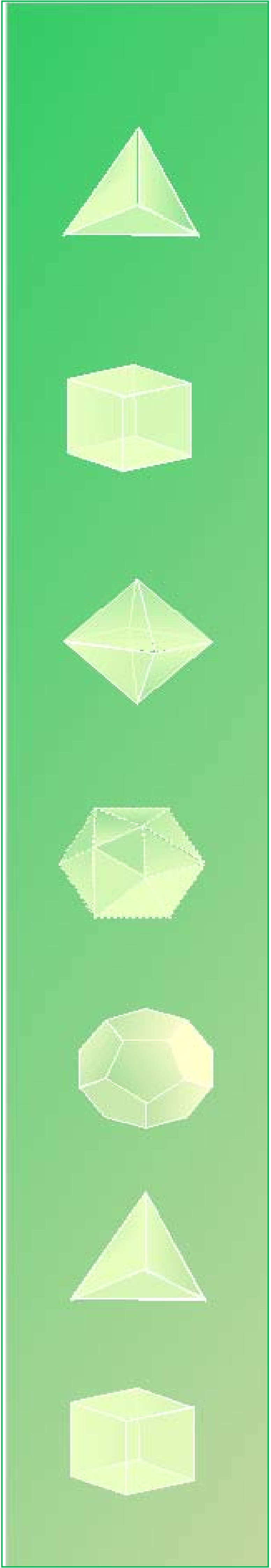


Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

3º A da ESO
Capítulo 4:
Expresións alxébricas. Polinomios

Propiedad Intelectual
El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-045268
Fecha y hora de registro: 2014-06-10 18:04:38.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa
Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.
Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Revisor: Javier Rodrigo
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
ecommons.wikimedia

Índice

Resumo

Segundo avanzamos nos nosos estudos vanse ampliando os nosos coñecementos, en particular os de Matemáticas. Isto non se debe a ningún tipo de capricho, todo o contrario: ao longo da historia as Matemáticas desenvólvense empuxadas polas necesidades das persoas. É indubidable a conveniencia de que unha persoa teña soltura cos números e as súas operacións básicas: suma, resta, multiplicación e división. Por soltura non debe entenderse que se saiba de memoria "todas" as táboas de multiplicar, senón que sexa consciente do que significa realizar unha operación concreta, que sexa capaz de dar resposta a preguntas cotiás que se resolven *operando* adecuadamente os datos dispoñibles. Para ese propósito é útil fomentar a nosa capacidade de abstracción; ela permítenos recoñecer como equivalentes situacións en aparencia moi afastadas. Neste capítulo vaise dar un paso nese sentido ao manipular, manexar, datos numéricos non concretados, non coñecidos, a través de indeterminadas ou variables. Desa maneira aparecerán as expresións alxébricas e, dentro delas, unhas expresións particulares de abundante uso e simplicidade de exposición, os polinomios.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

1.1. Introdución

Non é preciso imaxinar situacións rebuscadas para que, á hora de realizar un razoamento, nos atopemos con algunha das catro operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación ou división.

Exemplos:

- O pai, a nai e o fillo foron ao cine e as entradas custaron 27 euros. Para calcular o prezo de cada entrada divídese entre 3 : 27/ 3 = 9 euros.
- Se imos comprar pastas de té e o prezo dun quilogramo é de 18.3 euros, resulta habitual que, segundo vai a dependenta introducindo pastas nunha bandexa, imos vendo o importe final. Para iso se a bandexa está sobre unha balanza, executamos a operación 18.3 · *x* onde *x* é a cantidade de quilogramos que nos indica a balanza. Despois de cada pesada, o resultado desa multiplicación reflicte o importe das pastas que, nese momento, contén a bandexa.

- Supoñamos que temos un contrato cunha compañía de telefonía móbil polo que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecemento de chamada. Con esa tarifa, unha chamada de 3 minutos custaranos:

$$(0.05 \cdot 3) + 0.12 = 0.15 + 0.12 = 0.27 \text{ euros.}$$

Pero cal é o prezo dunha chamada calquera? Como descoñecemos a súa duración, encontrámonos cunha cantidade non determinada, ou indeterminada, polo que en calquera resposta que deamos á pregunta anterior se apreciará a ausencia dese dato concreto. Podemos dicir que o custe dunha chamada calquera é

$$(0.05 \cdot x) + 0.12 = 0.05 \cdot x + 0.12 \text{ euros}$$

onde x sinala a súa duración, en minutos.

Actividades propostas

1. A finais de cada mes a empresa de telefonía móbil proporciónanos a factura mensual. Nela aparece moita información, en particular, o número total de chamadas realizadas (*N*) así como a cantidade total de minutos de conversa (*M*). Cos datos do anterior exemplo, xustifica que o importe das chamadas efectuadas durante ese mes é:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{euros.}$$

Exemplo:

- É ben coñecida a *fórmula* da área dun rectángulo de base *b* e altura asociada *h*:

h

b

A = *b* · *h*

En todos estes exemplos xurdiron **expresións alxébricas**.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Textos Marea Verde

1.2. Expresións alxébricas

Chamaremos **expresión alxébrica** a calquera expresión matemática que se constrúa con números e coas operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación e/ou división. Nunha expresión alxébrica pode haber datos non concretados; segundo o contexto, recibirán o nome de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre outros.

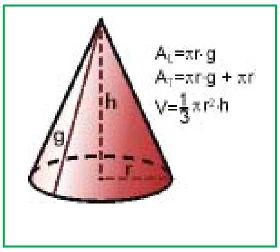
Se nunha expresión alxébrica non hai *variables*, esa expresión non é máis que un número:

Exemplo:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Ao fixar un valor concreto para cada *indeterminada* dunha expresión alxébrica aparece un número, o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.

Exemplo:



- O volume dun cono vén dado pola expresión alxébrica:

  $$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$$

  na que *r* é o radio do círculo base e *h* é a súa altura. Deste modo, o volume dun cono cuxa base ten un radio de 10 cm e de altura 15 cm é igual a:

  $$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot 10^2\cdot 15=500\cdot\pi\, cm^3.$$

- A área lateral do cono vén dada por $A_L = \pi \cdot r \cdot g$, onde *r* é o radio da base e *g* a xeratriz. A superficie total é $A_T = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$.
- A expresión alxébrica que representa o produto dos cadrados de dous números calquera x e y simbolízase por $x^2 \cdot y^2$. Se nela fixamos $x=-2$ e $y=\frac{3}{5}$ resulta

  $$(-2)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=4\cdot\frac{9}{25}=\frac{36}{25}.$$

- Se na expresión

  $$7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$$

  particularizamos as tres variables cos valores

  $$x=4,\ y=-1,\ z=\frac{1}{2}$$

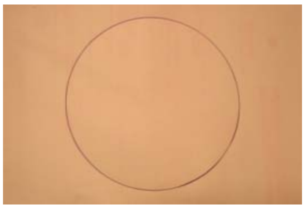
  xorde o número

  $$7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$$

Nunha expresión alxébrica pode non ter sentido outorgar algún valor a certa indeterminada. En efecto, no último exemplo non é posible facer $z=0$.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades propostas



2. Escribe as expresións alxébricas que nos proporcionan a lonxitude dunha circunferencia e a área dun trapecio.

3. Reescribe, en linguaxe alxébrica, os seguintes enunciados, referidos a dous números calquera x e y:

a) o triplo da súa diferenza b) a suma dos seus cadrados c) o cadrado da súa suma

d) o inverso do seu produto e) a suma dos seus opostos f) o produto dos seus cadrados

4. Unha tenda de roupa anuncia nos seus escaparates que está de rebaixas e que todos os seus artigos están rebaixados un 30 % sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha peza en función do que aparece na súa etiqueta.

5. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou valores que se indican:

a) $-3x^2+\frac{4}{x}-5$ para $x=-2$.

b) $3b+\frac{a+b}{2-b^3}+a\cdot b^2-1$ para $a=\frac{1}{3}$ e $b=\frac{1}{2}$.

6. Indica, en cada caso, o valor numérico da expresión $x-2y+3z$:

a) $x=1, y=2, z=1$

b) $x=2, y=0, z=-1$

c) $x=0, y=1, z=0$

7. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou os valores que se indican:

a) x^2+2x-7 para $x=2$ b) $(a+b)^2-(a^2+b^2)$ para $a=3$ e $b=-2$ c) c^2+3c+7 para $c=1$

.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unhas expresións alxébricas de gran utilidade son os **polinomios**, cuxa versión máis simple e, á vez, xeradora deles son os **monomios**.

Un **monomio** vén dado polo produto de números e indeterminadas. Chamaremos **coeficiente** dun monomio ao número que multiplica á indeterminada, ou indeterminadas; a indeterminada, ou indeterminadas, conforman a **parte literal** do monomio.

Exemplos:

- A expresión que nos proporciona o triplo dunha cantidade, $3x$, é un monomio cunha única variable, x, e coeficiente 3.
- O volume dun cono, $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$, é un monomio con dúas indeterminadas, r e h, e coeficiente $\frac{1}{3}\pi$. A súa parte literal é $r^2 \cdot h$.
- Outros monomios: $5a^2b^3$, $\sqrt{2} \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^2$
- A expresión $5xy^2 + \sqrt{3}xy - \frac{3}{7}x$ está formada por tres termos, tres monomios. Cada un ten un coeficiente e unha parte literal:

  No primeiro, $5xy^2$, o coeficiente é 5 e a parte literal xy^2

  O segundo, $\sqrt{3}xy$, ten por coeficiente $\sqrt{3}$ e parte literal xy

  E no terceiro, $-\frac{3}{7}x$, o coeficiente é $-\frac{3}{7}$ e a parte literal x

Atendendo ao expoñente da variable, ou variables, adxudicaremos un **grao** a cada monomio con amaño ao seguinte criterio:

- Cando haxa unha única indeterminada, o grao do monomio será o expoñente da súa indeterminada.
- Se aparecen varias indeterminadas, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.

Exemplos:

- $3x$ *é* un monomio de grao 1 na variable x.
- $\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ é un monomio de grao 3 nas indeterminadas r e h.
- $5a^2b^3$ é un monomio de grao 5 en a e b.
- $\sqrt{2}x^3y^2z^2$ é un monomio de grao 7 en x, y e z.

Un número pode ser considerado como un monomio de grao 0.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades propostas

8. En cada un dos seguintes monomios sinala o seu coeficiente, a súa parte literal e o seu grao:

a) $-12x^3$

b) a^4b^3c

c) $4xy^2$

Un **polinomio** é unha expresión construída a partir da suma de monomios. O **grao dun polinomio** virá dado polo maior grao dos seus monomios.

Exemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ é un polinomio de grao 3 na variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ é un polinomio de grao 4 nas indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ é un polinomio de grao 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ é un polinomio de grao 1 en x, y e z.

Tanto nesta sección como na seguinte limitarémonos, basicamente, a considerar polinomios cunha única variable. É habitual escribir os diferentes monomios dun polinomio de forma que os seus graos vaian en descenso para, con este criterio, apreciar no seu primeiro monomio cal é o grao do polinomio.

O aspecto xenérico dun polinomio na variable x é

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes a_k son números. O monomio de grao cero, a_0, recibe o nome de **termo independente**. Diremos que un polinomio é **mónico** cando o coeficiente do seu termo de maior grao é igual a 1.

Exemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ é un polinomio de grao 4 na variable x, cuxo termo independente é 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ é un polinomio de grao 3 na indeterminada y con termo independente -7.
- $z^2 - 3z + 12$ é un polinomio de grao 2 en z. Ademais, é un polinomio mónico.
- $3x + 9$ é un polinomio de grao 1 en x.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Actividades propostas

9. Para cada un dos seguintes polinomios destaca o seu grao e os monomios que o constitúen:

a) $5x^4 + 7x^2 - x$

b) $6x^2 + 10 - 2x^3$

c) $2xy^3 - x^5 + 7x^2y^2$

Como ocorre con calquera expresión alxébrica, se fixamos, ou escollemos, un valor concreto para a variable dun polinomio aparece un número: o **valor numérico** do polinomio para ese valor determinado da variable. Se chamamos p a un polinomio, á avaliación de p en, por exemplo, o número -3 denotarémola por $p(-3)$, e leremos *"p de menos tres"* ou *"p en menos tres"*. Con este criterio, se p é un polinomio cuxa indeterminada é a variable x, podemos referirnos a el como p ou $p(x)$ indistintamente.

Desta forma apreciamos que un polinomio pode ser entendido como unha maneira concreta de asignar a cada número outro número.

Exemplos:

- Se avaliamos o polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x=5$ encontrámonos co número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1\,875 + 7 = -1\,868$$

- O valor do polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ é

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Ao particularizar o polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z=0$ resulta o número $r(0) = 12$.

Actividades propostas

10. Consideremos o polinomio $p(x) = x^3 - 3x + 2$. Calcula os seguintes valores numéricos de p: $p(0)$, $p(1)$, $p(-1)$, $p(-2)$ e $p(1/2)$.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio é unha suma de monomios, a suma de dous polinomios é outro polinomio. Á hora de sumar dous polinomios procederemos a sumar os monomios de igual parte literal.

Exemplos:

- A suma dos polinomios $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ e $-x^4+4x^2-5x-6$ é o polinomio

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$
$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(5x^2-3x+1)+(x^2+4x-7)=(5x^2+x^2)+(-3x+4x)+(1-7)=6x^2+x-6$
- $(2x^3+1)+(-x^4+4x)=-x^4+2x^3+4x+1$
- $(x^3+9)+(-x^3+2)=11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$

No seguinte exemplo sumaremos dous polinomios dispoñéndoos, adecuadamente, un sobre o outro.

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ + & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propiedades da suma de polinomios

Propiedade conmutativa. Se *p* e *q* son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de sumalos:

$$p+q\equiv q+p$$

Exemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$
$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Propiedade asociativa. Sinala como se poden sumar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p+q)+r \equiv p+(q+r)$$

Exemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Tamén:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Actividades propostas

11. Realiza as seguintes sumas de polinomios:

a) $(-x^3+x-5)+(2x^2+5x+4)+(-4x^3-2x^2+3x)$

b) $(x^2+4)+(-2x+4)+(-6x^3+3x^2+x+1)-x^2$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: o resultado de sumalo con calquera outro sempre é este último. Trátase do polinomio dado polo número 0, o *polinomio cero*.

Exemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Elemento oposto. Cada polinomio ten asociado outro, ao que chamaremos o seu *polinomio oposto*, tal que a suma de ambos os dous é igual ao polinomio cero. Acadamos o polinomio oposto dun dado, simplemente, cambiando o signo de cada monomio.

Exemplo:

- O polinomio oposto de $p \equiv -2x^4+x^3+2x-7$ é $2x^4-x^3-2x+7$, ao que denotaremos como $"-p"$. Ratifiquemos que a súa suma é o polinomio cero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Actividades propostas

12. Escribe o polinomio oposto de cada un dos seguintes polinomios:

a) $2x^3-2x^2-3x+9$ b) $-5x$ c) $-x^3+7x$

13. Considera os polinomios $p\equiv x^2-x+1$, $q\equiv -x^3+2x-3$, así como o polinomio suma $s\equiv p+q$. Calcula os valores que adopta cada un deles para $x=-2$, é dicir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ e $s(-2)$. Estuda se existe algunha relación entre eses tres valores.

14. Obtén o valor do polinomio $p\equiv 4x^3-x^2+1$ en $x=2$. Que valor toma o polinomio oposto de p en $x=2$?

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

2.3. Produto de polinomios

Outra operación que podemos realizar con polinomios é a multiplicación.

O resultado do produto de polinomios sempre será outro polinomio. Aínda que nun polinomio temos unha indeterminada, ou variable, como ela adopta valores numéricos, á hora de multiplicar polinomios utilizaremos as propiedades da suma e o produto entre números, en particular a propiedade distributiva do produto respecto da suma; así todo queda en función do produto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidade:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
  $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x-6) \cdot (x^3 - 2x) = (x-6) \cdot x^3 + (x-6) \cdot (-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

Tamén podemos materializar o produto de polinomios tal e como multiplicamos números enteiros:

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & \times & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Recordemos que o polinomio *oposto* doutro obtense simplemente cambiando o signo de cada monomio. Esta acción correspóndese con multiplicar polo número "-1" o polinomio orixinal. Desta forma o polinomio oposto de p é

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Neste momento aparece de maneira natural a **operación diferenza**, ou **resta**, de polinomios. Definímola coa axuda do polinomio oposto dun dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

Exemplo:

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Actividades propostas

15. Efectúa os seguintes produtos de polinomios:

a) $(-2x) \cdot (3x^2 - 4)$

b) $(2x^3 + 1) \cdot (-4x + 5)$

c) $(4x^3 - x^2 - 1) \cdot (2x + 6)$

d) $(-1) \cdot (8x^2 + 7x - 9)$

16. Realiza as seguintes diferenzas de polinomios:

a) $(5x^2 + 2) - (-2x)$

b) $(-2x^3 + 4x) - (-2x - 1)$

c) $(7x^2 - 2x) - (3x^3 + 4x^2 - x + 1)$

17. Multiplica cada un dos seguintes polinomios por un número de tal forma que xurdan polinomios mónicos:

a) $3x^2 - x + 2$

b) $-6x^3 + 2x - 3$

c) $-x^2 + 9x - 2$

18. Calcula e simplifica os seguintes produtos:

a) $x \cdot (-2x + 4)$

b) $(2x - 3) \cdot (3x + 2)$

c) $(a - 2) \cdot (4 - 3a)$

d) $(3a - b^2) \cdot (2b - a^2)$

Textos Marea Verde

Propiedades do produto de polinomios

Propiedade conmutativa. Se *p* e *q* son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de multiplicalos:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Exemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedade asociativa. Sinala como se poden multiplicar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Exemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Tamén:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propostas

19. Realiza os seguintes produtos de polinomios:

a) $x\cdot(-3x^2+4x+2)\cdot x^2$

b) $(-2x+1)\cdot(5x^2-x+3)\cdot(-x)$

c) $(3a-1)\cdot(2-a)\cdot(5-4a)$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: ao multiplicalo por calquera outro sempre nos dá este último. Trátase do polinomio dado polo número 1, o *polinomio unidade*.

Exemplo:

$$1\cdot(-5x^3-2x+3)=(-5x^3-2x+3)\cdot 1=-5x^3-2x+3$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Propiedade distributiva da multiplicación respecto da suma. Cando nunha multiplicación de polinomios un dos factores vén dado como a suma de dous polinomios como, por exemplo,

$$(3x^2 - x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

temos dúas opcións para coñecer o resultado:

a) realizar a suma e, despois, multiplicar

$$(3x^2 - x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right) = (3x^2 - x)\cdot\left(x^3-6x+7\right) =$$
$$= 3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuír, aplicar a multiplicación a cada un dos sumandos e, despois, sumar:

$$(3x^2 - x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right) = (3x^2 - x)\cdot(-2x+7) + (3x^2 - x)\cdot(x^3-4x) =$$
$$= (-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtemos o mesmo resultado.

En xeral, a **propiedade distributiva** da multiplicación respecto da suma dinos que

$$p\cdot(q+r) \equiv (p\cdot q) + (p\cdot r)$$

Convén comentar que a anterior propiedade distributiva lida en sentido contrario, de dereita a esquerda, é o que comunmente se denomina **sacar factor común**.

Exemplo:

$$6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1)\cdot 2x^2$$

Actividades propostas

20. De cada un dos seguintes polinomios extrae algún factor que sexa común aos seus monomios:

a) $-10x^3 - 15x^2 + 20x$

b) $30x^4 + 24x^2$

Textos Marea Verde

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introdución ás fraccións polinómicas

Ata este momento estudamos varias operacións con polinomios: suma, resta e produto. En calquera dos casos o resultado sempre é outro polinomio. Cando establecemos unha **fracción polinómica** como, por exemplo,

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

o que temos é unha expresión alxébrica, unha **fracción alxébrica**, que, en xeral, non é un polinomio. Si aparece un polinomio no caso, moi particular, en que o denominador é un número diferente de cero, isto é, un polinomio de grao 0.

É sinxelo constatar que a expresión anterior non é un polinomio: calquera polinomio pode ser avaliado en calquera número. Porén, esa expresión non pode ser avaliada para $x = 1$, xa que nos quedaría o número 0 no denominador.

Poderiamos crer que a seguinte fracción polinómica si é un polinomio:

$$\frac{-2x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2 + 5x - 3$$

A expresión da dereita si é un polinomio pois trátase dunha suma de monomios, pero a da esquerda nono é xa que non pode ser avaliada en $x = 0$ .Con todo, esa fracción alxébrica e o polinomio, cando son avaliados en calquera número diferente de cero, ofrecen o mesmo valor. Son **expresións equivalentes** alí onde ambas as dúas teñen sentido, isto é, para aqueles números nos que o denominador non se fai cero.

3.2. División de polinomios

Aínda que, como vimos no apartado anterior, unha fracción polinómica, en xeral, non é un polinomio, imos aprender a división de polinomios pois é unha cuestión importante e útil.

Analicemos con detemento a división de dous números enteiros positivos. Cando dividimos dous números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), xorden outros dous, o cociente (*c*) e o resto (*r*). Estes encóntranse ligados pola chamada *proba da división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Ademais, dicimos que a división é exacta cando $r = 0$.

O coñecido algoritmo da división persegue encontrar un número enteiro, o cociente *c*, tal que o resto *r* sexa un número menor que o divisor *d*, e maior ou igual que cero. Fixémonos en que, sen esta esixencia para o resto *r*, podemos escoller arbitrariamente un valor para o cociente *c* o cal nos subministra o seu valor asociado como resto *r*. En efecto, se temos como dividendo *D* = 673 e como divisor *d* = 12, "se queremos" que o cociente sexa *c* = 48 o seu resto asociado é

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

Textos Marea Verde

e a conexión entre estes catro números é

$$673 = 12 \cdot 48 + 97$$

Esta última "lectura" da división de números enteiros vai guiarnos á hora de dividir dous polinomios.

Dados dous polinomios $p(x)$ e $q(x)$, a división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, proporcionaranos outros dous polinomios, o polinomio cociente $c(x)$ e o polinomio resto $r(x)$. Tamén aquí pesará unha esixencia sobre o polinomio resto: o seu grao deberá ser menor que o grao do polinomio divisor. A relación entre os catro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Tamén escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aínda que, en tal caso, seremos conscientes das cautelas sinaladas no apartado anterior en canto ás equivalencias entre polinomios e outras expresións alxébricas.

Ao igual que ocorre co algoritmo da división enteira, o algoritmo da división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada unha das cales aparecen uns polinomios cociente e resto "provisionais" de forma que o grao deses polinomios resto vai descendendo ata que topamos cun cuxo grao é inferior ao grao do polinomio divisor, o que indica que concluímos. Vexamos este procedemento cun exemplo concreto.

Exemplo:

- Imos dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como o polinomio divisor, $q(x)$, é de grao 2, debemos encontrar dous polinomios, un polinomio cociente $c(x)$ e un polinomio resto $r(x)$ de grao 1 ou 0 tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

ou, como igualdade entre expresións alxébricas,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Á vista dos polinomios $p(x)$ e $q(x)$, e do dito sobre $r(x)$, é evidente que o grao do polinomio cociente, $c(x)$ será igual a 2. Imos obtelo monomio a monomio.

- Primeira aproximación aos polinomios cociente e resto:

Para poder lograr a igualdade $p \equiv q \cdot c + r$, como o grao de $r(x)$ será 1 ou 0, o termo de maior grao de $p(x)$, $6x^4$, xurdirá do produto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtemos a primeira aproximación de $c(x)$, o seu monomio de maior grao:

$$c_1(x) = 3x^2$$

e, de maneira automática, tamén un primeiro resto $r_1(x)$:

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ é de grao 3, maior que 2, o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Segunda aproximación aos polinomios cociente e resto:

Se particularizamos a igualdade entre expresións alxébricas $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ ao que temos ata agora resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir o polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, xurdido como resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, o divisor inicial. É dicir, repetimos o feito antes pero considerando un novo polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

O novo obxectivo é acadar a igualdade $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Ao igual que antes, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. Como o termo de maior grao de $r_1(x)$, $8x^3$ sae do produto $q(x) \cdot c_2(x)$, é necesario que o polinomio cociente conteña o monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Isto lévanos a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ é de grao 2, igual que o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Terceira aproximación aos polinomios cociente e resto:

O realizado na etapa segunda permítenos avanzar na adecuada descomposición da expresión alxébrica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta terceira etapa consiste en dividir o polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, o resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, o divisor inicial. De novo repetimos o algoritmo pero con outro polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Como en cada paso, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. O termo de maior grao de $r_2(x)$, $-4x^2$ xorde do produto $q(x) \cdot c_3(x)$, polo que

$$c_3(x) = -2$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

e o terceiro resto $r_3(x)$ é

$$r_3(x) = r_2(x) - q(x)\cdot c_3(x) = (-4x^2 - 9x - 2) - (2x^2 - x + 3)\cdot(-2) =$$
$$= (-4x^2 - 9x - 2) - (-4x^2 + 2x - 6) = -11x + 4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ é de grao 1, menor que 2, grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto si é o definitivo. Concluímos:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x - 2 + \frac{-11x + 4}{2x^2 - x + 3}$$

Se o expresamos mediante polinomios:

$$6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 = (2x^2 - x + 3)\cdot(3x^2 + 4x - 2) + (-11x + 4)$$

Conclusión: ao dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtemos como polinomio cociente $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ e como polinomio resto $r(x) = -11x + 4$.

Seguidamente imos axilizar a división de polinomios:

Actividades propostas

21. Comproba que os cálculos que tes a continuación reflicten o que se fixo no exemplo anterior para dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$.

- Primeira etapa:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 \\
 & 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 &
\end{array}$$

- Primeira e segunda etapas:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 4x \\
 & 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
 & \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} & \\
 & -4x^2 - 9x - 2 &
\end{array}$$

- As tres etapas:

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

$$\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\
-4x^2-9x-2 & \\
\underline{4x^2-2x+6} & \\
-11x+4 &
\end{array}$$

Divide os seguintes polinomios:

a) $3x^3+4x^2-9x+7$ entre x^2+2x-1

b) $-6x^3+2x^2+3x+4$ entre $3x^3+x^2-2x+1$

c) $-6x^4-13x^3-4x^2-13x+7$ entre $-3x^2-2x+1$

d) $3x^5-9x^4+7x^3+4x^2-14x+14$ entre x^3-2x^2-x+3

e) x^5-4x-6 entre x^2+3

22. Encontra dous polinomios tales que ao dividilos apareza $q(x)=x^2-2x-1$ como polinomio cociente e $r(x)=2x^2-3$ como resto.

3.3. Igualdades notables

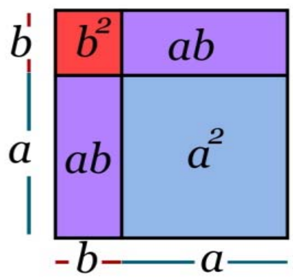
Neste apartado imos destacar unha serie de produtos concretos de polinomios que xorden frecuentemente. Podemos expoñelos de moi diversas formas. Tal e como o faremos, aparecerá máis dunha indeterminada; debemos ser capaces de apreciar que se, nalgún caso particular, algunha indeterminada pasa a ser un número concreto isto non fará nada máis que particularizar unha situación máis xeral.

Potencias dun binomio. As seguintes igualdades obtéñense, simplemente, tras efectuar os oportunos cálculos:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

O cadrado dunha suma é igual ao cadrado do primeiro, máis o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

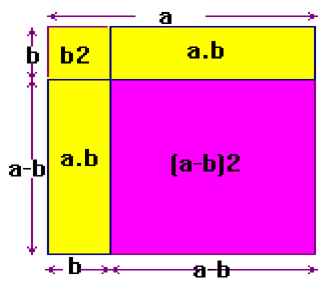
Comproba a igualdade a partir dos cadrados e rectángulos da ilustración.



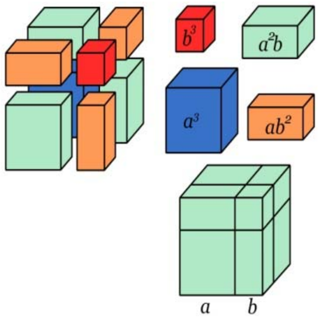
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

O cadrado dunha diferenza é igual ao cadrado do primeiro, menos o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

Observa a figura e conéctaa coa igualdade.



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica a igualdade cos cubos e prismas da figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada un dos desenvolvementos, o expoñente do binomio coincide co grao de cada un dos monomios.

Exemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 30x^2 + 150x - 125$

Actividades propostas

23. Realiza os cálculos:

a) $(1+x)^2$

b) $(-x+2)^2$

c) $(x-2)^2$

d) $(2a-3)^2$

e) $(x^2+1)^3$

f) $(2b-4)^3$

24. Obtén as fórmulas dos cadrados dos seguintes trinomios:

$(a+b+c)^2$ $\qquad$ $(a-b+c)^2$

25. Desenvolve as seguintes potencias:

a) $(3x - y)^2$ b) $(2a + x/2)^2$ c) $(4y - 2/y)^2$

d) $(5a + a^2)^2$ e) $(-a^2 + 2b^2)^2$ f) $((2/3)y - 1/y)^2$

26. Expresa como cadrado dunha suma ou dunha diferenza as seguintes expresións alxébricas:

a) $a^2 - 6a + 9$ b) $4x^2 + 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 - 12y + 9$ e) $a^4 + 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6xy^2 + 9x^2$

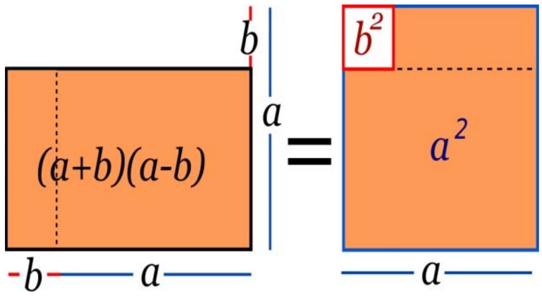
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

Suma por diferenza. De novo a seguinte igualdade obtense tras efectuar o produto sinalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma por diferenza é igual a diferenza de cadrados.

Observa as figuras e conéctaas coa igualdade.



Exemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$
  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Actividades propostas

27. Efectúa estes produtos:

a. $(3x+2)\cdot(3x-2)$

b. $(2x+4y)\cdot(2x-4y)$

c. $(4x^2+3)\cdot(4x^2-3)$

d. $(3a-5b)\cdot(3a+5b)$

e. $(-x^2+5x)\cdot(x^2+5x)$

28. Expresa como suma por diferenza as seguintes expresións

a) $9x^2-25$ b) $4a^4-81b^2$ c) $49-25x^2$ d) $100a^2-64$

De volta aos polinomios dunha variable, podemos dicir que neste apartado expandimos *potencias dun polinomio*, ou produtos dun polinomio por si mesmo, así como produtos da forma *suma por diferenza*. Convén darse conta de que as súas fórmulas, lidas ao revés, nos informan do resultado de certas divisións de polinomios. En efecto, ao igual que cando lemos $17\times 11=187$ deducimos que $\frac{187}{17}=11$ e, tamén, $\frac{187}{11}=17$, a partir do desenvolvemento dun binomio como, por exemplo, $(-3x^2+2x)^2=(-3x^2+2x)\cdot(-3x^2+2x)=9x^4-12x^3+4x^2$, podemos obter que

$$\frac{9x^4-12x^3+4x^2}{-3x^2+2x}=-3x^2+2x$$

O mesmo ocorre co produto de polinomios da forma *suma por diferenza*. Posto que, por exemplo, $(2x^3-5)\cdot(2x^3+5)=4x^6-25$, deducimos que $\frac{4x^6-25}{2x^3-5}=2x^3+5$, e tamén $\frac{4x^6-25}{2x^3+5}=2x^3-5$.

Actividades propostas

29. Realiza as seguintes divisións de polinomios a partir da conversión do dividendo na potencia dun binomio ou nun produto da forma suma por diferenza:

a) $x^2 + 12x + 36$ entre $x + 6$

b) $4x^4 - 16x^2$ entre $2x^2 - 4x$

c) $9x^2 - 24x + 16$ entre $3x - 4$

d) $x^2 - 5$ entre $x + \sqrt{5}$

3.4. Operacións con fraccións alxébricas

Posto que tanto os polinomios como as fraccións alxébricas obtidas a partir de dous polinomios son, en potencia, números, operaremos con tales expresións seguindo as propiedades dos números.

- **Suma ou resta.** Para sumar ou restar dúas fraccións polinómicas deberemos conseguir que teñan igual denominador. Unha maneira segura de logralo, aínda que pode non ser a máis adecuada, é esta:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 \cdot q_1} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Produto.** Basta multiplicar os numeradores e denominadores entre si:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- **División.** Segue a coñecida regra da división de fraccións numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Exemplos:

- $$\frac{x-1}{x} + \frac{3x+1}{x+1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x+1)} + \frac{(3x+1)\cdot x}{(x+1)\cdot x} = \frac{x^2-1}{x^2+x} + \frac{3x^2+x}{x^2+x} =$$
$$= \frac{(x^2-1)+(3x^2+x)}{x^2+x} = \frac{4x^2+x-1}{x^2+x}$$

- $$\frac{x+2}{x+1} - \frac{7}{x+2} = \frac{(x+2)\cdot(x+2)}{(x+1)\cdot(x+2)} - \frac{7\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x+1)} = \frac{x^2+4x+4}{(x+1)\cdot(x+2)} - \frac{7x+7}{(x+2)\cdot(x+1)} =$$
$$= \frac{(x^2+4x+4)-(7x+7)}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{x^2+4x+4-7x-7}{(x+1)\cdot(x+2)} = \frac{x^2-3x-3}{(x+1)\cdot(x+2)}$$

- $$\frac{x+1}{x-5} \cdot \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{(x+1)\cdot(3x-1)}{(x-5)\cdot(x^2-1)}$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

- $\frac{-3x+2}{x+3} : \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{-3x+2}{x+3} \cdot \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{(-3x+2)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x^2+x)}$

En ocasións pode ser útil apreciar que unha fracción polinómica pode ser reescrita como a suma, diferenza, produto ou cociente doutras dúas fraccións polinómicas. En particular, isto pode ser aproveitado para **simplificar** unha expresión polinómica:

Exemplos:

- $\frac{4x^2-3x}{8x-6} = \frac{x\cdot(4x-3)}{2\cdot(4x-3)} = \frac{x}{2}\cdot\frac{(4x-3)}{(4x-3)} = \frac{x}{2}\cdot 1 = \frac{x}{2}$
- $\frac{x^2-6x+9}{9-x^2} = \frac{(x-3)^2}{(3+x)\cdot(3-x)} = \frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot\frac{(x-3)}{(3-x)} = \frac{(x-3)}{(3+x)}\cdot(-1) = \frac{-x+3}{3+x}$

Actividades propostas

30. Efectúa os seguintes cálculos:

a) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x^2-1}-\frac{5}{x}$ c) $\frac{-x+1}{x+3}\cdot\frac{3x^2}{x+1}$ d) $\frac{2+x}{x^2}:\frac{x}{x-3}$

31. Realiza as seguintes operacións alterando, en cada apartado, só un dos denominadores, o seu respectivo numerador:

a) $\frac{-2x^2-x+1}{x^3}+\frac{3x+1}{x^2}$ $\frac{2x-1}{x^2-2x}-\frac{3x}{x-2}$

32. Calcula os seguintes cocientes:

a) $(2x^3 - 8x^2 + 6x) : 2x$ b) $(5a^3 + 60a^2 - 20) : 5$ c) $(16x^3 + 40x^2) : 8x^2$ d) $(6x^2y^3 - 4xy^2) : xy^2$

33. Comproba as seguintes identidades simplificando a expresión do lado esquerdo de cada igualdade:

a) $\frac{6a^8b^2}{2a^3b} = 3a^5b$ b) $\frac{8x^3y-2xy^2}{4xy} = 2x^2-\frac{1}{2}y$ c) $\frac{4x^2+2x}{2x-8} = \frac{2x^2+x}{x-4}$

d) $\frac{6a^2b^2-4a^2b^3+4ab}{2ab^2-8a^2b} = \frac{3ab-2ab^2+2}{b-4a}$

34. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\frac{3x^2+6x}{9x^2+18}$ b) $\frac{a^3-7a^2}{3a^3+5a^2}$ c) $\frac{x^2y^2-7xy^2}{2xy}$ d) $\frac{a^2b^2-ab}{a^3b+ab}$

35. En cada unha das seguintes fraccións alxébricas escribe, cando sexa posible, o polinomio numerador, ou denominador, en forma de potencia dun binomio ou de suma por diferenza para, posteriormente, poder simplificar cada expresión:

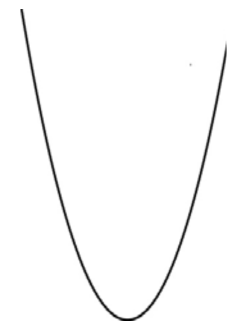
a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$ b) $\frac{2x^2-16x+32}{x^2-16}$ c) $\frac{6-4a}{4a^2-9}$

Textos Marea Verde

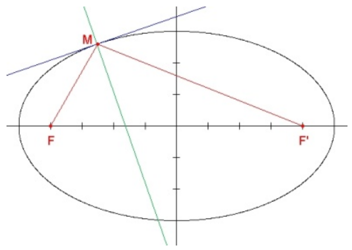
CURIOSIDADES. REVISTA

XEOMETRÍA

Tal e como poderás comprobar durante este curso e os seguintes, grazas aos polinomios será posible e sinxelo describir numerosos obxectos xeométricos como rectas, circunferencias, elipses, parábolas, planos, esferas, cilindros, conos, etc.

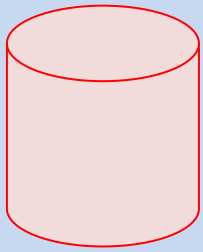


$y = ax^2 + bx + c$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$



$x^2 + y^2 = r^2$

Para ver xeometricamente o cadrado dun trinomio:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172241_am:1.swf

Para ver xeometricamente suma por diferenza:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172242_am:1.swf

Para ver xeometricamente o cadrado dunha diferenza:

http://recursostic.educacion.es/bancoimagenes/web/172456_am:1.swf

OUTRAS CIENCIAS

Vimos neste capítulo que as fórmulas que nos proporcionan a área e o volume de diferentes figuras veñen dadas por polinomios. Estes tamén aparecen en numerosos **principios** ou **leis da Física** e **da Química** como, por exemplo, en diferentes *Leis de Conservación*, a *Lei Xeral dos Gases*, etc.

Así mesmo, son de frecuente uso á hora de obter distintos **índices** ou **indicadores** propios da **Economía** como, por exemplo, o *IPC* (índice de prezos ao consumo), o *euríbor*, etc.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

RESUMO

Noción	Descrición	Exemplos
Expresión alxébrica	Constrúese con números e coas operacións matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación e/ou división	$\frac{-3x}{2x+y^3}-x\cdot y^2\cdot z$
Variable, indeterminada	O non concretado nunha expresión alxébrica	As variables, ou indeterminadas, do exemplo anterior son *x*, *y*, *z*
Valor numérico dunha expresión alxébrica	Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada, ou variable, dunha expresión alxébrica obtense un número, o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.	Se facemos *x* = 3, *y* = –2, *z* = 1/2, obtemos: $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3}-3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada polo produto de números e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficiente dun monomio	O número que multiplica a indeterminada, ou indeterminadas, do monomio.	Os coeficientes dos anteriores monomios son, respectivamente, –5 e 7
Parte literal dun monomio	A indeterminada, ou produto de indeterminadas, que multiplica ao coeficiente do monomio	A parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ é $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grao dun monomio	Cando hai unha única indeterminada é o expoñente desa indeterminada. Se aparecen varias, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.	Os graos dos monomios precedentes son 6 e 2, respectivamente.
Polinomio	Expresión construída a partir da suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grao dun polinomio	O maior grao dos seus monomios	O anterior polinomio é de grao 3
Suma, resta e produto de polinomios	O resultado sempre é outro polinomio	$p\equiv x+3,\ q\equiv x^2-2$ $p+q\equiv x^2+x+1$ $p-q\equiv -x^2+x+5$ $p\cdot q\equiv x^3+3x^2-2x-6$
División de dous polinomios	Obtéñense outros dous polinomios, os polinomios cociente (*c*(*x*)) e resto (*r*(*x*)), ligados aos polinomios iniciais: os polinomios dividendo (*p*(*x*)) e divisor (*q*(*x*))	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

EXERCICIOS E PROBLEMAS

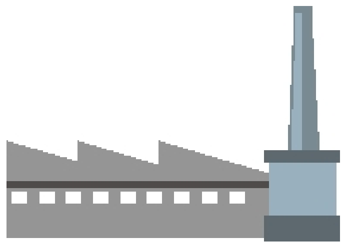
1. Unha empresa comerciante por xunto de viaxes está confeccionando unha oferta para distribuíla en diferentes axencias de viaxe. Trátase dunha viaxe en avión, de ida e volta, a Palma de Mallorca cuxo prezo dependerá do número final de viaxeiros. Os datos concretos son:
   a) Se non hai máis de 100 persoas interesadas, o voo custará 150 euros por persoa.
   b) Se hai máis de 100 persoas interesadas, por cada viaxeiro que pase do centenar, o prezo da viaxe reducirase en 1 euro. Porén, o prezo do voo en ningún caso será inferior a 90 euros.

   Estuda e determina o prezo final do voo, por persoa, en función do número total de viaxeiros. Así mesmo, expresa a cantidade que ingresará a empresa segundo o número de viaxeiros.

2. Neste exercicio vaise presentar un *truco* mediante o cal imos adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxébrica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.

   i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número par e que non o mostre
   ii. Que o multiplique por 5
   iii. Que ao resultado anterior lle sume 5
   iv. Que multiplique por 2 o obtido
   v. Que ao resultado anterior lle sume 10
   vi. Que multiplique por 5 o obtido
   vii. Que divida entre 100 a última cantidade
   viii. Que ao resultado precedente lle reste a metade do número que escribiu
   ix. Independentemente do número descoñecido orixinal, que número xurdiu?

3. Os responsables dunha empresa, en previsión duns futuros altibaixos nas vendas dos produtos que fabrican, pensan propoñer aos seus traballadores a finais do ano 2014 o seguinte:
   a) A diminución dos soldos, para o próximo ano 2015, nun 10 %.
   b) Para 2016 ofrecen aumentar un 10 % os salarios de 2015.
   c) En xeral, suxiren que o soldo diminúa un 10 % cada ano impar e que aumente un 10 % cada ano par.



   Se finalmente se aplica o exposto, estuda se os traballadores recuperarán no ano 2016 o salario que tiñan en 2014. Analiza que ocorre cos soldos tras moitos anos.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

4. Os responsables da anterior empresa, despois de recibir o informe dunha consultora, alteran a súa intención inicial e van propoñer aos seus traballadores, a finais do ano 2014, o seguinte:
   a) Un aumento dos soldos, para o próximo ano 2015, dun 10 %.
   b) Para 2016, unha redución do 10 % sobre os salarios de 2015.
   c) En xeral, suxiren que o soldo aumente un 10 % cada ano impar e que diminúa un 10 % cada ano par.

   Se se aplica o exposto, analizase o salario dos traballadores do ano 2016 coincidirá co que tiñan en 2014. Estuda como evolucionan os soldos tras moitos anos.

5. Observa se hai números nos que as seguintes expresións non poden ser avaliadas:
   a) $\dfrac{x-3}{x+1}$
   b) $\dfrac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$
   c) $\dfrac{x}{x^2-2x+1}$
   d) $\dfrac{x+y-2}{x^2+3y^2}$

6. Calcula o valor numérico das seguintes expresións nos números que se indican:
   a) $\dfrac{x-3}{x+1}$ en $x=1$
   b) $\dfrac{x}{x^2-2x+1}$ para $x=-2$
   c) $\dfrac{x+y-2}{x^2+3y^2}$ en $x=3$ e $y=-1$
   d) $\dfrac{-2a+b^2-4}{a^2c-3abc}$ para $a=-1$, $b=0$ e $c=2$
   e) $\dfrac{2x-1}{(x-5)\cdot(2x+7)}$ en $x=\dfrac{1}{2}$

7. Unha persoa ten aforrados 3000 euros e decide depositalos nun produto bancario cun tipo de interese anual do 2.5 %. Decide recuperar os seus aforros ao cabo de dous anos, cal será a cantidade total da que disporá?

8. Constrúe un polinomio de grao 2, $p(x)$, tal que $p(-2)=-6$.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

9. Considera os polinomios $p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$, $q(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x - 5$ e $r(x) = x^2 - 3x + 2$. Fai as seguintes operacións:

   a) $p+q+r$
   b) $p-q$
   c) $p \cdot r$
   d) $p \cdot r - q$

10. Calcula os produtos:

   a) $\left(\frac{3ax}{2} - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(\frac{-by}{3}\right)$ b) $(0.1x + 0.2y - 0.3z) \cdot (0.3x - 0.2y + 0.1z)$ c) $(x-y)\cdot(y-1)\cdot(x+a)$

11. Efectúa as divisións de polinomios:

   a) $2x^3 + x^2 - 12x + 7$ entre $x+3$
   b) $-4x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 21x + 8$ entre $2x^2 - 3x + 1$
   c) $-3x^5 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 14$ entre $-x^3 - 2x + 3$

12. Calcula os cocientes:

   a) $(4x^3):(x^2)$ b) $(4x^3y^3z^4):(3x^2yz^2)$ c) $(x^4 - 4x^2y + 4y^2):(x^2 - 2y)$

13. Realiza as operacións entre fraccións alxébricas:

   a) $\frac{x-1}{x^2} + \frac{2x-1}{x}$
   b) $\frac{2x+3}{x} + \frac{5}{x+1}$
   c) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2-x}{x}$
   d) $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2-x}{x}$
   e) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2-x}{x}$

14. Encontra un polinomio $p(x)$ tal que ao dividir $p(x)$ entre $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ se obteña como polinomio resto $r(x) = -3x^2 + 1$.

15. Calcula as potencias:

   a) $(x+2y-z)^2$ b) $(x-3y)^3$ c) $\left(a+\frac{b}{3}\right)^2$ d) $(x^2 - 2z^3)^2$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

16. Analiza se os seguintes polinomios xurdiron do desenvolvemento de potencias de binomios, ou trinomios, ou dun produto *suma por diferenza*. En caso afirmativo expresa a súa procedencia.

a) $x^2 - 6x + 9$
b) $x^4 + 8x^2 + 16$
c) $x^2 - \sqrt{12}\,xy + 3y^2$
d) $y^4 + 2y^3 + y^2 + 2y + 1$
e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
f) $x^2 - 25$
g) $x^2 + 5$
h) $5x^2 - 1$
i) $x^2 - 8y^2$
j) $x^4 - 1$
k) $x^2 - y^2$
l) $x^2 - 2y^2z^2$

17. Analiza se o numerador e o denominador das seguintes expresións alxébricas proceden do desenvolvemento dun binomio, ou dun produto suma por diferenza, e simplifícaas:

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{xy^3 - yx}{y^4 - 1}$

18. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{3}{x(3-x)} - \dfrac{1}{2(3-x)}$ b) $3x^4 - 5x^3 + \dfrac{x^4 - 1}{x^3} \cdot \dfrac{x^5}{x^2 + 1}$ c) $\dfrac{x - 2y}{a - b} + \dfrac{4x + 5y}{3a - 3b}$

19. Simplifica todo o posible:

a) $\left(yx^4 - \dfrac{y}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3}{b - a} : \dfrac{b + a}{b - a}$ c) $\left(\dfrac{a + b}{a - b} - \dfrac{a - b}{a + b}\right) : \dfrac{4}{a - b}$

20. Simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a+y} - \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{a+y} + \dfrac{1}{x}} : \dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}}$ b) $\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y}}$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde

AUTOAVALIACIÓN

1. Sinala os coeficientes que aparecen nas seguintes expresións alxébricas:

a) $3\cdot\sqrt{5}\cdot x\cdot y^2$ b) $-3x^4-x^3+x+7$ c) $\dfrac{x+8}{4-2y^2}+6xa^2-\dfrac{3}{a}+9$

2. Destaca as variables, ou indeterminadas, das precedentes expresións alxébricas.

3. Do polinomio $5x^4-8x^2-x+9$ indica o seu grao e os monomios que o integran.

4. A expresión $\dfrac{x-7}{4-2x}$ non ten sentido para

a) $x=7$ b) $x=2$ c) $x=7$ e $x=2$ d) $x=0$

5. Calquera polinomio:

a) pode ser avaliado en calquera número.
b) non pode ser avaliado no número cero.
c) non pode ser avaliado en certos números concretos.

6. O valor numérico da expresión $\dfrac{x+7}{4-2y^2}+6xz^2-\dfrac{3}{z}$ en $x=1, y=2, z=-1$ é:

a) -11 b) 7 c) 1 d) -5

7. Completa adecuadamente as seguintes oracións:

a) A suma de dous polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….
b) A suma de tres polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….
c) O produto de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
d) A diferenza de dous polinomios de grao dous soe ser outro polinomio de grao ……….

8. Finaliza adecuadamente as seguintes oracións:

a) A suma de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
b) A suma de tres polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….
c) A diferenza de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

9. Ao dividir o polinomio $p(x)=2x^4-x^3+4$ entre $q(x)=x^2+2x+2$ o polinomio resto resultante:

a) debe ser de grao 2.
b) pode ser de grao 2.
c) debe ser de grao 1.
d) ningunha das opcións precedentes.

10. Para que unha fracción polinómica $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ sexa *equivalente* a un polinomio:

a) os polinomios $p(x)$ e $q(x)$ deben ser do mesmo grao.
b) non importan os graos de $p(x)$ e $q(x)$.
c) o grao do polinomio numerador, $p(x)$, debe ser superior ou igual ao grao do polinomio denominador, $q(x)$.
d) o grao do polinomio numerador, $p(x)$, debe ser inferior ao grao do polinomio denominador, $q(x)$.

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF
Textos Marea Verde