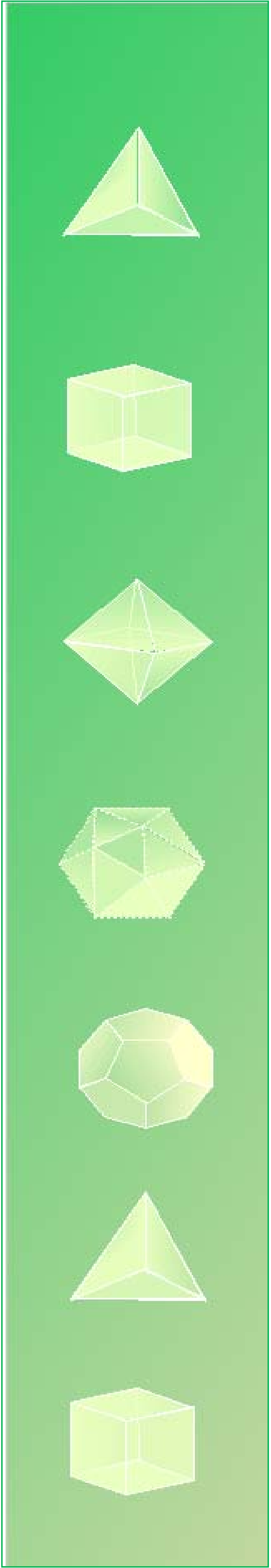


Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 4: Ecuacións e sistemas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Os matemáticos tardaron preto de tres mil anos en comprender e resolver ecuacións tan sinxelas e que ti coñeces tan ben como $ax + b = 0$. Xa os exipcios resolvían problemas que se poden considerar de ecuacións aínda que non existía a notación alxébrica. O matemático grego *Diofanto* no século III resolveu ecuacións de primeiro e segundo grao. No século XV houbo un desafío para premiar a quen resolvera unha ecuación de terceiro grao. No século XIX demostrouse que non existe unha fórmula xeral que resolva as ecuacións de quinto grao. Para impoñer que a ecuación $ax + b = 0$ teña sempre solución, o conxunto numérico dos números naturais debe ampliarse cos números negativos. Para impoñer que a ecuación $ax = b$ teña sempre solución, o conxunto numérico dos números enteiros debe ampliarse cos números fraccionarios. Para impoñer que a ecuación $x^2 = a$, $a > 0$, recorda $x^2 = 2$, teña solución, o conxunto numérico debe ampliarse cos números irracionais. Pero a ecuación $x^2 + 1 = 0$, aínda non ten solución no conxunto numérico dos números reais. O próximo curso ampliarase o dominio aos números complexos.

Neste capítulo repasaremos a solución de ecuacións de segundo grao e sistemas lineais, que xa coñeces, e ampliaremos con ecuacións e sistemas novos.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO

1.1. Concepto de ecuacións de segundo grao

Recorda que:

Unha **ecuación de segundo grao** é unha ecuación polinómica na que a maior potencia da incógnita é 2. As ecuacións de segundo grao pódense escribir da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde *a, b e c* son números reais, con $a \neq 0$.

Exemplo:

a) *Son ecuacións de 2º grao:*

$$2x^2 - 7x + 4 = 0; \qquad -9x^2 + 2x - 5 = 0; \qquad 6x^2 - (1/2)x - 3.25 = 0$$

b) *Os coeficientes das ecuacións de* 2º grao son números reais, polo tanto poden ser fraccións ou raíces. Por exemplo:

$$\frac{9}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{2}{5} = 0; \quad \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{9} = 0; \quad -5.8x^2 + 1.7x - 7.02 = 0; \quad \sqrt{5}x^2 + \frac{3}{2}x - \sqrt[3]{2} = 0.$$

Actividades propostas

1. Indica se son ecuacións de segundo grao as seguintes ecuacións:

a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4.7x^2 - 6.25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$

d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2.35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3.2 = 0$

2. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c.*

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3.4x^2 + 7.8x = 0$

c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1.25x^2 - 3.47x + 2.75 = 0$.

1.2. Resolución de ecuacións de 2º grao completas

Recorda que:

Chámase **ecuación de segundo grao completa** a aquela que ten valores distintos de cero para *a*, *b* e *c*.

Para resolver as ecuacións de segundo grao completas utilízase a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula permite calcular as dúas solucións da ecuación.

Chamamos **discriminante** á parte da fórmula que está no interior da raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resoltas

- *Resolve a ecuación de segundo grao* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primeiro debemos saber quen son *a*, *b* e *c:*

$$a = 1;\ b = -3;\ c = 2.$$

Substituíndo estes valores na fórmula, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Polo tanto, as dúas solucións son:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2; \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

En efecto, $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, e $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, xa que logo 2 e 1 son solucións da ecuación.

Actividades propostas

3. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao completas:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$

c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

4. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $2x - 3 \cdot \frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x-3}{5}$; b) $2 \cdot \frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x \cdot (x - 3) + 4(x^2 - 5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2 - 1) + 3(x^2 - 5) + 4 = 16$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{4}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.

1.3. Número de solucións dunha ecuación de 2º grao completa

Recorda que:

Antes definimos o que era o **discriminante**, lémbraste?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cantas solucións ten unha ecuación de 2º grao, imos fixarnos no signo do discriminante.

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a ecuación ten **dúas solucións reais e distintas**.

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a ecuación ten dúas solucións reais iguais (unha **solución dobre**).

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non **ten solución**.

O motivo é moi sinxelo, a raíz cadrada dun número real negativo non é un número real, non existe.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- *A ecuación* $x^2 - 7x + 10 = 0$ *ten como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

Polo tanto, a ecuación dada ten 2 solucións reais e distintas, 2 e 5.

(*Comprobación:* $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$ e $(2)^2 - 7(2) + 10 = 4 \; -14 + 10 = 0$).

- *A ecuación* $x^2 - 6x + 9 = 0$ *ten como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Polo tanto, a ecuación ten dúas solucións reais iguais. Pódese escribir como:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$, que ten a solución dobre $x = 3$.

- A ecuación $x^2 + 4x + 10 = 0$ *ten como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (10) = 16 - 40 = -24 < 0$$

Polo tanto, a ecuación non ten solución real. Ningún número real verifica a ecuación.

Actividades propostas

5. Pescuda cantas solucións teñen as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ **b)** $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

1.4. Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas

Recorda que:

Chamamos **ecuación de 2º grao incompleta** a aquela ecuación de segundo grao na que o coeficiente b vale 0 (falta b), ou o coeficiente c vale 0 (falta c).

Observa: se o coeficiente a vale cero non é unha ecuación de segundo grao.

Exemplo:

- *A ecuación de segundo grao* $3x^2 - 22 = 0$ é incompleta porque o coeficiente $b = 0$, é dicir, falta b.
- *A ecuación de segundo grao* $2x^2 - 7x = 0$ é incompleta porque non ten c, é dicir, $c = 0$.

Unha ecuación de segundo grao incompleta tamén se pode resolver utilizando a fórmula das completas pero é un proceso máis lento e é máis doado equivocarse.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Se o **coeficiente b = 0:** Despexamos a incógnita normalmente, como faciamos nas ecuacións de primeiro grao:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Se $\frac{-c}{a} > 0$ ten dúas solucións distintas, se $\frac{-c}{a} < 0$ non existe solución.

Se o **coeficiente c = 0:** Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0.$$

Para que o produto de dous factores valla cero, un dos factores debe valer cero.

Polo tanto $x = 0$, ou $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

Resumo

Se o **coeficiente b = 0,** $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Se o **coeficiente c = 0,** $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$.

Exemplo:

- *Na ecuación* $2x^2 - 200 = 0$ *falta o* b.

Para resolvela despexamos a incógnita, é dicir, x^2:

$$2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 200/2 = 100.$$

Unha vez que chegamos aquí, falta quitar ese cadrado que leva a nosa incógnita. Para iso, facemos a raíz cadrada nos 2 membros da ecuación:

$$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10.$$

Así obtivemos as dúas solucións da nosa ecuación, 10 e –10.

En efecto, $2 \cdot 10^2 - 200 = 2 \cdot 100 - 200 = 0$, e $2 \cdot (-10)^2 - 200 = 2 \cdot 100 - 200 = 0$.

Exemplo:

- *Na ecuación* $3x^2 - 21x = 0$ falta o c.

Para resolvela, sacamos factor común: $3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x - 21) = 0$

Unha vez que chegamos aquí, temos dúas opcións:

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Así obtivemos as dúas solucións da ecuación $x = 0$ e $x = 7$.

En efecto, $3 \cdot 0^2 - 21 \cdot 0 = 0$, e $3 \cdot (7)^2 - 21 \cdot 7 = 3 \cdot 49 - 21 \cdot 7 = 147 - 147 = 0$.

Actividades resoltas

- *Resolve a ecuación de segundo grao* $2x^2 – 50 = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o b. Polo tanto, despexamos a incógnita:

$$2x^2 – 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25 \Rightarrow \text{as solucións son } 5 \text{ e } –5.$$

- *Resolve a ecuación de segundo grao* $x^2 + 11x = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o c.

Polo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$.

Obtemos as dúas solucións: $x = 0$ e $x + 11 = 0 \Rightarrow x = –11$.

As solucións son 0 e –11.

Actividades propostas

6. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 – 160 = 0$

c) $x^2 – 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$

e) $9x^2 – 49 = 0$ f) $3x^2 – 33x = 0$.

7. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 – 180 = 0$

c) $x^2 – 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 – 25 = 0$ f) $5x^2 – 10x = 0$.

1.5. Suma e produto das solucións nunha ecuación de segundo grao

Recorda que:

Se nunha ecuación de segundo grao: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, coñecemos as súas solucións: x_1 e x_2 sabemos que podemos escribir a ecuación de forma factorizada:

$$(x – x_1) \cdot (x – x_2) = 0.$$

Facemos operacións:

$$x^2 – x_1 \cdot x – x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 – (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

polo que o coeficiente c é igual ao produto das solucións e a suma das solucións é igual ao oposto do coeficiente b, é dicir, $–b$.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.$$

Se a ecuación é $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo por a, xa temos unha de coeficiente $a = 1$, e obtemos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \qquad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}.$$

Esta propiedade permítenos, en ocasións, resolver mentalmente algunhas ecuacións de segundo grao.

Actividades resoltas

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

As solucións son 1 e –2, pois o seu produto é –2 e a súa suma –1.

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos mentalmente dous números cuxo produto sexa 6 e cuxa suma sexa 5. En efecto, 2 · 3 = 6, e 2 + 3 = 5, logo as solucións da ecuación son 2 e 3.

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 - 8x + 16 = 0$.

O produto debe ser 16. Probamos con 4 como solución e, en efecto, 4 + 4 = 8. As solucións son a raíz 4 dobre.

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

As solucións son –2 e 1, pois o seu produto é –2 e a súa suma –1.

Actividades propostas

8. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$

c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$.

9. Escribe unha ecuación de segundo grao cuxas solucións sexan 5 e 9.

10. O perímetro dun rectángulo mide 20 cm e a súa área 24 cm^2. Calcula mentalmente as súas dimensións.

11. Se 3 é unha solución de $x^2 - 7x + a = 0$, canto vale a?

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. OUTROS TIPOS DE ECUACIÓNS

Durante séculos os alxebristas buscaron fórmulas, como a que xa coñeces da ecuación de segundo grao, que resolveran as ecuacións de terceiro grao, de cuarto, de quinto… sen éxito a partir do quinto grao. As fórmulas para resolver as ecuacións de terceiro e cuarto grao son complicadas. Só sabemos resolver de forma sinxela algunhas destas ecuacións.

Exemplo:

- Resolve: $(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-9)\cdot(x-6)=0$.

É unha ecuación **polinómica** de grao cinco, pero ao estar factorizada sabemos resolvela pois para que o produto de varios factores sexa cero, un deles debe valer cero. Igualando a cero cada factor temos que as solucións son 5, 3, –2, 9 e 6.

2.1. Ecuacións bicadradas

Unha **ecuación bicadrada** é unha ecuación da forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

Para resolvela facemos o cambio $x^n=t$, convertándoa así nunha ecuación de segundo grao de doada resolución.

Cando teñamos calculado o valor de t, desfacemos o cambio efectuado, $\boldsymbol{x=\sqrt[n]{t}}$ para obter a solución x.

As ecuacións bicadradas máis comúns son as de cuarto grao.

Exemplo:

- *Para resolver a ecuación bicadrada* $x^4-10x^2+9=0$, facemos o cambio obtendo a ecuación de segundo grao $t^2-10t+9=0$.

Resolvemos esta ecuación de segundo grao:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{10\pm8}{2}$$

$$t_1=\frac{10+8}{2}=9 \quad y \quad t_2=\frac{10-8}{2}=1$$

Desfacemos o cambio para obter os valores de x:

$$Si\ t_1=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3$$

$$Si\ t_2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Actividades resoltas

- *A ecuación* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é unha ecuación polinómica de cuarto grao, pero cunha forma moi especial. É unha ecuación **bicadrada** porque podemos transformala nunha ecuación de segundo grao chamando a x^2 por exemplo, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Unha solución da ecuación de segundo grao é $t = 4$, e a outra é $t = 1$.

Polo tanto se $t = x^2 = 4$, entón $x = 2$ e $x = -2$.

E se $t = x^2 = 1$, entón $x = 1$ e $x = -1$.

A nosa ecuación de cuarto grao ten catro solucións: 2, –2, 1 e –1.

Actividades propostas

12. Resolve as ecuacións seguintes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$.

13. Resolve as seguintes ecuacións bicadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

14. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

2.2. Ecuacións racionais

Se hai incógnitas no denominador, a ecuación denomínase **racional** e resólvese de forma similar, quitando denominadores.

Para resolver ecuacións **racionais**, multiplícanse ambos os membros da ecuación polo mínimo común múltiplo dos denominadores.

Exemplos:

- *Resolve* $\frac{3x-12+9x}{2x} = 4$:

Quitamos denominadores:

$$\frac{3x - 12 + 9x}{2x} = 4 \Rightarrow 3x - 12 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x - 8x = 12 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

- *Para resolver a ecuación racional* $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$, primeiro calculamos o mínimo común múltiplo dos denominadores:

$$\text{m.c.m.}(x - 2, x + 2, x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2).$$

Multiplicamos toda a ecuación polo mínimo común múltiplo, obtendo a nova ecuación:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} + \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2-4} \Rightarrow (x + 2) + (x - 2) = 1.$$

Resolvemos esta ecuación e así obtemos o resultado:

$$(x + 2) + (x - 2) = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

15. Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $\frac{1}{x^2 - x} - \frac{1}{x-1} = 0$ b) $\frac{1}{x-6} + \frac{x}{x-2} = \frac{4}{x^2 - 8x + 12}$ c) $\frac{3}{x} = 1 + \frac{x-13}{6}$.

2.3. Ecuacións radicais

Se hai incógnitas dentro dun radical, a ecuación denomínase **irracional**, e resólvese illando o radical e elevando ao cadrado (ou ao índice do radical). Agora é preciso ter unha precaución, ao elevar ao cadrado, a ecuación obtida non é equivalente, pódense ter engadido solucións. Sempre é conveniente comprobar o resultado pero, neste caso, é necesario.

Unha **ecuación radical ou irracional** é aquela que ten a incógnita baixo o signo da raíz.

Para resolver ecuacións radicais, seguimos os seguintes pasos:

1.- Íllase un radical nun dos dous membros, pasando ao outro membro o resto dos termos, aínda que teñan tamén radicais.

2.- Elévanse ao cadrado os dous membros.

3.- Se quedan máis radicais, vólvese despexar un e elévase ao cadrado, ata que non quede ningún.

4.- Resólvese a ecuación obtida.

5.- Compróbase que a solución é válida.

Exemplo:

- *Imos resolver a ecuación radical* $\sqrt{2x-3} + 1 = x$.

1.- Íllase un radical nun dos dous membros, pasando ao outro membro o resto dos termos:

$$\sqrt{2x-3} + 1 = x \Rightarrow \sqrt{2x-3} = x - 1.$$

2.- Elévanse ao cadrado os dous membros:

$$\sqrt{2x-3} = x - 1 \Rightarrow 2x - 3 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x - 3 = x^2 - 2x + 1.$$

3.- Resólvese a ecuación obtida:

$$2x - 3 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \text{ dobre.}$$

4.- Compróbase que a solución é válida:

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{1} + 1 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Resolve a ecuación radical* $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2$.

1.- Íllase un radical nun dos dous membros, pasando ao outro membro o resto dos termos, aínda que teñan tamén radicais:

$$\sqrt{x+6}=2+\sqrt{x-2}\,.$$

2.- Elévanse ao cadrado os dous membros:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-2}\right)^2\Rightarrow x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2\,.$$

Simplifícase a ecuación obtida:

$$x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2\Rightarrow x+6-4-x+2=4\sqrt{x-2}\Rightarrow 4=4\sqrt{x-2}\,.$$

3.- Volvemos agora ao paso 2 para eliminar a raíz que temos aínda:

$$4=4\sqrt{x-2}\Rightarrow 4^2=\left(4\sqrt{x-2}\right)^2\Rightarrow 16=16(x-2).$$

4.- Resólvese a ecuación obtida:

$$16=16(x-2)\Rightarrow 1=x-2\Rightarrow x=3.$$

5.- Compróbase que a solución é válida:

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2\Rightarrow\sqrt{3+6}-\sqrt{3-2}=2\Rightarrow\sqrt{9}-\sqrt{1}=2\Rightarrow 3-1=2\Rightarrow 2=2.$$

A solución $x = 3$ verifica a ecuación.

Actividades propostas

16. Resolve as seguintes ecuacións irracionais:

a) $\sqrt{5x+4}-1=2x$ b) $\sqrt{x+19}+1=\sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

2.4. Outras ecuacións

Hai tamén ecuacións trigonométricas, logarítmicas, exponenciais. Así, se a incógnita está nun expoñente, a ecuación denomínase **exponencial**. Se podemos expresar os dous membros da ecuación como potencias da mesma base, iguálanse os expoñentes.

Exemplo:

- Resolve: $2^{2x}=\dfrac{1}{16}$

Expresamos a ecuación como potencias dunha mesma base: $2^{2x}=\dfrac{1}{16}\Rightarrow 2^{2x}=2^{-4}$

Igualamos os expoñentes: $2x=-4\Rightarrow x=-2$.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

17. Resolve as ecuacións seguintes:

a) $(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0$.

18. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:

a) $x^4+5x^2-36=0$ b) $x^4-21x^2+12\,100=0$ c) $x^4-45x^2+234=0$ d) $x^4-37x^2+36=0$.

19. Resolve as ecuacións racionais seguintes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$.

20. Resolve as ecuacións irracionais seguintes:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$.

21. Resolve as ecuacións exponenciais seguintes:

a) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ b) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\frac{1}{16}$ c) $2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3}=8$.

3. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

3.1. Concepto de sistema de ecuacións lineais

Recorda que:

Unha **ecuación** con varias incógnitas é unha igualdade que as relaciona.

Por exemplo:

$x^2 + y^2 = 25$, é a ecuación dunha circunferencia de centro a orixe e radio 5.

Un **sistema de ecuacións** é un conxunto de ecuacións con varias incógnitas.

Por exemplo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$$

A primeira ecuación é a dunha circunferencia de centro a orixe e radio 5, e a segunda é a ecuación dunha recta que pasa pola orixe. As solucións do sistema son os puntos de intersección entre a circunferencia e a recta.

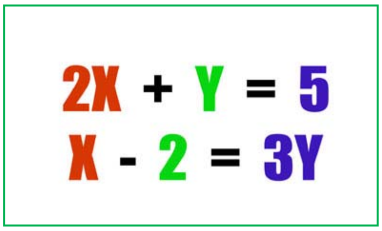
Chámase **solución do sistema** a cada un dos conxuntos de números que verifican todas as ecuacións do sistema.

Dous sistemas son **equivalentes** cando teñen as mesmas solucións.

Un **sistema de ecuacións lineais** con dúas incógnitas pódese expresar da forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

onde a, b, a' e b' son números reais que se denominan **coeficientes** e c e c' tamén son números reais chamados **termos independentes**.



Chamamos **solución** do sistema ao par de valores (x, y) que satisfán as dúas ecuacións do sistema.

Dise que dous sistemas de ecuacións son **equivalentes**, cando teñen a mesma solución.

Exemplo:

- *Son sistemas de ecuacións lineais, por exemplo:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

Exemplo:

- ***Non** é un sistema lineal* $\begin{cases} 9xy + 2y = 5 \\ 3x - xy = 4 \end{cases}$ porque ten termos en xy, aínda que é un sistema de dúas ecuacións.

Tampouco o é $\begin{cases} 5x^2 + 9y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ porque ten un termo en x^2, aínda que tamén é un sistema de dúas ecuacións.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

22. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

3.2. Clasificación de sistemas de ecuacións

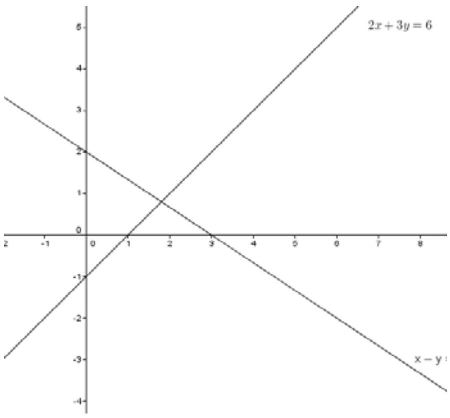
Recorda que:

Nun sistema de ecuacións lineais con dúas incógnitas, cada unha das ecuacións representa unha recta no plano. Estas rectas poden estar posicionadas entre si de tres maneiras distintas, o que nos axudará a clasificar o noso sistema en:

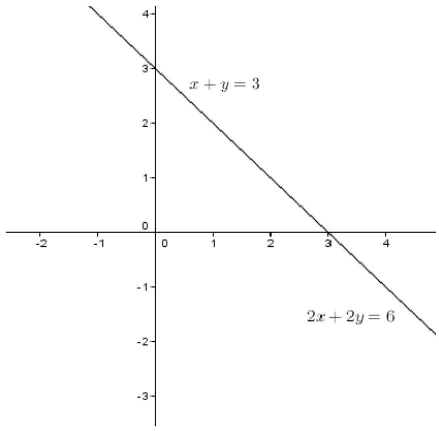
1) **Compatible determinado**: o sistema ten unha única solución, polo que as nosas rectas son **SECANTES.**

2) **Compatible indeterminado**: o sistema ten infinitas solucións, polo que as rectas son **COINCIDENTES.**

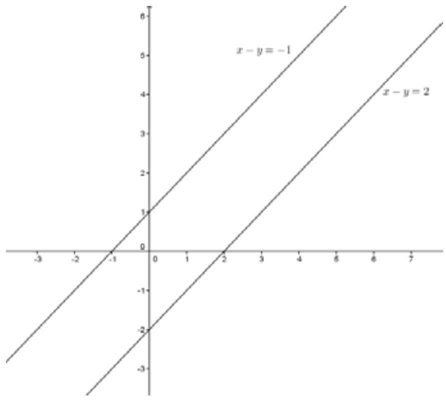
3) **Incompatible**: o sistema non ten solución, polo que as rectas son **PARALELAS.**



Compatible determinado



Compatible indeterminado



Incompatible

Actividades resoltas

- *Engade unha ecuación ax* – 2*y* = 2 para que o sistema resultante sexa:

  a) Compatible determinado.

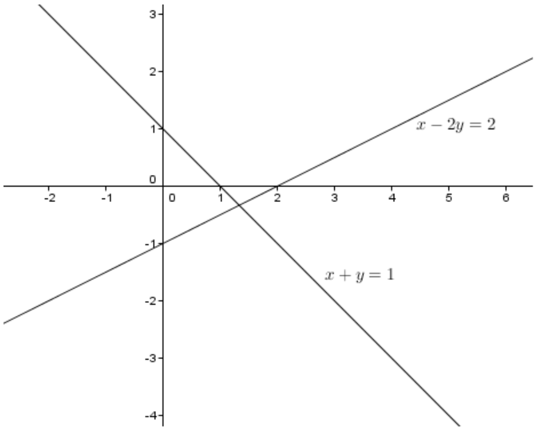
  b) Incompatible.

  c) Compatible indeterminado.

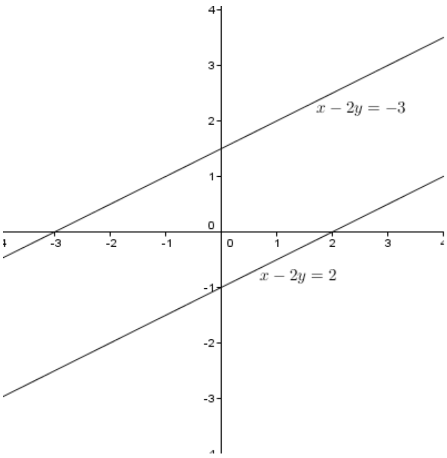
Solución:

a) Para que o sistema sexa compatible determinado, engadiremos unha ecuación que non teña os mesmos coeficientes que a que nos dá o exercicio. Por exemplo, x + e = 1.

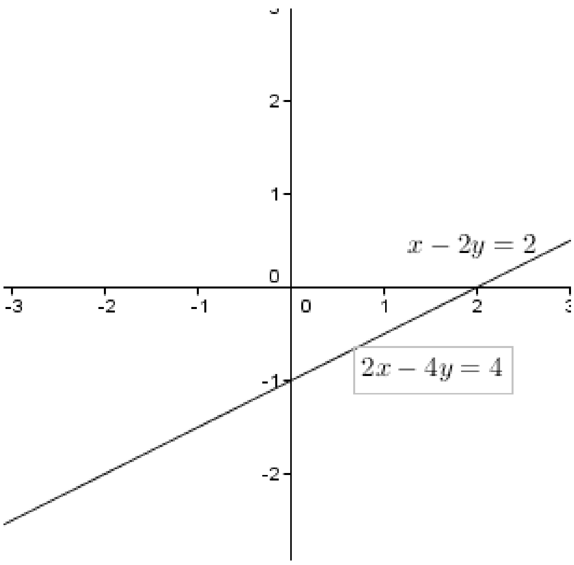
Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



b) Para que sexa incompatible, os coeficientes teñen que ser os mesmos pero ter diferente termo independente. Por exemplo $x - 2y = -3$.



c) Para que sexa compatible indeterminado, poñeremos unha ecuación proporcional á que temos. Por exemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propostas

23. Representa os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -y + 3x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 9y = 9 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

24. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

25. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -3x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -2y + x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

3.3. Resolución de sistemas polo método de substitución

Recorda que:

O **método de substitución** consiste en despexar unha incógnita dunha das ecuacións do sistema e substituír a expresión obtida na outra ecuación. Así, obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, obtemos o valor da outra incógnita.

Exemplo:

- *Imos resolver o sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ *polo método de substitución:*

Despexamos *x* da segunda ecuación: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$ e substituímolo na primeira:

$$\begin{cases} 2(4 - 2y) - 3y = 1 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 4y - 3y = 1 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y - 3y = 1 - 8 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y = -7 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*: $x = 4 - 2y \Rightarrow x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.

A solución é: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Comprobamos: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2 \cdot 1 = 4 \end{cases}$.

Actividades propostas

26. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

27. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 26 \\ 3x + y = 24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Resolución de sistemas polo método de igualación

Recorda que:

O **método de igualación** consiste en despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema e igualar os resultados obtidos. Así, obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, calculamos o valor da outra incógnita.

Exemplo:

- *Imos resolver o sistema* $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ *polo método de igualación:*

Despexamos a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ x=4-2y \end{cases}.$$

Igualamos agora os resultados obtidos e resolvemos a ecuación resultante:

$$\begin{cases} \dfrac{3y+1}{2}=4-2y \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+1=8-4y \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y+4y=8-1 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=7 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4-2y \end{cases}.$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*: $\begin{cases} y=1 \\ x=4-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=4-2\cdot 1=2 \end{cases}.$

A solución é: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}.$

Actividades propostas

28. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} x+y=11 \\ -x+3y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5y=4 \\ 2x+7y=-11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-3y=5 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$

29. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+5y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-2y=7 \\ x+3y=8 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.5. Resolución de sistemas polo método de redución

Recorda que:

O **método de redución** consiste en eliminar unha das incógnitas sumando as dúas ecuacións. Para iso multiplícanse unha ou ambas as dúas ecuacións por un número de modo que os coeficientes de *x* ou e sexan iguais pero de signo contrario.

Exemplo:

- *Imos resolver o sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ *polo método de redución:*

Multiplicamos a segunda ecuación por –2 para que os coeficientes do *x* sexan iguais pero de signo contrario e sumamos as ecuacións obtidas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-2)]{} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x - 4y = -8 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -7y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$\begin{cases} 2x - 3\cdot(1) = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{2} = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

A solución é: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2\cdot 1 = 4 \end{cases}$.

Actividades propostas

30. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - 5y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

31. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

5. SISTEMAS DE ECUACIÓNS NON LINEAIS

5.1. Concepto de sistema de ecuacións non lineais

Un **sistema de ecuacións é non lineal** cando polo menos unha das súas ecuacións non é de primeiro grao:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Onde *a, b, a'* e *b'* son números reais que se denominan **coeficientes** e *c* e *c'* tamén son números reais chamados **termos independentes**.

Chamamos **solución** do sistema ao par (*x, y*) de valores que satisfán as dúas ecuacións do sistema.

Exemplo:

- *Son sistemas de ecuacións non lineais, por exemplo:*

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

Actividades propostas

32. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

5.2. Resolución de sistemas de ecuacións non lineais

A resolución deste tipo de sistemas soe facerse polo método de **substitución** mediante os seguintes pasos:

1.- Despéxase unha incógnita dunha das ecuacións, a ser posible da de primeiro grao.

2.- Substitúese a incógnita despexada na outra ecuación.

3.- Resólvese a ecuación resultante.

4.- Cada un dos valores obtidos substitúese na outra ecuación, obtéñense así os valores correspondentes da outra incógnita.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Imos resolver o sistema non lineal* $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$

1.- Despéxase unha incógnita dunha das ecuacións, a ser posible da de primeiro grao:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

2.- Substitúese a incógnita despexada na outra ecuación:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

3.- Resólvese a ecuación resultante:

$$\begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+49-14x+x^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+24=0 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 2}{4}\Rightarrow x_1=4 \wedge x_2=3.$$

4.- Cada un dos valores obtidos substitúese na outra ecuación, obténense así os valores correspondentes da outra incógnita:

Se $x = 3$, $y = 7 - 3 = 4$

Se $x = 4$, $y = 7 - 4 = 3$

As solucións son **(3, 4)** e **(4, 3)**.

5.- *Comprobación*:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2+4^2=9+16=25 \\ 3+4=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2+3^2=16+9=25 \\ 4+3=7 \end{cases}$$

Actividades propostas

33. Resolve os seguintes sistemas non lineais:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

34. Resolve os seguintes sistemas e comproba graficamente as solucións:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{matrix}\right\}$

35. A traxectoria dun proxectil é unha parábola de ecuación: e = $-x^2 + 5x$, e a traxectoria dun avión é unha recta de ecuación: e = $3x$. En que puntos coinciden ambas as traxectorias? Representa graficamente a recta e a parábola para comprobar o resultado.

36. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Axuda*: Utiliza o método de redución:

c) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{matrix}\right\}$

5.3. Sistemas de ecuacións lineais de máis de dúas incógnitas

A mellor forma de resolver sistemas lineais de máis de dúas incógnitas é ir substituíndo o sistema por outro equivalente de forma que cada vez se consiga que sexan cero os coeficientes de máis incógnitas. Este procedemento denomínase ***Método de Gauss***.

Actividades resoltas

Para resolver o sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, deixamos a primeira ecuación sen modificar. Queremos que a segunda ecuación teña un cero como coeficiente do "*x*", para iso multiplicámola por 2 e restámoslle a primeira. Para que a terceira ecuación teña un cero como coeficiente do "*x*", multiplicámola por 2 e restámoslle a primeira:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Agora podemos resolver o sistema de dúas ecuacións e dúas incógnitas formado polas dúas últimas ecuacións, ou continuar co noso procedemento. Para conseguir que na terceira ecuación o coeficiente

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

do "y" sexa un cero multiplicamos a terceira ecuación por 3 e a segunda por 7 e restámolas:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 38z = 38 \end{cases}$$

e agora xa podemos despexar cada unha das incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + z = \frac{38}{38} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1) - 3(1) = 0 \\ 3y + 5(1) = 8 \rightarrow y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Actividades propostas

37. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. Resolución de problemas mediante ecuacións de 2º grao

Para resolver problemas por medio de ecuacións de 2º grao, primeiro teremos que pasar á linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar a incógnita.

3.- Traducir o enunciado á linguaxe alxébrica.

4.- Propor a ecuación e resolvela.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *Cal é o número natural cuxo quíntuplo aumentado en 6 unidades é igual ao seu cadrado?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos a incógnita, que neste caso, é o número que estamos buscando.

2.- Número buscado = ***x***

3.- Traducimos agora o problema á linguaxe alxébrica:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos a ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como o enunciado di "número natural" o número buscado é o 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propostas

38. Que número multiplicado por 4 é 5 unidades menor có seu cadrado?

39. Nunha clase deciden que todos van enviar unha carta ao resto de compañeiros. Un di: Imos escribir 380 cartas! Calcula o número de alumnos que hai na clase.

40. Calcula tres números consecutivos tales que a suma dos seus cadrados sexa 365.

41. Unha fotografía rectangular mide 14 cm de base e 10 cm de altura. Arredor da foto hai unha marxe de igual anchura para a base que para a altura. Calcula o ancho da marxe, sabendo que a área total da foto e a marxe é de 252 cm^2.

42. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Cal é o número?

43. Un triángulo isósceles ten un perímetro de 20 cm e a base mide 4 cm, calcula os lados do triángulo e a súa área.

44. Unha folla de papel cadrada dóbrase pola metade. O rectángulo resultante ten unha área de 8 cm^2. Cal é o perímetro deste rectángulo?

45. Un pai di: "O produto da idade do meu fillo hai 5 anos polo da súa idade hai 3 anos é a miña idade actual, que son 35 anos". Calcula a idade do fillo.

46. Calcula as dimensións do rectángulo cuxa área é 21 m^2, sabendo que os seus lados se diferencian en 4 metros.

47. Nun triángulo rectángulo o cateto maior mide 4 cm menos que a hipotenusa e 4 cm máis que o outro cateto. Canto miden os lados do triángulo?

48. Calcula dous números pares consecutivos cuxo produto sexa 224.

49. Calcula tres números impares consecutivos tales que se ao cadrado do maior se lle restan os cadrados dos outros dous se obtén como resultado 15.

3.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuacións, primeiro teremos que pasar a linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar as incógnitas.

3.- Traducir o enunciado a linguaxe alxébrica.

4.- Propor o sistema e resolvelo.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *A suma das idades dun pai e do seu fillo é 39 e a súa diferenza 25. Cal é a idade de cada un?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos as incógnitas que, neste caso, son a idade do pai e o fillo.

2.- Idade do pai = x

Idade do fillo = y

3.- Pasamos o enunciado á linguaxe alxébrica:

A suma das súas idades é 39:

$$x + y = 39$$

E a súa diferenza 25:

$$x - y = 25$$

4.- Propomos o sistema e resolvémolo polo método que nos resulte máis sinxelo. Neste caso, facémolo por redución:

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} \begin{cases} x + y = 39 \\ 2x + 0 = 64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: o pai ten 32 anos e o fillo ten 7 anos.

5.- *Comprobación:* En efecto, a suma das idades é 32 + 7 = 39 e a diferenza é 32 – 7 = 25.

Actividades propostas

50. A suma das idades de María e Afonso son 65 anos. A idade de Afonso menos a metade da idade de María é igual a **35**. Que idade ten cada un?

51. A suma das idades de Mariló e Xabier é 32 anos. Dentro de 7 anos, a idade de Xabier será igual á idade de Mariló máis 20 anos. Que idade ten cada un na actualidade?

52. Encontra dous números cuxa diferenza sexa 24 e a súa suma sexa 104.

53. Un hotel ten 42 habitacións (individuais e dobres) e 62 camas, cantas habitacións ten de cada tipo?

54. Nun triángulo rectángulo a hipotenusa mide 10 cm e as lonxitudes dos seus dous catetos suman 14 cm. Calcula a área do triángulo.

55. Neves pregúntalle a Míriam polas súas cualificacións en Matemáticas e en Lingua. Míriam dille "A suma das miñas cualificacións é 19 e o produto 90". Neves dálle os parabéns. Que cualificacións obtivo?

56. Dun número de tres cifras sábese que suman 12, que a suma dos seus cadrados é 61, e que a cifra das decenas é igual á das centenas máis 1. Que número é?

57. Hai tres zumes compostos do seguinte modo:

O primeiro de 40 dl de laranxa, 50 dl de limón e 90 dl de pomelo.

O segundo de 30 dl de laranxa, 30 dl de limón e 50 dl de pomelo.

O terceiro de 20 dl de laranxa, 40 dl de limón e 40 dl de pomelo.

Que volume haberá tomarse de cada un dos zumes anteriores para formar un novo zume de 34 dl de laranxa, 46 dl de limón e 67 dl de pomelo.

58. Véndense tres especies de cereais: trigo, cebada e millo. Cada kg de trigo véndese por 2 €, o da cebada por 1 € e o de millo por 0.5 €. Se se venden 200 kg en total e se obtén pola venda 300 €, cantos volumes de cada cereal se venderon?

59. Deséxase mesturar fariña de 2 €/kg con fariña de 1 €/kg para obter unha mestura de 1,2 €/kg. Cantos kg deberemos poñer de cada prezo para obter 300 kg de mestura?

60. Nunha tenda hai dous tipos de xoguetes, os de tipo A que utilizan 2 pilas e os de tipo B que utilizan 5 pilas. Se en total na tenda hai 30 xoguetes e 120 pilas, cantos xoguetes hai de cada tipo?

61. Un peón sae dunha cidade A e diríxese a unha cidade B que está a 15 km de distancia a unha velocidade de 4 km/h e, no mesmo momento, sae un ciclista da cidade B a unha velocidade de 16 km/h e diríxese cara a A. Canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de B se cruzan?

CURIOSIDADES. REVISTA

O número de ouro está en todas as partes

Coñeces un número irracional cuxa parte decimal sexa igual á do seu cadrado?

Para encontralo debemos resolver a ecuación: $x^2 = x + n$, onde n sexa un número enteiro. Imaxinemos que n sexa igual a 1, entón:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} 1.618033988749... \\ -0.618033988749... \end{cases}$$

O número de ouro!

Coñeces un número cuxa parte decimal sexa igual á do seu inverso?

Propomos de novo a ecuación: $1/x = x + n$, onde n sexa un número enteiro. Imaxinemos que n sexa igual a –1, entón:

$$1/x = x - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Temos a mesma ecuación de antes! A solución volve ser o número de ouro!

O número de ouro, Φ, está en todas as partes! Xa o encontraramos na pintura, arquitectura, escultura e na propia natureza. Agora atopámolo nas ecuacións.

O romanesco é un coñecido exemplo de fractal. Cada un dos seus anaquiños é similar ao completo, cun cambio de escala. Tamén está relacionado co número de ouro e coa sucesión de *Fibonacci*. Se contamos as espirais que se forman son dous números sucesivos da sucesión de *Fibonacci*, cara á dereita son 8 e cara á esquerda son 13. Recorda, a sucesión é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13….

Saberías calcular $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$? Hai infinitas raíces cadradas encadeadas. Como se a infinito lle sumo 1 non varía, unha forma de atopar o seu valor é volver substituír x na igualdade: $x = \sqrt{1+x}$ e resolver a ecuación:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$$

Saberías calcular $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$? é unha fracción continua. Hai infinitas fraccións encadeadas. Para calculala de novo substituímos x: $x = 1 + \frac{1}{x}$ e resolvemos a ecuación: $x^2 = x + 1$ que xa sabemos que a súa solución positiva é Φ.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Obtención da fórmula para resolver ecuacións de segundo grao

$$ax^2 + bx + c = 0,\ \text{con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$\Downarrow$ Multiplicamos por $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$\Downarrow$ Sumamos b^2

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$\Downarrow$ Completamos cadrados

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$\Downarrow$ Calculamos a raíz cadrada

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$\Downarrow$Despexamos o x

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuacións de segundo grao interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación aparece ao aplicarlle o Teorema de *Pitágoras* a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguais a 1, ou ao calcular a diagonal dun cadrado de lado 1. A súa solución é a lonxitude da hipotenusa ou da diagonal. Ten de interesante que se demostra que esta solución non é un número racional, un número que poida escribirse como cociente de dous números enteiros.

$x + 1 = x^2$

Tamén se pode escribir como: $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{x}{1}$ que é unha proporción, onde x toma o valor $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\approx$ 1,618… que é o número de ouro, outro número irracional.

$x^2 = -1$

A terceira ecuación non ten solución real. Ningún número real ao elevalo ao cadrado pode dar un número negativo, pero, se ampliamos o campo real coa súa raíz, $\sqrt{-1} = i$, resulta que xa todas as ecuacións de segundo grao teñen solución. Aos números $a + b\cdot i$ chámaselles **números complexos**.

Emmy Noether foi unha matemática alemá de orixe xudía cuxos traballos en Álxebra permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

Problemas

Algúns problemas de inxenio que se resolven (ou non) por ecuacións ou sistemas.

Os cocos

Tres mariñeiros e un mono recollen cocos. Antes de repartilos dormen. Pola noite un mariñeiro reparte o montón de cocos en tres partes iguais, sóbralle un que lle dá ao mono, e garda a súa parte. Un segundo mariñeiro fai a mesma operación, sóbralle tamén un e garda a súa parte. O mesmo fai o terceiro mariñeiro. Á mañá seguinte reparten os cocos e agora o reparto é exacto. Cantos cocos había?

A piscina

A piscina do polideportivo municipal tivo que ser baleirada por un problema de contaminación. Este proceso realizouse en tres fases para poder utilizar a auga na limpeza das instalacións. Primeiro sacouse a terceira parte, despois a metade do resto e aínda quedan 150 m^3 de auga. Que capacidade ten a piscina?

Axuda: non formules unha ecuación. Fai un diagrama.

As perlas do raxá

Un raxá deixoulles ás súas fillas certo número de perlas e determinou que o reparto se fixese do seguinte modo: a filla maior tomaría unha perla e un sétimo do que quedara. A segunda filla recibiría dúas perlas e un sétimo do que restase. A terceira moza recibiría tres perlas e un sétimo do que quedara. E así sucesivamente. Feita a división, cada unha das irmás recibiu o mesmo número de perlas. Cantas perlas había? Cantas fillas tiña o raxá?

A invitación

Xoán convida a Marta e a Helena a merendar. Prepara unha limoada e diponse a servila. Marta quérea con pouco limón e Helena con moito. Xoán puxo o zume de limón e a auga en xarras iguais e coa mesma cantidade. Para compracer ás súas convidadas toma un vaso da xarra con limón e bótao na da auga, e a continuación toma un vaso do mesmo tamaño da mestura e bótao na do limón. Haberá máis limón na xarra da auga ou auga na xarra do limón?

Axuda: Este problema é moi antigo. Parece de ecuacións pero así é moi difícil. Aínda que pensando un pouco, resulta moi sinxelo.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Ecuación de segundo grao	É unha ecuación alxébrica na que a maior potencia da incógnita é 2. Ten a forma: $ax^2 + bx + c = 0$ onde *a, b e c* son números reais, con $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolución de ecuacións de segundo grao completas	Úsase a fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$
Número de solucións dunha ecuación de segundo grao	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ten dúas solucións reais e distintas Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ten unha solución dobre. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten solución.	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, ten dúas solucións 4 e -1. $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, ten unha raíz dobre: $x = 2$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$, non ten solución real.
Resolución de ecuacións de segundo grao incompletas	Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$. Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = \mathbf{0}$ e $x = \dfrac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
Suma e produto de raíces	$x_1\, x_2 = \dfrac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$; $x_2 = 2$.
Sistema de ecuacións lineais	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: unha única solución, o punto de intersección. As rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas solucións, polo que as rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: non ten solución, as rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Substitución:** despexar unha incógnita e substituír na outra ecuación. **Igualación:** despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións. **Redución:** sumar as dúas ecuacións, multiplicándoas por números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ecuacións de segundo grao

1. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ b) $x(-5 + x) = 3$ c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$ e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$ f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$

g) $(3x + 2) \cdot (4x - 2) = -6x - 2$ h) $x \cdot (x + 13) = 168$ i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$

2. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao con denominadores:

a) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x+2}{4} = 5$ b) $\frac{x^2-5}{2} + \frac{2x^2-3x+7}{2} = 5$ c) $\frac{2x^2+1}{5} + \frac{x+3}{10} = 1$

d) $\frac{2-2x^2}{3} + \frac{4x-3}{2} = \frac{5}{6}$ e) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{5x-9}{6} = 4x-3$ f) $\frac{2x+3x^2}{7} - \frac{3x-8}{14} = 1$

3. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoriza as ecuacións do problema anterior. Así, se as solucións son 2 e 3, escribe:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$. Observa que se o coeficiente de x^2 fose distinto de 1 os factores teñen que estar multiplicados por este coeficiente.

5. Cando o coeficiente b é par (b = 2B), podes simplificar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2-4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2-ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta dicir $x = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$, logo as súas solucións son 6 e 2. Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - \mathbf{7} = 0$ c) $x^2 + 4x - \mathbf{5} = 0$

6. Resolve mentalmente as ecuacións seguintes, logo desenvolve as expresións e utiliza a fórmula xeral para volver resolvelas.

a) $(x - 2) \cdot (x - 5) = 0$ b) $(x + 1) \cdot (x - 6) = 0$ c) $(x - 3) \cdot (x - 5) = 0$

d) $(x - 4) \cdot (x + 7) = 0$ e) $(x + 8) \cdot (x - 9) = 0$ f) $(x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

7. Determina o número de solucións reais que teñen as seguintes ecuacións de segundo grao calculando o seu discriminante, e logo resólveas.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$ f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escribe tres ecuacións de segundo grao que non teñan ningunha solución real. *Axuda*: Utiliza o discriminante.

9. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan unha solución dobre.

10. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan dúas solucións reais e distintas.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

11. Resolve as seguintes ecuacións polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$ c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

12. Resolve as seguintes ecuacións aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

13. Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$ b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$ c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$ d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$ f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$ g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$ i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$ j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$

14. Resolve as seguintes ecuacións irracionais:

a) $x = -2 + \sqrt{5 + 4x^2}$ b) $\sqrt{16 - x} = x - 4$ c) $5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 2x$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x - 2} = 5$ e) $\sqrt{1 - x} - \sqrt{x + 1} + 2 = 0$ f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$

g) $5\sqrt{x - 2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x + 1}}$ h) $\sqrt{x - 2} - \frac{1}{\sqrt{x - 2}} = 2$ i) $\sqrt{x + 1} + \frac{1}{\sqrt{x - 2}} = 3$

15. Resolve as ecuacións seguintes: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ b) $2^{2x} = \frac{1}{1024}$

Sistemas lineais de ecuacións

16. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

17. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$

18. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ -x - 6y = -14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -5x + 2y = -9 \end{cases}$

19. Resolve de forma gráfica os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -7x + 5y = 3 \end{cases}$

20. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{5} - \dfrac{3y-1}{2} = -1 \\ \dfrac{3x+1}{2} + \dfrac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} - \dfrac{5y+7}{6} = -2 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{5x+1}{2} + \dfrac{2y-5}{3} = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

21. Copia no teu caderno e completa os seguintes sistemas incompletos de forma que se cumpra o que se pide en cada un:

Compatible indeterminado — Incompatible — A súa solución sexa *x* = 2 e e = 1

a) $\begin{cases} (\ )x + 2y = (\ ) \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ (\ )x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = (\ ) \\ (\ )x + 2y = 8 \end{cases}$

Incompatible — A súa solución sexa *x* = –1 e e = 1 — Compatible indeterminado

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x + (\ )y = (\ ) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + (\ )y = -1 \\ (\ )x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (\ )x + 8y = (\ ) \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

22. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación e comproba a solución graficamente. De que tipo é cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x + 6y = 4 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Problemas

23. Nunha tenda alugan bicicletas e triciclos. Se teñen 30 vehículos cun total de 80 rodas, cantas bicicletas e cantos triciclos teñen?

24. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 12 lle faltan 64 unidades para completar o seu cadrado?

25. Descompón 12 en dous factores cuxa suma sexa 7.

26. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 616. Que número é?

27. A suma dos cadrados de dous números impares consecutivos é 130. Determina estes números.

28. Van cargados un asno e un macho. O asno queixábase do peso que levaba enriba. O macho contestoulle: se eu levara un dos teus sacos, levaría o dobre de carga ca ti pero se ti tomas un dos meus, os dous levaremos igual carga. Cantos sacos leva cada un?

29. Que número multiplicado por 3 é 28 unidades menor có seu cadrado?

30. Calcula tres números consecutivos cuxa suma de cadrados é 110.

31. Dentro de 2 anos, a idade de Raquel será a metade do cadrado da idade que tiña hai 10 anos. Que idade ten Raquel?

32. Dous números diferéncianse en 3 unidades e a suma dos seus cadrados é 185. Cales son estes números?

33. A suma de dous números é 2 e o seu produto é –80, de que números se trata?

34. María quere formar bandexas dun quilogramo con caramelos e bombóns. Se os caramelos lle custan a 3 euros o quilo e os bombóns a 7 euros o quilo, e quere que o prezo de cada bandexa sexa de 5

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

euros, que cantidade deberá poñer de cada produto? Se quere formar 100 bandexas, que cantidade de caramelos e de bombóns vai precisar?

35. Determina os catetos dun triángulo rectángulo cuxa suma é 17 cm e a hipotenusa mide 13 cm.

36. O produto de dous números é 6 e a suma dos seus cadrados 13. Calcula estes números.

37. A suma de dous números é 12. O dobre do primeiro máis o triplo do segundo é 31. De que números se trata?

38. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 80 rodas, cantos coches e motos hai no garaxe?

39. A idade actual de Luís é o dobre da de Míriam. Dentro de 10 anos, as súas idades sumarán 50. Cantos anos teñen actualmente Luís e Míriam?

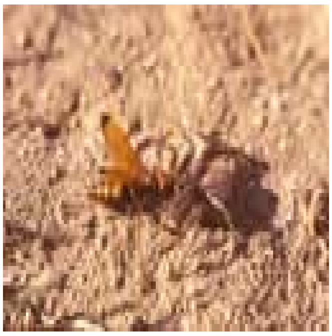
40. Na miña clase hai 25 persoas. Regaláronnos a cada rapaza 3 adhesivos e a cada rapaz 2 chapas. Se en total había 65 regalos. Cantos rapaces e rapazas somos na clase?

41. Entre o meu avó e o meu irmán teñen 80 anos. Se o meu avó ten 50 anos máis có meu irmán, que idade ten cada un?

42. Tres bocadillos e un refresco custan 8 €. Catro bocadillos e dous refrescos custan 12 €. Cal é o prezo do bocadillo e do refresco?

43. Nunha granxa hai galiñas e ovellas. Se se contan as cabezas, son 40. Se se contan as patas, son 100. Cantas galiñas e ovellas hai na granxa?

44. Un rectángulo ten un perímetro de 180 metros. Se o longo é 10 metros maior có ancho, cales son as dimensións do rectángulo?



45. Nun moedeiro hai billetes de 5 € e 10 €. Se en total hai 10 billetes e 75€, cantos billetes de cada valor hai no moedeiro?

46. Nunha pelexa entre arañas e avespas, hai 13 cabezas e 90 patas. Sabendo que unha araña ten 8 patas e unha avespa 6, cantas avespas e arañas hai na pelexa?

47. Unha clase ten 30 estudantes e o número de alumnas é o dobre do de alumnos. Cantos rapaces e rapazas hai?

48. Neves ten 8 anos máis có seu irmán Daniel, e a súa nai ten 50 anos. Dentro de 2 anos a idade da nai será o dobre da suma das idades dos seus fillos, que idades teñen?

49. Mestúranse 18 kg de arroz de 1.3 € o quilogramo con 24 kg de arroz de prezo descoñecido, resultando o prezo da mestura de 1.7 € o kg. Que prezo tiña o segundo arroz?

50. A altura dun trapecio isósceles é de 3 cm, o perímetro, 28 cm, e os lados inclinados son iguais á base menor. Calcula a área do trapecio.

51. Dous autobuses saen, un desde Madrid e o outro desde Cáceres ás 9 da mañá. Un vai a 80 km/h e o outro a 100 km/h. A que hora se cruzan? A cantos km de Madrid estarán?

52. Nun concurso gáñanse 40 euros por cada resposta acertada e pérdense 80 por cada erro. Despois de 10 preguntas, Carmela leva gañados 280 euros. Cantas preguntas acertou?

53. Paco comprou 5 zumes e 4 batidos por 5.7 €, logo comprou 7 zumes e 5 batidos e custáronlle 7.8 €. Calcula os prezos de ambas as cousas.

54. Que fracción é igual a 1 cando se suma 1 ao numerador e é igual a 1/2 se se suma 2 ao denominador?

55. O cociente dunha división é 2 e o resto é 1. Se o divisor diminúe en 1 unidade, o cociente aumenta en 1 e o resto novo é 1. Calcular o dividendo e o divisor.

56. Dúas amigas foron pescar. Ao final do día unha dixo: "Se ti me dás un dos teus peixes, entón eu terei o dobre ca ti". A outra respondeulle: "Se ti me dás un dos teus peixes, eu terei o mesmo número de peixes ca ti". Cantos peixes tiña cada unha?

57. Calcula as dimensións dun rectángulo sabendo que a súa área é 35 cm^2 e o perímetro, 24 cm.

58. Un peón sae dunha cidade "A" a unha velocidade de 4 km/h, e diríxese a unha cidade "B" que está a 20 km da cidade "A". 30 minutos despois sae un ciclista da cidade "B" a unha velocidade de 20 km/h e diríxese cara a "A". Canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de "B" se cruzan?

59. Deséxase mesturar un aceite de 2,7 €/l con outro aceite de 3,6 €/l de modo que a mestura resulte a 3 €/l. Cantos litros de cada clase deben mesturarse para obter 100 litros da mestura?

60. Ao intercambiar as cifras dun número de dúas cifras obtense outro que é 45 unidades maior. Calcula o número inicial.

61. A diagonal dun rectángulo mide 25 cm e o perímetro 70 cm. Calcula os lados do rectángulo.

62. Un balado rodea un terreo rectangular de 300 m^2. Se o balado mide 70 metros, calcula as dimensións do terreo.

63. Varios amigos van facer un agasallo de vodas que custa 800 euros, que pagarán a partes iguais. A última hora apúntanse seis amigos máis, co que cada un toca a 30 euros menos. Cantos amigos eran inicialmente? Canto pagará ao final cada un?

64. As diagonais dun rombo diferéncianse en 2 cm e a súa área é de 24 cm^2. Calcula o seu perímetro.

65. Un tren sae de Barcelona cara a Madrid a unha velocidade de 200 km/h. Unha hora máis tarde sae outro tren de Madrid cara a Barcelona a 220 km/h; a distancia entre as dúas cidades é de 618 km. Ao cabo de canto tempo se cruzan os dous trens? A que distancia de Barcelona?

66. Un coche sae dunha cidade "A" a unha velocidade de 100 km/h e 30 minutos máis tarde outro coche sae de "A" na mesma dirección e sentido a unha velocidade de 120 km/h. Canto tempo tardará o segundo en alcanzar ao primeiro e a que distancia de "A" se produce o encontro?

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. A solución da ecuación $2(x-3)-3(x^2-4)=1$ é:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. As solucións da ecuación $80 = x(x-2)$ son:

a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. As solucións da ecuación $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{x^2}{3}$ son:

a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. As solucións da ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

5. As rectas que forman o sistema $\begin{cases} 7x + 21y = 14 \\ 2x + 6y = 4 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Crúzanse

6. A solución do sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -2x + 3y = 2 \end{cases}$ é:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 2$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) non ten solución

7. A solución do sistema $\begin{cases} 3 + 2x = x - 1 + y \\ 2x - 9y = -43 \end{cases}$ é:

a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$ c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

8. A solución do sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -2x + 3y + z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \end{cases}$ é:

a) $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ b) $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ c) $x = -1$, $y = -2$, $z = -3$ d) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

9. Nunha granxa, entre galiñas e vacas hai 120 animais e 280 patas. Cantas galiñas e vacas hai na granxa?

a) 90 galiñas e 30 vacas b) 100 galiñas e 20 vacas c) 80 galiñas e 40 vacas

10. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 5, lle faltan 234 unidades para chegar ao seu cadrado?

a) 18 anos b) 20 anos c) 25 anos d) 28 anos