Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB da ESO

Capítulo 14: Combinatoria

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Adela Salvador e María Molero

Revisores: Andrés Hierro e Sergio Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e María Molero

Índice

Resumo

Saber contar é algo importante en Matemáticas. Xa Arquímedes no seu libro *Arenario* se preguntaba como contar o número de grans de area que había na Terra.

Neste capítulo imos aprender técnicas que nos permitan contar. Imos aprender a recoñecer as permutacións, as variacións e as combinacións; e a utilizar os números combinatorios en distintas situacións como para desenvolver un binomio elevado a unha potencia.

Estas técnicas de contar utilizarémolas noutras partes das Matemáticas como en *Probabilidade* para contar o número de *casos posibles* ou o número de *casos favorables*.

1. PERMUTACIÓNS

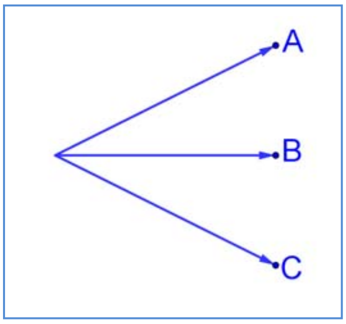
1.1. Diagramas en árbore

Actividades resoltas

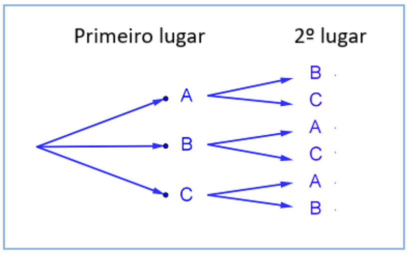
- *Nunha festa cóntase con tres grupos musicais que deben actuar. Para organizar a orde de actuación, cantas posibilidades distintas hai?*

Unha técnica que pode axudar moito é confeccionar un **diagrama en árbore**. Consiste nunha representación por niveis na que cada rama representa unha opción individual para pasar dun nivel ao seguinte, de tal maneira que todos os posibles percorridos desde a raíz ata o último nivel, o nivel das follas, son todos os posibles resultados que se poden obter.

Chamamos aos tres grupos musicais A, B e C.

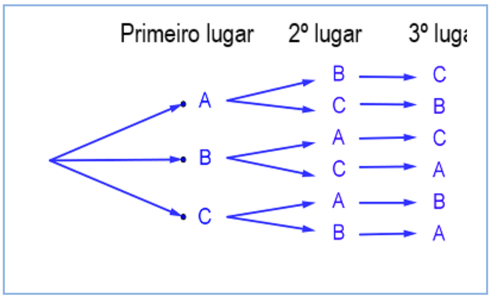


Primeiro nivel da árbore: En primeiro lugar poderán actuar ou ben A, ou ben B ou ben C.



Segundo nivel da árbore: unha vez que o grupo A foi elixido para actuar en primeiro lugar, para o segundo posto só podemos colocar a B ou a C. Igualmente, se xa B vai en primeiro lugar, só poderán estar no segundo lugar A ou C. E se actúa en primeiro lugar C, para o segundo posto as opcións son A e B.

Terceiro nivel da árbore: se xa se tivese decidido que en primeiro lugar actúa o grupo A e en segundo o grupo B para o terceiro lugar, que se pode decidir? Só nos queda o grupo C e, da mesma maneira, en todos os outros casos, só queda unha única posibilidade.



Confeccionar o diagrama en árbore, mesmo unicamente comezar a confeccionalo, permítenos contar con seguridade e facilidade. Para saber cantas formas temos de organizar o concerto, aplicamos o principio de multiplicación: só temos que multiplicar os números de ramificacións que hai en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar a orde de actuación dos grupos.

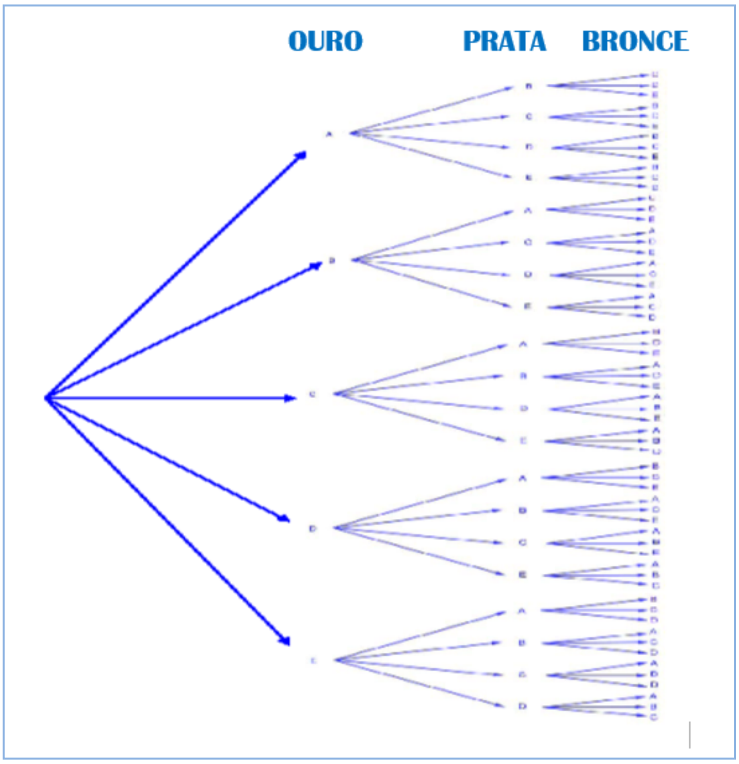
Tamén permite escribir esas seis posibles formas sen máis que seguir a árbore: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- *Nunha carreira compiten 5 corredores e vanse repartir tres medallas, ouro, prata e bronce. De cantas formas distintas poden repartirse?*

Facemos o diagrama en árbore. O ouro poden gañalo os cinco corredores que imos chamar A, B, C, D e E. Facemos as cinco frechas do diagrama. Se o ouro o gañase o corredor A, a prata só a podería gañar algún dos outros catro corredores: B, C, D ou E. Se o ouro o tivese gañado B tamén habería catro posibilidades para a medalla de prata: A, C, D e E. E así co resto.

Se supoñemos que a medalla de ouro a gañou A e a de prata B, entón a medalla de bronce poden gañala C, D ou E.

Polo tanto, hai 5 · 4 · 3 = 60 formas distintas de repartir as tres medalas entre os cinco xogadores.



Actividades propostas

1. Fai diagramas en árbore para calcular:

a) Cantas palabras de dúas letras distintas (con significado ou sen el) podes escribir coas letras A, B ou C.

b) Cantas palabras de tres letras distintas que empecen por vogal e terminen por consoante se poden formar coas letras do alfabeto. (*Recorda* que hai 5 vogais e 20 consoantes).

2. Ana ten 5 camisolas, 3 pantalóns e 4 pares de zapatillas. Pode levar unha combinación diferente de camisola, pantalón e zapatillas durante dous meses (61 días)? Cantos días deberá repetir combinación? *Axuda*: Seguro que un diagrama en árbore che resolve o problema.

3. Nun taboleiro cadrado con 25 casas, de cantas formas diferentes podemos colocar dúas fichas idénticas de modo que estean en distinta fila e en distinta columna? *Suxestión*: Confecciona un diagrama de árbore. Cantas casas hai para colocar a primeira ficha? Se descartamos a súa fila e a súa columna, en cantas casas podemos colocar a segunda ficha?

1.2. Permutacións ou ordenacións dun conxunto

Chamamos **permutacións** ás posibles formas distintas nas que se pode ordenar un conxunto de elementos distintos.

Cada cambio na orde é unha permutación.

Exemplos:

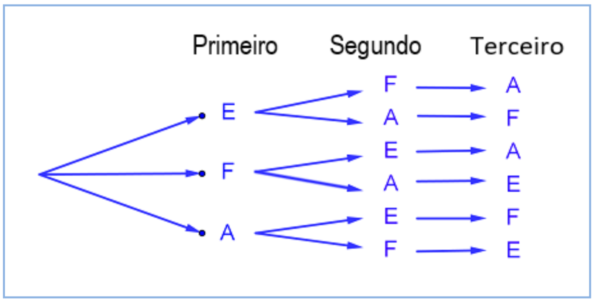
- *Son permutacións:*
  - As formas nas que poden chegar á meta 10 corredores.
  - As palabras de catro letras, sen repetir ningunha letra, con ou sen sentido que podemos formar coas letras da palabra MESA.
  - Os números de 5 cifras distintas que se poden formar cos díxitos: 1, 2, 3, 4 e 5.

O número de permutacións dun conxunto de n elementos desígnase por P_n, e lese *permutacións de n elementos*.

A actividade resolta dos tres grupos musicais que ían actuar nunha festa era de permutacións, era unha ordenación, logo escribiriámola como P_3, e lese *permutacións de 3 elementos*.

Actividades resoltas

- *Na fase preparatoria dun campionato do mundo están no mesmo grupo España, Francia e Alemaña. Indica de cantas formas poden quedar clasificados estes tres países.*



Son permutacións de 3 elementos: P_3. Facemos un diagrama de árbore. Poden quedar primeiros España (E), Francia (F) ou Alemaña (A). Se gañou España, poden optar ao segundo posto F ou A. E se xa tivesen gañado España e logo Francia, para o terceiro posto só quedaría Alemaña.

Poden quedar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

En xeral para calcular as permutacións de n elementos multiplícase n por $n - 1$, e así, baixando de un en un, ata chegar a 1: $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número chámaselle factorial de n, e indícase $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Corresponde a unha árbore de n niveis con n, $n - 1$, $n - 2$, …, 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Para realizar esta operación coa calculadora utilízase a tecla $\boxed{!}$

Exemplos:

- As formas nas que poden chegar á meta 10 corredores son:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800.$$

- As palabras con ou sen sentido que podemos formar coas letras, sen repetir, da palabra MESA son $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

- Os números de 5 cifras, todas distintas, que se poden formar cos díxitos: 1, 2, 3, 4 e 5 son:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- España, Francia e Alemaña poden quedar clasificados de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Actividades propostas

4. De cantas formas poden repartir catro persoas, catro pasteis distintos, comendo cada persoa un pastel?

5. Nunha carreira de cabalos participan cinco cabalos cos números 1, 2, 3, 4 e 5. Cal deles pode chegar o primeiro? Se a carreira está amañada para que o número catro chegue o primeiro, cales poden chegar en segundo lugar? Se a carreira non está amañada, de cantas formas distintas poden chegar á meta? Fai un diagrama en árbore para responder.

6. De cantas maneiras podes meter catro obxectos distintos en catro caixas diferentes se só podes poñer un obxecto en cada caixa?

7. Cantos países forman actualmente a Unión Europea? Podes ordenalos seguindo diferentes criterios, por exemplo, pola súa poboación, ou con respecto á súa produción de aceiro, ou pola superficie que ocupan. De cantas maneiras distintas é posible ordenalos?

8. No ano 1973 había seis países no Mercado Común Europeo. De cantas formas podes ordenalos?

9. Nunha oficina de colocación hai sete persoas. De cantas formas distintas poden ter chegado?

Actividades resoltas

- *Cálculo de* $\frac{6!}{3!}$.

Cando calculamos cocientes con factoriais sempre simplificamos a expresión, eliminando os factores do numerador que sexan comúns con factores do denominador, antes de facer as operacións. En xeral sempre soe ser preferible simplificar antes de operar pero, neste caso, resulta imprescindible para que non saian números demasiado grandes.

$$\text{É } \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

- *Expresa, utilizando factoriais, os produtos seguintes:* a) 10 · 9 · 8; b) $(n + 4) \cdot (n + 3) \cdot (n + 2)$;

a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{7!}$

b) $(n + 4) \cdot (n + 3) \cdot (n + 2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Actividades propostas

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

12. Expresa utilizando factoriais: a) 5 · 4 · 3; b) 10 · 11 · 12 · 13; c) 8 · 7 · 6; d) 10 · 9.

13. Expresa utilizando factoriais:

a) $(n + 3) \cdot (n + 2) \cdot (n + 1)$;

b) $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3)$;

c) $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot \ldots \cdot (n + k)$.

14. Escribe en forma de factorial as distintas formas que teñen de sentar nunha clase os 30 alumnos nos 30 postos que hai. (Non o calcules. O resultado é un número moi grande. Para calculalo precísase un ordenador ou unha calculadora e habería que recorrer á notación científica para expresalo de forma aproximada).

15. Nove ciclistas circulan por unha estrada en fila india. De cantas formas distintas poden ir ordenados?

2. VARIACIÓNS

2.1. Variacións con repetición

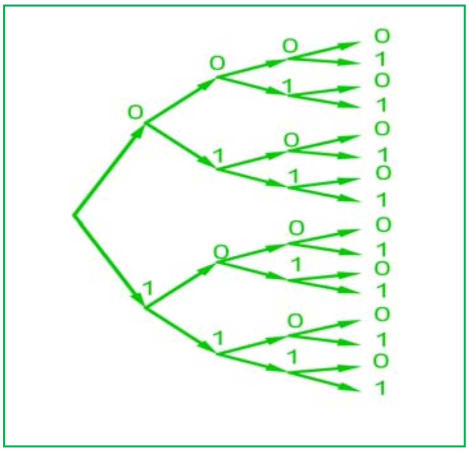
Xa sabes que as quinielas consisten en adiviñar os resultados de 14 partidos de fútbol sinalando un 1 se pensamos que gañará o equipo da casa, un 2 se gaña o visitante e un X se esperamos que haxa empate. Nunha mesma xornada, cantas quinielas distintas poderían encherse?

Observa que agora cada diferente quiniela consiste nunha secuencia dos símbolos 1, 2 e X, nas que o mesmo símbolo pode aparecer varias veces **repetido** ao longo da secuencia e dúas quinielas poden diferenciarse polos **elementos** que a compoñen ou pola **orde** na que aparecen.

Actividades resoltas

- *Con dous símbolos,* 0 *e* 1*, cantas tiras de* 4 *símbolos se poden escribir?*

Igual que en anteriores exemplos, formamos o diagrama de árbore. Observando que no primeiro lugar da tira podemos poñer os dous símbolos. No segundo lugar, aínda que teñamos posto o 0, como se pode repetir, podemos volver poñer o 0 e o 1. O mesmo no terceiro e no cuarto lugar. É dicir, o número de ramificacións non se vai reducindo, sempre é igual, polo tanto o número de tiras distintas que podemos formar é



$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

As diferentes secuencias de lonxitude *n* que se poden formar cun conxunto de *m* elementos diferentes chámanse **variacións con repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n*. O número de diferentes secuencias que se poden formar desígnase coa expresión $VR_{m,n}$. E calcúlase coa fórmula:

$$\mathbf{VR}_{m,n} = m^n$$

Na ***actividade resolta*** anterior son variacións con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Actividade resolta

- No cálculo do *número de quinielas distintas* os elementos son 3 (1, 2, X) e fórmanse secuencias de lonxitude 14, polo tanto, trátase de *variacións con repetición* de 3 elementos tomados de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969.$$

  Para ter a certeza absoluta de conseguir 14 acertos hai que encher 4 782 969 apostas simples.

- *A probabilidade de que che toque unha quiniela nunha aposta simple é*, polo tanto, $\frac{1}{4\,782\,969}$.

Actividades propostas

16. Cos 10 díxitos, cantos números distintos poden formarse de 6 cifras?

17. Cos 10 díxitos e as 20 consoantes do alfabeto, cantas matrículas de coche poden formarse tomando catro díxitos e tres letras?

18. Un byte ou octeto é unha secuencia de ceros e uns tomados de 8 en 8. Cantos bytes distintos poden formarse?

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

20. Expresa cunha fórmula:

a) As variacións con repetición de 3 elementos tomadas 5 a 5.

b) As variacións con repetición de 7 elementos tomadas 2 a 2.

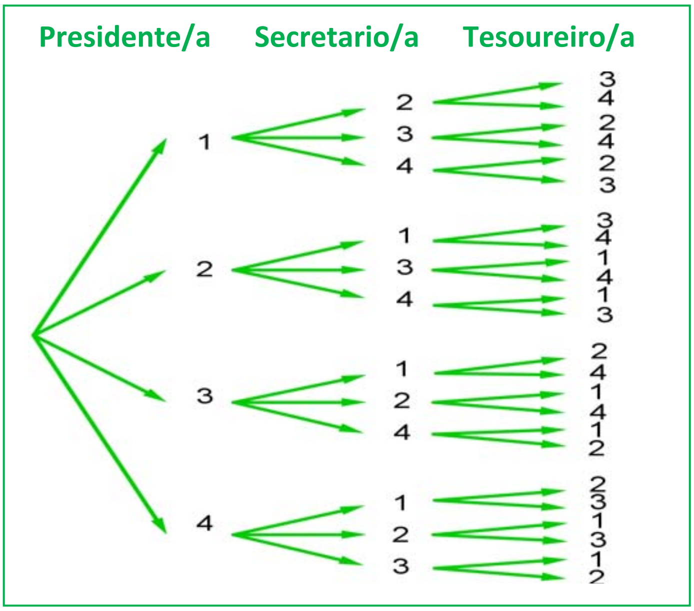
c) As variacións con repetición de 5 elementos tomadas 4 a 4.

21. Cantas palabras de tres letras (con significado ou non) podes formar que empecen por consoante e terminen coa letra R?

2.2. Variacións sen repetición

Actividades resoltas

- *Unha asociación de veciños vai renovar a xunta directiva. Esta consta de tres cargos, presidencia, secretaría e tesourería. a) Se unicamente se presentan catro persoas, de cantas maneiras pode estar formada a xunta? b) Se antes que empece a votación se presentan outros dous candidatos, cantas xuntas diferentes poderán formarse agora?*



a) Confeccionamos o noso diagrama en árbore. Numeramos os candidatos do 1 ao 4. Á presidencia poden optar os 4 candidatos pero, se un determinado candidato xa foi elixido para a presidencia, non poderá optar aos outros dous cargos, polo que desde cada unha das primeiras catro ramas, só sairán tres ramas. Unha vez elixida unha persoa para a presidencia e a secretaría, para optar á tesourería haberá unicamente dúas opcións, polo cal de cada unha das ramas do segundo nivel, saen dúas ramas para o terceiro nivel.

Deste modo, multiplicando o número de ramificacións en cada nivel, temos que a xunta pode estar formada de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneiras.

b) Se en lugar de 4 candidatos fosen 6, podería estar formada de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneiras.

Estas agrupacións de elementos, nas que un elemento pode aparecer en cada grupo como máximo unha vez, sen repetirse, e cada grupo se diferencia dos demais polos elementos que o compoñen ou pola orde na que aparecen denomínanse *variacións sen repetición*.

Nas variacións, tanto con repetición como sen repetición, téñense en conta a **orde** e os **elementos** que forman o grupo. A diferenza é que nas variacións con repetición poden repetirse os elementos e nas variacións ordinarias non. No exemplo anterior no tería sentido que un mesmo candidato ocupara dous cargos, **non se repiten os elementos**.

As **variacións sen repetición** (ou simplemente **variacións**) de *m* elementos tomados de *n* en *n* desígnanse como $V_{m,n}$. Son os grupos de *n* elementos distintos que se poden formar de modo que un grupo se diferencie doutro ben polos **elementos** que o compoñen ben pola **orde** na que aparecen.

O número de variacións é igual ao produto de multiplicar *n* factores partindo de *m* e decrecendo dun en un:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \text{ } (n \text{ factores})$$

Observacións

1) *m* debe ser sempre maior ou igual que *n*.
2) As variacións de *m* elementos tomados de *m* en *m* coinciden coas permutacións de *m* elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resoltas

- *Observa as seguintes variacións e intenta encontrar unha expresión para o último factor que se multiplica no cálculo das variacións:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

No caso a) 2 é igual a $4 - 3 + 1$.

En b) $4 = 6 - 3 + 1$.

En c) $5 = 10 - 6 + 1$.

En d) $6 = 9 - 4 + 1$.

En xeral o último elemento é $(m - n + 1)$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

Escribe a fórmula das variacións utilizando factoriais:

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribilo como cociente de factoriais débese dividir por $(m-n)!$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

Para realizar esta operación coa *calculadora* utilízase a tecla etiquetada **nPr**.

Actividades propostas

22. Tres persoas van a unha pastelaría na que unicamente quedan catro pasteis, distintos entre si. De cantas formas distintas poden elixir o seu pastel se cada unha compra un?

23. Cos 10 díxitos deséxanse escribir números de catro cifras, todas elas distintas. Cantas posibilidades hai para escribir a primeira cifra? Unha vez elixida a primeira, cantas hai para elixir a segunda? Unha vez elixidas as dúas primeiras, cantas hai para a terceira? Cantas posibilidades hai en total?

24. Se tes 9 elementos diferentes e os tes que ordenar 5 a 5 de todas as formas posibles, cantas hai?

25. Coas letras A, B e C, cantas palabras de 2 letras non repetidas poderías escribir?

26. Cos díxitos 3, 5, 7, 8 e 9, cantos números de 3 cifras distintas podes formar?

27. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

28. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

Outra observación

Dixemos que $V_{m,m} = P_m$ pero se utilizamos a fórmula con factoriais temos que $V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}$.

Para que teña sentido asígnase a 0! o valor de 1.

0! = 1.

3. COMBINACIÓNS

3.1. Combinacións

Actividades resoltas

- *Nunha libraría queren facer paquetes de tres libros usando os seis libros máis lidos. Cantos paquetes diferentes poderán facer?*

Neste caso cada grupo de tres libros diferenciarase dos outros posibles polos libros (**elementos**) que o compoñen, sen que importe a orde na que estes se empaquetan. Esta agrupación é denominada combinación.

Chámase **combinacións** de *m* elementos tomados de *n* en *n* e desígnase $C_{m,n}$ aos grupos de *n* elementos que se poden formar a partir dun conxunto de *m* elementos diferentes entre si, de modo que cada grupo se diferencie dos demais polos **elementos** que o forman (non pola orde na que aparecen).

Designamos os libros coas letras A, B, C, D, E e F.

Paquetes con A				Paquetes sen A pero con B			Paquetes sen A nin B pero con C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Formamos primeiro todos os paquetes que conteñen o libro A, hai 10; logo seguimos formando os que non conteñen o libro A pero si conteñen o B. Logo os que non conteñen nin A nin B pero si C. E por último, o paquete DEF que non contén os libros A, B nin C. Con este reconto identificamos un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de facelo é pouco práctica. Para atopar unha fórmula xeral que nos permita calcular o número de grupos, imos apoiarnos no que xa sabemos.

Se fose relevante a orde na que aparecen os libros en cada paquete, ademais dos libros que o compoñen, sería un problema de variacións e calculariamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE, BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE, CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE, DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE, EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD, FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE,FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC, FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

Na lista anterior sinalamos coa mesma cor algúns dos paquetes que conteñen os mesmos tres libros, verás que o paquete cos libros A, B e C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. As mesmas veces repítese o paquete ABD, o ACF, etc. Podes probar a sinalar calquera outra combinación e verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Iso é debido a que hai seis variacións posibles coa mesma composición de elementos, que se diferencian pola orde (as permutacións deses tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pois, como no reconto de variacións, cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber o número de paquetes diferentes dividimos o total de variacións entre $P_3 = 6$.

Polo tanto basta con dividir as variacións entre as permutacións:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

E, en xeral, de acordo co mesmo razoamento calcúlanse as combinacións de *m* elementos tomados de *n* en *n*, dividindo as variacións entre as permutacións, coa fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Para realizar esta operación coa calculadora utilízase a tecla etiquetada ***nCr*.**

Actividades resoltas

- *Un test consta de* 10 *preguntas e para aprobar hai que responder* 6 *correctamente. De cantas formas se poden elixir esas* 6 *preguntas?*

Non importa en que orde se elixan as preguntas senón cales son as preguntas elixidas. Non poden repetirse (non ten sentido que respondas 3 veces a primeira pregunta). Unicamente inflúen as preguntas (os elementos). Trátase dun problema de combinacións, no que temos que formar grupos de 6, dun conxunto formado por 10 preguntas diferentes, logo son combinacións, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210 \text{ maneiras.}$$

- *Temos 5 libros sen ler e queremos levar tres para lelos nas vacacións, de cantas maneiras distintas podemos elixilos?*

Son combinacións de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3} = 10$ formas.

- *Tes* 7 *moedas de euro que colocas en fila. Se* 3 *amosan a cara e 4 a cruz, de cantas formas distintas podes ordenalas?*

Bastará con colocar en primeiro lugar as caras e nos lugares libres poñer as cruces. Temos 7 lugares para colocar 3 caras, serán polo tanto as combinacións de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3} = 35$. Observa que se obtén o mesmo resultado se colocas as cruces e deixas os lugares libres para as caras xa que $C_{7,4} = 35$.

Actividades propostas

29. Temos 5 bombóns (iguais) que queremos repartir entre 7 amigos, de cantas formas se poden repartir os bombóns se a ningún lle imos dar máis dun bombón?

30. Xoán quere regalar 3 DVDs a Pedro dos 10 que ten, de cantas formas distintas pode facelo?

31. No xogo do póker dáselle a cada xogador unha man formada por cinco cartas, das 52 que ten a baralla francesa, cantas mans diferentes pode recibir un xogador?

3.2. Números combinatorios

As combinacións son moi útiles polo que o seu uso frecuente fai que se teña definido unha expresión matemática denominada número combinatorio.

O **número combinatorio** *m* sobre *n* desígnase $\binom{m}{n}$ e é igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Propiedades dos números combinatorios

Actividades resoltas

- *Calcula* $\binom{7}{0}, \binom{5}{0}, \binom{9}{0}, \binom{4}{0}$.

Terás comprobado que: $\binom{7}{0}$ = 1, $\binom{5}{0}$ = 1, $\binom{9}{0}$ = 1 e $\binom{4}{0}$ = 1. Razoa o motivo. Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{0}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{m! \cdot 0!}$ = 1. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{7}, \binom{5}{5}, \binom{9}{9}, \binom{4}{4}$.

Terás comprobado que: $\binom{7}{7}$ = 1, $\binom{5}{5}$ = 1, $\binom{9}{9}$ = 1 e $\binom{4}{4}$ = 1. Razoa o motivo. Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{m}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)! \cdot m!} = \frac{m!}{0! \cdot m!}$ = 1. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}, \binom{5}{1}, \binom{9}{1}, \binom{4}{1}$.

Terás comprobado que: $\binom{7}{1}$ = 7, $\binom{5}{1}$ = 5, $\binom{9}{1}$ = 9 e $\binom{4}{1}$ = 4. Razoa o motivo. Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{1}$ = *m*? En efecto: $\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)! \cdot 1!}$ = *m*.

- *Calcula* $\binom{7}{4}, \binom{7}{3}, \binom{9}{7}, \binom{9}{2}$ *e indica cales son iguais.*

Terás comprobado que: $\binom{7}{4}$ = $\binom{7}{3}$ e que $\binom{9}{7}$ = $\binom{9}{2}$. Razoa o motivo.

Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$?

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Ata agora todas as propiedades foron moi fáciles. Temos agora unha propiedade máis difícil. Vexamos que: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Pero antes comprobarémolo cun problema.

- *Luís e Míriam casaron e regaláronlles seis obxectos de adorno. Queren poñer tres nun andel pero Míriam quere que no andel estea, si ou si, o regalo da súa nai. Porén, a Luís no lle gusta ese obxecto e dálle igual calquera combinación na que non estea. Un dos dous sairá coa súa. Calcula cantas son as posibilidades de cada un.*

A Luís e a Míriam regaláronlles 6 obxectos de adorno e queren poñer 3 nun andel. As formas de facelo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Pero Míriam quere que no andel estea, si ou si, o regalo da súa nai. De cantas formas o faría Míriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Porén, a Luís ese obxecto non lle gusta e dálle igual calquera combinación na que non estea. De cantas formas o faría Luís? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

As opcións de Míriam máis as de Luís son as totais: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comproba que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *e que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En xeral, $\boxed{\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}}$.

Atréveste a demostralo?

Para demostralo recorremos á definición e realizamos operacións:

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)! \cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))! \cdot (n-1)!}$$ reducimos a común denominador

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)! \cdot n!} + \frac{n \cdot (m-1)!}{n \cdot (m-n)! \cdot (n-1)!}$$ Recorda: $m \cdot (m - 1)! = m!$

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)! \cdot n!} + \frac{n \cdot (m-1)!}{(m-n)! \cdot n!}$$ Poñemos o denominador común e sumamos os numeradores

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)! + n \cdot (m-1)!}{(m-n)! \cdot n!}$$ Sacamos $(m - 1)!$ factor común

$$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)! \cdot n!}$$ De novo usamos que $m \cdot (m - 1)! = m!$

$$= \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}.$$

Triángulo de *Pascal* ou Triángulo de *Tartaglia*

A un matemático italiano do século XVI chamado Tartaglia, pois era tatexo, ocorréuselle dispoñer os números combinatorios así:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

….

Ou ben calculando os seus valores correspondentes:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

A ambos os triángulos chámaselles **Triángulo de *Pascal*** ou **Triángulo de *Tartaglia***.

Os valores que hai que poñer en cada fila do triángulo calcúlanse, sen ter que usar a fórmula dos números combinatorios, dunha forma máis fácil baseada nas propiedades dos números combinatorios que acabamos de probar:

Pola propiedade $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila empeza e termina con 1.

Pola propiedade $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabemos que o *Triángulo de Tartaglia* é simétrico ou sexa que o primeiro elemento de cada fila coincide co último, o segundo co penúltimo e así sucesivamente.

Pola propiedade $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podemos obter as seguintes filas sumando termos da anterior, xa que cada posición nunha fila é a suma das dúas que ten xusto enriba da fila anterior.

Deste modo o triángulo constrúese secuencialmente, engadindo filas por abaixo ata chegar á que nos interesa. Se só necesitamos coñecer un número combinatorio illado tal vez non valla a pena desenvolver todo o triángulo pero, en moitas ocasións, necesitamos coñecer os valores de toda unha fila do triángulo (por exemplo cando desenvolvemos un binomio de Newton ou cando resolvemos problemas de probabilidade).

Actividades propostas

32. Engade tres filas máis ao triángulo de *Tartaglia* da dereita.

33. Suma os números de cada fila e comproba que a suma dos elementos da fila m é sempre igual a 2^m.

34. Sen calculalos, indica canto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ e $C_{5,5}$ buscando o seu valor no triángulo.

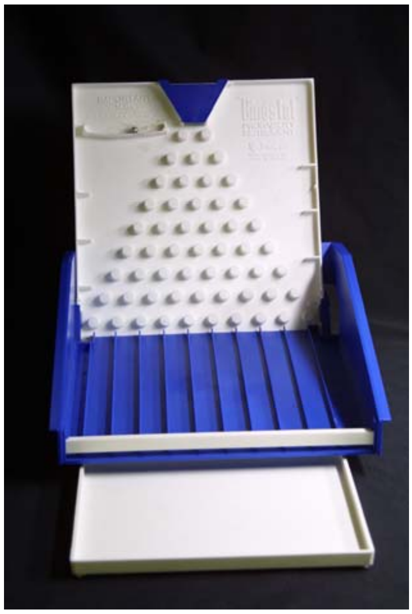
1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

3.3. Distribución binomial

Percorridos aleatorios ou camiñadas ao azar

Os números combinatorios serven como modelo para resolver situacións moi diversas.

Actividades resoltas



O dispositivo que aparece á dereita denomínase *aparello de Galton*. O seu funcionamento é o seguinte: cando se introduce unha bóla polo funil superior, vai caendo polos ocos que existen en cada fila. En cada paso pode caer polo oco que ten á súa dereita ou polo que ten á súa esquerda con igual probabilidade, de forma que é imposible, cando poñemos unha bóla no funil, predicir en cal dos carrís inferiores acabará caendo.

- *Se introducimos moitas bólas polo burato superior, por exemplo* 1 024, *cres que ao chegar abaixo se distribuirán uniformemente entre todos os carrís ou haberá lugares aos que cheguen máis bólas?*

Observa que, para chegar á primeira fila, só hai un camiño posible, que é o que vai sempre cara á esquerda, e para chegar á última, o único camiño posible é o que vai sempre á dereita.

Para chegar aos ocos centrais de cada fila o número de camiños posibles é maior. Por exemplo, para chegar ao segundo oco da segunda fila, hai dous camiños. En xeral, ao primeiro oco de cada fila só chega un camiño, igual que ao último e a cada un dos outros ocos chegan tantos camiños como a suma dos camiños que chegan aos dous ocos que ten xusto enriba. Comproba que para chegar ao oco n da fila m hai $\binom{m}{n}$ camiños.

En resumo, o número de camiños aleatorios que chegan a cada oco calcúlase igual que os números no triángulo de *Tartaglia*. Se o noso *aparello de Galton* ten 9 filas, o número de camiños que chegan a cada un dos compartimentos de saída é o que se obtén coa novena fila do Triángulo de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, dun total de 2^9 = 512 camiños diferentes que pode realizar a bóla. Así que cando botamos no aparello 1024 bólas haberá aproximadamente 2 bolas que fagan cada un dos 512 percorridos posibles xa que todos teñen a mesma probabilidade de ocorrer. Polo tanto, o número de bolas que podemos esperar que caian en cada compartimento é o seguinte:

Compartimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número aproximado de bólas	$\frac{1\,024}{512} = 2$	9 · 2 = 18	36 · 2 = 72	84 · 2 = 168	126 · 2 = 252	126 · 2 = 252	84 · 2 = 168	36 · 2 = 72	9 · 2 = 18	2

Vemos que non se deposita o mesmo número de bolas en todos os compartimentos. Mentres que nos extremos haberá aproximadamente 2 bólas, nos centrais haberá unhas 252.

De acordo coa lei dos grandes números, os resultados experimentais serán máis parecidos aos teóricos canto meirande sexa o número de veces que se realiza o experimento (é dicir, canto maior sexa o número de bólas). En *Youtube* buscando a expresión "*máquina de Galton*" podes ver moitos vídeos nos que se realiza o experimento e se verifica este feito.

Número de éxitos

Actividades resoltas

- *Nunha sesión de tiro ao prato realízanse sucesivamente 10 disparos. Cantas posibilidades haberá de acertar no branco exactamente tres veces (ter tres éxitos)?*

Son as $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resumo

$\binom{m}{n}$ = Número de combinacións de *m* elementos tomados de *n* en *n*.

= Número de camiños posibles para chegar ao oco *n* da fila *m* do aparello de *Galton.*

= Número de subconxuntos de *n* elementos tomados nun conxunto de *m* elementos.

= Número de sucesos nos que obtemos *n* éxitos en *m* probas.

= Números de mostras sen ordenar de tamaño *n* nunha poboación de tamaño *m*.

3.4. Binomio de *Newton*

Imos calcular as sucesivas potencias dun binomio. Xa sabes que:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Para calcular $(a + b)^4$ multiplicamos $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

Para calcular $(a + b)^4$ multiplicamos $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

$(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a + b)$

$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + \quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Observa que para calcular cada un dos coeficientes de $(a + b)^4$, excepto o primeiro e o último que valen 1, se suman os coeficientes igual que no triángulo de Tartaglia. Obtense cada elemento sumando os dous que ten enriba.

Actividades resoltas

- *Serías capaz de calcular* $(a + b)^5$ *só observando?*

Fíxate que sempre aparecen todos os posibles termos do grao que estamos calculando polo que para calcular a quinta potencia teremos: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 e b^5. Os expoñentes están ordenados de maneira que os de a van descendendo desde 5 ata 0, e os de b van aumentando desde 0 ata 5 (recorda $a^0 = 1$).

O coeficiente do primeiro e último termo é 1.

Os coeficientes obtéñense sumando os dous termos da fila anterior como no Triángulo de *Tartaglia*. Son a quinta fila do Triángulo de *Tartaglia*.

Logo $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podemos escribilo tamén utilizando números combinatorios:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Actividades propostas

35. Desenvolve $(a + b)^6$

En xeral:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Esta igualdade denomínase ***Binomio de Newton***.

Actividades resoltas

- *Como calcularías* $(a - b)^n$*?*

Basta aplica a fórmula do Binomio de Newton a $(a + (-b))^n$.

Recorda $(-b)$ elevado a un expoñente par ten signo positivo e elevado a un expoñente impar teno negativo. Polo tanto $(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$. Os signos son alternativamente positivos e negativos.

Actividades propostas

36. Desenvolve:

a) $(a - b)^6$;

b) $(x - 3)^4$;

c) $(x + 2)^7$;

d) $(-x + 3)^5$.

37. Calcula o coeficiente de x^7 no polinomio que se obtén ao desenvolver $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

38. Expresa con radicais simplificados o polinomio que se obtén ao desenvolver $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. OUTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

4.1. Resolución de problemas

Recorda: para resolver un problema é conveniente ter en conta as seguintes fases:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender ben o problema.

Le ata asegurarte de ter comprendido o enunciado, que datos che dan?, que che piden?

Fase 2: Busca unha boa estratexia.

Se o problema é de *Combinatoria* unha posible boa estratexia pode ser analizar se é un problema de permutacións, de variacións ou de combinacións e, nese caso, aplicar a fórmula que xa coñeces. Esta estratexia poderiamos chamala:

Mira se o teu problema se parece a algún que xa coñezas.

Pero outra posible boa estratexia, que non exclúe a anterior, é comezar a facer un diagrama en árbore. A esta estratexia podemos chamala:

Experimenta, xoga co problema.

Ou ben:

Fai un diagrama, un esquema, unha táboa...

A fase seguinte a seguir é:

Fase 3: Leva adiante a túa estratexia.

Seguro que utilizando estas estratexias, resolves o problema. Por último, cando xa o teñas resolto:

Fase 4: Pensa se é razoable o resultado. Comproba a estratexia. Xeneraliza o proceso.

4.2. Permutacións circulares

Imos utilizar estas técnicas, ou outras distintas, para resolver un problema:

Actividades resoltas

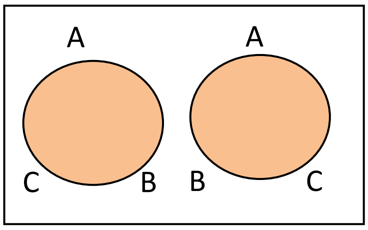
- *Dez amigos e amigas van xantar e no restaurante séntanos nunha mesa redonda. De cantas formas poden sentar?*

Se en lugar dunha mesa fose un banco xa sabemos resolver o problema, é un problema de *Permutacións*. A solución sería 10! formas distintas. Pero é unha mesa redonda, non ten un primeiro asento ni un derradeiro asento. Tampouco é sinxelo, polo mesmo motivo, deseñar o diagrama en árbore. Que facemos? Pensa. Busca unha boa estratexia.

Unha boa estratexia quizais sexa:

Faino máis fácil para empezar.

Dez son moitos. Pensa en tres: A, B e C. Se fose un banco, as posibilidades serían 3! = 6. Séntaos agora nunha mesa redonda. A posibilidade ABC, é agora a mesma que BCA e que CAB. Quédannos só dúas formas distintas de sentalos.



Chamamos PC a esa permutación circular.

Temos pois que $P_2 = 2! = 2$ e $PC_2 = 1$; $P_3 = 3! = 6$ e $PC_3 = 2$. Como podemos sentar a 4 persoas nunha mesa circular? A permutación ABCD agora é a mesma que BCDA, e que CDAB e que DABC, logo se $P_4 = 4! = 24$, entón $PC_4 = P_4/4 = 6$.

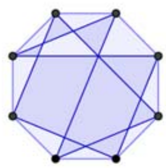
Sabemos xa resolver o noso problema inicial?

É $PC_{10} = P_{10}/10 = P_9 = 9!$ Razoa esta resposta.

Actividades propostas

39. Tres amigos "A", "B" e "C" están xogando ás cartas. Cada un pasa unha carta ao que está á súa dereita. Un é español, outro italiano e o outro portugués. "A" pásalle unha carta ao italiano. "B" pasoulla ao amigo que lla pasou ao español. Cal dos amigos é español, cal italiano e cal portugués? *Axuda*: Fai un diagrama circular como o anterior.

40. Ana e Alexandre convidan a cear a 3 amigos e 3 amigas, cantas formas teñen de colocarse nunha mesa redonda? En cantas están xuntos Ana e Alexandre? En cantas non hai dous mozos nin dúas mozas xuntos?



41. Cantas poligonais pechadas se poden debuxar cos 8 vértices dun octógono?

4.3. Permutacións con repetición

Actividades resoltas

- *Cantas palabras de 8 letras, con sentido ou sen el, se poden formar coas letras da palabra RASTREAR?*

Observamos que a letra "R" se repite tres veces e a letra "A", dúas veces. Se as 8 letras fosen distintas o número de palabras que se poderían formar sería 8!, pero entre estas 40 320 palabras observamos que todas aquelas nas que están permutadas as dúas letras "A" son iguais, polo tanto temos a metade das palabras 20 160. Ademais ao considerar as tres letras "R" que consideramos distintas e que son iguais temos que por cada palabra diferente hai 6, é dicir 3!, que son iguais, polo tanto o número de palabras diferentes é 3 360.

Polo tanto, as permutacións de 8 elementos dos que un se repite 3 veces e o outro 2 será:

$$PR_{8,3,2} = \frac{8!}{2!\ 3!} = 3\ 360.$$

Observa que o número das permutacións de dous elementos dos que un se repite k veces e o outro $n - k$ veces coincide co número combinatorio $\binom{n}{k}$.

Actividades propostas

42. Cos díxitos 1, 2, e 3 cantos números distintos de 7 cifras podes formar con tres veces a cifra 1, dúas veces a cifra 2 e dúas veces a cifra 3.

43. Coas letras da palabra APARTARAS, cantas palabras con estas 9 letras, con sentido ou sen el, se poden formar?

44. Temos dúas fichas brancas, tres negras e catro vermellas, de cantas formas distintas podemos amontoalas? En cantas non quedan as dúas fichas brancas xuntas?

45. O cadeado da miña maleta ten 7 posicións nas que se pode poñer calquera dos 10 díxitos do 0 ao 9. Cantos contrasinais diferentes podería poñer? Cantos teñen todos os seus números distintos? Cantos teñen algún número repetido? Cantos teñen un número repetido dúas veces? *Axuda:* Observa que para calcular os que teñen algún número repetido o máis fácil é restar do total os que teñen todos os seus números distintos.

4.4. Combinacións con repetición

Actividades resoltas

- *Un grupo de 10 amigos van de excursión e un deles encárgase de comprar unha bebida para cada un, podendo elixir entre auga, batido ou refresco. De cantas maneiras diferentes pode realizarse o encargo?*

Para resolver este problema temos que formar unha secuencia de 10 elementos dun conxunto formado polos tres elementos A, B, R. Está claro que non importa a orde na que se compren as bebidas, polo que se trata de combinacións. Pero cada elemento pode aparecer na combinación máis dunha vez. Por exemplo unha solución formada por dúas de auga, tres de batido e cinco de refresco, representaríase AABBBRRRRR. Calquera outra combinación terá que diferenciarse desta polo menos un elemento da súa composición. Así que vendo que cada secuencia empeza cunha repetición do elemento A, segue con outra do elemento B e termina con repeticións do elemento R, sendo en total 10 os elementos que se toman, podemos representalas por unha serie de 10 ocos con dous guións de separación entre eles.

AA – BBB – RRRRR (Combinación que representa dous de auga, tres de batido e cinco de refresco).

– – RRRRRRRRRR (Combinación que representa só dez de refresco).

– BBBB – RRRRRR (Combinación que representa catro de batido e seis de refresco).

Así que cada unha das combinacións se corresponde cunha **forma de elixir onde colocar os guións**, é dicir, de 12 posibles posicións elixir dúas. Como non importa en que orde se coloquen os guións e non poden estar os dous na mesma posición, ese número será igual ás combinacións de 12 elementos tomados de 2 en 2, polo tanto será:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

En xeral,

Chámanse **combinacións con repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n* e desígnanse $CR_{m,n}$ os grupos de *n* elementos que se poden formar a partir dun conxunto de *m* elementos diferentes entre si, de modo que cada grupo se diferencie dos demais polos **elementos** que o forman e coa posibilidade de que cada elemento apareza máis dunha vez.

Coinciden co número de secuencias que se poden formar de *n* ocos e *m –1* guións, polo tanto:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}$$

Observa que por propiedades dos números combinatorios se pode escribir a segunda expresión.

Actividades propostas

46. Nunha caixa hai bólas vermellas, negras e azuis. Se metemos a man na caixa e sacamos 8 bólas, de cantas formas posibles pode realizarse a extracción?

47. De cantas maneiras posibles poden comer catro amigos 10 caramelos iguais?

Problemas de ampliación

Actividade resolta

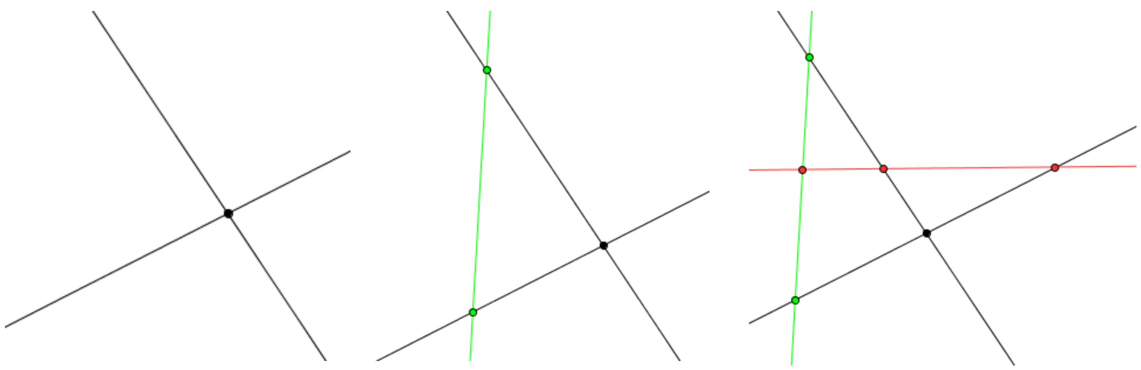
- *Se n rectas dun mesmo plano se cortan dúas a dúas en puntos que son todos distintos, pártese así o plano en rexións distintas. Cal é o número desas rexións? Cantos segmentos hai? Cantos puntos aparecen?*

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender ben o problema.

Para entender ben o problema debuxa rectas no plano para ir contando puntos, rexións e segmentos.

Fase 2: Busca unha boa estratexia.

Unha boa estratexia consiste en experimentar con casos particulares:



Obsérvase que:

Con 2 rectas hai 4 rexións, 1 punto e 4 segmentos infinitos (semirrectas).

Con 3 rectas: ao engadir a terceira recta

- Tres das rexións se dividiron en dous: 4 + 3 = 7 rexións.
- Engádense 2 puntos nos que esa recta corta ás anteriores 1 + 2 = 3.
- Téñense 5 segmentos máis: 3 finitos +2 semirrectas: 4 + 5 = 9.

  - En particular as semirrectas aumentaron en dúas: 4 + 2 = 6.

Con 4 rectas: ao engadir a cuarta recta:

- Catro das rexións divídironse en dúas: 7 + 4 = 11 rexións.
- Engádense 3 puntos nos que esa recta corta ás anteriores 3 + 3 = 6.
- Téñense 7 segmentos máis: 5 finitos + 2 semirrectas: 9 + 7 = 16.
  - En particular as semirrectas aumentaron en dúas: 6 + 2 = 8.

Outra boa estratexia é elaborar unha táboa cos resultados obtidos:

Rectas	Puntos	Rexións	Segmentos	Semirrectas
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

Fase 3: Leva adiante a túa estratexia.

Nesta fase buscamos expresións en función do número de rectas, *n*, para poder calcular o número de puntos, segmentos e rexións segundo os valores de *n*.

A fórmula para as **semirrectas** parece a máis fácil de obter porque aparentemente é o dobre que o número de rectas e ademais cada vez que engadimos unha recta temos 2 semirrectas máis. Se chamamos SS_n ao número de semirrectas que aparecen con *n* rectas temos que $\mathbf{SS_n = 2n}$.

Para calcular o número de **segmentos** (incluídas as semirrectas) que se obteñen con *n* rectas, a partir dos datos da táboa, parece plausible suxerir que é o cadrado do número de rectas, é dicir, se S_n designa ao número de segmentos (os finitos e as semirrectas) entón: $\mathbf{S_n = n^2}$.

Para determinar o número de **puntos**, na táboa obsérvase unha lei de recorrencia. O número de puntos, para calquera número de rectas, é igual ao número de puntos anterior máis o número de rectas tamén da fila anterior. Se denominamos P_n ao número de puntos que se teñen ao cortárense *n* rectas entón: $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$

Por outra parte observamos que se numeramos as rectas con 1, 2, 3, ..., *n* e nomeando os puntos polo par de rectas que determina cada un temos que son: (1, 2), (1, 3), (1, 4) , … (1, *n*), (2, 3), (2, 4), … (2, *n*), (3, 4) …

O número destes pares de elementos coincide coas combinacións de *n* elementos tomados 2 a 2, é dicir, $\mathbf{P_n} = C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

A lei de recorrencia que nos suxire a táboa, para obter o número de **rexións** que se obteñen cando se cortan *n* rectas, é que o número de rexións de calquera fila da táboa é igual ao número rexións da fila anterior máis o número de rectas da súa fila, polo tanto, se R_n o número de rexións que se obteñen ao cortárense *n* rectas entón: $\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}$.

Para obter unha fórmula observamos que:

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1 + (1 + 2) + (3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Sumando 1 + 2 + 3 + … + *n*, obtemos que: $R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$

e polo tanto $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$

ou ben $$R_n = 1 + \frac{(n-1+2)n}{2} = 1 + n + \frac{(n-1)n}{2}$$

e por conseguinte

$$R_n = 1 + n + \binom{n}{2}$$

Fase 4: Pensa se é razoable o resultado. Comproba a estratexia. Xeneraliza o proceso.

Nesta fase trátase de xustificar ou demostrar que todas as conxecturas que realizamos son certas:

Con respecto ao número de **semirrectas** é sinxelo comprobar que é o dobre do número de rectas xa que por cada recta temos dúas semirrectas, é dicir: $\mathbf{SS_n := 2n}$

O número de **segmentos** é o cadrado do número de rectas xa que como en cada unha das rectas hai $n-1$ puntos temos n segmentos (finitos e semirrectas) e como hai n rectas tense que $\mathbf{S_n = n^2}$.

Como cada **punto** é a intersección de dúas rectas tense que $\mathbf{P_n} = \binom{n}{2}$, esta fórmula cumpre a lei de recorrencia $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$. Aplicando as propiedades dos números combinatorios:

$$P_{n-1} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2} = P_n$$

Respecto ás **rexións** vexamos que a hipótese $\mathbf{R_n} = 1 + \binom{n+1}{2}$, cumpre a lei de recorrencia:

$$\mathbf{R_n = R_{n-1} + n.}$$

Se $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, entón $R_{n-1} = 1 + \binom{n}{2}$, e polas propiedades dos números combinatorios:

$$R_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 1 + \binom{n+1}{2} = R_n$$

Nesta fase tamén se pode xeneralizar o problema: Que ocorrería se p das n rectas fosen paralelas? E se q rectas das n rectas converxen nun mesmo punto?

Actividades propostas

48. De cantas maneiras se poden introducir 7 bólas idénticas en 5 caixas diferentes colocándoas todas se ningunha caixa pode quedar baleira? E se podemos deixar algunha caixa baleira? *Axuda:* Ordena as bólas nunha fila separadas por 4 puntos, así quedan divididas en 5 partes, que indican as que se colocan en cada caixa.

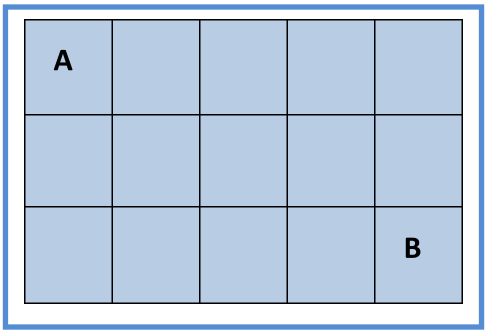
49. Cantas pulseiras diferentes podemos formar con 4 doas brancas e 6 vermellas? *Axuda:* Este problema é equivalente a introducir 6 bólas iguais en 4 caixas idénticas podendo deixar caixas baleiras.

50. Cantas formas hai de colocar o rei branco e o rei negro nun taboleiro de xadrez de forma que non se ataquen mutuamente. E dous alfís? E dúas raíñas?

CURIOSIDADES. REVISTA

No ano 1494 aparece a primeira obra impresa que ten cuestións sobre Combinatoria. É *Summa* escrita por Luca Pacioli. Lémbraste do Número de ouro? Un dos problemas que formula é o de calcular o número de formas distintas en que *n* persoas poden sentar nunha mesa redonda. Problema que xa resolvemos no apartado 4.2.

No ano 1559 escribiu Buteo en Francia o libro *Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur*, un dos primeiros libros que tratan sobre Combinatoria. Neste libro aparece o seguinte problema: Un cerralleiro fabrica cadeados formados por 7 discos e en cada disco hai 6 letras. Cantos candeados é posible fabricar de forma que cada un teña unha combinación diferente para abrir?



Un gato encóntrase en A e un rato en B. O gato avanza de centro de casa en centro de casa movéndose cara á dereita ou cara abaixo, nunca retrocede. Cantos camiños distintos pode percorrer o gato para cazar ao rato?

"Por esta razón de independencia, o amor ao estudo é, de todas as paixóns, a que máis contribúe á nosa felicidade".

Mme. de Châtelet

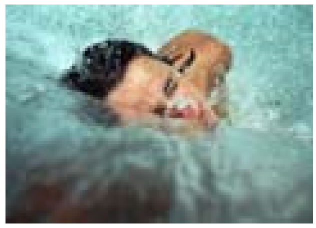
RESUMO

Noción	*Definición*	*Exemplos*
Permutacións	Considérase só a **orde**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacións con repetición	Considéranse a **orde** e os **elementos**. Os elementos poden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacións sen repetición	Inflúen a **orde** e os **elementos**. Os elementos **NON** poden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinacións	Inflúen só os **elementos**. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \dbinom{m}{n}$	$C_{9,7} = \dbinom{9}{7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades dos números combinatorios	$\dbinom{m}{0} = 1;\ \dbinom{m}{m} = 1;\ \dbinom{m}{n} = \dbinom{m}{m-n};$ $\dbinom{m}{n} = \dbinom{m-1}{n} + \dbinom{m-1}{n-1}$	$\dbinom{5}{0} = \dbinom{5}{5} = 1; \dbinom{5}{2} = \dbinom{5}{3} = 10;$ $\dbinom{5}{3} = \dbinom{4}{3} + \dbinom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\dbinom{0}{0}$ $\dbinom{1}{0} \quad \dbinom{1}{1}$ $\dbinom{2}{0} \quad \dbinom{2}{1} \quad \dbinom{2}{2}$ $\dbinom{3}{0} \quad \dbinom{3}{1} \quad \dbinom{3}{2} \quad \dbinom{3}{3}$ ….	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 …
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \dbinom{n}{0} a^n + \dbinom{n}{1} a^{n-1} b + \dbinom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \dbinom{n}{n-1} a b^{n-1} + \dbinom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Os PowerPoint seguintes son un bo resumo: Variacións e permutacións; Combinacións.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Permutacións



1. Tres nadadores botan unha carreira. De cantas formas poden chegar á meta se non hai empates? E se son 8 nadadores?
2. Loli, Paco, Ana e Xurxo queren fotografarse xuntos, de cantas maneiras poden facer a fotografía? Queren situarse de maneira que alternen mozos con mozas, de cantas maneiras poden agora facer a fotografía?
3. De cantas maneiras se poden introducir 6 obxectos distintos en 6 caixas diferentes se só se pode poñer un obxecto en cada caixa?
4. Nunha parada de autobús hai 5 persoas, en cantas ordes distintas poden ter chegado á parada? Ao chegar unha nova persoa aposta con outra a que adiviña a orde de chegada, que probabilidade ten de gañar?
5. Sete mozas participan nunha carreira, de cantas formas poden chegar á meta? Non hai empates. Cal é a probabilidade de acertar a orde de chegada á meta?
6. Cantos números distintos e de cinco cifras distintas poden formarse cos díxitos 3, 4, 5, 6, e 7? Cantos poden formarse se todos empezan por 5? E se deben empezar por 5 e terminar en 7?

Variacións

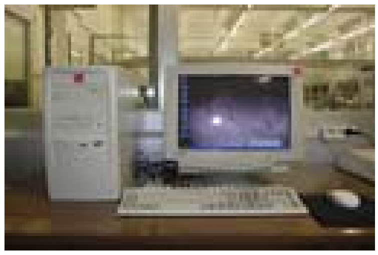
7. Cantas bandeiras de 3 franxas horizontais de cores distintas se poden formar coas cores vermello, amarelo e morado? E se se dispón de 5 cores? E se se dispón de 5 cores e non é preciso que as tres franxas teñan cores distintas?
8. Cantos números de 4 cifras distintas se poden escribir cos díxitos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Cantos deles son impares? Cantos son múltiplos de 4? *Recorda*: Un número é múltiplo de 4 se o número formado polas súas dúas últimas cifras é múltiplo de 4.
9. Cantos números de 4 cifras, distintas ou non, se poden escribir cos díxitos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Calcula a suma de todos eles. *Suxestión*: Ordénaos de menor a maior e suma o primeiro co último, o segundo co penúltimo, o terceiro co antepenúltimo e así sucesivamente

10. A Mario encántalle o cine e vai a todas as estreas. Esta semana hai seis e decide ir cada día a unha. De cantas formas distintas pode ordenar as películas? Mala sorte. Anúncianlle un exame e decide ir ao cine soamente o martes, o xoves e o sábado. Entre cantas películas pode elixir o primeiro día? E o segundo? E o terceiro?
11. Cos díxitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, cantos números de catro cifras diferentes se poden formar? (*Observa: se* comeza por 0 non é un número de catro cifras). Cantos son menores de 3000?

12. Coas letras da palabra "ARQUETIPO" cantas palabras de 6 letras se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas? a) Se todas as letras son distintas. b) Se se poden repetir letras.

13. Cantos números de tres cifras, diferentes ou non, se poden formar? Destes, cantos son maiores que 123?

14. A linguaxe do ordenador está escrita en secuencias de ceros e uns (díxitos binarios ou bits) de tamaño fixo. No contexto da informática estas cadeas de bits denomínanse palabras. Os ordenadores normalmente teñen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ou 64 bits. O código ASCII, co que se representaban inicialmente os caracteres para transmisión telegráfica, tiña 7 bits. Despois aplicouse aos ordenadores persoais, ampliándoo a 8 bits que é o que se denomina un byte ou ASCII estendido. Máis tarde substituíuse por Unicode, cunha lonxitude variable de máis de 16 bits. Cantos bytes diferentes (8 díxitos) se poden formar? Nun ordenador cuxa lonxitude de palabra tivera 16 díxitos, cantas se poderían formar que fosen diferentes? Se existira un ordenador cuxa lonxitude de palabra tivera 4 díxitos, poderíase escribir con eles as letras do alfabeto?



Combinacións

15. Escribe dous números combinatorios con elementos diferentes que sexan iguais e outros dous que sexan distintos.

16. Tes sete bólas de igual tamaño, catro brancas e tres negras, se as colocas en fila. De cantas formas podes ordenalas?

17. Con 5 latas de pintura de distintas cores, cantas mesturas de 3 cores poderás facer?

18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

20. De cantas maneiras se pode elixir unha delegación de 4 estudantes dun grupo de 30? E no teu propio grupo?

21. Cantos produtos diferentes se poden formar cos números: 2, 1/3, 7, 5 e π tomándoos de 3 en 3? Cantos deses produtos darán como resultado un número enteiro? Cantos un número racional non enteiro? Cantos un número irracional?

22. Cantas aliaxes de 3 metais poden facerse con 7 tipos distintos de metal?

23. Calcula:

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

24. Cal é a forma máis fácil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$ sen calcular cada un dos números combinatorios?

25. De cantas formas podes separar un grupo de 10 estudantes en dous grupos de 3 e 7 estudantes respectivamente?

26. Unha materia componse de 20 temas e vaise realizar un exame no que caen preguntas de dous temas. Cantas posibilidades hai para elixir os temas que caen? Se só estudaches 16 temas, cantas posibilidades hai de que che toquen dous temas que non saibas? Cal é a probabilidade de que che toquen dous temas que non saibas? E a de que che toque só un tema que non saibas?

27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO vai visitar un museo no que poden elixir entre dúas actividades diferentes. Cantas formas distintas pode haber de formar os grupos de alumnos?

28. Desenvolve o binomio a) $(4-x)^5$; b) $(3-2x)^4$; c) $(2ab-3c)^6$; d) $(\frac{x}{2}-\sqrt{2x})^3$.

29. Calcula *x* nas seguintes expresións:

a) $\binom{6}{4}+\binom{6}{x}=\binom{x+2}{x}$ b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$

c) $\binom{7}{4}+\binom{7}{x}=\binom{x+3}{x}$ d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$

30. Escribe o valor de *x* nas igualdades seguintes:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x\neq 3$; b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x\neq 3$; c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+1}$

31. Calcula en función de *n* a suma dos seguintes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2}+n$ c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$

32. Calcula o sexto termo no desenvolvemento de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

33. Calcula o coeficiente de x^2 no desenvolvemento de: $(-1-5x)^9$.

34. Cantas opcións hai para elixir catro materias entre sete optativas?

35. Xógase unha partida de tiro ao prato na que se lanzan sucesivamente doce pratos. Cal é o número de sucesos nos que se obteñen catro éxitos, é dicir, acértase catro veces no branco? No mesmo caso anterior, cal é a probabilidade de ter éxito no derradeiro tiro?

Problemas

36. En "*Curiosidades e Revista*" tes o problema de *Buteo*. Con 7 discos e 6 letras en cada disco, cantas combinacións distintas se poden facer? *Axuda:* No primeiro disco podemos poñer calquera das 6 letras. O mesmo no segundo. E no terceiro? Pero se é facilísimo! Se xa sabemos resolvelo.

37. Nun restaurante hai 5 primeiros pratos, 4 segundos e 6 sobremesas, de cantas formas diferentes se pode combinar o menú?

38. Lanzamos unha moeda e logo un dado, cantos resultados distintos podemos obter? E se lanzamos dúas moedas e un dado? E se fosen 3 moedas e 2 dados?

39. Estanse elixindo os actores e actrices para facer de protagonistas nunha teleserie. Presentáronse 6 mozos e 8 mozas. Cantas parellas distintas poderían formarse?

40. Unha caixa dun coñecido xogo educativo ten figuras vermellas, amarelas e azuis que poden ser triángulos, círculos ou cadrados, e de dous tamaños, grandes e pequenas. De cantas pezas consta a caixa?

41. Nun restaurante hai 8 primeiros pratos e 5 segundos, cantos tipos de sobremesas debe elaborar o restaurante para poder asegurar un menú diferente os 365 días do ano?

42. Nunha reunión todas as persoas se saúdan estreitando a man. Sabendo que houbo 91 saúdos. Cantas persoas había? E se houbo 45 saúdos, cantas persoas había?

43. De cantas maneiras se poden introducir 5 obxectos distintos en 5 caixas diferentes se só se pode poñer un obxecto en cada caixa? E se se poden poñer varios obxectos en cada caixa colocando todos? Cal é a probabilidade de que na primeira caixa non haxa ningún obxecto?

44. A meirande parte dos contrasinais das tarxetas de crédito son números de 4 cifras. Cantos posibles contrasinais podemos formar? Cantos teñen algún número repetido? Cantos teñen un número repetido dúas veces?

45. Temos 10 rectas no plano que se cortan 2 a 2, é dicir, non hai rectas paralelas. Cantos son os puntos de intersección?, e se tes 15 rectas?, e se tes *n* rectas?

46. Cantas diagonais ten un octógono regular?, e un polígono regular de 20 lados?

47. Cantas diagonais ten un icosaedro regular?, e un dodecaedro regular? *Axuda*: Recorda que o icosaedro e o dodecaedro son poliedros duais, é dicir, o número de caras dun coincide co número de vértices doutro. Para saber o número de arestas podes utilizar a *Relación de Euler*: C + V = A + 2

48. Cantos números diferentes de 5 cifras distintas podes formar cos díxitos 1, 2, 3, 5 e 7? Cantos que sexan múltiplos de 5? Cantos que empecen por 2? Cantos que ademais de empezar por 2 terminen en 7?

49. Con 5 bólas de 3 cores distintas, a) cantas filas diferentes podes formar? b) Cantas pulseiras distintas podes formar?

50. Hai moitos anos as placas de matrícula eran como esta: M 677573; logo foron como esta: M 1234 AB; e actualmente como esta: 6068 BPD. Investiga que vantaxes ten cada un destes cambios respecto ao anterior.

51. Cos díxitos 1, 2, 3, 4, 5, cantos números de cinco cifras distintas se poden formar? Calcula a suma de todos estes números.

52. Calcula x nos seguintes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,4}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

53. Iker e María xogan ao tenis e deciden que gaña aquel que primeiro gañe 3 sets. Cal é o número máximo de sets que terán que disputar? Cantos desenvolvementos posibles pode ter o encontro?

54. Pedro coñeceu onte a unha moza. Pasárono moi ben e ela deulle o seu número de móbil pero el non levaba nin o seu móbil nin bolígrafo. Pensou que se acordaría pero… só recorda que empezaba por 656, que había outras catro cifras que eran todas distintas entre si e menores que 5. Calcula cantas posibilidades ten de acertar se marca un número. Moi poucas. Fai memoria e recorda que as dúas últimas son 77. Cantas posibilidades hai agora de acertar facendo unha chamada?

55. Un club de alpinistas organizou unha expedición ao Kilimanjaro formada por 11 persoas, 7 expertos e 4 que están en formación. Nun determinado tramo só poden ir 3 expertos e 2 que non o sexan, de cantas formas pode estar composto ese equipo de 5 persoas? Ti es un experto e vas ir nese tramo, cantas formas hai agora de compoñelo?

56. Nun festival de curtametraxes con 15 participantes repártense 3 000 euros en premios. Indica o número de formas diferentes de realizar o reparto segundo cada unha das tres modalidades propostas.

a. *Modalidade A:* Repártense tres premios de 1 000 euros a tres curtametraxes elixidas por un xurado.

b. Modalidade B: Realízase unha votación e entréganse 1 500 euros ao máis votado, 1 000 ao segundo e 500 ao terceiro.

c. *Modalidade C*: Entréganse tres premios de 1 000 euros cada un en tres categorías: mellor guión, mellor realización e mellor interpretación. Nota: Podería ocorrer que unha curtametraxe fose a mellor en varias categorías.

57. Nos billetes dunha liña de autobuses van impresos os nomes da estación de partida e da de chegada. Hai en total 8 posibles estacións. Cantos billetes diferentes tería que imprimir a empresa de autobuses? Agora queren cambiar o formato e só imprimir o prezo, que é proporcional á distancia. As distancias entre as estacións son todas distintas. Cantos billetes diferentes tería que imprimir neste caso?

58. Unha parella ten un fillo de 3 anos que entra na gardería ás 9 da mañá. O pai traballa nunha fábrica que ten 3 quendas mensuais rotativas: de 0 a 8, de 8 a 16 e de 16 a 24 horas. A nai traballa nun supermercado que ten dúas quendas rotativas mensuais, de 8 a 14 e de 14 a 20 horas. Cantos días ao ano, por termo medio, non poderá ningún dos dous levar o seu fillo á gardería?

59. Un tiro ao branco ten 10 cabaliños numerados que xiran. Se se acerta a un deles acéndese unha luz co número do cabaliño. Tiras 3 veces, de cantas maneiras se poden acender as luces? E se o primeiro tiro non lle dá a ningún cabaliño?

60. Nunha festa hai 7 mozas e 7 mozos. Xoán baila sempre con Ana. Antón é o máis decidido e sempre sae bailar o primeiro, de cantas formas pode elixir parella nos próximos 4 bailes?

61. Cos díxitos 0, 1, 2, 3, 4, 5:

a) Cantos números de cinco cifras se poden formar?

b) Cantos hai con dúas veces a cifra 1 e tres a cifra 2?

c) Calcula a suma de todos estes últimos números.

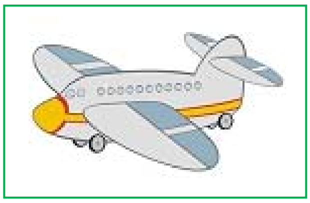
62. Cantas palabras, con ou sen sentido, se poden formar coas letras da palabra PORTA que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas?

63. Cantos números capicúa de dúas cifras existen? E de tres cifras? E de catro cifras?

64. Coas letras da palabra ARGUMENTO, cantas palabras de 5 letras se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas? a) Se todas as letras son distintas. b) Se se poden repetir letras.

65. Cantos números hai entre o 6 000 e o 9 000 que teñan todas as súas cifras distintas?

66. Unha fábrica de xoguetes ten á venda 8 modelos distintos. Cantos mostrarios distintos pode facer de 4 xoguetes cada un? Cal é a probabilidade de que o último modelo de avión fabricado chegue a un determinado cliente? Se se quere que neses mostrarios sempre estea o último modelo de xoguete fabricado, cantos mostrarios distintos pode facer agora?



67. A primeira obra impresa con resultados de Combinatoria é *Summa* de *Luca Pacioli*, de 1494. Nesta obra proponse o seguinte problema: de cantas formas distintas poden sentar catro persoas nunha mesa circular?

68. Cantos números de catro cifras teñen polo menos un 5?

69. Nunha compañía militar hai 10 soldados, cantas gardas de 3 soldados poden facerse? Un dos soldados é Alexandre, en cantas destas gardas estará? E en cantas non estará?

70. A encargada dun gardarroupa distraeuse e sabe que dos cinco últimos bolsos que recolleu a tres bolsos lles puxo o resgardo equivocado e a dous non. De cantas formas se pode ter producido o erro? E se fosen dous os equivocados?

71. Coas letras da palabra SABER, cantas palabras, con ou sen sentido, de letras diferentes, se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas. O mesmo para as palabras CORTE, PORTA e ALBERTE.

72. Coas letras da palabra GRUPO, cantas palabras de 5 letras con ou sen sentido se poden formar que teñan algunha letra repetida?

73. Un mozo ten no seu armario 10 camisolas, 5 pantalóns e tres pares de zapatillas. Sabendo que ten que facer a equipaxe para un campamento e só pode meter na mochila catro camisolas, tres pantalóns e dous pares de zapatillas, de cantas maneiras diferentes poderá encher a mochila?

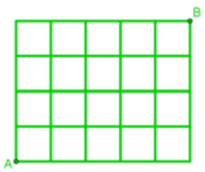
74. Cos díxitos 1, 3 e 5, cantos números menores de 6 000 se poden formar? Cantos hai con 4 cifras que teñan dúas veces a cifra 5?

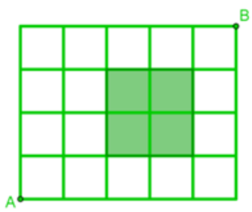
75. Camiños nunha cuadrícula

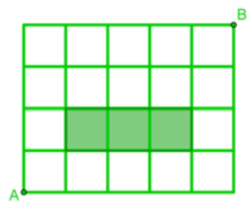
a) Cantos camiños hai para ir de A ata B se só podemos ir cara á dereita e cara arriba?

b) Se non podemos atravesar o cadrado verde, nin camiñar polos seus lados, cantas formas temos agora para ir desde A cara a B?

c) Se non podemos atravesar o rectángulo verde, nin camiñar polos seus lados, cantas formas temos agora para ir desde A cara a B?







Xeneralización

d) Cantos camiños hai nunha cuadrícula cadrada con *n* cadrados en cada lado?

e) Cantos camiños hai nunha cuadrícula rectangular con *m* cadrados verticais e *n* horizontais?

AUTOAVALIACIÓN

1. Tes nove moedas iguais que colocas en fila. Se catro amosan a cara e cinco a cruz, de cantas formas distintas podes ordenalas?

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. Nunha compañía aérea hai dez auxiliares de voo e un avión necesita levar catro na súa tripulación, de cantas formas se poden elixir?

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. Cantos produtos distintos poden obterse con tres factores diferentes elixidos entre os díxitos: 2, 3, 5 e 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Temos cinco obxectos distintos e queremos gardalos en cinco caixas diferentes poñendo un obxecto en cada caixa, de cantas formas podemos facelo?

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutacións de n+4 elementos dividido entre permutacións de n+1 elementos é igual a:

a) $(n + 4) \cdot (n + 3) \cdot (n + 2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/C_{n+4,n+1}$

6. As variacións de 10 elementos tomados de 6 en 6 é igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

7. Indica que afirmación é falsa:

a) $0! = 1$ b) $V_{m,n} = m \cdot (m – 1) \cdot (m – 2) \cdot \ldots \cdot (m – n)$ c) $VR_{m,n}= m^n$ d) $P_n = n!$

8. O valor dos seguintes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ é:

a) 0, 1, e 1 b) 0, 9 e 4 c) 1, 1 e 4 d) 5, 9 e 4

9. O valor de x, distinto de 4, na igualdade $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ é:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. O coeficiente do termo cuarto do desenvolvemento do Binomio de Newton de $(a + b)^7$ é:

a) $\binom{7}{3}$ b) 1 c) $\binom{7}{4}$ d) $V_{7,4}$