Matemáticas orientadas ás ensinanzas aplicadas

4ºA ESO
Capítulo 6:
Funcións e gráficas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Gallegos e David Miranda

Revisor: Miguel Paz

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

1. FUNCIÓNS

2. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

3. TIPOS DE FUNCIÓNS

Resumo

A Ciencia utiliza modelos e moitos modelos conséguense axustando unha función a unha táboa de valores. Por exemplo, neste momento estamos axustando unhas parábolas á relación entre a duración do desenvolvemento en días e a temperatura dos diferentes estadios da cochinilla vermella, *Aonidiella aurantii*, que é unha praga que ataca aos cítricos producindo desde a morte da árbore á súa desvalorización comercial, e dos seus inimigos naturais, como os do xénero *Aphytis*, que baixo certas condicións poden chegar regular as poboacións de tal forma que non faga falla utilizar outras medidas adicionais de control como insecticidas.

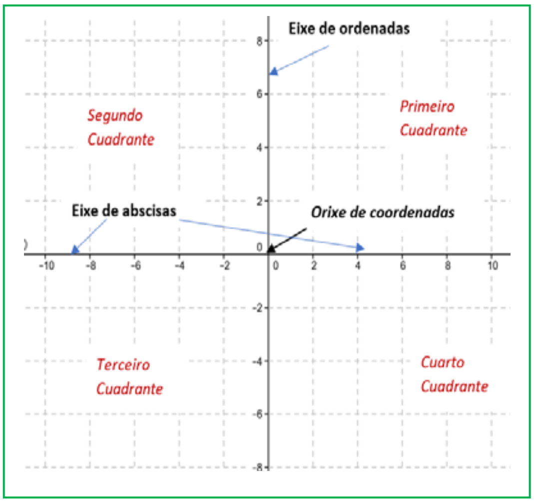
Unha vez conseguida unha función que se axuste a unha táboa de valores pódese prognosticar o que vai ocorrer ou dar valores que non se coñecían previamente.

Axustar modelos mediante funcións que sirvan nas situacións máis variadas é unha das súas aplicacións máis importantes.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. FUNCIÓNS

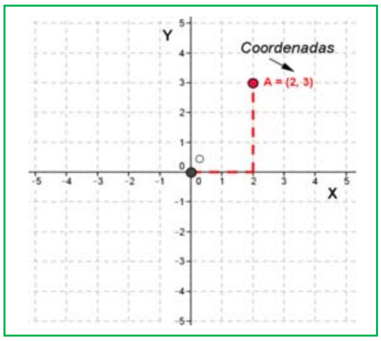
1.1. Eixes de coordenadas ou cartesianos. Coordenadas cartesianas



Recorda que:

Un conxunto formado pola orixe *O*, os dous **eixes de coordenadas** e a **unidade de medida** é un **sistema de referencia cartesiano**.

As **coordenadas dun** punto *A* son un par ordenado de números reais **(*x*, *y*)**, sendo **"*x*" *a*** primeira coordenada ou **abscisa** e **"*y*"** a segunda coordenada u **ordenada**. A toda parella ordenada de números (*x*, *y*) correspóndelle un punto do plano.

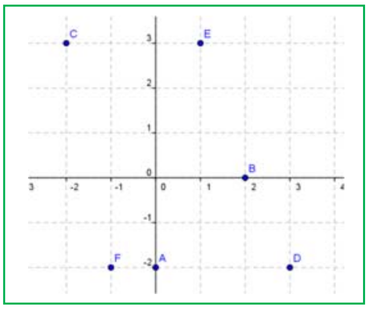


Tamén calquera punto do plano queda totalmente determinado mediante as súas coordenadas.

Exemplo:

- No gráfico anterior, o punto *A* ten coordenadas (2, 3).

Actividades propostas



1. Copia no teu caderno e indica as coordenadas de todos os puntos que están sinalados no plano.

2. Representa graficamente no teu caderno os seguintes puntos do plano: *A* (2, –3); *B* (0, –1); *C* (3, 4).

1.2. Concepto intuitivo de función

Xa sabes que:

Existen multitude de fenómenos na nosa vida cotiá nos que aparecen relacionadas dúas magnitudes. Por exemplo, o prezo dun quilo de mazás e o número de quilos que compramos, a duración dun traxecto e a velocidade á que imos…

Unha **función é** unha relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha, chamada **variable independente** ("*x*"), lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra, chamada **variable dependente** ("*y*").

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Observa que se a un mesmo valor de *x* lle corresponden dous ou máis valores de *y*, entón a relación non é unha función. En cambio, á inversa, nunha función un mesmo valor de *y* pode provir de distintos valores de *x*.

As relacións funcionais poden establecerse mediante unha táboa de valores, unha gráfica ou unha expresión matemática ou fórmula.

Exemplo:

- Un quilo de tomates custa 0.8 €/kg. A función que establece canto debemos pagar en función da cantidade de tomates que levamos é $y = f(x) = 0.8x$.

Na expresión $y = f(x)$, ***f*** é o nome que lle poñemos á **función**, (poderiamos chamala usando outras letras, as que se usan máis frecuentemente son "*f*", "*g*" e "*h*"). Entre paréntese vai a variable "***x***" que representa o número de quilos que compramos, é a **variable independente** xa que nós eliximos libremente a cantidade de tomates que queremos ou necesitamos. A variable "***y***"representa o prezo que debemos pagar, é a **variable dependente** xa que "depende" de cantos quilos levamos, é dicir, de "*x*".

A expresión, ***f*(*x*)**, que se le "*f* de *x*", soe usarse con moita frecuencia para designar á variable dependente porque resulta moi cómodo escribir canto nos custaría comprar unha cantidade concreta, por exemplo, 5 kg, expresaríase "*f* de 5" e o seu valor é $f(5) = 0.8 \cdot 5 = 4$ €.

Actividades propostas

3. Das seguintes relacións entre dúas variables, razoa cales son funcionais e cales non:

a. Idade e peso dunha persoa concreta ao longo da súa vida.
b. Peso e idade desa mesma persoa.
c. Un número e a súa metade.
d. Un número e o seu cadrado.
e. Prezo da gasolina e o día do mes.
f. Día do mes e prezo da gasolina.

4. Se hoxe o cambio de euros a dólares está a 1 € = 1.3 $, completa no teu caderno a seguinte táboa de equivalencia entre as dúas moedas:

€	2	5	10	27	*x*
$					

Expresa mediante unha fórmula a relación que existe entre ambas as dúas, na que, coñecendo os euros, se obteñan os dólares. Pódese expresar de forma única esta relación? É unha función?

Se cando realizas o cambio nunha oficina che cobran unha comisión fixa de 1.5 €, como quedaría a fórmula neste caso?

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.3. Grafo e gráfica dunha función

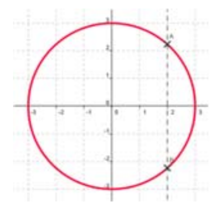
Xa que en toda función temos dous valores que se relacionan de forma única, podemos debuxar ambos os dous nos eixes cartesianos de forma que, se unimos todos eses puntos, obtemos unha curva que nos permite visualizar esta función.

Esta representación ten unha serie de limitacións, moitas delas comúns a calquera debuxo que se poida facer: é aproximada xa que os instrumentos que se utilizan para facelo (regra, compás, lapis…), por moi precisos que sexan (ordenadores), sempre teñen unha marxe de erro; tamén existen fallos de tipo visual ou dos instrumentos de medida; ou moitas veces temos que representar os infinitos puntos do grafo nun espazo finito, o cal é imposible e fai que só poidamos debuxar unha parte do que se pretende, pero non todo.

Malia todos estes inconvenientes, representar graficamente esta serie de puntos relacionados que conforman a función, aínda que sexa de forma aproximada, é importante, xa que nos permite entender moitas propiedades a simple vista: "*máis vale unha imaxe que mil palabras*".
Ademais, unha representación tamén nos permite descubrir se a mesma representa a unha función ou non, xa que no debuxo é fácil interpretar se a un valor da variable independente lle corresponde unicamente un da dependente ou máis de un, propiedade fundamental que define ás funcións.

Exemplo:

- No seguinte debuxo, que corresponde a unha circunferencia, ao valor **0** da variable independente correspóndenlle os valores **3 e –3** da dependente. Ademais, hai outros moitos valores aos que lles pasa o mesmo, como para *x* = 2, que corta á gráfica nos puntos *A* e *B*. A circunferencia non pode ser a representación dunha función.



$x^2 + y^2 = 9$

A fórmula que corresponde a esta gráfica é $x^2 + y^2 = 9$ ou tamén $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$.

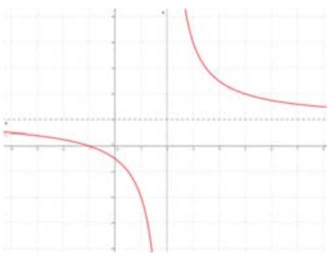
O **grafo dunha función** é o conxunto de todos os pares ordenados nos que o primeiro valor corresponde a un calquera da variable independente e o segundo ao que se obtén ao transformalo mediante a función:

$$Grafo(f) = \{(x, y); x \in \Re, y = f(x)\}$$

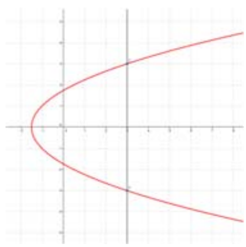
A **gráfica dunha función é** a representación no plano cartesiano de todos os puntos que forman o grafo da mesma.

Actividade resolta

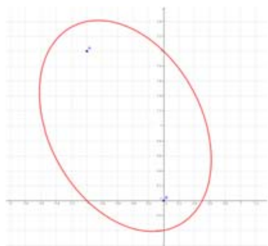
- *Indica cales das seguintes gráficas corresponden a unha función e cales non:*



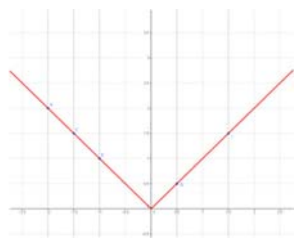
SI



NON



NON



SI

Cal é a clave ou regra para recoñecer, a partir do debuxo, se este corresponde a unha función ou non?

Se trazamos rectas verticais imaxinarias e estas chocan co debuxo, como moito, nun punto, a gráfica corresponde a unha función. Se choca en dous ou máis puntos, non é unha función.

Actividades propostas

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

5. Realiza no teu caderno o debuxo de dúas gráficas, unha que corresponda a unha función e outra que non. Identifica cada cal e explica o porque desta correspondencia.

6. Razoa se os valores da seguinte táboa poden corresponder aos dunha función e por que:

x	–10	–5	10	–10	27
$f(x)$	–3	0	5	4	0

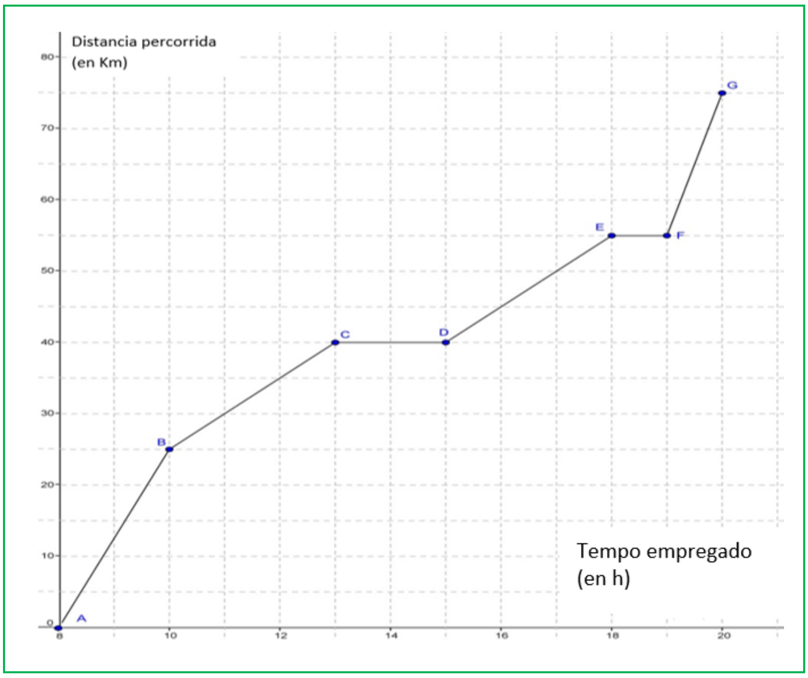
7. Unha persoa camiña a unha velocidade de 4 km/h e parte do quilómetro 10. Escribe a expresión alxébrica da función que indica os quilómetros percorridos en función do tempo. Sinala cales son os valores que non ten sentido dar á variable independente e en que se traduce iso na gráfica.

8. Nunha folla de papel cuadriculado raia un cadrado de lado un cadradiño. A súa área é 1 u^2. Agora fai o mesmo cun cadrado de lado 2. Continúa tomando cadrados de lados 3, 4, 5… e calcula as súas áreas. Cos resultados completa unha táboa de valores e debuxa a súa gráfica. Ten sentido para valores negativos da variable? Busca unha fórmula para esta función.

9. Para aparcar en zona azul (non residentes) hai unhas tarifas. A tarifa mínima é de 0,50 euros, o tempo máximo de aparcamento é de 2 horas, cada media hora máis custa 0,90 euros, e cada fracción, 0,05 euros. Representa unha gráfica da función cuxa variable independente sexa o tempo que se espera vai estar aparcado o vehículo e a variable dependente o prezo (en euros) que hai que pagar.

10. Un fabricante quere construír vasos cilíndricos medidores de volumes, que teñan de radio da base 5 cm e de altura total do vaso 18 cm. Escribe unha fórmula que indique como varía o volume ao ir variando a altura do líquido. Constrúe unha táboa cos volumes correspondentes ás alturas tomadas de 3 en 3 cm. Escribe tamén unha fórmula que permita obter a altura coñecendo os volumes. A que altura haberá que colocar a marca para ter un decilitro?

11. A seguinte gráfica resume a excursión que realizamos pola serra de Guadarrama:



a) Canto tempo durou a excursión?
b) Canto tempo se descansou? A que horas?
c) Cantos quilómetros se percorreron?
d) En que intervalos de tempo se foi máis rápido que entre as 11 e as 13 horas?
e) Fai unha breve descrición do desenvolvemento da excursión.
f) Constrúe unha táboa de valores a partir dos puntos sinalados na gráfica.
g) Se no eixe de ordenadas representaramos a variable "distancia ao punto de partida", sería a mesma gráfica? Cos datos de que dispós, podes facela?

12. A relación entre a altura e a idade dos diferentes compoñentes dun equipo de baloncesto é unha relación funcional? Por que? E a relación entre a idade e a altura? Escribe tres correspondencias que sexan funcionais e tres que non.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

2.1. Dominio e continuidade

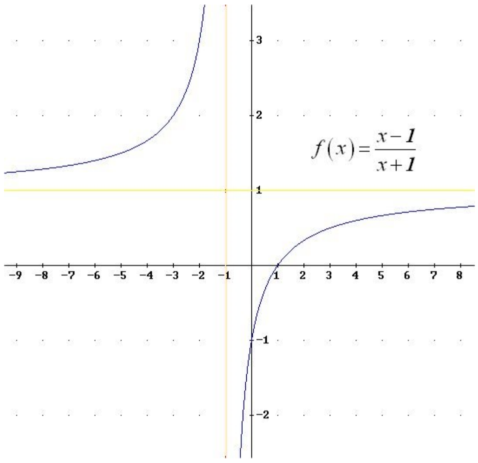
O **dominio** dunha función é o conxunto de puntos nos que está definida.

$$Dom(f) = \{x \in \Re;\ \exists\ f(x)\}$$

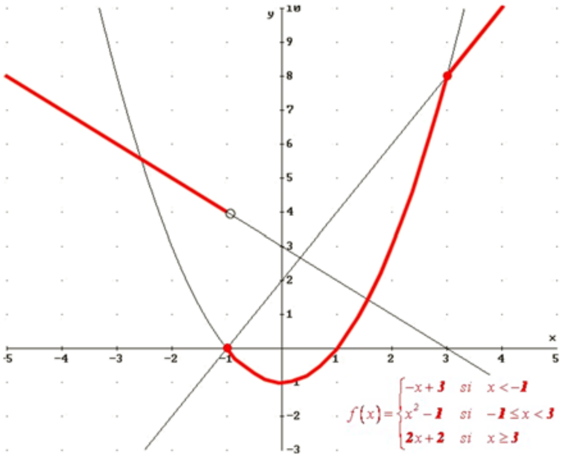
O concepto de **continuidade** dunha función é moi intuitivo xa que se corresponde con que a gráfica se poida debuxar sen levantar o lapis do papel. Cando isto non ocorre, prodúcense "*saltos*" en determinados puntos que reciben o nome de descontinuidades.

Actividade resolta

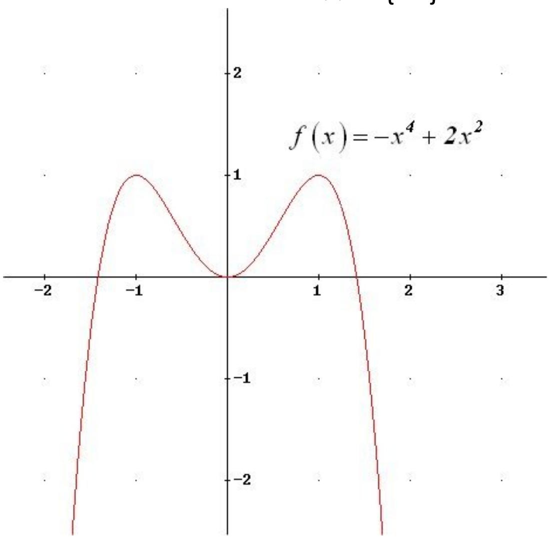
- *Que funcións son continuas segundo a súa gráfica e cales non? Indica nestas últimas o/os valor/es da variable independente onde se produce a descontinuidade:*



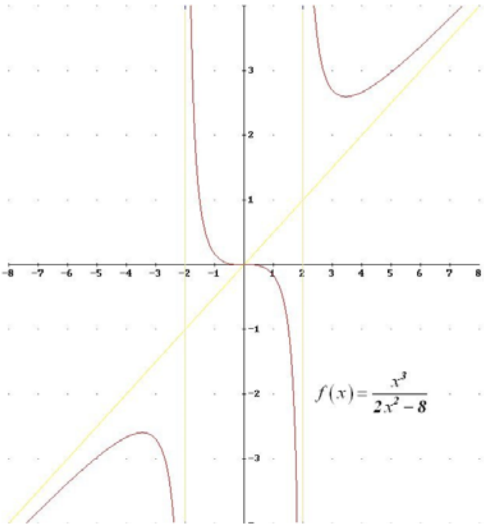
NON é continua en $x = -1$ onde ten un salto infinito. É continua no resto dos puntos
O seu dominio é $\Re - \{-1\}$.



NON é continua en $x = -1$ onde ten un salto finito de 4 unidades. No resto, é continua.
O seu dominio é $\Re$.



SI, é continua para calquera valor de x.
O seu dominio é $\Re$.



NON é continua nin en $x = -2$ nin en $x = 2$ onde ten saltos infinitos.
É continua en $\Re - \{-2, 2\}$, que é o seu dominio.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.2. Monotonía: crecemento e decrecemento

Unha función é **crecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente aumenta tamén o da variable dependente.

Unha función é **decrecente** nun intervalo se ao aumentar o valor da variable independente diminúe o da variable dependente.

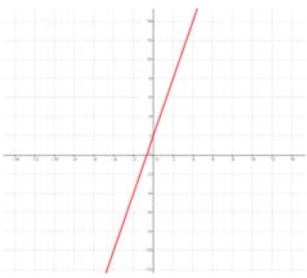
Unha función é **monótona** nun intervalo cando é unicamente crecente (ou unicamente decrecente) nese intervalo.

Unha función é **constante** nun intervalo cando a variable dependente toma sempre o mesmo valor.

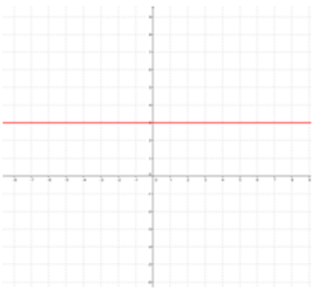
Como indican as definicións, a monotonía ou non dunha función dáse nun intervalo. Polo tanto, unha función pode ser crecente para unha serie de valores, para outros ser decrecente ou constante, logo pode volver ser crecente ou decrecente ou constante…

Actividade resolta

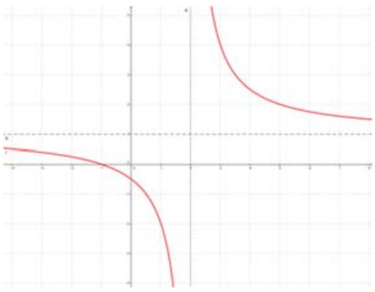
- *Estuda o crecemento e o decrecemento das funcións seguintes:*



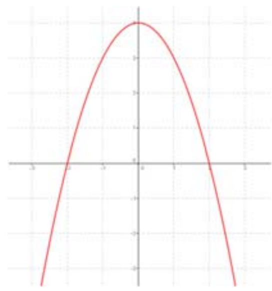
CRECENTE sempre (monótona)



CONSTANTE sempre



DECRECENTE ata x = 2
DECRECENTE desde x = 2



CRECENTE ata x = 0
DECRECENTE desde x = 0

2.3. Taxa de variación

A **taxa de variación** é o que aumenta ou diminúe unha función entre dous valores. Defínese como:

$$\textbf{TV} = f(x_2) - f(x_1), \text{ para } x_2 > x_1.$$

Se a función é crecente nun intervalo, entón a taxa de variación é positiva e, se é decrecente, negativa.

A taxa de variación media defínese como: TVM = $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

A TVM é moi importante porque non é o mesmo que unha función varíe o seu valor unha mesma cantidade nun intervalo pequeno que nun intervalo grande. Por exemplo, non é o mesmo pasar de 0 a 100 km/h en 5 segundos que en 20 segundos.

Exemplo:

- No desprazamento dun vehículo en función do tempo, a taxa de variación é o que se desprazou nun intervalo de tempo e a taxa de variación media indica a velocidade media nese intervalo de tempo.

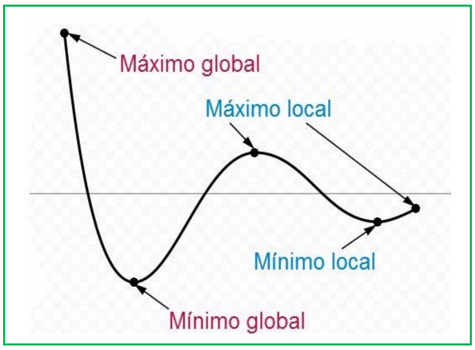
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.4. Extremos: máximos e mínimos

Unha función presenta un **máximo relativo** (ou máximo **local**) nun punto cando o valor da función nese punto é maior que calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*).

$(a, f(a))$ é **máximo relativo** se $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo.

Se, ademais, o valor é maior que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **máximo absoluto** (ou máximo global) nel.



$(a, f(a))$ é **máximo absoluto** se $f(a) \geq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.

Unha función presenta un **mínimo relativo** (ou mínimo **local**) nun punto cando o valor da función neste punto é menor que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*).

$(a, f(a))$ é **mínimo relativo** se $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in$ Intervalo.

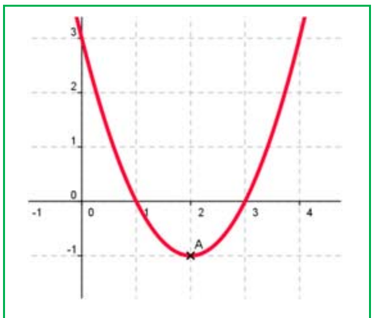
Se, ademais, o valor é menor que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **mínimo absoluto** (ou mínimo **global**) nel.

$(a, f(a))$ é **mínimo absoluto** se $f(a) \leq f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.

Se unha función presenta un máximo ou un mínimo nun punto, dise que ten un **extremo** nese punto que poderá ser relativo ou absoluto.

Actividades resoltas

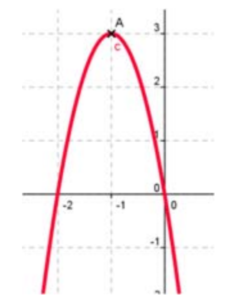
- *Estuda os máximos e mínimos das funcións seguintes:*



$y = x^2 - 4x + 3$

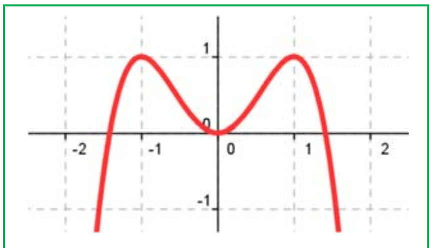
- A parábola $y = x^2 - 4x + 3$ ten un mínimo absoluto no seu vértice $(2, -1)$. Non ten máximos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice é decrecente e despois é crecente.

- A parábola $y = -3x^2 - 6x$ ten un máximo absoluto no seu vértice $(-1, 3)$. Non ten mínimos, nin relativos nin absoluto. Antes do vértice, para $x < -1$, a función é crecente e despois, para $x > -1$, a función é decrecente.



$y = -3x^2 - 6x$

Todas as parábolas teñen un máximo ou un mínimo absoluto no seu vértice.

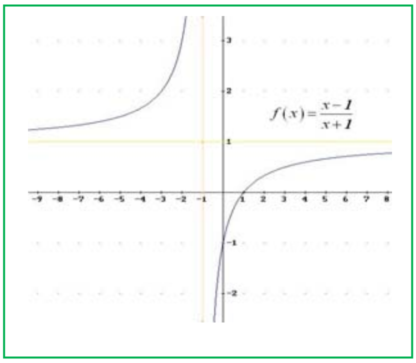


$y = -x^4 + 2x^2$

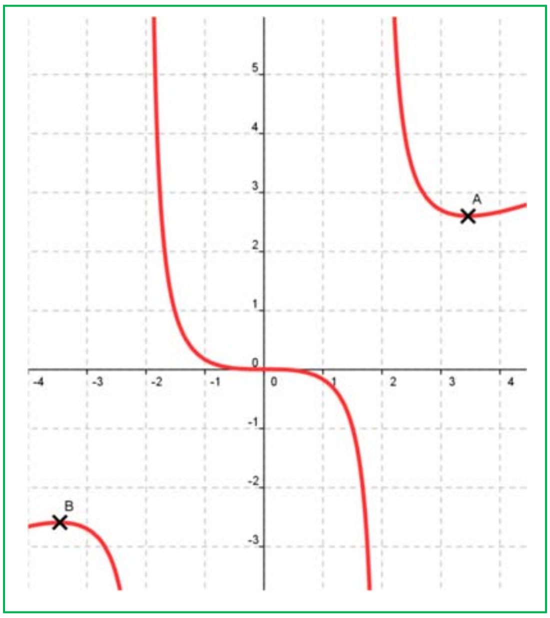
- A función $y = -x^4 + 2x^2$ ten un mínimo absoluto na orixe $(0, 0)$ e dous máximos en $(1, 1)$ e en $(-1, 1)$. Para $x < -1$ é unha función crecente, para $-1 < x < 0$ é unha función decrecente, para $0 < x < 1$ é crecente e para $x > 1$ é decrecente.

Observa, nos **máximos** sempre a función pasa de ser **crecente** a ser **decrecente** e, nos **mínimos,** de ser **decrecente** a ser **crecente**.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



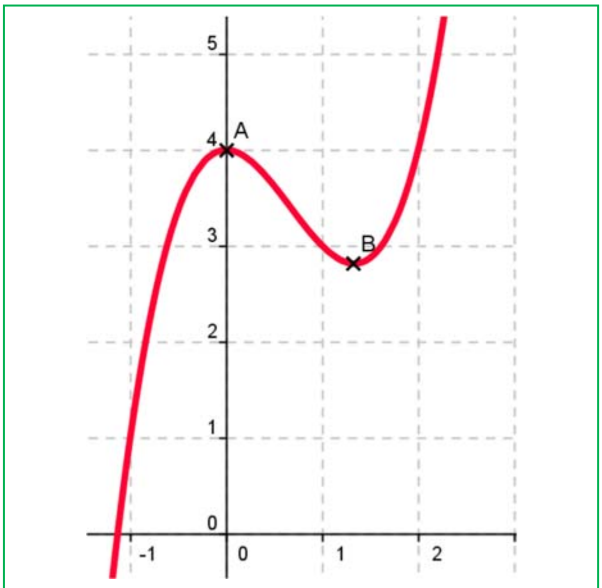
- A función $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ non ten nin máximos nin mínimos (nin relativos nin absolutos). É unha función sempre crecente.



- A gráfica da función $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-8}$ non ten máximo nin mínimo absoluto, pero ten un mínimo relativo cara a x = 3, A(3.46, 2.6), e un máximo relativo cara a x = –3, B(–3.46, –2.6). Observa que o valor do mínimo relativo, 2.6, é maior que a do máximo relativo, –2.6. Pero en valores próximos ao mínimo si é o menor valor, por este motivo denomínanse "*relativo*", "*local*". Non son os valores menores (ou maiores) que acada a función pero, se unicamente miramos nun entorno do punto, si son valores máximos ou mínimos.

- A función $f(x) = x^2(x - 1)^2(x - 2)^2$ non ten ningún máximo absoluto pero si ten dous máximos relativos, un no intervalo (–2, –1) e o outro no intervalo (0, 1). Ten, porén, tres mínimos absolutos nos puntos: (–2, 0), (0, 0) e (1, 0). A función é sempre positiva e o seu valor mínimo absoluto é **0**.

$f(x) = x^2(x - 1)^2(x - 2)^2$



$y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$

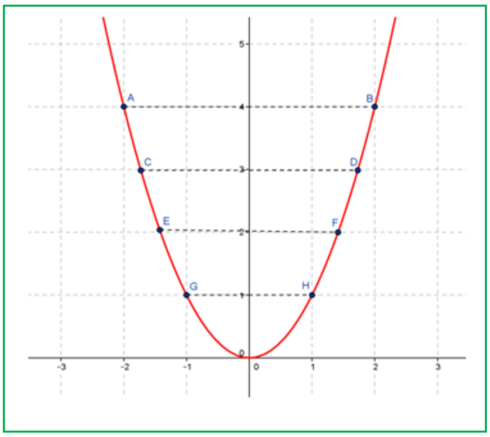
- A función $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ non ten nin máximos nin mínimos absolutos pero ten un máximo relativo no punto A(0, 4) e un mínimo relativo no punto B(4/3, 2.8). É crecente para $x < 0$, decrecente para $0 < x < 4/3$, e crecente para $x > 4/3$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2.5. Simetría

Unha **función par é** aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número que o seu oposto:

$$f(-x) = f(x)$$



Se unha función é par entón é **simétrica** respecto ao eixe **de ordenadas**, é dicir, se dobramos o papel por este eixe, a gráfica da función coincide en ambos os lados.

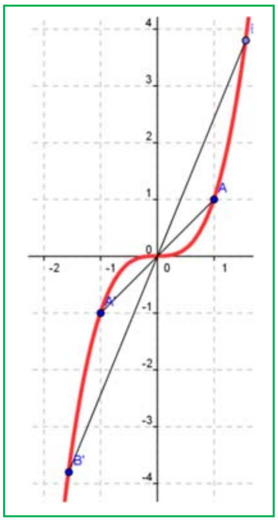
Exemplo:

- A función cuadrática $f(x) = x^2$ é par:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Unha **función impar é** aquela na que se obtén o oposto ao substituír un número polo seu oposto:

$$f(-x) = -f(x)$$



Se unha función é impar entón é **simétrica** respecto á **orixe** de coordenadas, é dicir, se trazamos un segmento que parte de calquera punto da gráfica e pasa pola orixe de coordenadas, ao prolongalo cara ao outro lado, encontraremos outro punto da gráfica á mesma distancia.

Exemplo:

- A función $y = x^3$ é unha función impar pois é simétrica respecto da orixe.

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

O segmento *AO* é igual ao segmento *OA'*, e o segmento *BO* é igual ao segmento *OB'*.

Autores: José Gallegos e David Miranda

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

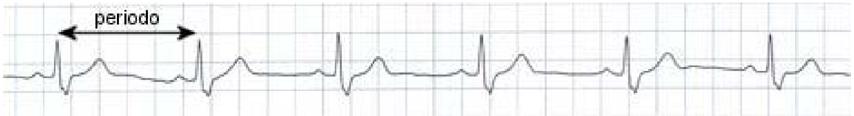
2.6. Periodicidade

Unha **función periódica é** aquela na que os valores da función se repiten sempre que se lle engade á variable independente unha cantidade fixa, ***T***, chamada ***período***. As funcións periódicas verifican que:

$$f(x + T) = f(x).$$

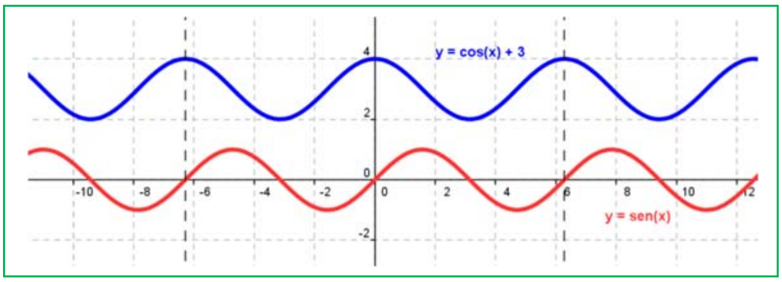
Exemplo:

- Un exemplo de función periódica é o seguinte, que corresponde a un electrocardiograma:



Obsérvase claramente que a gráfica se repite a intervalos iguais, xa que os latexos do corazón son rítmicos.

Actividade resolta



- As funcións:

$y = sen(x)$,

$y = cos(x) + 3$,

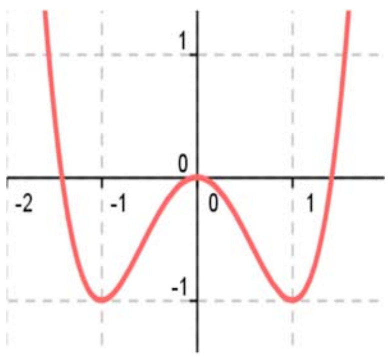
son funcións periódicas. Observa que o seu período é algo maior que 6, é 2π. En cada intervalo de lonxitude 2π repítese unha oscilación. Verifican que

$sen(x + 2\pi) = sen(x)$, e que $cos(x + 2\pi) + 3 = cos(x) + 3$.

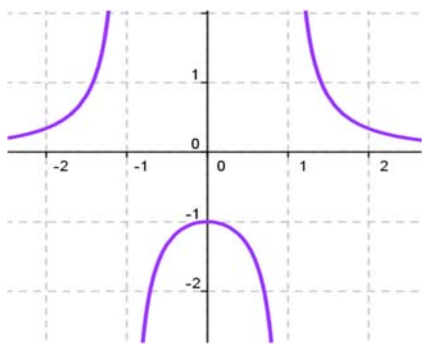
Actividades propostas

13. Copia as seguintes gráficas no teu caderno e sinala todas as características que poidas das funcións representadas. Indica o seu dominio, se é continua (ou puntos de descontinuidade se os houbese), se é simétrica e o tipo de simetría, intervalos de crecemento e decrecemento, máximos e mínimos, período (se o houbese)…

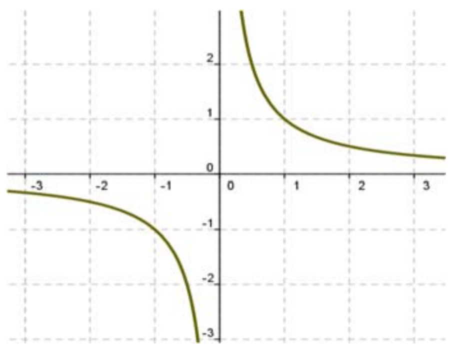
a)



b)



c)



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. TIPOS DE FUNCIÓNS

3.1. Funcións polinómicas de primeiro grao. A recta

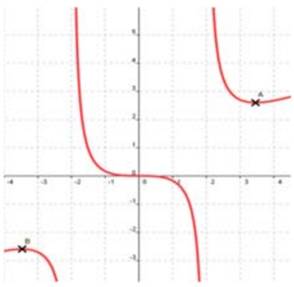
Proporcionalidade directa

Recorda que:

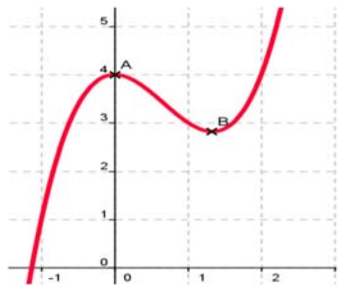
Dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

Ao realizar o cociente de calquera dos valores dunha variable, e os correspondentes doutra, obtemos a **razón de proporcionalidade directa *k***.

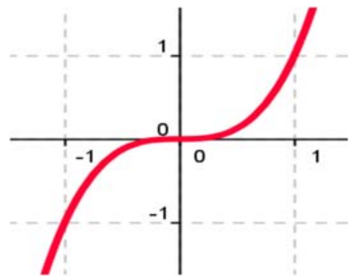
a)



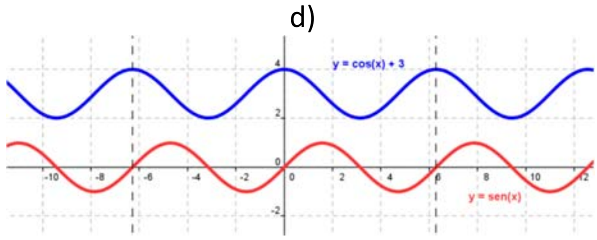
b)



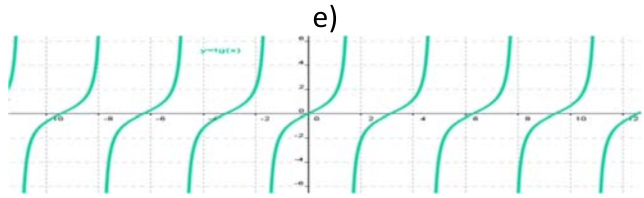
c)



d)



e)



Exemplo:

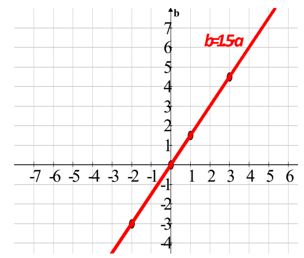
Representar graficamente a relación de proporcionalidade dada na seguinte táboa:

Magnitude A (*x*)		–5	–2	0	1		3
Magnitude B (*y*)		–7.5	–3	0	1.5		4.5

$$k = \frac{-7.5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1.5}{1} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

A relación defínese así: *y* = 1.5·*x*.

Ao calcular a razón de proporcionalidade obtense *k* = 1.5.



Recorda que:

A representación gráfica no plano cartesiano de dúas **magnitudes directamente proporcionais** é unha **recta** que pasa pola orixe de coordenadas.

Pódese escribir a relación entre a magnitude A (a) e a magnitude B (b) como $\boldsymbol{b = k \cdot a}$ onde *k* é a **razón de proporcionalidade**.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- A relación entre o peso en quilogramos e o custe de calquera produto é unha proporcionalidade e represéntase con rectas da forma $y = kx$, onde k é o prezo dun quilo.

Moitas das relacións en Física son proporcionais e represéntanse mediante rectas como espazo – tempo, peso – densidade , forza – masa…

Actividades propostas

14. O consumo medio de auga ao día por habitante é de 150 litros. Representa graficamente o consumo de auga dunha persoa ao longo dunha semana.

Función lineal. Rectas da forma $y = m \cdot x$

Recorda que:

Unha **función lineal** é a que ten a fórmula $\boldsymbol{y = m \cdot x}$.

É unha función polinómica de primeiro grao á que lle falta o termo independente.

Unha función lineal corresponde a unha relación de proporcionalidade directa.

Polo tanto, a relación de proporcionalidade directa é unha **función lineal** da forma $\boldsymbol{y = m \cdot x}$.

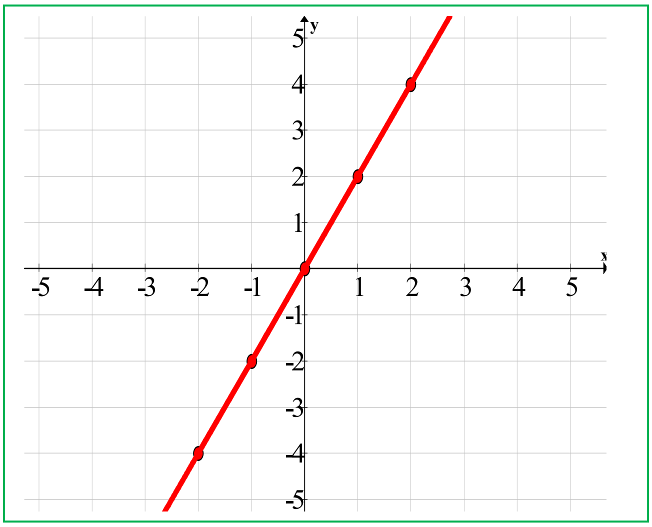
A representación gráfica de dúas magnitudes directamente proporcionais é unha **recta** que pasa pola orixe.

Polo que a gráfica dunha **función lineal** é unha recta.

Exemplo

- Representa a recta $y = 2 \cdot x$

Nota: para definir unha recta é suficiente con coñecer dous dos seus puntos (1, 2), (0, 0).



Recorda que:

- As rectas $y = m \cdot x$ teñen os seguintes compoñentes:
- x é a variable **independente**.
- y é a variable **dependente**.
- m é a **pendente** da recta.

As características máis importantes das funcións lineais son:

- Pasan pola orixe de coordenadas, é dicir, o punto (0, 0) pertence á recta.
- O seu dominio e o seu percorrido son todo o conxunto dos números reais: tanto x como y aceptan calquera valor.
- Son simétricas respecto á orixe ou, o que é o mesmo, son funcións impares.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Interpretación xeométrica da pendente

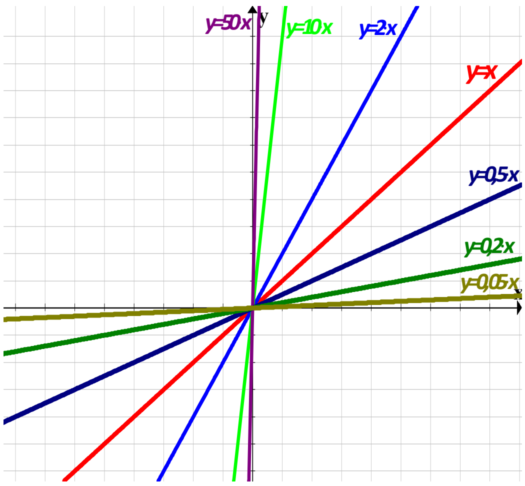
O coeficiente m (que é a razón de proporcionalidade) chámase **pendente da recta.** A pendente m é o que diferenza unhas funcións lineais doutras. Mide a inclinación da recta respecto ao eixe de abscisas e determina o seu crecemento.

Se $m > 0$, a función é **crecente**.

Se $m < 0$, a función é **decrecente**.

Se $m = 0$, a función é **constante**, nin crece nin decrece.

Nas relacións de proporcionalidade directa, a pendente vén dada pola razón de proporcionalidade k.



Actividades resoltas

- *Representa graficamente as funcións:*

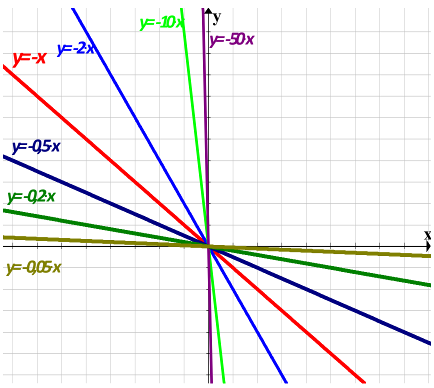
  $y = x$; $y = 2x$; $y = 10x$; $y = 50x$; $y = 0.5x$; $y = 0.2x$; $y = 0.05x$.

  Analiza o resultado.

- a recta $y = x$, ten de pendente $m = 1$.

- se aumenta m, entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe y.

- Se diminúe m, entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata converterse no eixe x cando $m = 0$.



- *Representa graficamente as funcións:*

$y = –x$; $y = –2x$; $y = –10x$; $y = –50x$; $y = –0.5x$; $y = –0.2x$; $y = –0.05x$.

Analiza o resultado.

- Se aumenta m (é dicir, diminúe en valor absoluto pois é negativo), entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata case converterse no eixe x: $y = 0$.

- Se diminúe m (é dicir, aumenta en valor absoluto pois é negativo), entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe y.

A **pendente** da recta $y = mx$ é o valor que mide a inclinación da recta, é dicir, mide o crecemento ou decrecemento da función lineal:

-Se $m > 0$, a recta é crecente.

-Se $m < 0$, a recta é decrecente.

A pendente da recta non só indica o crecemento e decrecemento da función senón que tamén mide canto crece ou canto decrece. Pódese dicir que a pendente mide o crecemento da recta en función do que avanza. Observamos que:

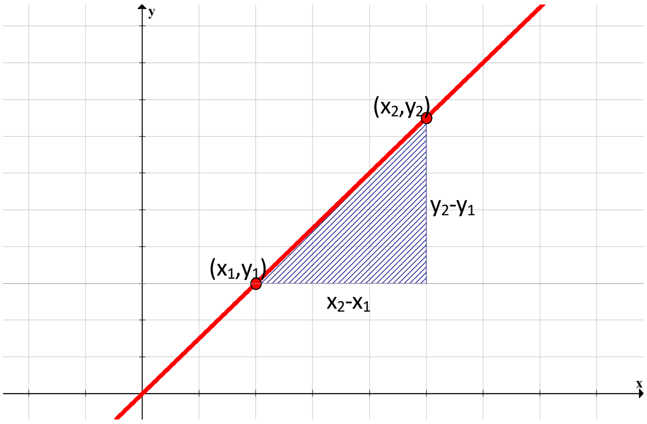
➢ Se $m > 0$:

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- o Para valores altos de *m* a recta crece con maior rapidez, isto é, a recta "sobe" moito e avanza pouco.
- o Para valores pequenos de *m* a recta crece con menos rapidez, é dicir, "sobe" pouco e avanza moito.

➢ Se $m < 0$:

- o Para valores altos de *m* a recta decrece con menos rapidez, é dicir, baixa pouco e avanza moito.
- o Para valores pequenos de *m* a recta decrece con maior rapidez, isto é, a recta "baixa" moito e "avanza" pouco.



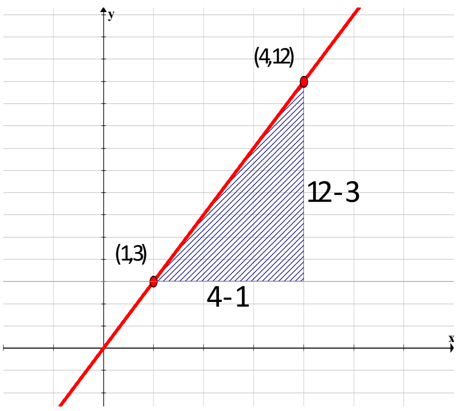
Unha maneira de calcular a pendente é dividindo o valor do que sobe a recta entre o que avanza, como se amosa no seguinte debuxo:

Dados dous puntos calquera da recta, a **pendente** calcúlase da seguinte forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

é dicir, $m = \dfrac{o\ que\ sobe}{o\ que\ avanza}$

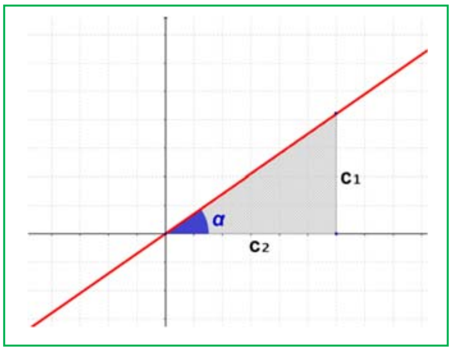
A **taxa de crecemento media** dunha función lineal coincide coa súa pendente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Exemplo:

- A recta que pasa polos puntos (1, 3) e (4, 12) sobe 12 – 3 = 9 e avanza 4 – 1 = 3, entón

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$



Para calcular a pendente tómanse como referencia a base e a altura do triángulo rectángulo que forman os vértices dos puntos da recta.

O cociente entre a altura e a base é a pendente. Como o triángulo construído é un triángulo rectángulo, a pendente é o cociente entre os seus dous catetos.

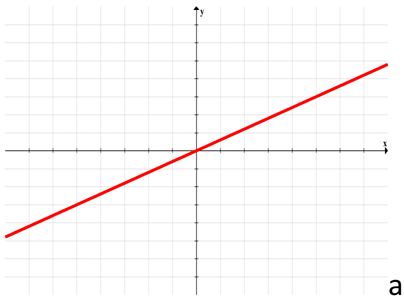
Actividades propostas

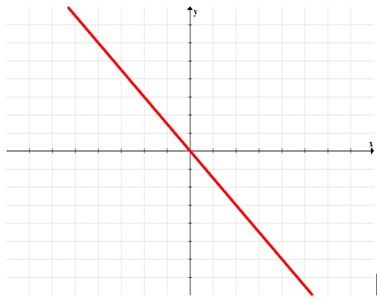
15. Representa no teu caderno, estuda o dominio, máximos e mínimos e simetrías das funcións lineais seguintes:

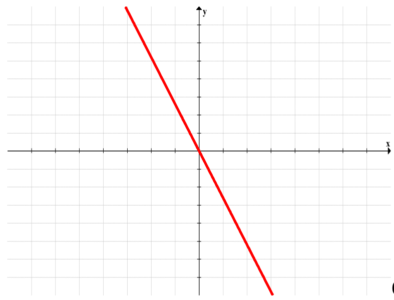
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

a) $y = 1.25 \cdot x$; b) $y = (3/5) \cdot x$; c) $y = 3 \cdot x$; d) $y = 0.5 \cdot x$;

16. Calcula a pendente e a expresión alxébrica (fórmula) das seguintes rectas:


a.


b.


c.

Función lineal. Rectas da forma $y = m \cdot x + n$

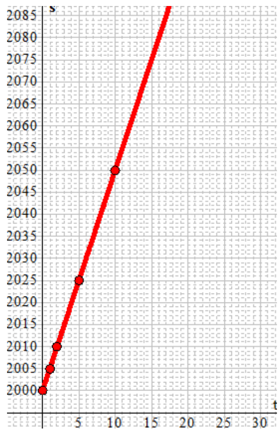
Xa sabes que:

As funcións polinómicas de primeiro grao, ou **funcións afíns**, descríbense alxebricamente da forma $y = m \cdot x + n$ e represéntanse mediante **rectas**.

Exemplo:

- *U*n ciclista trasladouse 2 Km antes de empezar o percorrido e desprázase cunha velocidade de 5 m/s. A súa táboa de valores e a súa representación gráfica son:

Tempo (t)	Espazo (s)
0	2 000
1	2 005
2	2 010
5	2 025
10	2 050



A fórmula é $s = s_0 + v \cdot t$

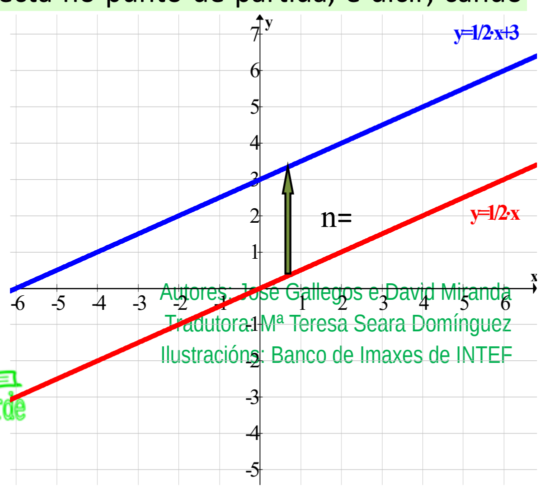
A gráfica desta recta ten como expresión alxébrica:

$$y = 5 \cdot x + 2\,000,$$

onde x corresponde ao tempo t e y ao espazo s, sendo 2 000 o espazo inicial s_0.

A **pendente** é 5 pero a recta non pasa polo punto (0, 0) senón que corta ao eixe de ordenadas no punto (2 000, 0). Dise que a **ordenada na orixe** é 2 000.

As rectas da forma ***y = mx + n*** teñen a mesma pendente que as rectas *y = mx* pero están desprazadas no eixe de ordenadas (eixe *y*) *n* posicións (cara arriba se *n* é positiva e cara abaixo se é negativa). Por esta razón, a *n* chámaselle **ordenada na orixe** xa que é o valor da recta no punto de partida, é dicir, cando *x* = 0.



Actividades resoltas

- *Compara a recta y* = (1/2)*x coa recta y* = (1/2)*x* + 3.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

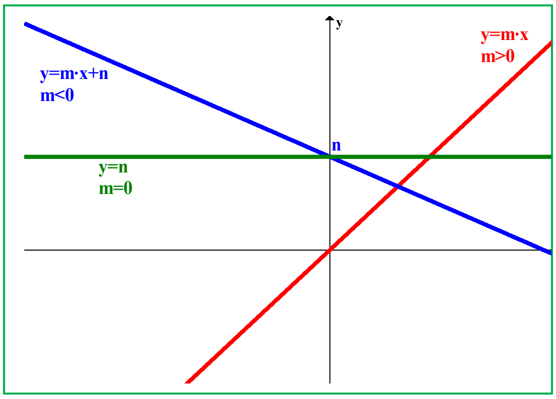
As dúas rectas teñen a mesma pendente. En ambos os casos $m = 1/2$. Son dúas rectas paralelas.
A diferenza está no valor da ordenada na orixe n: a recta $y = (1/2)x$ (onde $n = 0$) se desprazou 3 posicións no eixe y para converterse na recta $y = (1/2)x + 3$ (onde $n = 3$).

A recta $y = mx + n$ é paralela á recta $y = mx$ (teñen a mesma pendente, m) desprazada verticalmente n posicións.

As funcións ***y* = *mx* + *n*** chámanse **funcións afíns** e son tamén funcións lineais.

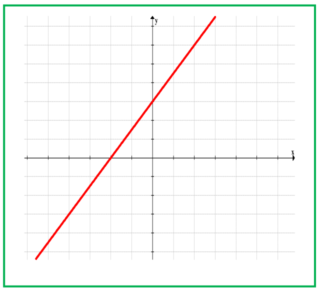
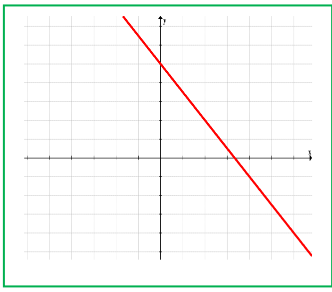
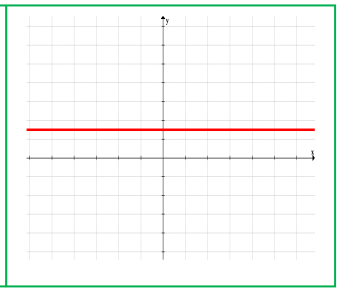
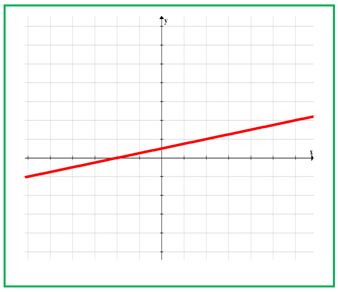
En canto á súa pendente, ten o mesmo significado:
Se $m > 0$, a función é **crecente**.
Se $m < 0$, a función é **decrecente**.
Se $m = 0$, a función é **constante**, nin crece nin decrece. Pasa polo punto (n, 0) e é paralela ao eixe x.

A **taxa de crecemento media** dunha función afín tamén coincide coa súa pendente: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, e é constante ao longo de toda a recta.



Actividades propostas

17. Calcula a expresión alxébrica das seguintes rectas:

18. Escribe tres funcións cuxas gráficas sexan tres rectas que pasen pola orixe de coordenadas e as súas pendentes sexan 5, –4, e 1/3 respectivamente.

19. Que ángulo forma co eixe de abscisas a recta $y = x$? E a recta $y = -x$?

20. Como son entre si dúas rectas de igual pendente e distinta ordenada na orixe?

21. Representa as seguintes funcións lineais:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = -\dfrac{3}{7} \cdot x - 2$ c. $2x + \cdot 4y = 5$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

22. Un metro de certa tea custa 2.05 €, canto custan 7 metros? E 20 m? E 15.2 m? Canto custan "x" metros de tea? Escribe a fórmula desta situación.

3.2. Funcións polinómicas de segundo grao. Función cuadrática

As **funcións cuadráticas** son aquelas que teñen como expresión alxébrica un polinomio de segundo grao, é dicir, son da forma ***y* = *ax*² + *bx* + *c***. A curva que aparece ao representar graficamente unha función cuadrática chámase **parábola**.

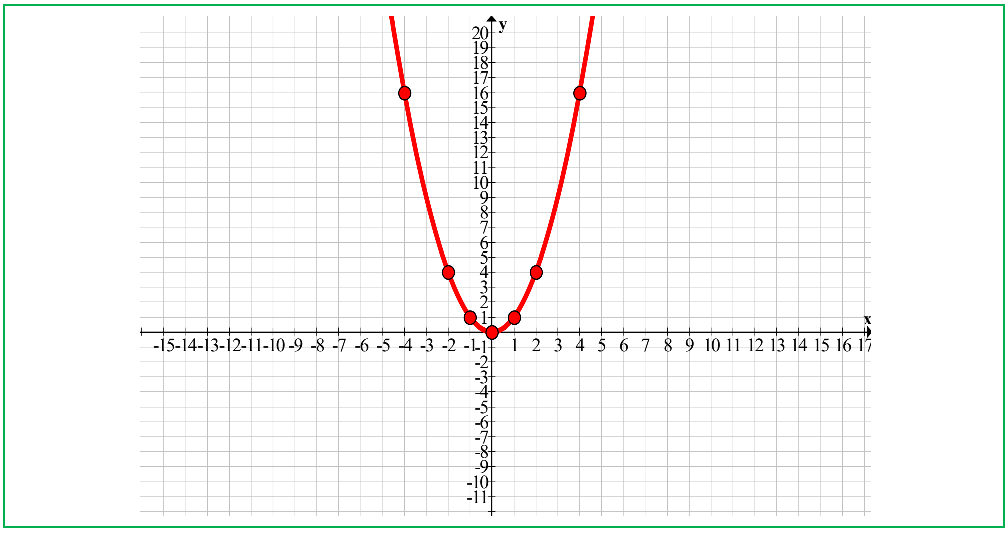
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

En Física, a traxectoria de moitos movementos represéntase mediante parábolas e por iso recibe o nome de tiro parabólico: lanzar un proxectil con certo ángulo, a aterraxe dun avión nun portaavións, etc.

Parábola $y = ax^2$

Para representar a parábola $y = x^2$ construímos unha táboa de valores e representamos os pares de puntos no plano cartesiano.

x	y
-10	100
-5	25
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
5	25

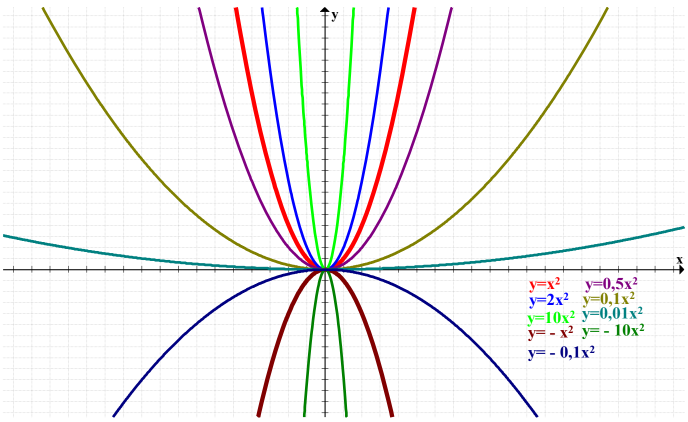


Observamos que é **decrecente** ata o 0 e despois **crecente**, logo ten un **mínimo** absoluto no (0, 0). Se $a = -1$, $y = -x^2$, a parábola ten a mesma forma pero está aberta cara abaixo e, en vez dun mínimo, ten un máximo no (0, 0).

Actividades resoltas

- *Representa graficamente nuns mesmos eixes coordenados:*

$$y = x^2,\ y = 0.5x^2,\ y = 2x^2,\ y = 0.1x^2,\ y = 10x^2,\ y = 0.01x^2,\ y = -10x^2,\ y = -0.01x^2.$$



Obsérvase que:

A parábola cuxa expresión alxébrica é $y = ax^2$ ten as seguintes características:

- O dominio é toda a recta real.
- A función é **continua** porque non presenta saltos.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- É **simétrica** respecto ao eixe ***y***, é dicir, é unha función **par**: $y = f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
- Se $a > 0$ ten un **mínimo absoluto** no punto (0, 0):
  - ao aumentar a, a parábola faise máis estreita e vaise achegando ao eixe y.
  - ao diminuír a, a parábola faise máis ancha (plana) e vaise achegando ao eixe x.
- Se $a < 0$ ten un **máximo absoluto** no punto (0, 0):
  - ao aumentar a, a parábola faise máis ancha (plana) e vaise achegando ao eixe x.
  - ao diminuír a, a parábola faise máis estreita e vaise achegando ao eixe y.
- Ao punto (0, 0) chámaselle **vértice** da parábola $y = ax^2$.

A **taxa de crecemento media** dunha parábola:

$$\text{TCM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a{x_2}^2 - a{x_1}^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

Varía ao movernos pola parábola e é maior canto maior é o coeficiente a, como se observa nas gráficas destas parábolas.

Actividades propostas

23. Debuxa en papel cuadriculado a gráfica da función $y = x^2$.
   a) Para iso fai unha táboa de valores, tomando valores de abscisa positiva.
   b) Tomando valores de abscisa negativa.
   c) Que lle ocorre á gráfica para valores grandes de "x"? E para valores negativos grandes en valor absoluto?
   d) A curva é simétrica? Indica o seu eixe de simetría.
   e) Ten un mínimo? Cal é? Coordenadas do vértice.
   f) Recorta un modelo desta parábola marcando o seu vértice e o eixe de simetría, que usaremos noutros problemas.

24. A partir da parábola $y = x^2$, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

a. $y = \frac{5}{3}x^2$ b. $y = -3x^2$ c. $y = -\frac{15}{3}x^2$

d. $y = 4.12x^2$ e. $y = -\frac{6}{10}x^2$ f. $y = \frac{7}{8}x^2$

25. Completa este resumo. A gráfica de $y = ax^2$ obtense da de $y = x^2$:
   a) Se $a > 1$ entón ??
   b) Se $0 < a < 1$ entón ??
   c) Se $a < -1$ entón ??
   d) Se $-1 < a < 0$ entón ??

Desprazamentos verticais: Translacións na dirección do eixe *y*: $y = x^2 + k$

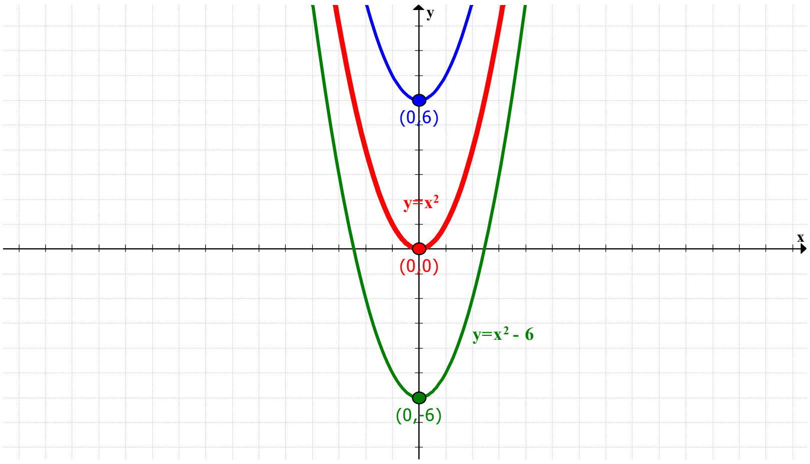
Utilizando como modelo a gráfica de $y = x^2$, poden obterse as gráficas doutras parábolas máis complexas, dependendo do tipo de desprazamento que utilicemos.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Comparemos as parábolas $y = x^2 + 6$ e $y = x^2 - 6$ con noso modelo de $y = x^2$.

Comproba que neste caso, trátase de mover a parábola en dirección vertical, é dicir, cara arriba ou cara abaixo.



Ao sumar 6 á parábola $y = x^2$ a gráfica é idéntica pero desprazada 6 unidades en sentido positivo no eixe y, é dicir, a parábola subiu 6 unidades. O novo vértice pasa ser o punto (0, 6).

Algo parecido ocorre cando se lle restan 6 unidades a $y = x^2$. Neste caso a gráfica desprazouse 6 unidades en sentido negativo ata o vértice (0, –6), é dicir, baixa 6 unidades.

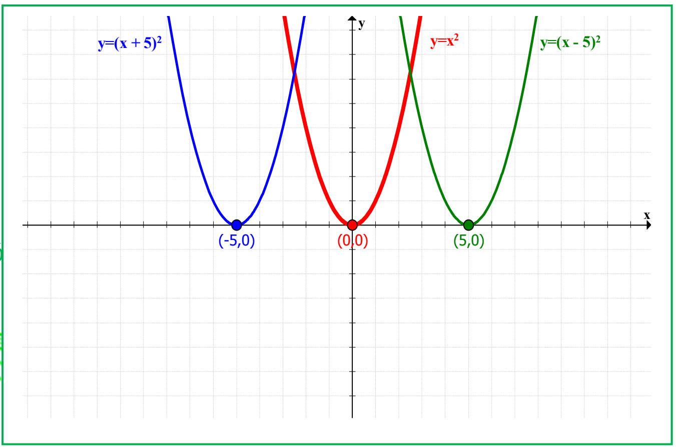
A parábola $y = x^2 + k$ ten a mesma forma que $y = x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente no eixe y. Se k é positivo, a translación é cara arriba e se k é negativo, cara abaixo. O **vértice** da parábola sitúase no punto (0, k).

Actividades propostas

26. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido vertical, cara arriba no caso de $y = x^2 + 2$; e cara abaixo no caso de $y = x^2 - 3$. A parábola $y = -x^2$; é simétrica (cara abaixo) de $y = x^2$. En xeral, se trasladamos q unidades na dirección do eixe de ordenadas temos a parábola $y = x^2 + q$.

Desprazamentos horizontais: Translacións na dirección do eixe *x*:

$$\boldsymbol{y = (x - q)^2}$$



Exemplo:

- Compara as parábolas $y = (x + 5)^2$ e $y = (x – 5)^2$ co modelo de $y = x^2$.

Agora trasladamos a parábola en dirección horizontal. Cara á dereita ou cara á esquerda.

Neste caso, ao aumentar a variable que se eleva ao cadrado, é dicir, sumar 5 unidades, a gráfica trasládase horizontalmente cara á esquerda 5 unidades, sendo o novo vértice o punto (–5, 0). Ao diminuír esta variable, é dicir, restar 5 unidades, a parábola desprázase cara á dereita sendo o novo vértice o punto (5, 0).

A parábola $y = (x – q)^2$ ten a mesma gráfica que $y = x^2$ trasladada q unidades no eixe x cara á dereita se $q > 0$ e cara á esquerda se $q < 0$. O **vértice** da parábola sitúase no punto $(q, 0)$**.**

Actividades propostas

27. Tomando a mesma unidade que no problema anterior debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema de referencia, as gráficas das parábolas: $y = (x + 3)^2$; $y = (x – 2)^2$; $y = (x + 5)^2$; $y = (x – 5)^2$. Observa que podes utilizar o modelo do exercicio anterior. Fai un resumo indicando o que obtiveches. Terás observado que en todos os casos podes utilizar o modelo trasladándoo en sentido horizontal, cara á dereita no caso de $y = (x – 2)^2$ e cara á esquerda no caso de $y = (x + 3)^2$. Polo que, en xeral, se trasladamos p unidades na dirección do eixe de abscisas, obtemos a parábola $y = (x – q)^2$.

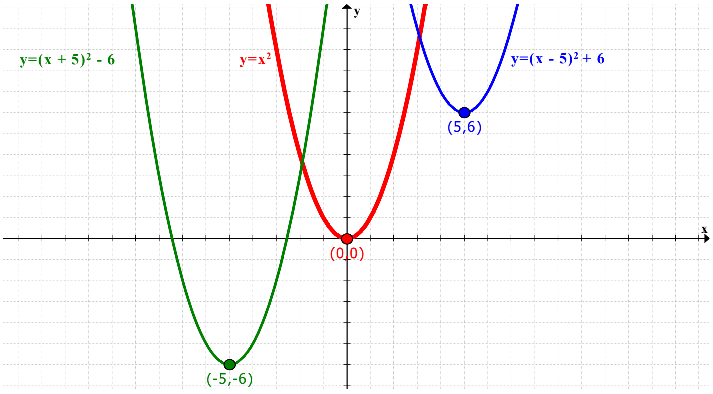
Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Desprazamentos oblicuos: translacións en ambos os eixes: $y = (x - q)^2 + k$

O último movemento é o que combina os dous anteriores, é dicir, trasladamos o modelo de $y = x^2$, k posicións de maneira vertical e q posicións de maneira horizontal, resultando unha translación oblicua no plano.

Exemplo:

- Comparamos as parábolas $y = (x + 5)^2 - 6$ e $y = (x - 5)^2 + 6$ co modelo de $y = x^2$.



A parábola $y = (x - 5)^2 + 6$ trasládase 5 unidades á dereita e 6 unidades cara arriba, mentres que a parábola $y = (x + 5)^2 - 6$ trasládase 5 unidades cara á esquerda e 6 unidades cara abaixo. É dicir, é a composición dos dous movementos anteriores.

A parábola $y = (x - q)^2 + k$ ten a mesma forma que $y = x^2$ trasladada da seguinte forma:

$$q \text{ unidades} \begin{cases} \text{cara á dereita se } q > 0 \\ \text{cara á esquerda se } q > 0 \end{cases} \quad ; \quad k \text{ unidades} \begin{cases} \text{cara arriba se } k > 0 \\ \text{cara abaixo se } k < 0 \end{cases}$$

O **vértice** da parábola sitúase no punto (q, k). O eixe de simetría en $x = q$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Representación de parábolas da forma $y = x^2 + rx + s$

Sabemos representar as parábolas da forma $y = (x - q)^2 + k$ mediante translacións. Como podemos representar a gráfica das parábolas cuxa expresión alxébrica é $y = x^2 + rx + s$?

Actividades resoltas

- *Representa a gráfica da función polinómica $y = x^2 + 6x - 4$*

A función vén dada da forma $y = x^2 + rx + s$ e queremos convertela en $y = (x - q)^2 + k$.

$$y = x^2 + rx + s \Leftrightarrow y = (x-q)^2 + k$$

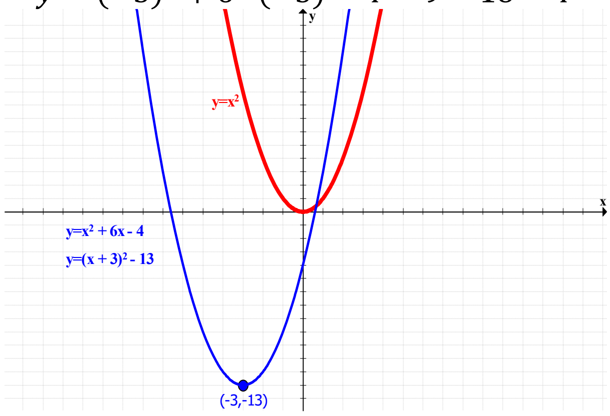
Sabemos que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, onde xa nos aparece $x^2 + 6x$. Agora temos que axustar o resto:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x+3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x+3)^2 - 13}$$

Coa parábola expresada desta maneira, basta con trasladar a gráfica de $y = x^2$, 3 unidades á esquerda e 13 unidades cara abaixo, sendo o vértice o punto (–3, –13).

Como $r = 6$ observa que a primeira coordenada do vértice é $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Substituíndo o valor de $x = -3$ na expresión $y = x^2 + 6x - 4$ obtense:

$$y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$$



O vértice da parábola $y = x^2 + rx + s$ encóntrase no punto $x = \frac{-r}{2}$. A outra coordenada obtense substituíndo x na expresión da función.

Actividades propostas

28. Escribe a ecuación dunha parábola de igual forma que $y = x^2$, pero trasladada 7 unidades en sentido horizontal á dereita e 4 unidades en sentido vertical cara arriba. Que coordenadas ten o seu vértice?

29. Representa a gráfica das seguintes parábolas e localiza o vértice:

a. $y = (x+4)^2 - 5$	b. $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$	c. $y = x^2 - 5$
d. $y = x^2 - 6x + 16$	e. $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$	f. $y = -x^2 + 12x - 26$
g. $y = x^2 - 10x + 17$	h. $y = -x^2 + 2x - 4$	i. $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Función cuadrática. Parábolas da forma $y = ax^2 + bx + c$

Ata agora só estudamos as funcións de tipo $y = x^2 + rx + s$, que é unha parábola coa mesma forma que $y = x^2$ aberta cara arriba ou $y = -x^2 + rx + s$, aberta cara abaixo.

Tamén sabemos como afecta o valor do coeficiente "*a*" na gráfica da parábola $y = ax^2$, facéndoa máis estreita ou máis ancha.

Para representar as funcións cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$ convértese esta expresión nunha máis familiar que sabemos representar completando cadrados:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}) = y = a(x^2 + r\cdot x + s)$$

Actividades resoltas

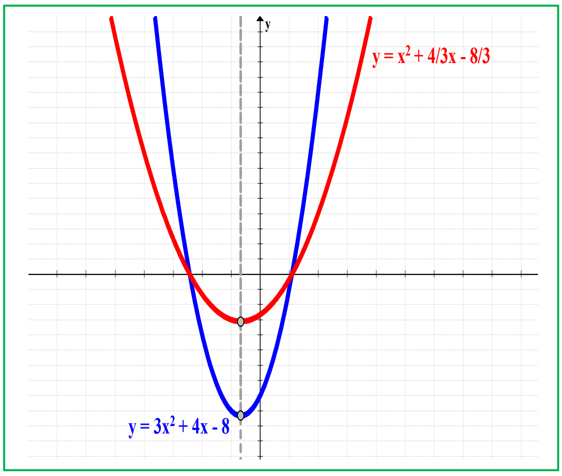
- *Representa a parábola* $y = 3x^2 + 4x - 8$:

  Convertemos a función nunha expresión máis fácil de representar:

$$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3\cdot(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

e comparámola con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}$$



As dous parábolas teñen o vértice no mesmo punto de abscisa, e a coordenada y queda multiplicada por 3.

Canto á forma, a parábola é máis estreita, como se estudou anteriormente.

A parábola no caso xeral é:

$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}) = a\cdot(x^2 + r\cdot x + s)$, é dicir, $r = \frac{b}{a}$, entón a primeira coordenada do vértice é $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

A segunda coordenada sae ao substituír $x = \frac{-b}{2a}$ na función cuadrática.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

En resumo:

A función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ ten o seu vértice no punto de abscisa $x = \frac{-b}{2a}$, a súa ordenada no que resulta de substituír ese valor na ecuación: $y = a\left(\left(\frac{-b}{2a}\right)^2\right) + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$. A forma dependerá do valor absoluto do coeficiente "*a*", sendo máis estreita para valores grandes e máis ancha para valores máis pequenos.

A orientación da parábola será:

- cara arriba se $a > 0$
- cara abaixo se $a < 0$

Actividades propostas

30. Volvemos usar o modelo.

a) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (3, 1). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

b) Traslada o vértice da parábola $y = x^2$ ao punto (–4, –2). Escribe a súa ecuación e a ecuación do seu eixe de simetría. Debuxa a súa gráfica.

Elementos da parábola

Os elementos máis característicos da parábola axudan a representar a súa gráfica.

Coeficiente a:

Se $a > 0$ a parábola está aberta cara arriba.

Se $a < 0$ a parábola está aberta cara abaixo.

Vértice:

O **vértice** da parábola está no punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4 \cdot a \cdot c}{4a}\right)$.

Puntos de corte co eixe OX:

Son os puntos onde a parábola corta o eixe x, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $y = 0$. Indica cando a parábola é positiva ou negativa. Para calculalos, resólvese a ecuación de segundo grao $y = ax^2 + bx + c = 0$.

Punto de corte co eixe OY:

É o punto onde a parábola corta o eixe y, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $x=0$. Cando $x=0$ a parábola toma o valor de c, logo o punto de corte é o punto (0, c).

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Eixe de simetría:

A parábola é simétrica na recta paralela ao eixe y que pasa polo vértice da parábola, é dicir, o eixe **de simetría** da parábola é a recta $x = \frac{-b}{2a}$.

O eixe de simetría tamén pasa polo punto medio do segmento formado polos dous puntos de corte co eixe x.

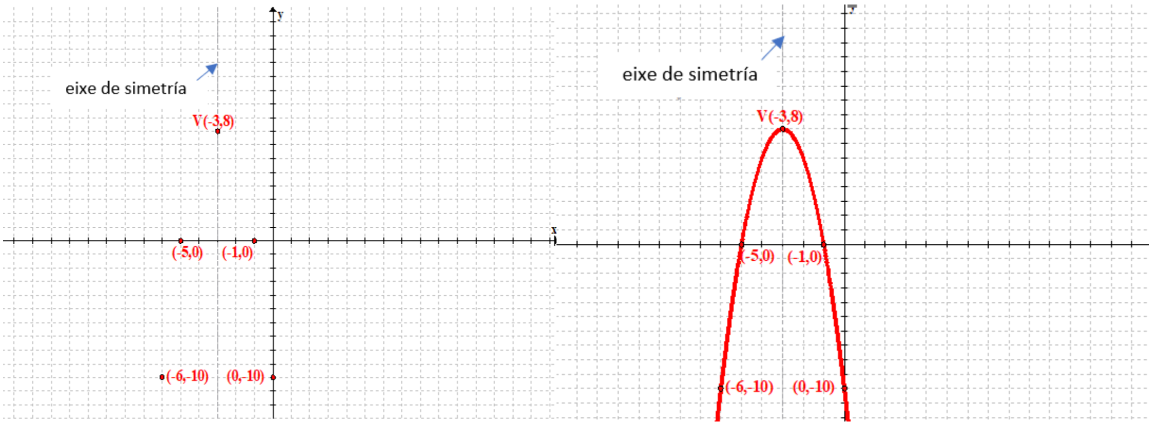
A partir destes elementos, pódese representar a gráfica dunha función cuadrática.

Actividades resoltas

- *Determina os elementos da parábola* $y = -2x^2 - 12x - 10$
  - $a = -2$, entón a parábola está aberta cara abaixo.
  - Vértice: $\begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{2\cdot(-2)} = \frac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice}: V(-3, 8)$
  - Puntos de corte:
    - Eixe OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$

      $y = -2x^2 - 12x - 10 = -2\cdot(x + 5)\cdot(x + 1)$
    - Eixe OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

      A parábola tamén pasa polo seu simétrico: (–6, –10).
  - Eixe de simetría: recta $x = -3$.



Actividades propostas

31. Calcula os elementos característicos e representa as seguintes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$ b. $y = 6x^2 - 24x$ c. $y = -2x^2 + 4x - 2$

d. $y = 2x^2 + 5x - 12$ e. $y = 3x^2 + 6x - 9$ f. $y = -2x^2 + 7x + 3$

g. $y = 7x^2 + 21x - 28$ h. $y = 5x^2 - 9x + 4$ i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Axustes a outras funcións polinómicas

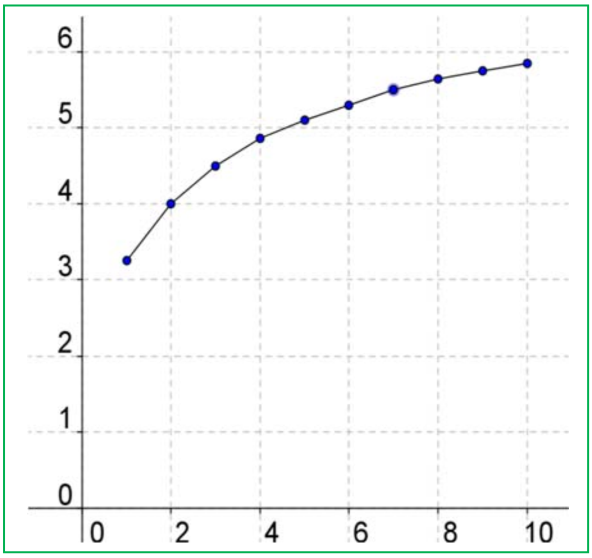
Vimos que as rectas $y = mx + b$ e que as parábolas $y = ax^2 + bx + c$ serven de modelo para situacións moi diversas. Pero estas situacións non son máis que unha pequena parte da gran variedade de situacións que existen. Debemos polo tanto ampliar o arsenal das nosas funcións. Se temos uns datos nunha táboa de valores, queremos analizar se somos capaces de encontrar unha fórmula matemática que se axuste a eses datos, é dicir, que nos permita facer predicións respecto a valores da variable non considerados.

Actividade resolta

- *Para o tratamento dunha enfermidade estase probando un novo medicamento con distintas doses, anotando, para cada dose a porcentaxe de curacións. Os resultados recóllense na táboa:*

Dose (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacións (%): *y*	3.25	4.0	4.5	4.86	5.1	5.3	5.5	5.64	5.75	5.85

Representamos graficamente os puntos indicados na táboa:



A gráfica dos puntos unidos mediante segmentos dános unha idea do modelo pero non podemos aínda descubrir a lei. Non existe unha única forma de unir os datos. Coñecer o mellor modelo está relacionado co problema en estudo aínda que esta primeira aproximación gráfica xa nos dá bastante información. Parece que, segundo se aumenta a dose, medra a porcentaxe de curacións. Non parece plausible que para unha dose intermedia, por exemplo 4.5 mg, a porcentaxe de curacións medre a 10 ou diminúa ao 3 %, quizais podemos asegurar que estará entre 4.86 e 5.1. Poderiamos estimalo mediante unha interpolación lineal e dicir que a porcentaxe de curacións para unha dose de 4.5 mg se podería estimar en 4.98.

As funcións polinómicas, das que acabas de estudar as rectas e as parábolas, pero que son todas aquelas ecuación $y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + dx + e$, teñen unha interesante propiedade.

Se os valores do *x* están en progresión aritmética e calculamos as diferenzas entre os valores do *"y"*, aos que chamamos **diferenzas primeiras**, e indicamos $\Delta_1 y$, cando estas diferenzas son constantes, entón os puntos están nunha recta.

Se de novo calculamos as diferenzas, agora das diferenzas primeiras, e as chamamos **diferenzas segundas**, e as indicamos $\Delta_2 y$, cando estas diferenzas son constantes, entón os puntos están nunha parábola.

En xeral, os valores da abscisa están en progresión aritmética e se as diferenzas *n*-ésimas, $\boldsymbol{\Delta_n y}$, son **constantes** os puntos axústanse a unha **función polinómica de grao *n***.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Imos calcular as diferenzas sucesivas da actividade resolta anterior:

Doses (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacións (%): *y*	3.25	4.0	4.5	4.86	5.1	5.3	5.5	5.64	5.75	5.85
$\Delta_1 y$		0.75	0.5	0.36	0.24	0.2	0.2	0.14	0.11	0.1
$\Delta_2 y$			–0.25	–0.14	–0.12	–0.04	0	–0.06	–0.03	–0.01
$\Delta_3 y$				0.11	0.02	0.08	0.04	–0.06	0.03	0.02

O primeiro no que nos fixamos é que os valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 2, 3...

Repasa as operacións para comprobar que estas diferenzas están ben calculadas. Por exemplo, a primeira diferenza é: 4.0 – 3.25 = 0.75. O primeiro valor das segundas diferenzas é: 0.5 – 0.75 = –0.25. O primeiro valor das terceiras diferenzas é: –0.14 – (– 0.25) = +0.11.

As diferenzas primeiras non son constantes, logo os datos non se axustan a unha recta, o que xa se observaba na gráfica. As diferenzas segundas non son tampouco constantes, logo non existe unha parábola que se axuste a eses datos. Tampouco son constantes as diferenzas terceiras, logo tampouco existe unha función polinómica de terceiro grao que se axuste a eses datos.

Actividade resolta

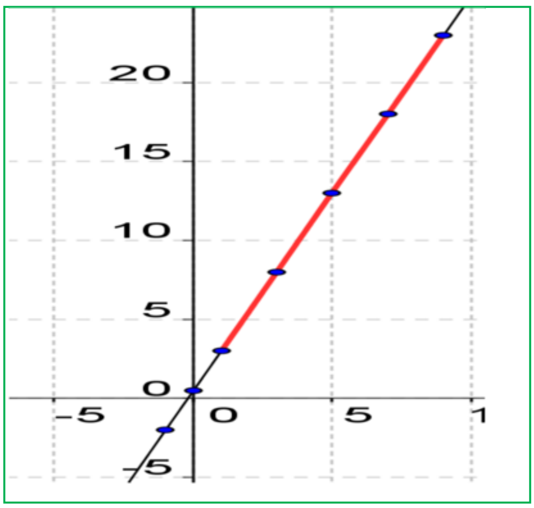
- *Comproba que os datos da táboa seguinte se axustan a unha recta e escribe a súa fórmula.*

x:	1	3	5	7	9
y:	3	8	13	18	23
$\Delta_1 y$	5	5	5	5	

O primeiro no que nos fixamos é que os valores de *x* están en progresión aritmética: 1, 3, 5, 7, 9...

As diferenzas primeiras son constantes polo que as diferenzas segundas son todas cero. Os datos axústanse a unha recta.

Representamos os datos.



Buscamos a ecuación da recta $y = mx + b$ impoñendo que pase por dous dos puntos: $3 = m\cdot 1 + b$; $8 = 3m + b$. Restamos: $5 = 2m$, polo que a pendente é: $m = 2.5$; e, ao substituír na primeira ecuación, obtense que a ordenada na orixe é $b = 0.5$. A ecuación da recta é: $y = 2.5\,x + 0.5$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- *Os datos da táboa indican os metros percorridos por un móbil no tempo t segundos. Axústanse a unha parábola. Represéntaos graficamente e escribe a súa fórmula. Que distancia terá percorrido aos 6 segundos? E aos 12 segundos?*

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35		63	80	99		143	
$\Delta_1 y$		9	11			17	19			
$\Delta_2 y$		2				2				

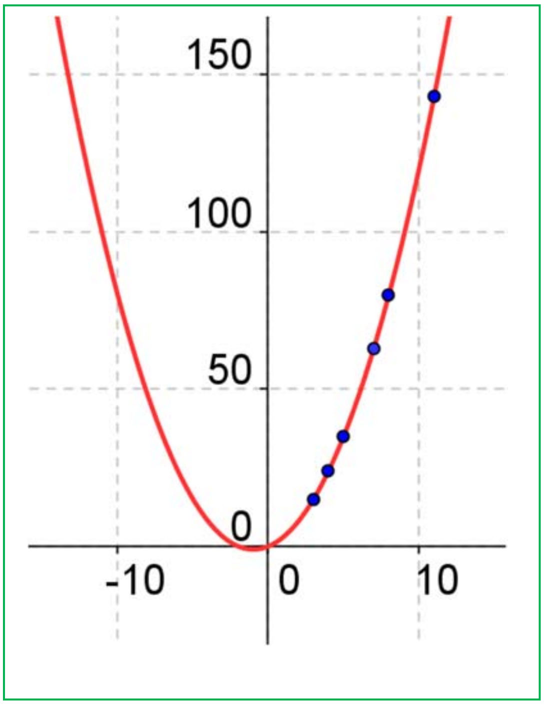
Faltan datos pero as dúas únicas diferenzas segundas son iguais, logo como o enunciado di que se axustan a unha parábola, imos impoñer que todas as diferenzas segundas sexan iguais a 2 e con esa información completamos a táboa.

t (s):	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d (m):	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168
$\Delta_1 y$		9	11	13	15	17	19	21	23	25
$\Delta_2 y$		2	2	2	2	2	2	2	2	

Primeiro completamos todas as diferenzas segundas iguais a 2. Despois as diferenzas primeiras que faltaban. E por último os metros. Aos 6 segundos percorreu unha distancia de 48 metros e aos 12 segundos de 168 metros.

Buscamos a función polinómica de segundo grao $y = ax^2 + bx + c$, que pasa polos puntos:

(3, 15), (4, 24) e (5, 35):



$15 = a9 + b3 + c$

$24 = a16 + b4 + c$

$35 = a25 + b5 + c$

Restamos: $9 = 7a + b$; $11 = 9a + b$. Volvemos restar: $2 = 2a$. Logo $a = 1$; $b = 11 - 9 \cdot 1 = 2$; $c = 15 - 9 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0$. A parábola é $y = x^2 + 2x$.

Comprobamos que, en efecto, pasa polos outros puntos da táboa:

$$143 = 11^2 + 2 \cdot 11 = 121 + 22.$$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

32. Calcula a función cuadrática determinada polos puntos: (1, 14); (2, 20); (3, 28). Represéntaa graficamente.

33. Calcula a función polinómica que pasa polos puntos: (0, 5); (1, 7); (2, 11) e (3, 23).

34. Calcula a función polinómica determinada polos puntos: (0, 3); (1, 3); (2, 5); (3, 15); (4, 39); (5, 83). Calcula as diferenzas sucesivas e debuxa a gráfica.

35. Fanse probas medindo a distancia que percorre un avión desde que toca terra nunha pista de aterraxe. Os datos están na táboa adxunta. Existe algunha función polinómica que se axuste a eses datos? Se a hai, escribe a súa fórmula.

Tempo (s):	0	1	2	3	4	5	6
Distancia (m):	0	100	175	230	270	300	325

36. Nunha fábrica os prezos dos cables de aceiro dependen dos diámetros e vén dado o prezo de cada metro en euros na táboa seguinte. Existe algunha función polinómica que se axuste perfectamente a eses datos?

Diámetro (mm):	3	4	5	6	7	8	9
Prezo (€):	3.6	8	18	25.3	39.2	57.6	81

37. Dada a táboa seguinte, pódese axustar exactamente unha recta? Considera se algún dato é erróneo e se é así, corríxeo.

Tempo (s):	1	2	3	4	5	6	76
Distancia (m):	1.53	4.65	7.78	10.89	14.01	17.13	20.29

Ao realizar un experimento é moi raro encontrar situacións nas que unha recta, unha función cuadrática, unha cúbica… se axusten aos datos á perfección.

Na actividade resolta das doses de medicamento e a porcentaxe de curacións, se tiveramos seguido calculando as diferenzas sucesivas nunca chegarían a ser ningunha delas iguais e chegariamos á diferenza de orde 9m, que xa só sería unha e nos daría: $\Delta_9 y = -0.67$. Teriamos que escribir unha función polinómica de grao 9!

Unha función polinómica de grao *n* coñécese se sabemos que pasa por *n* + 1 puntos.

Así, unha recta queda determinada por 2 puntos. Unha parábola queda determinada por 3 puntos. E a función polinómica de grao 9 por 10 puntos. Hai outras funcións. Os datos do medicamento axústanse a unha hipérbole: $y = 7 - \frac{15}{x+3}$, un tipo de función que imos estudar a continuación.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Funcións de proporcionalidade inversa. A hipérbole *y = k/x*

Recorda que:

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade inversa** *k* é o produto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Exemplo

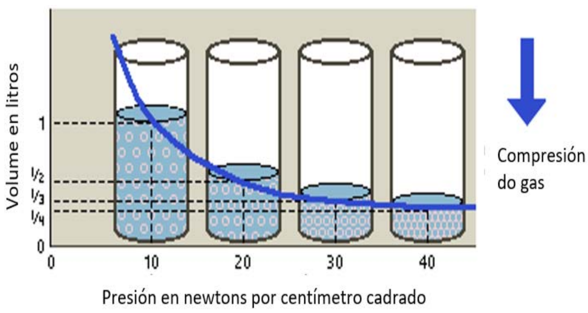
- En Física, encontramos moitos exemplos de magnitudes inversamente proporcionais: a velocidade dun vehículo e o tempo que tarda en percorrer un traxecto son magnitudes inversamente proporcionais. Neste caso, o espazo percorrido mantense constante sendo a razón de proporcionalidade inversa $s = v \cdot t$. Outros exemplos son: a densidade e o volume, a potencia e o tempo, a presión e a superficie…

Actividades resoltas

- *Representa no plano a lei de Boyle-Mariotte: "a temperatura constante, o volume dunha masa fixa de gas é inversamente proporcional á presión que este exerce".*

  A fórmula que describe esta lei é $P \cdot V = k$.

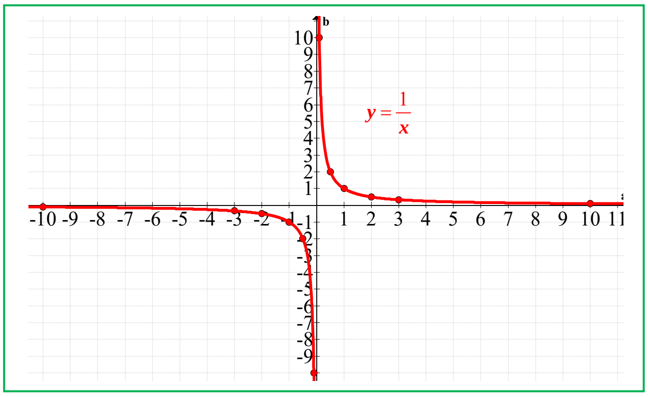
  Se despexamos o volume final *V*, obtemos a seguinte expresión: $V = \frac{k}{P}$.



A gráfica describe unha curva que, a medida que aumenta a presión inicial, diminúe o volume e se vai aproximando ao eixe X e, ao contrario, se diminúe a presión, o volume aumenta.

A **función de proporcionalidade inversa** defínese mediante a expresión $y = \frac{k}{x}$ onde k é a **razón de proporcionalidade inversa** e as variables *x* e *y* son os distintos valores que teñen as dúas magnitudes.

A súa representación gráfica no plano cartesiano é unha curva chamada **hipérbole**.



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo

- Representa a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$

x	–10	–3	–2	–1	–1/2	1/2	1	2	3	10
y	–1/10	–1/3	–1/2	–1	–2	2	1	1/2	1/3	1/10

Completamos unha táboa de valores e representamos os puntos nun sistema de coordenadas.

Pódese observar que a gráfica nunca corta aos eixes de coordenadas, xa que nin o *x* nin o *y* poden valer 0. O 0 non está no dominio e tampouco no percorrido da función (non se pode dividir por 0). O seu dominio é $\Re - \{0\}$.

Como se ve na gráfica, e é fácil comprobar, a función é continua en todo o dominio e simétrica respecto da orixe (función impar).

Actividades propostas

38. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa no mesmo sistema de coordenadas:

a. $y = \dfrac{-1}{x}$ b. $y = \dfrac{5}{x}$ c. $y = \dfrac{1}{2x}$

d. $y = \dfrac{3}{8x}$ e. $y = \dfrac{-5}{3x}$ f. $y = \dfrac{-12}{5x}$

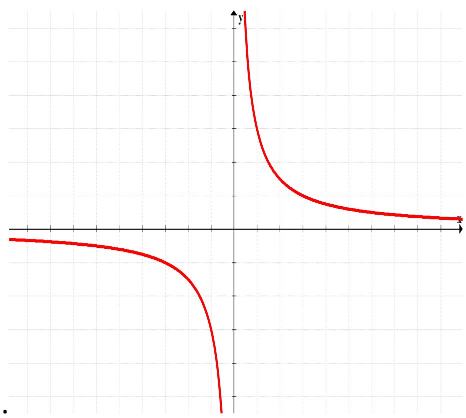
39. Describe o que sucede cando varía o valor de *k*. Axúdate das gráficas do exercicio anterior.

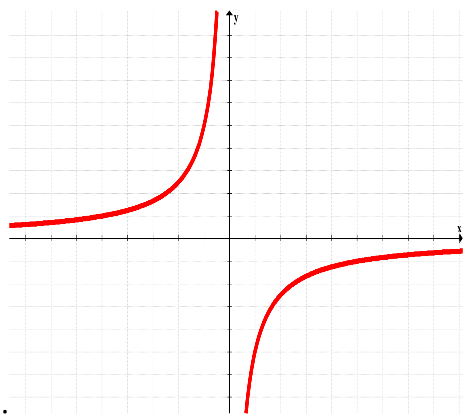
40. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles que pasa por cada un destes puntos. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.

a. (5, 3) b. (2, –1) c. (1/2, 6)

d. (10, 4) e. (*a*, 1) f. (1, *b*)

41. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:

a. 

b. 

c. $y = \dfrac{9}{2x}$ d. $y = \dfrac{-5}{3x}$ e. $y = \dfrac{-0.3}{x}$

f. $(-5, 2)$ g. $(4, -9)$ h. $(1, 1/2)$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

En xeral, as hipérboles cuxa expresión é $y = \frac{k}{x}$ teñen as seguintes propiedades:

$|k|$:

- S o valor absoluto de k aumenta, a curva afástase da orixe de coordenadas.
- Se o valor absoluto de k diminúe, a curva aproxímase á orixe de coordenadas.

Dominio: Son todos os reais menos o 0: *Dom* = $\Re$ – {0}.

Percorrido: O seu percorrido son todos os reais menos o 0: $\Re$ – {0}.

Continuidade: a función de proporcionalidade inversa é continua en todo o seu dominio pero descontinua na recta real, xa que o 0 non está no dominio e, polo tanto, en 0 hai un salto infinito.

Simetría: Son funcións impares, isto é, son simétricas respecto á orixe de coordenadas.

Asíntotas: Son as rectas cuxa distancia á gráfica é moi pequena, cando a curva se afasta da orixe.

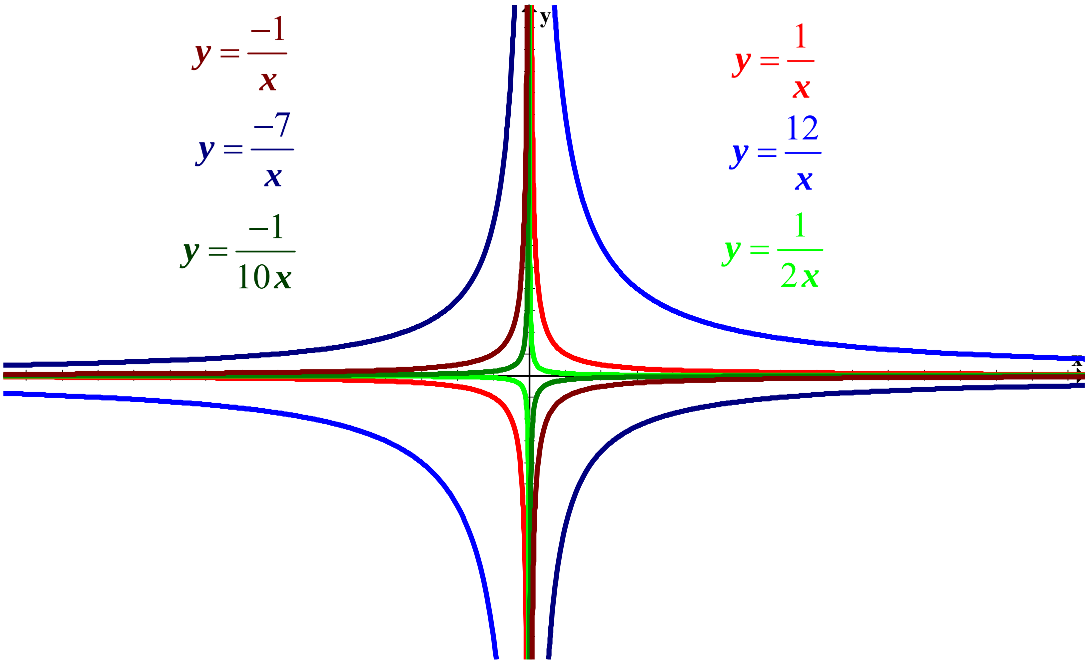
Vimos que non está definida en 0 pero, cando o valor de *x* se achega a cero, o valor de *y* faise moi grande en valor absoluto. Por iso se di que a recta *x* = 0 é unha asíntota vertical de *y* = *k*/*x*.

Do mesmo modo, se nos fixamos nas gráficas, obsérvase que cando os valores de *x* crecen en valor absoluto, os valores de *y* achéganse a 0 (sen tocalo). Dise que a recta *y* = 0 é unha asíntota horizontal.

Crecemento: depende do signo de k :

- Se $k>0$: a función é sempre **decrecente**.
- Se $k<0$: a función é sempre **crecente**.

As asíntotas dividen á hipérbole en dous anacos que reciben o nome de **ramas da hipérbole**.



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

A hipérbole $y = \dfrac{k}{x-b} + a$

A partir da representación da función $y = \dfrac{k}{x}$, é posible representar outro tipo de hipérboles? Ao igual que ocorre coas parábolas, podemos trasladar as hipérboles no plano en dirección horizontal ou vertical, segundo os valores que tomen os parámetros a e b.

Actividades propostas

42. Representa nos mesmos eixes de coordenadas as seguintes hipérboles:

$$y = \frac{5}{x} \qquad y = \frac{5}{x} + 3 \qquad y = \frac{5}{x} - 3$$

$$y = \frac{-12}{x} \qquad y = \frac{-12}{x-3} \qquad y = \frac{-12}{x+3}$$

$$y = \frac{3}{x} \qquad y = \frac{3}{x-1} + 4 \qquad y = \frac{5x-2}{x-1}$$

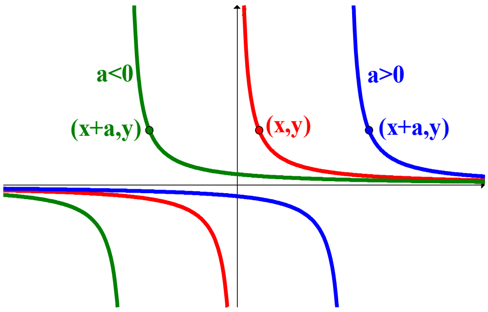
43. Describe o que sucede cando varían os parámetros *a* e *b* nas hipérboles do exercicio anterior.

En xeral, a representación gráfica das hipérboles cuxa expresión alxébrica é $y = \dfrac{k}{x-b} + a$ é unha translación no plano dependendo dos valores de a e b.

Desprazamentos horizontais

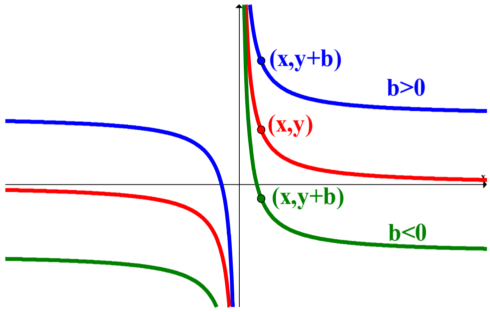
Ao variar o valor de $\boldsymbol{a}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase horizontalmente a unidades:

- Se $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara á dereita.
- Se $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara á esquerda.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x+a, y)$:
  $$(x, y) \rightarrow (x+a, y)$$
- O vector de translación é o vector $(a,\ 0)$



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Desprazamentos verticais



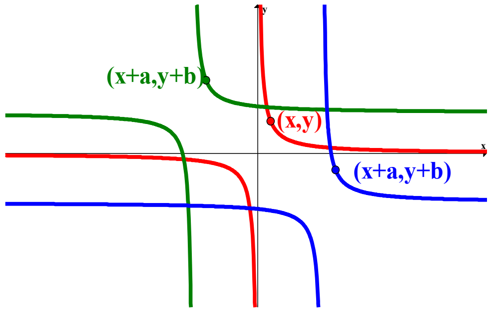
Ao variar o valor de $\boldsymbol{b}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase verticalmente b unidades:

- Se $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara arriba.
- Se $\boldsymbol{b} < \mathbf{0}$: a hipérbole desprázase cara abaixo.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x, y+b)$$

- O vector de translación é o vector $(0,\ b)$

Desprazamentos oblicuos



Ao variar tanto o valor de $\boldsymbol{a}$ como o valor de $\boldsymbol{b}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase diagonalmente tantas unidades como sexa o valor dos parámetros:

- As direccións cara a onde se traslada dependerán dos signos de a e b .
- O punto (x, y) convértese no punto $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$

- O vector de translación é o vector (a,b).
- A orixe de coordenadas (0, 0) trasládase ao punto (*a*, *b*).

Actividades propostas

44. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa a partir da hipérbole $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \frac{4}{x}$ f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

45. Estuda o dominio, percorrido, continuidade, simetría, asíntotas e crecemento das funcións de proporcionalidade inversa do exercicio anterior.

46. Escribe unha regra para expresar como se trasladan as asíntotas segundo os parámetros a e b .

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Hipérbole $y = \dfrac{mx+n}{px+q}$

As funcións que se definen mediante esta expresión tamén se representan mediante hipérboles. Para iso, necesitamos facer unha modificación nunha expresión como a estudada no apartado anterior que nos resulte máis doada de manexar e representar:

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Dividindo } (mx+n):(px+q) \rightarrow y = \frac{k}{x-a} + b$$

Actividades resoltas

- *Converter a función* $y = \dfrac{3x+2}{x-7}$ *nunha función cuxa expresión sexa máis sinxela de representar.*

Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

$$(3x+2) = 3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)} = \frac{3(x-7)}{(x-7)} + \frac{23}{(x-7)} = \frac{23}{(x-7)} + 3$$

Esta última expresión é doada de representar.

Actividades propostas

47. Representa as seguintes hipérboles:

a. $y = \dfrac{2x-4}{x+5}$ b. $y = \dfrac{3-5x}{x+2}$ c. $y = \dfrac{4x-12}{x-3}$

d. $y = \dfrac{6x+8}{1-x}$ e. $y = \dfrac{7x+5}{x-4}$ f. $y = \dfrac{6x+10}{2x-1}$

48. Representa a gráfica da función: $y = 7 - \dfrac{15}{x+3}$. A) Cando x crece, "*y*" tende a 7? Ten unha asíntota horizontal *y* = 7? B) Se *x* se achega a –3, o *y* crece? Ten unha asíntota vertical, *x* = –3? C) Analiza se esta hipérbole se axusta aos valores da actividade resolta da táboa:

Doses (mg): *x*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Curacións (%): *y*	3.25	4.0	4.5	4.86	5.1	5.3	5.5	5.64	5.75	5.85

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.5. Funcións exponenciais

Estudamos funcións polinómicas, de proporcionalidade inversa… Agora imos estudar outro tipo de funcións.

Hai dous tipos de funcións cuxa **expresión analítica,** ou **fórmula,** é unha **potencia**:

- Se a variable independente está na base, $y = x^3$, chámase **función potencial** e, cando ademais o expoñente é un número natural, é unha función polinómica.
- Se a variable independente está no expoñente, $y = 3^x$, chámase **función exponencial**.

Exemplo:

- Son funcións exponenciais: $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 2^{3x}$, $y = 5^{-x}$.

Unha función exponencial é aquela na que a variable independente está no expoñente.

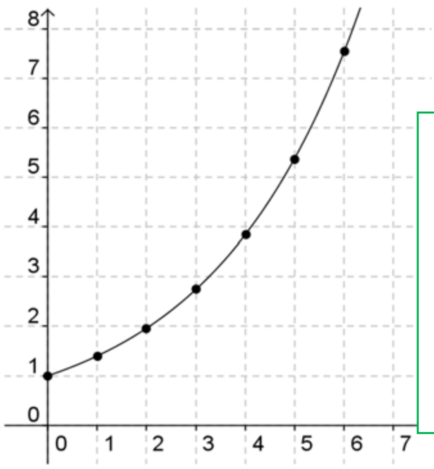
Actividade resolta

- Se a cantidade de bacterias dunha determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir a seguinte fórmula para calcular o número *"y"* de bacterias que haberá ao cabo de *"x"* horas (comezando por unha soa bacteria): $y = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Táboa de valores da función**):

Horas transcorridas (*x*)	Núm. bacterias (*y*)
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
…	…

Gráfica da función



Actividades propostas

49. Proba agora a realizar no teu caderno unha táboa de valores e a gráfica para un caso similar, supoñendo que o número de bacterias se multiplica cada hora por 2 en lugar de por 1.4.

Observa que os valores de *"y"* aumentan moito máis á presa: mentres que os valores de *"x"* aumentan de 1 en 1, os valores de *y* vanse multiplicando por 2. Isto chámase **crecemento exponencial**. Se en lugar de multiplicar se trata de dividir, temos o caso de **decrecemento exponencial**.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

50. No teu caderno, representa conxuntamente as gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “x” entre 0 e 6. Observa a diferenza cuantitativa entre o crecemento potencial e o crecemento exponencial.

As gráficas das funcións exponenciais $y = b^x$ diferéncianse segundo o valor da base “b”. Especialmente diferéncianse se $0 < b < 1$ ou $b > 1$.

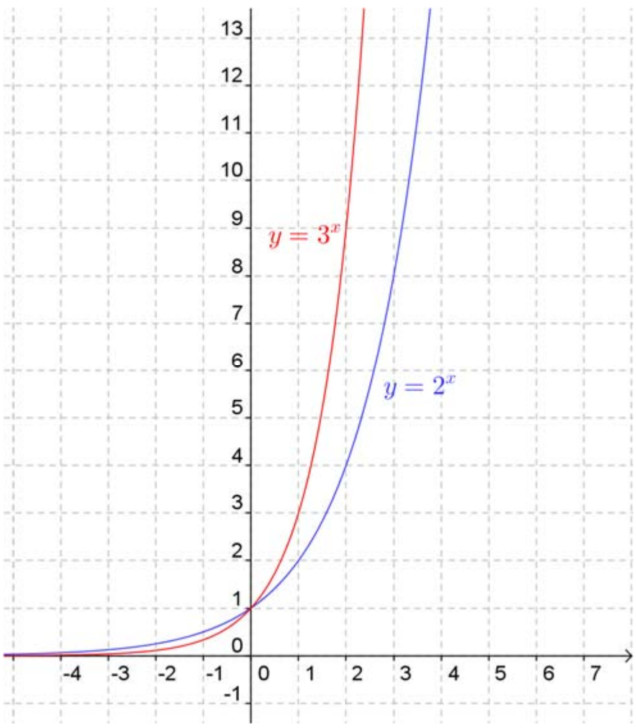
No caso no que $b = 1$ temos a función constante $y = 1$, cuxa gráfica é unha recta horizontal.

Actividades resoltas

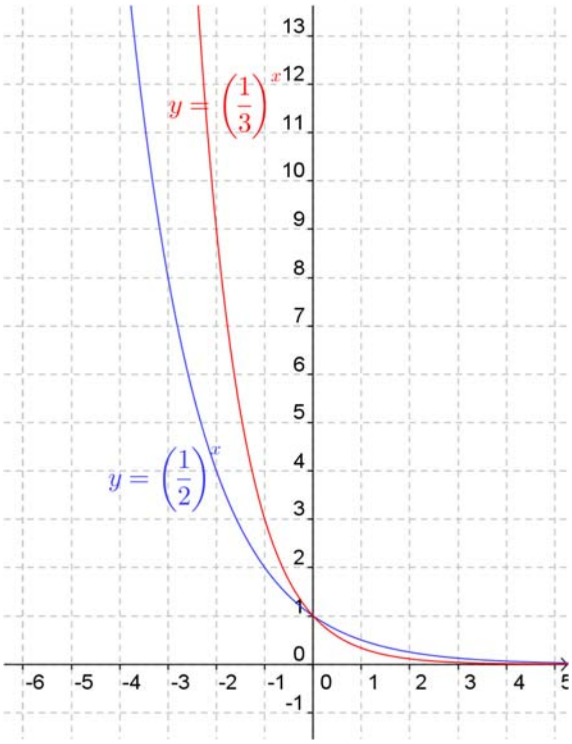
- *Representa as gráficas de $y = 2^x$ e de $y = 3^x$. Tamén as gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.*

  Analiza as similitudes e as diferenzas.

Funcións $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funcións $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos os seguintes aspectos comúns nas catro gráficas:

- O seu **dominio** é toda a recta real. Ademais son continuas.
- O seu **percorrido** é $(0, +\infty)$. É dicir, “y” nunca é cero nin negativo.
- Pasan todas polos puntos (0, 1), (1, b) e (–1, 1/b).
- A gráfica de $y = a^x$ e a de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto do eixe OY.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

E observamos tamén aspectos diferenciados en ambas as ilustracións:

Cando a base é $b > 1$

Son funcións **crecentes**. Canto maior é a base, o crecemento é máis rápido.

Cando $x \to -\infty$, a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte esquerda do eixe OX.

Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

Cando a base é $0 < b < 1$

Son funcións **decrecentes**. Canto menor é a base, o decrecemento é máis rápido.

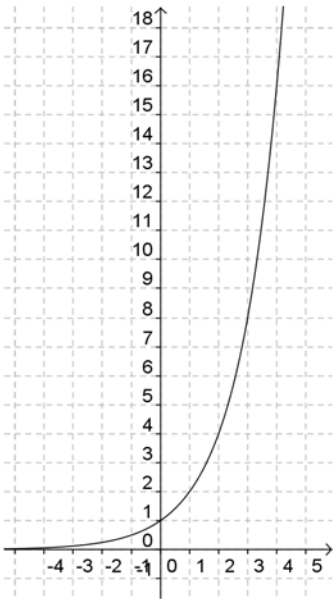
Cando $x \to +\infty$, a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte dereita do eixe OX.

Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

- *Representa graficamente as seguintes funcións exponenciais* $y = 2^x$ *e* $y = 2^{-x}$.

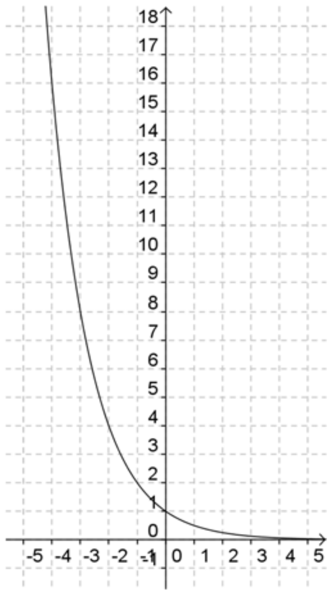
Función $y = 2^x$

x	y
...	...
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
...	...



Función $y = 2^{-x}$

x	y
...	...
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
...	...



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

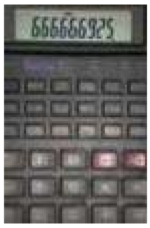
O número *e*. A función *y* = e^x

O número e ten unha gran importancia en Matemáticas, comparable mesmo ao número π aínda que a súa comprensión non é tan elemental e tan popular. Para comprender a súa importancia hai que acceder a contidos de cursos superiores. O seu valor aproximado é e = 2.71828182846... Trátase dun número irracional (aínda que ao velo pode parecer periódico). Este número aparece nas ecuacións de crecemento de poboacións, desintegración de substancias radioactivas, intereses bancarios, etc.

Tamén se pode obter directamente o valor de e coa calculadora (sempre como aproximación decimal, xa que é un número irracional). Normalmente hai unha tecla coa etiqueta e pero podes usar tamén a tecla etiquetada e^x. Para iso terás que calcular o valor de e^1.

A función $y = e^x$comparte as características descritas máis arriba para funcións exponenciais de base maior que 1.

Actividades propostas



51. Utilizando a calculadora, fai unha táboa de valores e representa no teu caderno as funcións $y = e^x$, $y = e^{-x}$.

52. Unha persoa ingresou unha cantidade de 5 000 euros a un interese do 3 % nun banco, de modo que cada ano o seu capital se multiplica por 1.03.

a. Escribe no teu caderno unha táboa de valores co diñeiro que terá esta persoa ao cabo de 1, 2, 3, 4, 5 e 10 anos.

b. Indica a fórmula da función que expresa o capital en función do número de anos.

c. Representa no teu caderno, graficamente, esta función. Pensa ben que unidades deberás utilizar nos eixes.

Cultivo da bacteria *Salmonella*

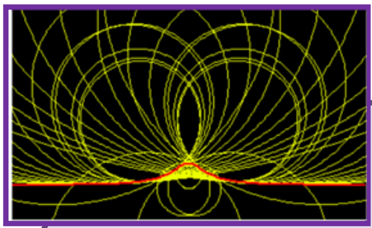
53. Un determinado antibiótico fai que a cantidade de certas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Se a cantidade ás 7 da mañá é de 50 millóns de bacterias, (a) fai unha táboa calculando o número de bacterias que hai cada hora, desde as 2 da mañá ás 12 do mediodía (observa que tes que calcular tamén "cara atrás"), e (b) representa graficamente estes datos.

54. Representa no teu caderno as seguintes funcións e explica a relación entre as súas gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

55. Coñecendo a gráfica da función $f(x) = 2^x$, que se viu máis arriba, e sen calcular táboa de valores, debuxa no teu caderno as gráficas das funcións $g(x) = 2^x - 3$ e $h(x) = 2^{x-3}$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



CURIOSIDADES. REVISTA

Foto de M. G. *Agnesi*. RSM

María Gaetana Agnesi

María Gaetana Agnesi é unha matemática italiana cuxa obra máis importante, *Institucións Analíticas*, foi traducida a varios idiomas e utilizada para aprender Matemáticas durante máis de cincuenta anos en moitos países de Europa. Nela trataba con sinxeleza e claridade temas tan novedosos por entón, como o Cálculo Diferencial e Integral. Ao final da súa vida era famosa en toda Europa como unha das mulleres de ciencia máis capaces do século XVIII. No seu honor, un cráter de Venus leva o seu nome. Na *Biblioteca Ambrosiana* de Milán gárdanse as súas obras inéditas que ocupan vintecinco volumes.

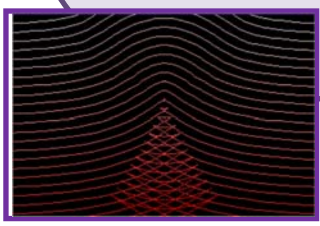
Naceu en Milán no século XVIII e foi unha nena dotada, que con nove anos falaba sete idiomas.

O seu pai tivo 21 fillos e fillas, sendo María a maior, e proporcionoulles a todos unha boa formación, mesmo científica. Gustáballe amosar o talento dos seus fillos nas reunións que organizaba nos seus salóns. Moi pronto os sabios e eruditos e os intelectuais locais empezaron a asistir ao salón dos Agnesi para oír as disertacións de María sobre temas filosóficos, científicos e matemáticos. Á idade de nove anos, María estivo durante unha hora perante unha asemblea culta falando en latín sobre o dereito da muller a estudar ciencias e sobre como as artes liberais non eran contrarias ao sexo feminino.

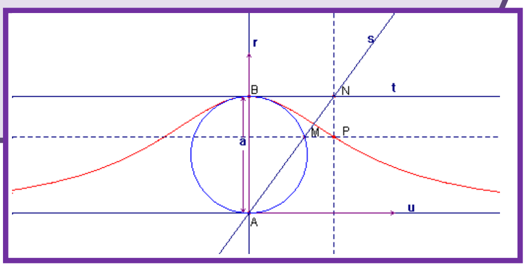
Parece ser que María era somnámbula e, en ocasións, despois de traballar intensamente, exhausta, ía durmir deixando un problema sen resolver sobre o escritorio. Á mañá seguinte, ao espertar, vía que o resolvera mentres durmía. Escribira a solución completa e voltara á cama.

O seu libro, que escribiu para que os seus irmáns puidesen estudar, converteuse nunha obra importante, onde trataba as Matemáticas máis actuais da súa época de forma clara, e tivo unha acollida espectacular. Foi traducido a moitos idiomas e utilizouse como libro de texto en moitas universidades.

Pero… Pero a súa reputación histórica foi distorsionada polo feito de que, nas súas *Instituzioni Analitiche,* traballara coa "curva de Agnesi" ou curva sinusoidal versa, "*versiera*" que se traduciu ao inglés, por un erro do tradutor, John Colson, como a "bruxa de Agnesi" confundindo o termo "*versiera*" por "*aversiera*" que significa bruxa, feiticeira, ("*witch*").



$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

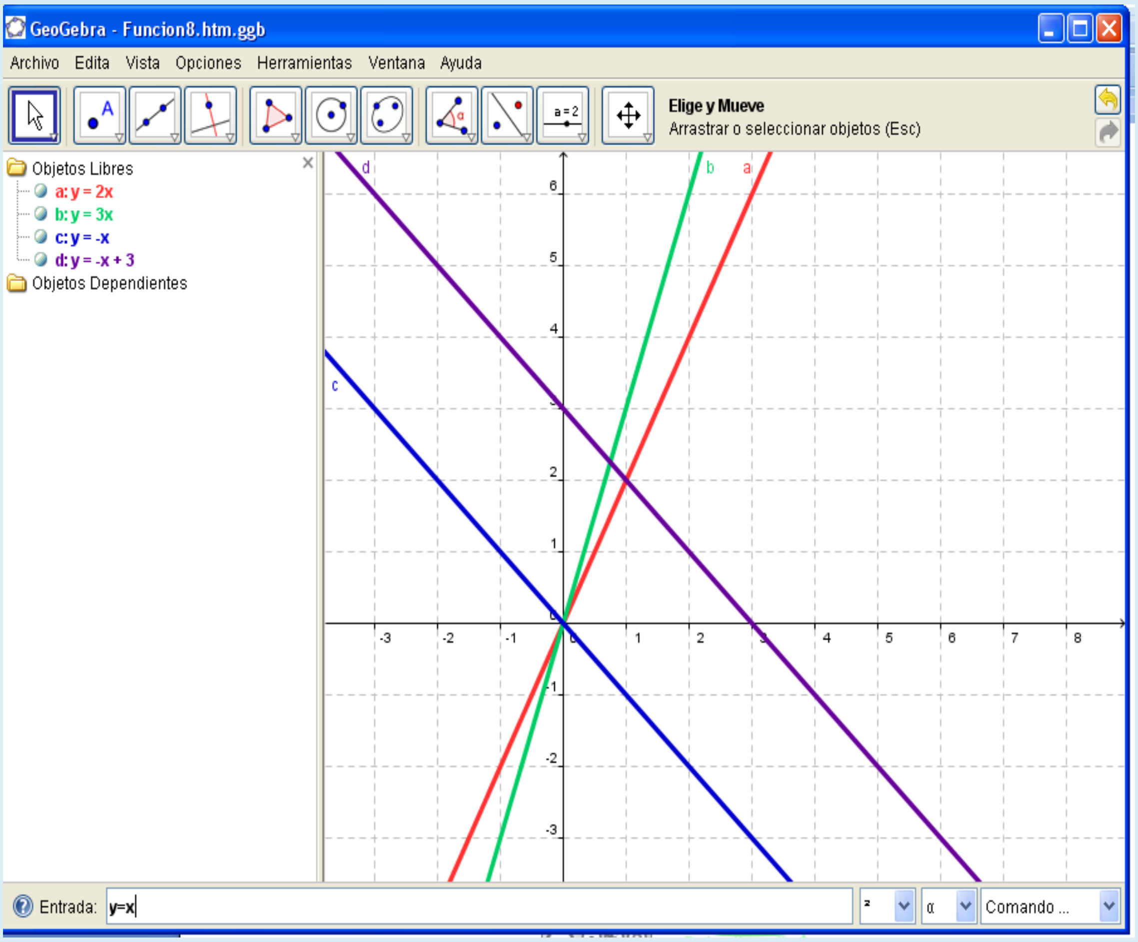
Utiliza o ordenador

Podes utilizar o ordenador para debuxar funcións. Para iso necesitas un programa adecuado como *Derive*, *Cabri*, *Mathematica*, *Xeoxebra*…

Uns son máis sinxelos de utilizar que outros pero, utilizando a axuda, pronto dominarás calquera deles.

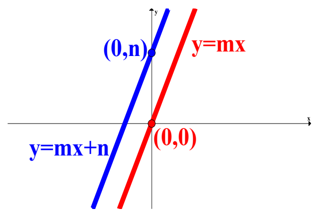
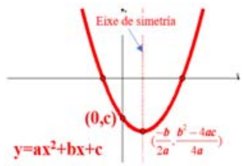
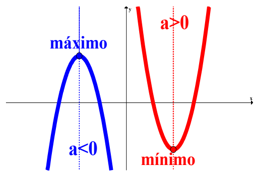
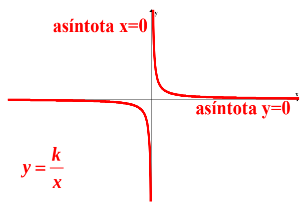
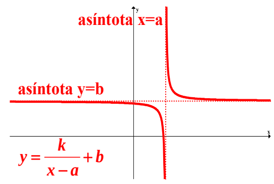
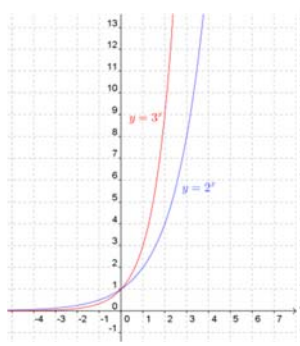
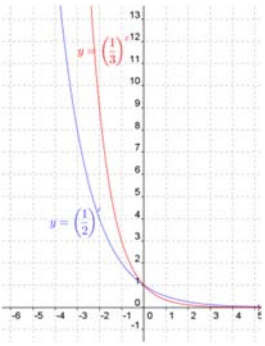
Moitas das gráficas que viches neste capítulo utilizáronos.

Por exemplo, utilizando *Xeoxebra* podemos debuxar rectas:



Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Función	Relación entre dúas magnitudes de forma que a un valor calquera dunha lle facemos corresponder, como moito, un único valor da outra.	$y = 2x + 3$
Características das funcións	Continuidade. Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos. Simetría. Periodicidade.	A recta $y = 2x + 3$ é continua, crecente, non ten máximos nin mínimos, nin é simétrica, nin periódica.
Función polinómica de primeiro grao: Rectas: ***y = mx*** ***y = mx + n***	Represéntanse mediante **rectas**: Hai dous tipos: - **Funcións lineais ou de proporcionalidade directa**: $y = mx$, pasan pola orixe de coordenadas. - **Funcións afíns**: $y = mx + n$, son translacións no eixe y, n unidades. Pasan polo punto $(0,n)$.	
Función polinómica de segundo grao: Parábolas $y = ax^2 + bx + c$	Represéntanse mediante **parábolas.** **Vértice:** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ **Puntos de corte co eixe OX:** $ax^2 + bx + c = 0$. **Punto de corte co eixe OY:** $x=0$, é o punto $(0,c)$ **Eixe de simetría**: é a recta $x = \frac{-b}{2a}$.	 
Función de proporcionalidade inversa: Hipérboles $y = k/x$	$\lvert k\rvert$: afasta ou achega a curva á orixe de coordenadas. **Dominio e percorrido:** $\Re - \{0\}$ **Continuidade:** Descontinua en $x = 0$. **Simetría:** Función impar. **Asíntotas:** As rectas $x=0$ e $y = 0$.	
Hipérboles $y = \frac{k}{x-a} + b$	Translación da hipérbole $y = \frac{k}{x}$ polo vector (a, b). Dominio: $\Re - \{a\}$ Percorrido: $\Re - \{b\}$ - Asíntotas: $x = a$; $y = b$.	
Función exponencial	$y = b^x$. Se $b > 1$ é crecente. Se $0 < b < 1$ é decrecente.	 

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Funcións

1. Debuxa no teu caderno un sistema de referencia cartesiano e nel, os puntos seguintes, elixindo unha escala nos eixes que permita debuxalos todos de forma cómoda. Sinala en cada caso a que cuadrante pertence o punto ou, no seu caso, en que eixe está: *A*(2, 4); *B*(0, 1); *C*(–3, 0); *D*(2, –1.5); *E*(1.5, 0); *F*(0, 0); *G*(–1, –2/3).

2. Escribe as coordenadas de tres puntos situados no terceiro cuadrante.

3. Sitúa nun sistema de referencia cartesiano os puntos seguintes:

A(0, 3); *B*(0, 1.7); *C*(0, –1); *D*(0, –4). Que teñen en común todos eles?

4. Escribe as coordenadas e representa tres puntos do eixe de abscisas. Que teñen en común?

5. Debuxa no teu caderno un triángulo rectángulo cun cateto igual a 3, e o vértice do ángulo recto na orixe de coordenadas. Indica as coordenadas de todos os vértices.

6. Indica cales das seguintes correspondencias son funcións:

a) A cada número natural asócianselle os seus divisores primos.

b) A cada circunferencia do plano asóciaselle o seu centro.

c) A cada circunferencia do plano asóciaselle un diámetro.

7. A distancia, *d*, percorrida por un tren, depende do número de voltas, *n*, que dá cada roda da locomotora.

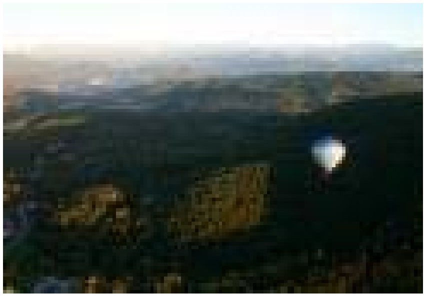
a) Escribe a fórmula que permite obter *d* coñecido *n*, sabendo que o diámetro das rodas da locomotora é de 78 cm.

b) Debuxa a gráfica.

c) Que distancia terá percorrido o tren cando a roda teña dado mil voltas? (toma como valor de π o número 3.14).

d) Cantas voltas terá dado a roda ao cabo de 7 km?

8. Un globo sonda utilizado polo Servizo Meteorolóxico dos Pireneos para medir a temperatura a distintas alturas leva incorporado un termómetro. Obsérvase que cada 180 m de altura a temperatura diminúe un grao. Certo día a temperatura na superficie é de 9°C. Determina:



a) Que temperatura haberá a 3 km de altura?

b) A que altura haberá unha temperatura de –30°C?

c) Escribe unha fórmula que permita calcular a temperatura T coñecendo a altura A. Confecciona unha táboa e debuxa a gráfica. Que tipo de función é?

d) Se a temperatura na superficie é de 12°C, cal é entón a fórmula? Que tipo de función é?

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

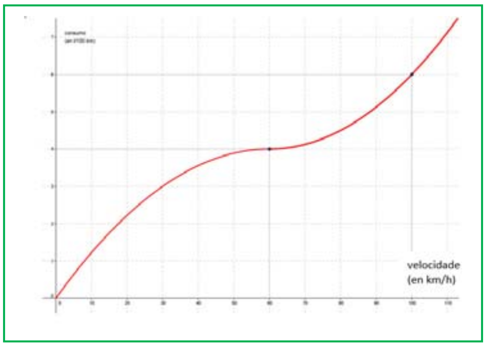
9. Debuxa a gráfica da función *parte enteira*: $y = E(x)$, que indica o número enteiro menor, máis próximo a x, así, por exemplo, E(2.3) = 2.

10. Un rectángulo ten un perímetro de 100 cm. Chama x á lonxitude dun dos seus lados e escribe a fórmula que dá a área en función de x. Debuxa a súa gráfica. Que tipo de función é?

11. Unha caixa cadrada ten unha altura de 20 cm. Como depende o seu volume do lado da base? Debuxa a gráfica da función que resulta.

12. Cunha folla de papel de 32 cm de longo e 22 cm de ancho recórtase un cadrado de 2 cm de lado en cada unha das esquinas, dóbrase e constrúese unha caixa. Cal é o volume da caixa? E se se recortan cadrados de 3 cm? Cal é o volume se o lado do cadrado recortado é x? Escribe a fórmula e debuxa a gráfica.

13. Constrúense boias unindo dous conos iguais pola base, sendo o diámetro da base de 90 cm. O volume da boia é función da altura "*a*" dos conos. Se queremos unha boia para sinalar a entrada de barcos a pedais bástanos cunha altura de 50 cm: que volume terá? Se é para barcos maiores precísase unha altura de 1.5 m: que volume terá? Escribe a expresión da función que calcula o volume en función da altura. Debuxa a súa gráfica.



14. O consumo de gasolina dun coche por cada 100 km vén representado mediante a gráfica. Utiliza a gráfica para explicar como varía o consumo de gasolina dependendo da velocidade do coche.

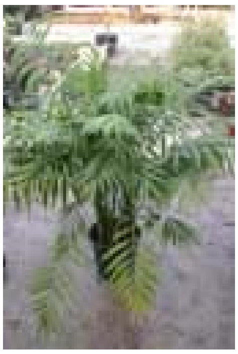
a) Cal é a variable dependente?

b) E a independente?

c) Cal é o consumo para unha velocidade de 60 km/h?

d) A que velocidade o consumo é de 6 l/100 km?

15. Ao estudar o crecemento dunha planta observamos que durante os primeiros 30 días faino moi á présa, nos 15 días seguintes o crecemento é máis lento e despois mantense coa mesma altura. Realiza un bosquexo da gráfica que relaciona o tempo coa altura acadada pola planta.



Se temos máis información podemos mellorar o bosquexo. Por exemplo, fai a táboa e a gráfica no caso de que o crecemento da planta se axuste ás seguintes fórmulas (o tempo exprésase en días e a altura en centímetros):

a) Durante os primeiros 30 días: altura = 4 · tempo.

b) Nos 15 días seguintes: altura = 90 + tempo.

c) A partir do día 45: altura = 135.

Características dunha función

16. Xaquín chegou a un acordo co seu pai para recibir a súa paga. Cobrará 20 euros ao mes o primeiro ano e 5 euros máis por cada ano que pase. Canto lle corresponderá dentro de 7 anos? Fai unha táboa de valores e representa a súa gráfica. É continua? Indica os puntos de descontinuidade e o seu tipo. Busca unha fórmula que permita calcular a paga cando teñan pasado *n* anos.

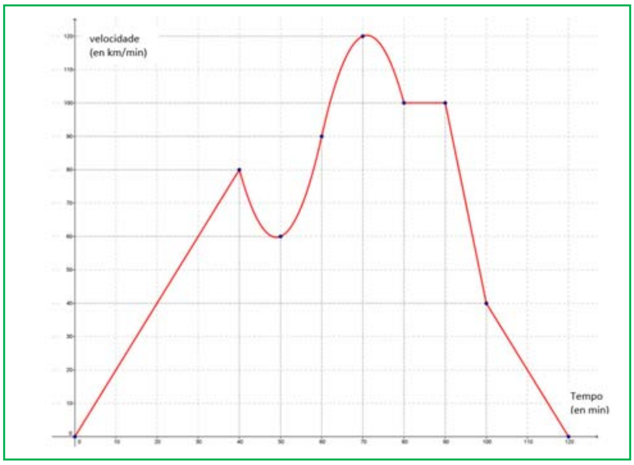
17. Ao entrar no aparcamento dun centro comercial encontramos un letreiro cos prezos que nos indican que 1 hora ou fracción custa 1.20 € e as dúas primeiras horas son gratis para os clientes con tarxeta de compra do centro. Fai unha táboa que relacione o tempo co importe pagado durante unha xornada completa (12 horas) nos casos dun cliente con tarxeta ou sen ela. Deseña a gráfica e contesta ás preguntas:

a) Que valores toma a variable dependente? E a independente?

b) Podes unir os puntos da gráfica? Como se debe facer?

c) Existen puntos de descontinuidade? Se a resposta é afirmativa, sinálaos e explica o seu significado.

18. Durante unha viaxe, a velocidade do coche varía dependendo do tipo de estrada, das condicións nas que se encontra, do tempo meteorolóxico… a seguinte gráfica reflicte a velocidade dun vehículo en cada instante do traxecto que seguiu.



a) É funcional a relación de dependencia entre o tempo e a velocidade?

b) Cal é a variable independente? E a dependente?

c) A que velocidade ía cando levaba unha hora de viaxe? En que momentos ía a unha velocidade de 40 km/h?

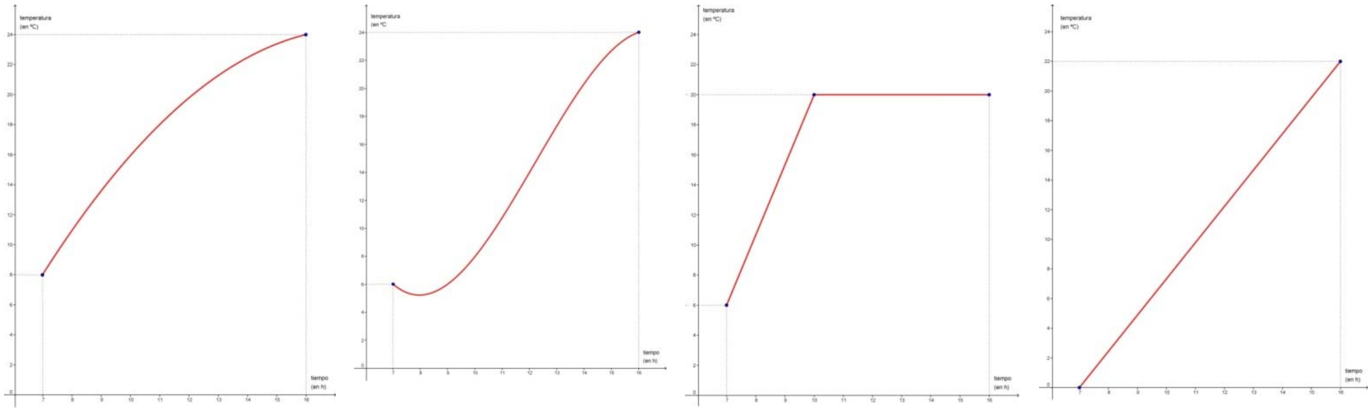
d) Indica os intervalos nos que a velocidade aumentou e diminuíu. Foi constante nalgún momento? Cando? Durante canto tempo?

e) Cal foi a velocidade máxima acadada ao longo de todo a viaxe? En que momento se acadou? E durante a primeira hora da mesma?

f) Cal foi a velocidade mínima acadada ao longo de toda a viaxe? Cando se acadou? E entre a primeira media hora e a hora e media?

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

19. As gráficas seguintes amosan a evolución, un día calquera, da temperatura acadada entre as 7 da mañá e as 4 da tarde en catro cidades (Madrid, Granada, Valladolid e Sevilla):



a) Explica a monotonía de todas as gráficas.

b) Nalgunha cidade a temperatura se mantivo constante durante todo o intervalo? E en parte del?

c) Que cidade cres que presenta un cambio de temperatura máis suave ao longo de toda a mañá?

d) Tendo en conta que en Madrid o incremento da temperatura foi sempre lineal, en Granada a temperatura mínima se acadou despois das 7 h, en Sevilla ás veces se mantivo constante, indica que gráfica corresponde a cada unha das cidades e explica cales foron as temperaturas máximas e mínimas en cada unha delas.

20. Unha viaxe realizada por un tren, nun certo intervalo da mesma, vén dada da seguinte forma: Durante as dúas primeiras horas, a distancia "*d*" (en quilómetros) ao punto de partida é: $2t + 1$, onde "*t*" é o tempo (en horas) de duración do traxecto. Entre a 2ª e 3ª hora, esta distancia vén dada por $-t + 7$. Entre a 3ª e 4ª hora, ambas as dúas inclusive, $d = 4$. Desde a 4ª e ata a 6ª (inclusive), a distancia axústase a $3t - 8$.

a) Realiza unha táboa e unha gráfica que recolla a viaxe da forma máis precisa posible (para iso debes calcular, como mínimo, os valores da variable tempo nos instantes 0, 2, 3, 4 e 6).

b) Explica se a relación anteriormente explicada entre a distancia percorrida e o tempo tardado en percorrela é funcional.

c) A relación anterior, presenta algunha descontinuidade?

d) En que momento a distancia ao punto de partida é de 7 km?

e) Que indican os puntos de corte da gráfica cos eixes?

f) Determina os intervalos onde a función é crecente, decrecente e constante.

g) Encontra os puntos onde a función acada os seus máximos e mínimos relativos e absolutos. Interpreta o significado que poidan ter.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

21. Representa graficamente as seguintes funcións, estudando nelas todas as características que se traballaron no capítulo: continuidade, monotonía, extremos, simetría e periodicidade.

a) Valor absoluto dun número: $f(x) = |x|$, que se define: $|x| = \begin{cases} x, & se\ x > 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$.

b) Oposto e inverso do número *x*: $f(x) = \frac{-1}{x}$.

Tipos de funcións

22. Escribe a ecuación da recta paralela a $y = 5x + 1$ de ordenada na orixe 6.

23. Sen representalos graficamente, di se están aliñados os puntos $A(2, 4)$, $B(6, 9)$ e $C(12, 15)$.

24. Debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema coordenado, as rectas: $y = 2x$; $y = -2x$; $y = 3x$; $y = -3x$.

25. Debuxa no teu caderno, nun mesmo sistema coordenado, as rectas: $y = 2x + 1$; $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x - 2$; $y = 2x - 3$. Como son?

26. Unha empresa de alugueiro de vehículos ofrece dúas fórmulas diferentes. Fórmula 1: Alúgao por 300 euros ao día con quilometraxe ilimitada. Fórmula 2: Alúgao por 200 euros ao día e 7 euros o quilómetro. Queremos facer unha viaxe de 10 días e mil quilómetros, canto nos custará con cada unha das fórmulas? Como non sabemos a quilometraxe exacta que acabaremos facendo, interésanos facer un estudo para saber a fórmula máis beneficiosa. Escribe as fórmulas de ambas as situacións e debuxa as súas gráficas. Razoa, a partir destas gráficas, que fórmula é máis rendible segundo o número de quilómetros que vaiamos facer.

27. Calcula a ecuación e debuxa a gráfica das rectas seguintes:

a) A súa pendente é 3 e a súa ordenada na orixe é 5.

b) Pasa polos puntos $A(1, 4)$ e $B(0, 9)$.

c) A súa ordenada na orixe é 0 e a súa pendente é 0.

d) Pasa polos puntos $C(-2, 7)$ e $D(-3, 10)$.

e) Pasa polo punto (a, b) e ten de pendente m.

28. Debuxa no teu caderno, sen calcular a súa ecuación, as rectas seguintes:

a) De pendente 2 e ordenada na orixe 0.

b) Pasa polos puntos $A(1, 3)$ e $B(2, 1)$.

c) A súa pendente é 2 e pasa polo punto $(4, 5)$.

29. Calcula o vértice, o eixe de simetría e os puntos de intersección cos eixes das seguintes parábolas. Debuxa as súas gráficas.

a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

30. Debuxa a gráfica de $y = 2x^2$. Fai un modelo. Determina o vértice das seguintes parábolas e utiliza o modelo para debuxar a súa gráfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Axuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vértice $(-2, -10)$

31. Axusta unha función polinómica aos datos da táboa:

***x*:**	0	1	2	3	4	5	6
***y*:**	1	5	11	19	29	41	55

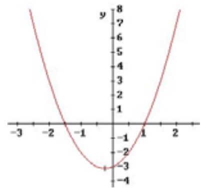
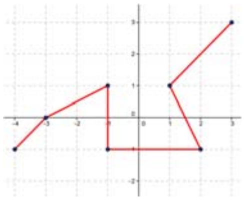
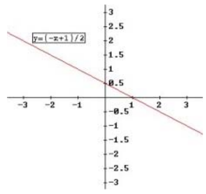
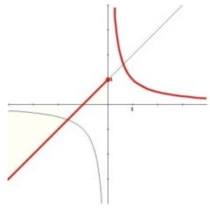
32. Debuxa as gráficas de: $y = 2/x$; $y = 4 + 2/x$; $y = 2/(x + 3)$; $y = 4 + 2/(x + 3)$. Indica en cada caso os puntos de descontinuidade e as asíntotas.

33. Debuxa as gráficas de: $y = 3^x$; $y = (1/3)^x$; $y = 3^{-x}$; $y = (1/3)^{-x}$; $y = 2 + 3^x$; $y = 3^{x+2}$.

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. A única gráfica que non corresponde a unha función é:

a)  b)  c)  d) 

2. A única táboa que non pode ser dunha relación funcional é:

a)

x	***y***
0	5
1	7
2	32
3	41

b)

x	***y***
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2

c)

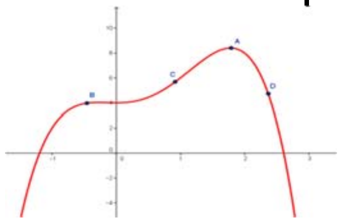
x	***y***
–3	1
–1	2
0	3
2	4

d)

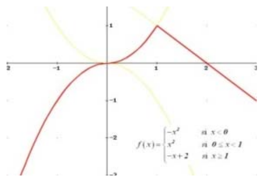
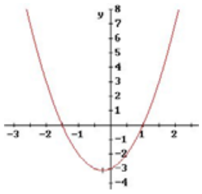
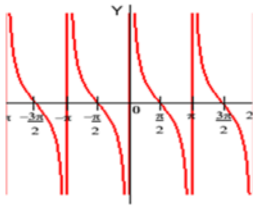
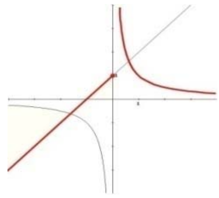
x	***y***
0	1
1	2
4	3
0	4

3. O máximo absoluto da función acádase no punto:

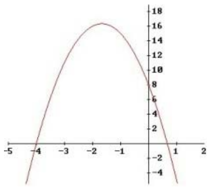
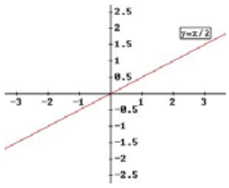
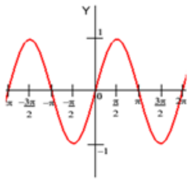
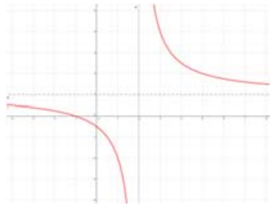
a) b) c) d)



4. A única gráfica que corresponde a unha función periódica é:

a)  b)  c)  d) 

5. A única gráfica que corresponde a unha función que é sempre crecente é:

a)  b)  c)  d) 

6. A única función afín que, ademais, é lineal é:

a) $y = -7x$ b) $y = 7x + 4$ c) $y = -4x + 7$ d) $y = -6x - 9$

7. A única función cuadrática é:

a) $y = -8x$ b) $y = 2x + 3$ c) $y = -2x^2 + 3x$ d) $y = -2x^3 - 3x$

8. A función cuadrática que ten o seu vértice no punto (2, 0) é:

a) $y = -2x^2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = -2x^2 + 4x$ d) $y = -x^2 + 4x - 2$

9. A hipérbole de asíntotas $x = 3$ e $y = 5$ é:

a) $y = 5 + 8/(x - 3)$ b) $y = 3 + 6/(x - 5)$ c) $y = -5 + 2/(x + 3)$ d) $y = 5 + 1/(x + 3)$

10. A única función exponencial é:

a) $y = x^7 + x^6$ b) $y = 3^x$ c) $y = 3^x + x^2$ d) $y = 1/3^x + x^2$

Autores: José Gallegos e David Miranda
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF