado da razón de semellanza entre un decágono regular e o decágono que se forma ao trazar as diagonais da figura. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous polígonos.

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS E ENTORNOS

Como xa sabemos entre dous números reais hai infinitos números. Hai unha notación especial para referirse a eses infinitos números que deberás dominar para este e para futuros cursos.

4.1. Intervalos

(Do lat. *intervallum*): Conxunto da recta real limitado por dous valores. RAG.

I.- Intervalos Abertos

Se nos queremos referir ao conxunto dos números que hai entre dous valores pero sen contar os extremos, usaremos un **intervalo aberto.**

Exemplo:

- Os números superiores a 2 pero menores que 7 represéntanse por (2, 7) e lese "intervalo aberto de extremos 2 e 7". A el pertencen infinitos números como 2.001; 3.5; 5; 6.999… pero non son deste conxunto nin o 2 nin o 7. Iso representan as parénteses, que entran todos os números do medio pero non os extremos.

Exemplo:

- Os números positivos menores que 10 represéntanse por (0, 10), o intervalo aberto de extremos 0 e 10. Fíxate que 0 non é positivo, polo que non entra e o 10 non é menor que 10, polo que tampouco entra.

Nota: non se admite poñer (7, 2), o menor sempre á esquerda!

Tamén hai que dominar a expresión destes conxuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \Re / \ 2 < x < 7\}.$$

Traducimos: as chaves utilízanse para dar os elementos dun conxunto, dentro delas enuméranse os elementos ou dáse a propiedade que cumpren todos eles. Utilízase o *x* para denotar a un número real, a / significa "tal que" e por último dise a propiedade que cumpren mediante unha dobre desigualdade. Así que non te asustes, o de arriba lese: os *números reais tal que son maiores que 2 e menores que 7*.

É necesario dominar esta linguaxe matemática xa que a oración en galego pode non entenderse noutros países pero asegúroche que o das chaves e a / enténdeno todos os estudantes de matemáticas do mundo (ou case todos).

O outro exemplo: (0, 10) = $\{x \in \Re / \ 0 < x < 10\}$.

Por último a **representación gráfica**:

Póñense **puntos sen reencher** nos extremos e resáltase a zona intermedia.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Pregunta: Cal é número que está máis preto de 7, sen ser 7?

Pensa que 6.999…=7 e que entre 6.999 e 7 hai "moitos, moitísimos …" números.

***Nota:** Nalgúns textos os intervalos abertos represéntase así]2, 7[o que ten algunhas vantaxes como que os estudantes non confundan o intervalo (3, 4) co punto do plano (3, 4), que aseguramos que ten ocorrido (pero ti non serás un deles non?), ou a fastidiosa necesidade de poñer (2,3; 3,4) porque (2,3,3,4) non o entendería nin Gauss.

II.- Intervalos pechados

Igual que os abertos pero agora **si** pertencen os extremos.

Exemplo:

- intervalo dos números maiores ou iguais que –2 pero menores ou iguais que 5. Agora o –2 e o 5 si entran. Faise igual pero poñendo corchetes [–2, 5].

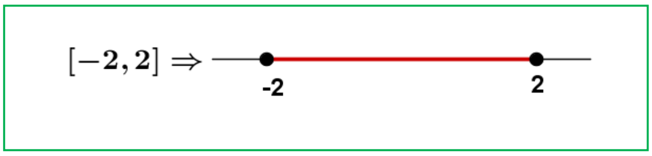
En forma de conxunto escríbese: $[-2, 5] = \{x \in \Re;\ -2 \leq x \leq 5\}$. Fíxate que agora poñemos $\leq$ que significa "menor ou igual".

Exemplo:

- intervalo dos números cuxo cadrado non é superior a 4. Se o pensas un pouco verás que son os números entre o –2 e o 2, ambos os dous incluídos (non superior $\Leftrightarrow$ menor ou igual). Polo tanto:

  $[-2, 2] = \{x \in \Re;\ -2 \leq x \leq 2\}$.

A representación gráfica é igual pero poñendo **puntos recheos**.

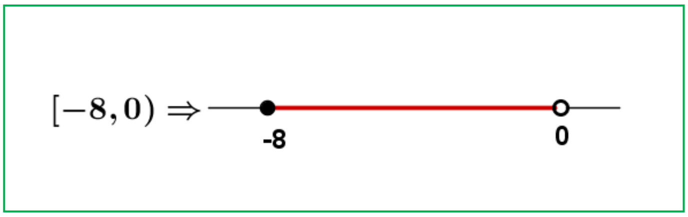


III.- Intervalos semiabertos (ou semipechados, a elixir)

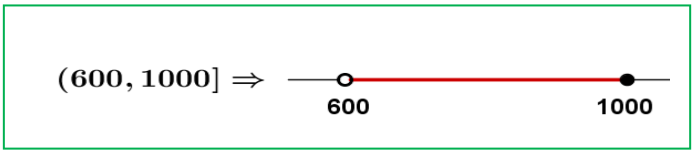
Por suposto que un intervalo pode ter un extremo aberto e outro pechado. A notación será a mesma.

Exemplo:

- Temperatura negativa pero non por debaixo de –8 °C:
  $[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$



- Números superiores a 600 pero que non excedan de 1 000.
  $(600, 1\,000] = \{x \in \mathbb{R} / 600 < x \leq 1000\}$.



Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

4.2. Semirrectas

Moitas veces o conxunto de interese non está limitado por un dos seus extremos.

Exemplo:

- Os números positivos: non hai ningún número positivo que sexa o maior. Utilízase entón o símbolo ∞ e escríbese $\left(0,+\infty\right)=\left\{x\,/\,x>0\right\}$.

Nótese que é equivalente poñer x > 0 que poñer 0 < x, pódese poñer de ambas as formas.

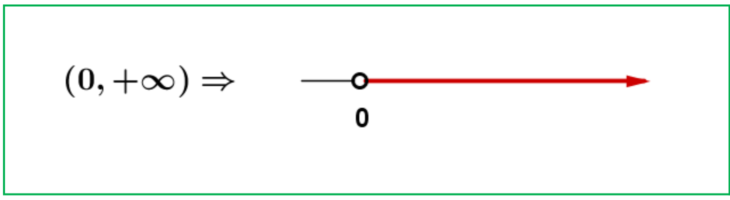
Exemplo:

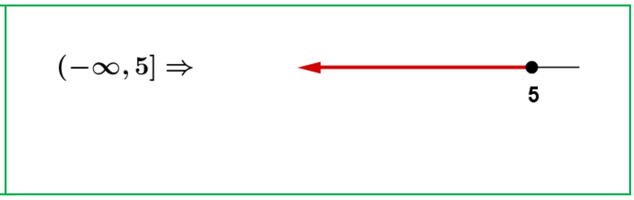
- Números non maiores que 5: $(-\infty,5]=\left\{x\,/\,x\leq 5\right\}$. Aquí o 5 si entra e por iso o poñemos pechado ("non maior" equivale a "menor ou igual")

Exemplo:

- Solución de *x* > 7: $\left(7,+\infty\right)=\left\{x\,/\,x>7\right\}$

  Nota: o **extremo non acoutado sempre se pon aberto**. Non queremos ver isto: (7, +∞]





4.3. Entornos

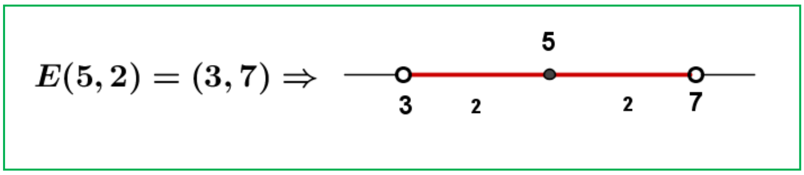
É unha forma especial de poñer os intervalos abertos.

Defínese o entorno de centro *a* e radio *r* e denótase E(*a*, *r*) (outra forma usual é $E_r(a)$) como o conxunto de números que están a unha **distancia de a menor que *r***.

Cun exemplo enténdelo mellor:

Exemplo:

- O entorno de centro 5 e radio 2 son os números que están de 5 unha distancia menor que 2. Se o pensamos un pouco, serán os números entre 5 – 2 e 5 + 2, é dicir, o intervalo (3, 7). É como coller o compás e con centro en 5 marcar con abertura 2.



Fíxate que o 5 está no centro e a distancia do 5 ao 7 e ao 3 é 2.

E(*a*, *r*) = (*a* – *r*, *a* + *r*)

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Exemplo:

- E(2, 4) = (2 – 4, 2 + 4) = (–2, 6)

É moi doado pasar dun entorno a un intervalo. Imos facelo ao revés.

Exemplo:

- Se teño o intervalo aberto (3, 10), como se pon en forma de entorno?

Calculamos o punto medio $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$ = 6.5 que será o centro do entorno. Fáltanos calcular o radio:

(10 – 3) : 2 = 3.5 é o radio (a metade do ancho). Polo tanto (3, 10) = E(6.5; 3.5)

En xeral:

O intervalo (*b*, c) é o entorno $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Exemplo:

- O intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}) = E(-3.5, 4.5)$

Tamén existen os entornos pechados pero son de uso menos frecuente.

Actividades propostas

31. Expresa como intervalo ou semirrecta, en forma de conxunto (usando desigualdades) e representa graficamente:

a) Porcentaxe superior ao 26 %.
b) Idade inferior ou igual a 18 anos.
c) Números cuxo cubo sexa superior a 8.
d) Números positivos cuxa parte enteira ten 3 cifras.
e) Temperatura inferior a 25°C.
f) Números para os que existe a súa raíz cadrada (é un número real).
g) Números que estean de 5 a unha distancia inferior a 4.

32. Expresa en forma de intervalo os seguintes entornos:

a) E(1, 5)

b) E(–2, $\frac{8}{3}$)

c) E(–10; 0.001)

33. Expresa en forma de entorno os seguintes intervalos:

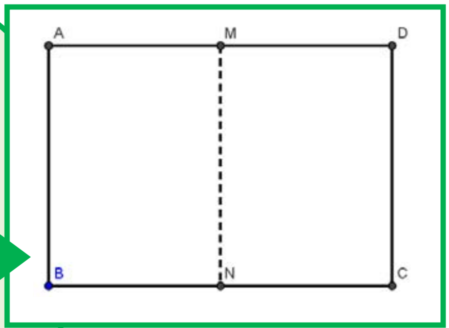
a) (4, 7)
b) (–7, -4)
c) (–3, 2)

34. Os soldos superiores a 500 € pero inferiores a 1 000 € pódense poñer como intervalo de números reais? *Pista: 600.222333€ pode ser un soldo?

Textos Marea Verde

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios e $\sqrt{2}$



Xa sabemos que un cadrado de lado L ten unha diagonal que vale $\sqrt{2}$ L, vexamos algo máis:

A imaxe representa un folio coa norma DIN 476 que é a máis utilizada a nivel mundial.

Esta norma especifica que un folio DIN A0 ten unha superficie de 1 m^2 e que ao partilo pola metade obteremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semellante ao anterior. Partindo o A1 en 2 iguais obtemos o DIN A2, despois o DIN A3 e o DIN A4 que é o máis usado. Todos son semellantes aos anteriores.

Que significa ser semellante?

Pois que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$, pero AM = AD/2 logo

$$AB^2 = \frac{1}{2} AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2} AB$$

Polo tanto nos folios DIN 476:

a razón entre o longo e o ancho é $\sqrt{2}$.

Non queda aquí a cousa, fíxate que ao partir o folio en 2 partes iguais o novo folio ten o lado maior que coincide co lado menor do orixinal: AB é agora o lado maior e antes era o menor, como AB = AD/$\sqrt{2}$ resulta que a razón de semellanza é $\sqrt{2}$. É dicir, para pasar dun folio A0 a outro A1 dividimos os seus lados entre $\sqrt{2}$. O mesmo para os seguintes.

Calculemos as dimensións:

Para o A0 temos que a área é AD · AB = 1m^2

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189 \text{ m;}$$

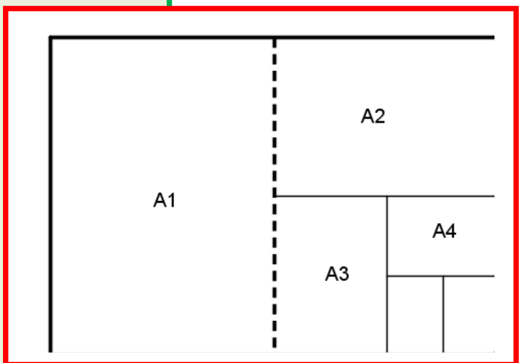
AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \simeq 0.841$ m. Para obter as medidas do A4 dividiremos 4 veces entre $\sqrt{2}$:

Longo = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4} \approx 0.297$ m = 29.7 cm

Ancho= Longo/$\sqrt{2} \approx 0.210$ m = 21.0 cm

Unha táboa

	Longo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	118.92	84.09	10000
A1	84.09	59.46	5000
A2	59.46	44.04	2500
A3	42.04	29.83	1250
A4	29.73	21.02	625
A5	21.02	14.87	415.2



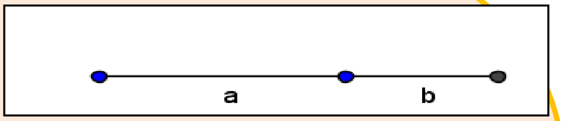
Cuestións

1) Comproba os valores da táboa anterior (hai polo menos dous valores equivocados ☺).
2) Cantos folios A4 caben nun folio A0?
3) Cales son as dimensións do A6?, e do A7?

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O número de ouro

Dividimos un segmento en dúas partes de forma que se dividimos a lonxitude do segmento total entre a parte maior debe dar o mesmo que ao dividir a parte maior entre a parte menor.
Temos que (a + b)/a = a/b.



O número de ouro (ou razón áurea) chamado Φ (fi) é precisamente o valor desa proporción, así:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

Xa temos dúas curiosidades:

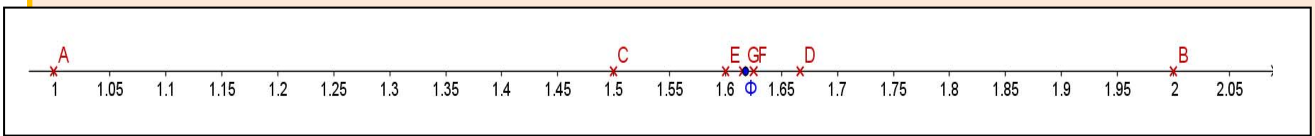
1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$
$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$
$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

Onde F_n é o n-ésimo número de *Fibonacci*. Estes números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… onde cada termo a partir do terceiro se obtén sumando os dous anteriores.
Máis relacións entre o número de ouro e a sucesión de *Fibonacci*:
a) se imos dividindo un número da sucesión entre o seu anterior obtemos: 1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1.5; 5/3 = 1.666…; 8/5 = 1.6; 13/8 = 1.625.



Como pode verse, achegámonos rapidamente ao valor do número de ouro, primeiro por debaixo, despois por arriba, por debaixo…, alternativamente.
b) Formula de *Binet*:
Para calcular un número de *Fibonacci*, por exemplo o que ocupa o lugar 20, hai que calcular os 19 anteriores.
Isto non ten que ser necesariamente así, pois *Binet* deduciu esta fórmula, que para o autor é unha das máis bonitas das matemáticas.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Se por exemplo substituímos n por 20 obtemos F_{20} = 6 765.
Realmente podemos prescindir do 2º termo do numerador, para n > 3 faise moito máis pequeno que o primeiro. Por exemplo, para n = 6, se facemos $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtemos 8.0249 que redondeado é 8, o valor correcto.

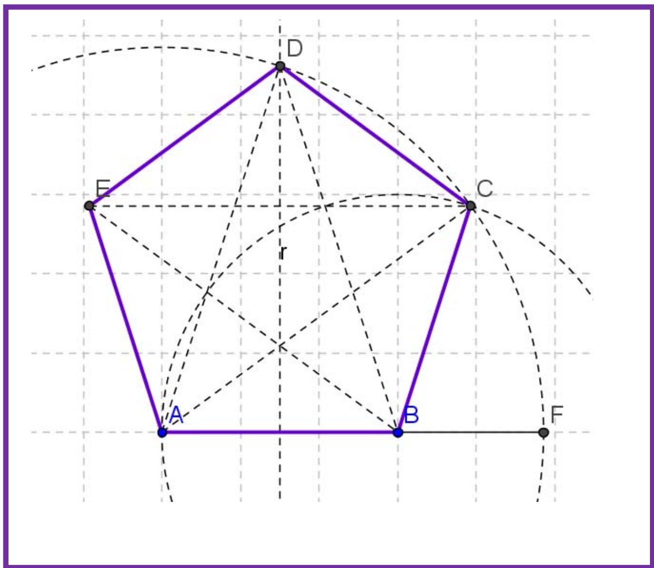
Actividades

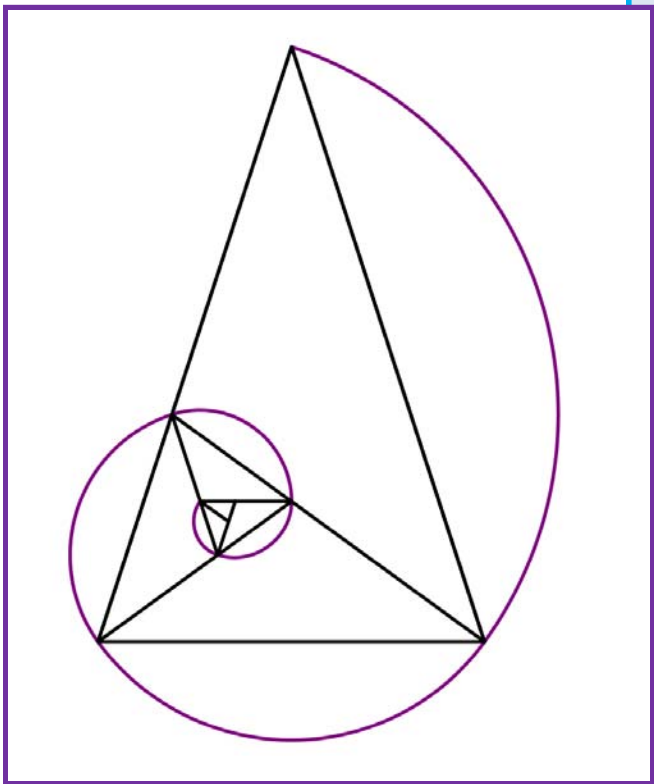
a) Calcula F_{31} e F_{30} coa fórmula de *Binet*.

b) Fai o cociente e mira se é unha boa aproximación do número de ouro.

Textos Marea Verde

O pentágono regular e o número de ouro





Nun pentágono regular a razón entre unha diagonal e o lado é Φ . Como sabemos construír Φ, a construción dun pentágono regula é moi sinxela:

Se AB vai ser un lado do noso pentágono, construímos o punto F aliñado con A e B que cumpra AF/AB igual a Fi (indícase como facelo no texto).

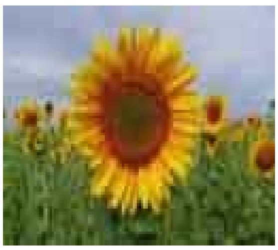
Entón, AB será o lado e AF a medida da diagonal.

Trazamos a mediatriz de AB e unha circunferencia de centro A e radio AF. Córtanse en D que é un vértice do pentágono.

Trazamos agora unha circunferencia con centro B e radio AB, córtase coa anterior en C que é outro vértice do pentágono. Só queda calcular E que é moi fácil.

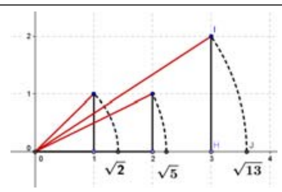
O pentágono regular coas súas diagonais coñécese como "pentagrama místico" e parece ser que volvía toliños aos pitagóricos, nel o número de ouro aparece de forma desmesurada.

Do pentagrama sacamos este triángulo, chamado triángulo áureo que permite obter máis triángulos áureos facendo a bisectriz nun dos ángulos iguais e formar esta espiral. Esta espiral é parecida á espiral áurea, á de *Fibonacci* e á espiral logarítmica que é a que aparece en: galaxias, furacáns, cunchas, xirasoles …



Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
BY NC SA
Textos Marea Verde

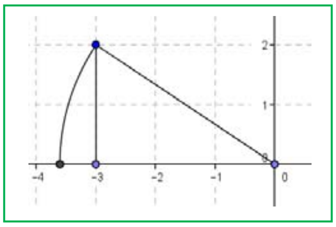
RESUMO

Conxuntos de números	**Naturais** ➔ N = {0, 1, 2, 3, …}; **Enteiros** ➔ Z = {… , –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionais** ➔ $\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionais** ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathrm{Q}$; $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$	
Fraccións e expresión decimal	Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica. Toda expresión decimal exacta ou periódica pode poñerse como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1\,000} = \frac{7}{40}$ X = 1.7252525… = 854/495
$\sqrt{2}$ **irracional**	$\sqrt{2}$ **non** pode poñerse como fracción.	
Erro Absoluto	Erro Absoluto (*EA*) = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$	$\sqrt{3} \approx 1.73$: $EA \approx 0.0021$.
Cota do erro	Calculamos a cota calculando un valor maior	$EA \leq 0.003$
Erro Relativo	$ER = \frac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$	$ER = \frac{0.0021}{\sqrt{3}} \approx 0.00121$
Control do erro	En cada suma ou resta o erro absoluto é a suma dos erros absolutos. Os erros relativos súmanse ao multiplicar dous números.	
Densidade	Os números reais e os números racionais son densos. Entre cada dous números sempre podemos encontrar outro.	
Representación na recta real	Fixada unha orixe e unha unidade, existe unha bixección entre os números reais e os puntos da recta	
Intervalo aberto	Intervalo aberto no que os extremos non pertencen ao intervalo.	(2, 7) = {$x \in \Re$/ 2 < x < 7}. 
Intervalo pechado	Os extremos si pertencen ao intervalo	[–2, 2] = {$x \in \Re$; $-2 \leq x \leq 2$} 
Intervalos semiabertos (ou semipechados)	Intervalo cun extremo aberto e o outro pechado.	$[-8,0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo aberto: **E(*a* , *r*) = (*a* – *r* , *a* + *r*)**	

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. A imaxe é a representación dun número irracional, cal?



2. Representa na recta numérica: –3.375; 3.666...

3. Representa na recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

4. Calcula o valor exacto de $\frac{0.\overset{\frown}{4}}{0.4}$ sen calculadora.

5. Di cales destas fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Calcula 3 fraccións *a, b, c* tales que $\dfrac{3}{4}<a<b<c<\dfrac{19}{25}$

7. Fai no teu caderno unha táboa e di a que conxuntos pertencen os seguintes números:

2.73535...; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; $\dfrac{2}{0}$; 10^{100} ; $\dfrac{102}{34}$; –2.5 ; 0.1223334444...

8. Contesta verdadeiro ou falso, xustificando a resposta.

a) $Q \cap (\Re - Q) = \{0\}$

b) $Z \subset Q$

c) a raíz cadrada dun número natural é irracional.

d) $\sqrt{7} \notin Q$

e) 1/47 ten expresión decimal periódica.

9. Pon exemplos que xustifiquen:

a) a suma e a resta de números irracionais pode ser racional.

b) o produto ou división de números irracionais pode ser racional.

10. Que será a suma dun número racional con outro irracional? (Pensa na súa expresión decimal).

11. A suma de 2 números con expresión decimal periódica, pode ser un enteiro?

BY NC SA
Textos Marea Verde

12. Expresa con palabras os seguintes intervalos ou semirrectas:

a. (–7, 7]

b. $\{x \in \Re \,/\, -3 \leq x < 5\}$

c. 

d. (–2, +∞)

13. Cantos metros hai de diferenza ao calcular o perímetro da Terra poñendo $\pi \approx$ 3.14 en lugar do seu valor real?, é moito ou pouco?

Basicamente tes que calcular o erro absoluto e o relativo.

*Radio aproximadamente 6 370 km.

14. Os antigos fixeron boas aproximacións de Pi, entre elas citemos a *Arquímedes* (século III a.C.) con 211 875 / 67 441 e a *Ptolomeo* (século II d.C.) con 377/120.

Cal cometeu menor erro relativo?

15. O seguinte é un **Pi**-texto: *"Son e serei a todos definible, o meu nome teño que darvos, cociente diametral sempre inmensurable son dous redondos aros"*(Manuel Golmayo).

Conta e anota o número de letras de cada palabra e verás de onde vén o seu nome. Inventa unha oración coa mesma propiedade, non é necesario que sexa tan longa (polo menos 10 palabras).

16. Calcula:

a) (3, 5] U (4, 6]

b) (3, 5] $\cap$ (4, 6]

c) $(-\infty, 2] \cap (-2, +\infty)$

17. Pode expresarse como entorno unha semirrecta?

18. Expresa como entornos abertos os seguintes intervalos:

a. (0 , 7)

b. (–8 , –2)

c. $(2, +\infty)$

19. Expresa como intervalos abertos os seguintes entornos:

a) E(2, 2/3)

b) E(–7, 1/2)

20. Un numero irracional tan importante como Pi é o número "e": $e \approx 2.718281828...$ que parece periódico pero non, non o é. Defínese como o número ao que se achega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cando n se fai moi, pero que moi, grande. **Colle a calculadora** e dálle a n valores cada vez maiores, por exemplo: 10, 100, 1 000 … Anota os resultados nunha **táboa**.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
BY NC SA
Textos Marea Verde

21. Outra forma de definir *e* é $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

Que dirás ti que son eses números con admiración! Chámase factorial e é moi sinxelo: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, multiplícase desde o número ata chegar a 1. Por exemplo: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Non te preocupes, que a tecla ! está na calculadora.

Podes calcular *e* con 6 cifras decimais correctas?

*Nota: Fíxate que agora a converxencia é moito máis rápida, só tiveches que chegar ata *n*= ?

22. Agora traballamos con valores exactos, nin as fraccións ni os irracionais se substitúen pola

$$\frac{4\pi \cdot 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}$$

súa expresión decimal, exemplos: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lados $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{8}$ m.

23. Calcula a área e o perímetro dun cadrado cuxa diagonal mide 2 m.

24. Calcula a área e o perímetro dun hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

25. Calcula o área e o perímetro dun círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

26. Calcula a área total e o volume dun cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

27. Por que número temos que multiplicar os lados dun rectángulo para que a súa área se faga o triplo?

28. Canto debe valer o radio dun círculo para que a súa área sexa 1 m^2?

29. Temos unha circunferencia e un hexágono inscrito nela. Cal é a razón entre os seus perímetros? (Razón é división ou cociente).

30. Que números ao cadrado dan 7?

31. Que números reais ao cadrado dan menos de 7?

32. Que números reais ao cadrado dan máis de 7?

33. Medir o tamaño das pantallas en polgadas (") xa non parece moi boa idea. A medida refírese á lonxitude da diagonal do rectángulo. Así unha televisión de 32" refírese a que a diagonal mide 32". Iso non dá moita información se non sabemos a proporción entre os lados. As máis usuais nas pantallas de televisión e ordenador son 4 : 3 e 16 : 9.

Se unha polgada son 2.54 cm, cales serán as dimensións dunha pantalla de 32" con proporción 4 : 3?, e se a proporción é 16/9? Cal ten maior superficie?

Textos Marea Verde

AUTOAVALIACIÓN

1) *Sabes a que conxuntos pertencen os distintos números.*
Indica nunha táboa ou nun diagrama (como o do texto) a que conxuntos numéricos pertencen os seguintes números: 0; -2; 3/4, 7.3; 6.252525…, $\pi - 2$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{-16}$; 1.123124125…; 2.999…

2) *Sabes redondear cun número adecuado de cifras e calculas o erro relativo para comparar aproximacións. Sabes calcular unha cota para o erro absoluto e o relativo.*
   a) Os seguintes números redondeáronse, calcula unha cota do erro absoluto e do erro relativo:
   a_1) 3.14
   a_2) 45 600 con redondeo nas centenas.
   b) Se tomamos $\sqrt{10} \approx 3.16$ *e* $\frac{2}{3} \approx 0.67$ en cal das aproximacións cometemos proporcionalmente menor erro?

3) *Sabes cando unha fracción ten expresión decimal exacta ou periódica sen facer a división*.
Próbao con estas:
30/150; 30/21

4) *Sabes pasar de decimal a fracción para traballar con valores exactos:*
Calcula: 0.72525… + 0.27474…

5) *Sabes representar números racionais e irracionais de forma exacta*
Representa de forma exacta $\frac{-21}{9}; \frac{30}{7}; \sqrt{10}; \sqrt{7}$

6) *Dominas as distintas formas e notacións dun intervalo ou semirrecta (intervalo, conxunto con desigualdades e gráfica).*
Expresa en forma de intervalo (ou semirrecta), en forma de desigualdade e representa graficamente:
   a) Números reais inferiores ou iguais que -1.
   b) Números reais comprendidos entre -4 e 2, incluído o 1º pero non o 2º.

7) *Sabes pasar dun entorno a un intervalo e viceversa.*
   a) Escribe como intervalo: E(-2 , 2/3)
   b) Escribe como entorno ou intervalo (-5/2 , 7/3)

8) *Sabes resolver problemas traballando con cantidades exactas.*
Calcula a área, o volume e a diagonal principal dun ortoedro de lados $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$ *e* $3\sqrt{5}$ m.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde