Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

# 4ºA ESO
# Capítulo 3: Polinomios. Fraccións alxébricas



www.apuntesmareaverde.org.es


**Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez**
Revisora: María Molero
**Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez**
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF. commons.wikimedia

## Índice



## Resumo


En Babilonia xa utilizaban a Álxebra, pero os exipcios e os gregos tratábana utilizando a Xeometría. Os árabes recolleron o saber antigo de Oriente e de Occidente e trouxeron a Álxebra a Europa. A palabra "*álxebra*" en árabe significa "*restaurar*" e no *Quijote* aparecen alxebristas que restauraban os ósos rotos. No século XIII, *Fibonacci* (Leonardo de Pisa) viaxou e contactou con matemáticos árabes e hindús. O seu libro, *Liber abaci*, pode ser considerado o primeiro libro de Álxebra europeo. No Renacemento italiano xa houbo grandes alxebristas que se ocupaban, principalmente, da resolución de ecuacións.

Logo, o punto de vista cambiou. A *Álxebra Moderna* ocúpase das estruturas alxébricas, que vén ser atopar as propiedades comúns que poidan ter distintos conxuntos, como por exemplo, encontrar similitudes entre os números enteiros, que xa coñeces, e os polinomios que imos traballar neste capítulo.

Hoxe os ordenadores son capaces de traballar con expresións alxébricas.



Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

# 1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

## 1.1. Introdución

Non fai falla imaxinar situacións rebuscadas para que, á hora de realizar un razoamento, nos topemos con algunha das catro operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación ou división.

***Exemplos:***

- Ana, Antón e Duarte fixeron unha viaxe e, á volta, sumaron os gastos efectuados que ascenden a 522 €. O gasto realizado por cada un foi de $\frac{522}{3}$ €, é dicir, 174 €.

- Se imos comprar mazás á froitaría e o prezo dun quilogramo é de 1.3€ resulta habitual que, segundo imos colocando a froita na balanza, vaia indicando o importe final. Para iso realiza a operación: $1.3 \cdot x$, onde $x$ é a cantidade de quilogramos que nos indica a balanza. Despois de cada pesada, o resultado desa multiplicación reflicte o importe das mazás que, nese momento, contén a bolsa.
- Recordas a fórmula do interese: $I = \frac{Crt}{100}$, onde $I$ é o interese que se recibe ao colocar un capital $C$, cun rédito $r$, durante un número de anos $t$.
- Supoñamos que temos un contrato cunha compañía de telefonía móbil polo que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecemento de chamada. Con esa tarifa, unha chamada de 3 minutos custaranos:

$$(0.05 \cdot 3) + 0.12 = 0.15 + 0.12 = 0.27 \text{ euros}$$

Pero cal é o prezo dunha chamada calquera? Como descoñecemos a súa duración, atopámonos cunha cantidade non determinada, ou indeterminada, polo que en calquera resposta que deamos á pregunta anterior se apreciará a ausencia dese dato concreto. Podemos dicir que o custe dunha chamada calquera é

$$(0.05 \cdot x) + 0.12 = 0.05 \cdot x + 0.12 \text{ euros}$$

onde $x$ sinala a súa duración en minutos.

- Para calcular o valor do perímetro dun rectángulo de lados $a$ e $b$ utilízase a expresión:

$$2 \cdot a + 2 \cdot b$$

- A expresión alxébrica que nos representa o produto dos cadrados de dous números calquera $x$ e $y$ simbolízase como $x^2 \cdot y^2$.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

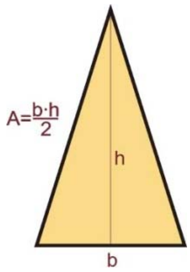
**1.** A finais de cada mes a empresa de telefonía móbil proporciónanos a factura mensual. Nela aparece moita información, en particular, o número total de chamadas realizadas (N) así como a cantidade total de minutos de conversa (M). Cos datos do anterior exemplo, xustifica que o importe das chamadas efectuadas durante ese mes é:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

***Exemplo:***

- É ben coñecida a *fórmula* da área dun triángulo de base *b* e altura asociada *h*:

$$\frac{b \cdot h}{2}$$




En todos estes exemplos xurdiron **expresións alxébricas**.

## 1.2. Expresións alxébricas

Chamamos **expresión alxébrica** a calquera expresión matemática que se constrúa con números reais, letras e as operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación e/ou división.

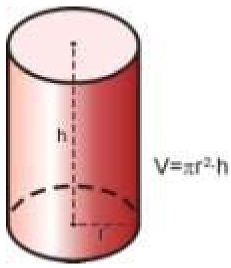
Nunha expresión alxébrica pode haber datos non concretados; unhas veces deberemos obter os valores que "resolven" a expresión e, noutras, como a fórmula da área do triángulo, verifícanse para calquera valor. Segundo o contexto, recibirán o nome de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre outros.

Se nunha expresión alxébrica non hai *variables*, esta expresión non é máis que un número real:

Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada dunha expresión alxébrica aparece un número real: o valor numérico desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.

O **valor numérico** dunha expresión alxébrica é o que se obtén ao substituír as letras desa expresión por determinados valores.

***Exemplo:***




- O volume dun cilindro vén dado pola expresión alxébrica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

na que *r* é o radio do círculo base e *h* é a súa altura. Deste modo, o volume dun cilindro cuxa base ten un radio de 10 cm e de altura 15 cm é igual a:

$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1\,500 \cdot \pi \quad cm^3$$

- O valor da expresión 2*a* + 5 para o caso concreto de *a* igual a 3 calculámolo substituíndo *a* por 3. Así resulta 2 · 3 + 5 = 11, e dise que o valor numérico de 2*a* + 5 para *a* = 3 é 11.

- Se na expresión $7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$ particularizamos as tres variables cos valores $x=4$, $y=-1$, $z=\frac{1}{2}$ xorde o número real

$$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Nunha expresión alxébrica pode non ter sentido outorgar algún valor a certa indeterminada. En efecto, no último exemplo non é posible facer $z = 0$.

## Actividades propostas

**2.** Escribe a expresión alxébrica que nos proporciona a área dun círculo.

**3.** Escribe en linguaxe alxébrica os seguintes enunciados, referidos a dous números calquera $x$ e $y$:

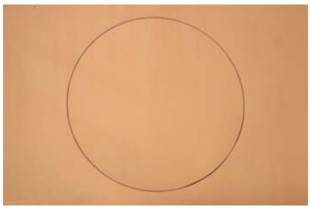
a) a metade do oposto da súa suma.

b) a suma dos seus cubos.

c) o cubo da súa suma.

d) o inverso da súa suma.

e) a suma dos seus inversos.



**4.** Traduce a un enunciado en linguaxe natural as seguintes expresións alxébricas:

a) $3x + 4$  b) $x / 3 – x^3$  c) $(x^3 + y^3 + z^3) / 3$  d) $(x^2 – y^2) / (x – y)^2$

**5.** Unha tenda de roupa anuncia nos seus escaparates que está de rebaixas e que todos os seus artigos están rebaixados un 15 % sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha peza en función do que aparece na súa etiqueta.

**6.** O anterior comercio, nos últimos días do período de rebaixas, desexa desfacerse das súas existencias e para iso decide aumentar o desconto. Mantén o 15 % para a compra dunha única peza e, a partir da segunda, o desconto total aumenta un 5 % por cada nova peza de roupa, ata un máximo de 10 artigos. Analiza canto pagaremos ao realizar unha compra en función da suma total das cantidades que figuran nas etiquetas e do número de artigos que se adquiran.

**7.** Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou valores que se indican:

a) $x^2 + 7x – 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 – (a^2 + b^2)$ para $a = –3$ y $b = 4$.

c) $a^2 – 5a + 2$ para $a = –1$.

**8.** Indica en cada caso o valor numérico da seguinte expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1, y = 2, z = 1$.

b) $x = 2, y = 0, z = 5$.

c) $x = 0, y = 1, z = 0$.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

# 2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

## 2.1. Monomios. Polinomios

Unhas expresións alxébricas de grande utilidade son os **polinomios**, cuxa versión máis simple e, á vez, xeradora deles, son os **monomios**.

Un monomio vén dado polo produto de números reais e variables (ou indeterminadas). Chamaremos coeficiente dun monomio ao número real que multiplica á parte literal, indeterminada ou indeterminadas.

***Exemplos:***

- A expresión que nos proporciona o dobre dunha cantidade, $2 \cdot x$, é un monomio cunha única variable, $x$, e coeficiente 2.
- O volume dun cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, é un monomio con dúas indeterminadas, $r$ e $h$, e coeficiente $\pi$. A súa parte literal é $r^2 \cdot h$.
- Outros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- A expresión $7xy^2 + 3xy - 2x$ está formada por tres termos, tres monomios. Cada un ten un coeficiente e unha parte literal:

  No primeiro, $7xy^2$, o coeficiente é $7$ e a parte literal $xy^2$

  O segundo, $3xy$, ten por coeficiente $3$ e parte literal $xy$.

  E no terceiro, $-2x$, o coeficiente é $-2$ e a parte literal $x$

Dous monomios son **semellantes** se teñen a mesma parte literal.

***Por exemplo:***

- Son monomios semellantes: $7xy^3$ e $3xy^3$.

Atendendo ao expoñente da variable, ou variables, adxudicaremos un **grao** a cada monomio consonte o seguinte criterio:

- Cando haxa unha única indeterminada, o grao do monomio será o expoñente da súa indeterminada.
- Se aparecen varias indeterminadas, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.

***Exemplos:***

- $3x$ é un monomio de grao 1 na variable $x$.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ é un monomio de grao 3 nas indeterminadas $r$ e $h$.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ é un monomio de grao 5 en $x$ e $y$.



Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$ é un monomio de grao 4 en $x$, $y$ e $z$.

Un número real pode ser considerado como un monomio de grao 0.

## Actividades propostas

**9.** Indica o coeficiente e a parte literal dos seguintes monomios:

a) $(3/2)x^2y^3$ b) $(1/2)a^27b4c$ c) $(2x5z9c)/2$

Un **polinomio** é unha expresión construída a partir da suma de monomios.

O **grao dun polinomio** virá dado polo maior grao dos seus monomios.

***Exemplos:***

- $\frac{1}{5}\cdot x^2-7\cdot x^3+2$ é un polinomio de grao 3 na variable $x$.
- $-3\cdot y^4+8\cdot x^2+2\cdot x$ é un polinomio de grao 4 nas indeterminadas $x$ e $y$.
- $4\cdot x^2\cdot y^3-7+3\cdot y^2$ é un polinomio de grao 5 en $x$ e $y$.
- $x-2\cdot y+6\cdot z$ é un polinomio de grao 1 en $x$, $y$ e $z$.

O aspecto xenérico dun polinomio na variable $x$ é

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_2x^2+a_1x+a_0$$

onde os coeficientes $a_k$ son números reais.

Dicimos que un polinomio é **mónico** cando o coeficiente do seu termo de maior grao é igual a 1.

Un polinomio está **ordenado** se os seus monomios están escritos de menor a maior grao ou viceversa.

Un polinomio é **completo** se están os monomios de todos os graos, sen coeficientes nulos.

***Exemplos:***

- $-8x^4+\frac{1}{4}x^2+23$ é un polinomio de grao 4 na variable $x$. Está ordenado e non é completo.
- $7y^3+4y-9$ é un polinomio de grao 3 na indeterminada $y$. Está ordenado e non é completo.
- $z^2-6z+8$ é un polinomio de grao 2 en $z$. Ademais, é un polinomio mónico, ordenado e completo.
- $5x+2$ é un polinomio de grado 1 en $x$. Ademais, é un polinomio ordenado e completo.

Como ocorre con calquera expresión alxébrica, se fixamos, ou escollemos, un valor concreto para a variable dun polinomio aparece un número real: o **valor numérico** do polinomio para ese valor determinado da variable. Se chamamos $p$ a un polinomio, á avaliación de $p$ en, por exemplo, o número $-3$ denotámola por $p(-3)$, e lemos *"p de menos tres"* ou *"p en menos tres"*. Con este criterio, se $p$ é un polinomio cuxa indeterminada é a variable $x$, podemos referirnos a el como $p$ ou $p(x)$ indistintamente. Desta forma apreciamos que un polinomio pode ser entendido como unha maneira concreta de asignar a cada número real outro número real. Nese caso a $y = p(x)$ dicimos que é unha función polinómica.

***Exemplos:***

- Se avaliamos o polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ atopámonos co número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1\,875 + 7 = -1\,868$$

- O valor do polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ é

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Ao particularizar o polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta o número $r(0) = 12$.

## 2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio é unha suma de monomios, a suma de dous polinomios é outro polinomio. Á hora de sumar dous polinomios, coa mesma indeterminada, procederemos a sumar os monomios de igual parte literal.

***Exemplos:***

- A suma dos polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ e $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ é o polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$
$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$
- $5abx^2 + 3abx - 2abx^2 - 4abx + 3abx^2 = (5abx^2 - 2abx^2 + 3abx^2) + (3abx - 4abx) = 6\,abx^2 - abx$

No seguinte exemplo sumaremos dous polinomios dispoñéndoos, adecuadamente, un sobre o outro.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

***Exemplo:***

$$\begin{array}{r} 4x^5 + 2x^4 + x^3 - 5x^2 + x + 4 \\ + \quad -7x^5 \qquad + 4x^3 + 5x^2 - 3x - 6 \\ \hline -3x^5 + 2x^4 + 5x^3 \qquad - 2x - 2 \end{array}$$

## Propiedades da suma de polinomios

**Propiedade conmutativa.** Se *p* e *q* son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de sumalos:

$$p + q \equiv q + p$$

***Exemplo:***

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) = -x^3 + (4x^2 + x^2) + (-2x - 3x) + (7 + 1) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8$$

$$(-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (4x^2 - 2x + 7) = -x^3 + (x^2 + 4x^2) + (-3x - 2x) + (1 + 7) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 8$$

**Propiedade asociativa.** Sinala como se poden sumar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p + q) + r \equiv p + (q + r)$$

***Exemplo:***

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) = (4x^2 - 2x + 7 - x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) =$$
$$= (-x^3 + 5x^2 - 5x + 8) + (x - 6) = -x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

Tamén:

$$(4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1) + (x - 6) = (4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 3x + 1 + x - 6) =$$
$$= (4x^2 - 2x + 7) + (-x^3 + x^2 - 2x - 5) = -x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

## Actividades propostas

**10.** Realiza as seguintes sumas de polinomios:

- $(2x^2 - 2x) + (-3x^2 - 4x + 2) + (3x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$
- $-2x^4 + (2x^3 + 3x - 4) + (-4x^2 - 6x + 5) + (3x^3 - 2x + 6)$

**11.** Simplifica as seguintes expresións alxébricas:

a) $3x - 4 - (3x + 2) + 4x$

b) $3(x^2 - 4x + 6) - (x^2 - 6x + 5)$

c) $(-3)(2a + 4b) - (2b - 3a)$

d) $4(2a^2 - 2ab + 2b^2) - (3a^2 - 4ab)$

**Elemento neutro.** Hai un polinomio cunha propiedade particular: o resultado de sumalo con calquera outro sempre é este último. Trátase do polinomio dado polo número 0, ou *polinomio cero*.

***Exemplo:***

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

**Elemento oposto.** Cada polinomio ten asociado outro, ao que chamaremos o seu *polinomio oposto*, tal que a suma de ambos os dous é igual ao polinomio cero. Acadamos o polinomio oposto dun dado, simplemente, cambiando o signo de cada monomio.

***Exemplo:***

- O polinomio oposto de $p\equiv -2x^4+x^3+2x-7$ es $2x^4-x^3-2x+7$, ao que denotaremos como $"-p"$. Ratifiquemos que a súa suma é o polinomio cero:

  $$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

## Actividades propostas

**12.** Escribe o polinomio oposto de cada un dos seguintes polinomios:

a) $4x^4+6x^3+2x^2+5x-2$

b) $9x$

c) $-2x^4+4x^2$

**13.** Considera os polinomios $p\equiv -2x^3-6x+3$, $q\equiv 2x^2+2x+9$, así como o polinomio suma $s\equiv p+q$. Calcula os valores que adopta cada un deles para $x=-2$, é dicir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estuda se existe algunha relación entre eses tres valores.

**14.** Obtén o valor do polinomio $p\equiv -2x^3-6x+3$ en $x=3$. Que valor toma o polinomio oposto de $p$ en $x=3$?

## 2.3. Produto de polinomios

Outra operación que podemos realizar con polinomios é a multiplicación.

O resultado do produto de polinomios sempre será outro polinomio. Aínda que nun polinomio temos unha indeterminada, ou variable, como esta toma valores nos números reais, á hora de multiplicar polinomios utilizaremos as propiedades da suma e do produto dos números reais, en particular a propiedade distributiva do produto respecto da suma; así todo queda en función do produto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidade:

$$ax^n\cdot bx^m=abx^{n+m}$$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5)\cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1)\cdot(-2x) = (-x^3)\cdot(-2x) + (3x)\cdot(-2x) + (-1)\cdot(-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5) = (3x)\cdot(x^2-4x-5) + (-2)\cdot(x^2-4x-5) = (3x^3-12x^2-15x) + (-2x^2+8x+10) =$
  $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x) = (x-6)\cdot x^3 + (x-6)\cdot(-2x) = (x^4-6x^3) + (-2x^2+12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

Tamén podemos materializar o produto de polinomios tal e como multiplicamos números enteiros:

***Exemplo:***

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}
$$

Recordemos que o polinomio *oposto* doutro se obtén simplemente cambiando o signo de cada monomio. Esta acción correspóndese con multiplicar polo número "$-1$" o polinomio orixinal. Desta forma o polinomio oposto de $p$ é

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

Neste momento aparece de maneira natural a **operación diferenza**, ou **resta**, de polinomios. Definímola coa axuda do polinomio oposto dun dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1)\cdot q$$

***Exemplo:***

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2-6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

**15.** Efectúa os seguintes produtos de polinomios:

a) $(-5x^3+3x)\cdot(-4x^2)$

b) $(3x^4+2x)\cdot(-4x-5)$

c) $(3x^3+2x^2-2x)\cdot(4x^2-x)$

d) $(-1)\cdot(6x^3-3x^2-2x+3)$

**16.** Realiza as seguintes diferenzas de polinomios:

a) $(-3x^3+x)-(-2x^2)$

b) $(3x^4+2x)-(-4x-5)$

c) $(4x^2-2x)-(x^3+2x^2-2x)$

**17.** Multiplica cada un dos seguintes polinomios por un número de tal forma que xurdan polinomios mónicos:

a) $3x^3-2x^2+x$

b) $-4x^4+2x-5$

c) $-x^2+2x-6$

**18.** Calcula e simplifica os seguintes produtos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

## Propiedades do produto de polinomios

**Propiedade conmutativa.** Se $p$ e $q$ son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de multiplicalos:

$$p\cdot q\equiv q\cdot p$$

***Exemplo:***

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

**Propiedade asociativa.** Sinala como se poden multiplicar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous: $(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$

***Exemplo:***

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Tamén:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

## Actividades propostas

**19.** Realiza os seguintes produtos de polinomios:

- $x^2\cdot(-3x^2-4x+2)\cdot 3x^3$
- $(3x-4)\cdot(-4x^2-6x+5)\cdot(-2x)$

**Elemento neutro.** Hai un polinomio cunha propiedade particular: ao multiplicalo por calquera outro sempre nos dá este último. Trátase do polinomio dado polo número 1 ou *polinomio unidade*.

***Exemplo:***

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

**Propiedade distributiva da multiplicación respecto da suma**. Cando nunha multiplicación de polinomios un dos factores vén dado como a suma de dous polinomios como, por exemplo,

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

temos dúas opcións para coñecer o resultado:

a) realizar a suma e, despois, multiplicar

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+7\right)=$$
$$=3x^5-18x^3+21x^2-x^4+6x^2-7x=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

b) distribuír, aplicar, a multiplicación a cada un dos sumandos e, despois, sumar:

$$(3x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)=(3x^2-x)\cdot(-2x+7)+(3x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-6x^3+21x^2+2x^2-7x)+(3x^5-12x^3-x^4+4x^2)=3x^5-x^4-18x^3+27x^2-7x$$

Comprobamos que obtemos o mesmo resultado.

En xeral, a **propiedade distributiva** da multiplicación respecto da suma dinos que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Convén comentar que a anterior propiedade distributiva lida en sentido contrario, de dereita a esquerda, é o que comunmente se denomina **sacar factor común**.

***Exemplo:*** $6x^5-4x^4-18x^3+2x^2=(3x^3-2x^2-9x+1)\cdot 2x^2$

## Actividades propostas

**20.** De cada un dos seguintes polinomios extrae algún factor que sexa común aos seus monomios:

a) $-20x^3-40x^2+10x$ b) $60x^4-30x^2$

## 3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

### 3.1. Introdución ás fraccións polinómicas

Ata este momento estudamos varias operacións con polinomios: suma, resta e produto. En calquera dos casos o resultado sempre é outro polinomio. Cando establecemos unha **fracción polinómica** como, por exemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

o que temos é unha expresión alxébrica, unha **fracción alxébrica**, que, en xeral, non é un polinomio. Si aparece un polinomio no caso, moi particular, no que o denominador é un número real diferente de cero, isto é, un polinomio de grao 0.

É sinxelo constatar que a expresión anterior non é un polinomio: calquera polinomio pode ser avaliado en calquera número real. Porén, esa expresión non pode ser avaliada para $x = 1$, xa que nos quedaría o número 0 no denominador.

Poderiamos crer que a seguinte fracción polinómica si é un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

A expresión da dereita si é un polinomio, pois trátase dunha suma de monomios, pero a da esquerda non o é xa que non pode ser avaliada en $x = 0$. Porén, esa fracción alxébrica e o polinomio, cando son avaliados en calquera número diferente de cero, ofrecen o mesmo valor. Son **expresións equivalentes** alí onde ambas as dúas teñen sentido.

### 3.2. División de polinomios

Aínda que, como vimos no apartado anterior, unha fracción polinómica, en xeral, non é un polinomio, imos estudar a división de polinomios pois é unha cuestión importante e útil.

Analicemos detidamente a división de dous números enteiros positivos. Cando dividimos dous números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), xorden outros dous, o cociente (*c*) e o resto (*r*). Estes encóntranse ligados pola chamada *proba da división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Ademais, dicimos que a división é exacta cando $r = 0$.

O coñecido algoritmo da división persegue encontrar un número enteiro, o cociente *c*, tal que o resto *r* sexa un número menor que o divisor *d*, e maior ou igual que cero. Fixémonos en que, sen esta esixencia para o resto *r*, podemos escoller arbitrariamente un valor para o cociente *c* o cal nos subministra o seu valor asociado como resto *r*. En efecto, se temos como dividendo *D*=673 e como divisor *d*=12, "se queremos" que o cociente sexa *c*=48 o seu resto asociado é

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

e a conexión entre estes catro números é

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" da división de números enteiros vai guiarnos á hora de dividir dous polinomios.

Dados dous polinomios $p(x)$ e $q(x)$, a división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, proporcionaranos outros dous polinomios, o polinomio cociente $c(x)$ e o polinomio resto $r(x)$. Tamén aquí pesará unha esixencia sobre o polinomio resto: o seu grao deberá ser menor que o grao do polinomio divisor. A relación entre os catro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Tamén escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aínda que, en tal caso, seremos conscientes das cautelas sinaladas no apartado anterior canto ás equivalencias entre polinomios e outras expresións alxébricas.

Ao igual que ocorre co algoritmo da división enteira, o algoritmo da división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada unha das cales aparecen uns polinomios cociente e resto "provisionais" de forma que o grao deses polinomios resto vai descendendo ata que topamos cun cuxo grao é inferior ao grao do polinomio divisor, o que indica que concluímos. Vexamos este procedemento cun exemplo concreto.

***Exemplo:***

- Imos dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$. Como o polinomio divisor, $q(x)$, é de grao 2, debemos atopar dous polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, e un polinomio resto $r(x)$ de grao 1 ou 0, tales que

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

ou, como igualdade entre expresións alxébricas,

$$\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

Á vista dos polinomios $p(x)$ e $q(x)$, e do xa dito sobre $r(x)$, é evidente que o grao do polinomio cociente, $c(x)$, será igual a 2. Imos obtelo monomio a monomio.

- Primeira aproximación aos polinomios cociente e resto:

Para poder lograr a igualdade $p\equiv q\cdot c+r$, como o grao de $r(x)$ será 1 ou 0, o termo de maior grao de $p(x)$, $6x^4$, xurdirá do produto $q(x)\cdot c(x)$. Así obtemos a primeira aproximación de $c(x)$, o seu monomio de maior grao:

$$c_1(x)=3x^2$$

e, de maneira automática, tamén un primeiro resto $r_1(x)$:

$$r_1(x)=p(x)-q(x)\cdot c_1(x)=(6x^4+5x^3+x^2+3x-2)-(2x^2-x+3)\cdot 3x^2=$$
$$=(6x^4+5x^3+x^2+3x-2)-(6x^4-3x^3+9x^2)=8x^3-8x^2+3x-2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ é de grao 3, maior que 2, o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación aos polinomios cociente e resto:

Se particularizamos a igualdade entre expresións alxébricas $\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ ao que temos ata agora resulta

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir o polinomio $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, xurdido como resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, o divisor inicial. É dicir, repetimos o feito antes pero considerando un novo polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

O novo obxectivo é acadar a igualdade $r_1\equiv q\cdot c_2+r$. Ao igual que antes, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. Como o termo de maior grao de $r_1(x)$, $8x^3$, sae do produto $q(x)\cdot c_2(x)$, é necesario que o polinomio cociente conteña o monomio

$$c_2(x)=4x$$

Isto lévanos a un segundo resto $r_2(x)$:


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$r_2(x)=r_1(x)-q(x)\cdot c_2(x)=(8x^3-8x^2+3x-2)-(2x^2-x+3)\cdot 4x=$$
$$=(8x^3-8x^2+3x-2)-(8x^3-4x^2+12x)=-4x^2-9x-2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ é de grao 2, igual que o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Terceira aproximación aos polinomios cociente e resto:

O realizado na etapa segunda permítenos avanzar na adecuada descomposición da expresión alxébrica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}$$

Esta terceira etapa consiste en dividir o polinomio $r_2(x)=-4x^2-9x-2$, o resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, o divisor inicial. De novo repetimos o algoritmo pero con outro polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

Perseguimos que $r_2\equiv q\cdot c_3+r$. Como en cada paso, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. O termo de maior grao de $r_2(x)$, $-4x^2$, xorde do produto $q(x)\cdot c_3(x)$, polo que

$$c_3(x)=-2$$

e o terceiro resto $r_3(x)$ é

$$r_3(x)=r_2(x)-q(x)\cdot c_3(x)=(-4x^2-9x-2)-(2x^2-x+3)\cdot(-2)=$$
$$=(-4x^2-9x-2)-(-4x^2+2x-6)=-11x+4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ é de grao 1, menor que 2, grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto si é o definitivo. Concluímos:

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Se o expresamos mediante polinomios:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusión: ao dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$ obtemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ e como polinomio resto $r(x)=-11x+4$.

Seguidamente imos axilizar a división de polinomios:


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

**21.** Comproba que os cálculos que tes a continuación reflicten o que se fixo no exemplo anterior para dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primeira etapa:

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \lvert \; \underline{2x^2 - x + 3} \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\quad & \;\; 3x^2 \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 &
\end{array}$$

- Primeira e segunda etapas:

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \lvert \; \underline{2x^2 - x + 3} \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\quad & \;\; 3x^2 + 4x \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \quad & \\
-4x^2 - 9x - 2 &
\end{array}$$

- As tres etapas:

$$\begin{array}{rl}
6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \lvert \; \underline{2x^2 - x + 3} \\
\underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} \qquad\quad & \;\; 3x^2 + 4x - 2 \\
8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
\underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} \quad & \\
-4x^2 - 9x - 2 & \\
\underline{4x^2 - 2x + 6} & \\
-11x + 4 &
\end{array}$$

**22.** Divide os seguintes polinomios:

a) $3x^3 - 2x^2 - 2x + 6$ entre $x^2 - 3x + 5$

b) $-15x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ entre $5x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

c) $6x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 4x - 8$ entre $-2x^2 + 2x + 5$

d) $-16x^5 - 3x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 4x + 6$ entre $4x^3 + 2x^2 + x - 2$

e) $-7x^5 + 3x^2 + 2$ entre $x^2 + 4$

**23.** Encontra dous polinomios tales que ao dividilos apareza $q(x) = x^2 + 2x - 1$ como polinomio cociente e $r(x) = -2x^2 + 3$ como resto.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

### 3.3. Operacións con fraccións alxébricas

Posto que tanto os polinomios como as fraccións alxébricas obtidas a partir de dous polinomios son, en potencia, números reais, operaremos con tales expresións seguindo as propiedades dos números reais.

- **Suma ou resta.** Para sumar ou restar dúas fraccións polinómicas deberemos conseguir que teñan igual denominador. Unha maneira segura de logralo, aínda que pode non ser a máis adecuada, é esta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Produto.** Basta multiplicar os numeradores e denominadores entre si:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Segue a coñecida regra da división de fraccións numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

## Actividades propostas

**24.** Efectúa os seguintes cálculos:

a) $\frac{3x+2}{x^2+1}+\frac{5}{2x}$  b) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x+2}$  c) $\frac{-2x}{5x^2+4x}\cdot\frac{5}{3x-2}$  d) $\frac{x-4}{x^2+5x}:\frac{x-4}{x+5}$

**25.** Realiza as seguintes operacións alterando, en cada apartado, unicamente un dos denominadores, e o seu respectivo numerador:

a) $\frac{-3x^2+2x-1}{x^3}+\frac{4x-1}{x^2}$

b) $\frac{x-1}{x^2+5x}-\frac{6}{x+5}$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

**26.** Comproba, simplificando, as seguintes igualdades:

a) $\dfrac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\dfrac{6y^3+4y^2}{2y^2-8y}=\dfrac{3y^2+2y}{y-4}$

e) $\dfrac{6a^2b^3+2a^3b-4ab}{2ab^2+8a^2b}=\dfrac{3ab^2+a^2-2}{b+4a}$

**27.** Calcula os seguintes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3x$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2$

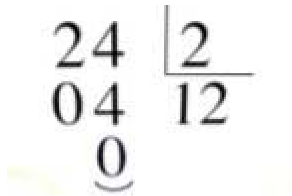
d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2$

**28.** Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

## 4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DUN POLINOMIO

### 4.1. Factorización dun polinomio



Tal e como ocorre coa división enteira, a división de polinomios tamén pode ser **exacta**, é dicir, o resto pode ser o polinomio cero.

***Exemplo:***

$$\begin{array}{rl}
3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8 & \underline{|\ -3x^2+3x-2} \\
\underline{-3x^5+3x^4-2x^3} \qquad\qquad\qquad & -x^3+2x-4 \\
-6x^3+18x^2-16x+8 & \\
\underline{6x^3-6x^2+4x} \quad\ \ & \\
12x^2-12x+8 & \\
\underline{-12x^2+12x-8} & \\
0 &
\end{array}$$

Neste caso escribimos $\frac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$

e diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Se optamos por unha igualdade polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que obter como resto o polinomio 0 nos permite expresar o polinomio dividendo, $p(x)$, como produto doutros dous polinomios, os polinomios divisor e cociente, $q(x)\cdot c(x)$. Acadamos unha **factorización** do polinomio $p(x)$, ou unha **descomposición en factores** de $p(x)$.

En xeral, un polinomio concreto pode ser factorizado, ou descomposto, por medio de diferentes grupos de factores. Se continuamos co polinomio $p(x)$ anterior, unha maneira de obter unha descomposición alternativa consiste en, á súa vez, acadar unha factorización dalgún dos polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que o polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$\begin{array}{rl}
-x^3 \qquad +2x-4 & \underline{|\ -x^2+2x-2} \\
\underline{x^3-2x^2+2x} \qquad\ & x+2 \\
-2x^2+4x-4 & \\
\underline{2x^2-4x+4} & \\
0 &
\end{array}$$

En efecto, a división é exacta e iso lévanos á seguinte igualdade:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Se a trasladamos á descomposición que tiñamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

**29.** Completa, cando sexa posible, as seguintes factorizacións:

a) $-3x^3+3x=-3x\cdot(\qquad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

**30.** Determina un polinomio de grao 4 que admita unha descomposición factorial na que participe o polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

Dicimos que un polinomio é **reducible** se admite unha factorización mediante polinomios de grao inferior ao seu. En caso contrario o polinomio será **irredutible**.

É claro que os polinomios de grao 1 non poden ser descompostos como produto doutros dous polinomios de menor grao. Son polinomios irredutibles. No seguinte apartado constataremos que hai polinomios de grao 2 que tamén son irredutibles.

Das diferentes factorizacións que pode admitir un polinomio a que máis información nos proporciona é aquela na que todos os factores que interveñen son polinomios irredutibles, xa que *non é mellorable*. Convén advertir que, en xeral, non é doado acadar ese tipo de descomposicións. Seguidamente imos afondar nesta cuestión.

## 4.2. Raíces dun polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto $\alpha$ é unha **raíz**, ou **un cero**, do polinomio *p*, se ao avaliar *p* en $x=\alpha$ obtemos o número 0, isto é, se

$$p(\alpha)=0$$

***Exemplo:***

- Consideremos o polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

O número 2 é unha raíz de $s(x)$, xa que

$$s(2)=2\cdot2^3+2\cdot2^2-8\cdot2-8=2\cdot8+2\cdot4-16-8=16+8-16-8=0$$

Outra raíz de $s(x)$ é o número $-1$:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

En cambio, o número $1$ non é unha raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot1^3+2\cdot1^2-8\cdot1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq0$$

Tampouco é raíz de $s(x)$ o número 0:

$$s(0)=2\cdot0^3+2\cdot0^2-8\cdot0-8=0+0-0-8=-8\neq0$$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

**31.** Estuda se os seguintes números son ou non raíz dos polinomios indicados:

a) $x=3$ de $x^3-3x^2+1$

b) $x=-2$ de $x^3+3x^2+3x+2$

c) $x=1$ de $x^3-3x^2+x+1$

d) $x=0$ de $x^3-3x^2+1$

e) $x=-1$ de $x^3-3x^2-x+3$

No seguinte exercicio imos recoller algunhas conexións entre as raíces dun polinomio e as operacións de suma e produto de polinomios.

## Actividades propostas

**32.** Supoñamos que temos dous polinomios, $p_1(x)$ e $p_2(x)$, e un número real $\alpha$.

a) Se $\alpha$ é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Se $\alpha$ é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio produto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) Hai algunha relación entre as raíces do polinomio $p_1(x)$ e as do polinomio $4\cdot p_1(x)$?

Que un número real sexa raíz dun polinomio está fortemente conectado coa factorización do polinomio:

Se un número real concreto $\alpha$ é unha raíz do polinomio $p(x)$, entón o polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$. Dito doutro modo, o polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da seguinte forma:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para certo polinomio $c(x)$, o cal pode ser coñecido ao dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Imos demostrar a anterior afirmación.

Se dividimos $p(x)$ entre $x-\alpha$, obteremos

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Como o polinomio divisor, $x-\alpha$, é de grao 1, e o polinomio resto debe ser de inferior grao, deducimos que o resto anterior é un número real $\beta$. Escribamos $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

O polinomio da esquerda, $p(x)$, é idéntico ao da dereita, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Por esa razón, ao avalialos en certo número real obteremos o mesmo valor. Procedamos a particularizalos para $x=\alpha$. Ao ser $\alpha$ raíz de $p(x)$, $p(\alpha)=0$. Isto lévanos a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

e, así, o resto é 0, e

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

É natural que nos preguntemos se é certo o recíproco do resultado anterior. A resposta é afirmativa:

Se un polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para certo polinomio $c(x)$ e certo número real $\alpha$, entón o número $\alpha$ é unha raíz do polinomio $p(x)$, isto é, $p(\alpha)=0$.

A súa demostración é sinxela. Basta que avaliemos $p$ en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Se fundimos estes dous últimos resultados nun só atopámonos perante o denominado *teorema do factor*:

**Teorema do factor**. Un número real concreto $\alpha$ é raíz dun polinomio $p(x)$ se, e só se, o polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$, é dicir, se e só se o polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

***Exemplo:***

- Volvamos co polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

Sabemos que o número 2 é unha raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x-2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{rl}
2x^3+2x^2-8x-8 & \underline{|\ \ x-2\ \ } \\
\underline{-2x^3+4x^2\phantom{-8x-8}} & 2x^2+6x+4 \\
6x^2-8x-8 & \\
\underline{-6x^2+12x\phantom{-8}} & \\
4x-8 & \\
\underline{-4x+8} & \\
0 &
\end{array}$$

Podemos descompoñer $s(x)$ da seguinte forma:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vimos que outra raíz de $s(x)$ é o número $-1$. Se observamos a precedente factorización de


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$s(x)$, é evidente que este número $-1$ non é raíz do factor $x-2$, polo que necesariamente debe selo doutro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

Ao ter constatado que $-1$ é raíz do polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos vai axudar a descompoñer $c(x)$:

$$\begin{array}{rl} 2x^2+6x+4 & \underline{|\ \ x+1\ \ } \\ \underline{-2x^2-2x\phantom{+4}} & \ \ 2x+4 \\ 4x+4 & \\ \underline{-4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Logo:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Se reunimos o feito nos apartados precedentes deste exemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

Descompúxose $s(x)$ como produto de tres polinomios irredutibles de grao 1. Á vista deles coñecemos todas as raíces de $s(x)$, os números $2$, $-1$ e $-2$.

Os resultados teóricos que establecemos condúcennos a estoutro:

Todo polinomio de grao $n$ ten como moito $n$ raíces reais, algunha das cales pode aparecer repetida entre eses non máis de $n$ números reais.

Hai polinomios que non admiten raíces, é dicir, que non se anulan nunca:

***Exemplos:***

- O polinomio $t(x)=x^2+1$ non ten raíces xa que ao avalialo en calquera número real $\alpha$ sempre nos dá un valor positivo e, polo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1>0$$

Ademais, este polinomio de grao dous, $t(x)=x^2+1$, é un polinomio irredutible porque, ao carecer de raíces, non podemos expresalo como produto de polinomios de menor grao.

- Outro polinomio sen raíces é

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

Porén, $u(x)=x^4+2x^2+1$ é un polinomio reducible xa que, obviamente, pode ser expresado como produto de dous polinomios de inferior grao.

Aínda que non sexa posible demostralo, pola súa dificultade, si se pode anunciar que todo polinomio de grao impar posúe, polo menos, unha raíz real.

## Actividades propostas

**33.** Constrúe un polinomio de grao 3 tal que posúa tres raíces distintas.

**34.** Determina un polinomio de grao 3 tal que teña, polo menos, unha raíz repetida.

**35.** Constrúe un polinomio de grao 3 de forma que teña unha única raíz.

**36.** Conxectura, e logo demostra, unha lei que nos permita saber cando un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$$

admite o número 0 como raíz.

**37.** Demostra unha norma que sinale cando un polinomio calquera $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$ admite o número 1 como raíz.

**38.** Obtén todas as raíces de cada un dos seguintes polinomios:

a) $x+6$ b) $-x+4$ c) $2x-7$ d) $-4x-5$

e) $-3x$ f) $x^2-5x$ g) $4x^2-x-3$ h) $x^3-4x$ i) $x^3+4x$

### 4.3. Regra de *Ruffini*

No apartado anterior probouse a equivalencia entre que un número real $\alpha$ sexa raíz dun polinomio $p(x)$ e o feito de que o polinomio mónico de grao un $x-\alpha$ divida a $p(x)$, isto é, que exista outro polinomio $c(x)$ tal que sexa posible unha factorización de $p(x)$ do tipo:

$$p(x) = (x-\alpha)\cdot c(x)$$

Debido á importancia que ten a división de polinomios cando o polinomio divisor é da forma $x-\alpha$, é conveniente axilizar tales divisións.

***Exemplo:***

- Consideremos o polinomio $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 3$. Imos dividilo entre $x+2$. Se o resto é 0 o número $-2$ será unha raíz de $p(x)$; no caso contrario, se non é 0 o resto, entón $-2$ non será raíz de $p(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \; x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2-10x+21 \\
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & \underline{10x^2} & \underline{+20x} & & \\
 & & 21x & +3 & \\
 & & \underline{-21x} & \underline{-42} & \\
 & & & -39 &
\end{array}$$

Xa que o resto non é cero, $-2$ non é unha raíz de $p(x)$.

Vexamos como xurdiron tanto o polinomio cociente como o resto. Que o grao do dividendo sexa tres e


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

que o divisor sexa de grao un impón que o cociente teña grao dous e que o resto sexa un número real. O cociente consta dos monomios $3x^2$, $-10x$ e 21, os cales coinciden cos monomios de maior grao de cada un dos dividendos despois de diminuír os seus graos nunha unidade: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (o dividendo inicial), $-10x$ vén de $-10x^2+x+3$ e, por último, 21 de $21x+3$. Este feito, coincidencia no coeficiente e diminución do grao nunha unidade, débese a que o divisor, $x+2$, é mónico e de grao un.

Seguidamente, imos ter en conta unicamente os coeficientes do dividendo, por orde de grao, 3,–4, 1 e 3; canto ao divisor, como é mónico e de grao un, basta considerar o seu termo independente, +2, pero como o resultado de multiplicar os monomios que van conformando o cociente polo divisor temos que restarllo a cada un dos dividendos, atendendo a este cambio de signo, en lugar do termo independente, +2, operaremos co seu oposto, –2, número que, á vez, é a raíz do divisor $x+2$ e sobre o que pesa a pregunta de se é ou non raíz de $p(x)$.

- Primeiro paso da división:

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\
\quad -10x^2+x+3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & & \\ \hline
 & 3 & -10 & & 
\end{array}$$

Aparece no cociente o monomio $3x^2$ (coeficiente $3$), o cal provoca a "desaparición" de $3x^3$ no dividendo e a aparición do monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Despois de operar (sumar) atopámonos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) e, no cociente, $-10x$.

- Segundo paso. O dividendo pasa ser $-10x^2+x+3$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\
\quad -10x^2+x+3 & \\
\quad \underline{10x^2+20x} & \\
\qquad\quad 21x+3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & 20 & \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & 
\end{array}$$

A irrupción no cociente do monomio $-10x$ (coeficiente $-10$) provoca a "desaparición" de $-10x^2$ no dividendo e a aparición do monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Despois de operar (sumar) atopámonos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) e, no cociente, $21$.

- Terceiro paso. O dividendo pasa a ser $21x+3$.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline -3x^3-6x^2 & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad 10x^2+20x & \\ \qquad 21x+3 & \\ \qquad -21x-42 & \\ \qquad\quad -39 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \boxed{-39} \end{array}$$

Temos no cociente o termo independente $21$. Isto provoca a eliminación de $21x$ no dividendo e a aparición do termo $-42=(-2)\cdot 21$. Despois de operar (sumar) atopámonos co resto $-39=3-42$.

En cada un dos pasos figura, na parte dereita, o mesmo que se realizou na división convencional, pero coa vantaxe de que todo é máis áxil debido a que unicamente se manexan números reais: os coeficientes dos distintos polinomios participantes.

Estamos ante a chamada **regra de *Ruffini***, un algoritmo que nos proporciona tanto o cociente como o resto que resultan de dividir un polinomio calquera entre outro da forma $x-\alpha$.

***Exemplo:***

- Dividamos o polinomio $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & \boxed{-8} \end{array}$$

O cociente é $-x^3-x^2-3x-4$ e o resto $-8$. Como o resto non é 0 deducimos que o número 3 non é raíz de $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$. A relación entre dividendo, divisor, cociente e resto é, como sempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3+5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Se avaliamos $p(x)$ en $x=3$ non pode dar cero pero, que valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalmente obtivemos o resto anterior. Este feito vén recollido no denominado teorema do resto.

**Teorema do resto**. O valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ ao particularizalo en $x=\alpha$

coincide co resto que aparece ao dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

**39.** Usa a regra de *Ruffini* para realizar as seguintes divisións de polinomios:

a) $-3x^2+2x+2$ entre $x+1$ b) $x^3+3x^2-3x+6$ entre $x+2$

c) $5x^3-4x^2-2$ entre $x-1$ d) $x^3-8x+2$ entre $x-3$

**40.** Emprega a regra de *Ruffini* para ditaminar se os seguintes números son ou non raíces dos polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de $x^3-4x^2+5$ b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$ d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

**41.** Utiliza a regra de *Ruffini* para coñecer o valor do polinomio $-2x^3+3x^2+2x+3$ en $x=3$.

**42.** Estuda se é posible usar a regra de *Ruffini*, dalgunha forma, para dividir $x^3+3x^2+3x+2$ entre $2x+6$.

Para facilitar a comprensión dos conceptos e resultados deste tema a maioría dos números que apareceron ata agora, coeficientes, raíces, etc., foron números enteiros. Por suposto que podemos atopar polinomios con coeficientes racionais, ou irracionais, ou con polinomios con raíces dadas por unha fracción ou un número irracional. Tamén existen polinomios que carecen de raíces.

***Exemplos:***

- Comprobemos, mediante a regra de *Ruffini*, que $\alpha=\dfrac{1}{2}$ é raíz do polinomio $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para coñecer as raíces do polinomio $x^2-2$ debemos estudar se hai algún número real $\alpha$ tal que o anule, é dicir, para o que se teña

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

Así, o polinomio de grao dous $x^2-2$ ten dúas raíces distintas, que son números irracionais.

- Xa sabemos que hai polinomios que carecen de raíces, como por exemplo $x^2+4$.

Apreciamos que a regra de *Ruffini* nos informa sobre se un número concreto é ou non raíz dun polinomio. Naturalmente, cando estamos perante un polinomio, e nos interesa coñecer as súas raíces, non é posible efectuar unha proba con cada número real para determinar cales son raíz do polinomio. No próximo apartado destacaremos certos "números candidatos" a seren raíz dun polinomio.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## 4.4. Cálculo das raíces dun polinomio

Á hora de buscar as **raíces enteiras dun polinomio** dispoñemos do seguinte resultado:

Dado un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuxos coeficientes son todos números enteiros, as súas **raíces enteiras**, se as tivese, encóntranse necesariamente entre os divisores enteiros do seu termo independente $a_0$.

Procedamos á súa demostración. Supoñamos que certo número enteiro $\alpha$ é unha raíz dese polinomio. Tal número debe anulalo:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$
$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha = -a_0$$
$$\alpha \cdot (a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 \alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 \alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

Na última igualdade, o número do lado esquerdo é enteiro, porque está expresado como unha suma de produtos de números enteiros. Por iso, o número do lado dereito, $\frac{-a_0}{\alpha}$, tamén é enteiro. Ao seren tamén enteiros tanto $-a_0$ como $\alpha$, acadamos que $\alpha$ é un divisor de $a_0$.

***Exemplos:***

- Determinemos, con amaño ao anterior resultado, que números enteiros son candidatos a seren raíces do polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$:

  Tales números enteiros candidatos deben ser divisores de $-6$, o termo independente do polinomio. Por iso, os únicos números enteiros que poden ser raíz dese polinomio son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

  Pode comprobarse que os números enteiros $2$ e $-3$ son raíces; os demais non o son.
- As únicas posibles raíces enteiras do polinomio $2x^3 + x^2 + 12x + 6$ tamén son:

  $$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

  Neste caso ningún deses números é raíz do polinomio.

## Actividades propostas

**43.** Para cada un dos seguintes polinomios sinala, en primeiro lugar, que números enteiros son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Algo máis xeral podemos afirmar sobre clases de números e raíces dun polinomio:

Dado un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuxos coeficientes son todos números enteiros, as súas **raíces racionais**, se as tivese, necesariamente teñen por numerador algún divisor do termo independente, $a_0$, e por denominador algún divisor do coeficiente do termo de maior grao, $a_n$.

***Exemplos:***

- Volvendo a un dos polinomios do exemplo anterior, $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, os números racionais candidatos a seren raíces súas teñen por numerador un divisor de $-6$ e por denominador un divisor de $2$. Polo tanto, os únicos números racionais que poden ser raíz dese polinomio son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  Ademais de $2$ e $-3$, tamén é raíz $\frac{-1}{2}$; os demais non o son.

- As únicas posibles raíces racionais do polinomio $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 3$ son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  Neste caso ningún deses números é raíz do polinomio.

## Actividades propostas

**44.** Completa o exemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ é raíz do polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

**45.** Para cada un dos seguintes polinomios indica que números racionais son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son:

a) $3x^2 + 4x + 1$

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

No capítulo próximo, dedicado ás ecuacións, seremos capaces de obter as raíces de todo polinomio de grao dous, se as tivese.



Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## 4.5. Factorización de polinomios e fraccións alxébricas

A factorización de polinomios pode ser utilizada para simplificar algunhas expresións nas que interveñen fraccións alxébricas. Vexámolo a través dun par de exemplos:

***Exemplo:***

- Unha fracción alxébrica como:

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

pode ser simplificada grazas a que o numerador e o denominador admiten factorizacións nas que algún polinomio está presente en ambas as dúas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como xa apuntamos noutras ocasións, as expresións final e inicial non son idénticas pero si son equivalentes en todos aqueles valores para os que ambas as dúas teñen sentido, isto é, para aqueles nos que non se anula o denominador.

***Exemplo:***

- Nunha suma de fraccións polinómicas como esta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos acadar un común denominador nas fraccións a partir da descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Convén destacar que no resultado final se optou por deixar o denominador factorizado. Desa forma, entre outras cuestións, apréciase rapidamente para que valores da indeterminada esa fracción alxébrica non admite ser avaliada.

## Actividades propostas

**46.** Simplifica, se é posible, as seguintes expresións:

a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

**47.** Realiza as seguintes operacións tendo en conta as factorizacións dos denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

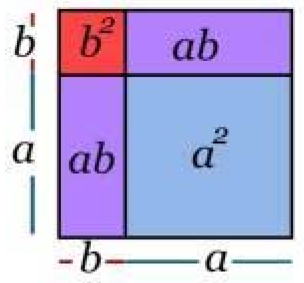

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## 4.6. Produtos notables de polinomios

Neste apartado imos destacar unha serie de produtos concretos de polinomios que xorden frecuentemente. Podemos expoñelos de moi diversas formas. Tal e como o faremos, aparecerá máis dunha indeterminada; debemos ser capaces de apreciar que se, nalgún caso concreto, algunha indeterminada pasa ser un número concreto isto non fará máis que particularizar unha situación máis xeral.

**Potencias dun binomio.** As seguintes igualdades obtéñense, simplemente, tras efectuar os oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

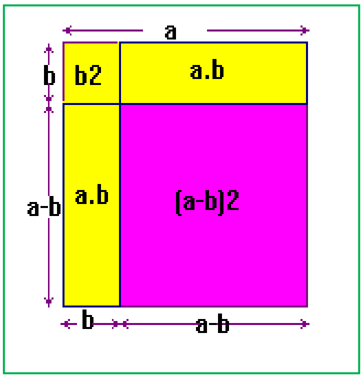



Observa os cadrados da ilustración e comproba como se verifica.

O cadrado dunha suma é igual ao cadrado do primeiro, máis o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

O cadrado dunha diferenza é igual ao cadrado do primeiro, menos o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.




Observa os cadrados e rectángulos da ilustración.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada un dos desenvolvementos, o expoñente do binomio coincide co grao de cada un dos monomios.

*Exemplos:*

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

**48.** Realiza os cálculos:

a) $(1+4a)^2$

b) $(-x+5)^2$

c) $(-2x-3)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(5x+3)^3$

**49.** Obtén as fórmulas dos cadrados dos seguintes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$

b) $(a+b-c)^2$

**50.** Desenvolve as seguintes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x – 5/x)^2$

d) $(3a – 5)^2$ e) $(a^2 – b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

**51.** Expresa como cadrado dunha suma ou dunha diferenza as seguintes expresións alxébricas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2– 4x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

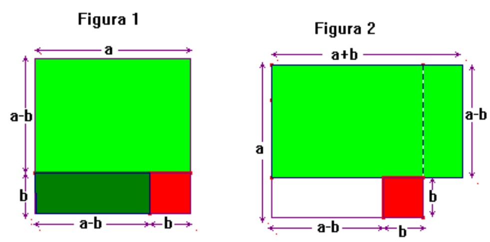
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

**Suma por diferenza.** De novo a seguinte igualdade obtense tras efectuar o produto sinalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Observa a ilustración.

Suma por diferenza é igual a diferenza de cadrados.




***Exemplos:***

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$

$=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## Actividades propostas

**52.** Efectúa estes produtos:

a) $(3x+2y)\cdot(3x-2y)$

b) $(5x^2+1)\cdot(5x^2-1)$

c) $(-x^2+2x)\cdot(x^2+2x)$

Convén darse conta de que as súas fórmulas, lidas ao revés, constitúen unha factorización dun polinomio.

***Exemplos:***

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot 6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

## Actividades propostas

**53.** De acordo co exposto, factoriza os seguintes polinomios:

a) $x^2-4x+4$

b) $3x^2+18x+27$

c) $3x^5-9x^3$

**54.** Calcula os seguintes produtos:

a) $(3x+1)\cdot(3x-1)$ b) $(2a-3b)\cdot(2a+3b)$

c) $(x^2-5)\cdot(x^2+5)$ d) $(3a^2+5)\cdot(3a^2-5)$

**55.** Expresa como suma por diferenza as seguintes expresións

a) $9x^2-25$ b) $4a^4-81b^2$ c) $49-25x^2$ d) $100a^2-64$

**56.** Simplifica as seguintes fraccións alxébricas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

## CURIOSIDADES. REVISTA

### Fai maxia

- Pensa un número.
- Multiplícao por 2.
- Suma 4.
- Multiplica por 5.
- Divide por 10.
- Resta o número.
- Maxia, maxia, maxia…
- O resultado é **2**!

Analiza como ti, o mago, puideches coñecer o resultado.

### Pasatempo

**A B A**

**A B A**

**<u>A B A</u>**

**B C B**

### *Emmy Noether* (1882 - 1935)

*Emmy Noether* foi unha matemática alemá de orixe xudía que realizou as súas investigacións nas primeiras décadas do século XX. Demostrou dous teoremas esenciais para a teoría da relatividade que permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

Traballou en estruturas alxébricas e na actualidade o cualificativo ***noetheriano*** utilízase para designar moitos conceptos en álxebra: aneis *noetherianos*, grupos *noetherianos*, módulos *noetherianos*, espazos topolóxicos *noetherianos*, etc.

Cando intentou dar clases na Universidade de *Göttingen,* o regulamento indicaba explicitamente que os candidatos debían ser homes polo que *Noether* non puido acceder á docencia universitaria. Cóntase, como anécdota, que *Hilbert* dixo nun Consello desta Universidade:

> *"non vexo por que o sexo da candidata é un argumento contra o seu nomeamento como docente. Despois de todo non somos un establecemento de baños".*

**Dela dixo *Albert Einstein*:**

> *"No reino da Álxebra no que os mellores matemáticos traballaron durante séculos, ela descubriu métodos que se demostrou que teñen unha importancia enorme... A matemática pura é, á súa maneira, a poesía das ideas lóxicas... Neste esforzo cara á beleza lóxica descóbrense fórmulas espirituais para conseguir unha penetración máis profunda nas leis da natureza".*


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

# RESUMO

| *Noción* | *Descrición* | *Exemplos* |
|---|---|---|
| **Expresión alxébrica** | Expresión matemática que se constrúe con números reais e as operacións matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación e/ou división. | $\frac{-3x}{2x+y^3} - x\cdot y^2 \cdot z$ |
| **Valor numérico dunha expresión alxébrica** | Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada, ou variable, dunha expresión alxébrica aparece un número real: o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas. | Se, na expresión precedente, facemos *x* = 3, *y* = –2, *z* = 1/2 obtemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3} - 3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$ |
| **Monomio** | Expresión dada polo produto de números reais e indeterminadas. | $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ de grao 6 e coeficiente –5<br>$7\cdot x^2$ de grao 2 e coeficiente 7 |
| **Polinomio** | Expresión construída a partir da suma de monomios. | $-x^3+4x^2+8x+6$ |
| **Grao dun polinomio** | O maior grao dos seus monomios. | O anterior polinomio é de grao 3. |
| **Suma e produto de polinomios** | O resultado sempre é outro polinomio | $2ax - ax = ax$<br>$2ax \cdot ax = 2a^2x^2$ |
| **División de dous polinomios** | Ao dividir o polinomio *p*(*x*) entre *q*(*x*) obtéñense outros dous polinomios, os polinomios cociente, *c*(*x*), e resto, *r*(*x*), tales que $p(x) = q(x)\cdot c(x) + r(x)$ | $p(x) = q(x)\cdot c(x) + r(x)$ |
| **Factorización dun polinomio** | Consiste en expresalo como produto doutros polinomios de menor grao. | $x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 =$<br>$= (x^2-3)\cdot(x^3-1)$ |
| **Raíces e factorización** | Se $\alpha$ é unha raíz do polinomio $p(x)$ é equivalente a que o polinomio $p(x)$ admita unha descomposición factorial da forma $p(x) = (x-\alpha)\cdot c(x)$ para certo polinomio $c(x)$ | $-2$ é unha raíz de $x^3+2x^2-x-2$<br>$x^3+2x^2-x-2 = (x+2)\cdot(x^2-1)$ |
| **Regra de *Ruffini*** | Pódemos axudar á hora de factorizar un polinomio e coñecer as súas raíces. | |


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## EXERCICIOS E PROBLEMAS

**1.** Neste exercicio vaise presentar un *truco* mediante o cal imos adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxébrica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.

i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número natural e que non o amose.
ii. Que o multiplique por 3.
iii. Que ao resultado anterior lle sume 18.
iv. Que multiplique por 2 o obtido.
v. Que divida entre 6 a última cantidade.
vi. Que ao resultado precedente lle reste o número que escribiu.
vii. Independentemente do número descoñecido orixinal, que número xurdiu?

**2.** Nestoutro exercicio imos *adiviñar* dous números que pensou un compañeiro. Constrúe unha expresión alxébrica que recolla todos os pasos e, finalmente, descobre o truco.

i. Solicita a un compañeiro que escriba nun papel, e non amose, dous números naturais: un dunha cifra (entre 1 e 9) e outro de dúas cifras (entre 10 e 99
ii. Que multiplique por 4 o número elixido dunha cifra.
iii. Que multiplique por 5 o obtido.
iv. Que multiplique o resultado precedente por 5.
v. Que lle sume ao anterior o número de dúas cifras que elixiu.
vi. Se o teu compañeiro che di o resultado destas operacións, ti descobres os seus dous números. Se che di, por exemplo, 467, entón sabes que o número dunha cifra é 4 e o de dúas cifras é 67, por que?

**3.** Estuda se hai números reais nos que as seguintes expresións non poden ser avaliadas:

a) $\dfrac{7x-9}{(x+5)\cdot(2x-32)}$

b) $\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$

c) $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

**4.** Unha persoa ten aforrados 2 500 euros e decide depositalos nun produto bancario cun tipo de interese anual do 2 %. Se decide recuperar os seus aforros ao cabo de dous anos, cal será a cantidade total da que disporá?

**5.** Xeneralicemos o exercicio anterior: Se ingresamos $X$ euros nun depósito bancario cuxo tipo de interese é do $i$ % anual, cal será a cantidade que recuperaremos ao cabo de $n$ anos?

**6.** Constrúe un polinomio de grao 2, $p(x)$, tal que $p(5)=-2$.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

**7.** Consideremos os polinomios $p(x)=-3x^3+2x^2-4x-3$ , $q(x)=4x^4+3x^3-2x^2+x+8$ e $r(x)=5x^2+6x-2$ . Realiza as seguintes operacións:

a) $p+q+r$

b) $p-q$

c) $p\cdot r$

d) $p\cdot r-q$

**8.** Calcula os produtos:

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) $(0.3x - 0.2y + 0.1z)\cdot(0.1x + 0.2y - 0.3z)$ c) $(x-1)(x-a)(x-b)$

**9.** Efectúa as divisións de polinomios:

a) $3x^4-4x^3-9x^2+x-2$ entre $3x^2+4x-4$

b) $5x^5-6x^4+7x^3+3x^2-x-7$ entre $x^3+3x+4$

**10.** Calcula os cocientes:

a. a) $(5x^4) : (x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

**11.** Realiza as operacións entre as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\frac{2x-3}{x^2-3x}+\frac{3x}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{3x}{x^2-6x+9}$

c) $\frac{2x-3}{x^2-3x}\cdot\frac{3x}{x^2-6x+9}$

d) $\frac{2x-3}{x^2-3x}:\frac{3x}{x^2-6x+9}$

**12.** Constrúe un polinomio de grao 2 tal que o número $-5$ sexa raíz súa.

**13.** Determina un polinomio de grao 3 tal que as súas raíces sexan $6$, $-3$ e $0$.

**14.** Determina un polinomio de grao 4 tal que as súas raíces sexan $6$ , $-3$ , 2 e $0$ .

**15.** Constrúe un polinomio de grao 4 tal que teña unicamente dúas raíces reais.

**16.** Determina un polinomio de grao 5 tal que as súas raíces sexan $6$ , $-3$ , 2, 4 e 5.

**17.** Encontra un polinomio $q(x)$ tal que ao dividir $p(x)=2x^4+x^3+3x^2+x+3$ entre $q(x)$ se obteña como polinomio resto $r(x)=x^2+x+1$.

**18.** Calcula as raíces enteiras dos seguintes polinomios:

a) $3x^3+11x^2+5x-3$

b) $3x^3+2x^2+8x-3$

c $3x^3+5x^2+x-1$

d) $2x^3+x^2-6x-3$

**19.** Obtén as raíces racionais dos polinomios do exercicio anterior.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

**20.** Descompón os seguintes polinomios como produto de polinomios irredutibles:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$

b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

c) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

d) $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

**21.** Calcula as potencias:

a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$

**22.** Analiza se os seguintes polinomios xurdiron do desenvolvemento de potencias de binomios, ou trinomios, ou dun produto *suma por diferenza*. En caso afirmativo expresa a súa procedencia.

$x^2 - 36$ $5x^2 + 1$

$5x^2 - 11$ $x^2 - 3y^2$

$x^2 - 6x + 9$ $x^4 - 8x^2 + 16$

$x^2 + \sqrt{20}\,xy + 5y^2$ $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

**23.** Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

**24.** Con este exercicio preténdese amosar a conveniencia á hora de non operar unha expresión polinómica que temos factorizada total ou parcialmente.

a) Comproba a igualdade $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.

b) Determina todas as raíces do polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

**25.** Factoriza numerador e denominador e simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

**26.** Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2 - 1}$

**27.** Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{x^4 - 1}{x^7} : \dfrac{x^2 + 1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x + 3y}{a - b} - \dfrac{3x + 4y}{2a - 2b}$ c) $-4x + (1 - x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

**28.** Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x + a} : \dfrac{x - a}{x + a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a+b}$

**29.** Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{y}} \cdot \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

## AUTOAVALIACIÓN

1. Sinala os coeficientes que aparecen nas seguintes expresións alxébricas:

   a) $\frac{5x-8}{3-4y^2}+6xy^3-\frac{7}{z}$  b) $-3x^5+2x^4-x^3+4x-5$  c) $7\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. O valor numérico da expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ é:

   a) $17$  b) $15$  c) $-3$  d) $-5$

3. Completa adecuadamente as seguintes oracións:

   a) A suma de dous polinomios de grao tres é sempre outro polinomio de grao ……….

   b) A suma de tres polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

   c) O produto de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

   d) A diferenza de dous polinomios de grao catro é sempre outro polinomio de grao ……….

4. Ao dividir o polinomio $p(x)=5x^5+6x^4+3x^3+2$ entre $q(x)=3x^2+5x+8$ o polinomio resto resultante:

   a) debe ser de grao 2.  b) pode ser de grao 2.

   c) debe ser de grao 1.  d) debe ser de grao menor que 2.

5. Considera o polinomio $5x^4-8x^3+4x^2-6x+2$. Cales dos seguintes números enteiros son *razoables candidatos* para seren unha raíz súa?

   a) 3  b) 2  c) 4  d) 7

6. Considera o polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. Cales dos seguintes números racionais son *razoables candidatos* para seren unha da súas raíces?

   a) $-3$  b) 2 y $\frac{-1}{2}$  c) –3 y $\frac{1}{3}$  d) –3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteiros de grao tres

a) ten tres raíces reais;  b) ten, como moito, tres raíces reais.  c) ten, polo menos, tres raíces.

8. É posible que un polinomio, con coeficientes enteiros, de grao catro teña exactamente tres raíces, xa sexan diferentes ou con algunha múltiple?

9. Xustifica a veracidade ou falsidade de cada unha das seguintes oracións:

   a) A regra de Ruffini serve para dividir dous polinomios calquera.

   b) A regra de Ruffini permite ditaminar se un número é raíz ou non dun polinomio.

   c) A regra de Ruffini só é válida para polinomios con coeficientes enteiros.

   d) A regra de Ruffini é un algoritmo que nos proporciona todas as raíces dun polinomio.

10. Analiza se pode haber algún polinomio de grao dez que non teña ningunha raíz real.


Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF