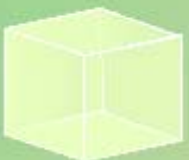


4ºA ESO

Capítulo 5:

Xeometría do plano e do espazo. Lonxitudes, áreas e volumes



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-042254

Fecha y hora de registro: 2014-05-08 18:14:30.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.drights.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez

Revisores: Javier Rodrigo e David Hierro

Tradutora: M^a Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. TEOREMA DE PITÁGORAS E TEOREMA DE TALES

- 1.1. TEOREMA DE PITÁGORAS
- 1.2. TEOREMA DE TALES
- 1.3. APLICACIÓN INFORMÁTICA PARA A COMPRESIÓN DA SEMELLANZA DE TRIÁNGULOS
- 1.4. PROPORCIONALIDADE EN LONXITUDES, ÁREAS E VOLUMES

2. LONXITUDES, ÁREAS E VOLUMES

- 2.1. LONXITUDES. ÁREAS E VOLUMES EN PRISMAS E CILINDROS
- 2.2. LONXITUDES. ÁREAS E VOLUMES EN PIRÁMIDES E CONOS
- 2.3. LONXITUDES. ÁREAS E VOLUMES NA ESFERA
- 2.4. LONXITUDES, ÁREAS E VOLUMES DE POLIEDROS REGULARES

3. INICIACIÓN Á XEOMETRÍA ANALÍTICA

- 3.1. DISTANCIA ENTRE DOUS PUNTOS NO PLANO
- 3.2. DISTANCIA ENTRE DOUS PUNTOS NO ESPAZO DE TRES DIMENSIÓN
- 3.3. ECUACIÓNS E RECTAS E PLANOS
- 3.4. ALGUNHAS ECUACIÓNS

Resumo

A Xeometría é unha das ramas máis antigas das Matemáticas e o seu estudo axúdanos a interpretar mellor a realidade que percibimos. O seu nome significa “*medida da Terra*”. Medir é calcular lonxitudes, áreas e volumes. Neste tema recordarás as fórmulas que estudaches xa o ano pasado e afondarás sobre as súas aplicacións na vida real.

Movémonos no espazo de dimensión tres, camiñamos sobre unha esfera (que, por ser grande, consideramos plana), as casas son case sempre ortoedros. A información que percibimos por medio dos nosos sentidos interpretámola en termos xeométricos. Precisamos das fórmulas de áreas e volumes dos corpos xeométricos para calcular as medidas dos mobles que caben no noso salón ou para facer un orzamento da reforma da nosa vivenda.



Moitas plantas distribúen as súas follas buscando o máximo de iluminación e as súas flores en forma esférica buscando un aproveitamento óptimo do espazo. O átomo de ferro dispón os seus electróns en forma de cubo, os sistemas de cristalización dos minerais adoptan formas poliédricas, os panais das abellas son prismas hexagonais. Estes son algúns exemplos da presenza de

corpos xeométricos na natureza.



ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA

1. TEOREMA DE PITÁGORAS E TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de *Pitágoras*

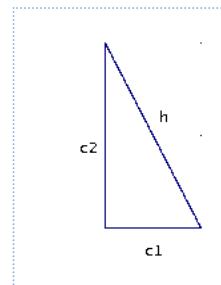
Teorema de *Pitágoras* no plano

Xa sabes que:

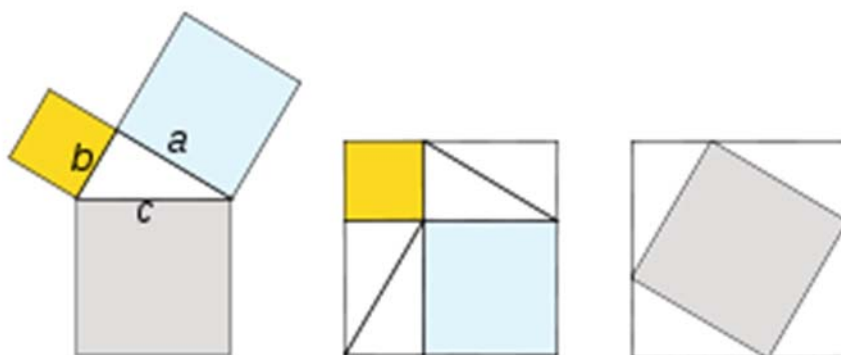
Nun triángulo rectángulo chamamos **catetos** aos lados incidentes co ángulo recto e **hipotenusa** ao outro lado.

Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$



Demostración:



Exemplo:

- ✚ Se os catetos dun triángulo rectángulo miden 6 cm e 8 cm, a súa hipotenusa vale 10 cm, xa que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

Actividades resoltas

- ✚ Se a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 13 dm e un dos seus catetos mide 12 dm, calcula a medida do outro cateto:

Solución: Polo teorema de *Pitágoras*:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12) \times (13+12)} = \sqrt{25} = 5 \text{ dm}$$

Actividades propostas

- É posible atopar un triángulo rectángulo cuxos catetos midan 12 e 16 cm e a súa hipotenusa 30 cm? Se a túa resposta é negativa, calcula a medida da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden 12 e 16 cm.
- Calcula a lonxitude da hipotenusa dos seguintes triángulos rectángulos de catetos:

a) 4 cm e 3 cm	b) 1 m e 7 m
c) 2 dm e 5 dm	d) 23.5 km e 47.2 km.

 Utiliza a calculadora se che resulta necesaria.

3. Calcula a lonxitude do cateto que falta nos seguintes triángulos rectángulos de hipotenusa e cateto:
 - a) 8 cm e 3 cm
 - b) 15 m e 9 m
 - c) 35 dm e 10 dm
 - d) 21.2 km e 11.9 km
4. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 5 m.
5. Calcula a área dun hexágono regular de lado 7 cm.

Teorema de Pitágoras no espazo

Xa sabes que:

A diagonal dun ortoedro ao cadrado coincide coa suma dos cadrados das súas arestas.

Demostración:

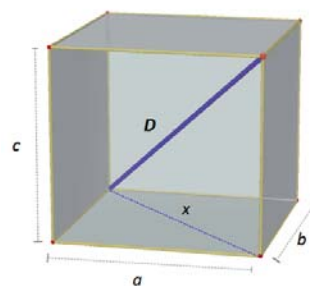
Sexan a , b e c as arestas do ortoedro que supoñemos apoiado no rectángulo de dimensións a , b .

Se x é a diagonal deste rectángulo, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

O triángulo de lados D , x , c é rectángulo logo: $D^2 = x^2 + c^2$

E tendo en conta a relación que verifica x :

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$



Actividades resoltas

- ✚ Calcula a lonxitude da diagonal dun ortoedro de arestas 7, 9 e 12 cm.

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274. D \approx 16.55 \text{ cm.}$$

- ✚ As arestas da base dunha caixa con forma de ortoedro miden 7 cm e 9 cm e a súa altura 12 cm. Estuda se podes gardar nela tres barras de lonxitudes 11 cm, 16 cm e 18 cm.

O rectángulo da base ten unha diagonal d que mide: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11.4$ cm.

Logo a barra máis curta cabe apoiada na base.

A diagonal do ortoedro vimos na actividade anterior que mide 16.55, logo a segunda barra si cabe, inclinada, pero a terceira, non.

Actividades propostas

6. Unha caixa ten forma cúbica de 3 cm de aresta. Canto mide a súa diagonal?
7. Calcula a medida da diagonal dunha sala que ten 8 metros de longo, 5 metros de ancho e 3 metros de altura.

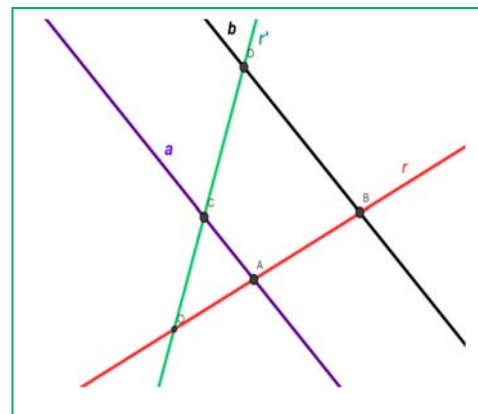
1.2. Teorema de Tales

Xa sabes que:

Dadas dúas rectas, r e r' , que se cortan no punto O , e dúas rectas paralelas entre si, a e b . A recta a corta ás rectas r e r' nos puntos A e C , e a recta b corta ás rectas r e r' nos puntos B e D . Entón o Teorema de Tales afirma que os segmentos son proporcionais:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$

Dise que os triángulos OAC e OBD están en posición *Tales*. Son **semellantes**. Teñen un ángulo común (coincidente) e os lados proporcionais.



Actividades resoltas

- ✚ Sexan OAC e OBD dous triángulos en posición *Tales*. O perímetro de OBD é 20 cm, OA mide 2 cm, AC mide 5 cm e OC mide 3 cm. Calcula as lonxitudes dos lados de OBD .

Utilizamos a expresión: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$ substituíndo os datos:

$\frac{2}{OB} = \frac{3}{OD} = \frac{5}{BD} = \frac{2+3+5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, polo que despegando, sabemos que: $OB = 2 \cdot 2 = 4$ cm; $OD = 3 \cdot 2 = 6$ cm, e $BD = 5 \cdot 2 = 10$ cm. En efecto: $4 + 6 + 10 = 20$ cm, perímetro do triángulo.

- ✚ Conta a lenda que Tales mediu a altura da pirámide de Keops comparando a sombra da pirámide coa sombra do seu bastón. Temos un bastón que mide 1 m. Se a sombra dunha árbore mide 12 m e a do bastón (á mesma hora do día e no **mesmo momento**) mide 0.8 m, canto mide a árbore?

As alturas da árbore e do bastón son proporcionais ás súas sombras (forman triángulos en posición *Tales*) polo que, se chamamos x á altura da árbore, podemos dicir:

$$\frac{0.8}{1} = \frac{12}{x}. \text{ Polo tanto, } x = 12/0.8 = 15 \text{ metros.}$$

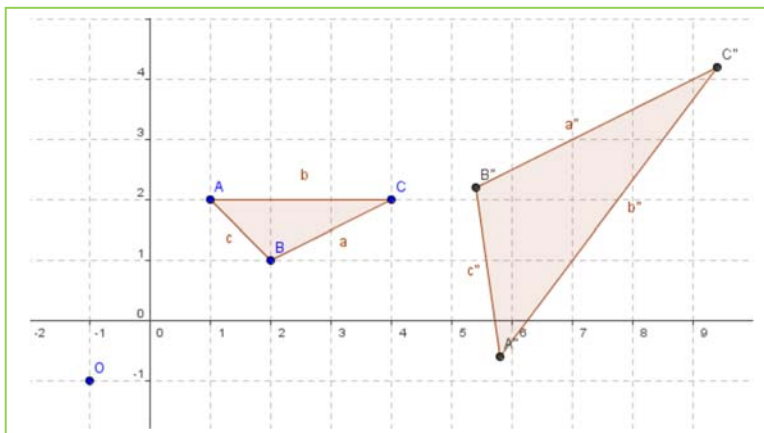
Actividades propostas

- Nunha foto hai un neno, que sabemos que mide 1.5 m, e un edificio. Medimos a altura do neno e do edificio na foto e resultan ser: 0.2 cm e 10 cm. Que altura ten o edificio?
- Debúxase un hexágono regular. Trázanse as súas diagonais e obtense outro hexágono regular. Indica a razón de semellanza entre os lados de ambos os hexágonos.
- Nun triángulo regular ABC dado, 1 cm, trazamos os puntos medios, M e N , de dous dos seus lados. Trazamos as rectas BN e CM que se cortan nun punto O . Son semellantes os triángulos MON e COB ? Cal é a razón de semellanza? Canto mide o lado MN ?
- Unha pirámide regular hexagonal de lado da base 3 cm e altura 10 cm, córtase por un plano a unha distancia de 4 cm do vértice, co que se obtén unha nova pirámide. Canto miden as súas dimensións?

1.3. Aplicación informática para comprender a semellanza de triángulos

✚ Utiliza Xeoxebra para analizar a semellanza entre triángulos.

- Abre unha nova ventá de *Xeoxebra*, comproba que aparecen os **Eixes** e a **Cuadrícula**.
- Coa ferramenta **Novo Punto** define os puntos $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ e $C(4, 2)$.
- Utiliza **Polígono** para debuxar o triángulo ABC .
- Define un **Novo Punto** de coordenadas $(-1, -1)$, o programa chámalle D . Co botón dereito do rato e a opción **Renomea**, chámalo O .



- Utiliza a ferramenta **Dilata obxecto desde punto indicado, segundo factor**, para dilatar o polígono ABC desde o punto O , con factor 2. Obtense o triángulo $A'B'C'$.
- Coa ferramenta **Reflicte obxecto en recta**, debuxa o simétrico do triángulo $A'B'C'$ con respecto ao segmento a do triángulo ABC . Obtense o triángulo $A''B''C''$.
- Selecciona o polígono $A'B'C'$ na Ventá alxébrica ou na área de traballo, e co botón dereito do rato desactiva a opción **Expón obxecto**, o triángulo $A'B'C'$ queda oculto. Observa que podes volvelo visualizar activando esta opción. Oculta da mesma forma os puntos A' , B' e C' .
- Para que as medidas aparezan con 5 decimais, activa **Posicións decimais** no menú **Opcións** e elixe 5.
- Despraza co punteiro o punto C , de modo que o triángulo ABC siga sendo un triángulo. Modifícanse ambos os triángulos pero mantéñense as súas propiedades, seguen sendo semellantes.

Actividades propostas

12. Xustifica que os triángulos ABC e $A''B''C''$ son semellantes. Calcula a razón de semellanza e a razón entre as súas áreas. Busca unha relación entre a razón de semellanza e a razón entre as áreas de dous triángulos semellantes.
13. Por que son semellantes os triángulos ABC e $A''B''C''$? Observa na **Ventá alxébrica** as lonxitudes dos seus lados e os valores das súas áreas. Cal é a razón de semellanza? Cal é a razón entre as áreas?
14. Debuxa distintos pentágonos e hexágonos que non sexan regulares e coa ferramenta **Dilata obxecto desde punto indicado, segundo factor**, constrúe outros semellantes.
 - a) Argumenta por que son semellantes.
 - b) Calcula en cada caso a razón de semellanza e a razón entre as súas áreas.
 - c) Pescuda como podes calcular a razón entre as áreas de polígonos semellantes a partir da razón de semellanza.

1.4. Proporcionalidade en lonxitudes, áreas e volumes

Xa sabes que:

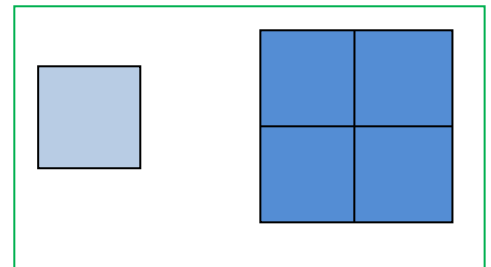
Dúas figuras son semellantes se as lonxitudes de elementos correspondentes son proporcionais. Ao coeficiente de proporcionalidade chámase razón de semellanza. En mapas, planos... á razón de semellanza chámase **escala**.

Áreas de figuras semellantes

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k , entón a razón entre as súas áreas é k^2 .

Exemplo:

Observa a figura da marxe. Se multiplicamos por 2 o lado do cadrado pequeno, a área do cadrado grande é $2^2 = 4$ veces a do pequeno.

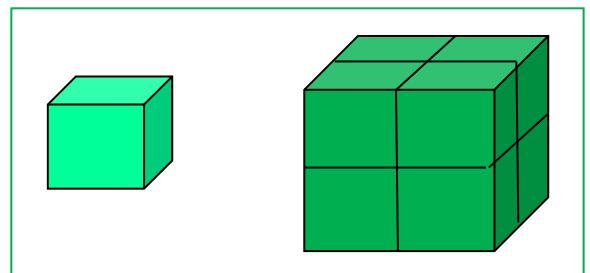


Volumes de figuras semellantes

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k , entón entre os seus volumes é k^3 .

Exemplo:

Observa a figura da marxe. Ao multiplicar por 2 o lado do cubo pequeno obtense o cubo grande. O volume do cubo grande é 8 (2^3) o do cubo pequeno.



Actividades resoltas

- ✚ A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída de ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis?
- ✚ O peso está relacionado co volume. A torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos e queremos construír unha, exactamente do mesmo material, que pese 1 quilo. Polo tanto, $k^3 = 8\,000\,000/1 = 8\,000\,000$, e $k = 200$. A razón de proporcionalidade entre as lonxitudes é de 200.
- ✚ Se a Torre Eiffel mide 300 m e chamamos x ao que mide a nosa temos: $300/x = 200$. Despexamos x que resulta igual a $x = 1.5$ m. Mide metro e medio! É moito maior que un lapis!

Actividades propostas

15. O diámetro dun pexego é tres veces maior có do seu óso e mide 8 cm. Calcula o volume do pexego, supoñendo que é esférico, e o do seu óso, tamén esférico. Cal é a razón de proporcionalidade entre o volume do pexego e o do óso?
16. Na pizzería teñen pizzas de varios prezos: 1 €, 2 € e 3 €. Os diámetros destas pizzas son: 15 cm, 20 cm e 30 cm, cal resulta máis económica? Calcula a relación entre as áreas e compáraa coa relación entre os prezos.
17. Unha maqueta dun depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidade e 5 metros de altura, queremos que teña unha capacidade de 1 litro. Que altura debe ter a maqueta?

2. LONXITUDES, ÁREAS E VOLUMES

2.1. Lonxitudes, áreas e volumes en prismas e cilindros

Recorda que:

Prismas

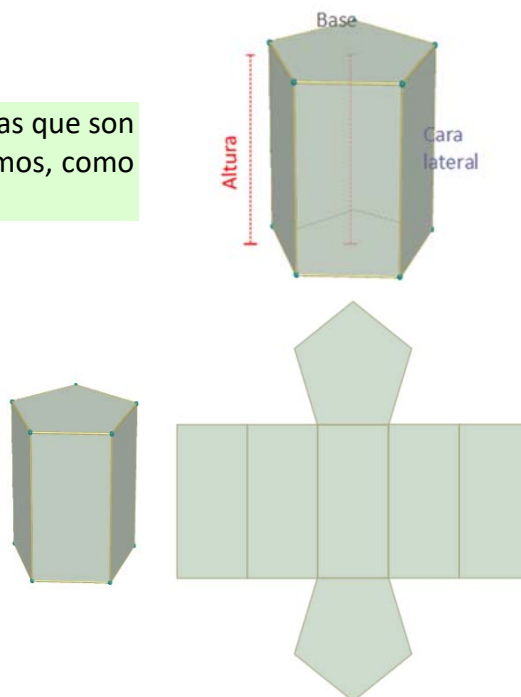
Un **prisma** é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases.

Áreas lateral e total dun prisma

A **área lateral** dun prisma é a suma das áreas das caras laterais.

Como as caras laterais son paralelogramos da mesma altura, que é a altura do prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma das áreas das caras laterais =
= Perímetro da base · altura do prisma.



Se denotamos por h a altura e por P_B o perímetro da base

$$\text{Área lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

A **área total** dun prisma é a área lateral máis o dobre da suma da área da base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Actividades resoltas

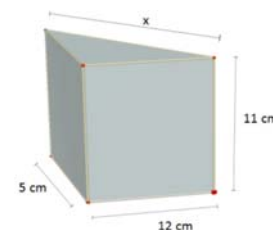
- ✚ *Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular recto de 11 cm de altura se a súa base é un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm.*

Calculamos en primeiro lugar a hipotenusa do triángulo da base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30 \text{ cm}; \quad A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330 \text{ cm}^2 \quad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390 \text{ cm}^2$$



Volume dun corpo xeométrico. Principio de *Cavalieri*

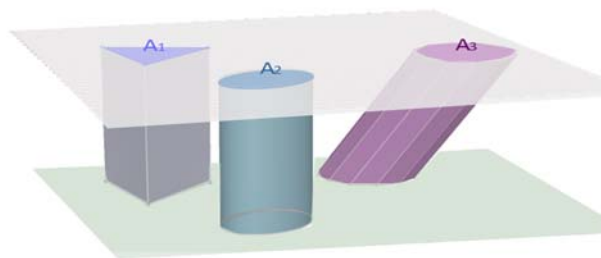
Recorda que:

Bonaventura Cavalieri, matemático do século XVII, enunciou o principio que leva o seu nome e que afirma:

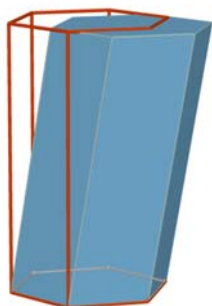
“Se dous corpos teñen a mesma altura e, ao cortalos por planos paralelos ás súas bases, se obteñen seccións coa mesma área, entón os volumes dos dous corpos son iguais”.

Exemplo:

Na figura adxunta as áreas das seccións A_1 , A_2 , A_3 , producidas por un plano paralelo ás bases, son iguais entón, segundo este principio, os volumes dos tres corpos son tamén iguais.



Volume dun prisma e dun cilindro



O volume dun prisma recto é o produto da área da base pola altura. Ademais, segundo o principio de *Cavalieri*, o volume dun prisma oblicuo coincide co volume dun prisma recto coa mesma base e altura. Se denotamos por V este volume, A_B a área da base e h a altura:

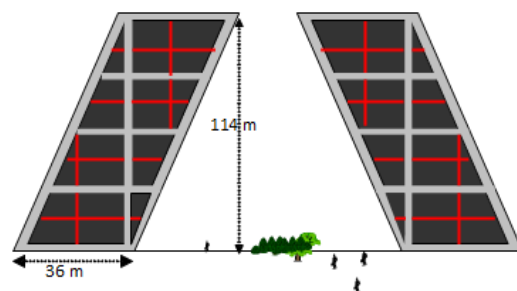
$$\text{Volume prisma} = V = A_B \cdot h$$

Tamén o volume dun cilindro, recto ou oblicuo é área da base por altura. Se chamamos R ao radio da base, A_B a área da base e h a altura, o volume escríbese:

$$\text{Volume cilindro} = V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Actividades resoltas

- ✚ As coñecidas torres Kio de Madrid son dúas torres xemelgas que están no Paseo da Castellana, xunto á Praza de Castilla. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa. Cada unha delas é un prisma oblicuo cuxa base é un cadrado de 36 metros dado e teñen unha altura de 114 metros. O volume interior de cada torre pode calcularse coa fórmula anterior:



$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744 \text{ m}^3$$

Actividades propostas

- Calcula o volume dun prisma recto de 20 dm de altura cuxa base é un hexágono de 6 dm de lado.
- Calcula a cantidade de auga que hai nun recipiente con forma de cilindro sabendo que a súa base ten 10 cm de diámetro e que a auga acada 12 dm de altura.

Áreas lateral e total dun cilindro

O cilindro é un corpo xeométrico desenvolvible. Se recortamos un cilindro recto ao longo dunha xeratriz, e o estendemos nun plano, obtemos dous círculos e unha rexión rectangular. Desta maneira obtense o seu desenvolvemento.

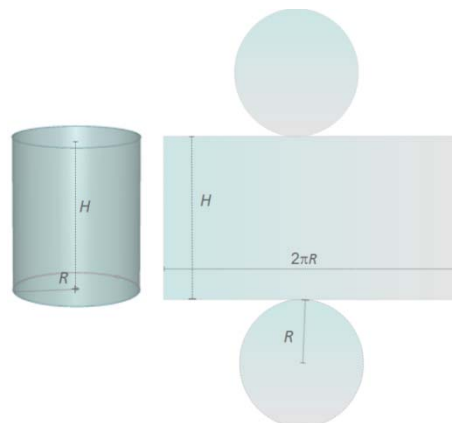
A partir deste podemos ver que a área lateral do cilindro está determinada pola área do rectángulo que ten como dimensións a lonxitude da circunferencia da base e a altura do cilindro.

Supoemos que a altura do cilindro é H e que R é o radio da base co que a área lateral A_L é:

$$A_L = \text{Lonxitude da base} \cdot \text{Altura} = (2\pi R) \cdot H = 2\pi RH$$

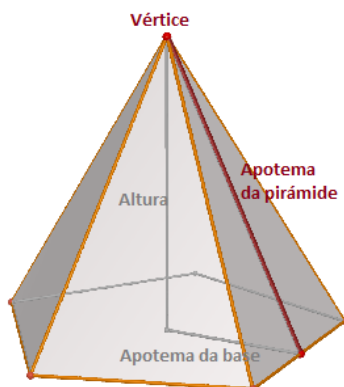
Se á expresión anterior lle sumamos a área dos dous círculos que constitúen as bases, obtemos a área total do cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$



2.2. Lonxitudes, áreas e volumes en pirámides e conos

Áreas lateral e total dunha pirámide e dun tronco de pirámide regulares



Unha **pirámide** é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común como lados ten a base.

A área lateral dunha pirámide regular é a suma das áreas das caras laterais.

Son triángulos isósceles iguais polo que, se a aresta da base mide b , a apotema da pirámide é Ap e a base ten n lados, esta área lateral é:

$$\text{Área lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

e como $n \cdot b = \text{Perímetro da base}$

$$A_L = \frac{\text{Perímetro da base} \cdot \text{Apotema da pirámide}}{2} = \frac{\text{Perímetro da base}}{2} \cdot \text{Apotema}$$

A área lateral dunha pirámide é igual ao semiperímetro pola apotema.

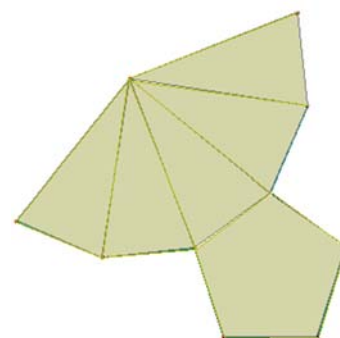
A área total dunha pirámide é a área lateral máis a área da base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

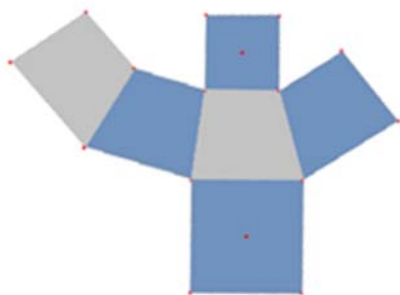
Un tronco de pirámide regular é un corpo xeométrico desenvolvible. No seu desenvolvemento aparecen tantas caras laterais como lados teñen as bases. Todas elas son trapezios isósceles.

Se B é o lado do polígono da base maior, b o lado da base

Desenvolvemento de pirámide pentagonal regular



Desenvolvemento de tronco de pirámide cuadrangular



menor, n o número de lados das bases e Ap é a altura dunha cara lateral

$$\begin{aligned} \text{Área lateral} &= a_o = n \cdot \frac{(B+b) \cdot Ap}{2} = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} \\ &= \frac{\text{Suma de perímetro das bases} \cdot \text{Apotema do tronco}}{2} \end{aligned}$$

A área total dun tronco de pirámide regular é a área lateral máis a suma das áreas das bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resoltas

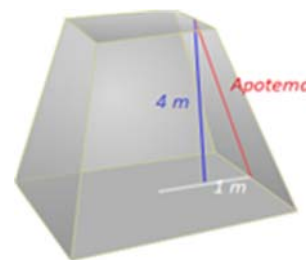
- ✚ Calculemos a área total dun tronco de pirámide regular de 4 m de altura se sabemos que as bases paralelas son cadrados de 4 m e de 2 m de lado.

En primeiro lugar, calculamos o valor da apotema. Tendo en conta que o tronco é regular e que as bases son cadradas fórmase un triángulo rectángulo no que se cumpre:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4.12 \text{ m}$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{(16 + 8) \cdot 4.12}{2} = 49.44 \text{ m}^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49.44 + 16 + 4 = 69.44 \text{ m}^2$$



Actividades propostas

- Calcula as áreas lateral e total dun prisma hexagonal regular sabendo que as arestas das bases miden 3 cm e cada aresta lateral 2 dm.
- A área lateral dun prisma regular de base cadrada é 16 m² e ten 10 m de altura. Calcula o perímetro da base.
- O lado da base dunha pirámide triangular regular é de 7 cm e a altura da pirámide 15 cm. Calcula a apotema da pirámide e a súa área total.
- Calcula a área lateral dun tronco de pirámide regular, sabendo que as súas bases son dous octógonos regulares de lados 3 e 8 dm e que a altura de cada cara lateral é de 9 dm.
- Se a área lateral dunha pirámide cuadrangular regular é 104 cm² e a aresta da base mide 4 cm, calcula a apotema da pirámide e a súa altura.

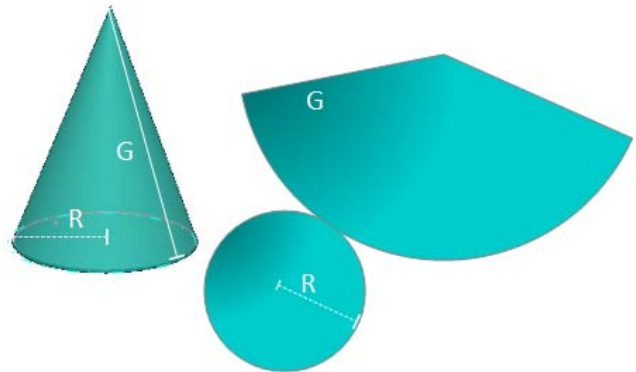


Áreas lateral e total dun cono

Recorda que:

Tamén o cono é un corpo xeométrico desenvolvable. Ao recortar, seguindo unha liña xeratriz e a circunferencia da base, obtemos un círculo e un sector circular con radio igual á xeratriz e lonxitude de arco igual á lonxitude da circunferencia da base.

Chamemos agora R ao radio da base e G á xeratriz. A área lateral do cono é a área do sector circular obtido. Para calculala pensemos que esta área debe ser directamente proporcional á lonxitude de arco que á súa vez debe coincidir coa lonxitude da circunferencia da base. Podemos escribir entón:



$$\frac{\text{A Lateral do cono}}{\text{Lonxitude de arco correspondente ao sector}} = \frac{\text{A total do círculo de radio } G}{\text{Lonxitude da circunferencia de radio } G}$$

É dicir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi G^2}{2\pi G}$ e despexando A_L temos:

$$A_L = \frac{2\pi R \pi G^2}{2\pi G} = \pi R G$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área do círculo da base, obtemos a área total do cono.

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2$$

Actividades resoltas

- ✚ Calcula a área total dun cono de 12 dm de altura, sabendo que a circunferencia da base mide 18.84 dm. (Toma 3.14 como valor de π)

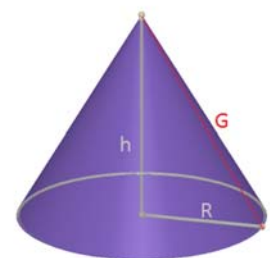
Calculamos en primeiro lugar o radio R da base:

$$2\pi R = 18.84 \Rightarrow R = \frac{18.84}{2\pi} \approx \frac{18.84}{6.28} = 3 \text{ dm.}$$

Calculamos agora a xeratriz G :

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12.37 \text{ dm.}$$

Entón $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 3 \cdot 12.37 + 3.14 \cdot 3^2 \approx 144.79 \text{ dm}^2$.



Áreas lateral e total dun tronco de cono

Recorda que:

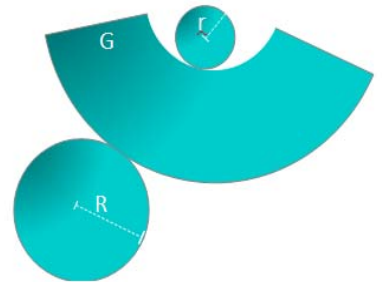
Ao cortar un cono por un plano paralelo á base, obtense un tronco de cono. Ao igual que o tronco de pirámide, é un corpo desenvolvable e o seu desenvolvemento constitúeno os dous círculos das bases xunto cun trapecio circular, cuxas bases curvas miden o mesmo que as circunferencias das bases.

Chamando R e r aos radios das bases e G á xeratriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$

Se á expresión anterior lle sumamos as áreas dos círculos das bases, obtemos a área total do tronco de cono:

$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$



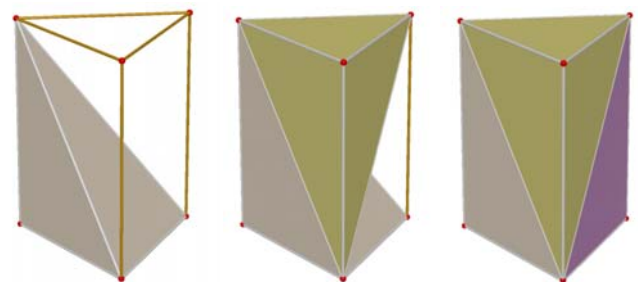
Volume dunha pirámide e dun cono

Recorda que:

Tamén nos casos dunha pirámide ou cono, as fórmulas do volume coinciden en corpos rectos e oblicuos.

O volume dunha pirámide é a terceira parte do volume dun prisma que ten a mesma base e altura.

$$\text{Volume pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$



Se comparamos cono e cilindro coa mesma base e altura, concluímos un resultado análogo

$$\text{Volume cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

Volume dun tronco de pirámide e dun tronco de cono

Existe unha fórmula para calcular o volume dun tronco de pirámide regular pero evitarémola. Resulta máis sinxelo obter o volume dun tronco de pirámide regular restando os volumes das dúas pirámides a partir das que se obtén.

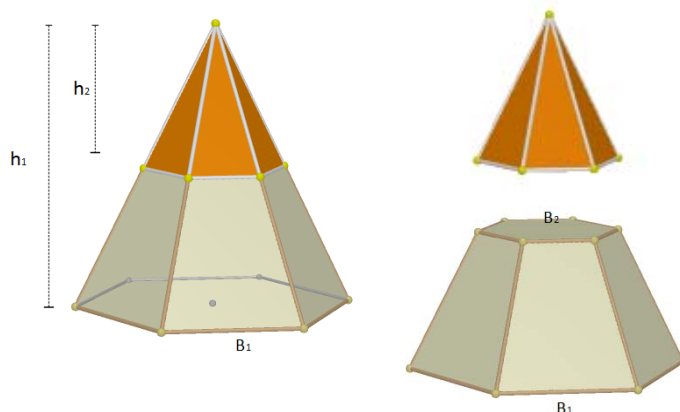
Se representamos por A_{B1} e A_{B2} as áreas das bases e por h_1 e h_2 as alturas das pirámides citadas, o volume do tronco de pirámide é:

Volume tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$

O volume do tronco de cono obtense de modo parecido. Se R_1 e R_2 son os radios das bases dos conos que orixinan o tronco e h_1 e h_2 as súas alturas, o volume do tronco de cono resulta:

$$\text{Volume tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$



Actividades resoltas

- ✚ *Calcula o volume dun tronco de pirámide regular de 10 cm de altura se as súas bases son dous hexágonos regulares dados 8 cm e 3 cm.*

Primeiro paso: calculamos as apotemas dos hexágonos das bases:

Para cada un destes hexágonos:

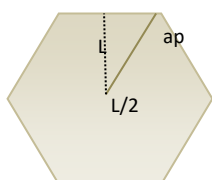
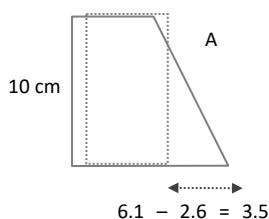


Figura 1

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}L}{2}$$

Logo as apotemas buscadas miden: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.6 \text{ cm}$; $ap_2 = \frac{8\sqrt{3}}{2} \approx 6.1 \text{ cm}$

Como segundo paso, calculamos a apotema do tronco de pirámide



$$6.1 - 2.6 = 3.5$$

Figura 2

$$A^2 = 10^2 + 3.5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112.25} \approx 10.6 \text{ cm}$$

En terceiro lugar, calculamos o valor dos segmentos x , y da figura 3 que nos servirán para obter as alturas e apotemas das pirámides que xeran o tronco co que

traballamos. Polo teorema de *Tales*:

$$\frac{x}{2.6} = \frac{10.6+x}{6.1} \Rightarrow 6.1 x = (10.6 + x)2.6 \Rightarrow 6.1 x - 2.6x = 27.56 \Rightarrow x = \frac{27.56}{3.5} \approx 7.9 \text{ cm}$$

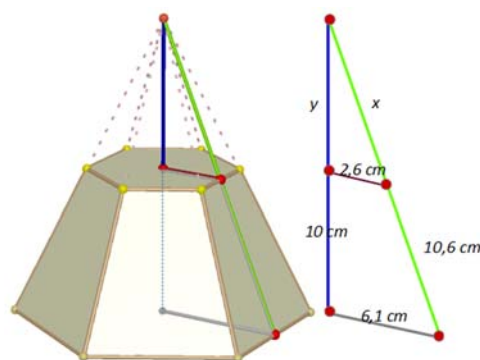


Figura 3

Entón a apotema da pirámide grande é $10.6 + 7.9 = 18.5$ cm e o da pequena 7.9 cm. E aplicando o teorema de *Pitágoras*:

$$y^2 = x^2 - 2 \cdot 6^2 = 7 \cdot 9^2 - 2 \cdot 6^2 = 55.65 \Rightarrow y = \sqrt{55.65} \approx 7.5 \text{ cm}$$

Logo as alturas das pirámides xeradoras do tronco miden $10 + 7.5 = 17.5$ cm e 7.5 cm.

Por último calculamos o volume do tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 18.5 \cdot 17.5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 7.9 \cdot 7.5}{2} = \frac{15\,540}{6} - \frac{1\,066.5}{6} = 2\,412.25 \text{ cm}^3$$

Actividades propostas

25. Unha columna cilíndrica ten 35 cm de diámetro e 5 m de altura. Cal é a súa área lateral?
26. O radio da base dun cilindro é de 7 cm e a altura é o triplo do diámetro. Calcula a súa área total.
27. Calcula a área lateral dun cono recto sabendo que a súa xeratriz mide 25 dm e o seu radio da base 6 dm.
28. A circunferencia da base dun cono mide 6.25 m e a súa xeratriz 12 m. Calcula a área total.

2.3. Lonxitudes, áreas e volumes na esfera

Recorda que:

Área dunha esfera

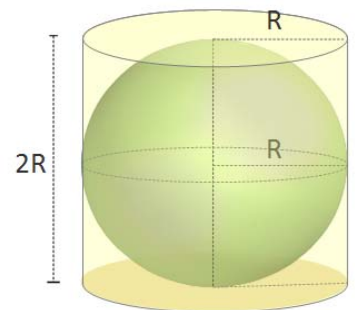
A esfera non é un corpo xeométrico desenvolvable polo que é máis complicado que nos casos anteriores encontrar unha fórmula para calcular a súa área.

Arquímedes demostrou que a área dunha esfera é igual que a área lateral dun cilindro circunscrito á esfera, é dicir, un cilindro co mesmo radio da base que o radio da esfera e cuxa altura é o diámetro da esfera.

Se chamamos R ao radio da esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

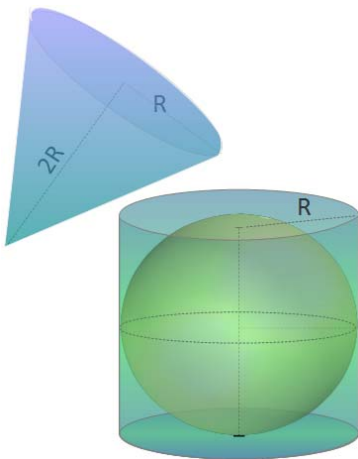
A área dunha esfera equivale á área de catro círculos máximos.



Actividades propostas

29. Unha esfera ten 4 m de radio. Calcula:
 - a) A lonxitude da circunferencia máxima.
 - b) A área da esfera.

Volume da esfera



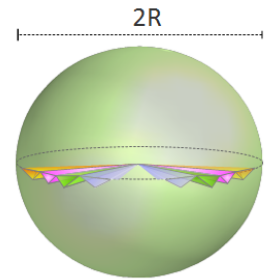
Volvamos pensar nunha esfera de radio R e no cilindro que a circunscribe. Para encher con auga o espazo que queda entre o cilindro e a esfera, precísase unha cantidade de auga igual a un terzo do volume total do cilindro circunscrito.

Dedúcese entón que a suma dos volumes da esfera de radio R e do cono de altura $2R$ e radio da base R , coincide co volume do cilindro circunscrito á esfera de radio R . Polo tanto:

$$\text{Volume}_{\text{esfera}} = \text{Volume}_{\text{cilindro}} - \text{Volume}_{\text{cono}} \Rightarrow$$

$$\text{Volume}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Existen demostracións máis rigorosas que avalan este resultado experimental que describimos. Así, por exemplo, o volume da esfera pódese obter como suma dos volumes das pirámides que a recobren, todas elas de base triangular sobre a superficie da esfera e con vértice no centro da mesma.



Actividades propostas

- 30.** O depósito de gasóleo da casa de Irene é un cilindro de 1 m de altura e 2 m de diámetro. Irene chamou ao subministrador de gasóleo porque no depósito soamente quedan 140 litros.
- Cal é, en dm^3 , o volume do depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).
 - Se o prezo do gasóleo é de 0.80 € cada litro, canto deberá pagar a nai de Irene por encher o depósito?
- 31.** Comproba que o volume da esfera de radio 4 dm , sumado co volume dun cono do mesmo radio da base e 8 dm de altura, coincide co volume dun cilindro que ten 8 dm de altura e 4 dm de radio da base.

2.4. Lonxitudes, áreas e volumes de poliedros regulares

Recorda que:

Un poliedro regular é un poliedro no cal todas as súas caras son polígonos regulares iguais e no cal os seus ángulos poliedros son iguais.

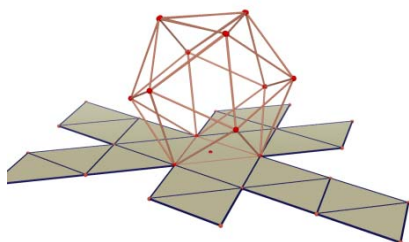
Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.



Área total dun poliedro regular

Como as caras dos poliedros regulares son iguais, o cálculo da área total dun poliedro regular redúcese a calcular a área dunha cara e despois multiplícala polo número de caras.

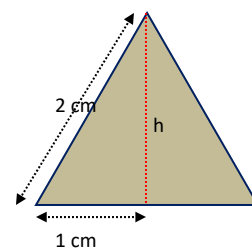
Actividades resoltas



Calcula a área total dun icosaedro de 2 cm de aresta.

Todas as súas caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos a altura h que divide á base en dous segmentos iguais

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} \text{ cm}$$



Logo a área dunha cara é:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e polo tanto:}$$

$$\text{Área icosaedro} = 20 \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

3. INICIACIÓN Á XEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. Puntos e vectores

No plano

Xa sabes que

Un conxunto formado pola **orixe** O , os dous **eixes de coordenadas** e a **unidade de medida** é un **sistema de referencia cartesiano**.

As **coordenadas dun punto** A son un par ordenado de números reais (x, y) , sendo “ x ” a primeira coordenada ou **abscisa** e “ y ” a segunda coordenada ou **ordenada**.

Dados dous puntos, $D(d_1, d_2)$ e $E(e_1, e_2)$, as compoñentes do vector de orixe D e extremo E , DE , veñen dadas por $DE = (e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.

Exemplo:

As coordenadas dos puntos da figura son:

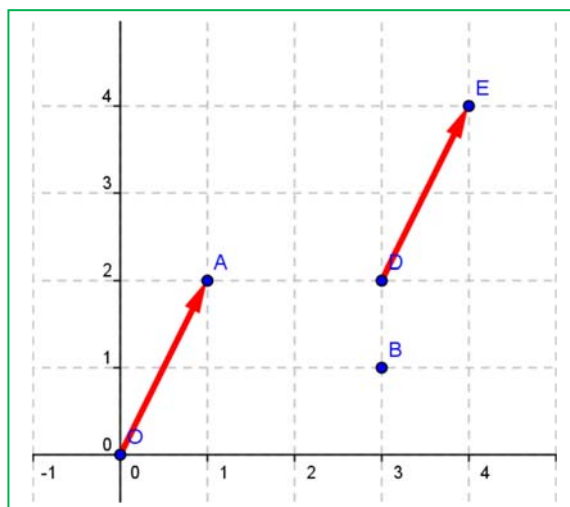
$O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $D(3, 2)$ e $E(4, 4)$.

As compoñentes do vector DE son:

$$DE = (4 - 3, 4 - 2) = (1, 2)$$

As compoñentes do vector OA son:

$$OA = (1 - 0, 2 - 0) = (1, 2)$$



DE e OA son representantes do mesmo vector libre de compoñentes $(1, 2)$.

No espazo de dimensión tres

As **coordenadas dun punto** A son unha terna ordenada de números reais (x, y, z) sendo “ z ” a altura sobre o plano OXY .

Dados dous puntos, $D(d_1, d_2, d_3)$ e $E(e_1, e_2, e_3)$, as compoñentes do vector de orixe D e extremo E , DE , veñen dadas por $DE = (e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Exemplo:

As coordenadas de puntos no espazo son:

$O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 7)$, $D(3, 2, 1)$ e $E(4, 4, 4)$.

As compoñentes do vector DE son: $DE = (4 - 3, 4 - 2, 4 - 1) = (1, 2, 3)$.

As compoñentes do vector OA son: $OA = (1 - 0, 2 - 0, 3 - 0) = (1, 2, 3)$.

DE e OA son representantes do mesmo vector libre de compoñentes $(1, 2, 3)$.

Actividades propostas

32. Representa nun sistema de referencia no espazo de dimensión tres os puntos:

$O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 3)$, $B(3, 1, 7)$, $D(3, 2, 1)$ e $E(4, 4, 4)$ e vectores: DE e OA .

33. O vector de compoñentes $u = (2, 3)$ e orixe $A = (1, 1)$, que extremo ten?

3.2. Distancia entre dous puntos

No plano

A distancia entre dous puntos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ é:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

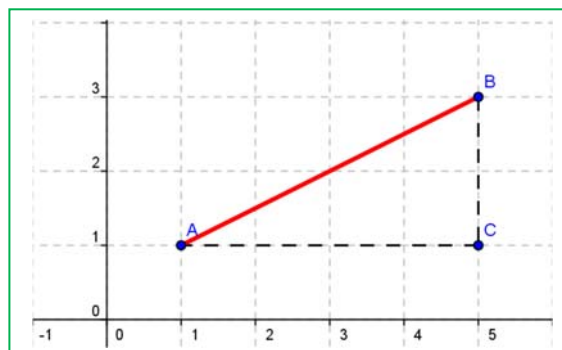
Exemplo:

Polo Teorema de *Pitágoras* sabemos que a distancia ao cadrado entre os puntos $A = (1, 1)$ e $B = (5, 3)$ é igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

xa que o triángulo ABC é rectángulo de catetos 4 e 2.

Logo $D \approx 4.47$.



No espazo de dimensión tres

A distancia entre dous puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ é igual a:

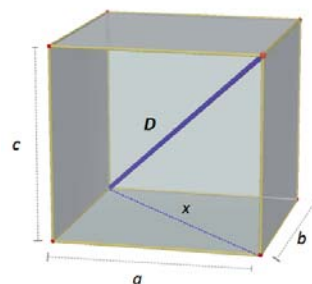
$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Exemplo:

A distancia ao cadrado entre os puntos $A = (1, 1, 2)$ e $B = (5, 3, 8)$ é igual, polo Teorema de *Pitágoras* no espazo, a

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56.$$

Logo $D \approx 7.5$.



Actividades propostas

34. Calcula a distancia entre os puntos $A(6, 2)$ e $B(3, 9)$.
35. Calcula a distancia entre os puntos $A(6, 2, 5)$ e $B(3, 9, 7)$.
36. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\mathbf{u} = (3, 4)$
37. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\mathbf{u} = (3, 4, 1)$.
38. Debuxa un cadrado de diagonal o punto $O(0, 0)$ e $A(3, 3)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal do cadrado.
39. Debuxa un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ e $A(3, 3, 3)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.
40. Sexa $X(x, y)$ un punto xenérico do plano e $O(0, 0)$ a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de O unha distancia D .
41. Sexa $X(x, y, z)$ un punto xenérico do espazo e $O(0, 0, 0)$ a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de O unha distancia D .

3.3. Ecuacións e rectas e planos

Ecuacións da recta no plano

Xa sabes que a **ecuación dunha recta** no plano é: $y = mx + n$. É a expresión dunha recta como función. Esta ecuación denomínase **ecuación explícita** da recta.

Se pasamos todo ao primeiro membro da ecuación, quedanos unha ecuación: $ax + by + c = 0$, que se denomina **ecuación implícita** da recta.

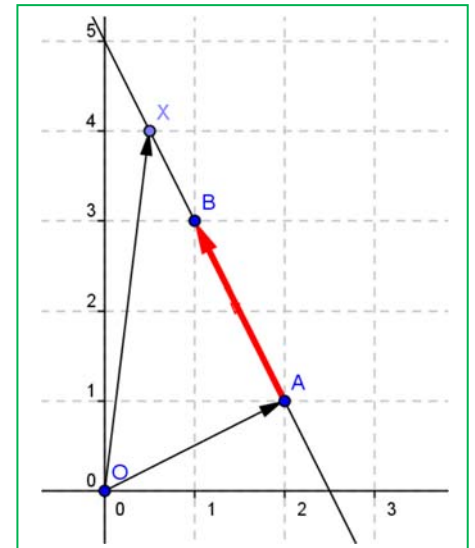
Ecuación vectorial: Tamén unha recta queda determinada se coñecemos un punto: $A(a_1, a_2)$ e un vector de dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Observa que o vector \mathbf{OX} pode escribirse como suma do vector \mathbf{OA} e dun vector da mesma dirección que \mathbf{v} , $t\mathbf{v}$. É dicir:

$$\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{v},$$

onde t se denomina parámetro. Para cada valor de t , tense un punto distinto da recta. Con coordenadas quedaría:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

que é a **ecuación paramétrica** da recta.



Actividades resoltas

- ✚ Da recta de ecuación explícita $y = -2x + 5$ coñecemos a pendente, -2 , e a ordenada na orixe, 5 . A pendente dános un vector de dirección da recta, en xeral $(1, m)$ e neste exemplo: $(1, -2)$. A ordenada na orixe proporcionáanos un punto, en xeral o $(0, n)$, e neste exemplo, $(0, 5)$. A ecuación paramétrica desta recta é:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

A súa ecuación implícita é: $-2x - y + 5 = 0$.

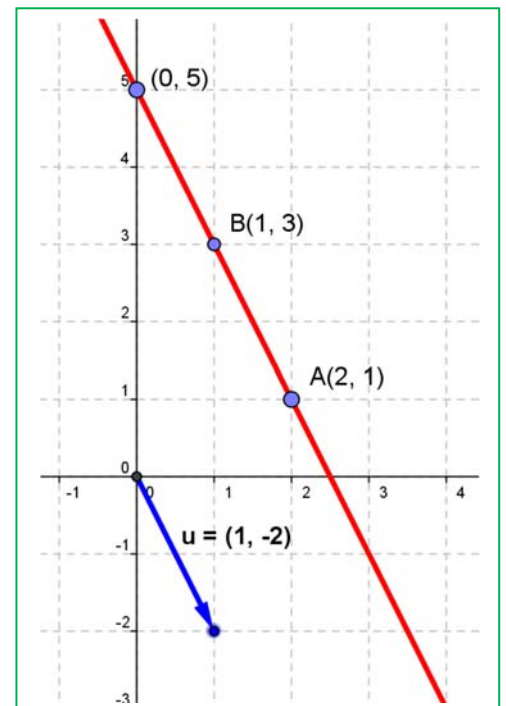
- ✚ Escribe a ecuación paramétrica da recta que pasa polo punto $A(2, 1)$ e ten como vector de dirección $\mathbf{v} = (1, -2)$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

- ✚ Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(2, 1)$ e $B(1, 3)$. Podemos tomar como vector de dirección o vector $\mathbf{AB} = (1 - 2, 3 - 1) = (-1, 2)$, e escribir a súa ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

A recta é, nos tres exemplos, a mesma, a da figura. Con iso podemos observar que unha recta pode ter moitas ecuacións paramétricas dependendo do punto e do vector de dirección que se tome. Pero eliminando o parámetro e despejando “ y ” chegamos a unha única ecuación explícita.



Actividades propostas

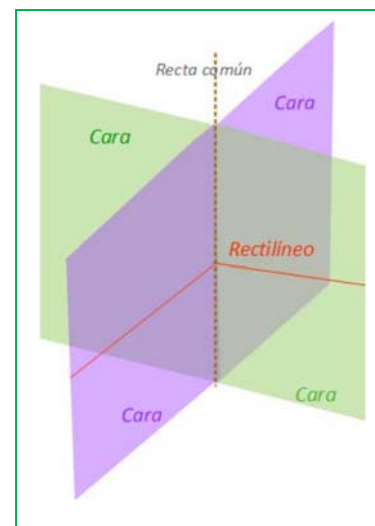
42. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(6, 2)$ e $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita e paramétrica. Representaa graficamente.

Ecuacións da recta e o plano no espazo.

A ecuación **implícita dun plano** é: $ax + by + cz + d = 0$. Observa que é parecida á ecuación implícita da recta pero cunha compoñente máis.

A **ecuación vectorial dunha recta** no espazo é: $\mathbf{OX} = \mathbf{OA} + t\mathbf{v}$, aparentemente igual á ecuación vectorial dunha recta no plano pero ao escribir as coordenadas, agora puntos e vectores, ten tres compoñentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$



Unha recta tamén pode vir dada como intersección de dous planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dous puntos determinan unha recta e tres puntos determinan un plano.

Actividades resoltas

- ✚ Escribe a ecuación da recta no espazo que pasa polos puntos $A(1, 2, 3)$ e $B(3, 7, 1)$.

Tomamos como vector de dirección da recta o vector $\mathbf{AB} = (3 - 1, 7 - 2, 1 - 3) = (2, 5, -2)$ e como punto, por exemplo o A, entón:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar as ecuacións de dous planos que se corten na recta, eliminando t en dúas ecuacións. Por exemplo, sumando a primeira coa terceira tense: $x + z = 4$. Multiplicando a primeira ecuación por 5, a segunda por 2 e restando tense: $5x - 2y = 1$. Logo outra ecuación da recta, como intersección de dous planos, é:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

✚ Escribe a ecuación do plano que pasa polos puntos A e B da actividade anterior, e $C(2, 6, 2)$.

Impoñemos á ecuación $ax + by + cz + d = 0$ que pase polos puntos dados:

$$a + 2b + 3c + d = 0$$

$$3a + 7b + c + d = 0$$

$$2a + 6b + 2c + d = 0.$$

Restamos á segunda ecuación a primeira, e á terceira, tamén a primeira:

$$a + 2b + 3c + d = 0$$

$$2a + 5b - 2c = 0$$

$$a + 4b - c = 0$$

Multiplicamos por 2 a terceira ecuación e restámoslle a segunda:

$$a + 2b + 3c + d = 0$$

$$a + 4b - c = 0$$

$$3b = 0$$

Xa coñecemos un coeficiente, $b = 0$. Substituímoslo nas ecuacións:

$$a + 3c + d = 0$$

$$a - c = 0$$

Vemos que $a = c$, que substituído na primeira: $4c + d = 0$. Sempre, ao ter 3 ecuacións e 4 coeficientes, teremos unha situación como a actual, na que o podemos resolver salvo un factor de proporcionalidade. Se $c = 1$, entón $d = -4$. Logo $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = -4$. É o plano de ecuación:

$$x + z = 4$$

plano que xa obtivemos na actividade anterior.

Actividades propostas

43. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(6, 2, 5)$ e $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, e como intersección de dous planos.
44. Escribe as ecuacións dos tres planos coordenados.
45. Escribe as ecuacións dos tres eixes coordenados no espazo.
46. No cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ e $A(6, 6, 6)$ escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe as ecuacións de todas as súas arestas e as coordenadas dos seus vértices.

3.4. Algunhas ecuacións

Actividades resoltas

✚ Que puntos verifican a ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

Depende! Depende de se estamos nun plano ou no espazo.

No plano podemos ver a ecuación como que o cadrado da distancia dun punto xenérico $X(x, y)$ á orixe $O(0, 0)$ é sempre igual a 1:

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

O lugar de todos os puntos do plano que distan 1 da orixe é a circunferencia de centro $O(0, 0)$ e radio 1.

No espazo o punto xenérico $X(x, y, z)$ ten tres coordenadas e $O(0, 0, 0)$, tamén. Non é unha circunferencia, nin unha esfera. Que é entón? O que está claro é que se cortamos polo plano OXY , ($z = 0$) temos a circunferencia anterior. E se cortamos polo plano $z = 3$? Tamén unha circunferencia. É un cilindro. O cilindro de eixe, o eixe vertical, e de radio da base 1.

✚ Que puntos verifican a ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Agora si. Si podemos aplicar a distancia dun punto xenérico $X(x, y, z)$ á orixe $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

É a ecuación da superficie esférica de centro a orixe e radio 1.

Actividades propostas

47. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, o eixe OZ e radio 2.

48. Escribe a ecuación da esfera de centro a orixe de coordenadas e radio 2.

49. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ e radio 1.

50. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro $A(2, 5)$ e radio 2.

51. Ao cortar a un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

CURIOSIDADES. REVISTA



Grace Chisholm Young (1868 - 1944)

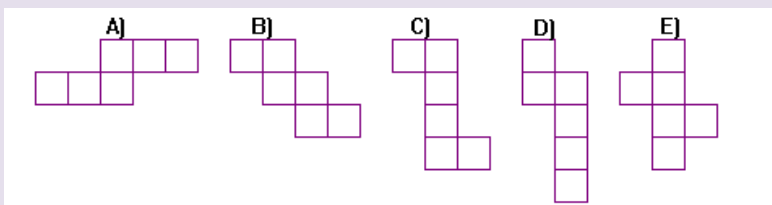


Grace Chisholm Young naceu o 15 de marzo de 1868, preto de Londres, Inglaterra, durante o reinado da raíña Vitoria. Para facérmonos unha idea sobre o estado da educación nesa época recordemos que cara a 1881, o 20 % da poboación de Inglaterra aínda non sabía escribir o seu nome.

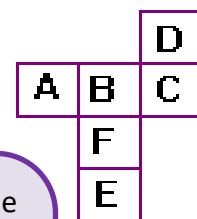
Era a máis pequena de catro irmáns (tres superviventes) e tamén a máis consentida. Só lle ensinaban o que quería aprender e, neste sentido, a súa educación foi un tanto informal. Gustáballe o cálculo mental e a música. Porén foi unha preparación suficiente para, aos 17 anos, pasar os exames de *Cambridge (Cambridge Senior Examination)*. Estudou Matemáticas pero, para doutorarse, foi a *Göttingen* onde se doutorou en 1895. En 1896 casou con *William Young* co que tivo seis fillos. Ocupou moito do seu tempo na educación dos seus fillos.

Escrebiu libros e moitos artigos. Escrebiu **Primeiro libro de Xeometría**. Nel Grace escribía que a xeometría en dimensión tres recibía, en primaria e na secundaria, moita menos atención que a xeometría do plano. Opinaba que isto non debía ser así porque *“en certo sentido a xeometría plana é máis abstracta que a tridimensional”*, pois consideraba que a xeometría tridimensional era máis natural. Pero admitía, porén, é moi difícil representar figuras tridimensionais nunha superficie bidimensional como é a páxina dun libro, e consideraba que esta era a razón pola que non se traballaba (e actualmente tampouco se traballa) adecuadamente. Grace opinaba que o alumnado debía construír figuras espaciais, polo que incluíu no seu libro moitos diagramas de figuras tridimensionais para seren recortados e construídos. Opinaba que esa era a forma na que o alumnado debía familiarizarse coas propiedades destas figuras e que utilizándoas, coa súa axuda, podía visualizar os teoremas da xeometría tridimensional.

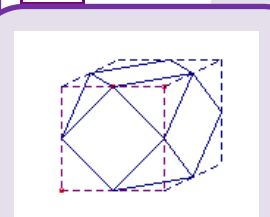
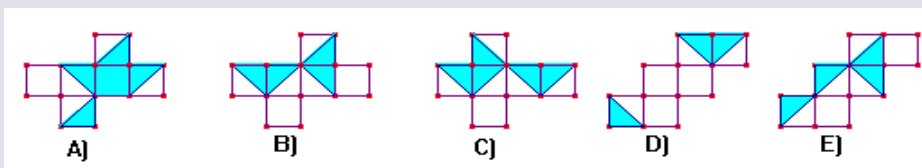
Cal das seguintes figuras non representa o desenvolvemento dun cubo?



Ao formar un cubo co desenvolvemento da figura, cal será a letra oposta a F?

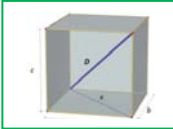


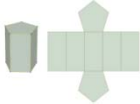








A partir dun destes desenvolvementos bicolores pódese fabricar un cubo de forma que as cores sexan as mesmas nas dúas partes de cada unha das arestas. Cal deles o verifica?



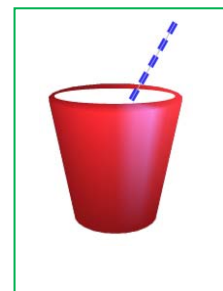
Desenvólveo .

RESUMO

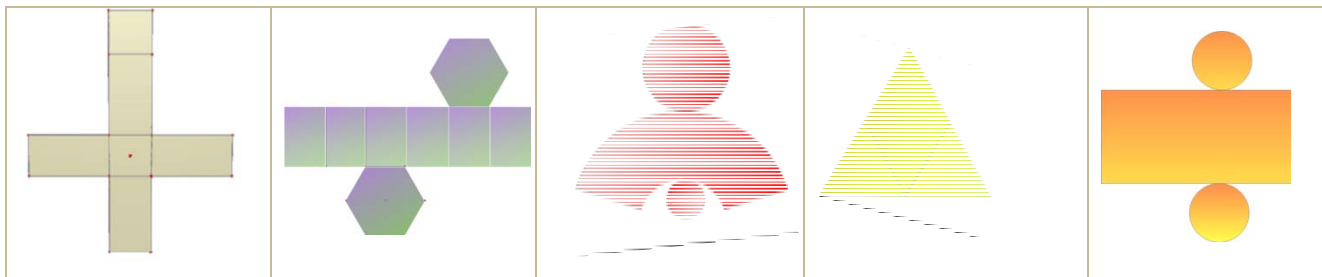
Teorema de Pitágoras no espazo	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$		$A = 2, b = 3, c = 4$, entón $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5.4$.
Teorema de Tales	Dadas dúas rectas, r e r' , que se cortan no punto O , e dúas rectas paralelas entre si, a e b . Se a recta a corta ás rectas r e r' nos puntos A e C , e a recta b corta ás rectas r e r' nos puntos B e D , entón os segmentos correspondentes son proporcionais.		
Poliedros regulares	Un poliedro regular é un poliedro no que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e no que os seus ángulos poliedros son iguais. Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.		
Prismas		$A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$ $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides		$A_{Lateral} = \frac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volume = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro		$A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volume = \frac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$		
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volume = \frac{4}{3}\pi R^3$		
Ecuacións da recta no plano	Ecuación explícita: $y = mx + n$. Ecuación implícita: $ax + by + c = 0$ Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$		
Ecuacións da recta e o plano no espazo.	Ecuación implícita dun plano: $ax + by + cz + d = 0$ Ecuación paramétrica dunha recta: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$		

EXERCICIOS E PROBLEMAS**Teorema de Pitágoras e teorema de Tales**

1. Calcula o volume dun tetraedro regular de lado 7 cm .
2. Calcula a lonxitude da diagonal dun cadrado de lado 1 m .
3. Calcula a lonxitude da diagonal dun rectángulo de base 15 cm e altura 6 cm .
4. Debuxa un paralelepípedo cuxas arestas midan 4 cm , 5 cm e 6 cm que non sexa un ortoedro. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.
5. Se o paralelepípedo anterior fose un ortoedro, canto mediría a súa diagonal?
6. Un vaso de 11 cm de altura ten forma de tronco de cono no que os radios das bases son de 5 e 3 cm . Canto medirá como mínimo unha culleriña para que sobresaia do vaso polo menos 2 cm ?
7. É posible gardar nunha caixa con forma de ortoedro de arestas 4 cm , 3 cm e 12 cm un bolígrafo de 13 cm de lonxitude?
8. Calcula a diagonal dun prisma recto de base cadrada sabendo que o lado da base mide 6 cm e a altura do prisma 8 cm .
9. Se un ascensor mide 1.2 m de ancho, 1.6 m de longo e 2.3 m de altura, é posible introducir nel unha escaleira de 3 m de altura?
10. Cal é a maior distancia que se pode medir en liña recta nunha habitación que ten 6 m de ancho, 8 m de longo e 4 m de altura?
11. Calcula a lonxitude da aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 3.46 cm .
12. Calcula a distancia máxima entre dous puntos dun tronco de cono cuxas bases teñen radios 5 cm e 2 cm , e altura 10 cm .
13. Nunha pizzería a pizza de 15 cm de diámetro vale 2 € e a de 40 cm vale 5 € . Cal ten mellor prezo?
14. Vemos no mercado unha pescada de 30 cm que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?
15. Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual abrigados, cal dos dous terá máis frío?

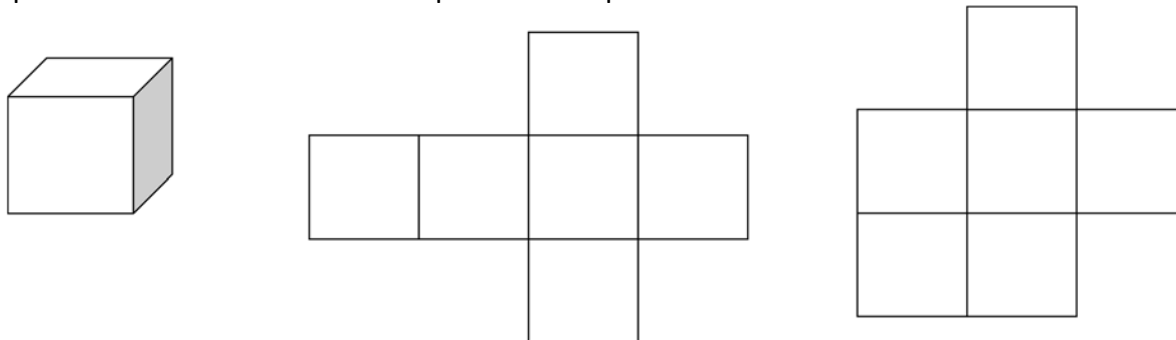
**Lonxitudes, áreas e volumes**

16. Identifica a que corpo xeométrico pertencen os seguintes desenvolvementos:

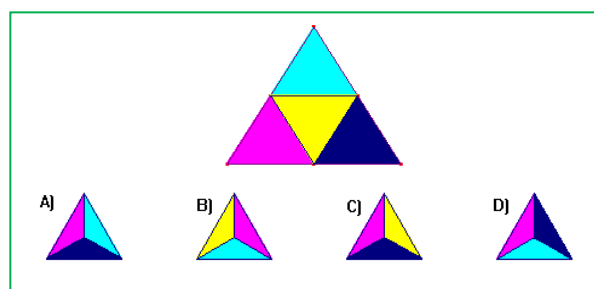


17. Poderá existir un poliedro regular cuxas caras sexan hexagonais? Razona a resposta.
18. Cantas diagonais podes trazar nun cubo? E nun octaedro?

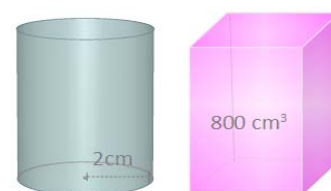
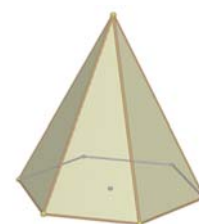
19. Podes encontrar dúas arestas paralelas nun tetraedro? E en cada un dos restantes poliedros regulares?
20. Utiliza unha trama de cadrados ou papel cuadriculado e busca todos os deseños de seis cadrados que se che ocorran. Decide cales poden servir para construír un cubo.



21. O triángulo da figura pregouse para obter un tetraedro. Tendo en conta que o triángulo non está pintado por detrás, cal das seguintes vistas en perspectiva do tetraedro é falsa?



22. Un prisma de 8 dm de altura ten como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm e 4 dm . Calcula as áreas lateral e total do prisma.
23. Debuxa un prisma hexagonal regular que teña 3 cm de aresta basal e 0.9 dm de altura e calcula as áreas da base e total.
24. Un prisma pentagonal regular de 15 cm de altura ten unha base de 30 cm^2 de área. Calcula o seu volume.
25. Calcula a área total dun ortoedro de dimensións 2.7 dm , 6.2 dm e 80 cm .
26. Calcula a superficie total e o volume dun cilindro que ten 7 m de altura e 3 cm de radio da base.
27. Calcula a área total dunha esfera de 7 cm de radio.
28. Calcula a apotema dunha pirámide regular sabendo que a súa área lateral é de 150 cm^2 e a súa base é un hexágono de 4 cm dado.
29. Calcula a apotema dunha pirámide hexagonal regular sabendo que o perímetro da base é de 36 dm e a altura da pirámide é de 6 dm . Calcula tamén a área total e o volume desta pirámide.
30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 16 cm xira arredor do seu cateto menor xerando un cono. Calcula a área lateral, a área total e o volume.
31. Tres bólas de metal de radios 15 dm , 0.4 m e 2 m fúndense nunha soa, cal será o diámetro da esfera resultante?
32. Cal é a capacidade dun pozo cilíndrico de 1.50 m de diámetro e 30 m de profundidade?
33. Canto cartón precisamos para construír unha pirámide cuadrangular regular se queremos que o lado da base mida 12 cm e que a súa altura sexa de 15 cm ?
34. Calcula o volume dun cilindro que ten 2 cm de radio da base e a mesma altura que un prisma cuxa base é un cadrado de 4 cm de lado e 800 cm^3 de volume.



35. Cal é a área da base dun cilindro de 1.50 m de alto e 135 dm^3 de volume?

36. A auga dun manancial condúcese ata uns depósitos cilíndricos que miden 10 m de radio da base e 20 m de altura. Logo embotéllase en bidóns de 2.5 litros. Cantos envases se enchen con cada depósito?

37. Calcula a cantidade de cartolina necesaria para construír un [anel](#) de 10 tetraedros cada un dos cales ten un centímetro de aresta.



38. Ao facer o desenvolvemento dun prisma triangular regular de 5 dm de altura, resultou un rectángulo dun metro de diagonal como superficie lateral. Calcula a área total.

39. Determina a superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 cm de lado da base e 5 cm de altura.



40. O Concello de Madrid colocou unhas xardineiras de pedra nas súas rúas que teñen forma de prisma hexagonal regular. A cavidade interior, onde se deposita a terra, ten 80 cm de profundidade e o lado do hexágono interior é de 60 cm . Calcula o volume de terra que enchería unha xardineira por completo.

41. Unha habitación ten forma de ortoedro e as súas dimensións son directamente proporcionais aos números 2, 4 e 8. Calcula a área total e o volume se ademais se sabe que a diagonal mide 18.3 m .

42. Un ortoedro ten 0.7 dm de altura e 8 dm^2 de área total. A súa lonxitude é o dobre da súa anchura, cal é o seu volume?

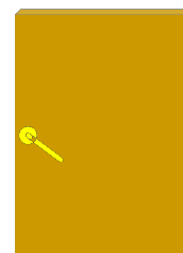
43. Se o volume dun cilindro de 15 cm de altura é de 424 cm^3 , calcula o radio da base do cilindro.

44. Instaláron na casa de Xoán un depósito de auga de forma cilíndrica. O diámetro da base mide 2 metros e a altura é de 3 metros. a) Calcula o volume do depósito en m^3 . b) Cantos litros de auga caben no depósito?

45. Un envase dun litro de leite ten forma de prisma, a base é un cadrado que ten 10 cm de lado. a) Cal é, en cm^3 , o volume do envase? b) Calcula a altura do envase en cm .

46. Unha circunferencia de lonxitude 18.84 cm xira arredor dun dos seus diámetros xerando unha esfera. Calcula o seu volume.

47. Unha porta mide 1.8 m de alto, 70 cm de ancho e 3 cm de espesor. O prezo da instalación é de 100 € e cóbrase 5 € por m^2 en concepto de vernizado, ademais do custe da madeira, que é de 280 € cada m^3 . Calcula o custe da porta se só se realiza o vernizado das dúas caras principais.

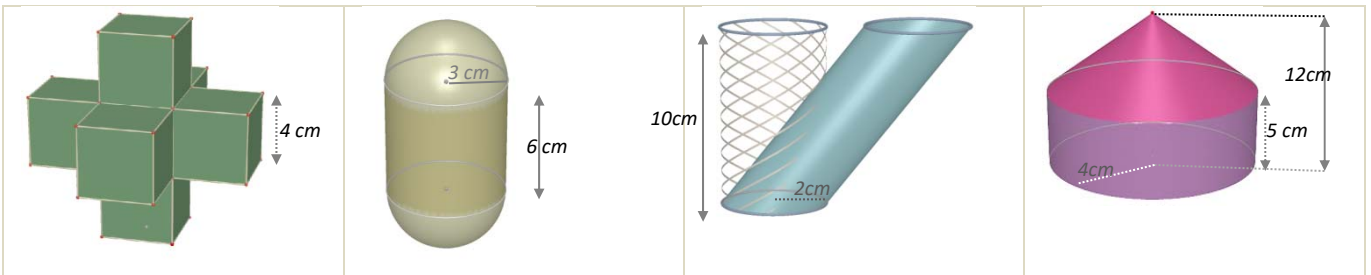


48. A auga contida nun recipiente cónico de 21 cm de altura e 15 cm de diámetro da base vértese nun vaso cilíndrico de 15 cm de diámetro da base. Ata que altura chegará a auga?

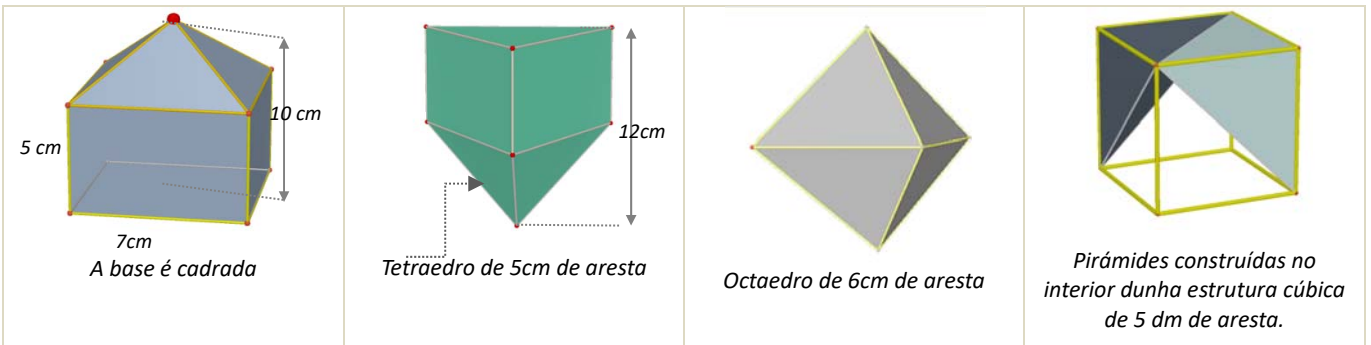
49. Segundo *Arquímedes*, que dimensións ten o cilindro circunscrito a unha esfera de 7 cm de radio que ten a súa mesma área? Calcula esta área.

50. Cal é o volume dunha esfera na que a lonxitude dunha circunferencia máxima é 251.2 m ?

51. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



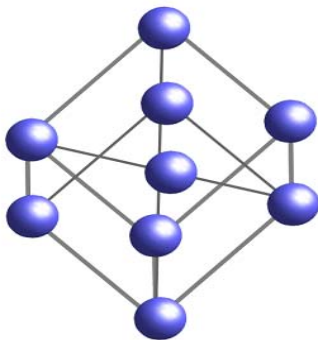
52. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



53. Na construción dun globo aerostático esférico dun metro de radio emprégase lona que ten un custe de 300 €/m^2 . Calcula o importe da lona necesaria para a súa construción.

54. Calcula o radio dunha esfera que ten 33.51 dm^3 de volume.

55. O *Atomium* é un monumento de Bruxelas que reproduce unha molécula de ferro. Consta de 9 esferas de aceiro de 18 m de diámetro que ocupan os vértices e o centro dunha estrutura cúbica de 103 m de diagonal realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Se utilizamos unha escala 1:100 e tanto as esferas como os cilindros son macizos, que cantidade de material necesitaremos?



56. Pintouse por dentro e por fóra un depósito sen tapa de 8 dm de alto e 3 dm de radio. Tendo en conta que a base só se pode pintar por dentro, e que se utilizou pintura de 2 €/dm^2 , canto diñeiro custou en total?

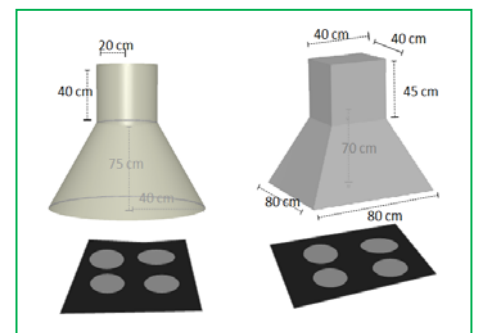
57. Unha piscina mide 20 m de longo, 5 m de ancho e 2 m de alto.

- Cantos litros de auga son necesarios para enchela?
- Canto custará recubrir o chan e as paredes con PVC se o prezo é de 20 €/m^2 ?

58. Cal das dúas cambotas extractoras da figura esquerda ten un custe de aceiro inoxidable menor?

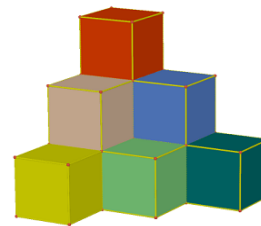
59. Nunha vasilla cilíndrica de 3 m de diámetro e que contén auga introdúcese unha bóla. Cal é o seu volume se despois da inmersión sobe 0.5 m o nivel da auga?

60. O prezo das tellas é de 12.6 €/m^2 . Canto custará retellar unha vivenda cuxo tellado ten forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 m de altura e 15 m de lado da base?



61. Enrólase unha cartolina rectangular de lados 40 cm e 26 cm formando cilindros das dúas formas posibles, facendo coincidir lados opostos. Cal dos dous cilindros resultantes ten maior volume?

62. Cada un dos cubos da figura ten 2 cm de aresta. Cantos hai que engadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volume?



63. Un tubo de ensaio ten forma de cilindro aberto na parte superior e rematado por unha semiesfera na inferior. Se o radio da base é de 1 cm e a altura total é de 12 cm , calcula cantos centilitros de líquido caben nel.

64. O lado da base da pirámide de Keops mide 230 m , e a súa altura 146 m . Que volume encerra?

65. A densidade dun tapón de cortiza é de 0.24 g/cm^3 , canto pesan mil tapóns se os diámetros das súas bases miden 2.5 cm e 1.2 cm , e a súa altura 3 cm ?

66. Comproba que o volume dunha esfera é igual ao do seu cilindro circunscrito menos o do cono de igual base e altura.

67. Calcula o volume dun octaedro regular de aresta 2 cm .

68. Constrúe en cartolina un prisma cuadrangular regular de volume 240 cm^3 , e de área lateral 240 cm^2 .

69. O cristal dun farol ten forma de tronco de cono de 40 cm de altura e bases de radios 20 e 10 cm . Calcula a súa superficie.

70. Un bote cilíndrico de 15 cm de radio e 30 cm de altura ten no seu interior catro pelotas de radio 3.5 cm . Calcula o espazo libre que hai no seu interior.



71. Un funil cónico de 15 cm de diámetro ten un litro de capacidade, cal é a súa altura?

72. Nun depósito con forma de cilindro de 30 dm de radio, unha billa verte 15 litros de auga cada minuto. Canto aumentará a altura da auga despois de media hora?

73. A lona dun parasol aberto ten forma de pirámide octogonal regular de 0.5 m de altura e 40 cm de lado da base. Fíxase un mastro no chan no que se encaixa e o vértice da pirámide queda a unha distancia do chan de 1.80 m . No momento no que os raios de sol son verticais, que área ten o espazo de sombra que determina?



74. Unha peixeira con forma de prisma recto e base rectangular énchese con 65 litros de auga. Se ten 65 cm de longo e 20 cm de ancho, cal é a súa profundidade?

75. Nun xeador de cornete, a galleta ten 12 cm de altura e 4 cm diámetro. Cal é a súa superficie? Se o cornete está completamente cheo de xeador e sobresa unha semiesfera perfecta, cantos cm^3 de xeador contén?

Iniciación á Xeometría Analítica

76. Calcula a distancia entre os puntos $A(7, 3)$ e $B(2, 5)$.
77. Calcula a distancia entre os puntos $A(7, 3, 4)$ e $B(2, 5, 8)$.
78. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\mathbf{u} = (4, 5)$.
79. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\mathbf{u} = (4, 5, 0)$.
80. O vector $\mathbf{u} = (4, 5)$ ten a orixe no punto $A(3, 7)$. Cales son as coordenadas do seu punto extremo?
81. O vector $\mathbf{u} = (4, 5, 2)$ ten a orixe no punto $A(3, 7, 5)$. Cales son as coordenadas do seu punto extremo?
82. Debuxa un cadrado de diagonal o punto $A(2, 3)$ e $C(5, 6)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal deste cadrado.
83. Debuxa un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ e $B(4, 4, 4)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.
84. Sexa $X(x, y)$ un punto do plano, e $A(2, 4)$, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de A unha distancia 3.
85. Sexa $X(x, y, z)$ un punto do espazo, e $A(2, 4, 3)$, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de A unha distancia 3.
86. Escribe a ecuación paramétrica da recta que pasa polo punto $A(2, 7)$ e ten como vector de dirección $\mathbf{u} = (4, 5)$. Representaa graficamente.
87. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(2, 7)$ e $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita e paramétrica. Representaa graficamente.
88. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(2, 4, 6)$ e $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, e como intersección de dous planos.
89. No cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ e $B(5, 5, 5)$ escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe tamén as ecuacións de todas as súas arestas, e as coordenadas dos seus vértices.
90. Escribe a ecuación do cilindro de eixe $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e radio 3.
91. Escribe a ecuación de a esfera de centro $A(2, 7, 3)$ e radio 4.
92. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ e radio 2.
93. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro $A(3, 7)$ e radio 3.
94. Ao cortar a un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

AUTOAVALIACIÓN

- As lonxitudes dos lados do triángulo de vértices $A(2, 2)$, $B(1, 4)$ e $C(0, 3)$ son:
 - 2, 5, 5
 - $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$
 - $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$
 - $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$
- No triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 cm multiplícanse por 10 todas as súas lonxitudes. A área do novo triángulo é:
 - 6 m²
 - 6 dm²
 - 60 cm²
 - 0.6 m²
- A altura dun prisma de base cadrada é 20 cm e o lado da base é 5cm, a súa área total é:
 - 450 cm²
 - 45 dm²
 - 425 cm²
 - 0.45 m²
- Un depósito de auga ten forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura e lado da base 1 m. O volume de auga que hai nel é:
 - 60 $\sqrt{2}$ m³
 - 45 $\sqrt{2}$ m³
 - 30 000 $\sqrt{2}$ dm³
 - 7.5 $\sqrt{3}$ m³
- O tellado dunha caseta ten forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5m de altura e 1000cm de lado da base. Se se necesitan 15 tellas por metro cadrado para recubrir o tellado, utilízanse un total de:
 - 1 508 tellas.
 - 150 tellas.
 - 245 tellas.
 - 105 tellas.
- Unha caixa de dimensións 30, 20 e 15 cm, está chea de cubos de 1 cm de aresta. Se se utilizan todos para construír un prisma recto de base cadrada de 10 cm de lado, a altura medirá:
 - 55 cm
 - 65 cm
 - 75 cm
 - 90 cm
- O radio dunha esfera que ten o mesmo volume que un cono de 5 dm de radio da base e 120 cm de altura é:
 - 5 $\sqrt{3}$ dm
 - $\sqrt[3]{75}$ dm
 - 150 cm
 - $\sqrt[3]{2\,250}$ cm
- Distribúense 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura e 3 cm de radio da base. O número de envases necesario é:
 - 100
 - 10
 - 42
 - 45
- A ecuación dunha recta no plano que pasa polos puntos $A(2, 5)$ e $B(1, 3)$ é:
 - $y = -2x + 1$
 - $3y - 2x = 1$
 - $y = 2x + 1$
 - $y = -2x + 9$.
- A ecuación da esfera de centro $A(2, 3, 5)$ e radio 3 é:
 - $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$
 - $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$
 - $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$
 - $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$