Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4º B da ESO

Versión en galego

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-697-0275-8

I.S.B.N. - 10: 84-697-0275-0

Textos Marea Verde

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 1: Números reais

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Paco Moya

Revisores: Javier Rodrigo e Sergio Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Números reais. 4ºB da ESO

Índice

Resumo

Xa coñeces os números naturais, os números enteiros e os números racionais. Neste capítulo imos estudar os números reais que están formados polos números racionais e os irracionais. Polo tanto, con algúns números reais irracionais xa te encontraras, con $\sqrt{2}$, con π…

Pero hai moitos, moitos máis. Hai moitos máis números irracionais que racionais. E preguntaraste, como se pode dicir iso se son infinitos? Resulta que hai infinitos máis grandes que outros. O infinito dos números naturais denomínase “infinito numerable”. Resulta que o dos números enteiros e o dos números racionais tamén é “infinito numerable”, pero o dos números reais xa non é numerable, é moito maior e denomínase “a potencia do continuo”. Unha das súas propiedades máis importantes é a súa relación cos puntos dunha recta, polo que aprenderemos a representalos na recta “real” na que non deixan “buratos”.

Como os números irracionais teñen infinitas cifras decimais non periódicas é complicado utilizalos tal cal, así que aprenderemos a aproximalos e calcular o erro que por iso cometemos.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

1. NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

Recordámosche os distintos tipos de números que xa coñeces:

Naturais ➔ $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, …}

Son os números que se usan para contar e ordenar. O 0 pode incluírse ou non, dependerá do teu profesor.

Enteiros ➔ $\mathbb{Z}$ = {… , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …}

Son os números naturais e os seus opostos. Non teñen parte decimal, de aí o seu nome. Inclúen aos Naturais.

Os números que se poden expresar en forma de cociente de dous números enteiros denomínanse números **racionais** e son representados pola letra $\mathbb{Q}$.

Polo tanto

Racionais ➔ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Os números racionais inclúen aos enteiros.

Tamén conteñen aos números que teñen expresión decimal exacta (0.12345) e aos que teñen expresión decimal periódica (7.01252525…) como veremos.

Notación:
$\in$ significa **"pertence"**
$\cup$ significa **"unión"**
$\subset$ significa **"incluído"**
$\cap$ significa **"intersección"**

1.1. Expresións decimais finitas ou periódicas

Recorda que:

- Se o denominador (da fracción irredutible) só ten como factores primos potencias de 2 ou 5 a expresión decimal é exacta.

Exemplo:

Así por exemplo $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0.025$; xa que $\frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$, e isto é xeral xa que sempre haberá unha potencia de 10 que sexa múltiplo do denominador se este só contén douses ou cincos. Fíxate que o número de decimais é o maior dos expoñentes de 2 e 5.

- Se o denominador (da fracción irredutible) ten algún factor primo que non sexa 2 nin 5 a fracción terá unha expresión decimal periódica.
- Se supoñemos un número *n* con factores primos distintos de 2 e 5, entón

$$\frac{1}{n} = m \cdot 10^{-a} \Rightarrow \frac{10^a}{n} = m,$$

pero o denominador non pode dar un cociente exacto ao dividir ao numerador, xa que 10 só ten os factores 2 e 5. Isto demostra que a expresión decimal non pode ser exacta.

Vexamos que é periódica:

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Cun exemplo bastará: se dividimos 1 entre 23 obtemos un primeiro resto que é 10, logo outro que é 8 e seguimos pero, repetirase algunha vez o resto e polo tanto as cifras do cociente?, a reposta é que si, seguro que si, os restos son sempre menores que o divisor, neste caso do 1 ao 22, se obteño 22 restos distintos (como é o caso) ao sacar un máis ten que repetirse! É o chamado *Principio do Pombal*. E a partir de aí os valores do cociente repítense.

Polo tanto a expresión decimal é periódica e o número de cifras do período é como máximo unha unidade inferior ao denominador (non sempre ocorre isto pero 1/23 ten un período de 22 cifras, 1/97 teno de 96 cifras, porén 1/37 ten un período de só 3 cifras, unha pista: 37 é divisor de 999).

Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica.

Actividades propostas

1. Mentalmente decide cales das seguintes fraccións teñen unha expresión decimal exacta e cales a teñen periódica:

a) 2/3 b) 3/5 c) 7/30 d) 6/25 e) 7/8 f) 9/11

2. Calcula a expresión decimal das fraccións do exercicio anterior e comproba se a túa dedución era correcta.

3. Calcula a expresión decimal das fraccións seguintes:

a) 1/3 b) 1/9 c) 7/80 d) 2/125 e) 49/400 36/11

1.2. Forma de fracción dunha expresión decimal

Recorda o procedemento:

Actividades resoltas

- Cálculo da forma de fracción de a) 0.175; b) 1.7252525…

a) Expresión decimal exacta: $0.175=\frac{175}{1000}=\frac{7}{40}$, divídese entre 10 elevado ao número de cifras decimais.

b)Expresión decimal periódica: Temos que conseguir 2 números coa mesma parte decimal para que ao restar desaparezan os decimais.

$$N = 1.7252525...$$
$$1000N = 1725.2525...$$
$$10N = 17.2525...$$
$$Se\ restamos: 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Primeiro levamos a coma ao final do primeiro período (fíxate que o anteperíodo e o período xuntos teñen 3 cifras), despois ao principio do primeiro período (o anteperíodo ten 1 cifra). Temos dúas expresións coa mesma parte decimal polo que, ao restar, eses decimais vanse, só queda despexar N.

Toda expresión decimal exacta ou periódica pódese poñer como fracción.

Actividades propostas

4. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais exactas e redúceas, comproba coa calculadora que está ben:

a) 7.92835; b) 291.291835; c) 0.23

5. Escribe en forma de fracción as seguintes expresións decimais periódicas, redúceas e comproba que está ben:

a) 2.353535….. b) 87.2365656565…. c) 0.9999….. d) 26.5735735735…..

1.3. $\sqrt{2}$ non é un número racional

Imos utilizar un método de demostración moi habitual en Matemáticas que se chama "**Redución ao Absurdo**" que consiste en:

> Se só hai 2 posibilidades para algo que chamamos A e non A e queremos demostrar A, empezamos supoñendo que se cumpre non A, facemos algún razoamento onde se chega a unha contradición (Absurdo) e desbotamos non A, tendo que cumprirse polo tanto A.

Máis doado de entender: supón que só hai 2 posibles camiños para chegar a un sitio. Tiras por un deles e descobres que non chega a ningunha parte, pois ten que ser o outro.

Imos entón. Queremos demostrar A:

$\sqrt{2}$ **non** pode poñerse como fracción.

Supoñemos certo o seu contrario, non A:

$\sqrt{2}$ **si** pode poñerse como fracción.

Entón $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, **fracción irredutible**. Elevamos ao cadrado nos 2 membros:

$$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

logo a^2 é par e polo tanto *a* tamén o é (o cadrado dun número impar é sempre impar), poñemos $a = 2k$ e substituímos:

$$(2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

logo b^2 é par e polo tanto *b* tamén o será.

En definitiva: *a* e *b* son os 2 números pares. CONTRADICIÓN, absurdo, dixemos que a fracción era irredutible, logo *a* e *b* non poden ser ambos os dous múltiplos de 2.

Polo tanto rexeitamos non A e quedamos con que A é certa.

Este procedemento serve igual para **todas as raíces non exactas**, de calquera índice.

Pero non vale para todos os irracionais, para demostrar que π é un número irracional hai que estudar moito. Foi demostrado a finais do século XVIII por *Lambert*. Ata ese momento aínda se seguían calculando decimais para encontrar un período que non ten.

1.4. Distintos tipos de números

Todos estes números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, … , π… xunto cos números racionais forman o conxunto dos números reais. E aos números reais que non son números racionais chámaselles números irracionais. Polo tanto

Irracionais ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathrm{Q}$.

Son números irracionais os números que non son racionais e polo tanto aqueles números que non poden poñerse como fracción de números enteiros. Hai máis dos que podería parecer (de feito hai máis que racionais!), son todos aqueles que teñen unha expresión decimal que non é exacta nin periódica, é dicir, **infinitas cifras decimais e sen período.** Exemplos: 17.6766766676… que acabo de inventar ou 0.1234567891011… que inventou *Carmichael*. Inventa un, busca en Internet e se non o encontras, pois é teu (por agora ☺).

Reais ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

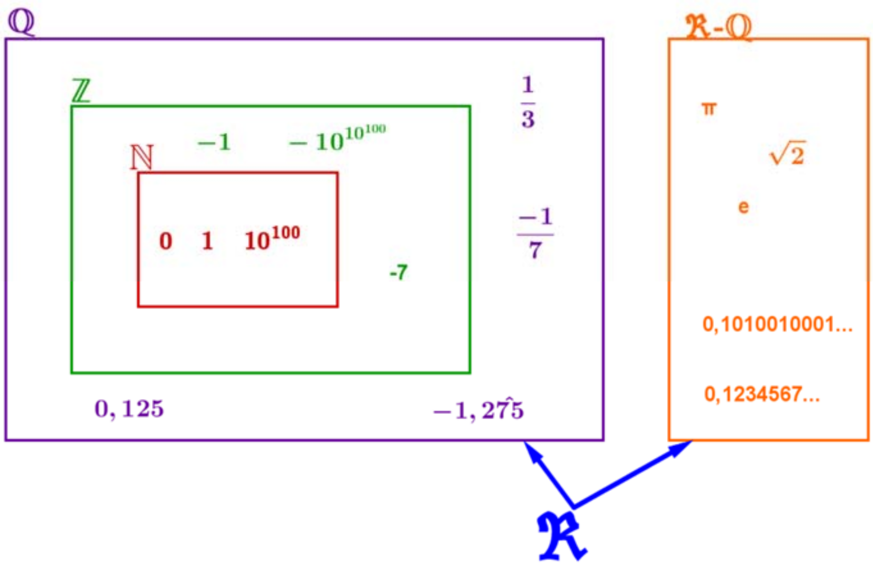
É a unión dos números racionais e dos irracionais.

Temos polo tanto que: $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re$.

$\mathrm{I} \subset \Re$

Son estes todos os números?

Non, os reais forman parte dun conxunto máis amplo que é o dos Números Complexos C (en 1º de bacharelato vense, na opción de Ciencias).



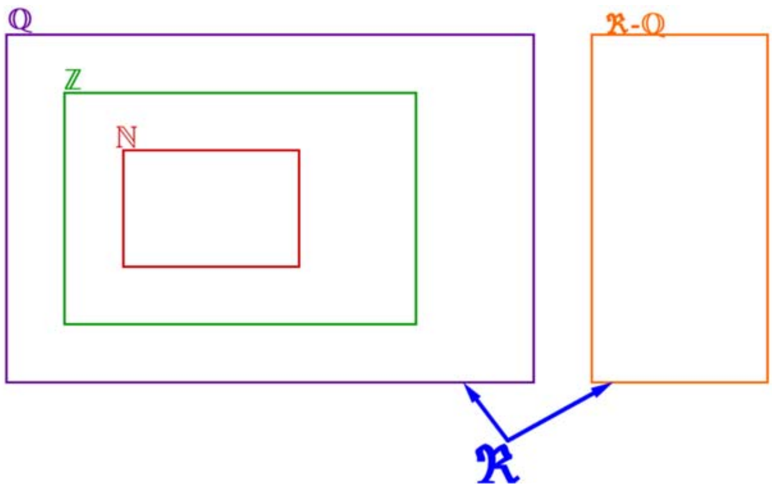
Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

6. Copia no teu caderno a táboa adxunta e sinala cun X a que conxuntos pertencen os seguintes números:

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\Re$
-2.01					
$\sqrt[3]{-4}$					
0.121212…					
$\sqrt[3]{-1\,000}$					
1.223334…					
$\sqrt{-4}$					
$\frac{1}{2}$					

7. Copia no teu caderno o esquema seguinte e mete os números do exercicio anterior no seu lugar:



8. Podes demostrar que 4.99999… = 5? Canto vale 2.5999…?

9. Demostra que $\sqrt[3]{7}$ é irracional.

10. Cantas cifras pode ter como máximo o período de $\frac{1}{47}$?

11. Cantos decimais ten $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? Atréveste a dar a razón?

12. Fai a división 999 999 : 7 e despois fai 1 : 7. Será casualidade?

13. Agora divide 999 entre 37 e despois 1 : 37. É casualidade?

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

2. APROXIMACIÓNS E ERROS

Aínda que neste curso imos traballar na medida do posible con valores exactos ($\sqrt{3}$ non se substitúe por 1.73 nin π por 3.1416) hai veces nas que cómpre facer aproximacións por motivos prácticos (non lle imos dicir ao tendeiro que nos dea 2π metros de corda pola conta que nos trae) e a traballar con números aproximados por, entre outros motivos, non coñecermos os valores exactos. Así, por exemplo, se nos pesamos nunha báscula e marca 65.4 Kg, canto pesamos exactamente? Non se pode saber, é imposible, o máximo que podemos dicir é que o noso peso está entre 65.3 e 65.5 Kg se o erro máximo é de 100 g.

2.1. Erro Absoluto

Defínese o Erro Absoluto (EA) como EA = $|valor\ real - valor\ aproximado|$.

As barras significan "valor absoluto" que xa sabes que quere dicir que no caso de ser negativo o convertemos en positivo.

Exemplo:

- Se aproximamos $\pi \approx$ 3.1416 teremos que o EA = $|\pi - 3.1426| = |-0.0000073\ldots| \approx 0.0000073$ unhas 7 millonésimas.

Cota do Erro Absoluto

Aínda sen coñecer con exactitude o valor exacto, sempre podemos poñer unha cota (un valor máximo) ao erro absoluto só tendo en conta a orde de aproximación. Así, se redondeamos nas dez milésimas (como no exemplo), sempre podemos afirmar que o EA$\leq$ 0.00005, é dicir, menor ou igual que media unidade do valor da cifra de redondeo ou 5 unidades da seguinte (5 cen milésimas), que é o mesmo.

Actividades resoltas

- Calcula a cota do erro absoluto de:

N$\approx$ $2.1 \Rightarrow EA \leq 0.05$

$N \approx 600 \Rightarrow EA \leq 50$ se supoñemos que redondeamos nas centenas.

Cando non se coñece o valor real, non pode coñecerse o valor absoluto, pero si unha cota. Se un cronómetro ten unha precisión de décimas de segundo diremos que o EA$\leq$ 0.05 s (media décima ou 5 centésimas).

Se temos un número A e a cota do erro absoluto é ΔA (lese incremento de A) soe poñerse $A \pm \Delta A$ sobre todo nas Ciencias Experimentais.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

2.2. Erro Relativo

Para comparar erros de distintas magnitudes ou números defínese o Erro Relativo (ER) como:

$$\text{ER} = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que soe multiplicarse por 100 para falar de % de erro relativo.

Se non se coñece o valor real substitúese polo valor aproximado (a diferenza normalmente é pequena).

Actividades resoltas

- Se aproximamos raíz de 3 por 1.73, o erro relativo cometido é:

$$\sqrt{3} \approx 1.73 \Rightarrow EA \approx 0.0021 \Rightarrow ER = \frac{0.0021}{\sqrt{3}} \approx 0.00121 \Rightarrow 0.121\%$$

Se na última división poñemos o valor aproximado 1.73 o ER sae aproximadamente 0.121%.

- Nas aproximacións A = 5.2 con EA ≤ 0.05 e B = 750 con EA ≤ 5, en cal estamos cometendo proporcionalmente menor erro?

Calculamos os erros relativos:

A ➔ ER $\leq \frac{0.05}{5.2} \Rightarrow ER \leq 0.0096 \Rightarrow ER \leq 0.96\%$

B ➔ER $\leq \frac{5}{750} \Rightarrow ER \leq 0.0067 \Rightarrow ER \leq 0.67\%$

É mellor aproximación a de B.

Control do erro cometido

Non hai nada máis ignorante matematicamente falando que utilizar demasiadas cifras decimais traballando en problemas prácticos. Dicir que nunha manifestación participaron **aproximadamente** 51226 persoas dana o sentido común. Tamén é unha barrabasada dicir que a estimación de voto para o partido A é do 25.6 % de votos se o erro pode ser do 3 % (cousa que non adoita mencionarse). Poñer como nota dun exame un 6.157 é polo menos curioso pola súa aparente precisión.

Actividades resoltas

- Temos dous números **redondeados** ás décimas: A = 2.5 e B = 5.7

Imos facer operacións con eles controlando os erros.

Como o EA $\leq$ 0.05 (recorda: se redondeamos nas décimas o erro será inferior ou igual a 5 centésimas) temos que A pode estar entre 2.45 e 2.55; igualmente B estará entre 5.65 e 5.75.

Suma

O valor máis pequeno será 2.45 + 5.65 = 8.1; o valor máximo será 2.55 + 5.75 = 8.3. Se restamos dá 0.2. Se tomamos como valor da suma 8.2, que é a media, agora o EA $\leq$ 0.1 (a metade da diferenza entre o máximo e o mínimo, fíxate en que 8.2 está a distancia 0.1 de 8.1 e de 8.3) cando antes era inferior a 0.05. xa non podemos estar seguros do último decimal. Coa resta pasa o mesmo.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Mínimo 5.65 – 2.55 = 3.1 (Ollo!, o menor menos o maior). Máximo 5.75 – 2.45 = 3.3. A media é 3.2 e como (3.3 – 3.1) : 2 = 0.1 o EA $\leq$ 0.1

En cada suma ou resta o erro absoluto é a suma dos erros absolutos (demóstrao).

Se facemos varias sumas e restas, pois aumentará perigosamente.

Produto

Valor máis pequeno 2.45 · 5.65 = 13.8425; valor máximo 2.55 · 5.75 = 14.6625. A diferenza é agora de 0.82. Se tomamos como produto 14.25 temos que EA $\leq$ 0.41; multiplicouse por 8. Xa non debemos estar seguros nin das unidades, podería ser 14 ou 15.

Se multiplicamos A (con EA = *a*) con B (con EA = *b*) obtemos un **EA = a · B + b · A**.

Nótese que depende dos valores de A e B.

Nota:

A fórmula **EA = a · B + b · A** sae de facer (A + a) · (B + b) – (A – a) · (B – b) e dividir entre 2. Compróbaa.

Se facemos (aB + bA)/(AB) obtemos (a/A) + (b/B), é dicir:

Os erros relativos súmanse ao multiplicar dous números.

División

O valor máis pequeno posible obtense de dividir o máis pequeno entre o máis grande:

5.65 : 2.55 = 2.22;

o máis grande ao revés (o máis grande entre o máis pequeno): 5.75 : 2.45 = 2.35.

Polo tanto EA $\leq$ 0.065.

Agora sae aproximadamente EA = $\frac{a \cdot B + b \cdot A}{B^2}$, que se B é grande fai que saia reducido, pero se B é pequeno dános unha ingrata sorpresa.

Actividades resoltas

- Cálculo do erro absoluto e relativo se A = 5; *a* = 0.05; B = 0.5; *b* = 0.05 ➔ A/B = 10 con EA $\leq$ 1.1, un 11% de erro relativo.

Non todo son malas noticias. Se dividimos un número aproximado entre un número exacto, o erro absoluto diminúe se o divisor é maior que 1. Por exemplo $(5 \pm 0.5): 20 = 0.25 \pm 0.025$. Porén o erro relativo permanece igual (próbao).

Nota:

Esta fórmula sae de facer $\frac{A+a}{B-b} - \frac{A-a}{B+b}$ e dividir entre 2, desprezamos b^2 fronte a B^2. Non hai que sabela.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Potencia

Pode rozar a catástrofe. Comproba que o mínimo sae 158 e o máximo 218. EA$\leq$ 30.

Isto é $(2.5 \pm 0.05)^{5.7 \pm 0.05} = 188 \pm 30$ o que representa un 16 % de erro relativo.

Curiosamente 188 non é $2.5^{5.7}$ que vale 185.5 aproximadamente, 188 é a media entre o mínimo e o máximo.

Actividades resoltas

- Medimos o radio dunha circunferencia cunha regra milimetrada e marca 7.0 cm. Queremos calcular a área do círculo. O erro máximo no radio é de 0.05 cm logo pode estar entre 6.95 e 7.05. Se aplicamos a fórmula πr^2 para estes valores obtemos 151.7 e 156.1, que son os valores mínimo e máximo. A diferenza é 4.4 e a súa metade é 2.2 que é a cota de erro absoluto. Diremos que

$$A = 153.9 \pm 2.2 \ cm^2 .$$

A cota do erro relativo $\frac{2.2}{153.9} \cdot 100$ = 1.4 %.

O radio tiña unha cota de (0.05 : 7) · 100 = 0.71 %, polo que perdemos precisión.

Se operamos con números aproximados, é peor aínda, se o facemos en repetidas ocasións, os erros vanse acumulando ata o punto de poder facerse intolerables. Non sexas demasiado preciso se os datos de partida non son fiables.

Actividades propostas

14. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ata as centésimas e calcula os erros absoluto e relativo cometidos.

15. Calcula unha cota do erro absoluto nas seguintes aproximacións:

a) 2.1 b) 123 c) 123.00 d) 4 000 con redondeo nas decenas.

16. Unha balanza ten un erro inferior ou igual a 50 g nas súas medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azucre de 1 Kg cada un que son un lote. Determina o peso mínimo e máximo do lote. Cal é a cota do erro absoluto para o lote?

17. Os números A = 5.5 e B = 12 foron redondeados. Calcula unha cota do erro absoluto e do erro relativo para:

a) A + B
b) A · B
c) B/A
d) A^B

Nota: Determina os valores máximo e mínimo de A e B. Despois os valores máximos e mínimos de cada apartado (recorda que a resta e a división funcionan distinto).

18. Como medir o grosor dun folio cun erro inferior a 0.0001 cm coa axuda dunha regra milimetrada e a do/a conserxe do instituto?, faino.

3. REPRESENTACIÓN NA RECTA REAL DOS NÚMEROS REAIS

3.1. Densidade dos números reais

Os números reais son densos, é dicir, entre cada dous números reais hai infinitos números no medio.

Iso é fácil de deducir. Se *a*, *b* son dous números con *a* < *b* sabemos que $a < \frac{a+b}{2} < b$, é dicir, a media está entre os dous números. Como isto podemos facelo as veces que queiramos, de aí o resultado.

Curiosamente os racionais son tamén densos, así como os irracionais.

Actividades propostas

19. Calcula 3 números reais que estean entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e 1.

20. Calcula 5 números racionais que estean entre $\sqrt{2}$ *e* 1.5

21. Calcula 5 números irracionais que estean entre 3.14 e π

3.2. Representación na recta real dos números reais

Elixida a orixe de coordenadas e o tamaño da unidade (ou o que é o mesmo, se colocamos o 0 e o 1) todo número real ocupa unha posición na recta numérica e, ao revés, todo punto da recta pódese facer corresponder cun número real.

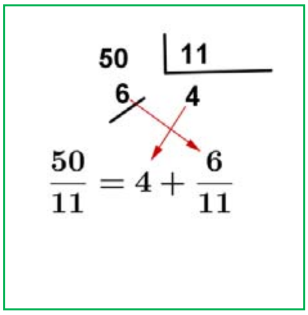
Vexamos como representar de forma exacta **algúns** números reais:

I.- Representación na recta dos números racionais

Actividades resoltas

- Se a fracción é **propia** (numerador menor que o denominador, valor menor que 1), por exemplo $\frac{5}{6}$ bastará con dividir a primeira unidade en 6 partes iguais e tomar 5. No caso de ser negativa contaremos cara á esquerda. (Ver figura).

- Se a fracción é **impropia** (numerador maior que denominador e polo tanto valor maior que 1) faremos a división enteira (sen decimais) quedando co cociente e o resto. Isto permítenos poñela en forma mixta (suma dun enteiro e dunha fracción propia). Así por exemplo: $\frac{11}{3}=3+\frac{2}{3}$ xa que ao dividir 11 entre 3 obtemos 3 de cociente e 2 de resto. O *cociente é a parte enteira e o resto o numerador da fracción propia*.

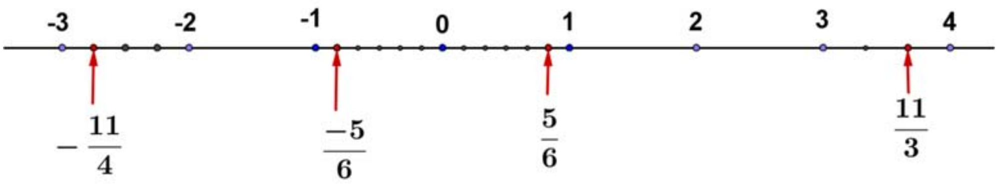


Para representala só temos que ir onde di a parte enteira (3) e a unidade seguinte (a que vai do 3 ao 4) dividímola en 3 partes iguais e tomamos 2.

- Outro exemplo: $\frac{17}{7}=2+\frac{3}{7}$, xa que a división dá 2 de cociente e 3 de resto.

Imos ao 2, dividimos a unidade seguinte (do 2 ao 3) en 7 partes iguais e tomamos 3.

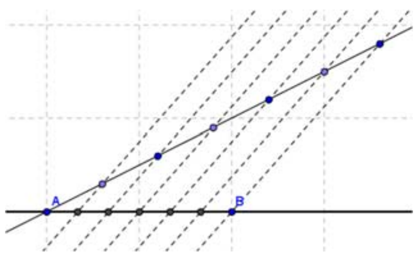
- **En caso de ser negativa**: $-\frac{11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$, farase igual, pero contando cara á esquerda. Imos ao –2, a unidade que vai do –2 ao –3 divídese en 4 partes e tomamos 3 (pero contando do –2 ao –3, claro!).



Recorda que:

Para dividir un segmento en partes iguais:

Para dividir o segmento AB en, por exemplo, 6 partes iguais, trazamos por A unha liña oblicua calquera, abrimos o compás unha abertura calquera e marcamos 6 puntos na recta anterior a distancia igual. Unimos o último punto con B e trazamos paralelas que pasen polos puntos intermedios da recta oblicua. Polo *Teorema de Tales*, o segmento AB quedou dividido en 6 partes iguais.



Normalmente non che esixirán que o fagas tan exacto, faralo de forma aproximada, pero ten coidado de que as partes parezan iguais.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

II.- Representación na recta das raíces cadradas

Para representar raíces cadradas usamos o *Teorema de Pitágoras*. Se nun triángulo rectángulo a hipotenusa é *h* e os catetos son *a*, *b* temos que $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

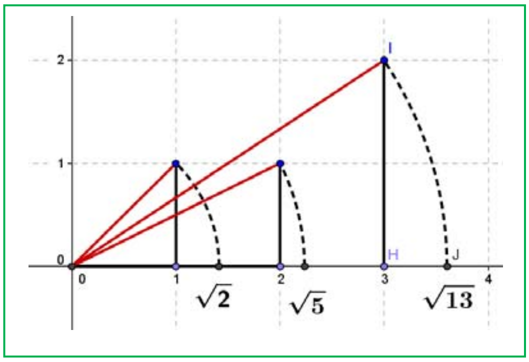
Actividades resoltas

- Representa na recta $\sqrt{2}$

Se *a* = *b* = 1 temos que $h = \sqrt{2}$. Só temos que construír un triángulo rectángulo de catetos 1 e 1, a súa hipotenusa mide $\sqrt{2}$, (a diagonal do cadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$). Agora utilizando o compás, levamos esa distancia ao eixe X (ver figura).

- Representa na recta $\sqrt{5}$.

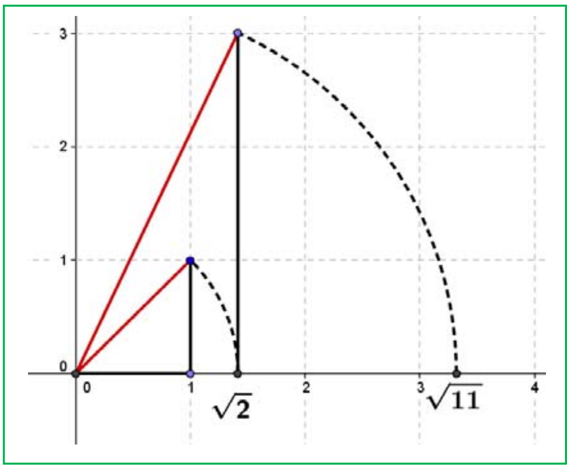
Como $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ só hai que construír un triángulo rectángulo de catetos 2 e 1, e a súa hipotenusa mide $\sqrt{5}$.



Pillaches o truco? O radicando hai que expresalo como suma de 2 cadrados. O triángulo rectángulo terá como catetos eses dous números.

- Así, para representar $\sqrt{13}$, expresamos 13 como suma de 2 cadrados: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ polo tanto nun triángulo rectángulo de lados 3 e 2 a hipotenusa será $\sqrt{13}$.

- Pero, e se o número non pode poñerse como suma de 2 cadrados?, por exemplo, o 11 (sempre complicando as cousas! ☹).



Haberá que facelo en 2 pasos. 11 = 2 + 9, hai algún número cuxo cadrado sexa 2?, por suposto que si, $\sqrt{2}$. Polo tanto $\sqrt{11} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2}$, temos que facer un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{2}$ e 3. Para iso primeiro constrúese $\sqrt{2}$ como antes e trázase unha perpendicular de lonxitude 3.

Poden debuxarse xa así todas as raíces?, non. Hai algunhas para as que hai que facer máis pasos ($\sqrt{7}$ por exemplo require 3), pero mellor deixámolo aquí, non?

Actividades propostas

22. Representa na recta numérica os seguintes números: $\frac{7}{6}; \frac{-17}{4}; 2.375; -3.\overset{\frown}{6}$

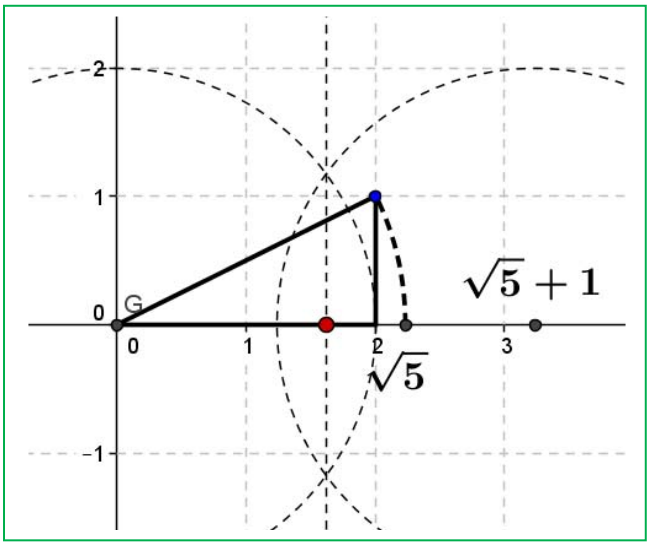
23. Representa na recta numérica: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

3.3. Un exemplo de interese matemático, natural e artístico

Oíches falar do número de ouro?

O número de ouro (ou razón áurea ou proporción harmónica ou divina proporción) é igual a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$



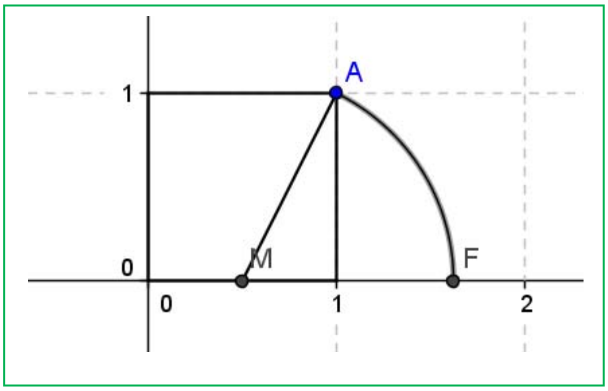
Actividades resoltas

- Como o representamos na recta?

Só hai que construír $\sqrt{5}$ como arriba, sumar 1 (trasladamos 1 unidade co compás) e dividir entre 2 calculando o punto medio (coa mediatriz), feito.

- Outra forma distinta:

Construímos un cadrado de lado 1 (un que?, un o que queiras!). Calculamos o punto medio do lado inferior (M) e levamos a distancia MA co compás ao eixe horizontal, OF é o número de ouro.

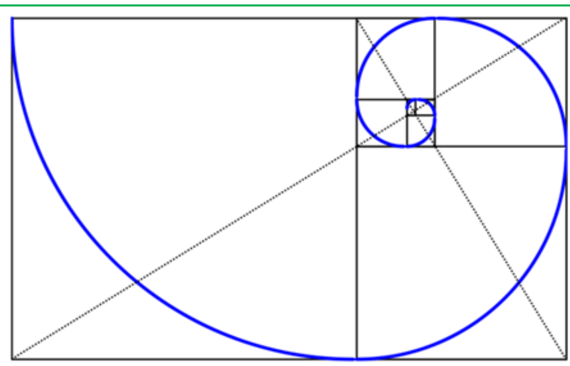


Vexamos:

$$MA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF = \frac{1}{2} + MA = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Un exemplo da aplicación da razón áurea para construír unha espiral (imaxe de wikipedia).



Espiral áurea. Wikipedia

Actividades propostas

24. Busca rectángulo áureo e espiral áurea.

25. Xa de paso busca a relación entre o número de ouro e a sucesión de *Fibonacci*.

26. Busca en Youtube “algo pasa con phi” e cóntasme.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Ferramenta informática para estudar a proporción áurea

Nesta actividade vaise utilizar o programa *Xeoxebra* para realizar un estudo da proporción áurea.

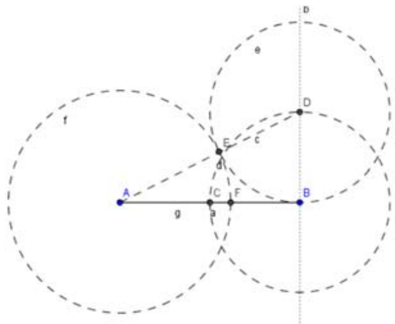
Un segmento está dividido en dúas partes que están en proporción áurea se a razón entre a lonxitude do segmento e a lonxitude da parte maior coincide coa razón entre a lonxitude da parte maior e a da parte menor.

Actividades resoltas

- *Utiliza Xeoxebra para dividir un segmento en dúas partes que estean en proporción áurea.*

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Determina con **Novo punto** os puntos *A* e *B* e debuxa o segmento, *a*, que os une.
- Traza un segmento *BD* perpendicular ao segmento *AB* no punto *B*, cuxa lonxitude sexa a metade de *AB,* podes seguir as seguintes instrucións:
  - Calcula o **Punto medio ou centro do** segmento *AB* e chámao *C*.
  - Debuxa con **Circunferencia con centro e punto que cruza** a que ten centro en *B* e pasa por *C*.
  - Traza a **Recta Perpendicular** ao segmento *AB* que pase por *B*.
  - Define *D* como o **Punto de Intersección** entre esta recta e a circunferencia.



- Debuxa o segmento *AD* e unha circunferencia con centro *D* que pase por *B*. Sexa *E* o **Punto de Intersección** desta circunferencia co segmento *AD*.
- Con centro en *A* traza a circunferencia que pasa por *E* e determina o **punto de Intersección,** *F*, desta circunferencia co segmento *AB*.
- Traza o segmento, *g*, que une os puntos *A* e *F*.
- Comproba que o punto *F* divide ao segmento *AB* en dúas partes que están en proporción áurea:
  - Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais**.
  - Calcula na liña de **Entrada os** cocientes *a/g e g/(a-g).*

Observa na **Ventá alxébrica** que estes valores coinciden, calculaches un valor aproximado do número de ouro, Φ.

- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e comproba que o cociente entre as lonxitudes dos segmentos *AF* e *FB* permanece constante.
- Para visualizar mellor a construción podes debuxar os elementos auxiliares con trazo descontinuo, elixindo no menú contextual, **Propiedades e Estilo de trazo**.

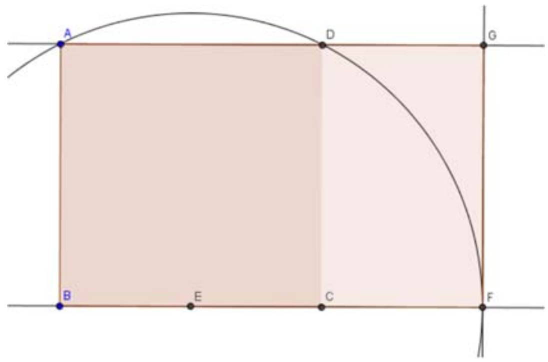
Un rectángulo é áureo se os seus lados están en proporción áurea.

Se a un rectángulo áureo lle quitamos (ou lle engadimos) un cadrado, obtemos un rectángulo semellante ao de partida e polo tanto tamén áureo.

Utiliza Xeoxebra para debuxar un rectángulo áureo.

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula.**

- Define dous puntos *A* e *B* que van ser os extremos do lado menor do rectángulo e coa ferramenta **polígono regular** debuxa, a partir dos puntos *A* e *B*, o cadrado *ABCD* e oculta os nomes dos lados coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo**.
- Calcula o **Punto medio**, *E*, do lado *BC*. Con centro en *E* debuxa a **Circunferencia** con centro en *E* que pasa por *A*.
- Traza a recta, *a*, que pasa por *BC* e define como *F* o **Punto de intersección** entre esta recta e a circunferencia.
- Debuxa a **Recta perpendicular** á recta *a* que pasa por *F*, e a **recta** que pasa polos puntos *A e D*, chama *G* ao **Punto de intersección** destas rectas e define con **Polígono** o rectángulo *ABFG*.



- Na ventá alxébrica aparecen as lonxitudes dos lados do rectángulo como *f* e *g*, introduce na liña de **Entrada** *g/f* e observa nesta ventá que aparece o valor *e* que é unha aproximación ao número áureo. Elixe no menú **Opcións**, 5 **Posicións decimais.**
- Debuxa o **segmento** *CF*, na ventá alxébrica aparece a súa lonxitude, *h*, introduce na liña de **Entrada** *f/h*, observa que este cociente coincide con *g/f* e é unha aproximación do número áureo.
- Coa ferramenta **Despraza**, cambia a posición dos puntos iniciais *A* ou *B* e observa que o cociente entre as lonxitudes dos lados dos rectángulos é constante.

O rectángulo *ABFG é* áureo xa que o cociente entre a lonxitude do seu lado maior e a do menor é o número de ouro, ademais o rectángulo *DCFG*, que se obtén ao quitar un cadrado de lado o menor do rectángulo, é tamén áureo e polo tanto semellante ao primeiro.

Crea as túas propias ferramentas con Xeoxebra. Crea unha que debuxe rectángulos áureos.

Vaise crear unha ferramenta que a partir de dous puntos *A* e *B* debuxe o rectángulo áureo no que o segmento *AB* é o lado menor.

- Na figura anterior oculta o nome dos puntos *C, D, E, F* e *G* coa ferramenta **Expón/Oculta rótulo** facendo clic co rato sobre eles, na área de traballo ou na ventá alxébrica.
- Activa no menú **Ferramentas**, a opción **Creación de nova ferramenta e** define:

Obxectos de saída: o polígono cadrado, o polígono rectángulo e os puntos *C, D, F*, e *G*.

Obxectos de entrada: os dous puntos iniciais *A* e *B*.

E elixe como **nome da ferramenta** *rectángulo áureo*. Observa que aparece na barra de ferramentas.

Na opción **Manexo de útiles** do menú **Ferramentas** grava a ferramenta creada como *rectanguloaureo*, que se garda como *rectanguloaureo.ggt*

Utiliza a ferramenta **Desprazamento da zona gráfica** para ir a unha parte baleira da pantalla e comprobar que a ferramenta *rectanguloaureo* funciona perfectamente.

Debuxa unha espiral áurea e crea unha ferramenta que debuxe espirais áureas.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Abre unha nova ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula** e abre o arquivo *rectanguloaureo.ggt* que acabas de crear*.*

- Define dous puntos *A* e *B* e aplica a ferramenta *rectanguloaureo,* obtense o rectángulo áureo *ABEF* e o cadrado *ABCD* co nome dos vértices *C, D, E e F* ocultos*.*
- Utiliza a ferramenta **Arco de circunferencia dados centro e dous puntos extremos** para debuxar o arco con centro o punto *C* e que pasa polos puntos *D* e *B*.

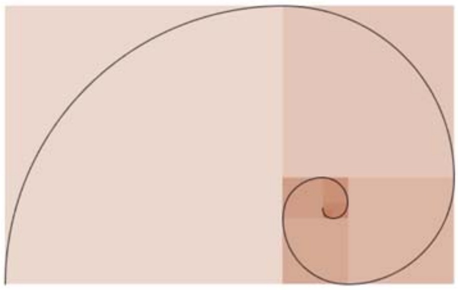
Vaise crear unha nova ferramenta que debuxe o rectángulo áureo e o arco.

- Activa no menú **Ferramentas**, a opción **Creación de nova ferramenta e** define:

  Obxectos de saída: o cadrado, o polígono rectángulo, os puntos *C, D,E*, *F* e o arco *c*.

  Obxectos de entrada: os dous puntos iniciais *A* e *B*.

Elixe como **nome da ferramenta** *espiralaurea*.



Na opción **Manexo de útiles** do menú **Ferramentas** grava a ferramenta creada como *espiralaurea,* que se grava como *espiralaurea.ggt.*

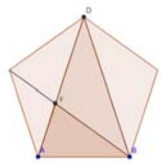
- Activa sucesivamente a ferramenta anterior, co obxecto de debuxar a espiral que resulta de unir cun arco de circunferencia dous vértices opostos dos cadrados de forma consecutiva e de maior a menor.
- Para mellorar o aspecto da espiral pódense ocultar os puntos, mellor na ventá alxébrica, coa ferramenta **Expón / Oculta obxecto**.

Observa que ao variar os ángulos nunha progresión aritmética de diferenza α=90º, os lados dos cadrados modifícanse segundo unha progresión xeométrica de razón: Φ.

Actividades propostas

27. Comproba que a lonxitude do lado do pentágono regular e a da súa diagonal están en proporción áurea.

28. Calcula con Xeoxebra unha aproximación da razón de semellanza entre un pentágono regular e o que se forma no seu interior ao debuxar as súas diagonais. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous pentágonos.



29. Comproba que os triángulos *ABD* e *ABF* da figura son semellantes e calcula aproximadamente con *Xeoxebra* a súa razón de semellanza.

30. Calcula con *Xeoxebra* o valor aproximado da razón de semellanza entre un decágono regular e o decágono que se forma ao trazar as diagonais da figura. Determina sen utilizar Xeoxebra o valor real da razón de semellanza entre estes dous polígonos.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

4. INTERVALOS, SEMIRRECTAS E ENTORNOS

Como xa sabemos entre dous números reais hai infinitos números. Hai unha notación especial para referirse a eses infinitos números que deberás dominar para este e para futuros cursos.

4.1. Intervalos

(Do lat. *intervallum*): Conxunto da recta real limitado por dous valores. RAG.

I.- Intervalos Abertos

Se nos queremos referir ao conxunto dos números que hai entre dous valores pero sen contar os extremos, usaremos un **intervalo aberto.**

Exemplo:

- Os números superiores a 2 pero menores que 7 represéntanse por (2, 7) e lese “intervalo aberto de extremos 2 e 7”. A el pertencen infinitos números como 2.001; 3.5; 5; 6.999… pero non son deste conxunto nin o 2 nin o 7. Iso representan as parénteses, que entran todos os números do medio pero non os extremos.

Exemplo:

- Os números positivos menores que 10 represéntanse por (0, 10), o intervalo aberto de extremos 0 e 10. Fíxate que 0 non é positivo, polo que non entra e o 10 non é menor que 10, polo que tampouco entra.

Nota: non se admite poñer (7, 2), o menor sempre á esquerda!

Tamén hai que dominar a expresión destes conxuntos usando desigualdades, prepárate:

$$(2, 7) = \{x \in \Re / \ 2 < x < 7\}.$$

Traducimos: as chaves utilízanse para dar os elementos dun conxunto, dentro delas enuméranse os elementos ou dáse a propiedade que cumpren todos eles. Utilízase o *x* para denotar a un número real, a / significa “tal que” e por último dise a propiedade que cumpren mediante unha dobre desigualdade. Así que non te asustes, o de arriba lese: os *números reais tal que son maiores que 2 e menores que 7*.

É necesario dominar esta linguaxe matemática xa que a oración en galego pode non entenderse noutros países pero asegúroche que o das chaves e a / enténdeno todos os estudantes de matemáticas do mundo (ou case todos).

O outro exemplo: (0, 10) = $\{x \in \Re / \ 0 < x < 10\}$.

Por último a **representación gráfica**:

Póñense **puntos sen reencher** nos extremos e resáltase a zona intermedia.

$(2, 7) \Rightarrow$

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Pregunta: Cal é número que está máis preto de 7, sen ser 7?

Pensa que 6.999…=7 e que entre 6.999 e 7 hai "moitos, moitísimos …" números.

***Nota:** Nalgúns textos os intervalos abertos represéntase así]2, 7[o que ten algunhas vantaxes como que os estudantes non confundan o intervalo (3, 4) co punto do plano (3, 4), que aseguramos que ten ocorrido (pero ti non serás un deles non?), ou a fastidiosa necesidade de poñer (2,3; 3,4) porque (2,3,3,4) non o entendería nin Gauss.

II.- Intervalos pechados

Igual que os abertos pero agora **si** pertencen os extremos.

Exemplo:

- intervalo dos números maiores ou iguais que –2 pero menores ou iguais que 5. Agora o –2 e o 5 si entran. Faise igual pero poñendo corchetes [–2, 5].

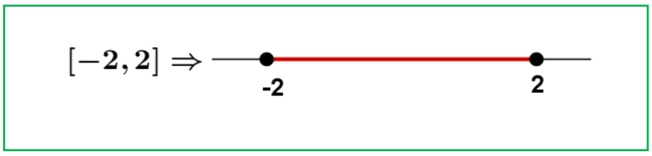
En forma de conxunto escríbese: $[-2, 5] = \{x \in \mathfrak{R};\ -2 \leq x \leq 5\}$. Fíxate que agora poñemos $\leq$ que significa "menor ou igual".

Exemplo:

- intervalo dos números cuxo cadrado non é superior a 4. Se o pensas un pouco verás que son os números entre o –2 e o 2, ambos os dous incluídos (non superior $\Leftrightarrow$ menor ou igual). Polo tanto:

  $[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R};\ -2 \leq x \leq 2\}$.

A representación gráfica é igual pero poñendo **puntos recheos**.

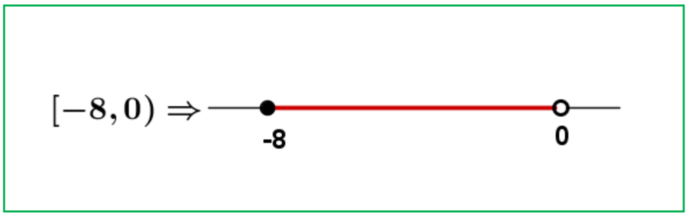


III.- Intervalos semiabertos (ou semipechados, a elixir)

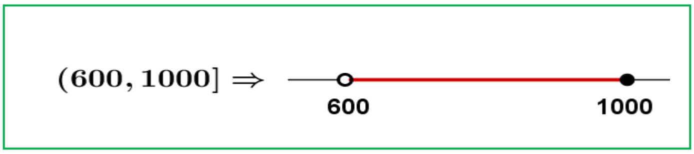
Por suposto que un intervalo pode ter un extremo aberto e outro pechado. A notación será a mesma.

Exemplo:

- Temperatura negativa pero non por debaixo de –8 °C:
  $[-8, 0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$



- Números superiores a 600 pero que non excedan de 1 000.
  $(600, 1\,000] = \{x \in \mathbb{R} / 600 < x \leq 1000\}$.



4.2. Semirrectas

Moitas veces o conxunto de interese non está limitado por un dos seus extremos.

Exemplo:

- Os números positivos: non hai ningún número positivo que sexa o maior. Utilízase entón o símbolo ∞ e escríbese $(0,+\infty)=\{x/x>0\}$.

Nótese que é equivalente poñer x > 0 que poñer 0 < x, pódese poñer de ambas as formas.

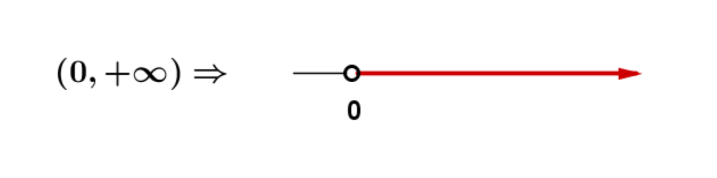
Exemplo:

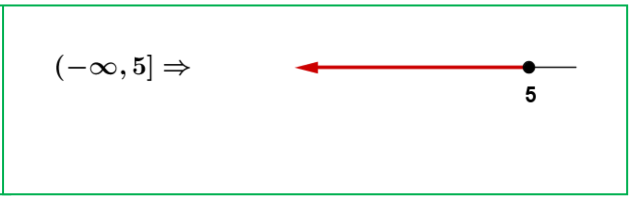
- Números non maiores que 5: $(-\infty,5]=\{x/x\le 5\}$. Aquí o 5 si entra e por iso o poñemos pechado ("non maior" equivale a "menor ou igual")

Exemplo:

- Solución de $x > 7$: $(7,+\infty)=\{x/x>7\}$

  Nota: o **extremo non acoutado sempre se pon aberto**. Non queremos ver isto: (7, +∞]





4.3. Entornos

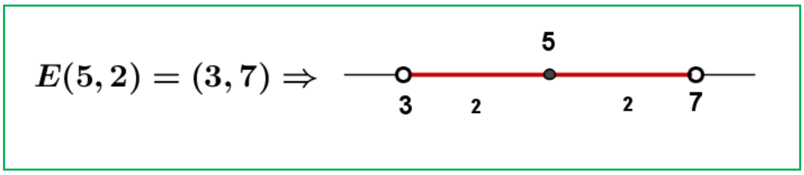
É unha forma especial de poñer os intervalos abertos.

Defínese o entorno de centro *a* e radio *r* e denótase E(*a*, *r*) (outra forma usual é $E_r(a)$) como o conxunto de números que están a unha **distancia de a menor que *r***.

Cun exemplo enténdelo mellor:

Exemplo:

- O entorno de centro 5 e radio 2 son os números que están de 5 unha distancia menor que 2. Se o pensamos un pouco, serán os números entre 5 – 2 e 5 + 2, é dicir, o intervalo (3, 7). É como coller o compás e con centro en 5 marcar con abertura 2.



Fíxate que o 5 está no centro e a distancia do 5 ao 7 e ao 3 é 2.

E(*a*, *r*) = (*a* – *r*, *a* + *r*)

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- E(2, 4) = (2 – 4, 2 + 4) = (–2, 6)

É moi doado pasar dun entorno a un intervalo. Imos facelo ao revés.

Exemplo:

- Se teño o intervalo aberto (3, 10), como se pon en forma de entorno?

Calculamos o punto medio $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$ = 6.5 que será o centro do entorno. Fáltanos calcular o radio:

(10 – 3) : 2 = 3.5 é o radio (a metade do ancho). Polo tanto (3, 10) = E(6.5; 3.5)

En xeral:

O intervalo (*b*, c) é o entorno $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Exemplo:

- O intervalo (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}) = E(-3.5, 4.5)$

Tamén existen os entornos pechados pero son de uso menos frecuente.

Actividades propostas

31. Expresa como intervalo ou semirrecta, en forma de conxunto (usando desigualdades) e representa graficamente:

a) Porcentaxe superior ao 26 %.
b) Idade inferior ou igual a 18 anos.
c) Números cuxo cubo sexa superior a 8.
d) Números positivos cuxa parte enteira ten 3 cifras.
e) Temperatura inferior a 25°C.
f) Números para os que existe a súa raíz cadrada (é un número real).
g) Números que estean de 5 a unha distancia inferior a 4.

32. Expresa en forma de intervalo os seguintes entornos:

a) E(1, 5)

b) E(–2, $\frac{8}{3}$)

c) E(–10; 0.001)

33. Expresa en forma de entorno os seguintes intervalos:

a) (4, 7)
b) (–7, -4)
c) (–3, 2)

34. Os soldos superiores a 500 € pero inferiores a 1 000 € pódense poñer como intervalo de números reais? *Pista: 600.222333€ pode ser un soldo?

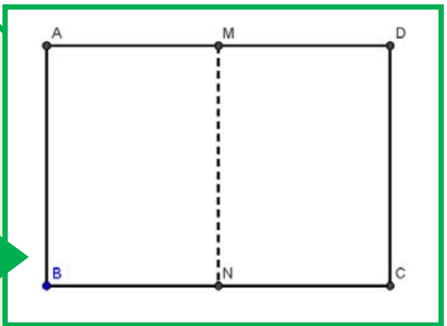
Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Folios e $\sqrt{2}$

Xa sabemos que un cadrado de lado L ten unha diagonal que vale $\sqrt{2}$ L, vexamos algo máis:

A imaxe representa un folio coa norma DIN 476 que é a máis utilizada a nivel mundial.



Esta norma especifica que un folio DIN A0 ten unha superficie de 1 m^2 e que ao partilo pola metade obteremos un DIN A1 que debe ser un rectángulo semellante ao anterior. Partindo o A1 en 2 iguais obtemos o DIN A2, despois o DIN A3 e o DIN A4 que é o máis usado. Todos son semellantes aos anteriores.

Que significa ser semellante?

Pois que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$, pero AM = AD/2 logo

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Polo tanto nos folios DIN 476:

a razón entre o longo e o ancho é $\sqrt{2}$.

Non queda aquí a cousa, fíxate que ao partir o folio en 2 partes iguais o novo folio ten o lado maior que coincide co lado menor do orixinal: AB é agora o lado maior e antes era o menor, como AB = AD/$\sqrt{2}$ resulta que a razón de semellanza é $\sqrt{2}$. É dicir, para pasar dun folio A0 a outro A1 dividimos os seus lados entre $\sqrt{2}$. O mesmo para os seguintes.

Calculemos as dimensións:

Para o A0 temos que a área é AD · AB = 1m^2

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx 1.189 \text{ m;}$$

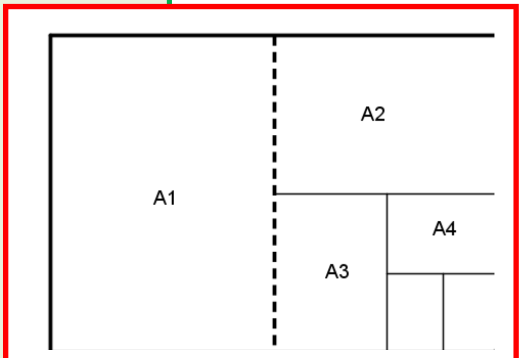
AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \simeq 0.841$ m. Para obter as medidas do A4 dividiremos 4 veces entre $\sqrt{2}$:

Longo = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4} \approx 0.297$ m = 29.7 cm

Ancho= Longo/$\sqrt{2} \approx 0.210$ m = 21.0 cm

Unha táboa

	Longo (cm)	Ancho (cm)	Área (cm^2)
A0	118.92	84.09	10000
A1	84.09	59.46	5000
A2	59.46	44.04	2500
A3	42.04	29.83	1250
A4	29.73	21.02	625
A5	21.02	14.87	415.2



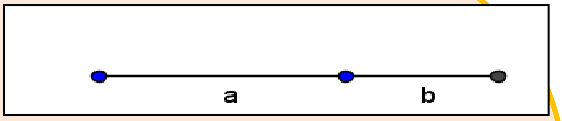
Cuestións

1) Comproba os valores da táboa anterior (hai polo menos dous valores equivocados ☺).
2) Cantos folios A4 caben nun folio A0?
3) Cales son as dimensións do A6?, e do A7?

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O número de ouro

Dividimos un segmento en dúas partes de forma que se dividimos a lonxitude do segmento total entre a parte maior debe dar o mesmo que ao dividir a parte maior entre a parte menor.
Temos que $(a + b)/a = a/b$.



O número de ouro (ou razón áurea) chamado Φ (fi) é precisamente o valor desa proporción, así:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$$

Xa temos dúas curiosidades:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

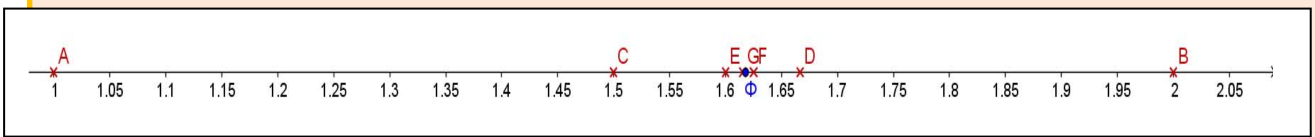
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

Onde F_n é o *n*-ésimo número de *Fibonacci*. Estes números son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34… onde cada termo a partir do terceiro se obtén sumando os dous anteriores.
Máis relacións entre o número de ouro e a sucesión de *Fibonacci*:
a) se imos dividindo un número da sucesión entre o seu anterior obtemos: 1/1 = 1; 2/1 = 2; 3/2 = 1.5; 5/3 = 1.666…; 8/5 = 1.6; 13/8 = 1.625.



Como pode verse, achegámonos rapidamente ao valor do número de ouro, primeiro por debaixo, despois por arriba, por debaixo…, alternativamente.
b) Formula de *Binet*:
Para calcular un número de *Fibonacci*, por exemplo o que ocupa o lugar 20, hai que calcular os 19 anteriores.
Isto non ten que ser necesariamente así, pois *Binet* deduciu esta fórmula, que para o autor é unha das máis bonitas das matemáticas.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Se por exemplo substituímos *n* por 20 obtemos F_{20} = 6 765.
Realmente podemos prescindir do 2º termo do numerador, para *n* > 3 faise moito máis pequeno que o primeiro. Por exemplo, para *n* = 6, se facemos $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtemos 8.0249 que redondeado é 8, o valor correcto.

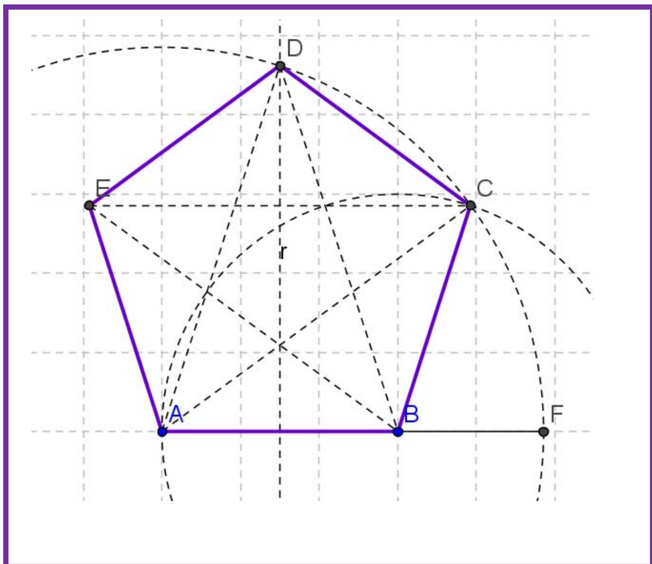
Actividades

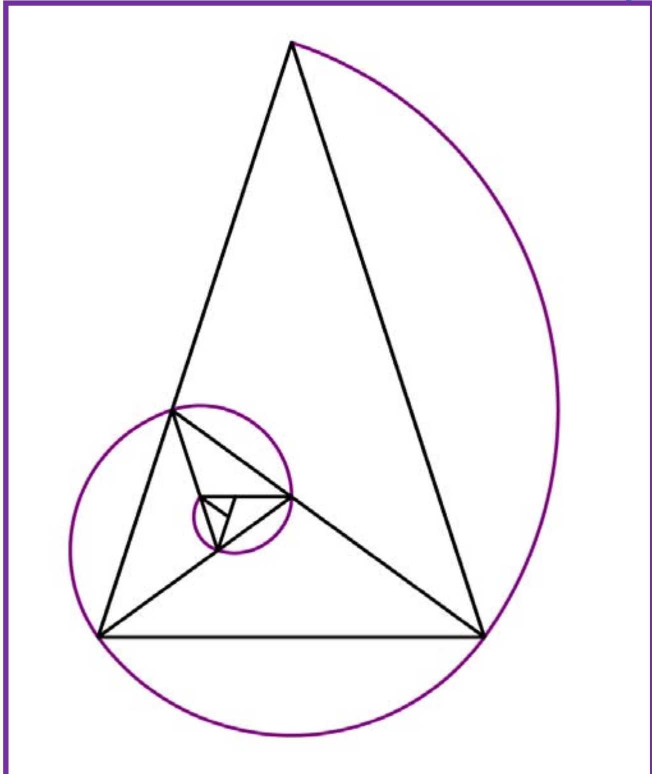
a) Calcula F_{31} e F_{30} coa fórmula de *Binet*.

b) Fai o cociente e mira se é unha boa aproximación do número de ouro.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

O pentágono regular e o número de ouro





Nun pentágono regular a razón entre unha diagonal e o lado é Φ . Como sabemos construír Φ, a construción dun pentágono regula é moi sinxela:

Se AB vai ser un lado do noso pentágono, construímos o punto F aliñado con A e B que cumpra AF/AB igual a Fi (indícase como facelo no texto).

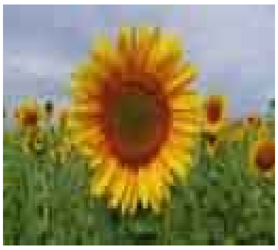
Entón, AB será o lado e AF a medida da diagonal.

Trazamos a mediatriz de AB e unha circunferencia de centro A e radio AF. Córtanse en D que é un vértice do pentágono.

Trazamos agora unha circunferencia con centro B e radio AB, córtase coa anterior en C que é outro vértice do pentágono. Só queda calcular E que é moi fácil.

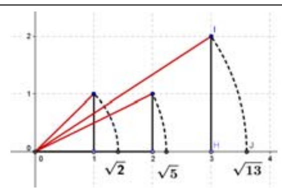
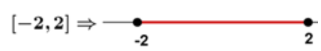
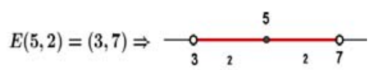
O pentágono regular coas súas diagonais coñécese como "pentagrama místico" e parece ser que volvía toliños aos pitagóricos, nel o número de ouro aparece de forma desmesurada.

Do pentagrama sacamos este triángulo, chamado triángulo áureo que permite obter máis triángulos áureos facendo a bisectriz nun dos ángulos iguais e formar esta espiral. Esta espiral é parecida á espiral áurea, á de *Fibonacci* e á espiral logarítmica que é a que aparece en: galaxias, furacáns, cunchas, xirasoles ...



Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

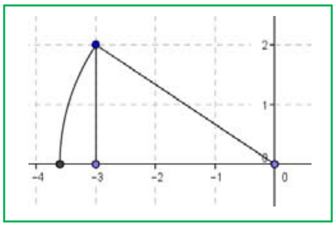
RESUMO

Conxuntos de números	**Naturais** ➔ N = {0, 1, 2, 3, …}; **Enteiros** ➔ Z = {… , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionais** ➔ $Q = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionais** ➔ I = $\Re$ − Q; $\Re$ = Q ∪ I	
Fraccións e expresión decimal	Todas as fraccións teñen expresión decimal exacta ou periódica. Toda expresión decimal exacta ou periódica pode poñerse como fracción.	$0.175 = \frac{175}{1\,000} = \frac{7}{40}$ X = 1.7252525… = 854/495
$\sqrt{2}$ **irracional**	$\sqrt{2}$ **non** pode poñerse como fracción.	
Erro Absoluto	Erro Absoluto (*EA*) = $\lvert valor\ real - valor\ aproximado \rvert$	$\sqrt{3} \approx 1.73$: *EA* ≈ 0.0021.
Cota do erro	Calculamos a cota calculando un valor maior	*EA* ≤ 0.003
Erro Relativo	$ER = \frac{EA}{\lvert Valor\ real \rvert}$	$ER = \frac{0.0021}{\sqrt{3}} \approx 0.00121$
Control do erro	En cada suma ou resta o erro absoluto é a suma dos erros absolutos. Os erros relativos súmanse ao multiplicar dous números.	
Densidade	Os números reais e os números racionais son densos. Entre cada dous números sempre podemos encontrar outro.	
Representación na recta real	Fixada unha orixe e unha unidade, existe unha bixección entre os números reais e os puntos da recta	
Intervalo aberto	Intervalo aberto no que os extremos non pertencen ao intervalo.	(2, 7) = {*x* ∈ $\Re$/ 2 < *x* < 7}. 
Intervalo pechado	Os extremos si pertencen ao intervalo	[−2, 2] = {*x* ∈ $\Re$; −2 ≤ x ≤ 2} 
Intervalos semiabertos (ou semipechados)	Intervalo cun extremo aberto e o outro pechado.	$[-8,0) = \{x \in \mathbb{R} / -8 \leq x < 0\}$ 
Entornos	Forma especial de expresar un intervalo aberto: **E(*a* , *r*) = (*a* − *r* , *a* + *r*)**	

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. A imaxe é a representación dun número irracional, cal?



2. Representa na recta numérica: –3.375; 3.666…

3. Representa na recta numérica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

4. Calcula o valor exacto de $\frac{0.\overset{\frown}{4}}{0.4}$ sen calculadora.

5. Di cales destas fraccións teñen expresión decimal exacta e cales periódica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Calcula 3 fraccións *a, b, c* tales que $\dfrac{3}{4}<a<b<c<\dfrac{19}{25}$

7. Fai no teu caderno unha táboa e di a que conxuntos pertencen os seguintes números:

2.73535…; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; $\dfrac{2}{0}$; 10^{100} ; $\dfrac{102}{34}$; –2.5 ; 0.1223334444…

8. Contesta verdadeiro ou falso, xustificando a resposta.

a) $\mathrm{Q}\cap(\Re-\mathrm{Q})=\{0\}$

b) $\mathrm{Z}\subset\mathrm{Q}$

c) a raíz cadrada dun número natural é irracional.

d) $\sqrt{7}\notin\mathrm{Q}$

e) 1/47 ten expresión decimal periódica.

9. Pon exemplos que xustifiquen:

a) a suma e a resta de números irracionais pode ser racional.

b) o produto ou división de números irracionais pode ser racional.

10. Que será a suma dun número racional con outro irracional? (Pensa na súa expresión decimal).

11. A suma de 2 números con expresión decimal periódica, pode ser un enteiro?

12. Expresa con palabras os seguintes intervalos ou semirrectas:

a. (–7, 7]

b. $\{x \in \Re / -3 \leq x < 5\}$

c. 

d. (–2, +∞)

13. Cantos metros hai de diferenza ao calcular o perímetro da Terra poñendo $\pi \approx$ 3.14 en lugar do seu valor real?, é moito ou pouco?

Basicamente tes que calcular o erro absoluto e o relativo.

*Radio aproximadamente 6 370 km.

14. Os antigos fixeron boas aproximacións de Pi, entre elas citemos a *Arquímedes* (século III a.C.) con 211 875 / 67 441 e a *Ptolomeo* (século II d.C.) con 377/120.

Cal cometeu menor erro relativo?

15. O seguinte é un **Pi**-texto: *"Son e serei a todos definible, o meu nome teño que darvos, cociente diametral sempre inmensurable son dous redondos aros"*(Manuel Golmayo).

Conta e anota o número de letras de cada palabra e verás de onde vén o seu nome. Inventa unha oración coa mesma propiedade, non é necesario que sexa tan longa (polo menos 10 palabras).

16. Calcula:

a) (3, 5] U (4, 6]

b) (3, 5] $\cap$ (4, 6]

c) (–∞ ,2] $\cap$ (–2, $+\infty$)

17. Pode expresarse como entorno unha semirrecta?

18. Expresa como entornos abertos os seguintes intervalos:

a. (0 , 7)

b. (–8 , –2)

c. (2, $+\infty$)

19. Expresa como intervalos abertos os seguintes entornos:

a) E(2, 2/3)

b) E(–7, 1/2)

20. Un numero irracional tan importante como Pi é o número "e": $e \approx 2.718281828\ldots$ que parece periódico pero non, non o é. Defínese como o número ao que se achega $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cando *n* se fai moi, pero que moi, grande. **Colle a calculadora** e dálle a *n* valores cada vez maiores, por exemplo: 10, 100, 1 000 … Anota os resultados nunha **táboa**.

21. Outra forma de definir *e* é $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

Que dirás ti que son eses números con admiración! Chámase factorial e é moi sinxelo: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, multiplícase desde o número ata chegar a 1. Por exemplo: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Non te preocupes, que a tecla ! está na calculadora.

Podes calcular *e* con 6 cifras decimais correctas?

*Nota: Fíxate que agora a converxencia é moito máis rápida, só tiveches que chegar ata *n*= ?

22. Agora traballamos con valores exactos, nin as fraccións ni os irracionais se substitúen pola

$$\frac{4\pi \cdot 5^3}{3} = \frac{500\pi}{3}$$

súa expresión decimal, exemplos: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Calcula a área e o perímetro dun rectángulo de lados $\sqrt{2}$ *e* $\sqrt{8}$ m.

23. Calcula a área e o perímetro dun cadrado cuxa diagonal mide 2 m.

24. Calcula a área e o perímetro dun hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.

25. Calcula o área e o perímetro dun círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

26. Calcula a área total e o volume dun cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.

27. Por que número temos que multiplicar os lados dun rectángulo para que a súa área se faga o triplo?

28. Canto debe valer o radio dun círculo para que a súa área sexa 1 m^2?

29. Temos unha circunferencia e un hexágono inscrito nela. Cal é a razón entre os seus perímetros? (Razón é división ou cociente).

30. Que números ao cadrado dan 7?

31. Que números reais ao cadrado dan menos de 7?

32. Que números reais ao cadrado dan máis de 7?

33. Medir o tamaño das pantallas en polgadas (“) xa non parece moi boa idea. A medida refírese á lonxitude da diagonal do rectángulo. Así unha televisión de 32” refírese a que a diagonal mide 32”. Iso non dá moita información se non sabemos a proporción entre os lados. As máis usuais nas pantallas de televisión e ordenador son 4 : 3 e 16 : 9.

Se unha polgada son 2.54 cm, cales serán as dimensións dunha pantalla de 32” con proporción 4 : 3?, e se a proporción é 16/9? Cal ten maior superficie?

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1) *Sabes a que conxuntos pertencen os distintos números.*
Indica nunha táboa ou nun diagrama (como o do texto) a que conxuntos numéricos pertencen os seguintes números: 0; -2; 3/4, 7.3; 6.252525…, $\pi-2$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{-16}$; 1.123124125…; 2.999…

2) *Sabes redondear cun número adecuado de cifras e calculas o erro relativo para comparar aproximacións. Sabes calcular unha cota para o erro absoluto e o relativo.*
   a) Os seguintes números redondeáronse, calcula unha cota do erro absoluto e do erro relativo:
   a_1) 3.14
   a_2) 45 600 con redondeo nas centenas.
   b) Se tomamos $\sqrt{10} \approx 3.16$ *e* $\frac{2}{3} \approx 0.67$ en cal das aproximacións cometemos proporcionalmente menor erro?

3) *Sabes cando unha fracción ten expresión decimal exacta ou periódica sen facer a división*.
Próbao con estas:
30/150; 30/21

4) *Sabes pasar de decimal a fracción para traballar con valores exactos:*
Calcula: 0.72525… + 0.27474…

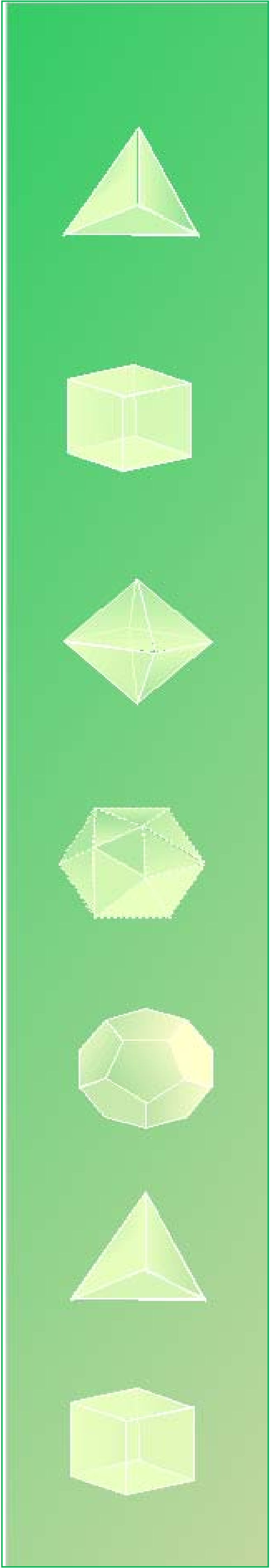
5) *Sabes representar números racionais e irracionais de forma exacta*
Representa de forma exacta $\frac{-21}{9};\frac{30}{7};\sqrt{10};\sqrt{7}$

6) *Dominas as distintas formas e notacións dun intervalo ou semirrecta (intervalo, conxunto con desigualdades e gráfica).*
Expresa en forma de intervalo (ou semirrecta), en forma de desigualdade e representa graficamente:
   a) Números reais inferiores ou iguais que -1.
   b) Números reais comprendidos entre -4 e 2, incluído o 1º pero non o 2º.

7) *Sabes pasar dun entorno a un intervalo e viceversa.*
   a) Escribe como intervalo: E(-2 , 2/3)
   b) Escribe como entorno ou intervalo (-5/2 , 7/3)

8) *Sabes resolver problemas traballando con cantidades exactas.*
Calcula a área, o volume e a diagonal principal dun ortoedro de lados $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$ *e* $3\sqrt{5}$ m.

Autor: Paco Moya
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Paco Moya e Banco de Imaxes de INTEF



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 2: Potencias e raíces

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jose Antonio Encabo de Lucas

Revisora: Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Neste capítulo imos estudar as potencias de expoñente natural e enteiro coas súas propiedades. Aprenderemos a operar coas potencias aplicando as súas propiedades.

Estudaremos as potencias de expoñente racional, que son os radicais, as súas propiedades así como as operacións que podemos realizar con eles. Deterémonos na racionalización, que é unha operación moi utilizada en matemáticas que necesitaremos para operar con radicais.

Estudaremos a notación científica, as propiedades para poder operar con este tipo de notación e as vantaxes de operar con esta notación.

Por último estudaremos os logaritmos e as súas propiedades, que facilitan as operacións pois transforman, por exemplo, os produtos en sumas. Cando non había calculadoras nin ordenadores e querían multiplicar números de máis de dez cifras, como facían?

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. POTENCIAS DE EXPOÑENTE ENTEIRO. PROPIEDADES

1.1. Potencias de expoñente natural

Recorda que:

Dado *a,* un número calquera, e *n,* un número natural, a potencia a^n é o produto do número *a* por si mesmo *n* veces.

En forma desenvolvida, a potencia de base *a* e expoñente *n* escríbese: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, *n* veces, sendo *a* calquera número e *n* un número natural.

Exemplo:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$,   5 veces.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$, 5 veces.

A base *a* pode ser positiva ou negativa. Cando a base é positiva o resultado é sempre positivo. Cando a base é negativa, se o expoñente é par o resultado é positivo, pero se é impar o resultado é negativo.

Se calculamos os exemplos de arriba teremos:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$. Resultado positivo porque multiplico un número positivo 5 veces.

$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$. Multiplico un número negativo un número impar de veces, polo que o resultado é negativo. Cada vez que multiplicamos dúas veces dous números negativos dános un positivo, como temos 5 quedaría un signo menos sen multiplicar, logo $(+) \cdot (-) = (-)$.

Recorda que:

Base positiva: resultado sempre positivo.

Base negativa e expoñente par: resultado positivo.

Base negativa e expoñente impar: resultado negativo.

Actividades resoltas

- *Calcula as seguintes potencias:*

a) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$

b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

c) $-(2)^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$

Actividades propostas

1. Calcula as seguintes potencias:

a) -3^3 b) $(2+1)^3$ c) $-(-2x)^2$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1.2. Potencias de expoñente negativo

Definición de potencia de expoñente negativo –*n* e base *a*:

$$a^{-n} = 1/a^n$$

$$a^{-n} = 1/a^n$$

Isto xustifícase xa que se desexa que se sigan verificando as propiedades das potencias:

$$a^m/a^n = a^{m-n}.$$

$$a^m/a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n} = 1/a^n.$$

Exemplo:

- 5^{-2} é o mesmo que $(1/5)^2$.

2. PROPIEDADES DAS POTENCIAS. EXEMPLOS

As propiedades das potencias son:

PROPIEDADES DAS POTENCIAS
$a^m . a^n = a^{n+m}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{n.m}$
$(a.b)^n = a^n.b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

a) o produto de potencias da mesma base é igual a outra potencia da mesma base e como expoñente a suma dos expoñentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$$

Exemplo:

- $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

b) O cociente de potencias da mesma base é igual a outra potencia que ten como base a mesma, e como expoñente a diferenza dos expoñentes.

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Exemplo:

- $5^5/5^3=(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)/(5 \cdot 5 \cdot 5)=5^{5-3}=5^2$

c) A potencia dunha potencia é igual á potencia cuxo expoñente é o produto dos expoñentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Exemplo:

- $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

d) O produto de potencias de distinta base co mesmo expoñente é igual a outra potencia cuxa base é o produto das bases e cuxo expoñente é o mesmo:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

e) O cociente de potencias de distinta base e o mesmo expoñente é igual a outra potencia cuxa base é o cociente das bases e cuxo expoñente é o mesmo.

$$a^n/b^n = (a/b)^n$$

Exemplo:

- $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8)/(7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Todas estas propiedades das potencias mencionadas para os expoñentes naturais seguen sendo válidas para outros expoñentes: negativos, fraccionarios…

Actividades resoltas

- *Calcula as seguintes operacións con potencias:*

  a) $3^5 \cdot 9^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 = 3^5 \cdot 3^4 = 3^9$

  b) $(2^3)^3 = 2^{3 \cdot 3} = 2^9$

  c) $5^3/5^0 = 5^{3-0} = 5^3$

  d) $3^4/3^{-5} = 3^{4-(-5)} = 3^{4+5} = 3^9$

Actividades propostas

2. Efectúa as seguintes operacións con potencias:

a) $(x + 1) \cdot (x + 1)^3$ b) $(x + 2)^3 : (x + 2)^4$ c) $\{(x - 1)^3\}^4$ d) $(x + 3) \cdot (x + 3)^{-3}$

3. POTENCIAS DE EXPOÑENTE RACIONAL. RADICAIS

3.1.Potencias de expoñente racional. Definición.

Defínese a potencia de expoñente fraccionario e base *a* como:

$$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$$

Exemplo:

- *Expoñentes fraccionarios:* $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$

As propiedades citadas para as potencias de expoñente enteiro son válidas para as potencias de expoñentes fraccionarios.

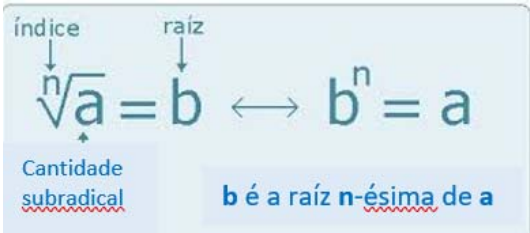
Exemplo:

- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

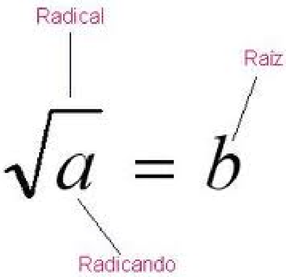
3.2. Radicais. Definición. Exemplos

Defínese **raíz *n*-ésima** dun número *a*, como o número *b* que verifica a igualdade $b^n = a$.



$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Sendo: *n* é o **índice**, *a* é a cantidade sub-radical ou **radicando** e *b* é a raíz ***n*-ésima** de *a.*



Importante: *n* sempre é positivo. Non existe a raíz –5.

A radicación de índice *n é a operación inversa da potenciación de expoñente n*.

Pola definición de raíz *n*-ésima dun número *a* verifícase que se *b* é raíz, entón:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \boldsymbol{b^n = a}$$

Observa que se pode definir: $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ xa que: $(a^{1/n})^n = a^{(1/n)\cdot n} = a^1 = a$.

Como $a^{1/n}$ satisfai a mesma propiedade que *b* deben ser considerados como o mesmo número.

Exemplos:

- $(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = (2)^{12/4} = 2^3 = 8$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

3.3.Propiedades dos radicais. Exemplos

As propiedades das potencias enunciadas anteriormente para o caso de expoñentes fraccionarios tamén se poden aplicar ás raíces:

a) Se multiplicamos o índice dunha raíz n por un número p e, á vez, elevamos o radicando a ese número p o valor da raíz non varía.

Verifícase $\forall p \neq 0$ que:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}.$$

Demostración:

$$\sqrt[n\cdot p]{a^p} = a^{\frac{p}{p\cdot n}} = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Exemplo:

- $\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{25}$. Verifícase xa que segundo acabamos de ver: $\sqrt[3]{5}=\sqrt[3\cdot 2]{5^2}=\sqrt[6]{25}$

b) Para multiplicar raíces do mesmo índice, multiplícanse os radicandos e calcúlase a raíz de índice común:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}.$$

Demostración:

Segundo as propiedades das potencias de expoñentes enteiros verifícase que:

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=(a\cdot b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

c) Para dividir raíces do mesmo índice, divídense os radicandos e calcúlase a raíz do índice común. Supoñemos que $b\neq 0$ para que teña sentido o cociente.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Demostración:

Se escribimos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Exemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}}=\sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}}=\sqrt[3]{a^{7-4}}=\sqrt[3]{a^3}=a$$

d) Para elevar un radical a unha potencia basta con elevar o radicando a esta potencia:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

Demostración:

Esta propiedade podémola demostrar como segue:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n.m]{a}$$

$m>0$ e $m\in Z$

e) A raíz dunha raíz é igual á raíz cuxo índice é o produto dos índices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Demostración:

Verifícase que:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

Exemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^{15}\cdot y^{30}}}=\sqrt[15]{x^{15}\cdot y^{30}}=(x^{15}\cdot y^{30})^{\frac{1}{15}}=(x^{15})^{\frac{1}{15}}\cdot(y^{30})^{\frac{1}{15}}=x\cdot y^2$

Actividades resoltas

Autor: José Antonio Encabo de Lucas

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- *Reduce a índice común* (6) *os seguintes radicais:* $\sqrt[3]{536}$; $\sqrt[2]{70}$

$$\sqrt[3]{536} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 67} = \sqrt[6]{(2^3 \cdot 67)^2};$$
$$\sqrt{70} = \sqrt[2]{2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^3 \cdot 7^3}.$$

- *Saca factores fóra da raíz:*

$$\sqrt[2]{108} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[2]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[2]{3} = 6 \cdot \sqrt[2]{3}$$

- *Escribe os seguintes radicais como unha soa raíz:*

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \frac{\sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{18}$$

Actividades propostas

3. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9})^2$ b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2$

4. Calcula:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}}} : \sqrt{\sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}}$ b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$

5. Realiza as seguintes operacións con radicais:

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}$ b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. OPERACIÓNS CON RADICAIS: RACIONALIZACIÓN

4.1. Operacións. Definición. Exemplos

Suma e resta de radicais

RECORDA:

Para sumar e restar radicais estes deben ser idénticos:

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5\neq\sqrt{13}$$

Para sumar estes radicais hai que sumar as súas expresións aproximadas.

Porén a expresión:

$$7\sqrt{5}+11\sqrt{5}-\sqrt{5}=17\sqrt{5}$$

si se pode sumar e restar xa que os seus radicais son idénticos

PARA PODER SUMAR OU RESTAR RADICAIS CÓMPRE QUE TEÑAN O MESMO ÍNDICE E O MESMO RADICANDO.

SÓ CANDO SUCEDE ISTO PODEMOS SUMAR OU RESTAR OS COEFICIENTES OU PARTE NUMÉRICA DEIXANDO O MESMO RADICAL.

Exemplo:

- $\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{1\,250}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2\cdot 5^4}$.

Polas propiedades dos radicais podemos sacar factores do radical deixando que todos os radicais sexan idénticos:

$$\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 5^2\cdot 5^2}=3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}+5\cdot 5\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+25\sqrt{2}=(3+2+25)\sqrt{2}=30\sqrt{2}$$

Produto de radicais

Para multiplicar radicais debemos convertelos en radicais de igual índice e multiplicar os radicandos:

1.- Calculamos o m.c.m. dos índices.

2.- Dividimos o m.c.m entre cada índice e multiplicámolo polo expoñente do radicando e simplificamos.

Exemplo:

- $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[15]{8^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{(2^3)^3\cdot 7^5}=\sqrt[15]{2^9\cdot 7^5}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

División de radicais

Para dividir radicais debemos conseguir que teñan igual índice, como no caso anterior, e despois dividir os radicais.

Exemplo:

- $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 4^2}{24}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot(2^2)^2}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{\frac{3^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 3}} = \sqrt[6]{3^2\cdot 2^1} = \sqrt[6]{18}$

Raíz dunha raíz

É a raíz cuxo índice é o produto dos índices (segundo se demostrou na propiedade e), e despois simplificamos extraendo factores fóra do radical se se pode.

Exemplo:

- $\sqrt{\sqrt[3]{x^7\cdot y^5}} = \sqrt[6]{x^7\cdot y^5} = \sqrt[6]{x^6\cdot x^1\cdot y^5} = x\cdot\sqrt[6]{x\cdot y^5}$

RECORDA:

Para extraer factores do radical débese cumprir que o expoñente do radicando sexa maior que o índice da raíz.

2 opcións:

- ✓ Divídese o expoñente do radicando entre o índice da raíz, o cociente indica o número de factores que extraio e o resto os que quedan dentro.
- ✓ Descompóñense os factores do radicando elevándoos ao mesmo índice da raíz, cada expoñente que coincida co índice, sairá o factor e os que sobren quedan dentro.

Exemplo:

- *Extrae factores do radical:*

$$\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt[2]{\frac{2^2 7\cdot x^5}{3\cdot 5^2 y^3}} = \sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^2\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y}} =$$

1. $\sqrt{20} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
2. $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27\cdot 2} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$
3. $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$

Os factores que poderiamos extraer serían o 2, *x*, *y* e o 5, da seguinte maneira:

Dividimos o expoñente do *x*, 5, entre 2, xa que o índice da raíz é 2, e temos de cociente 2 e de resto 1, polo que sairán dous *x* e queda 1 dentro.

De igual forma para o *y*, dividimos 3 entre 2 e obtemos 1 de cociente e un de resto, polo que sae 1y e queda outro dentro.

Vexamos: $\sqrt{\frac{2^2\cdot 7\cdot x^{2.}\cdot x^2\cdot x}{3\cdot 5^2\cdot y^2\cdot y^1}} = \frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7x}{3y}}$

Actividades propostas

6. Escribe baixo un só radical e simplifica: $\sqrt[2]{2\cdot\sqrt[2]{3\cdot\sqrt[2]{4\cdot\sqrt[2]{5\cdot\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}}}$

7. Calcula e simplifica: $\dfrac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3}\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}$

8. Realiza a seguinte operación: $\sqrt{x^3}+\sqrt{16x^7}+\sqrt{x}$

9. Calcula e simplifica: $\sqrt[2]{\dfrac{3}{x}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{8}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{9}{5}}$

4.2. Racionalización. Exemplos

Racionalizar unha fracción alxébrica consiste en atopar outra equivalente que non teña radicais no denominador.

Para iso, hai que multiplicar numerador e denominador pola expresión adecuada.

Cando na fracción só hai monomios, multiplícase e divídese a fracción por un mesmo número para conseguir completar no denominador unha potencia do mesmo expoñente que o índice da raíz.

Exemplo:

- $\sqrt[4]{\dfrac{6}{x^3}}$.

Multiplicamos e dividimos por $\sqrt[4]{x}$ para obter no denominador unha cuarta potencia e quitar o radical.

$$\sqrt[4]{\frac{6}{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{x^3}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{\sqrt[4]{x^4}}=\frac{\sqrt[4]{6x}}{x}$$

Cando na fracción aparecen no denominador binomios con raíces cadradas, multiplícase e divídese por un factor que proporcione unha diferenza de cadrados, este factor é o factor conxugado do denominador.

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, o seu conxugado é: $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Outro exemplo: $(\sqrt{a}+b)$ o seu conxugado é: $(\sqrt{a}-b)$

Exemplo:

- $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. *Multiplicamos polo conxugado do denominador que neste caso é:* $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{3\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2}$$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

10. Racionaliza a expresión: $\dfrac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}$

11. Racionaliza: $\dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

12. Racionaliza: $\dfrac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$

5. NOTACIÓN CIENTÍFICA

5.1. Definición. Exemplos

A notación científica utilízase para escribir números moi grandes ou moi pequenos.

A vantaxe que ten sobre a notación decimal é que as cifras se nos dan contadas, co que a orde de magnitude do número é evidente.

Un número posto en notación científica consta de:

- ✓ Unha parte enteira formada por unha soa cifra que non é o cero (a das unidades).
- ✓ O resto das cifras significativas postas como parte decimal.
- ✓ Unha potencia de base 10 que dá a orde de magnitude do número.

***N=a,bcd...·10**^{n}*

sendo: a súa parte enteira (só unha cifra).

b c d… a súa parte decimal .

10^n a potencia enteira de base 10

Se *n* é positivo, o número *N* é "grande".

E se *n é* negativo, entón *N* é "pequeno".

Exemplos:

- $2.48 \cdot 10^{14}$ (= 248 000 000 000 000): Número grande.
- $7.561 \cdot 10^{-18}$ (= 0.000000000000000007561): Número pequeno.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

5.2. Operacións con notación científica

Para operar con números dados en notación científica procédese de forma natural, tendo en conta que cada número está formado por dous factores: a expresión decimal e a potencia de base 10.

O produto e o cociente son inmediatos, mentres que a suma e a resta esixen preparar os sumandos de modo que teñan a mesma potencia de base 10 e así poder sacar factor común.

Exemplos:

a) $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = (5.24 \cdot 6.3) \cdot 10^{6+8} = 33.012 \cdot 10^{14} = 3.3012 \cdot 10^{15}$

b) $\frac{5.24 \cdot 10^6}{6.3 \cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3) \cdot 10^{6-(-8)} = 0.8317 \cdot 10^{14} = 8.317 \cdot 10^{13}$

RECORDA:

- ✓ Para **multiplicar** números en notación científica, multiplícanse as partes decimais e súmanse os expoñentes da potencia de base 10.
- ✓ Para **dividir** números en notación científica, divídense as partes decimais e réstanse os expoñentes da potencia de base 10.
- ✓ Se fai falla multiplícase ou divídese o número resultante por unha potencia de 10 para deixar unha soa cifra na parte enteira.

c) $5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} – 7.5 \cdot 10^{10} = 5.83 \cdot 10^9 + 6\,932 \cdot 10^9 –75 \cdot 10^9 = (5.83 + 6\,932 – 75) \cdot 10^9 =$

$= 6\,862.83 \cdot 10^9 = 6.86283 \cdot 10^{12}$

RECORDA:

- ✓ Para **sumar ou restar** números en notación científica, hai que poñer os números coa mesma potencia de base 10, multiplicando ou dividindo por potencias de base 10.
- ✓ Sácase factor común a potencia de base 10 e despois súmanse ou réstanse os números decimais quedando un número decimal multiplicado pola potencia de 10.
- ✓ Por último se fai falla multiplícase ou divídese o número resultante por unha potencia de 10 para deixar na parte enteira unha soa cifra.

Actividades propostas

13. Calcula:

a) $(7.83 \cdot 10^{-5}) \cdot (1.84 \cdot 10^{13})$ b) $(5.2 \cdot 10^{-4}) : (3.2 \cdot 10^{-6})$

14. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $\frac{3.10^{-5} + 7.10^{-4}}{10^6 - 5.10^5}$ b) $\frac{7.35 \cdot 10^4}{5.10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$

15. Realiza as seguintes operacións e efectúa o resultado en notación científica:

a) $(4.3 \cdot 10^3 – 7.2 \cdot 10^5)^2$ b) $(7.8 \cdot 10^{-7})^3$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

6. LOGARITMOS

6.1. Definición

O **logaritmo** dun número ***m***, positivo, en **base *a***, positiva e distinta de un, é o expoñente ao que hai que elevar a base para obter este número.

$$\text{Se } a > 0,\ \log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$$

Os logaritmos máis utilizados son os **logaritmos decimais** ou logaritmos de base 10 e os **logaritmos neperianos** (chamados así en honor de ***Neper***) ou logaritmos en base *e* (*e* é un número irracional cuxas primeiras cifras son: *e* = 2.71828182…). Ambos os dous teñen unha notación especial:

$$\log_{10} m = \log m \qquad \log_e m = \ln m$$

Exemplos:

- $\log_3 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = 3^2$
- $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = 2^4$
- $\log_{1\,000} = 3 \Leftrightarrow 1\,000 = 10^3$
- $\ln e = 1 \Leftrightarrow e = e^1$

Como **consecuencias inmediatas** da definición dedúcese que:

- ✓ O logaritmo de 1 é cero (en calquera base).

Demostración:

Como $a^0 = 1$, por definición de logaritmo, temos que $\log_a 1 = 0$.

Exemplos:

- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_2 1 = 0$.
- $\log_3 1 = 0$.

- ✓ O logaritmo da base é 1.

Demostración:

Como $a^1 = a$, por definición de logaritmo, temos que $\log_a a = 1$.

Exemplos:

- $\log_a a = 1$.
- $\log_3 3 = 1$.
- $\log_5 5 = 1$.
- $\log_3 3^5 = 5$.

> ✓ O logaritmo de 1 é cero (en calquera base).
> ✓ O logaritmo da base é 1.
> ✓ Só teñen logaritmos os números positivos.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- ✓ Só teñen logaritmos os números positivos, pero pode haber logaritmos negativos. Un logaritmo pode ser un número natural, enteiro, fraccionario e mesmo un número irracional.

Ao ser a base un número positivo, a potencia nunca nos pode dar un número negativo nin cero.

- $log_2\,(-4)$ non existe.
- $log_2\,0$ non existe.
- $log\,100 = 2 \Leftrightarrow 100 = 10^2$.
- $log\,0.1 = -1 \Leftrightarrow 0.1 = 10^{-1}$.
- $log\sqrt{10} = 1/2 \Leftrightarrow \sqrt{10} = 10^{1/2}$.
- $log\,2 = 0.301030\ldots$

Actividades resoltas

- $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 \Rightarrow 2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7$
- $\log_3(\sqrt{243}) = x \Leftrightarrow 3^x = (243)^{1/2} \Rightarrow 3^x = (3^5)^{1/2} \Rightarrow x = 5/2$

Actividades propostas

15. Copia a táboa adxunta no teu caderno e emparella cada logaritmo coa súa potencia:

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

16. Calcula utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$ b) $\log_5 25$ c) $\log_2 2^{41}$ d) $\log_5 5^{30}$

17. Calcula utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$ b) $\log_{10} 100$ c) $\log_{1/2}(1/4)$ d) $\log_{10} 0.0001$

18. Calcula x utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$ b) $\log_{1/2} x = 4$ c) $\log_x 25 = 2$

19. Calcula utilizando a definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 1/4 - \log_3 9 - \log_2(\sqrt{2})$

b) $\log_2 1/32 + \log_3 1/27 - \log_2 1$

6.2. Propiedades dos logaritmos

1. O logaritmo dun **produto** é igual á suma dos logaritmos dos seus factores:

$$\boxed{log_a (x \cdot y) = log_a x + log_a y}$$

Demostración:

Chamamos $A = log_a x$ e $B = log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = log_a x \Leftrightarrow a^A = x.$$

$$B = log_a y \Leftrightarrow a^B = y.$$

Multiplicamos: $x \cdot y = a^A \cdot a^B = a^{A+B} \Leftrightarrow log_a x \cdot y = A + B = log_a x + log_a y.$

Exemplo:

- $\log_a (2 \cdot 7) = \log_a 2 + \log_a 7$.

2. O logaritmo dun **cociente** é igual ao logaritmo do dividendo menos o logaritmo do divisor:

$$\boxed{log_a (x/y) = log_a x - log_a y}$$

Demostración:

Chamamos $A = log_a x$ e $B = log_a y$. Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = log_a x \Leftrightarrow a^A = x.$$

$$B = log_a y \Leftrightarrow a^B = y.$$

Dividimos: $x / y = a^A / a^B = a^{A-B} \Leftrightarrow log_a (x / y) = A - B = log_a x - log_a y.$

Exemplo:

- $log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$.

3. O logaritmo dunha **potencia** é igual ao expoñente multiplicado polo logaritmo da base da potencia:

$$\boxed{log_a x^y = y \,.\, log_a x}$$

Demostración:

Por definición de logaritmos sabemos que:

$$A = log_a x \Leftrightarrow a^A = x \Leftrightarrow (a^A)^y = x^y = a^{A \cdot y} \Leftrightarrow A \cdot y = log_a x^y = y \cdot log_a x.$$

Exemplo:

- $log_a 2^5 = 5 \cdot log_a 2$.

4. O logaritmo dunha **raíz** é igual ao logaritmo do radicando dividido polo índice da raíz:

$$\boxed{log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

Demostración:

Tendo en conta que unha raíz é unha potencia de expoñente fraccionario.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- $log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

5. **Cambio de base:** O logaritmo en base *a* dun número *x* é igual ao cociente de dividir o logaritmo en base *b* de *x* polo logaritmo en base *b* de *a*:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Esta expresión coñécese co nome de ***"fórmula do cambio de base"***. As calculadoras só permiten o cálculo de logaritmos decimais ou neperianos, polo que, cando queremos utilizar a calculadora para calcular logaritmos noutras bases, precisamos facer uso desta fórmula.

Exemplo:

- $log_2 11 = \frac{log\,11}{log\,2} = \frac{1.04139269}{0.30103} = 3.45943162.$

Actividades resoltas

- *Desenvolve as expresións que se indican:*

$$\log_5\left[\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4}\right] = \log_5\left[a^3 \cdot b^2\right] - \log_5 c^4 = \log_5 a^3 + \log_5 b^2 - \log_5 c^4 = 3\log_5 a + 2\log_5 b - 4\log_5 c$$

$$\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right)^3 = 3\log\left(\frac{x^2}{y^5 \cdot z}\right) = 3\left[\log x^2 - \log(y^5 \cdot z)\right] = 3(2\log x - 5\log y - \log z) = 6\log x - 15\log y - 3\log z$$

- *Escribe cun único logaritmo:*

$$3log_2a + \frac{1}{2}\log_2 x - \frac{2}{3}\log_2 b + 2\log_2 c - 4 = \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2 - \log_2 \sqrt[3]{b^2} - \log_2 2^4 =$$

$$= (\log_2 a^3 + \log_2 \sqrt{x} + \log_2 c^2) - (\log_2 \sqrt[3]{b^2} + \log_2 2^4) = \log_2(a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2) - \log_2(\sqrt[3]{b^2} . 2^4) = \log_2\left(\frac{a^3 \cdot \sqrt{x} \cdot c^2}{\sqrt[3]{b^2} \cdot 2^4}\right)$$

- *Expresa os logaritmos dos seguintes números en función de log2=*0.301030*:*

a) 4 $\Rightarrow$ log4 = log 2^2 = 2 · log2 = 2 · 0.301030 = 0.602060

b) 1 024 $\Rightarrow$ log 1 024 = log 2^{10} = 10 · log2 = 10 · 0.301030 = 3.01030

Actividades propostas

20. Desenvolve as expresións que se indican:

a) ln $\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log\left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 . d}\right)$

21. Expresa os logaritmos dos números seguintes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59 049

22. Simplifica a seguinte expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

POTENCIAS DE 11

As potencias de 11

As potencias enteiras de 11 non deixan de chamar a nosa atención e poden ser incluídas entre os produtos curiosos:

11 x 11 = 121

11 x 11 x 11 = 1 331

11 x 11 x 11 x 11 = 14 641

Disposición non menos interesante presentan os números 9, 99, 999, etc. cando son elevados ao cadrado:

$9^2 = 81$

$99^2 = 9\,801$

$999^2 = 998\,001$

$9\,999^2 = 99\,980\,001$

Paga a pena observar que o número de noves da esquerda é igual ao número de ceros da dereita, que se sitúan entre os díxitos 8 e 1.

Utiliza a calculadora ou o ordenador para calcular 26^{378}

Dá erro! non sae. É preciso usar logaritmos! Aplicamos logaritmos decimais á expresión:

$$x = 26^{378} \Leftrightarrow \log(x) = 378*\log(26)$$

Iso si saben calculalo a calculadora ou o ordenador. Dá:

$$\log(x) = 534.86 \Leftrightarrow x = 10^{534.86} = 10^{534} \cdot 10^{0.86} = 10^{534} \cdot 7.24.$$

Solución:

$$\mathbf{26^{378} = 7.24 \cdot 10^{534}.}$$

É un número tan grande que nin o ordenador nin a calculadora saben calculalo directamente e é necesario usar logaritmos. Repite o proceso con 50^{200} e comproba que che sae $6.3 \cdot 10^{339}$.

Autor: José Antonio Encabo de Lucas

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

NÚMEROS GRANDES

Os primeiros números que se achegan á nosa definición do que é infinito podémolos tomar da mesma natureza contando elementos moi pequenos que existen en abundancia como son as **pingas do mar** (1×10^{25} pingas), os **grans de area en todas as praias do mundo** (5.1×10^{23} grans) ou o **número de estrelas de todo o Universo coñecido** (3×10^{23} estrelas). Podemos mesmo tomar o número de partículas elementais do universo (1×10^{80}) se queremos obter un número máis grande.

Queremos calcular un número máis grande ***"Googol***", cuñado por un neno de 9 anos en 1939, que posúe 100 ceros e foi creado co obxectivo de darnos unha aproximación cara ao que significa o infinito. Pero hoxe en día coñécense cantidades (moito) máis grandes que o Gúgol.

Temos por exemplo, os **números primos da forma de Mersenne**, que puideron ser encontrados grazas á invención das computadoras. En 1952, o número primo de Mersenne máis grande era $(2 \cdot 10^{17}) - 1$, un número primo con 39 díxitos, e ese mesmo ano, as computadoras probaron que o número $(2 \cdot 10^{521}) - 1$ é tamén primo, e que este número posúe 157 díxitos, sendo este moito máis grande que un ***Googol***.

10^100

Googol (10^{100})

10, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000, 000,
000, 000, 000, 000

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Potencias de expoñente natural e enteiro	$a^{-n} = 1/a^n$	$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$ $(-\frac{1}{2})^{-2} = (-2)^2 = 4$
Propiedades das potencias	$a^n \cdot a^m = a^{m+n}$ $a^n : a^m = a^{n-m}$ $(a^n)^m = a^{n.m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $a^n/b^n = (a/b)^n$	$(-3)^3\cdot(-3)^3 = (-3)^{3+3} = (-3)^6$ $5^3 : 5^2 = 5^{2-1} = 5^1$ $(-3^5)^2 = (-3)^{5.2} = (-3)^{10}$ $(-2)^3\cdot(-5)^3 = ((-2)\cdot(-5))^3$ $3^4/2^4 = (3/2)^4$
Potencias de expoñente racional. Radicais	$a^{r/s} = \sqrt[s]{a^r}$	$(16)^{3/4} = \sqrt[4]{16^3}$
Propiedades dos radicais	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\cdot p]{a^p}$ $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$	$\sqrt[3\cdot 2]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3\cdot 2} = \sqrt[3]{6}$ $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\frac{a^7}{a^4}} = \sqrt[3]{a^{7-4}} = \sqrt[3]{a^3} = a$ $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3}$ $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3\cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$
Racionalización de radicais	Suprímense as raíces do denominador. Multiplícase numerador e denominador pola expresión adecuada (conxugado do denominador, radical do numerador, etc.)	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{5}$ $\frac{1}{5-\sqrt{3}} = \frac{5+\sqrt{3}}{(5-\sqrt{3}).(5+\sqrt{3})} =$ $= \frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{22}$
Notación científica	Un número posto en notación científica consta dunha parte enteira formada por unha soa cifra que non é o cero (a das unidades). O resto das cifras significativas postas como parte decimal. Unha potencia de base 10 que dá a orde de magnitude do número: **$N = a.bcd... \cdot 10^n$**	$5.83 \cdot 10^9 + 6.932 \cdot 10^{12} - 7.5 \cdot 10^{10} =$ $5.83 \cdot 10^9 + 6\,932 \cdot 10^9 - 75.10^9 =$ $(5.83 + 6\,932 - 75) \cdot 10^9 = 6\,862.83 \cdot 10^9 =$ $6.86283 \cdot 10^{12}$ $(5.24 \cdot 10^6) \cdot (6.3 \cdot 10^8) = 33.012 \cdot 10^{14} =$ $3.32012 \cdot 10^{15}$ $\frac{5.24\cdot 10^6}{6.3\cdot 10^{-8}} = (5.24 : 6.3)\cdot 10^{6-(-8)}$ $= 0.8317 \cdot 10^{14}$ $= 8.317.10^{13}$
Logaritmos	*Se $a > 0$, $\log_a m = z \Leftrightarrow m = a^z$* *$\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$* *$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$* *$\log_a x^y = y.\log_a x$*	$\log_a (75/25) = \log_a 75 - \log_a 25$ $\log_a 2^5 = 5 \cdot \log_a 2$ $\log_a \sqrt[3]{27} = \left(\frac{\log_a 27}{3}\right)$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Potencias

1. Expresa en forma exponencial**:**

a) $\frac{1}{64}$ **b)** $\frac{t}{t^5}$ **c)** $(\frac{1}{z+1})^2$ **d)** $\frac{27^{-2}}{81^{-5}}$ **e)** $\frac{x^{-2}.y^{-7}}{x^8.y^{-4}}$

2. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}}$ b) $125^{\frac{1}{3}}$ c) $625^{\frac{5}{6}}$ d) $(64^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{6}}$ e) $(8^{\frac{-4}{3}})^{\frac{2}{5}}$

Radicais

3. Expresar en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}}$ b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $[(x^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$

4. Expresar en forma exponencial:

a) $(\sqrt[3]{x^2})^5$ b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}}$ c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}}$ d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}}$ e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}}$

5. Expresa como potencia única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a.\sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ e) $a.\sqrt{\frac{1}{a}}$ f) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}$ g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3} \cdot \frac{a^3}{\sqrt{a}}$

Propiedades dos radicais

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64}$ b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a.b^3.c^3}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \cdot x^7}}$ e) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}})^8$ f) $\frac{\sqrt[4]{x^3 \cdot y^3 \cdot \sqrt[3]{x^4 \cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5.y^4}}$ g) $\sqrt[5]{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[10]{x^2.\sqrt{x^3}}}$

7. Extraer factores do radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}$ b) $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ c) $(\sqrt{\sqrt{2}})^{10}$ d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}$ d) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}$ e) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}$ f) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}$

8. Introducir factores no radical:

a) $2.\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $3.\sqrt{\frac{2}{3}}$ c) $2.\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ d) $2.\sqrt[4]{\frac{5}{12}}$ e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{12}$ f) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Operacións con radicais

9. Efectúa:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$ c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}}$ d) $\sqrt[4]{\frac{5}{12}}:\sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}:\sqrt{\frac{2}{3}}$ f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

10. Efectúa:

a) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ b) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ c) $\sqrt{320}+\sqrt{80}-\sqrt{500}$ d) $\sqrt{\frac{7}{64}}+\sqrt{\frac{7}{4}}$

e) $5\sqrt{96}-\sqrt[5]{\frac{3}{32}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{135}{8}}-\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$ g) $\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{24}$

Racionalizar

11. Racionaliza os denominadores:

a) $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ c) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ f) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

12. Racionaliza e simplifica:

a) $\frac{11}{2\cdot\sqrt{5}+3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}+3}$ c) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}$ e) $\frac{4\cdot\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{21}}{2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ f) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

13. Efectúa e simplifica:

a) $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}})$ (3+2·$\sqrt{2}$ b) $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}-3\sqrt{5}$ c) $(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}):(1+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

Logaritmos

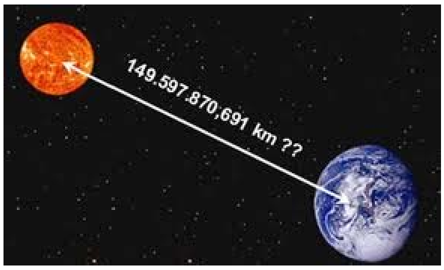
14. Desenvolve os seguintes logaritmos:

a) $\ln\left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2\cdot z^{-4}}\right)$; b) $\log_3\sqrt[4]{\frac{(x\cdot y)^5}{z^{1/2}\cdot e^2}}$

15. Simplifica a seguinte expresión:

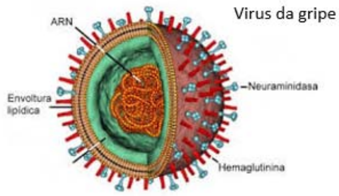
$$\log_2 5-3\log_2 a+\frac{7}{3}\log_2 9$$

Notación científica

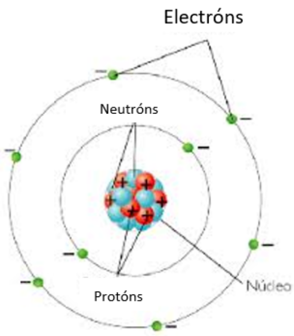


16. A masa do Sol é 330 000 veces a da Terra, aproximadamente, e esta é $5.98 \cdot 10^{21}$t. Expresa en notación científica a masa do Sol, en quilogramos.

17. O ser vivo máis pequeno é un virus que pesa arredor de 10^{-18} g e o máis grande é a balea azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. Cantos virus serían precisos para conseguir o peso da balea?



18. Os cinco países máis contaminantes do mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Xapón e Alemaña) emitiron 12 billóns de toneladas de CO_2 no ano 1995, cantidade que representa o 53.5 % das emisións de todo o mundo. Que cantidade de CO_2 se emitiu no ano 1995 en todo o mundo?



19. Expresa en notación científica:

a) Recadación das quinielas nunha xornada da liga de fútbol: 1 628 000 €.

b) Toneladas de CO_2 que se emitiron á atmosfera en 1995 en Estados Unidos 5 228.5 miles de millóns.

c) Radio do átomo de osíxeno: 0.000000000066 m.

20. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $(3 \cdot 10^{-7}) \cdot (8 \cdot 10^{18})$ b) $(4 \cdot 10^{-12}) \cdot (5 \cdot 10^{-3})$ c) $(5 \cdot 10^{12}) : (2 \cdot 10^{-3})$ d)$3.1 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^{10}$ e)$(4 \cdot 10^{5})^{-2}$

21. Expresa en notación científica e calcula:

a) $(75\,800)^4 : (12\,000)^4$ b) $\dfrac{0.000541 \cdot 10\,318\,000}{1\,520\,000 \cdot 0.00302}$ c) $(0.0073)^2 \cdot (0.0003)^2$ d) $\dfrac{2\,700\,000 - 13\,000\,000}{0.00003 - 0.00015}$

22. Efectúa e expresa o resultado en notación científica:

a) $\dfrac{3 \cdot 10^{-5} + 7 \cdot 10^{-4}}{10^{6} - 5 \cdot 10^{5}}$ b)$\dfrac{7.35 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-3}} + 3.2 \cdot 10^7$ c)$(4.3 \cdot 10^3 - 7.2 \cdot 10^5)$

23. Que resultado é correcto da seguinte operación expresada en notación científica:

$$(5.24 \cdot 10^6) \cdot (8.32 \cdot 10^5):$$

a) $4.35968 \cdot 10^{12}$ b) $43.5968 \cdot 10^{13}$ c) $4.35968 \cdot 10^{11}$ d) $4.35968 \cdot 10^{13}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACION

1. O número $8^{-4/3}$ vale:

a) un dezaseisavo b) Dous c) Un cuarto d) Un medio.

2. Expresa como potencia de base 2 cada un dos números que van entre paréntese e efectúa despois a operación: $(16^{1/4})\cdot(\sqrt[6]{4})\cdot(\frac{1}{8})$. O resultado é:

a) $2^{-1/3}$ b) $2^{-5/4}$ c) $2^{-5/3}$ d) 2^{-5}

3. O número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ é igual a:

a) $6^{1/4}$ b) $2^{1/3}$ c) $2^{5/6}\cdot 6^{1/9}$ d) 2

4. Cal é o resultado da seguinte expresión se a expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\frac{1}{2.\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{2}{2\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{2}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

5. Simplificando e extraendo factores a seguinte expresión ten un valor: $\sqrt[2]{\sqrt{625\cdot a^6.b^7.c^6}}$

a) $5^3.a.b.c^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot b^2.c}$ b) $5\cdot a^2.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$ c) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^3.b^2.c^3}$ d) $5.a.b.c\cdot\sqrt[4]{a^2.b^3.c^2}$

6. Cal dos seguintes valores é igual a $a^{3/2}$?

a) $a^{1/2}\cdot a^2$ b) $a^{5/2}\cdot a^{-1}$ c) $(a^2)^2$ d) $a^3\cdot a^{-2}$

7. Cal é o resultado desta operación con radicais?: $\sqrt{63}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{28}+\frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2\cdot\sqrt{7}$ b) $\frac{11}{8}\cdot\sqrt{7}$ c) $-\frac{2}{3}.\sqrt{7}$ d) $\frac{-2}{5}.\sqrt{7}$

8. Unha expresión cun único radical de: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{(x+2)^3}\cdot\sqrt{(x+1)}$ está dada por:

a) $\sqrt[6]{x^2.(x+2)\cdot(x+1)}$ b) $\sqrt[8]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$ c) $\sqrt[12]{x^8.(x+2)^9.(x+1)^6}$ d) $\sqrt[12]{x^2.(x+2)^3.(x+1)}$

9. Para racionalizar a expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hai que multiplicar numerador e denominador por:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}$ c) $2+\sqrt{5}$ d) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

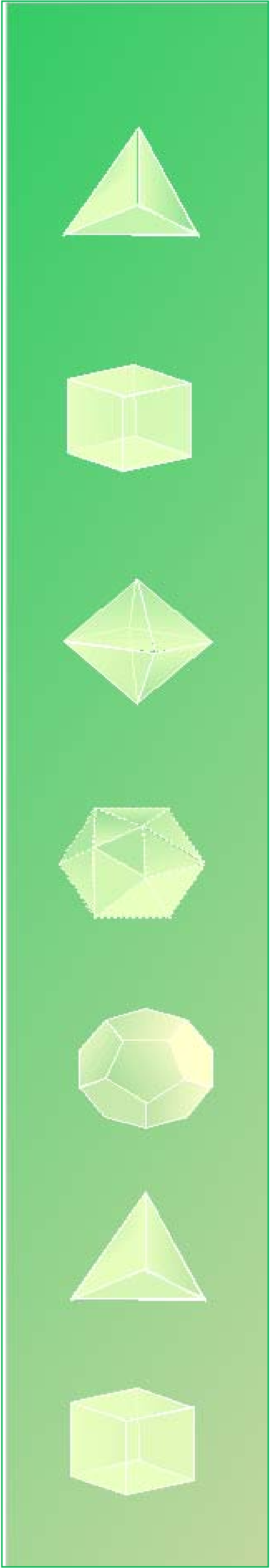
10. Cal é o resultado en notación científica da seguinte operación?: $5.83\cdot 10^9+6.932\cdot 10^{12}-7.5\cdot 10^{10}$

a) $6.86283\cdot 10^{12}$ b) $6.86283\cdot 10^{13}$ c) $6.8623\cdot 10^{11}$ d) $6.8628\cdot 10^{12}$

11. Cal é o resultado da seguinte operación expresado en notación científica?: $\frac{5.24\cdot 10^{10}}{6.3\cdot 10^{-7}}$

a) $0.8317\cdot 10^{17}$ b) $8.317\cdot 10^{16}$ c) $8.317\cdot 10^{15}$ d) $83.17\cdot 10^{16}$

Autor: José Antonio Encabo de Lucas
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



Matemáticas orientadas ás ensinannzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 3: Expresións alxébricas. Polinomios

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez

Revisor: Javier Rodrigo

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e commons.wikimedia

Índice

Resumo

En multitude de situacións o ser humano vese obrigado a cuantificar, a manexar cantidades, datos, números, xa sexa para explicar algo ocorrido no pasado, algún feito que estea sucedendo na actualidade, ou para predicir ou prognosticar o comportamento de determinado fenómeno no futuro. Malia á dificultade que poidan entrañar esas xustificacións, algunhas ferramentas son de carácter sinxelo, como as operacións usuais de suma, resta, produto e división. En ocasións hai que manexar datos aínda non coñecidos, polo que aparecen indeterminadas ou variables. A mestura de números reais e as catro operacións básicas lévanos ás expresións alxébricas e, dentro delas, destacan unhas expresións concretas polo seu abundante uso e simplicidade de exposición, os polinomios.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. INTRODUCIÓN. EXPRESIÓNS ALXÉBRICAS

1.1. Introdución

Non fai falla imaxinar situacións rebuscadas para que, á hora de realizar un razoamento, nos topemos con algunha das catro operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación ou división.

Exemplos:

- Tres amigos realizaron unha viaxe de vacacións. Á volta, sumaron os gastos efectuados e estes ascenden a 414 euros. O gasto realizado por cada un foi de $\frac{414}{3}$ euros, é dicir, 138 euros.
- Se imos comprar mandarinas a unha froitería na que o prezo dun quilogramo é de 1.25 euros, resulta habitual que, segundos imos introducindo a froita nunha bolsa, vaiamos tenteando o importe final. Para iso podemos colocar varias veces a bolsa sobre unha balanza e, tras observar o peso, realizamos a operación

$$1.25 \cdot x$$

onde x é a cantidade de quilogramos que nos indica a balanza. Despois de cada pesada, o resultado desa multiplicación reflicte o importe das mandarinas que, nese momento, contén a bolsa.

- Supoñamos que temos un contrato cunha compañía de telefonía móbil polo que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecemento de chamada. Con esa tarifa, unha chamada de 3 minutos custaranos:

$$(0.05 \cdot 3) + 0.12 = 0.15 + 0.12 = 0.27 \text{ euros}$$

Pero cal é o prezo dunha chamada calquera? Como descoñecemos a súa duración, atopámonos cunha cantidade non determinada, ou indeterminada, polo que en calquera resposta que deamos á pregunta anterior se apreciará a ausencia dese dato concreto. Podemos dicir que o custe dunha chamada calquera é

$$(0.05 \cdot x) + 0.12 = 0.05 \cdot x + 0.12 \text{ euros}$$

onde x sinala a súa duración, en minutos.

Actividades propostas

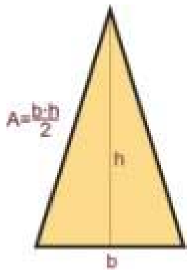
1. A finais de cada mes a empresa de telefonía móbil proporciónanos a factura mensual. Nela aparece moita información, en particular, o número total de chamadas realizadas (N) así como a cantidade total de minutos de conversa (M). Cos datos do anterior exemplo, xustifica que o importe das chamadas efectuadas durante ese mes é:

$$(0.05 \cdot M) + (0.12 \cdot N) = 0.05 \cdot M + 0.12 \cdot N \text{ euros}$$

Exemplo:

- É ben coñecida a *fórmula* da área dun triángulo de base *b* e altura asociada *h*:

$$\frac{b\cdot h}{2}$$



En todos estes exemplos xurdiron **expresións alxébricas**.

1.2. Expresións alxébricas

Chamamos **expresión alxébrica** a calquera expresión matemática que se constrúa con números reais e as operacións matemáticas básicas: suma, resta, multiplicación e/ou división. Nunha expresión alxébrica pode haber datos non concretados; segundo o contexto, recibirán o nome de ***variable***, ***indeterminada***, ***parámetro***, entre outros.

Se nunha expresión alxébrica non hai *variables*, esta expresión non é máis que un número real:

Exemplo:

$$\frac{3\cdot(-7)}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}+1=\frac{-21}{\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}}+1=\frac{-21}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}+1=\frac{-21}{\frac{2}{15}}+1=\frac{-21\cdot 15}{2}+1=\frac{-315}{2}+1=\frac{-315}{2}+\frac{2}{2}=\frac{-313}{2}$$

Ao fixar un valor concreto para cada *indeterminada* dunha expresión alxébrica aparece un número real: o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.

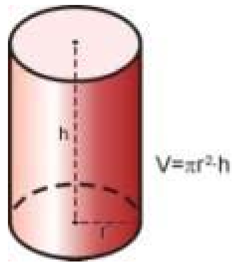
Exemplo:

- O volume dun cilindro vén dado pola expresión alxébrica

$$\pi\cdot r^2\cdot h$$

  na que *r* é o radio do círculo base e *h* é a súa altura. Deste modo, o volume dun cilindro cuxa base ten un radio de 10 cm e de altura 15 cm é igual a:

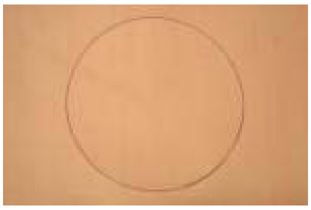
$$\pi\cdot 10^2\cdot 15=1\,500\cdot\pi \quad cm^3$$



- A expresión alxébrica que representa o produto dos cadrados de dous números calquera x e y simbolízase por $x^2\cdot y^2$.
- Se na expresión $7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$ particularizamos as tres variables cos valores $x=4$, $y=-1$, $z=\frac{1}{2}$ xorde o número real $7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$

Nunha expresión alxébrica pode non ter sentido outorgar algún valor a certa indeterminada. En efecto, no último exemplo non é posible facer $z=0$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



Actividades propostas

2. Recorda a expresión alxébrica que nos proporciona a lonxitude dunha circunferencia.

3. Escribe en linguaxe alxébrica os seguintes enunciados, referidos a dous números calquera x e y:

a) a metade do oposto da súa suma.

b) a suma dos seus cubos.

c) o cubo da súa suma.

d) o inverso da súa suma.

e) a suma dos seus inversos.

4. Unha tenda de roupa anuncia nos seus escaparates que está de rebaixas e que todos os seus artigos están rebaixados un 20 % sobre o prezo impreso en cada etiqueta. Escribe o que pagaremos por unha peza en función do que aparece na súa etiqueta.

5. O anterior comercio, nos últimos días do período de rebaixas, desexa desfacerse das súas existencias e para iso decide aumentar o desconto. Mantén o 20 % para a compra dunha única peza e, a partir da segunda, o desconto total aumenta un 5 % por cada nova peza de roupa, ata un máximo de 10 artigos. Analiza canto pagaremos ao realizar unha compra en función da suma total das cantidades que figuran nas etiquetas e do número de artigos que se adquiran.

6. Calcula o valor numérico das seguintes expresións alxébricas para o valor ou valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ e $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

7. Indica, en cada caso, o valor numérico da seguinte expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1, y = 2, z = 1$

b) $x = 2, y = 0, z = 5$

c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. POLINOMIOS. SUMA E PRODUTO

2.1. Monomios. Polinomios

Unhas expresións alxébricas de grande utilidade son os **polinomios**, cuxa versión máis simple e, á vez, xeradora deles, son os **monomios**.

Un **monomio** vén dado polo produto de números reais e indeterminadas. Chamaremos **coeficiente** dun monomio ao número real que multiplica á indeterminada ou indeterminadas; a indeterminada, ou indeterminadas, conforman a **parte literal** do monomio.

Exemplos:

- A expresión que nos proporciona o dobre dunha cantidade, $2 \cdot x$, é un monomio cunha única variable, x, e coeficiente 2.
- O volume dun cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, é un monomio con dúas indeterminadas, r e h, e coeficiente π. A súa parte literal é $r^2 \cdot h$.
- Outros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- A expresión $7xy^2 + 3xy - 2x$ está formada por tres termos, tres monomios. Cada un ten un coeficiente e unha parte literal:

  No primeiro, $7xy^2$, o coeficiente é 7 e a parte literal xy^2

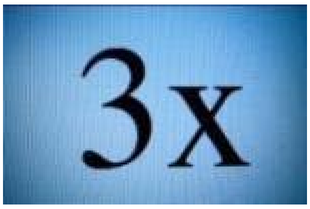
  O segundo, $3xy$, ten por coeficiente 3 e parte literal xy.

  E no terceiro, $-2x$, o coeficiente é -2 e a parte literal x

Atendendo ao expoñente da variable, ou variables, adxudicaremos un **grao** a cada monomio consonte o seguinte criterio:

- Cando haxa unha única indeterminada, o grao do monomio será o expoñente da súa indeterminada.
- Se aparecen varias indeterminadas, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.

Exemplos:



- $2 \cdot x$ é un monomio de grao 1 na variable x.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ é un monomio de grao 3 nas indeterminadas r e h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ é un monomio de grao 5 en x e y.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ é un monomio de grao 4 en x, y e z.

Un número real pode ser considerado como un monomio de grao 0.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Un **polinomio** é unha expresión construída a partir da suma de monomios. O **grao dun polinomio** virá dado polo maior grao dos seus monomios.

Exemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ é un polinomio de grao 3 na variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ é un polinomio de grao 4 nas indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 - 7 + 3\cdot y^2$ é un polinomio de grao 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ é un polinomio de grao 1 en x, y e z.

Tanto nesta sección como na seguinte limitarémonos, basicamente, a considerar polinomios cunha única variable. É habitual escribir os diferentes monomios dun polinomio de forma que os seus graos vaian en descenso para, con este criterio, apreciar no seu primeiro monomio cal é o grao do polinomio.

O aspecto xenérico dun polinomio na variable x é

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde os coeficientes a_k son números reais.

Dicimos que un polinomio é **mónico** cando o coeficiente do seu termo de maior grao é igual a 1.

Exemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ é un polinomio de grao 4 na variable x.
- $4y^3 + 3y - 7$ é un polinomio de grao 3 na indeterminada y.
- $z^2 - 3z + 12$ é un polinomio de grao 2 en z. Ademais, é un polinomio mónico.
- $3x + 9$ é un polinomio de grao 1 en x.

Como ocorre con calquera expresión alxebraica, se fixamos, ou escollemos, un valor concreto para a variable dun polinomio aparece un número real: o **valor numérico** do polinomio para ese valor determinado da variable. Se chamamos p a un polinomio, á avaliación de p en, por exemplo, o número -3 denotámola por $p(-3)$, e lemos: *"p de menos tres"* ou *"p en menos tres"*. Con este criterio, se p é un polinomio cuxa indeterminada é a variable x, podemos referirnos a el como p ou $p(x)$ indistintamente.

Desta forma apreciamos que un polinomio pode ser entendido como unha maneira concreta de asignar a cada número real outro número real.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplos:

- Se avaliamos o polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ atopámonos co número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1\,875 + 7 = -1\,868$$

- O valor do polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ é

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Ao particularizar o polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta o número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Como un polinomio é unha suma de monomios, a suma de dous polinomios é outro polinomio. Á hora de sumar dous polinomios procederemos a sumar os monomios de igual parte literal.

Exemplos:

- A suma dos polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ e $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ é o polinomio

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$
$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$
- $3xy + 5xy + 2x = 8xy + 2x$

No seguinte exemplo sumaremos dous polinomios dispoñéndoos, adecuadamente, un sobre o outro.

Exemplo:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\
+ & -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\
\hline
 & -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Propiedades da suma de polinomios

Propiedade conmutativa. Se p e q son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de sumalos:

$$p+q\equiv q+p$$

Exemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propiedade asociativa. Sinala como se poden sumar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Exemplo:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$=(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Tamén:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Actividades propostas

8. Realiza as seguintes sumas de polinomios:

- $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$
- $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: o resultado de sumalo con calquera outro sempre é este último. Trátase do polinomio dado polo número 0, ou *polinomio cero*.

Exemplo:

$$0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$$

Elemento oposto. Cada polinomio ten asociado outro, ao que chamaremos o seu *polinomio oposto*, tal que a suma de ambos os dous é igual ao polinomio cero. Acadamos o polinomio oposto dun dado, simplemente, cambiando o signo de cada monomio.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- O polinomio oposto de $p \equiv -2x^4 + x^3 + 2x - 7$ é $2x^4 - x^3 - 2x + 7$, ao que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que a súa suma é o polinomio cero:

$$(-2x^4 + x^3 + 2x - 7) + (2x^4 - x^3 - 2x + 7) = (-2x^4 + 2x^4) + (x^3 - x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Actividades propostas

9. Escribe o polinomio oposto de cada un dos seguintes polinomios:

a) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 4x - 1$

b) $7x$

c) $-x^4 + 3x^2$

10. Considera os polinomios $p \equiv -x^3 - 5x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como o polinomio suma $s \equiv p + q$. Calcula os valores que adopta cada un deles para $x = -2$, é dicir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ e $s(-2)$. Estuda se existe algunha relación entre eses tres valores.

11. Obtén o valor do polinomio $p \equiv -x^3 - 5x + 2$ en $x = 3$. Que valor toma o polinomio oposto de p en $x = 3$?

2.3. Produto de polinomios

Outra operación que podemos realizar con polinomios é a multiplicación.

O resultado do produto de polinomios sempre será outro polinomio. Aínda que nun polinomio temos unha indeterminada, ou variable, como esta toma valores nos números reais, á hora de multiplicar polinomios utilizaremos as propiedades da suma e do produto dos números reais, en particular a propiedade distributiva do produto respecto da suma; así todo queda en función do produto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidade:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemplos:

- $(-5)x^2 \cdot 2x^4 = (-5) \cdot 2 \cdot x^{2+4} = -10x^6$
- $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$
- $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$
- $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$
- $(3x - 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$ $= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$
- $(x - 6) \cdot (x^3 - 2x) = (x - 6) \cdot x^3 + (x - 6) \cdot (-2x) = (x^4 - 6x^3) + (-2x^2 + 12x) = x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 12x$

Tamén podemos materializar o produto de polinomios tal e como multiplicamos números enteiros:

Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
 & -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
 & -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}
$$

Recordemos que o polinomio *oposto* doutro se obtén simplemente cambiando o signo de cada monomio. Esta acción correspóndese con multiplicar polo número "-1" o polinomio orixinal. Desta forma o polinomio oposto de p é

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

Neste momento aparece de maneira natural a **operación diferenza**, ou **resta**, de polinomios. Definímola coa axuda do polinomio oposto dun dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

Exemplo:

$$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Actividades propostas

12. Efectúa os seguintes produtos de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x) \cdot (-3x^2)$

b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

c) $(2x^3 + x^2 - x) \cdot (3x^2 - x)$

d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

13. Realiza as seguintes diferenzas de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

14. Multiplica cada un dos seguintes polinomios por un número de tal forma que xurdan polinomios mónicos:

a) $4x^3 - 3x^2 + 2x$

b) $-2x^4 + x - 1$

c) $-x^2 + x - 7$

d)

15. Calcula e simplifica os seguintes produtos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^3)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Propiedades do produto de polinomios

Propiedade conmutativa. Se *p* e *q* son dous polinomios, non importa a orde na que os coloquemos á hora de multiplicalos:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Exemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2) = 2x\cdot(-x^3+x^2) - 7\cdot(-x^3+x^2) = -2x^4+2x^3+7x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7) = -x^3\cdot(2x-7) + x^2\cdot(2x-7) = -2x^4+7x^3+2x^3-7x^2 = -2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedade asociativa. Sinala como se poden multiplicar tres ou máis polinomios. Basta facelo agrupándoos dous a dous:

$$(p \cdot q) \cdot r \equiv p \cdot (q \cdot r)$$

Exemplo:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x) = (-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x) =$$
$$= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

Tamén:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right) = (4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x) =$$
$$= 12x^6 - 12x^4 - 4x^5 + 4x^3 - 6x^4 + 6x^2 + 2x^3 - 2x = 12x^6 - 4x^5 - 18x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

16. Realiza os seguintes produtos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$

b) $(2x - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

Elemento neutro. Hai un polinomio cunha propiedade particular: ao multiplicalo por calquera outro sempre nos dá este último. Trátase do polinomio dado polo número 1 ou *polinomio unidade*.

Exemplo:

$$1 \cdot (-5x^3 - 2x + 3) = (-5x^3 - 2x + 3) \cdot 1 = -5x^3 - 2x + 3$$

Propiedade distributiva da multiplicación respecto da suma. Cando nunha multiplicación de polinomios un dos factores vén dado como a suma de dous polinomios como, por exemplo,

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right)$$

temos dúas opcións para coñecer o resultado:

a) realizar a suma e, despois, multiplicar:

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot \left(x^3 - 6x + 7\right) =$$
$$= 3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuír, aplicar, a multiplicación a cada un dos sumandos e, despois, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot \left((-2x + 7) + (x^3 - 4x)\right) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$= (-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtemos o mesmo resultado.

En xeral, a **propiedade distributiva** da multiplicación respecto da suma dinos que

$$p \cdot (q + r) \equiv (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

Convén comentar que a anterior propiedade distributiva lida en sentido contrario, de dereita a esquerda, é o que comunmente se denomina **sacar factor común**.

Exemplo:

$$6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$$

Actividades propostas

17. De cada un dos seguintes polinomios extrae algún factor que sexa común aos seus monomios:

a) $-15x^3 - 20x^2 + 10x$ b) $24x^4 - 30x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

3.1. Introdución ás fraccións polinómicas

Ata este momento estudamos varias operacións con polinomios: suma, resta e produto. En calquera dos casos o resultado sempre é outro polinomio. Cando establecemos unha **fracción polinómica** como, por exemplo:

$$\frac{3x^3 - x}{2x^2 + x - 3}$$

o que temos é unha expresión alxébrica, unha **fracción alxébrica**, que, en xeral, non é un polinomio. Si aparece un polinomio no caso, moi particular, no que o denominador é un número real diferente de cero, isto é, un polinomio de grao 0.

É sinxelo constatar que a expresión anterior non é un polinomio: calquera polinomio pode ser avaliado en calquera número real. Porén, esa expresión non pode ser avaliada para $x=1$, xa que nos quedaría o número 0 no denominador.

Poderiamos crer que a seguinte fracción polinómica si é un polinomio:

$$\frac{-2x^3+5x^2-3x}{x} = \frac{-2x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -2x^2+5x-3$$

A expresión da dereita si é un polinomio, pois trátase dunha suma de monomios, pero a da esquerda non o é xa que non pode ser avaliada en $x = 0$. Porén, esa fracción alxébrica e o polinomio, cando son avaliados en calquera número diferente de cero, ofrecen o mesmo valor. Son **expresións equivalentes** alí onde ambas as dúas teñen sentido.

3.2. División de polinomios

Aínda que, como vimos no apartado anterior, unha fracción polinómica, en xeral, non é un polinomio, imos estudar a división de polinomios pois é unha cuestión importante e útil.

Analicemos detidamente a división de dous números enteiros positivos. Cando dividimos dous números, *D* (dividendo) entre *d* (divisor, distinto de 0), xorden outros dous, o cociente (*c*) e o resto (*r*). Estes encóntranse ligados pola chamada *proba da división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Ademais, dicimos que a división é exacta cando $r=0$.

O coñecido algoritmo da división persegue encontrar un número enteiro, o cociente *c*, tal que o resto *r* sexa un número menor que o divisor *d*, e maior ou igual que cero. Fixémonos en que, sen esta esixencia para o resto *r*, podemos escoller arbitrariamente un valor para o cociente *c* o cal nos subministra o seu valor asociado como resto *r*. En efecto, se temos como dividendo *D* = 673 e como divisor *d* = 12, "se queremos" que o cociente sexa *c* = 48 o seu resto asociado é

$$r = D - d \cdot c = 673 - 12 \cdot 48 = 673 - 576 = 97$$

e a conexión entre estes catro números é: $673 = 12 \cdot 48 + 97$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Esta última "lectura" da división de números enteiros vai guiarnos á hora de dividir dous polinomios.

Dados dous polinomios $p(x)$ e $q(x)$, a división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, proporcionaranos outros dous polinomios, o polinomio cociente $c(x)$ e o polinomio resto $r(x)$. Tamén aquí pesará unha esixencia sobre o polinomio resto: o seu grao deberá ser menor que o grao do polinomio divisor. A relación entre os catro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

Tamén escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

aínda que, en tal caso, seremos conscientes das cautelas sinaladas no apartado anterior canto ás equivalencias entre polinomios e outras expresións alxébricas.

Ao igual que ocorre co algoritmo da división enteira, o algoritmo da división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada unha das cales aparecen uns polinomios cociente e resto "provisionais" de forma que o grao deses polinomios resto vai descendendo ata que topamos cun cuxo grao é inferior ao grao do polinomio divisor, o que indica que concluímos. Vexamos este procedemento cun exemplo concreto.

Exemplo:

- Imos dividir o polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$. Como o polinomio divisor, $q(x)$, é de grao 2, debemos atopar dous polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, e un polinomio resto $r(x)$ de grao 1 ou 0, tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

ou, como igualdade entre expresións alxébricas,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Á vista dos polinomios $p(x)$ e $q(x)$, e do xa dito sobre $r(x)$, é evidente que o grao do polinomio cociente, $c(x)$, será igual a 2. Imos obtelo monomio a monomio.

- Primeira aproximación aos polinomios cociente e resto:

Para poder lograr a igualdade $p \equiv q \cdot c + r$, como o grao de $r(x)$ será 1 ou 0, o termo de maior grao de $p(x)$, $6x^4$, xurdirá do produto $q(x) \cdot c(x)$. Así obtemos a primeira aproximación de $c(x)$, o seu monomio de maior grao:

$$c_1(x) = 3x^2$$

e, de maneira automática, tamén un primeiro resto $r_1(x)$:

$$r_1(x) = p(x) - q(x) \cdot c_1(x) = (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 3x^2 =$$
$$= (6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2) - (6x^4 - 3x^3 + 9x^2) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$$

Como este polinomio $r_1(x)$ é de grao 3, maior que 2, o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- Segunda aproximación aos polinomios cociente e resto:

Se particularizamos a igualdade entre expresións alxébricas $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ ao que temos ata agora resulta

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta segunda etapa consiste en dividir o polinomio $r_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2$, xurdido como resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, o divisor inicial. É dicir, repetimos o feito antes pero considerando un novo polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

O novo obxectivo é acadar a igualdade $r_1 \equiv q \cdot c_2 + r$. Ao igual que antes, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. Como o termo de maior grao de $r_1(x)$, $8x^3$, sae do produto $q(x) \cdot c_2(x)$, é necesario que o polinomio cociente conteña o monomio

$$c_2(x) = 4x$$

Isto lévanos a un segundo resto $r_2(x)$:

$$r_2(x) = r_1(x) - q(x) \cdot c_2(x) = (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot 4x =$$
$$= (8x^3 - 8x^2 + 3x - 2) - (8x^3 - 4x^2 + 12x) = -4x^2 - 9x - 2$$

Como este polinomio $r_2(x)$ é de grao 2, igual que o grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto non é o definitivo; debemos continuar.

- Terceira aproximación aos polinomios cociente e resto:

O realizado na etapa segunda permítenos avanzar na adecuada descomposición da expresión alxébrica que nos ocupa:

$$\frac{6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + \frac{8x^3 - 8x^2 + 3x - 2}{2x^2 - x + 3} = 3x^2 + 4x + \frac{-4x^2 - 9x - 2}{2x^2 - x + 3}$$

Esta terceira etapa consiste en dividir o polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, o resto da etapa anterior, entre o polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, o divisor inicial. De novo repetimos o algoritmo pero con outro polinomio dividendo: o polinomio resto do paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Como en cada paso, o grao de $r(x)$ debería ser 1 ou 0. O termo de maior grao de $r_2(x)$, $-4x^2$, xorde do produto $q(x) \cdot c_3(x)$,polo que

$$c_3(x) = -2$$

e o terceiro resto $r_3(x)$ é

$$r_3(x) = r_2(x) - q(x) \cdot c_3(x) = (-4x^2 - 9x - 2) - (2x^2 - x + 3) \cdot (-2) =$$
$$= (-4x^2 - 9x - 2) - (-4x^2 + 2x - 6) = -11x + 4$$

Como este polinomio $r_3(x)$ é de grao 1, menor que 2, grao do polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto si é o definitivo. Concluímos:

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$\frac{6x^4+5x^3+x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+\frac{8x^3-8x^2+3x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x+\frac{-4x^2-9x-2}{2x^2-x+3}=3x^2+4x-2+\frac{-11x+4}{2x^2-x+3}$$

Se o expresamos mediante polinomios:

$$6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-11x+4)$$

Conclusión: ao dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$ obtemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ e como polinomio resto $r(x)=-11x+4$.

Seguidamente imos axilizar a división de polinomios.

Actividades propostas

18. Comproba que os cálculos que tes a continuación reflicten o que se fixo no exemplo anterior para dividir o polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre o polinomio $q(x)=2x^2-x+3$.

- Primeira etapa:

$$\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \quad\underline{|\ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\quad & \quad 3x^2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 &
\end{array}$$

- Primeira e segunda etapas:

$$\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \quad\underline{|\ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\quad & \quad 3x^2+4x \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\
-4x^2-9x-2 &
\end{array}$$

- As tres etapas:

$$\begin{array}{rl}
6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \quad\underline{|\ 2x^2-x+3} \\
\underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\quad & \quad 3x^2+4x-2 \\
8x^3-8x^2+3x-2 & \\
\underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\
-4x^2-9x-2 & \\
\underline{4x^2-2x+6} & \\
-11x+4 &
\end{array}$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

19. Divide os seguintes polinomios:

a) $2x^3 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 - 2x + 4$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^2 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$

20. Encontra dous polinomios tales que ao dividilos apareza $q(x) = x^2 + x - 3$ como polinomio cociente e $r(x) = -3x^2 + 1$ como resto.

3.3. Operacións con fraccións alxébricas

Posto que tanto os polinomios como as fraccións alxébricas obtidas a partir de dous polinomios son, en potencia, números reais, operaremos con tales expresións seguindo as propiedades dos números reais.

- **Suma ou resta.** Para sumar ou restar dúas fraccións polinómicas deberemos conseguir que teñan igual denominador. Unha maneira segura de logralo, aínda que pode non ser a máis adecuada, é esta:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot q_2} + \frac{p_2 \cdot q_1}{q_2 \cdot q_1} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Produto.** Basta multiplicar os numeradores e denominadores entre si:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \equiv \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- **División.** Segue a coñecida regra da división de fraccións numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} \equiv \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Actividades propostas

21. Efectúa os seguintes cálculos:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1} + \dfrac{3}{x}$

b) $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+1}$

c) $\dfrac{-x}{x^2+3x} \cdot \dfrac{1}{x-1}$

d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x} : \dfrac{x-2}{x+3}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

22. Realiza as seguintes operacións alterando, en cada apartado, unicamente un dos denominadores, e o seu respectivo numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}+\dfrac{3x-2}{x^2}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{4}{x+3}$

23. Comproba as seguintes identidades simplificando a expresión do lado esquerdo de cada igualdade:

a) $\dfrac{8a^4b^2}{2a^2b}=4a^2b$

b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$

d) $\dfrac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b}=\dfrac{3ab+2a-2}{b+8a}$

24. Calcula os seguintes cocientes:

a) $(3x^3-9x^2-6x):3x$

b) $(7a^3-70a^2-21):7$

c) $(25x^4-10x^2):5x^2$

d) $(3x^2y^3-8xy^2):xy^2$

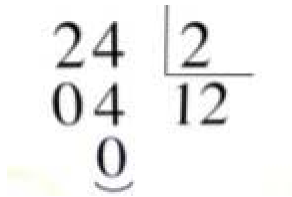
25. Simplifica as seguintes fraccións alxébricas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DUN POLINOMIO

4.1. Factorización dun polinomio



Tal e como ocorre coa división enteira, a división de polinomios tamén pode ser **exacta**, é dicir, o resto pode ser o polinomio cero.

Exemplo:

$$
\begin{array}{rl}
3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8 & \underline{\big|\ -3x^2+3x-2\ } \\
\underline{-3x^5+3x^4-2x^3} \qquad\qquad\qquad & \quad -x^3+2x-4 \\
-6x^3+18x^2-16x+8 & \\
\underline{6x^3-6x^2+4x} \qquad & \\
12x^2-12x+8 & \\
\underline{-12x^2+12x-8} & \\
0 &
\end{array}
$$

Neste caso escribimos

$$\frac{3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8}{-3x^2+3x-2}=-x^3+2x-4$$

e diremos que $q(x)=-3x^2+3x-2$ divide a $p(x)=3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8$. Se optamos por unha igualdade polinómica:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^3+2x-4)$$

Observamos que obter como resto o polinomio 0 nos permite expresar o polinomio dividendo, $p(x)$, como produto doutros dous polinomios, os polinomios divisor e cociente, $q(x)\cdot c(x)$. Acadamos unha **factorización** do polinomio $p(x)$, ou unha **descomposición en factores** de $p(x)$.

En xeral, un polinomio concreto pode ser factorizado, ou descomposto, por medio de diferentes grupos de factores. Se continuamos co polinomio $p(x)$ anterior, unha maneira de obter unha descomposición alternativa consiste en, á súa vez, acadar unha factorización dalgún dos polinomios $q(x)$ o $c(x)$. Constatemos que o polinomio $-x^2+2x-2$ divide a $c(x)=-x^3+2x-4$:

$$
\begin{array}{rl}
-x^3 \qquad +2x-4 & \underline{\big|\ -x^2+2x-2\ } \\
\underline{x^3-2x^2+2x} \qquad & \quad x+2 \\
-2x^2+4x-4 & \\
\underline{2x^2-4x+4} & \\
0 &
\end{array}
$$

En efecto, a división é exacta e iso lévanos á seguinte igualdade:

$$-x^3+2x-4=(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Se a trasladamos á descomposición que tiñamos de $p(x)$:

$$3x^5-3x^4-4x^3+18x^2-16x+8=(-3x^2+3x-2)\cdot(-x^2+2x-2)\cdot(x+2)$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

26. Completa, cando sexa posible, as seguintes factorizacións:

a) $-2x^3+2x=-2x\cdot(\qquad)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(\qquad)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+1)\cdot(\qquad)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(\qquad)$

27. Determina un polinomio de grao 4 que admita unha descomposición factorial na que participe o polinomio $6x^3-x^2+3x-1$.

Dicimos que un polinomio é **reducible** se admite unha factorización mediante polinomios de grao inferior ao seu. En caso contrario o polinomio será **irredutible**.

É claro que os polinomios de grao 1 non poden ser descompostos como produto doutros dous polinomios de menor grao. Son polinomios irredutibles. No seguinte apartado constataremos que hai polinomios de grao 2 que tamén son irredutibles.

Das diferentes factorizacións que pode admitir un polinomio a que máis información nos proporciona é aquela na que todos os factores que interveñen son polinomios irredutibles, xa que *non é mellorable*. Convén advertir que, en xeral, non é doado acadar ese tipo de descomposicións. Seguidamente imos afondar nesta cuestión.

4.2. Raíces dun polinomio

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α é unha **raíz**, ou **un cero**, do polinomio p, se ao avaliar p en $x=\alpha$ obtemos o número 0, isto é, se

$$p(\alpha)=0$$

Exemplo:

Consideremos o polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- O número 2 é unha raíz de $s(x)$, posto que

$$s(2)=2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-8\cdot 2-8=2\cdot 8+2\cdot 4-16-8=16+8-16-8=0$$

- Outra raíz de $s(x)$ é o número -1:

$$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

- En cambio, o número 1 non é unha raíz de $s(x)$:

$$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

- Tampouco é raíz de $s(x)$ o número 0:

$$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

28. Estuda se os seguintes números son ou non raíz dos polinomios indicados:

a) $x=3$ de x^3-3x^2+1

b) $x=-2$ de x^3+3x^2+3x+2

c) $x=1$ de x^3-3x^2+x+1

d) $x=0$ de x^3-3x^2+1

e) $x=-1$ de x^3-3x^2-x+3

No seguinte exercicio imos recoller algunhas conexións entre as raíces dun polinomio e as operacións de suma e produto de polinomios.

Actividades propostas

29. Supoñamos que temos dous polinomios, $p_1(x)$ e $p_2(x)$, e un número real α.

a) Se α é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Se α é unha raíz de $p_1(x)$, tamén é raíz do polinomio produto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) Hai algunha relación entre as raíces do polinomio $p_1(x)$ e as do polinomio $4\cdot p_1(x)$?

Que un número real sexa raíz dun polinomio está fortemente conectado coa factorización do polinomio:

Se un número real concreto α é unha raíz do polinomio $p(x)$, entón o polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$. Dito doutro modo, o polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da seguinte forma:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para certo polinomio $c(x)$, o cal pode ser coñecido ao dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Imos demostrar a anterior afirmación. Se dividimos $p(x)$ entre $x-\alpha$, obteremos

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+r(x)$$

Como o polinomio divisor, $x-\alpha$, é de grao 1, e o polinomio resto debe ser de inferior grao, deducimos que o resto anterior é un número real β. Escribamos $r(x)\equiv\beta$:

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$$

O polinomio da esquerda, $p(x)$, é idéntico ao da dereita, $(x-\alpha)\cdot c(x)+\beta$. Por esa razón, ao avalialos en certo número real obteremos o mesmo valor. Procedamos a particularizalos para $x=\alpha$. Ao ser α raíz de $p(x)$, $p(\alpha)=0$ .Isto lévanos a

$$0=p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)+\beta=0\cdot c(\alpha)+\beta=0+\beta=\beta$$

e, así, o resto é 0, e

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

É natural que nos preguntemos se é certo o recíproco do resultado anterior. A resposta é afirmativa:

Se un polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

para certo polinomio $c(x)$ e certo número real α, entón o número α é unha raíz do polinomio $p(x)$, isto é, $p(\alpha)=0$.

A súa demostración é sinxela. Basta que avaliemos p en $x=\alpha$:

$$p(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot c(\alpha)=0\cdot c(\alpha)=0$$

Se fundimos estes dous últimos resultados nun só atopámonos perante o denominado *teorema do factor*:

Teorema do factor. Un número real concreto α é raíz dun polinomio $p(x)$ se, e só se, o polinomio $x-\alpha$ divide a $p(x)$, é dicir, se e só se o polinomio $p(x)$ admite unha descomposición factorial da forma

$$p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$$

Exemplo:

Volvamos co polinomio $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.

- Sabemos que o número 2 é unha raíz de $s(x)$. Ratifiquemos que $x-2$ divide a $s(x)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +2x^2 & -8x & -8 & x-2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2+6x+4 \\ \cline{1-2}
 & 6x^2 & -8x & -8 & \\
 & -6x^2 & +12x & & \\ \cline{2-3}
 & & 4x & -8 & \\
 & & -4x & +8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

  Podemos descompoñer $s(x)$ da seguinte forma:

$$2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)$$

- Vimos que outra raíz de $s(x)$ é o número -1. Se observamos a precedente factorización de $s(x)$, é evidente que este número -1 non é raíz do factor $x-2$, polo que necesariamente debe selo doutro factor $c(x)=2x^2+6x+4$:

$$c(-1)=2\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)+4=2\cdot(+1)-6+4=0$$

Ao ter constatado que -1 é raíz do polinomio $c(x)$, deducimos que $x-(-1)=x+1$ nos vai axudar a descompoñer $c(x)$:

$$\begin{array}{rl} 2x^2+6x+4 & \underline{|\ \ x+1\ \ } \\ \underline{-2x^2-2x\quad\ } & \ \ 2x+4 \\ 4x+4 & \\ \underline{-4x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

Logo:

$$2x^2+6x+4=(x+1)\cdot(2x+4)$$

- Se reunimos o feito nos apartados precedentes deste exemplo:

$$s(x)=2x^3+2x^2-8x-8=(x-2)\cdot(2x^2+6x+4)=(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+4)=$$
$$=(x-2)\cdot(x+1)\cdot 2\cdot(x+2)=2\cdot(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

Descompúxose $s(x)$ como produto de tres polinomios irredutibles de grao 1. Á vista deles coñecemos todas as raíces de $s(x)$, os números 2, -1 e -2.

Os resultados teóricos que establecemos condúcennos a estoutro:

Todo polinomio de grao n ten como moito n raíces reais, algunha das cales pode aparecer repetida entre eses non máis de n números reais.

Hai polinomios que non admiten raíces, é dicir, que non se anulan nunca:

Exemplos:

- O polinomio $t(x)=x^2+1$ non ten raíces xa que ao avalialo en calquera número real α sempre nos dá un valor positivo e, polo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+1\ >\ 0$$

Ademais, este polinomio de grao dous, $t(x)=x^2+1$, é un polinomio irredutible porque, ao carecer de raíces, non podemos expresalo como produto de polinomios de menor grao.

- Outro polinomio sen raíces é

$$u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$$

Porén, $u(x)=x^4+2x^2+1$ é un polinomio reducible xa que, obviamente, pode ser expresado como produto de dous polinomios de inferior grao.

Aínda que non sexa posible demostralo, pola súa dificultade, si se pode anunciar que todo polinomio de grao impar posúe, polo menos, unha raíz real.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

30. Constrúe un polinomio de grao 3 tal que posúa tres raíces distintas.

31. Determina un polinomio de grao 3 tal que teña, polo menos, unha raíz repetida.

32. Constrúe un polinomio de grao 3 de forma que teña unha única raíz.

33. Conxectura, e logo demostra, unha lei que nos permita saber cando un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

admite o número 0 como raíz.

34. Demostra unha norma que sinale cando un polinomio calquera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ admite o número 1 como raíz.

35. Obtén todas as raíces de cada un dos seguintes polinomios:

a) $x+7$

b) $-x+5$

c) $2x-3$

d) $-4x-9$

e) $-2x$

f) x^2-3x

g) $4x^2-x-3$

h) x^3-x

i) x^3+x

4.3. Regra de *Ruffini*

No apartado anterior probouse a equivalencia entre que un número real α sexa raíz dun polinomio $p(x)$ e o feito de que o polinomio mónico de grao un $x-\alpha$ divida a $p(x)$, isto é, que exista outro polinomio $c(x)$ tal que sexa posible unha factorización de $p(x)$ do tipo:

$$p(x) = (x-\alpha) \cdot c(x)$$

Debido á importancia que ten a división de polinomios cando o polinomio divisor é da forma $x-\alpha$, é conveniente axilizar tales divisións.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- Consideremos o polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Imos dividilo entre $x+2$. Se o resto é 0 o número -2 será unha raíz de $p(x)$; no caso contrario, se non é 0 o resto, entón -2 non será raíz de $p(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2-10x+21 \\
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & \underline{10x^2} & \underline{+20x} & & \\
 & & 21x & +3 & \\
 & & \underline{-21x} & \underline{-42} & \\
 & & & -39 &
\end{array}$$

Xa que o resto non é cero, -2 non é unha raíz de $p(x)$.

Vexamos como xurdiron tanto o polinomio cociente como o resto. Que o grao do dividendo sexa tres e que o divisor sexa de grao un impón que o cociente teña grao dous e que o resto sexa un número real. O cociente consta dos monomios $3x^2$, $-10x$ e 21, os cales coinciden cos monomios de maior grao de cada un dos dividendos despois de diminuír os seus graos nunha unidade: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (o dividendo inicial), $-10x$ vén de $-10x^2+\ x\ +3$ e, por último, 21 de $21x+3$. Este feito, coincidencia no coeficiente e diminución do grao nunha unidade, débese a que o divisor, $x+2$, é mónico e de grao un.

Seguidamente, imos ter en conta unicamente os coeficientes do dividendo, por orde de grao, 3,–4, 1 e 3; canto ao divisor, como é mónico e de grao un, basta considerar o seu termo independente, +2, pero como o resultado de multiplicar os monomios que van conformando o cociente polo divisor temos que restarllo a cada un dos dividendos, atendendo a este cambio de signo, en lugar do termo independente, +2, operaremos co seu oposto, –2, número que, á vez, é a raíz do divisor $x+2$ e sobre o que pesa a pregunta de se é ou non raíz de $p(x)$.

- Primeiro paso da división:

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & x+2 \\ \cline{5-5}
\underline{-3x^3} & \underline{-6x^2} & & & 3x^2 \\
 & -10x^2 & +x & +3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & & \\ \hline
 & 3 & -10 & & \boxed{}
\end{array}$$

Aparece no cociente o monomio $3x^2$ (coeficiente 3), o cal provoca a "desaparición" de $3x^3$ no dividendo e a aparición do monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Despois de operar (sumar) atopámonos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) e, no cociente, $-10x$.

- Segundo paso. O dividendo pasa a ser $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & | \end{array}$$

A irrupción no cociente do monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca a "desaparición" de $-10x^2$ no dividendo e a aparición do monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Despois de operar (sumar) atopámonos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) e, no cociente, 21.

- Terceiro paso. O dividendo pasa ser $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline \underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 & \\ \quad \underline{10x^2+20x} & \\ \qquad\qquad 21x+3 & \\ \qquad\quad \underline{-21x-42} & \\ \qquad\qquad\quad -39 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & |\ -39 \end{array}$$

Temos no cociente o termo independente 21. Isto provoca a eliminación de $21x$ no dividendo e a aparición do termo $-42=(-2)\cdot 21$. Despois de operar (sumar) atopámonos co resto $-39=3-42$.

En cada un dos pasos figura, na parte dereita, o mesmo que se realizou na división convencional, pero coa vantaxe de que todo é máis áxil debido a que unicamente se manexan números reais: os coeficientes dos distintos polinomios participantes.

Estamos ante a chamada **regra de Ruffini**, un algoritmo que nos proporciona tanto o cociente como o resto que resultan de dividir un polinomio calquera entre outro da forma $x-\alpha$.

Exemplo:

- Dividamos o polinomio $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$ entre $x-3$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & & -3 & -3 & -9 & -12 \\ \hline & -1 & -1 & -3 & -4 & |\ -8 \end{array}$$

O cociente é $-x^3-x^2-3x-4$ e o resto -8. Como o resto non é 0 deducimos que o número 3 non é raíz de $p(x)=-x^4+2x^3+5x+4$. A relación entre dividendo, divisor, cociente e resto é, como sempre:

$$p(x)=-x^4+2x^3+5x+4=(x-3)\cdot(-x^3-x^2-3x-4)+(-8)$$

Se avaliamos $p(x)$ en $x=3$ non pode dar cero pero, que valor resulta?

$$p(3)=(3-3)\cdot(-3^3-3^2-3\cdot 3-4)+(-8)=0+(-8)=-8$$

Naturalmente obtivemos o resto anterior. Este feito vén recollido no denominado teorema do resto.

Teorema do resto. O valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ ao particularizalo en $x=\alpha$ coincide co resto que aparece ao dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Actividades propostas

36. Usa a regra de Ruffini para realizar as seguintes divisións de polinomios:

a) $-2x^2+x+1$ entre $x+1$

b) x^3+2x^2-2x+1 entre $x+2$

c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x-1$

d) x^3-9x+1 entre $x-3$

37. Emprega a regra de Ruffini para ditaminar se os seguintes números son ou non raíces dos polinomios citados:

a) $\alpha=3$ de x^3-4x^2+5

b) $\beta=-2$ de $-x^3-2x^2+x+2$

c) $\gamma=1$ de $-2x^4+x+1$

d) $\sigma=-1$ de $2x^3+2x^2$

38. Utiliza a regra de Ruffini para coñecer o valor do polinomio $-x^3+2x^2+x+2$ en $x=3$.

39. Estuda se é posible usar a regra de Ruffini, dalgunha forma, para dividir x^3+3x^2+3x+2 entre $2x+6$.

Para facilitar a comprensión dos conceptos e resultados deste tema a maioría dos números que apareceron ata agora, coeficientes, raíces, etc., foron números enteiros. Por suposto que podemos atopar polinomios con coeficientes racionais, ou irracionais, ou con polinomios con raíces dadas por unha fracción ou un número irracional. Tamén existen polinomios que carecen de raíces.

Exemplos:

- Comprobemos, mediante a regra de Ruffini, que $\alpha=\dfrac{1}{2}$ é raíz do polinomio $2x^2-3x+1$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- Para coñecer as raíces do polinomio x^2-2 debemos estudar se hai algún número real α tal que o anule, é dicir, para o que se teña

$$\alpha^2-2=0;\ \alpha^2=2;\ \alpha=\pm\sqrt{2}$$

Así, o polinomio de grao dous x^2-2 ten dúas raíces distintas que son números irracionais.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

- Xa sabemos que hai polinomios que carecen de raíces, como por exemplo x^2+4.

Apreciamos que a regra de Ruffini nos informa sobre se un número concreto é ou non raíz dun polinomio. Naturalmente, cando estamos perante un polinomio, e nos interesa coñecer as súas raíces, non é posible efectuar unha proba con cada número real para determinar cales son raíz do polinomio. No próximo apartado destacaremos certos "números candidatos" a seren raíz dun polinomio.

4.4. Cálculo das raíces dun polinomio

Á hora de buscar as **raíces enteiras dun polinomio** dispoñemos do seguinte resultado:

Dado un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuxos coeficientes son todos números enteiros, as súas **raíces enteiras**, se as tivese, encóntranse necesariamente entre os divisores enteiros do seu termo independente a_0.

Procedamos á súa demostración. Supoñamos que certo número enteiro α é unha raíz dese polinomio. Tal número debe anulalo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha\cdot(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

Na última igualdade, o número do lado esquerdo é enteiro, porque está expresado como unha suma de produtos de números enteiros. Por iso, o número do lado dereito, $\frac{-a_0}{\alpha}$, tamén é enteiro. Ao seren tamén enteiros tanto $-a_0$ como α, acadamos que α é un divisor de a_0.

Exemplos:

- Determinemos, con amaño ao anterior resultado, que números enteiros son candidatos a seren raíces do polinomio $2x^3+3x^2-11x-6$:
  Tales números enteiros candidatos deben ser divisores de -6, o termo independente do polinomio. Por iso, os únicos números enteiros que poden ser raíz dese polinomio son:
  $$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$$
  Pode comprobarse que os números enteiros 2 e -3 son raíces; os demais non o son.

- As únicas posibles raíces enteiras do polinomio $2x^3+x^2+12x+6$ tamén son:
  $$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$$
  Neste caso ningún deses números é raíz do polinomio.

Actividades propostas

40. Para cada un dos seguintes polinomios sinala, en primeiro lugar, que números enteiros son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Algo máis xeral podemos afirmar sobre clases de números e raíces dun polinomio:

Dado un polinomio calquera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuxos coeficientes son todos números enteiros, as súas **raíces racionais**, se as tivese, necesariamente teñen por numerador algún divisor do termo independente, a_0, e por denominador algún divisor do coeficiente do termo de maior grao, a_n.

Exemplos:

- Volvendo a un dos polinomios do exemplo anterior, $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$, os números racionais candidatos a seren raíces súas teñen por numerador un divisor de -6 e por denominador un divisor de 2. Polo tanto, os únicos números racionais que poden ser raíz dese polinomio son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  Ademais de 2 e -3, tamén é raíz $\frac{-1}{2}$; os demais non o son.

- As únicas posibles raíces racionais do polinomio $2x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 3$ son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  Neste caso ningún deses números é raíz do polinomio.

Actividades propostas

41. Completa o exemplo precedente comprobando que, en efecto, $\frac{-1}{2}$ é raíz do polinomio $2x^3 + x^2 - 18x - 9$.

42. Para cada un dos seguintes polinomios indica que números racionais son candidatos a seren raíces súas e, despois, determina cales o son:

a) $3x^2 + 4x + 1$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

No capítulo próximo, dedicado ás ecuacións, seremos capaces de obter as raíces de todo polinomio de grao dous, se as tivese.

4.5. Factorización de polinomios e fraccións alxébricas

A factorización de polinomios pode ser utilizada para simplificar algunhas expresións nas que interveñen fraccións alxébricas. Vexámolo a través dun par de exemplos:

Exemplo:

- Unha fracción alxébrica como

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$$

pode ser simplificada grazas a que o numerador e o denominador admiten factorizacións nas que algún polinomio está presente en ambas as dúas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}=\frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)}=\frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como xa apuntamos noutras ocasións, as expresións final e inicial non son idénticas pero si son equivalentes en todos aqueles valores para os que ambas as dúas teñen sentido, isto é, para aqueles nos que non se anula o denominador.

Exemplo:

- Nunha suma de fraccións polinómicas como esta

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos acadar un común denominador nas fraccións a partir da descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Convén destacar que no resultado final se optou por deixar o denominador factorizado. Desa forma, entre outras cuestións, apréciase rapidamente para que valores da indeterminada esa fracción alxébrica non admite ser avaliada.

Actividades propostas

43. Simplifica, se é posible, as seguintes expresións:

a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

44. Realiza as seguintes operacións tendo en conta as factorizacións dos denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$

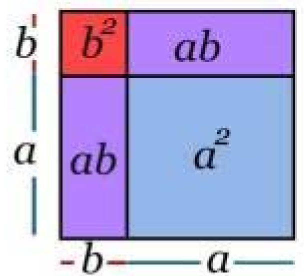
b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.6. Produtos notables de polinomios

Neste apartado imos destacar unha serie de produtos concretos de polinomios que xorden frecuentemente. Podemos expoñelos de moi diversas formas. Tal e como o faremos, aparecerá máis dunha indeterminada; debemos ser capaces de apreciar que se, nalgún caso concreto, algunha indeterminada pasa ser un número concreto isto non fará máis que particularizar unha situación máis xeral.

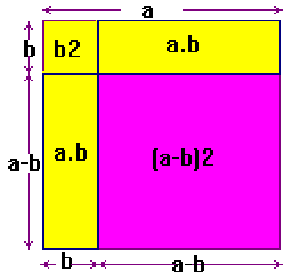
Potencias dun binomio. As seguintes igualdades obtéñense, simplemente, tras efectuar os oportunos cálculos:



- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

  O cadrado dunha suma é igual ao cadrado do primeiro, máis o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

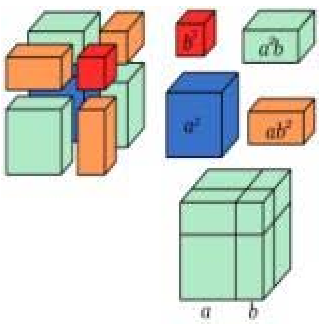
  Comproba a igualdade a partir dos cadrados e rectángulos da ilustración.



- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

  O cadrado dunha diferenza é igual ao cadrado do primeiro, menos o dobre produto do primeiro polo segundo, máis o cadrado do segundo.

  Observa a figura e conéctaa coa igualdade.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica a igualdade cos cubos e prismas da figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada un dos desenvolvementos, o expoñente do binomio coincide co grao de cada un dos monomios.

Exemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$
- $(2x-5)^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot 5 + 3\cdot(2x)\cdot 5^2 - 5^3 = 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

45. Realiza os cálculos:

a) $(1+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x-2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x+2)^3$

46. Obtén as fórmulas dos cadrados dos seguintes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$

b) $(a+b-c)^2$

47. Desenvolve as seguintes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

48. Expresa como cadrado dunha suma ou dunha diferenza as seguintes expresións alxébricas:

a) $a^2 + 6a + 9$ b) $4x^2 - 4x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

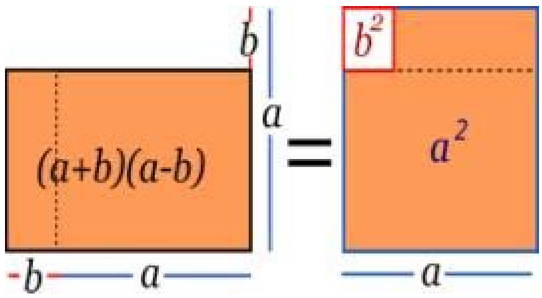
d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

Suma por diferenza. De novo a seguinte igualdade obtense tras efectuar o produto sinalado:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Suma por diferenza é igual a diferenza de cadrados.

Observa as figuras e conéctaas coa igualdade.



Exemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$
- $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$

  $=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

49. Efectúa estes produtos:

a) $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$

b) $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$

c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

De volta aos polinomios dunha variable, podemos dicir que neste apartado expandimos *potencias dun polinomio*, ou produtos dun polinomio por si mesmo, así como produtos da forma *suma por diferenza*. Convén darse conta de que as súas fórmulas, lidas ao revés, constitúen unha factorización dun polinomio.

Exemplos:

- $x^2+12x+36=x^2+2\cdot 6\cdot x+6^2=(x+6)^2$
- $2x^3-12x^2+18x=2x\cdot(x^2-6x+9)=2x\cdot(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2)=2x\cdot(x-3)^2$
- $x^2-5=(x+\sqrt{5})\cdot(x-\sqrt{5})$
- $x^4-16=(x^2+4)\cdot(x^2-4)=(x^2+4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

Actividades propostas

50. De acordo co exposto, factoriza os seguintes polinomios:

a) x^2-2x+1

b) $3x^2+18x+27$

c) $4x^5-16x^3$

51. Calcula os seguintes produtos:

a) $(3x+1)\cdot(3x-1)$ b) $(2a-3b)\cdot(2a+3b)$

c) $(x^2-5)\cdot(x^2+5)$ d) $(3a^2+5)\cdot(3a^2-5)$

52. Expresa como suma por diferenza as seguintes expresións

a) $9x^2-25$ b) $4a^4-81b^2$ c) $49-25x^2$ d) $100a^2-64$

53. Simplifica as seguintes fraccións alxebraicas

a) $\dfrac{x^2-1}{3x+3}$ b) $\dfrac{2x^2+12x+18}{x^2-9}$ c) $\dfrac{6-3a}{a^2-4}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Numerosos actos que podemos encadrar dentro de "**trucos de maxia**" poden ser analizados, ou "destripados", mediante un uso adecuado das Matemáticas, en particular a partir de expresións alxebraicas.

i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número natural e que non o amose.
ii. Que o multiplique por 10.
iii. Que ao resultado anterior lle sume 32.
iv. Que multiplique por 100 o obtido.
v. Que lle sume 800.
vi. Que divida entre 1000 a última cantidade.
vii. Que ao resultado precedente lle reste o número que escribiu.
viii. Ten un 4! Maxia!

Nos exercicios 1 e 2 tes outros exemplos disto.

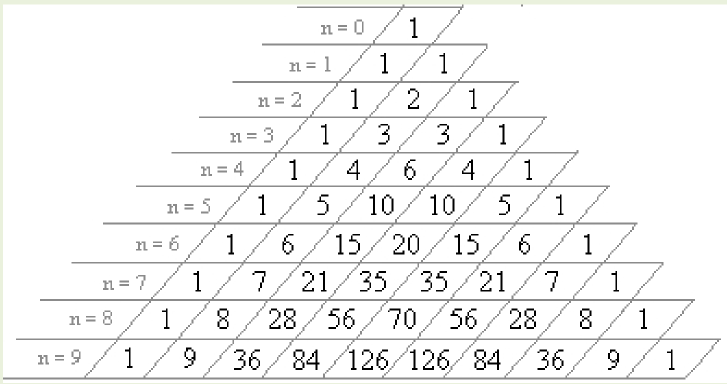
ALGORITMOS

A regra de Ruffini é un exemplo de *algoritmo*. Un *algoritmo* é unha relación ordenada e precisa de operacións, ou accións, que se deben realizar sobre os datos inicialmente dispoñibles coa finalidade de resolver un problema ou acadar nova información. Outros algoritmos:
- o da división de dous números enteiros, que nos proporciona o seu cociente e o seu resto.
- o de Euclides, polo que obtemos o máximo común divisor de dous enteiros positivos.
- o da raíz cadrada, que ofrece a raíz cadrada dun número.
- o que orixina a letra dun DNI ou NIF.
Os algoritmos son un piar básico no funcionamento de calquera ordenador ou computadora.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

COEFICIENTES BINOMIAIS

Cando expandimos o binomio $(a+b)^n$ aparece un polinomio tal que todos os seus monomios son do mesmo grao, grao n. A parte literal de cada un deles é moi fácil de escribir, non así, en principio, cada un dos coeficientes. Porén, grazas a un triángulo numérico podemos coñecer os coeficientes que corresponden a cada expoñente n: o ***triángulo de Tartaglia*** ou ***de Pascal***. É un triángulo numérico con moitas propiedades e utilidades. Anotemos unha propiedade: cada unha das súas liñas comeza e conclúe co díxito 1, o resto de números é igual á suma dos dous números que se atopan sobre el.



Por exemplo, o desenvolvemento para o expoñente $n=5$ sería

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Expresión alxébrica	Expresión matemática que se constrúe con números reais e as operacións matemáticas básicas de suma, resta, multiplicación e/ou división.	$\frac{-3x}{2x+y^3} - x\cdot y^2 \cdot z$
Variable, indeterminada	O non concretado nunha expresión alxébrica.	As variables, ou indeterminadas, do exemplo anterior son *x*, *y*, *z*.
Valor numérico dunha expresión alxébrica	Ao fixar un valor concreto para cada indeterminada, ou variable, dunha expresión alxébrica aparece un número real: o **valor numérico** desa expresión alxébrica para tales valores das indeterminadas.	Se, na expresión precedente, facemos *x*=3, *y*=-2, *z*=1/2 obtemos $\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 3+(-2)^3} - 3\cdot(-2)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$
Monomio	Expresión dada polo produto de números reais e indeterminadas.	$-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$, $7\cdot x^2$
Coeficiente dun monomio	O número real que multiplica a indeterminada, ou indeterminadas, do monomio.	Os coeficientes dos anteriores monomios son, respectivamente, -5 e 7
Parte literal dun monomio	A indeterminada, ou produto de indeterminadas, que multiplica o coeficiente do monomio.	A parte literal de $-5\cdot x\cdot y^3\cdot z^2$ é $x\cdot y^3\cdot z^2$
Grao dun monomio	Cando hai unha única indeterminada é o expoñente desta indeterminada. Se aparecen varias, o grao do monomio será a suma dos expoñentes desas indeterminadas.	Os graos dos monomios precedentes son 6 e 2, respectivamente
Polinomio	Expresión construída a partir da suma de monomios.	$-x^3+4x^2+8x+6$
Grao dun polinomio	O maior grao dos seus monomios.	O anterior polinomio é de grao 3
Suma, resta e produto de polinomios	O resultado sempre é outro polinomio.	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p\cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
División de dous polinomios	Obtéñense outros dous polinomios, os polinomios cociente (*c*(*x*)) e resto (*r*(*x*)), ligados aos polinomios iniciais, os polinomios dividendo (*p*(*x*)) e divisor (*q*(*x*)).	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Factorización dun polinomio	Consiste en expresalo como produto doutros polinomios de menor grao.	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Polinomio irredutible	É aquel que non pode ser expresado como produto doutros polinomios de grao inferior.	$-3x+6$, x^2+4
Raíz dun polinomio	Un número real concreto α é unha **raíz**, ou **un cero**, do polinomio p, se ao avaliar p en $x=\alpha$ obtemos o número 0, é dicir, se $p(\alpha)=0$.	2 é raíz de $-3x+6$ 1 e -3 son raíces de x^2+2x-3
Raíces e factorización	Que un número real concreto α sexa unha raíz do polinomio $p(x)$ é equivalente a que o polinomio $p(x)$ admita unha descomposición factorial da forma $p(x)=(x-\alpha)\cdot c(x)$ para certo polinomio $c(x)$.	-2 é unha raíz de x^3+2x^2-x-2 $x^3+2x^2-x-2=(x+2)\cdot(x^2-1)$
Número de raíces e grao	Todo polinomio de grao n ten como moito n raíces reais, algunha das cales pode aparecer repetida entre eses non máis de n números reais.	x^2+2x-3 ten dúas raíces, 1 e -3 $3x^2+7$ non ten raíces
Regra de *Ruffini*	Pódemos axudar á hora de factorizar un polinomio e coñecer as súas raíces.	

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Neste exercicio vaise presentar un *truco* mediante o cal imos adiviñar o número que resulta tras manipular repetidamente un número descoñecido. Converte nunha expresión alxébrica as sucesivas alteracións do número descoñecido e xustifica o que ocorre.

i. Dille a un compañeiro que escriba nun papel un número natural e que non o amose.
ii. Que o multiplique por 10.
iii. Que ao resultado anterior lle sume 100.
iv. Que multiplique por 1000 o obtido.
v. Que divida entre 10 000 a última cantidade.
vi. Que ao resultado precedente lle reste o número que escribiu.
vii. Independentemente do número descoñecido orixinal, que número xurdiu?

2. Nestoutro exercicio imos *adiviñar* dous números que pensou un compañeiro. Constrúe unha expresión alxébrica que recolla todos os pasos e, finalmente, descobre o truco.
i. Solicita a un compañeiro que escriba nun papel, e non amose, dous números naturais: un dunha cifra (entre 1 e 9) e outro de dúas cifras (entre 10 e 99).
ii. Que multiplique por 4 o número escollido dunha cifra.
iii. Que ao resultado anterior lle sume 3.
iv. Que multiplique por 5 o obtido.
v. Que á última cantidade lle reste 15.
vi. Que multiplique o resultado precedente por 5.
vii. Que lle sume ao anterior o número de dúas cifras que elixiu.
viii. Dille ao compañeiro que desvele cal é o resultado de todos eses cambios.
ix. Que debemos facer para descubrir os dous números que escolleu o compañeiro?

3. Estuda se hai números reais nos que as seguintes expresións non poden ser avaliadas:

a) $\dfrac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$

b) $\dfrac{-x}{x^2-4x+4}$

c) $\dfrac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

d) $\dfrac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

4. Unha persoa ten aforrados 1000 euros e decide depositalos nun produto bancario cun tipo de interese anual do 3%. Se decide recuperar os seus aforros ao cabo de dous anos, cal será a cantidade total da que disporá?

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

5. Xeneralicemos o exercicio anterior: Se ingresamos X euros nun depósito bancario cuxo tipo de interese é do i% anual, cal será a cantidade que recuperaremos ao cabo de n anos?

6. Constrúe un polinomio de grao 2, $p(x)$, tal que $p(3) = -7$.

7. Consideremos os polinomios $p(x) = -5x^3 + x^2 - 3x - 2$, $q(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 7$ e $r(x) = 4x^2 + 5x - 1$. Realiza as seguintes operacións:

a) $p+q+r$
b) $p-q$
c) $p \cdot r$
d) $p \cdot r - q$

8. Calcula os produtos:

a) $\left(\frac{ax}{3} - \frac{by}{2}\right) \cdot \left(\frac{-xy}{6}\right)$ b) (0.3x – 0.2y + 0.1z) · (0.1x + 0.2y – 0.3z) c) (x – 1) (x – a) (x – b)

9. Efectúa as divisións de polinomios:

a) $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x - 1$ entre $2x^2 + 3x - 3$
b) $4x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x - 6$ entre $x^3 + 2x + 3$

10. Calcula os cocientes:

a) $(5x^4):(x^2)$ b) $(3x^2y^4z^6) : ((1/2)xy^3z^5)$ c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y)$

11. Realiza as operacións entre fraccións alxebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2-3x} + \frac{2x}{x^2-6x+9}$
b) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x}{x^2-6x+9}$
c) $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$
d) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$

12. Constrúe un polinomio de grao 2 tal que o número -5 sexa raíz súa.

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

13. Determina un polinomio de grao 3 tal que as súas raíces sexan 6 , -3 e 0 .

14. Constrúe un polinomio de grao 4 tal que teña unicamente dúas raíces reais.

15. Encontra un polinomio $q(x)$ tal que ao dividir $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ se obteña como polinomio resto $r(x) = 5x^2 + 5x + 1$.

16. Calcula as raíces enteiras dos seguintes polinomios:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$
b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$
c) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$
d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

17. Obtén as raíces racionais dos polinomios do exercicio anterior.

18. Descompón os seguintes polinomios como produto de polinomios irredutibles:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$
b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$
c) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$
d) $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

19. Calcula as potencias:

a) $(x - 2y + z)^2$ b) $(3x - y)^3$ c) $((1/2)a + b^2)^2$ d) $(x^3 - y^2)^2$

20. Analiza se os seguintes polinomios xurdiron do desenvolvemento de potencias de binomios, ou trinomios, ou dun produto *suma por diferenza*. En caso afirmativo, expresa a súa procedencia.

a) $x^2 + 6x + 9$
b) $x^4 - 8x^2 + 16$
c) $x^2 + \sqrt{20}\,xy + 5y^2$
d) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
f) $x^2 - 36$
g) $5x^2 + 1$
h) $5x^2 - 11$
i) $x^2 - 3y^2$

21. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1$ b) $x^2 - y^2$ c) $x^2y^2 - z^2$ d) $x^4 - 2x^2y + y^2$

22. Con este exercicio preténdese amosar a conveniencia á hora de non operar unha expresión polinómica que temos factorizada total ou parcialmente.

a) Comproba a igualdade $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)\cdot(x^2 - 3)$.

b) Determina todas as raíces do polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$.

23. Factoriza numerador e denominador e simplifica:

a) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ b) $\dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$ c) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 1}$

24. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{2}{x(5-x)} - \dfrac{3}{2(5-x)}$ b) $\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\dfrac{2x+1}{4x^2-1}$

25. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{x^4-1}{x^7} : \dfrac{x^2+1}{x^8}$ b) $\dfrac{2x+3y}{a-b} - \dfrac{3x+4y}{2a-2b}$ c) $-4x + (1-x^4)\left(\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)$

26. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\dfrac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x+a} : \dfrac{x-a}{x+a}$ c) $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) : \dfrac{ab}{a+b}$

27. Efectúa as seguintes operacións e simplifica todo o posible:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x+y}} : \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+y}}$ b) $\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y}} \cdot \dfrac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y}}$

Autor: Eduardo Cuchillo Ibáñez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. Sinala os coeficientes que aparecen nas seguintes expresións alxebraicas:

a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2}\cdot x\cdot y^2\cdot z$

2. O valor numérico da expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ é:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. Completa adecuadamente as seguintes oracións:

a) A suma de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

b) A suma de tres polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

c) O produto de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

d) A diferenza de dous polinomios de grao dous é sempre outro polinomio de grao ……….

4. Ao dividir o polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ o polinomio resto resultante:

a) debe ser de grao 2. b) pode ser de grao 2.

c) debe ser de grao menor que 2. d) ningunha das opcións precedentes.

5. Considera o polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$. Cales dos seguintes números enteiros son razoables candidatos para seren unha raíz súa?

a) 3 b) 2 c) –5 d) –7

6. Considera o polinomio $2x^4+7x^3+x^2-7x-3$. Cales dos seguintes números racionais son *razoables candidatos* para seren unha das súas raíces?

a) -3 b) 2 e $\frac{-1}{2}$ c) –3 e $\frac{1}{3}$ d) –3 e $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteiros de grao tres

a) ten tres raíces reais. b) ten, como moito, tres raíces reais. c) ten, polo menos, tres raíces.

8. É posible que un polinomio, con coeficientes enteiros, de grao catro teña exactamente tres raíces, xa sexan diferentes ou con algunha múltiple?

9. Xustifica a veracidade ou falsidade de cada unha das seguintes oracións:

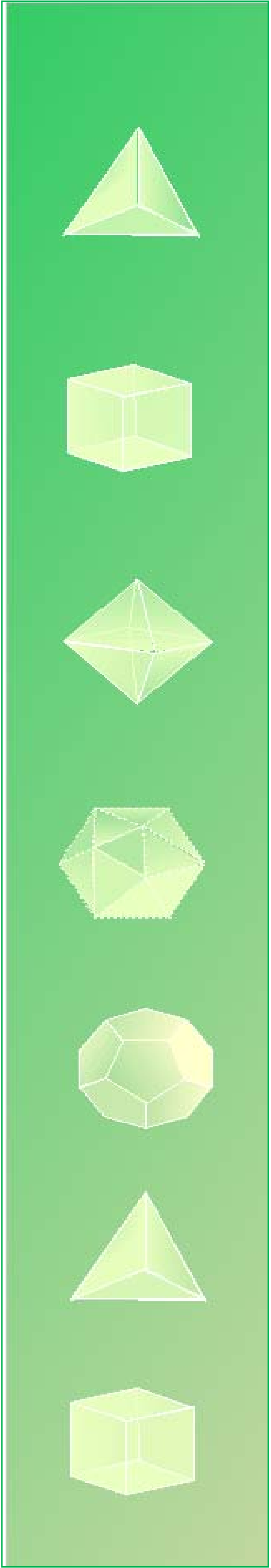
a) A regra de Ruffini serve para dividir dous polinomios calquera.

b) A regra de Ruffini permite ditaminar se un número é raíz ou non dun polinomio.

c) A regra de Ruffini só é válida para polinomios con coeficientes enteiros.

d) A regra de Ruffini é un algoritmo que nos proporciona todas as raíces dun polinomio.

10. Analiza se pode haber algún polinomio de grao oito que non teña ningunha raíz.



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 4:

Ecuacións e sistemas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Os matemáticos tardaron preto de tres mil anos en comprender e resolver ecuacións tan sinxelas e que ti coñeces tan ben como $ax + b = 0$. Xa os exipcios resolvían problemas que se poden considerar de ecuacións aínda que non existía a notación alxébrica. O matemático grego *Diofanto* no século III resolveu ecuacións de primeiro e segundo grao. No século XV houbo un desafío para premiar a quen resolvera unha ecuación de terceiro grao. No século XIX demostrouse que non existe unha fórmula xeral que resolva as ecuacións de quinto grao. Para impoñer que a ecuación $ax + b = 0$ teña sempre solución, o conxunto numérico dos números naturais debe ampliarse cos números negativos. Para impoñer que a ecuación $ax = b$ teña sempre solución, o conxunto numérico dos números enteiros debe ampliarse cos números fraccionarios. Para impoñer que a ecuación $x^2 = a$, $a > 0$, recorda $x^2 = 2$, teña solución, o conxunto numérico debe ampliarse cos números irracionais. Pero a ecuación $x^2 + 1 = 0$, aínda non ten solución no conxunto numérico dos números reais. O próximo curso ampliarase o dominio aos números complexos.

Neste capítulo repasaremos a solución de ecuacións de segundo grao e sistemas lineais, que xa coñeces, e ampliaremos con ecuacións e sistemas novos.

Autora: Raquel Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. ECUACIÓNS DE SEGUNDO GRAO

1.1. Concepto de ecuacións de segundo grao

Recorda que:

Unha **ecuación de segundo grao** é unha ecuación polinómica na que a maior potencia da incógnita é 2. As ecuacións de segundo grao pódense escribir da forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde *a, b e c* son números reais, con $a \neq 0$.

Exemplo:

a) *Son ecuacións de 2º grao:*

$$2x^2 - 7x + 4 = 0; \qquad -9x^2 + 2x - 5 = 0; \qquad 6x^2 - (1/2)x - 3.25 = 0$$

b) *Os coeficientes das ecuacións de* 2º grao son números reais, polo tanto poden ser fraccións ou raíces. Por exemplo:

$$\frac{9}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{2}{5} = 0\,; \quad \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{9} = 0\,; \quad -5.8x^2 + 1.7x - 7.02 = 0; \qquad \sqrt{5}x^2 + \frac{3}{2}x - \sqrt[3]{2} = 0\,.$$

Actividades propostas

1. Indica se son ecuacións de segundo grao as seguintes ecuacións:

a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4.7x^2 - 6.25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$

d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2.35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3.2 = 0$

2. Nas seguintes ecuacións de segundo grao, indica quen son *a*, *b* e *c.*

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3.4x^2 + 7.8x = 0$

c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1.25x^2 - 3.47x + 2.75 = 0$.

1.2. Resolución de ecuacións de 2º grao completas

Recorda que:

Chámase **ecuación de segundo grao completa** a aquela que ten valores distintos de cero para *a*, *b* e *c*.

Para resolver as ecuacións de segundo grao completas utilízase a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula permite calcular as dúas solucións da ecuación.

Chamamos **discriminante** á parte da fórmula que está no interior da raíz:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Actividades resoltas

- *Resolve a ecuación de segundo grao* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primeiro debemos saber quen son *a*, *b* e *c:*

$$a = 1;\ b = -3;\ c = 2.$$

Substituíndo estes valores na fórmula, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Polo tanto, as dúas solucións son:

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2; \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

En efecto, $2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, e $1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, xa que logo 2 e 1 son solucións da ecuación.

Actividades propostas

3. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao completas:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$

c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

4. Resolve as seguintes ecuacións:

a) $2x - 3 \cdot \frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x-3}{5}$; b) $2 \cdot \frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x \cdot (x - 3) + 4(x^2 - 5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2 - 1) + 3(x^2 - 5) + 4 = 16$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{4}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.

1.3. Número de solucións dunha ecuación de 2º grao completa

Recorda que:

Antes definimos o que era o **discriminante**, lémbraste?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Para saber cantas solucións ten unha ecuación de 2º grao, imos fixarnos no signo do discriminante.

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, a ecuación ten **dúas solucións reais e distintas**.

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, a ecuación ten dúas solucións reais iguais (unha **solución dobre**).

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non **ten solución**.

O motivo é moi sinxelo, a raíz cadrada dun número real negativo non é un número real, non existe.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Exemplo:

- *A ecuación* $x^2 - 7x + 10 = 0$ *ten como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

Polo tanto, a ecuación dada ten 2 solucións reais e distintas, 2 e 5.

(*Comprobación:* $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$ e $(2)^2 - 7(2) + 10 = 4 \ -14 + 10 = 0$).

- *A ecuación* $x^2 - 6x + 9 = 0$ *ten como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Polo tanto, a ecuación ten dúas solucións reais iguais. Pódese escribir como:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$, que ten a solución dobre $x = 3$.

- A ecuación $x^2 + 4x + 10 = 0$ *ten como discriminante*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (10) = 16 - 40 = -24 < 0$$

Polo tanto, a ecuación non ten solución real. Ningún número real verifica a ecuación.

Actividades propostas

5. Pescuda cantas solucións teñen as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ **b)** $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

1.4. Resolución de ecuacións de 2º grao incompletas

Recorda que:

Chamamos **ecuación de 2º grao incompleta** a aquela ecuación de segundo grao na que o coeficiente *b* vale 0 (falta *b*), ou o coeficiente *c* vale 0 (falta *c*).

Observa: se o coeficiente *a* vale cero non é unha ecuación de segundo grao.

Exemplo:

- *A ecuación de segundo grao* $3x^2 - 22 = 0$ é incompleta porque o coeficiente $b = 0$, é dicir, falta *b*.
- *A ecuación de segundo grao* $2x^2 - 7x = 0$ é incompleta porque non ten *c*, é dicir, $c = 0$.

Unha ecuación de segundo grao incompleta tamén se pode resolver utilizando a fórmula das completas pero é un proceso máis lento e é máis doado equivocarse.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Se o **coeficiente *b* = 0:** Despexamos a incógnita normalmente, como faciamos nas ecuacións de primeiro grao:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Se $\frac{-c}{a} > 0$ ten dúas solucións distintas, se $\frac{-c}{a} < 0$ non existe solución.

Se o **coeficiente *c* = 0:** Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0.$$

Para que o produto de dous factores valla cero, un dos factores debe valer cero.

Polo tanto $x = 0$, ou $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

Resumo

Se o **coeficiente *b* = 0,** $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Se o **coeficiente *c* = 0,** $ax^2 + bx = 0$, sacamos factor común: $x = 0$ e $x = \frac{-b}{a}$.

Exemplo:

- *Na ecuación* $2x^2 - 200 = 0$ *falta o b*.

Para resolvela despexamos a incógnita, é dicir, x^2:

$$2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 200/2 = 100.$$

Unha vez que chegamos aquí, falta quitar ese cadrado que leva a nosa incógnita. Para iso, facemos a raíz cadrada nos 2 membros da ecuación:

$$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10.$$

Así obtivemos as dúas solucións da nosa ecuación, 10 e –10.

En efecto, $2 \cdot 10^2 - 200 = 2 \cdot 100 - 200 = 0$, e $2 \cdot (-10)^2 - 200 = 2 \cdot 100 - 200 = 0$.

Exemplo:

- *Na ecuación* $3x^2 - 21x = 0$ falta o *c*.

Para resolvela, sacamos factor común: $3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x - 21) = 0$

Unha vez que chegamos aquí, temos dúas opcións:

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Así obtivemos as dúas solucións da ecuación $x = 0$ e $x = 7$.

En efecto, $3 \cdot 0^2 - 21 \cdot 0 = 0$, e $3 \cdot (7)^2 - 21 \cdot 7 = 3 \cdot 49 - 21 \cdot 7 = 147 - 147 = 0$.

Actividades resoltas

- *Resolve a ecuación de segundo grao* $2x^2 - 50 = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o *b*. Polo tanto, despexamos a incógnita:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25 \Rightarrow \text{as solucións son 5 e } -5.$$

- *Resolve a ecuación de segundo grao* $x^2 + 11x = 0$:

Solución: Trátase dunha ecuación de 2º grao incompleta onde falta o *c*.

Polo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$.

Obtemos as dúas solucións: $x = 0$ e $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

As solucións son 0 e –11.

Actividades propostas

6. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 - 160 = 0$

c) $x^2 - 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$

e) $9x^2 - 49 = 0$ f) $3x^2 - 33x = 0$.

7. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao incompletas:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

1.5. Suma e produto das solucións nunha ecuación de segundo grao

Recorda que:

Se nunha ecuación de segundo grao: $x^2 + bx + c = 0$, con $a = 1$, coñecemos as súas solucións: x_1 e x_2 sabemos que podemos escribir a ecuación de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0.$$

Facemos operacións:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

polo que o coeficiente *c* é igual ao produto das solucións e a suma das solucións é igual ao oposto do coeficiente *b*, é dicir, –*b*.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.$$

Se a ecuación é $ax^2 + bx + c = 0$, dividindo por a, xa temos unha de coeficiente $a = 1$, e obtemos que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \qquad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}.$$

Esta propiedade permítenos, en ocasións, resolver mentalmente algunhas ecuacións de segundo grao.

Actividades resoltas

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

As solucións son 1 e –2, pois o seu produto é –2 e a súa suma –1.

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Buscamos mentalmente dous números cuxo produto sexa 6 e cuxa suma sexa 5. En efecto, 2 · 3 = 6, e 2 + 3 = 5, logo as solucións da ecuación son 2 e 3.

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 - 8x + 16 = 0$.

O produto debe ser 16. Probamos con 4 como solución e, en efecto, 4 + 4 = 8. As solucións son a raíz 4 dobre.

- *Resolve mentalmente a ecuación* $x^2 + x - 2 = 0$.

As solucións son –2 e 1, pois o seu produto é –2 e a súa suma –1.

Actividades propostas

8. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$

c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$.

9. Escribe unha ecuación de segundo grao cuxas solucións sexan 5 e 9.

10. O perímetro dun rectángulo mide 20 cm e a súa área 24 cm^2. Calcula mentalmente as súas dimensións.

11. Se 3 é unha solución de $x^2 - 7x + a = 0$, canto vale a?

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. OUTROS TIPOS DE ECUACIÓNS

Durante séculos os alxebristas buscaron fórmulas, como a que xa coñeces da ecuación de segundo grao, que resolveran as ecuacións de terceiro grao, de cuarto, de quinto… sen éxito a partir do quinto grao. As fórmulas para resolver as ecuacións de terceiro e cuarto grao son complicadas. Só sabemos resolver de forma sinxela algunhas destas ecuacións.

Exemplo:

- Resolve: $(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+2)\cdot(x-9)\cdot(x-6)=0$.

É unha ecuación **polinómica** de grao cinco, pero ao estar factorizada sabemos resolvela pois para que o produto de varios factores sexa cero, un deles debe valer cero. Igualando a cero cada factor temos que as solucións son 5, 3, –2, 9 e 6.

2.1. Ecuacións bicadradas

Unha **ecuación bicadrada** é unha ecuación da forma $ax^{2n}+bx^n+c=0$.

Para resolvela facemos o cambio $x^n=t$, converténdoa así nunha ecuación de segundo grao de doada resolución.

Cando teñamos calculado o valor de t, desfacemos o cambio efectuado, $\boldsymbol{x=\sqrt[n]{t}}$ para obter a solución x.

As ecuacións bicadradas máis comúns son as de cuarto grao.

Exemplo:

- *Para resolver a ecuación bicadrada* $x^4-10x^2+9=0$, facemos o cambio obtendo a ecuación de segundo grao $t^2-10t+9=0$.

Resolvemos esta ecuación de segundo grao:

$$t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{10\pm8}{2}$$

$$t_1=\frac{10+8}{2}=9\quad y\quad t_2=\frac{10-8}{2}=1$$

Desfacemos o cambio para obter os valores de x:

$$Si\ t_1=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm3$$

$$Si\ t_2=1\rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

Actividades resoltas

- *A ecuación* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é unha ecuación polinómica de cuarto grao, pero cunha forma moi especial. É unha ecuación **bicadrada** porque podemos transformala nunha ecuación de segundo grao chamando a x^2 por exemplo, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Unha solución da ecuación de segundo grao é $t = 4$, e a outra é $t = 1$.

Polo tanto se $t = x^2 = 4$, entón $x = 2$ e $x = -2$.

E se $t = x^2 = 1$, entón $x = 1$ e $x = -1$.

A nosa ecuación de cuarto grao ten catro solucións: 2, –2, 1 e –1.

Actividades propostas

12. Resolve as ecuacións seguintes:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$.

13. Resolve as seguintes ecuacións bicadradas:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

14. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

2.2. Ecuacións racionais

Se hai incógnitas no denominador, a ecuación denomínase **racional** e resólvese de forma similar, quitando denominadores.

Para resolver ecuacións **racionais**, multiplícanse ambos os membros da ecuación polo mínimo común múltiplo dos denominadores.

Exemplos:

- *Resolve* $\frac{3x-12+9x}{2x} = 4$:

Quitamos denominadores:

$$\frac{3x - 12 + 9x}{2x} = 4 \Rightarrow 3x - 12 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x - 8x = 12 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

- *Para resolver a ecuación racional* $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$, primeiro calculamos o mínimo común múltiplo dos denominadores:

$$\text{m.c.m.}(x - 2, x + 2, x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2).$$

Multiplicamos toda a ecuación polo mínimo común múltiplo, obtendo a nova ecuación:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} + \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2-4} \Rightarrow (x + 2) + (x - 2) = 1.$$

Resolvemos esta ecuación e así obtemos o resultado:

$$(x + 2) + (x - 2) = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

15. Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$ b) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{4}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$.

2.3. Ecuacións radicais

Se hai incógnitas dentro dun radical, a ecuación denomínase **irracional**, e resólvese illando o radical e elevando ao cadrado (ou ao índice do radical). Agora é preciso ter unha precaución, ao elevar ao cadrado, a ecuación obtida non é equivalente, pódense ter engadido solucións. Sempre é conveniente comprobar o resultado pero, neste caso, é necesario.

Unha **ecuación radical ou irracional** é aquela que ten a incógnita baixo o signo da raíz.

Para resolver ecuacións radicais, seguimos os seguintes pasos:

1.- Íllase un radical nun dos dous membros, pasando ao outro membro o resto dos termos, aínda que teñan tamén radicais.

2.- Elévanse ao cadrado os dous membros.

3.- Se quedan máis radicais, vólvese despexar un e elévase ao cadrado, ata que non quede ningún.

4.- Resólvese a ecuación obtida.

5.- Compróbase que a solución é válida.

Exemplo:

- *Imos resolver a ecuación radical* $\sqrt{2x-3}+1=x$.

1.- Íllase un radical nun dos dous membros, pasando ao outro membro o resto dos termos:

$$\sqrt{2x-3}+1=x \Rightarrow \sqrt{2x-3}=x-1.$$

2.- Elévanse ao cadrado os dous membros:

$$\sqrt{2x-3}=x-1 \Rightarrow 2x-3=(x-1)^2 \Rightarrow 2x-3=x^2-2x+1.$$

3.- Resólvese a ecuación obtida:

$$2x-3=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm0}{2}=2 \text{ dobre.}$$

4.- Compróbase que a solución é válida:

$$\sqrt{2\cdot2-3}+1=2 \Rightarrow \sqrt{1}+1=2 \Rightarrow 2=2.$$

Actividades resoltas

- *Resolve a ecuación radical* $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2$.

1.- Íllase un radical nun dos dous membros, pasando ao outro membro o resto dos termos, aínda que teñan tamén radicais:

$$\sqrt{x+6}=2+\sqrt{x-2}.$$

2.- Elévanse ao cadrado os dous membros:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-2}\right)^2\Rightarrow x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2.$$

Simplifícase a ecuación obtida:

$$x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2\Rightarrow x+6-4-x+2=4\sqrt{x-2}\Rightarrow 4=4\sqrt{x-2}.$$

3.- Volvemos agora ao paso 2 para eliminar a raíz que temos aínda:

$$4=4\sqrt{x-2}\Rightarrow 4^2=\left(4\sqrt{x-2}\right)^2\Rightarrow 16=16(x-2).$$

4.- Resólvese a ecuación obtida:

$$16=16(x-2)\Rightarrow 1=x-2\Rightarrow x=3.$$

5.- Compróbase que a solución é válida:

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2\Rightarrow\sqrt{3+6}-\sqrt{3-2}=2\Rightarrow\sqrt{9}-\sqrt{1}=2\Rightarrow 3-1=2\Rightarrow 2=2.$$

A solución $x = 3$ verifica a ecuación.

Actividades propostas

16. Resolve as seguintes ecuacións irracionais:

a) $\sqrt{5x+4}-1=2x$ b) $\sqrt{x+19}+1=\sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

2.4. Outras ecuacións

Hai tamén ecuacións trigonométricas, logarítmicas, exponenciais. Así, se a incógnita está nun expoñente, a ecuación denomínase **exponencial**. Se podemos expresar os dous membros da ecuación como potencias da mesma base, iguálanse os expoñentes.

Exemplo:

- Resolve: $2^{2x}=\dfrac{1}{16}$

Expresamos a ecuación como potencias dunha mesma base: $2^{2x}=\dfrac{1}{16}\Rightarrow 2^{2x}=2^{-4}$

Igualamos os expoñentes: $2x=-4\Rightarrow x=-2$.

Actividades propostas

17. Resolve as ecuacións seguintes:

a) $(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0$.

18. Resolve as ecuacións bicadradas seguintes:

a) $x^4+5x^2-36=0$ b) $x^4-21x^2+12\,100=0$ c) $x^4-45x^2+234=0$ d) $x^4-37x^2+36=0$.

19. Resolve as ecuacións racionais seguintes:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2$ b) $\frac{1}{x}+1-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{1}{x}=1$.

20. Resolve as ecuacións irracionais seguintes:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$.

21. Resolve as ecuacións exponenciais seguintes:

a) $5^{3x}=\frac{1}{625}$ b) $2^{2x}\cdot 4^{x}=\frac{1}{16}$ c) $2^{x+5}\cdot 2^{x+4}\cdot 2^{x+3}=8$.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. SISTEMAS DE ECUACIÓNS LINEAIS

3.1. Concepto de sistema de ecuacións lineais

Recorda que:

Unha **ecuación** con varias incógnitas é unha igualdade que as relaciona.

Por exemplo:

$x^2 + y^2 = 25$, é a ecuación dunha circunferencia de centro a orixe e radio 5.

Un **sistema de ecuacións** é un conxunto de ecuacións con varias incógnitas.

Por exemplo:

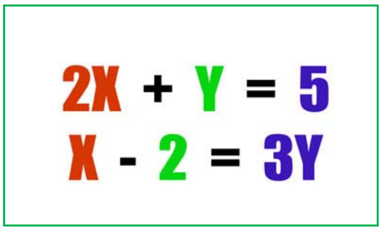
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$$

A primeira ecuación é a dunha circunferencia de centro a orixe e radio 5, e a segunda é a ecuación dunha recta que pasa pola orixe. As solucións do sistema son os puntos de intersección entre a circunferencia e a recta.

Chámase **solución do sistema** a cada un dos conxuntos de números que verifican todas as ecuacións do sistema.

Dous sistemas son **equivalentes** cando teñen as mesmas solucións.

Un **sistema de ecuacións lineais** con dúas incógnitas pódese expresar da forma:



$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

onde a, b, a' e b' son números reais que se denominan **coeficientes** e c e c' tamén son números reais chamados **termos independentes**.

Chamamos **solución** do sistema ao par de valores (x, y) que satisfán as dúas ecuacións do sistema.

Dise que dous sistemas de ecuacións son **equivalentes**, cando teñen a mesma solución.

Exemplo:

- *Son sistemas de ecuacións lineais, por exemplo:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

Exemplo:

- ***Non** é un sistema lineal* $\begin{cases} 9xy + 2y = 5 \\ 3x - xy = 4 \end{cases}$ porque ten termos en xy, aínda que é un sistema de dúas ecuacións.

Tampouco o é $\begin{cases} 5x^2 + 9y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ porque ten un termo en x^2, aínda que tamén é un sistema de dúas ecuacións.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

22. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

3.2. Clasificación de sistemas de ecuacións

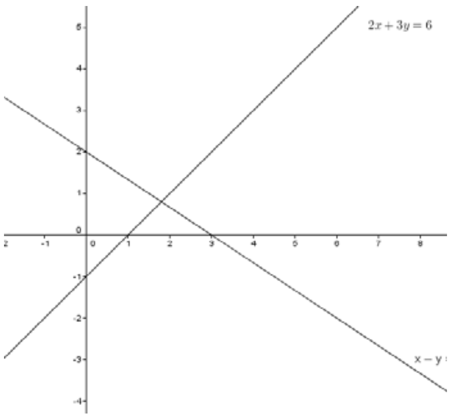
Recorda que:

Nun sistema de ecuacións lineais con dúas incógnitas, cada unha das ecuacións representa unha recta no plano. Estas rectas poden estar posicionadas entre si de tres maneiras distintas, o que nos axudará a clasificar o noso sistema en:

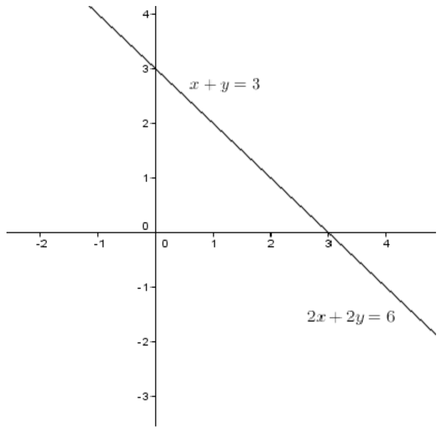
1) **Compatible determinado**: o sistema ten unha única solución, polo que as nosas rectas son **SECANTES.**

2) **Compatible indeterminado**: o sistema ten infinitas solucións, polo que as rectas son **COINCIDENTES.**

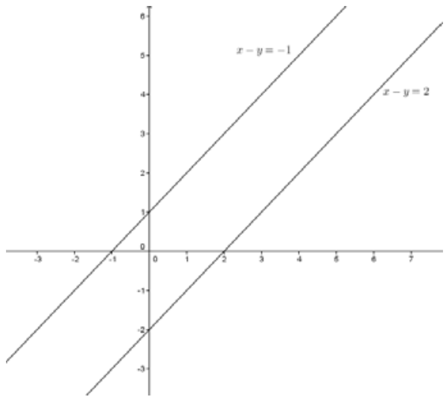
3) **Incompatible**: o sistema non ten solución, polo que as rectas son **PARALELAS.**



Compatible determinado



Compatible indeterminado



Incompatible

Actividades resoltas

- *Engade unha ecuación ax* – 2*y* = 2 para que o sistema resultante sexa:

  a) Compatible determinado.

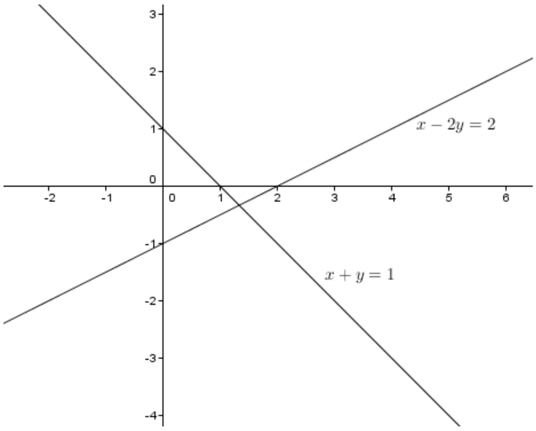
  b) Incompatible.

  c) Compatible indeterminado.

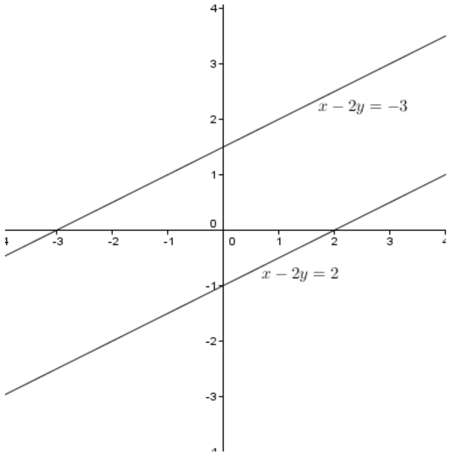
Solución:

a) Para que o sistema sexa compatible determinado, engadiremos unha ecuación que non teña os mesmos coeficientes que a que nos dá o exercicio. Por exemplo, *x* + e = 1.

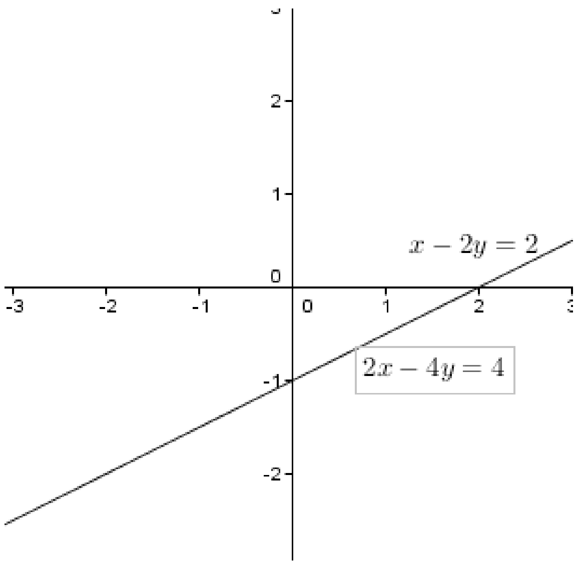
Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF



b) Para que sexa incompatible, os coeficientes teñen que ser os mesmos pero ter diferente termo independente. Por exemplo $x - 2y = -3$.



c) Para que sexa compatible indeterminado, poñeremos unha ecuación proporcional á que temos. Por exemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propostas

23. Representa os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -y+3x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-9y=9 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

24. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4x-6y=6 \end{cases}$

25. Resolve graficamente os seguintes sistemas e clasifícaos:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ -3x+y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x-4y=4 \end{cases}$

3.3. Resolución de sistemas polo método de substitución

Recorda que:

O **método de substitución** consiste en despexar unha incógnita dunha das ecuacións do sistema e substituír a expresión obtida na outra ecuación. Así, obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, obtemos o valor da outra incógnita.

Exemplo:

- *Imos resolver o sistema* $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ *polo método de substitución:*

Despexamos *x* da segunda ecuación: $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x=4-2y \end{cases}$ e substituímolo na primeira:

$$\begin{cases} 2(4-2y)-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-4y-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y-3y=1-8 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y=-7 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow y=1.$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*: $x = 4 - 2y \Rightarrow x = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.

A solución é: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}$.

Actividades propostas

26. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 2x+5y=-6 \\ x+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 4x+y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x+y=10 \end{cases}$

27. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

3.4. Resolución de sistemas polo método de igualación

Recorda que:

O **método de igualación** consiste en despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema e igualar os resultados obtidos. Así, obtemos unha ecuación de primeiro grao na que poderemos calcular a incógnita despexada. Co valor obtido, calculamos o valor da outra incógnita.

Exemplo:

- *Imos resolver o sistema* $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ *polo método de igualación:*

Despexamos a mesma incógnita das dúas ecuacións que forman o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y+1}{2} \\ x = 4 - 2y \end{cases}.$$

Igualamos agora os resultados obtidos e resolvemos a ecuación resultante:

$$\begin{cases} \dfrac{3y+1}{2} = 4 - 2y \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 1 = 8 - 4y \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4y = 8 - 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases}.$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*: $\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{cases}.$

A solución é: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$

Comprobamos: $\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2 \cdot 1 = 4 \end{cases}.$

Actividades propostas

28. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2x + 7y = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

29. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 2y = 7 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4.5. Resolución de sistemas polo método de redución

Recorda que:

O **método de redución** consiste en eliminar unha das incógnitas sumando as dúas ecuacións. Para iso multiplícanse unha ou ambas as dúas ecuacións por un número de modo que os coeficientes de *x* ou e sexan iguais pero de signo contrario.

Exemplo:

- *Imos resolver o sistema* $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ *polo método de redución:*

Multiplicamos a segunda ecuación por –2 para que os coeficientes do *x* sexan iguais pero de signo contrario e sumamos as ecuacións obtidas:

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-2)]{} \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -2x-4y=-8 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} \begin{cases} 2x-3y=1 \\ -7y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Co valor obtido de *y*, calculamos o *x*:

$$\begin{cases} 2x-3\cdot(1)=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{2}=2 \\ y=1 \end{cases}$$

A solución é: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Comprobamos: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}$.

Actividades propostas

30. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ -2x-5y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ x-4y=5 \end{cases}$

31. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 3x+y=8 \\ x-5y=-9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=9 \\ x+2y=10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=7 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

5. SISTEMAS DE ECUACIÓNS NON LINEAIS

5.1. Concepto de sistema de ecuacións non lineais

Un **sistema de ecuacións é non lineal** cando polo menos unha das súas ecuacións non é de primeiro grao:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Onde *a, b, a'* e *b'* son números reais que se denominan **coeficientes** e *c* e *c'* tamén son números reais chamados **termos independentes**.

Chamamos **solución** do sistema ao par (*x, y*) de valores que satisfán as dúas ecuacións do sistema.

Exemplo:

- *Son sistemas de ecuacións non lineais, por exemplo:*

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

Actividades propostas

32. Razoa se son ou non sistemas de ecuacións lineais os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

5.2. Resolución de sistemas de ecuacións non lineais

A resolución deste tipo de sistemas soe facerse polo método de **substitución** mediante os seguintes pasos:

1.- Despéxase unha incógnita dunha das ecuacións, a ser posible da de primeiro grao.

2.- Substitúese a incógnita despexada na outra ecuación.

3.- Resólvese a ecuación resultante.

4.- Cada un dos valores obtidos substitúese na outra ecuación, obtéñense así os valores correspondentes da outra incógnita.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades resoltas

- *Imos resolver o sistema non lineal* $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$

1.- Despéxase unha incógnita dunha das ecuacións, a ser posible da de primeiro grao:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

2.- Substitúese a incógnita despexada na outra ecuación:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

3.- Resólvese a ecuación resultante:

$$\begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+49-14x+x^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+24=0 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 2}{4}\Rightarrow x_1=4 \wedge x_2=3.$$

4.- Cada un dos valores obtidos substitúese na outra ecuación, obtéñense así os valores correspondentes da outra incógnita:

Se $x = 3$, $y = 7 - 3 = 4$

Se $x = 4$, $y = 7 - 4 = 3$

As solucións son **(3, 4)** e **(4, 3)**.

5.- *Comprobación*:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2+4^2=9+16=25 \\ 3+4=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2+3^2=16+9=25 \\ 4+3=7 \end{cases}$$

Actividades propostas

33. Resolve os seguintes sistemas non lineais:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2 = 4x \\ y - x = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$

34. Resolve os seguintes sistemas e comproba graficamente as solucións:

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 17 \\ xy = 4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x + y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 18 \\ y = x \end{matrix}\right\}$

35. A traxectoria dun proxectil é unha parábola de ecuación: e = $-x^2 + 5x$, e a traxectoria dun avión é unha recta de ecuación: e = $3x$. En que puntos coinciden ambas as traxectorias? Representa graficamente a recta e a parábola para comprobar o resultado.

36. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Axuda*: Utiliza o método de redución:

c) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{matrix}\right\}$

5.3. Sistemas de ecuacións lineais de máis de dúas incógnitas

A mellor forma de resolver sistemas lineais de máis de dúas incógnitas é ir substituíndo o sistema por outro equivalente de forma que cada vez se consiga que sexan cero os coeficientes de máis incógnitas. Este procedemento denomínase ***Método de Gauss***.

Actividades resoltas

Para resolver o sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, deixamos a primeira ecuación sen modificar. Queremos que a segunda ecuación teña un cero como coeficiente do "*x*", para iso multiplicámola por 2 e restámoslle a primeira. Para que a terceira ecuación teña un cero como coeficiente do "*x*", multiplicámola por 2 e restámoslle a primeira:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Agora podemos resolver o sistema de dúas ecuacións e dúas incógnitas formado polas dúas últimas ecuacións, ou continuar co noso procedemento. Para conseguir que na terceira ecuación o coeficiente

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

do "y" sexa un cero multiplicamos a terceira ecuación por 3 e a segunda por 7 e restámolas:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 38z = 38 \end{cases}$$

e agora xa podemos despexar cada unha das incógnitas de forma ordenada:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + z = \frac{38}{38} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1) - 3(1) = 0 \\ 3y + 5(1) = 8 \rightarrow y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Actividades propostas

37. Resolve os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

3.1. Resolución de problemas mediante ecuacións de 2º grao

Para resolver problemas por medio de ecuacións de 2º grao, primeiro teremos que pasar á linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar a incógnita.

3.- Traducir o enunciado á linguaxe alxébrica.

4.- Propor a ecuación e resolvela.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *Cal é o número natural cuxo quíntuplo aumentado en 6 unidades é igual ao seu cadrado?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos a incógnita, que neste caso, é o número que estamos buscando.

2.- Número buscado = x

3.- Traducimos agora o problema á linguaxe alxébrica:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolvemos a ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como o enunciado di “número natural” o número buscado é o 6.

5.- *Comprobación*: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propostas

38. Que número multiplicado por 4 é 5 unidades menor có seu cadrado?

39. Nunha clase deciden que todos van enviar unha carta ao resto de compañeiros. Un di: Imos escribir 380 cartas! Calcula o número de alumnos que hai na clase.

40. Calcula tres números consecutivos tales que a suma dos seus cadrados sexa 365.

41. Unha fotografía rectangular mide 14 cm de base e 10 cm de altura. Arredor da foto hai unha marxe de igual anchura para a base que para a altura. Calcula o ancho da marxe, sabendo que a área total da foto e a marxe é de 252 cm^2.

42. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 85. Cal é o número?

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

43. Un triángulo isósceles ten un perímetro de 20 cm e a base mide 4 cm, calcula os lados do triángulo e a súa área.

44. Unha folla de papel cadrada dóbrase pola metade. O rectángulo resultante ten unha área de 8 cm^2. Cal é o perímetro deste rectángulo?

45. Un pai di: "O produto da idade do meu fillo hai 5 anos polo da súa idade hai 3 anos é a miña idade actual, que son 35 anos". Calcula a idade do fillo.

46. Calcula as dimensións do rectángulo cuxa área é 21 m^2, sabendo que os seus lados se diferencian en 4 metros.

47. Nun triángulo rectángulo o cateto maior mide 4 cm menos que a hipotenusa e 4 cm máis que o outro cateto. Canto miden os lados do triángulo?

48. Calcula dous números pares consecutivos cuxo produto sexa 224.

49. Calcula tres números impares consecutivos tales que se ao cadrado do maior se lle restan os cadrados dos outros dous se obtén como resultado 15.

3.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuacións

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuacións, primeiro teremos que pasar a linguaxe alxébrica o enunciado do problema e logo resolvelo seguindo estes pasos:

1.- Comprender o enunciado.

2.- Identificar as incógnitas.

3.- Traducir o enunciado a linguaxe alxébrica.

4.- Propor o sistema e resolvelo.

5.- Comprobar a solución obtida.

Actividades resoltas

Imos resolver o seguinte problema:

- *A suma das idades dun pai e do seu fillo é 39 e a súa diferenza 25. Cal é a idade de cada un?*

Unha vez comprendido o enunciado, identificamos as incógnitas que, neste caso, son a idade do pai e o fillo.

2.- Idade do pai = x

Idade do fillo = y

3.- Pasamos o enunciado á linguaxe alxébrica:

A suma das súas idades é 39:

$$x + y = 39$$

E a súa diferenza 25:

$$x - y = 25$$

4.- Propomos o sistema e resolvémolo polo método que nos resulte máis sinxelo. Neste caso, facémolo por redución:

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\textit{sumamos}} \begin{cases} x + y = 39 \\ 2x + 0 = 64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: o pai ten 32 anos e o fillo ten 7 anos.

5.- *Comprobación:* En efecto, a suma das idades é 32 + 7 = 39 e a diferenza é 32 – 7 = 25.

Actividades propostas

50. A suma das idades de María e Afonso son 65 anos. A idade de Afonso menos a metade da idade de María é igual a **35**. Que idade ten cada un?

51. A suma das idades de Mariló e Xabier é 32 anos. Dentro de 7 anos, a idade de Xabier será igual á idade de Mariló máis 20 anos. Que idade ten cada un na actualidade?

52. Encontra dous números cuxa diferenza sexa 24 e a súa suma sexa 104.

53. Un hotel ten 42 habitacións (individuais e dobres) e 62 camas, cantas habitacións ten de cada tipo?

54. Nun triángulo rectángulo a hipotenusa mide 10 cm e as lonxitudes dos seus dous catetos suman 14 cm. Calcula a área do triángulo.

55. Neves pregúntalle a Míriam polas súas cualificacións en Matemáticas e en Lingua. Míriam dille "A suma das miñas cualificacións é 19 e o produto 90". Neves dálle os parabéns. Que cualificacións obtivo?

56. Dun número de tres cifras sábese que suman 12, que a suma dos seus cadrados é 61, e que a cifra das decenas é igual á das centenas máis 1. Que número é?

57. Hai tres zumes compostos do seguinte modo:

O primeiro de 40 dl de laranxa, 50 dl de limón e 90 dl de pomelo.

O segundo de 30 dl de laranxa, 30 dl de limón e 50 dl de pomelo.

O terceiro de 20 dl de laranxa, 40 dl de limón e 40 dl de pomelo.

Que volume haberá tomarse de cada un dos zumes anteriores para formar un novo zume de 34 dl de laranxa, 46 dl de limón e 67 dl de pomelo.

58. Véndense tres especies de cereais: trigo, cebada e millo. Cada kg de trigo véndese por 2 €, o da cebada por 1 € e o de millo por 0.5 €. Se se venden 200 kg en total e se obtén pola venda 300 €, cantos volumes de cada cereal se venderon?

59. Deséxase mesturar fariña de 2 €/kg con fariña de 1 €/kg para obter unha mestura de 1,2 €/kg. Cantos kg deberemos poñer de cada prezo para obter 300 kg de mestura?

60. Nunha tenda hai dous tipos de xoguetes, os de tipo A que utilizan 2 pilas e os de tipo B que utilizan 5 pilas. Se en total na tenda hai 30 xoguetes e 120 pilas, cantos xoguetes hai de cada tipo?

61. Un peón sae dunha cidade A e diríxese a unha cidade B que está a 15 km de distancia a unha velocidade de 4 km/h e, no mesmo momento, sae un ciclista da cidade B a unha velocidade de 16 km/h e diríxese cara a A. Canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de B se cruzan?

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

O número de ouro está en todas as partes

Coñeces un número irracional cuxa parte decimal sexa igual á do seu cadrado?

Para encontralo debemos resolver a ecuación: $x^2 = x + n$, onde n sexa un número enteiro. Imaxinemos que n sexa igual a 1, entón:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} 1.618033988749... \\ -0.618033988749... \end{cases}$$

O número de ouro!

Coñeces un número cuxa parte decimal sexa igual á do seu inverso?

Propomos de novo a ecuación: $1/x = x + n$, onde n sexa un número enteiro. Imaxinemos que n sexa igual a –1, entón:

$$1/x = x - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Temos a mesma ecuación de antes! A solución volve ser o número de ouro!

O número de ouro, Φ, está en todas as partes! Xa o encontraramos na pintura, arquitectura, escultura e na propia natureza. Agora atopámolo nas ecuacións.

O romanesco é un coñecido exemplo de fractal. Cada un dos seus anaquiños é similar ao completo, cun cambio de escala. Tamén está relacionado co número de ouro e coa sucesión de *Fibonacci*. Se contamos as espirais que se forman son dous números sucesivos da sucesión de *Fibonacci*, cara á dereita son 8 e cara á esquerda son 13. Recorda, a sucesión é: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13....

Saberías calcular $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$? Hai infinitas raíces cadradas encadeadas. Como se a infinito lle sumo 1 non varía, unha forma de atopar o seu valor é volver substituír x na igualdade: $x = \sqrt{1+x}$ e resolver a ecuación:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$$

Saberías calcular $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$? é unha fracción continua. Hai infinitas fraccións encadeadas. Para calculala de novo substituímos x: $x = 1 + \frac{1}{x}$ e resolvemos a ecuación: $x^2 = x + 1$ que xa sabemos que a súa solución positiva é Φ.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Obtención da fórmula para resolver ecuacións de segundo grao

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$\Downarrow$ Multiplicamos por $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$\Downarrow$ Sumamos b^2

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

$\Downarrow$ Completamos cadrados

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$\Downarrow$ Calculamos a raíz cadrada

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$\Downarrow$ Despexamos o x

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tres ecuacións de segundo grao interesantes

$x^2 = 2$

Esta ecuación aparece ao aplicarlle o Teorema de *Pitágoras* a un triángulo rectángulo isósceles de lados iguais a 1, ou ao calcular a diagonal dun cadrado de lado 1. A súa solución é a lonxitude da hipotenusa ou da diagonal. Ten de interesante que se demostra que esta solución non é un número racional, un número que poida escribirse como cociente de dous números enteiros.

$x + 1 = x^2$

Tamén se pode escribir como: $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$ que é unha proporción, onde x toma o valor $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\approx$ 1,618… que é o número de ouro, outro número irracional.

$x^2 = -1$

A terceira ecuación non ten solución real. Ningún número real ao elevalo ao cadrado pode dar un número negativo, pero, se ampliamos o campo real coa súa raíz, $\sqrt{-1} = i$, resulta que xa todas as ecuacións de segundo grao teñen solución. Aos números $a + b \cdot i$ chámaselles **números complexos**.

Emmy Noether foi unha matemática alemá de orixe xudía cuxos traballos en Álxebra permitiron resolver o problema da conservación da enerxía.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Problemas

Algúns problemas de inxenio que se resolven (ou non) por ecuacións ou sistemas.

Os cocos

Tres mariñeiros e un mono recollen cocos. Antes de repartilos dormen. Pola noite un mariñeiro reparte o montón de cocos en tres partes iguais, sóbralle un que lle dá ao mono, e garda a súa parte. Un segundo mariñeiro fai a mesma operación, sóbralle tamén un e garda a súa parte. O mesmo fai o terceiro mariñeiro. Á mañá seguinte reparten os cocos e agora o reparto é exacto. Cantos cocos había?

A piscina

A piscina do polideportivo municipal tivo que ser baleirada por un problema de contaminación. Este proceso realizouse en tres fases para poder utilizar a auga na limpeza das instalacións. Primeiro sacouse a terceira parte, despois a metade do resto e aínda quedan 150 m^3 de auga. Que capacidade ten a piscina?

Axuda: non formules unha ecuación. Fai un diagrama.

As perlas do raxá

Un raxá deixoulles ás súas fillas certo número de perlas e determinou que o reparto se fixese do seguinte modo: a filla maior tomaría unha perla e un sétimo do que quedara. A segunda filla recibiría dúas perlas e un sétimo do que restase. A terceira moza recibiría tres perlas e un sétimo do que quedara. E así sucesivamente. Feita a división, cada unha das irmás recibiu o mesmo número de perlas. Cantas perlas había? Cantas fillas tiña o raxá?

A invitación

Xoán convida a Marta e a Helena a merendar. Prepara unha limoada e diponse a servila. Marta quérea con pouco limón e Helena con moito. Xoán puxo o zume de limón e a auga en xarras iguais e coa mesma cantidade. Para compracer ás súas convidadas toma un vaso da xarra con limón e bótao na da auga, e a continuación toma un vaso do mesmo tamaño da mestura e bótao na do limón. Haberá máis limón na xarra da auga ou auga na xarra do limón?

Axuda: Este problema é moi antigo. Parece de ecuacións pero así é moi difícil. Aínda que pensando un pouco, resulta moi sinxelo.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Ecuación de segundo grao	É unha ecuación alxébrica na que a maior potencia da incógnita é 2. Ten a forma: $ax^2 + bx + c = 0$ onde a, b e c son números reais, con $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolución de ecuacións de segundo grao completas	Úsase a fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$
Número de solucións dunha ecuación de segundo grao	Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, ten dúas solucións reais e distintas Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, ten unha solución dobre. Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a ecuación non ten solución.	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, ten dúas solucións 4 e -1. $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, ten unha raíz dobre: $x = 2$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$, non ten solución real.
Resolución de ecuacións de segundo grao incompletas	Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, despexamos a incógnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$. Se $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = \mathbf{0}$ e $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
Suma e produto de raíces	$x_1\, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$; $x_2 = 2$.
Sistema de ecuacións lineais	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificación	**Compatible determinado**: unha única solución, o punto de intersección. As rectas son **secantes**: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ **Compatible indeterminado**: Infinitas solucións, polo que as rectas son **coincidentes**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: non ten solución, as rectas son **paralelas**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Métodos de resolución	**Substitución:** despexar unha incógnita e substituír na outra ecuación. **Igualación:** despexar a mesma incógnita das dúas ecuacións. **Redución:** sumar as dúas ecuacións, multiplicándoas por números adecuados.	

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Ecuacións de segundo grao

1. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ b) $x(-5 + x) = 3$ c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$ e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$ f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$

g) $(3x + 2) \cdot (4x - 2) = -6x - 2$ h) $x \cdot (x + 13) = 168$ i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$

2. Resolve as seguintes ecuacións de 2º grao con denominadores:

a) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x+2}{4} = 5$ b) $\frac{x^2-5}{2} + \frac{2x^2-3x+7}{2} = 5$ c) $\frac{2x^2+1}{5} + \frac{x+3}{10} = 1$

d) $\frac{2-2x^2}{3} + \frac{4x-3}{2} = \frac{5}{6}$ e) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{5x-9}{6} = 4x-3$ f) $\frac{2x+3x^2}{7} - \frac{3x-8}{14} = 1$

3. Resolve mentalmente as seguintes ecuacións de 2º grao:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoriza as ecuacións do problema anterior. Así, se as solucións son 2 e 3, escribe:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$. Observa que se o coeficiente de x^2 fose distinto de 1 os factores teñen que estar multiplicados por este coeficiente.

5. Cando o coeficiente b é par (b = 2B), podes simplificar a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta dicir $x = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$, logo as súas solucións son 6 e 2. Utiliza esa expresión para resolver:

a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 7 = 0$ c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

6. Resolve mentalmente as ecuacións seguintes, logo desenvolve as expresións e utiliza a fórmula xeral para volver resolvelas.

a) $(x - 2) \cdot (x - 5) = 0$ b) $(x + 1) \cdot (x - 6) = 0$ c) $(x - 3) \cdot (x - 5) = 0$

d) $(x - 4) \cdot (x + 7) = 0$ e) $(x + 8) \cdot (x - 9) = 0$ f) $(x - 2) \cdot (x + 3) = 0$

7. Determina o número de solucións reais que teñen as seguintes ecuacións de segundo grao calculando o seu discriminante, e logo resólveas.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$ f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escribe tres ecuacións de segundo grao que non teñan ningunha solución real. *Axuda*: Utiliza o discriminante.

9. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan unha solución dobre.

10. Escribe tres ecuacións de segundo grao que teñan dúas solucións reais e distintas.

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

11. Resolve as seguintes ecuacións polinómicas:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 8x = 0$ c) $2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

12. Resolve as seguintes ecuacións aplicando un cambio de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

13. Resolve as seguintes ecuacións racionais:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$ b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$ c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$ d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$ f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$ g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$ i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$ j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$

14. Resolve as seguintes ecuacións irracionais:

a) $x = -2 + \sqrt{5 + 4x^2}$ b) $\sqrt{16 - x} = x - 4$ c) $5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 2x$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 5$ e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$ f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$

g) $5\sqrt{x-2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2$ i) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3$

15. Resolve as ecuacións seguintes: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ b) $2^{2x} = \frac{1}{1024}$

Sistemas lineais de ecuacións

16. Resolve os seguintes sistemas polo método de substitución:

a) $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

17. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación:

a) $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 10 \\ -8x + 3y = -13 \end{cases}$

18. Resolve os seguintes sistemas polo método de redución:

a) $\begin{cases} 7x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ -x - 6y = -14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -5x + 2y = -9 \end{cases}$

19. Resolve de forma gráfica os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -7x + 5y = 3 \end{cases}$

20. Resolve os seguintes sistemas:

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

a) $\begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{3y-1}{2} = -1 \\ \frac{3x+1}{2} + \frac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{5y+7}{6} = -2 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{5x+1}{2} + \frac{2y-5}{3} = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

21. Copia no teu caderno e completa os seguintes sistemas incompletos de forma que se cumpra o que se pide en cada un:

Compatible indeterminado — Incompatible — A súa solución sexa $x = 2$ e e = 1

a) $\begin{cases} (\ )x + 2y = (\ ) \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ (\ )x + y = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y = (\ ) \\ (\ )x + 2y = 8 \end{cases}$

Incompatible — A súa solución sexa $x = -1$ e e = 1 — Compatible indeterminado

d) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x + (\ )y = (\ ) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x + (\ )y = -1 \\ (\ )x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (\ )x + 8y = (\ ) \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

22. Resolve os seguintes sistemas polo método de igualación e comproba a solución graficamente. De que tipo é cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x + 6y = 4 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Problemas

23. Nunha tenda alugan bicicletas e triciclos. Se teñen 30 vehículos cun total de 80 rodas, cantas bicicletas e cantos triciclos teñen?

24. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 12 lle faltan 64 unidades para completar o seu cadrado?

25. Descompón 12 en dous factores cuxa suma sexa 7.

26. O triplo do cadrado dun número aumentado no seu duplo é 616. Que número é?

27. A suma dos cadrados de dous números impares consecutivos é 130. Determina estes números.

28. Van cargados un asno e un macho. O asno queixábase do peso que levaba enriba. O macho contestoulle: se eu levara un dos teus sacos, levaría o dobre de carga ca ti pero se ti tomas un dos meus, os dous levaremos igual carga. Cantos sacos leva cada un?

29. Que número multiplicado por 3 é 28 unidades menor có seu cadrado?

30. Calcula tres números consecutivos cuxa suma de cadrados é 110.

31. Dentro de 2 anos, a idade de Raquel será a metade do cadrado da idade que tiña hai 10 anos. Que idade ten Raquel?

32. Dous números diferéncianse en 3 unidades e a suma dos seus cadrados é 185. Cales son estes números?

33. A suma de dous números é 2 e o seu produto é –80, de que números se trata?

34. María quere formar bandexas dun quilogramo con caramelos e bombóns. Se os caramelos lle custan a 3 euros o quilo e os bombóns a 7 euros o quilo, e quere que o prezo de cada bandexa sexa de 5 euros, que cantidade deberá poñer de cada produto? Se quere formar 100 bandexas, que cantidade de caramelos e de bombóns vai precisar?

35. Determina os catetos dun triángulo rectángulo cuxa suma é 17 cm e a hipotenusa mide 13 cm.

36. O produto de dous números é 6 e a suma dos seus cadrados 13. Calcula estes números.

37. A suma de dous números é 12. O dobre do primeiro máis o triplo do segundo é 31. De que números se trata?

38. Nun garaxe hai 30 vehículos entre coches e motos. Se en total hai 80 rodas, cantos coches e motos hai no garaxe?

39. A idade actual de Luís é o dobre da de Míriam. Dentro de 10 anos, as súas idades sumarán 50. Cantos anos teñen actualmente Luís e Míriam?

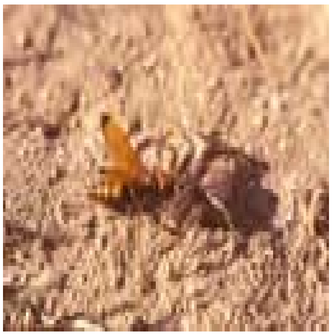
40. Na miña clase hai 25 persoas. Regaláronnos a cada rapaza 3 adhesivos e a cada rapaz 2 chapas. Se en total había 65 regalos. Cantos rapaces e rapazas somos na clase?

41. Entre o meu avó e o meu irmán teñen 80 anos. Se o meu avó ten 50 anos máis có meu irmán, que idade ten cada un?

42. Tres bocadillos e un refresco custan 8 €. Catro bocadillos e dous refrescos custan 12 €. Cal é o prezo do bocadillo e do refresco?

43. Nunha granxa hai galiñas e ovellas. Se se contan as cabezas, son 40. Se se contan as patas, son 100. Cantas galiñas e ovellas hai na granxa?

44. Un rectángulo ten un perímetro de 180 metros. Se o longo é 10 metros maior có ancho, cales son as dimensións do rectángulo?



45. Nun moedeiro hai billetes de 5 € e 10 €. Se en total hai 10 billetes e 75€, cantos billetes de cada valor hai no moedeiro?

46. Nunha pelexa entre arañas e avespas, hai 13 cabezas e 90 patas. Sabendo que unha araña ten 8 patas e unha avespa 6, cantas avespas e arañas hai na pelexa?

47. Unha clase ten 30 estudantes e o número de alumnas é o dobre do de alumnos. Cantos rapaces e rapazas hai?

48. Neves ten 8 anos máis có seu irmán Daniel, e a súa nai ten 50 anos. Dentro de 2 anos a idade da nai será o dobre da suma das idades dos seus fillos, que idades teñen?

49. Mestúranse 18 kg de arroz de 1.3 € o quilogramo con 24 kg de arroz de prezo descoñecido, resultando o prezo da mestura de 1.7 € o kg. Que prezo tiña o segundo arroz?

50. A altura dun trapecio isósceles é de 3 cm, o perímetro, 28 cm, e os lados inclinados son iguais á base menor. Calcula a área do trapecio.

51. Dous autobuses saen, un desde Madrid e o outro desde Cáceres ás 9 da mañá. Un vai a 80 km/h e o outro a 100 km/h. A que hora se cruzan? A cantos km de Madrid estarán?

52. Nun concurso gáñanse 40 euros por cada resposta acertada e pérdense 80 por cada erro. Despois de 10 preguntas, Carmela leva gañados 280 euros. Cantas preguntas acertou?

53. Paco comprou 5 zumes e 4 batidos por 5.7 €, logo comprou 7 zumes e 5 batidos e custáronlle 7.8 €. Calcula os prezos de ambas as cousas.

54. Que fracción é igual a 1 cando se suma 1 ao numerador e é igual a 1/2 se se suma 2 ao denominador?

55. O cociente dunha división é 2 e o resto é 1. Se o divisor diminúe en 1 unidade, o cociente aumenta en 1 e o resto novo é 1. Calcular o dividendo e o divisor.

56. Dúas amigas foron pescar. Ao final do día unha dixo: “Se ti me dás un dos teus peixes, entón eu terei o dobre ca ti”. A outra respondeulle: “Se ti me dás un dos teus peixes, eu terei o mesmo número de peixes ca ti”. Cantos peixes tiña cada unha?

57. Calcula as dimensións dun rectángulo sabendo que a súa área é 35 cm^2 e o perímetro, 24 cm.

58. Un peón sae dunha cidade “A” a unha velocidade de 4 km/h, e diríxese a unha cidade “B” que está a 20 km da cidade “A”. 30 minutos despois sae un ciclista da cidade “B” a unha velocidade de 20 km/h e diríxese cara a “A”. Canto tempo leva o peón camiñando no momento do encontro? A que distancia de “B” se cruzan?

59. Deséxase mesturar un aceite de 2,7 €/l con outro aceite de 3,6 €/l de modo que a mestura resulte a 3 €/l. Cantos litros de cada clase deben mesturarse para obter 100 litros da mestura?

60. Ao intercambiar as cifras dun número de dúas cifras obtense outro que é 45 unidades maior. Calcula o número inicial.

61. A diagonal dun rectángulo mide 25 cm e o perímetro 70 cm. Calcula os lados do rectángulo.

62. Un balado rodea un terreo rectangular de 300 m^2. Se o balado mide 70 metros, calcula as dimensións do terreo.

63. Varios amigos van facer un agasallo de vodas que custa 800 euros, que pagarán a partes iguais. A última hora apúntanse seis amigos máis, co que cada un toca a 30 euros menos. Cantos amigos eran inicialmente? Canto pagará ao final cada un?

64. As diagonais dun rombo diferéncianse en 2 cm e a súa área é de 24 cm^2. Calcula o seu perímetro.

65. Un tren sae de Barcelona cara a Madrid a unha velocidade de 200 km/h. Unha hora máis tarde sae outro tren de Madrid cara a Barcelona a 220 km/h; a distancia entre as dúas cidades é de 618 km. Ao cabo de canto tempo se cruzan os dous trens? A que distancia de Barcelona?

66. Un coche sae dunha cidade “A” a unha velocidade de 100 km/h e 30 minutos máis tarde outro coche sae de “A” na mesma dirección e sentido a unha velocidade de 120 km/h. Canto tempo tardará o segundo en alcanzar ao primeiro e a que distancia de “A” se produce o encontro?

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. A solución da ecuación $2(x-3)-3(x^2-4)=1$ é:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. As solucións da ecuación $80 = x(x-2)$ son:

a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. As solucións da ecuación $\frac{3x-1}{2}-\frac{x+5}{6}=\frac{x^2}{3}$ son:

a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. As solucións da ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ son:

a) 2, –2, 5, –5   b) 3, –3, 2, –2   c) 1, –1, 4, –4   d) 3, –3, 5, –5

5. As rectas que forman o sistema $\begin{cases} 7x+21y=14 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ son:

a) Secantes   b) Paralelas   c) Coincidentes   d) Crúzanse

6. A solución do sistema $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$ é:

a) $x = 2$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 2$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) non ten solución

7. A solución do sistema $\begin{cases} 3+2x=x-1+y \\ 2x-9y=-43 \end{cases}$ é:

a) $x = 1$ e $y = 5$ b) $x = -2$ e $y = -5$ c) $x = -43/2$ e $y = 0$ d) $x = 3$ e $y = 4$

8. A solución do sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -2x+3y+z=7 \\ 2x-3y+2z=2 \end{cases}$ é:

a) $x = 3, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 1, z = 3$ c) $x = -1, y = -2, z = -3$ d) $x = 1, y = 2, z = 3$

9. Nunha granxa, entre galiñas e vacas hai 120 animais e 280 patas. Cantas galiñas e vacas hai na granxa?

a) 90 galiñas e 30 vacas   b) 100 galiñas e 20 vacas   c) 80 galiñas e 40 vacas

10. Cal é a idade dunha persoa se ao multiplicala por 5, lle faltan 234 unidades para chegar ao seu cadrado?

a) 18 anos   b) 20 anos   c) 25 anos   d) 28 anos

Autora: Raquel Hernández
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 5: Inecuacións

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Ana Lorente

Revisora: María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

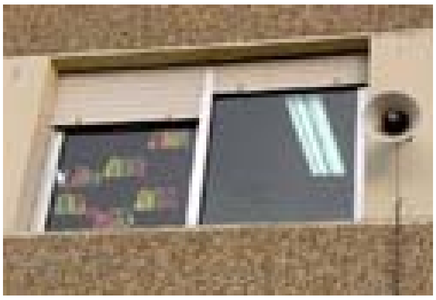
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

En moitas ocasións vas atoparte con inecuacións. Se traballas con intervalos dirás $a < x < b$, por exemplo. Noutras ocasións ou teu problema será que algo debe ser menor que unha certa cantidade. Imaxina que queremos construír unha ventá na parede dunha habitación de 4 metros de longo e 2.3 metros de alto. É imposible que a ventá teña unhas dimensións maiores que as da parede. Para complicalo un pouco, imaxina agora que a lonxitude total dos perfís cos que imos construír a ventá é de 10 metros. Se a ventá é rectangular e chamamos x á lonxitude da base e y á da altura, sabemos que $x \leq 4$, $y \leq 2.3$, $2x + 2y \leq 10$. Hai moitas solucións que resolven o problema. Pero o arquitecto desexa que a ventá teña a maior luz posible. Ti xa sabes que a área máxima conséguela cun cadrado, pero… esta solución non che serve porque o lado debería medir 2.5 metros e sairiámonos da parede. Debemos xogar con esas desigualdades para dar unha solución ao problema.



Autora: Ana Lorente

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

1. INTERVALOS

Recorda que:

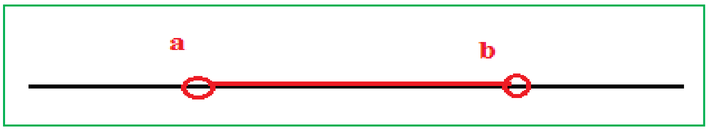
Un intervalo de números reais é un subconxunto do conxunto dos números reais que, intuitivamente, está formado por unha soa peza.

1.1. Tipos de intervalos

Intervalo aberto: é aquel no que os extremos non forman parte do mesmo, é dicir, todos os puntos da recta comprendidos entre os extremos forman parte do intervalo, agás os propios extremos.

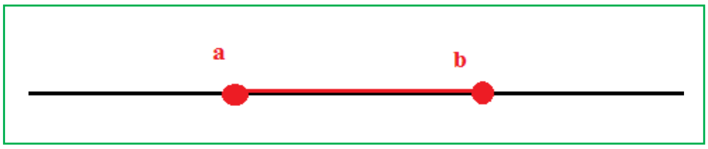
Noutras palabras $I = (a, b) = \{x \in \mathfrak{R};\ a < x < b\}$, observa que se trata de desigualdades estritas.

Graficamente, representámolo na recta real do modo seguinte:



Intervalo pechado: é aquel no que os extremos si forman parte do mesmo, é dicir, todos os puntos da recta comprendidos entre os extremos, incluídos estes, forman parte do intervalo.

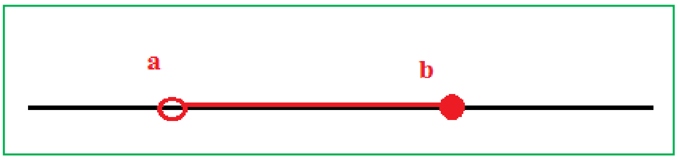
Noutras palabras $I = [a, b] = \{x \in \mathfrak{R};\ a \le x \le b\}$, observa que agora non se trata de desigualdades estritas. Graficamente:



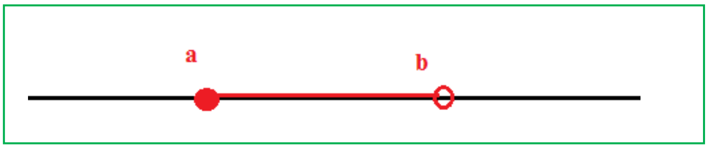
Intervalo semiaberto: é aquel no que só un dos extremos forma parte do mesmo, é dicir, todos os puntos da recta comprendidos entre os extremos, incluído un destes, forman parte do intervalo.

Intervalo semiaberto pola esquerda, o extremo inferior non forma parte do intervalo, pero o superior si, noutras palabras: $I = (a, b] = \{x \in \mathfrak{R};\ a < x \le b\}$,

observa que o extremo que queda fóra do intervalo vai asociado a unha desigualdade estrita.



Intervalo semiaberto pola dereita, o extremo superior non forma parte do intervalo, pero o inferior si, noutras palabras $I = [a, b) = \{x \in \mathfrak{R};\ a \le x < b\}$, observa que o extremo que queda fóra do intervalo vai asociado a unha desigualdade estrita. Graficamente:



1.2. Semirrectas reais

Semirrecta dos números positivos $S = (0, \infty)$, é dicir, desde cero ata infinito.

Semirrecta dos números negativos $S = (-\infty, 0)$, é dicir, desde o menos infinito, ou infinito negativo, ata cero.

Co que toda a recta dos números reais é $\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$.

Pódese considerar unha semirrecta como un intervalo infinito.

Actividades propostas

1. Escribe os seguintes intervalos mediante conxuntos e represéntaos na recta real:

a) $[1, 7)$ b) $(-3, 5)$ c) $(2, 8]$ d) $(-\infty, 6)$

2. Represента na recta real e escribe en forma de intervalo:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \le x < 6$ d) $x \ge 7$

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

2. INECUACIÓNS

Unha desigualdade é unha expresión numérica ou alxébrica unida por un dos catro signos de desigualdade: $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Por exemplo:

- $-2 < 5$, $4 \geq x + 2$, $x^2 - 5 \geq x$, $x + y \geq 2$.

Unha **inecuación** é unha desigualdade alxébrica na que aparecen unha ou máis incógnitas.

O **grao** dunha inecuación é o maior dos graos ao que están elevadas as súas incógnitas.

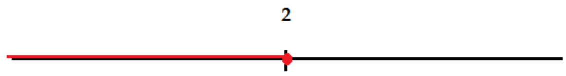
Así,

- $4 \geq x + 2$ e $x + y \geq 2$ son inecuacións de primeiro grao, mentres que $x^2 - 5 \geq x$ é de segundo grao.

Resolver unha inecuación consiste en encontrar os valores que a verifican. Estes denomínanse **solucións** da mesma.

Por exemplo:

- $3 \geq x + 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$



2.1. Inecuacións equivalentes

Dúas inecuacións son **equivalentes** se teñen a mesma solución.

Ás veces, para resolver unha inecuación, resulta conveniente encontrar outra equivalente máis sinxela. Para iso, pódense realizar as seguintes transformacións:

- Sumarlles ou restarlles a mesma expresión aos dous membros da inecuación.

$$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$$

- Multiplicar ou dividir ambos os membros por un número positivo.

$$3x < 3 \Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar ou dividir ambos os membros por un número negativo e cambiar a orientación do signo da desigualdade.

$$-x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$$

Actividades propostas

3. Dada a seguinte inecuación $2 + 3x < x + 1$, determina cales dos seguintes valores son solución da mesma: 0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

4. Realiza as transformacións indicadas de modo que se obteñan ecuacións equivalentes:

a) Sumar 3: $x - 1 > 4$
b) Restar 5: $x - 3 > 7$
c) Multiplicar por 5: $-8x \geq 9$
d) Multiplicar por –5: $-3x \geq 7$
e) Dividir entre 2: $4x < 10$
f) Dividir entre –2: $4x \geq 10$

5. Escribe unha inecuación que sexa certa para $x = 3$ e falsa para $x = 3.5$.

3. INECUACIÓNS CUNHA INCÓGNITA

3.1. Inecuacións de primeiro grao

Unha inecuación de primeiro grao cunha incógnita pode escribirse da forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \text{ ou } ax \leq b.$$

Para resolver a inecuación na maioría dos casos convén seguir o seguinte procedemento:

1º) **Quitar denominadores**, se os hai. Para iso, multiplícanse os dous membros da ecuación polo m.c.m. dos denominadores.

2º) **Quitar as parénteses**, se as hai.

3º)**Traspoñer** os termos con *x* a un membro e os números ao outro.

4º) **Reducir** termos semellantes.

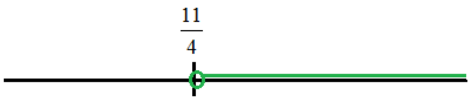
5º) **Despexar o** *x*.

Exemplo:

$$\frac{x-3}{3}-\frac{(x-7)}{6}>\frac{4-x}{2}\Leftrightarrow\frac{2(x-3)-(x-7)}{6}>\frac{3(4-x)}{6}\Leftrightarrow 2(x-3)-(x-7)>3(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x-6-x+7>12-3x\Leftrightarrow 2x-x+3x>6-7+12\Leftrightarrow 4x>11\Leftrightarrow x>\frac{11}{4}$$

$$x\in\left(\frac{11}{4},+\infty\right)$$



Actividades propostas

6. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:

a) $2 + 3x < x + 1$ b) $5 + 2x \leq 7x + 4$ c) $6 + 5x > 6x + 4$ d) $4 + 8x \geq 2x + 9$

7. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:

a) $3(2 + 3x) < -(x + 1)$ b) $5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)$ c) $2(6 + 5x) + 3(x - 1) > 2(6x + 4)$

8. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:

a) $3 + 4x < x/2 + 2$ b) $4 + 4x/3 \leq 7x/2 + 5$ c) $(5 + 7x)/3 > 8x + 2$ d) $(4 + 8x)5 + 3 \geq (2x + 9)/7$

9. Escribe unha inecuación cuxa solución sexa o seguinte intervalo:

a) $[1, \infty)$ b) $(-\infty, 5)$ c) $(2,\infty)$ d) $(-\infty, 6)$

10. Calcula os valores de *x* para que sexa posible calcular as seguintes raíces:

a) $\sqrt{3x-5}$ b) $\sqrt{-x-12}$ c) $\sqrt{3-5x}$ d) $\sqrt{-3x+12}$

3.2. Inecuacións de segundo grao

Unha inecuación de segundo grao cunha incógnita pode escribirse da forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

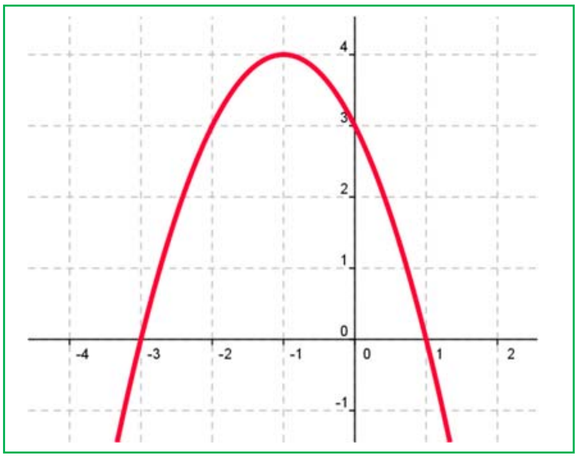
empregando calquera dos catro signos de desigualdade.

Para resolvela, calculamos as solucións da ecuación asociada, representámolas sobre a recta real, quedando polo tanto a recta dividida en tres, dous ou un intervalo, dependendo de que a ecuación teña dúas, unha ou ningunha solución.

En cada un deles, o signo do polinomio mantense constante, polo que bastará con determinar o signo que ten este polinomio para un valor calquera de cada un dos intervalos. Para saber se as solucións da ecuación verifican a inecuación, bastará con substituíla na mesma e comprobalo.

Exemplo:

- Representa graficamente a parábola $y = -x^2 - 2x + 3$ e indica en que intervalos é $-x^2 - 2x + 3 > 0$.



Observa na gráfica que a parábola toma valores positivos entre –3 e 1. A solución da inecuación é:

$$x \in (-3, 1).$$

O punto –3 non é solución, nin tampouco o punto 1, pois o problema ten unha desigualdade estrita, >. Se tivese a desigualdade ≥, $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$ a solución sería:

$$x \in [-3, 1].$$

Se fose $-x^2 - 2x + 3 < 0$, a solución sería: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Se fose $-x^2 - 2x + 3 \leq 0$, a solución sería: $x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$.

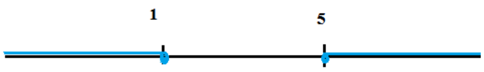
Exemplo:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ as súas raíces son $x = 1$ e $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signo de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		non		si

Polo tanto, a solución é $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Actividades propostas

11. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

12. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

13. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $3x^2 - 5x \geq 0$
b) $3x^2 - 27 > 0$
c) $x^2 \leq 0$
d) $2x^2 > 4x$
e) $2x^2 - 8 > 0$
f) $5x^2 + 5x \geq 0$
g) $5x^2 - 5 \leq 0$
h) $x^2 - x > 0$

14. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$
b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$
c) $x^2 + 9x + 14 > 0$
d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$
f) $x^2 + 8x + 16 > 0$
g) $x^2 + x + 3 \geq 0$
h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

15. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 + x - 6 > 0$
b) $x^2 - x - 12 \leq 0$
c) $x^2 - x - 20 < 0$
d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$
e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$
f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$
g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$
h) $2x^2 + x - 15 < 0$

16. Calcula os valores de *x* para que sexa posible obter as seguintes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

17. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 51$ c) $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+6}$

3.3. Sistemas de inecuacións

Un sistema de inecuacións de primeiro grao cunha incógnita é aquel no que a única variable que intervén en todas as ecuacións está elevada a un expoñente igual á unidade.

Sistemas de dúas ecuacións, teñen por expresión xeral:

$$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$$, con calquera dos signos <,>, $\leq$ ou $\geq$.

Para resolvelos, independentemente do número de inecuacións que compoñan o sistema, resólvese cada inecuación por separado, e ao final determínase a solución como a intersección de todas elas.

Exemplo:

- $\begin{cases} 2x > 4 \\ x + 5 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5 \end{cases}$, os intervalos solución son $\begin{cases} (2, +\infty) \\ (-\infty, 5] \end{cases} \Rightarrow (2, +\infty) \cap (-\infty, 5] = (2, 5]$

Logo a solución común a ambas as dúas está na intersección de ambos os dous, é $(2, 5]$.

Graficamente pode verse:

Actividades propostas

18. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións cunha incógnita:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ x - 4 > -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 1 \geq x + 9 \\ x + 5 \leq 2 - 3x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 3 \leq 3x + 7 \\ \dfrac{2x}{5} - \dfrac{x}{4} \geq \dfrac{2}{3} \end{cases}$

19. Indica un número positivo que ao sumarlle 5 sexa menor que 7.

20. Expresa mediante unha inecuación a área dun cadrado sabendo que o seu perímetro é maior que o dun rectángulo de lados 3 e 7 cm.

21. Determina as posibles idades de Pepita e da súa filla Charo sabendo que difiren en máis de 20 anos e que dentro de 2 anos, a cuarta parte da idade da nai é menor cá idade da filla.

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

3.4. Inecuacións en valor absoluto

Unha inecuación en valor absoluto é aquela na que parte da inecuación, ou toda ela, vén afectada polo valor absoluto da mesma.

A expresión xeral é da forma $|ax+b| \le c$, empregando calquera dos catro signos de desigualdade.

Para resolvela, aplicamos a definición de valor absoluto dunha cantidade e pasamos a un sistema de dúas ecuacións cuxa solución é a solución da inecuación.

$$|ax+b| \le c \text{ por definición} \begin{cases} ax+b \le c \\ -ax-b \le c \end{cases}$$

Exemplo:

$$|2x-4| \le 12 \;\Rightarrow \begin{cases} 2x-4 \le 12 \\ -2x+4 \le 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x \ge -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 8] \\ [-4, +\infty) \end{cases} \Rightarrow [-4, 8] \Rightarrow$$

$$|2x-6| > 10 \;\Rightarrow \begin{cases} 2x-6 > 10 \\ -2x+6 > 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 8 \\ x < -2 \end{cases}.$$

Non existe ningún *x* que á vez sexa menor que –2 e maior que 8, pero a solución son os valores que ou ben pertencen a un intervalo ou ben ao outro: $x \in (-\infty, -2) \cup (8, +\infty)$.

Comproba que, por exemplo, $x = 10$ verifica que $2x - 6 = 20 - 6 = 14 > 10$, e que $x = -3$, tamén xa que $2x - 6 = -6 - 6 = -12$ cuxo valor absoluto é maior que 10.

Actividades propostas

22. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $|x + 3| < 2$ b) $|2x + 5| > 1$ c) $|x - 6| \le 2$ d) $|x - 2| \ge 2$

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

4. INECUACIÓNS CON DÚAS INCÓGNITAS

4.1. Inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas

É toda inecuación do tipo: $ax + by > c$, con calquera dos signos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.Para resolvelas:

1º) **Representamos graficamente** a función lineal asociada $ax + by = c$.

2º) A recta divide o plano en **dous semiplanos**. Utilizando un punto obtemos cal é o semiplano solución.

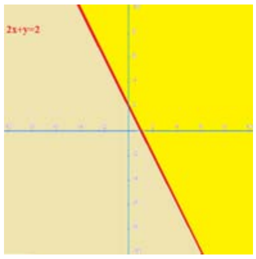
3º) A **inclusión ou non** nesta solución da fronteira depende de se a desigualdade é estrita ou non, respectivamente.

Exemplo:

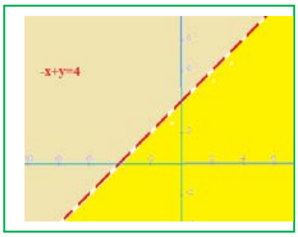
- $2x + y \geq 2$.

Debúxase a recta $2x + y = 2$. O punto (0, 0) non verifica a desigualdade, logo o semiplano solución é o outro.

O semiplano marcado en amarelo é a solución do sistema, incluíndo a recta que se marca de forma continua, pois inclúe todos os puntos que verifican a inecuación.



Exemplo:



- $-x + y < 4$.

Debuxamos a recta $-x + y = 4$. O punto (0, 0) verifica a desigualdade. O semiplano marcado en amarelo é a solución do sistema, excluíndo a recta que se marca de forma descontinua, pois inclúe todos os puntos que verifican a inecuación e os da recta non o fan.

Actividades propostas

23. Representa os seguintes semiplanos: a) $x + y < 5$ b) $3x + 2y > 0$ c) $2x + y \leq 7$ d) $x - 3y \geq 5$

4.2. Sistemas de inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas

É un conxunto de inecuacións de primeiro grao, todas coas mesmas dúas incógnitas.

O conxunto solución está formado polas solucións que verifican á vez todas as inecuacións. Ao conxunto solución chámaselle **rexión factible**.

Exemplo:

- $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$.

A superficie marcada en amarelo é a solución do sistema, incluíndo as semirrectas vermella e gris, xa que ambas as desigualdades son non estritas. É o que se denomina *rexión factible*.

Actividades propostas

24. Representa a rexión factible de cada un dos seguintes sistemas de inecuacións:

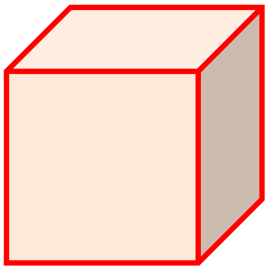
a) $\begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$

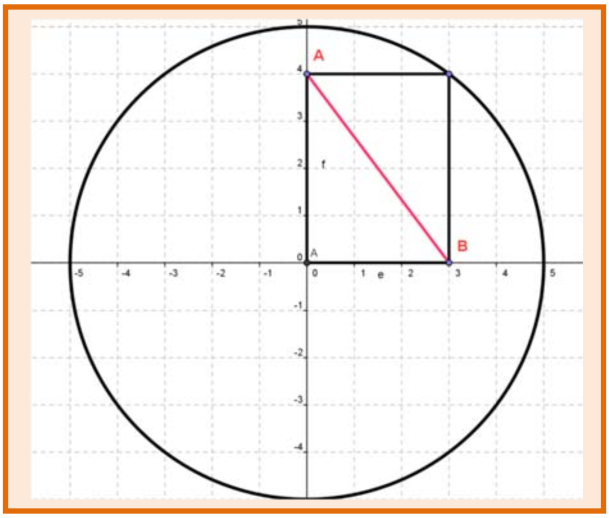
Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Pensa!

Se un cubo pesa medio quilo máis a metade do seu propio peso, canto pesa?





Temos unha circunferencia de radio 5 cm. Apoiamos nela un rectángulo como o da figura. A toda velocidade, calcula a diagonal *AB* do rectángulo.

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Estes chistes son da Exposición "*Ri coas mates*" do grupo de innovación educativa *Pensamento Matemático* da Universidade Politécnica de Madrid.

Programación lineal

A **programación lineal** baséase en sistemas de inecuacións e utilízase en microeconomía, en administración de empresas para minimizar os gastos e maximizar os beneficios, en asignación de recursos, en planificación de campañas de publicidade, para solucionar problemas de transporte…

Razoamento enganoso

Todo número é maior que 4, porque para calquera valor de x, $(x - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$(x - 4) \cdot (x - 4) \geq 0 \Rightarrow$

$x \cdot (x - 4) - 4 \cdot (x - 4) \geq 0 \Rightarrow$

$x \cdot (x - 4) \geq 4 \cdot (x - 4) \Rightarrow$

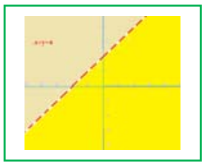
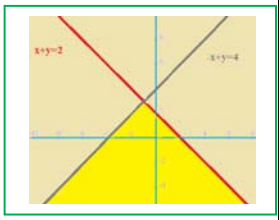
$x \geq 4$.

Onde enganamos neste razoamento?

Observa que dividimos a desigualdade por $(x - 4)$ que para uns valores de x é positiva e non cambia o sentido da desigualdade, pero para outros é negativa e si o cambia.

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Noción	Definición	Exemplos
Inecuación	Desigualdade alxébrica na que aparecen unha ou máis incógnitas	$4 \geq x + 2$
Inecuacións equivalentes	Se teñen a mesma solución.	$4 \geq x + 2 \Leftrightarrow 2 \geq x$
Propiedades das desigualdades	Sumar ou restar a mesma expresión aos dous membros da desigualdade: $a < b, \forall c \Rightarrow a + c < b + c$ Multiplicar ou dividir ambos os membros por un número positivo: $a < b, \forall c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ Multiplicar ou dividir ambos os membros por un número negativo e cambiar a orientación do signo da desigualdade: $a < b, \forall c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	$3x + 2 < 5 \Leftrightarrow$ $3x + 2 - 2 < 5 - 2 \Leftrightarrow 3x < 3$ $3x < 3$ $\Leftrightarrow 3x : 3 < 3 : 3 \Leftrightarrow x < 1$ $-x < 2 \Leftrightarrow$ $(-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2$ $3 - x < 2 \Leftrightarrow$ $-x < -1 \Leftrightarrow x > 1$
Inecuación de primeiro grao cunha incógnita	$ax > b$, $ax \geq b$, $ax < b$, $ax \leq b$	$x < 1$
Inecuación de segundo grao cunha incógnita	$ax^2 + bx + c > 0$	$x^2 - 1 \geq 0$ $\Re = (-\infty,-1] \cup [-1,1] \cup [1,\infty)$ Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
Sistema de inecuacións de primeiro grao cunha incógnita	$\begin{cases} a_1 x < b_1 \\ a_2 x < b_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 4 \\ x - 3 \geq 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$. Non hai solución.	
Inecuación en valor absoluto	$\lvert ax + b \rvert \leq c$ por definición $\begin{cases} ax + b \leq c \\ -ax - b \leq c \end{cases}$	$\lvert x - 3 \rvert \leq 2 \Leftrightarrow$ $x - 3 \leq 2$ e $-(x - 3) \leq 2 \Leftrightarrow$ $x \leq 5$ e $x \geq 1 \Leftrightarrow [1, 5]$
Inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas	$ax + by > c$ Representamos graficamente dous semiplanos que separan a recta e decidimos.	$-x + y < 4$ 
Sistemas de inecuacións de primeiro grao con dúas incógnitas	Representamos as rexións angulares separadas polas dúas rectas e decidimos cal ou cales son a solución. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - y \geq -4 \end{cases}$	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Representa na recta real e escribe en forma de intervalo:

a) $-\infty \leq x \leq \frac{3}{2}$

b) $-11 < x < 11$

c) $-2 < x \leq \frac{1}{3}$

2. Escribe os seguintes intervalos mediante conxuntos e represéntaos na recta real:

a) [2, 6)

b) (–7, 1)

c) (0, 9]

3. Dada a seguinte inecuación $5 + 3x > 2x + 1$, determina se os seguintes valores son solución da mesma:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

4. Realiza as transformacións indicadas de modo que se obteñan ecuacións equivalentes:

i. Sumar 4: $x - 2 > 5$

ii. Restar 6: $x - 4 > 8$

iii. Multiplicar por 6: $5x \geq 10$

iv. Multiplicar por –4: $-2x \geq 8$

v. Dividir entre 2: $6x < 12$

vi. Dividir entre –2: $20x \geq 60$

5. Resolve as seguintes inecuacións e representa a solución na recta real:

a) $2x - 3 \leq -5$

b) $x - 2 \leq 3x - 5$

c) $12 - x \leq -6$

d) $-5x - 3 \leq -2x + 9$

e) $2(3x - 3) > 6$

f) $-3(3 - 2x) < -2(3 + x)$

g) $2(x + 3) + 3(x - 1) \leq 2(x + 2)$

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

6. Resolve:

a) $\frac{x}{2}-6<4$

b) $\frac{2x}{3}-3\leq -x$

c) $2(3x-2)>3-x$

d) $\frac{2(x+2)}{3}<2x$

e) $\frac{x-4}{4}+2>\frac{x+4}{8}$

f) $\frac{x}{2}-4<x-\frac{x+1}{7}$

7. Escribe unha inecuación cuxa solución sexa o seguinte intervalo:

a) $(-\infty,-3]$ b) $[4,+\infty)$ c) $(-\infty,5)$ d) $(-2,+\infty)$

8. Calcula os valores de x para que sexa posible calcular as seguintes raíces:

a) $\sqrt{2x-6}$ b) $\sqrt{-x+5}$ c) $\sqrt{10-5x}$ d) $\sqrt{-6x-30}$

9. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $3x^2 - 75 < 0$

b) $-x^2 + 16 \leq 0$

c) $-x^2 + 25 \geq 0$

d) $5x^2 - 80 \geq 0$

e) $4x^2 - 1 > 0$

f) $25x^2 - 4 < 0$

g) $9x^2 - 16 < 0$

h) $36x^2 + 16 \leq 0$

10. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $-4x^2 + 5x \leq 0$

b) $3x^2 + 7x \geq 0$

c) $2x^2 < 8x$

d) $-3x^2 - 6x \geq 0$

e) $-x^2 + 3x < 0$

f) $-5x^2 - 10x \geq 0$

11. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao :

a) $3x^2 \leq 0$

b) $8x^2 > 0$

c) $-5x^2 < 0$

d) $9x^2 \geq 0$

12. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 - 1 \leq 0$

b) $-x^2 - 4x \leq 0$

c) $x^2 + 1 \geq 0$

d) $-3x^2 > 30$

e) $-x^2 - 4 \leq 0$

f) $-3x^2 - 12x \geq 0$

g) $-5x^2 < 0$

h) $x^2 + 9 \geq 0$

13. Resolve as seguintes inecuacións de segundo grao:

a) $x^2 - 2x > 0$

b) $3x^2 - 3 \leq 0$

c) $5x^2 - 20 \geq 0$

d) $x^2 + 4x > 0$

e) $2x(x - 3) + 1 \geq x - 2$

f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1$

g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12$

h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x + 1)$

14. Calcula os valores de x para que sexa posible obter as seguintes raíces:

a) $\sqrt{2x^2 + x - 3}$

b) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$

c) $\sqrt{-1 + 2x - x^2}$

d) $\sqrt{x^2 + 3x + 5}$

e) $\sqrt{-x^2 + 12x - 36}$

f) $\sqrt{x^2 + 6x - 27}$

g) $\sqrt{1 - 4x^2}$

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

15. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $2(x-1)^2 > 2$

b) $3(x+1)^2 \leq -12$

c) $-x^2 < 2$

d) $4(x-2)^2 > 1$

e) $-5(x+4)^2 \leq 0$

f) $9(x+1)^2 \leq 81$

16. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $x(2x-3) - 3(5-x) > 83$

b) $(2x+5)(2x-5) \leq 11$

c) $(7+x)^2 + (7-x)^2 > 130$

d) $(2x-3)(3x-4) - (x-13)(x-4) \geq 40$

e) $(3x-4)(4x-3) - (2x-7)(3x-2) < 214$

f) $8(2-x)^2 > 2(8-x)^2$

g) $\frac{x^2-6}{2} - \frac{x^2+4}{4} \geq 5$

h) $\frac{5x-3}{x} \leq \frac{7-x}{x+2}$

17. Resolve os seguintes sistemas de inecuacións cunha incógnita:

a) $\begin{cases} 2x-3>0 \\ 5x+1 \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-4<4x+1 \\ -2x+3<4x-5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3>x-2 \\ 3x-7<x-1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{5}<8 \\ \frac{x}{2}-\frac{4x}{9}<5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2} \leq x \\ \frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3} \geq x \end{cases}$

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

18. Resolve as seguintes inecuacións:

a) $|2x+1| \le 5$ b) $|-x+1| \ge 2$ c) $|-x+9| \le 10$ d) $|2x-1| > 4$

e) $|-4x+12| < -6$ f) $\left|\frac{x+1}{2}\right| \le 10$ g) $|-4x+8| < 3$

19. Representa graficamente a parábola $y = x^2 - 5x + 6$ e indica en que intervalos é $x^2 - 5x + 6 > 0$, onde $x^2 - 5x + 6 < 0$, onde $x^2 - 5x + 6 \ge 0$, e onde $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

20. Representa os seguintes semiplanos:

a) $x < 0$ b) $y \ge 0$ c) $x + y < 0$ d) $x - y \le 1$

e) $2x - y < 3$ f) $-x + y \ge -2$ g) $3x - y > 4$

21. Representa a rexión factible de cada un dos seguintes sistemas de inecuacións:

a) $\begin{cases} 2x - y \ge 3 \\ 5x + y \le 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y \ge -3 \\ 5x + y \le 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y \ge 0 \\ 2x + y > 2 \end{cases}$

22. Cales son os números cuxo triplo é maior ou igual que o seu dobre máis 30?

23. Pescuda cal é o menor número enteiro múltiplo de 3 que verifica a inecuación:

$$x + 2 > -3x + 10.$$

24. Un coche desprázase por unha estrada a unha velocidade comprendida entre 70 Km/h e 110 Km/h. Entre que valores oscila a distancia do coche ao punto de partida ao cabo de 4 horas?

25. A tarifa de telefonía da empresa A é 25 euros fixos mensuais máis 10 céntimos de euro por minuto de conversa, a da empresa B é 20 euros fixos máis 20 céntimos por minuto de conversa. A partir de cantos minutos comeza a ser más rendible a tarifa da empresa A?

26. Unha fábrica paga aos seus comerciais 20 € por artigo vendido máis unha cantidade fixa de 600 €. Outra fábrica da competencia paga 40 € por artigo e 400 € fixos. Cantos artigos debe vender un comercial da competencia para gañar más dilñeiro que o primeiro?

27. A un vendedor de aspiradoras ofrécenlle 1 000 euros de soldo fixo máis 20 euros por aspiradora vendida. A outro ofrécenlle 800 euros de fixo máis 25 euros por aspiradora vendida. Explica razoadamente que soldo é mellor a partir de que cantidade de aspiradoras vendidas.

28. A área dun cadrado é menor ou igual que 64 cm^2. Determina entre que valores está a medida do lado.

29. O perímetro dun cadrado é menor que 60 metros. Determina entre que valores está a medida do lado.

30. Un panadeiro fabrica barras e bolas. A barra de pan leva 200 gramos de fariña e 5 gramos de sal, mentres que a bola leva 500 gramos de fariña e 10 gramos de sal. Disponse de 200 kg de fariña e 2 kg de sal, determina cantos pans de cada tipo poden facerse.

Autora: Ana Lorente
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

AUTOAVALIACIÓN

1. A desigualdade $2 < x < 7$ verifícase para os valores:

a) 2, 3 e 6 b) 3, 4.7 e 6 c) 3, 5.2 e 7 d) 4, 5 e 8

2. Ten como solución $x = 2$ a inecuación seguinte:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$

3. A solución da inecuación $3.4 + 5.2x - 8.1x < 9.4 + 7.3x$ é:

a) $x < -10/17$ b) $x > -3/5.1$ c) $x > -10/1.7$ d) $x < +6/10.2$

4. A ecuación $x^2 \leq 4$ ten de solucións:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

5. A suma das idades de dúas persoas é maior de 40 anos e a súa diferenza menor ou igual que 8 anos. Cal dos seguintes sistemas de inecuacións nos permite calcular as súas idades?

a) $\begin{cases} x + y > 40 \\ y - x \leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y \geq 40 \\ y - x < 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y > 40 \\ x - y < 8 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + y < 40 \\ x - y \leq 8 \end{cases}$

6. O perímetro dun rectángulo é menor que 14 cm. Se a base é maior que o dobre da altura menos 3 cm, algún valor que verifica o sistema é:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm b) base = 2 cm, altura =3 cm c) base = 6, altura = 4 cm

d) base = 9 cm, altura = 2 cm

7. A solución da inecuación $|-x + 7| \leq 8$ é:

a) $[-1, 15]$ b) $(-\infty, -1]$ c) $(-1, 1)$ d) $[1, \infty)$

8. As solucións posibles de $\sqrt{5x - 9}$ son:

a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \leq 9/5$ d) $x \geq 9/5$

9. A solución da inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ é:

a) $(1, 2)$ b) $(-\infty, 1)$ c) $x < 1 \cup x > 2$ d) $(-1, 2)$

10. Unha inecuación cuxa solución sexa o intervalo $(-\infty, 5)$ é:

a) $5x - 3x + 2 < 9x + 2$ b) $8x - 3x + 7 < 9x + 2$
c) $5x - 3x + 2 < 7x + 27$ d) $5x - 3x - 2 > 7x - 27$

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO
Capítulo 6: Porcentaxes

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Nieves Zuasti

Revisores: Javier Rodrigo e María Molero

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Na vida cotiá é interesante saber manexar a proporcionalidade, por exemplo para calcular o desconto dunhas rebaixas, ou o interese que se debe pagar por un préstamo. En multitude de ocasións debemos efectuar repartos proporcionais, directos ou inversos: premios de lotería, herdos, mesturas, aliaxes…

O tanto por cento e o interese é un concepto que aparece constantemente nos medios de comunicación e na nosa propia economía. Neste capítulo faremos unha primeira aproximación á denominada "*economía financeira*".

A proporcionalidade é unha realidade coa que convivimos ao noso arredor. Para comprendela e utilizala correctamente, necesitamos coñecer as súas regras. Recoñeceremos a proporcionalidade directa ou inversa, simple e composta, e realizaremos exercicios e problemas de aplicación.

INTRODUCIÓN

A Esther gústalle ir en bicicleta á escola e ten comprobado que en facer ese percorrido tarda andando catro veces máis. Temos aquí tres magnitudes: tempo, distancia e velocidade.

Recorda que:

Unha **magnitude** é unha propiedade física que se pode medir.

A máis velocidade percórrese máis distancia.

Son **magnitudes directamente proporcionais**.

A máis velocidade tárdase menos tempo.

Son **magnitudes inversamente proporcionais**.

Pero, coidado, non todas as magnitudes son proporcionais. Isto é unha confusión moi frecuente. Porque ao medrar unha magnitude, a outra tamén medra, aínda que non se poida asegurar que sexan directamente proporcionais. Por exemplo, Esther recorda que hai uns anos tardaba máis en percorrer o mesmo camiño, pero a idade non é directamente proporcional ao tempo que se tarda. Imos estudalo con detalle para aprender a recoñecelo ben.

1. PROPORCIONALIDADE DIRECTA

1.1. Magnitudes directamente proporcionais

Recorda que:

Dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

Exemplo:

- Se tres bolsas conteñen 15 caramelos, sete bolsas (iguais ás primeiras) conterán 35 caramelos, porque:

$$3 \cdot \mathbf{5} = 15 \qquad 7 \cdot \mathbf{5} = 35$$

A **razón de proporcionalidade directa *k* é o** cociente de calquera dous valores dunha variable e os correspondentes da outra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

Exemplo:

- No exemplo anterior a razón de proporcionalidade é 5, porque: $\frac{15}{3} = \frac{35}{7} = 5$

Exemplo:

- Copia no teu caderno a seguinte táboa, calcula a razón de proporcionalidade e completa os ocos que faltan sabendo que é unha táboa de proporcionalidade directa:

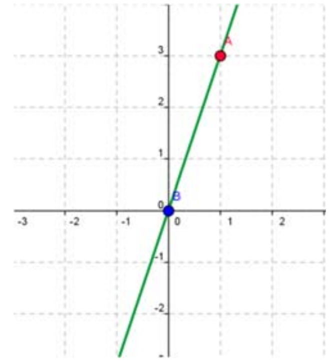
Magnitude A	18	1.5	60	2.7	0.21
Magnitude B	6	0.5	20	0.9	0.07

A razón de proporcionalidade é $\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{6}} = \mathbf{3}.$ Polo tanto, todos os valores da magnitude B son tres veces menores cós da magnitude A:

$$\frac{18}{6} = \frac{1.5}{0.5} = \frac{60}{20} = \frac{2.7}{0.9} = \frac{0.21}{0.07} = 3.$$

Observa que:

Se se representan graficamente os puntos dunha proporcionalidade directa, todos eles están sobre unha **recta** que pasa pola orixe de coordenadas. A razón de proporcionalidade é a **pendente** da recta. A función lineal e =*kx* denomínase tamén **función de proporcionalidade directa**.



Recta e = 3x

Exemplo:

- Ecuación da recta do exemplo anterior

A ecuación da recta é *y* = 3*x*. Comprobamos que todos os puntos a verifican:

18 = 3 · 6; 1.5 = 3 · 0.5; 60 = 3 · 20; 2.7 = 3 · 0.9; 0.21 = 3 · 0.07.

Redución á unidade

Se debemos usar a mesma ecuación da recta en distintas ocasións o problema pode simplificarse coa **redución á unidade**. Se *x* = 1 entón *y* = ***k***.

Exemplo:

- Para celebrar o seu aniversario Xosé comprou 3 botellas de refresco que lle custaron 4.5 €. Pensa que non van ser suficientes e decide comprar 2 máis. Calcula o prezo das 2 botellas utilizando a redución á unidade.

  $y = \frac{4.5}{3}x \Rightarrow y = \frac{4.5}{3} \cdot 1 \Rightarrow k = 1.5 \Rightarrow y = 1.5x$. Agora podemos calcular o prezo de calquera número de botellas. No noso caso *x* = 2, logo *y* = 1.5 · 2 = 3 €.

Actividades propostas

1. Copia no teu caderno e completa a táboa de proporción directa. Calcula a razón de proporcionalidade. Representa graficamente os puntos. Determina a ecuación da recta.

Litros	12	7.82		1		50
Euros	36		9.27		10	

2. Calcula os termos que faltan para completar as proporcións:

a) $\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$ b) $\frac{x}{80} = \frac{46}{12}$ c) $\frac{3.6}{12.8} = \frac{x}{60}$

3. Se o AVE tarda unha hora e trinta e cinco minutos en chegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 quilómetros, canto tardará en percorrer 420 km?

1.2. Proporcionalidade simple directa

Acabamos de ver que a proporcionalidade simple directa consiste en atopar a ecuación dunha recta que pasa pola orixe: $y = kx$.

- ***Exemplo:*** Vinte caixas pesan 400 kg, cantos kg pesan 7 caixas?

Buscamos a ecuación da recta: $y = kx \Rightarrow 400 = k20 \Rightarrow k = 400/20 = 20 \Rightarrow y = 20x$ Ecuación da recta

Se $x = 7$ entón $y = 20 \cdot 7 = 140$ kg.

Actividades propostas

4. Nunha receita dinnos que para facer unha marmelada de froitas do bosque precisamos un quilogramo de azucre por cada dous quilogramos de froita. Queremos facer 7 quilogramos de marmelada, cantos quilogramos de azucre e cantos de froita debemos poñer?

5. A altura dunha torre é proporcional á súa sombra (a unha mesma hora). Unha torre que mide 12 m ten unha sombra de 25 m. Que altura terá outra torre cuxa sombra mida 43 m?

6. Unha fonte enche unha garrafa de 12 litros en 8 minutos. Canto tempo tardará en encher un bidón de 135 litros?

7. Gastamos 12 litros de gasolina para percorrer 100 km. Cantos litros precisaremos para unha distancia de 1374 km?

8. O meu coche gasta 67 litros de gasolina en percorrer 1 250 km, cantos litros gastará nunha viaxe de 5 823 km?

9. Un libro de 300 páxinas pesa 127 g. Canto pesará un libro da mesma colección de 420 páxinas?

10. Dous pantalóns custáronnos 28 €, canto pagaremos por 7 pantalóns?

1.3. Porcentaxes

A porcentaxe ou tanto por cento é a razón de proporcionalidade de maior uso na vida cotiá.

O **tanto por cento** é unha razón con denominador 100.

Exemplo:

- 37 % = $\frac{37}{100}$. A ecuación da recta é: $y = \frac{37}{100}x$.

As porcentaxes son proporcións directas.

Exemplo:

- A poboación de Zarzalejo era en 2013 de 7 380 habitantes. En 2014 incrementouse nun 5 %. Cal é a súa poboación ao final de 2014?

$y = \frac{7380}{100}x$, polo que o 5 % de 7 392 é $y = \frac{7380}{100} \cdot 5 = 369$ habitantes. A poboación incrementouse en 369 habitantes, logo ao final de 2014 a poboación será de: 7 380 + 369 = 7 749 habitantes.

Actividades propostas

11. Expresa en tanto por cento as seguintes proporcións:

a) $\frac{27}{100}$ b) "1 de cada 2" c) $\frac{52}{90}$

12. Se sabemos que os alumnos louros dunha clase son o 16 % e hai 4 alumnos louros, cantos alumnos hai en total?

13. Un depósito de 2 000 litros de capacidade contén neste momento 1 036 litros. Que tanto por cento representa?

14. A proporción dos alumnos dunha clase de 4º de ESO que aprobaron Matemáticas foi do 70 %. Sabendo que na clase hai 30 alumnos, cantos suspenderon?

1.4. Incremento porcentual. Desconto porcentual. Porcentaxes encadeadas

Incremento porcentual

Exemplo:

- O exemplo anterior pode resolverse mediante **incremento porcentual**: 100 + 5 = 105 %

$y = \frac{7\,380}{100}x$, polo que o 105 % de 7 392 é $y = \frac{7\,380}{100} \cdot 105 = 7\,749$ habitantes.

Desconto porcentual

- Nas rebaixas a todos os artigos á venda aplícanlles un 30 % de desconto. Calcula o prezo dos que aparecen na táboa:

Prezo sen desconto	75 €	159 €	96 €	53 €
Prezo en rebaixas	52.50 €	111.3 €	67.2 €	37.1 €

Xa que nos descontan o 30 %, pagaremos o 70 %. Polo tanto: $k = \frac{70}{100} = 0.7$ é a razón directa de proporcionalidade que aplicaremos aos prezos sen desconto para calcular o prezo rebaixado. Polo tanto: $y = 0.7\,x$.

Porcentaxes encadeadas

Moitas veces hai que calcular varios incrementos porcentuais e descontos porcentuais. Podemos **encadealos**. Nestes casos o máis sinxelo é calcular, para cada caso, o tanto por un, e ilos multiplicando.

Exemplo:

- Nunhas rebaixas aplícase un desconto do 30 %, e o IVE do 21 %. Canto nos custará un artigo que sen rebaixar e sen aplicarlle o IVE custaba 159 euros? Cal é o verdadeiro desconto?

Nun desconto do 30 % debemos pagar un 70 % ((100 – 30) %), polo que o tanto por un é de 0.7. Polo incremento do prezo polo IVE do 21 % ((100 + 21) %) o tanto por un é de 1.21. Encadeando o desconto co incremento teremos un índice ou tanto por un de 0.7 · 1.21 = 0.847, que aplicamos ao prezo do artigo, 159 €, 0.847 · 159 = 134.673 € ≈ 134.67 €. Polo tanto, descontáronnos 24.33 euros.

Se estamos pagando o 84.7 % o verdadeiro desconto é o 15.3 %.

Exemplo:

- Calcula o prezo inicial dun televisor que, despois de subilo un 20 % e de rebaixalo un 20 %, nos custou 432 €. Cal foi a porcentaxe de variación?

Ao subir o prezo un 20 % estamos pagando o 120 % e o tanto por un é 1.2. No desconto do 20 % estamos pagando o 80 % e o tanto por un é 0.8. En total coas dúas variacións sucesivas o tanto por un é de 0.8 · 1.2 = 0.96, e o prezo inicial é 432 : 0.96 = 450 €. Prezo inicial = 450 €.

O tanto por un 0.96 é menor que 1 polo tanto houbo un desconto porque pagamos o 96 % do valor inicial e este desconto foi do 4 %.

Actividades propostas

15. Unha fábrica pasou de ter 130 obreiros a ter 90. Expresa a diminución en porcentaxe.

16. Calcula o prezo final dun lavalouzas que custaba 520 € máis un 21 % de IVE, ao que se lle aplicou un desconto sobre o custe total do 18 %.

17. Copia no teu caderno e completa:

a) Dunha factura de 1340 € paguei 1 200 €. Aplicáronme un ……… % de desconto
b) Descontáronme o 9 % dunha factura de ……………. € e paguei 280 €.
c) Por pagar ao contado un moble descontáronme o 20 % e aforrei 100 €. Cal era o prezo do moble sen desconto?

18. O prezo inicial dun electrodoméstico era 500 euros. Primeiro subiu un 10 % e despois baixou un 30 %. Cal é o seu prezo actual? Cal é a porcentaxe de incremento ou desconto?

19. Unha persoa comprou accións de bolsa no mes de xaneiro por un valor de 10 000 €. De xaneiro a febreiro estas accións aumentaron un 8 %, pero no mes de febreiro diminuíron un 16 %. Cal é o seu valor a finais de febreiro? En que porcentaxe aumentaron ou diminuíron?

20. O prezo inicial dunha enciclopedia era de 300 € e ao longo do tempo sufriu variacións. Subiu un 10 %, logo un 25 % e despois baixou un 30 %. Cal é o seu prezo actual? Calcula a variación porcentual.

21. Nunha tenda de venda por Internet anúncianse rebaixas do 25 %, pero logo cargan na factura un 20 % de gastos de envío. Cal é a porcentaxe de incremento ou desconto? Canto teremos que pagar por un artigo que custaba 30 euros? Canto custaba un artigo polo que pagamos 36 euros?

1.7. Escalas

En planos e mapas encontramos anotada na súa parte inferior a escala á que están debuxados.

Principais calzadas romanas

A **escala** é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.

Exemplo:

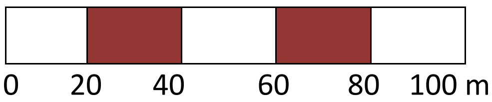
- Exprésase da forma 1: 2000 que significa que 1 cm do plano corresponde a 2 000 cm = 20 m na realidade.

Polo tanto se "*y*" son as medidas na realidade, e "*x*" no plano, esta escala pódese escribir coa ecuación da recta:

$$y = 2\,000x.$$

As escalas tamén se representan en forma gráfica, mediante unha barra dividida en segmentos de 1 cm de lonxitude

Exemplo:

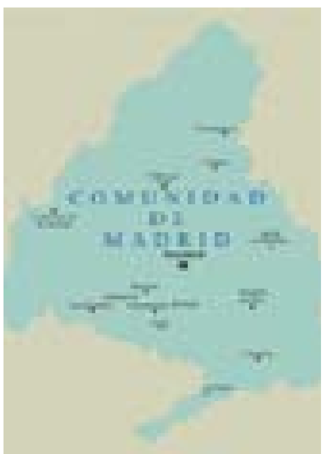


Escalímetro

Esta escala identifica cada centímetro do mapa con 20 m na realidade é dicir 1:2000, $y = 2\,000x$.

Ao estudar a semellanza volveremos insistir nas escalas.

Un instrumento sinxelo para realizar traballos a escala é o ***pantógrafo*** que facilita copiar unha imaxe ou reproducila a escala.



O pantógrafo é un paralelogramo articulado que, ao variar a distancia entre os puntos de articulación, permite obter diferentes tamaños de debuxo sobre un modelo dado.

Actividades propostas

22. A distancia real entre dúas vilas é 28.6 km. Se no mapa están a 7 cm de distancia. A que escala está debuxado?

23. Que altura ten un edificio se a súa maqueta construída a escala 1 : 200 presenta unha altura de 8 cm?

24. Debuxa a escala gráfica correspondente á escala 1: 60000.

25. As dimensións dunha superficie rectangular no plano son 7 cm e 23 cm. Se está debuxado a escala 1: 50, calcula as súas medidas reais.

2. PROPORCIONALIDADE INVERSA

2.1. Magnitudes inversamente proporcionais

Recorda que:

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir a primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número.

Exemplo:

- Cando un automóbil vai a 90 km/h, tarda catro horas en chegar ao seu destino. Se fose a 120 km/h tardaría 3 horas en facer o mesmo percorrido.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

A velocidade e o tempo son magnitudes inversamente proporcionais.

A **razón de proporcionalidade inversa** *k´* é o produto de cada par de magnitudes: ***k' = a · b = a´· b´***

Exemplo:

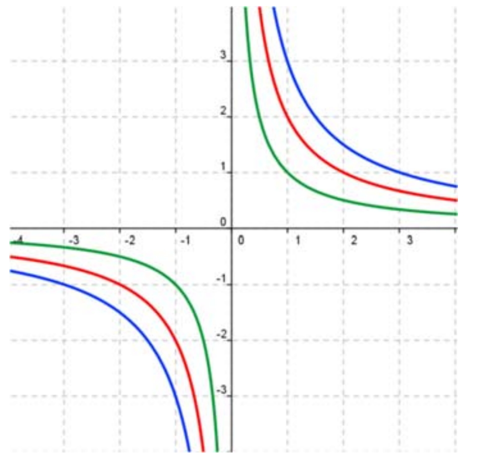
- Copia a táboa no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa de proporcionalidade inversa:

a	18	150	1.5	3 600	100
b	50	6	600	0.25	9

k´ = 18 · 50 = 900. Comproba que todas as columnas dan este resultado.

Observa que:

Se se representan graficamente os puntos dunha proporcionalidade inversa, todos eles están sobre a gráfica dunha **hipérbole** de ecuación $y = \frac{k'}{x}$. A razón de proporcionalidade inversa é a **constante k'**. A esta hipérbole $y = \frac{k'}{x}$ tamén se lle chama **función de proporcionalidade inversa**.



Hipérboles: y = 3/x; y = 2/x; y = 1/x

Exemplo:

- Ecuación da hipérbole do exemplo anterior.

A hipérbole é $y = \frac{900}{x}$. Comprobamos que todos os puntos verifican a ecuación desta hipérbole:

$$y = \frac{900}{18} = 50; \quad y = \frac{900}{150} = 6; \quad y = \frac{900}{1{,}5} = 600; \quad y = \frac{900}{3600} = 0.25; \quad y = \frac{900}{100} = 9.$$

Actividades propostas

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreiros dedicaron 80 horas de traballo. Completa no teu caderno a seguinte táboa e determina a constante de proporcionalidade. Escribe a ecuación da hipérbole.

Número de obreiros	1	5	7	12			60
Horas de traballo			80		28	10	

2.2. Proporcionalidade simple inversa

Para calcular o cuarto termo entre dúas magnitudes inversamente proporcionais calculamos a constante de proporcionalidade e escribimos a ecuación da hipérbole.

Exemplo:

- Catro persoas realizan un traballo en 18 días, cantas persoas necesitaremos para realizar o mesmo traballo en 8 días?

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{18}{8} \cdot 4 = 9 \text{ persoas.}$$

Actividades propostas

27. Ao cortar unha cantidade de madeira conseguimos 5 paneis de 1.25 m de longo. Cantos paneis conseguiremos se agora teñen 3 m de largo?

28. Nunha horta ecolóxica utilízanse 5 000 kg dun tipo de esterco de orixe animal que se sabe que ten un 12 % de nitratos. Se cambia o tipo de esterco, que agora ten un 15 % de nitratos, cantos quilogramos se necesitarán do novo esterco para que as plantas reciban a mesma cantidade de nitratos?

29. Esa mesma horta necesita 200 caixas para envasar as súas berenxenas en caixas dun quilogramo. Cantas caixas necesitaría para envasalas en caixas de 1.7 quilogramos? E para envasalas en caixas de 2.3 quilogramos?

30. Para envasar certa cantidade de leite precísanse 8 recipientes de 100 litros de capacidade cada un. Queremos envasar a mesma cantidade de leite empregando 20 recipientes. Cal deberá ser a capacidade deses recipientes?

31. Copia no teu caderno a táboa seguinte, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade inversa. Escribe a ecuación da hipérbole.

Magnitude A	40	0.07		8	
Magnitude B	0.25		5		6.4

2.3. Proporcionalidade composta

Unha proporción na que interveñen máis de dúas magnitudes ligadas entre si por relacións de proporcionalidade directa ou inversa denomínase **proporción composta**.

Exemplo:

- No instituto 30 alumnos de 4º A de ESO foron esquiar e pagaron 2 700 € por 4 noites de hotel; 25 alumnos de 4º B de ESO gañaron na lotería 3 375 € e deciden ir ao mesmo hotel. Cantas noites de aloxamento poden pagar?

Temos tres magnitudes: o número de alumnos, a cantidade en € que pagan polo hotel e o número de noites de hotel. Observa que a máis alumnos se paga máis diñeiro, logo estas magnitudes son directamente proporcionais. A máis noites de hotel págase máis diñeiro, logo estoutras dúas magnitudes son tamén directamente proporcionais. Pero para unha cantidade de diñeiro fixa, máis alumnos poden ir menos noites, logo o número de alumnos é inversamente proporcional ao número de noites de hotel.

O mellor método é reducilo a un problema de proporcionalidade simple, para iso obtemos o prezo da viaxe por alumno.

Cada alumno de 4º A pagou 2 700 : 30 = 90 € por 4 noites de hotel. Logo pagou por unha noite 90/4 = 22.5 €. A ecuación de proporcionalidade directa é: e = 22.5*x*, onde *"y"* é o que paga cada alumno e *"x"* o número de noites.

Cada alumno de 4º B conta con 3 375 : 25 = 135 € para pasar *x* noites de hotel, polo que 135 = 22.5x, logo poden estar 6 noites.

Actividades propostas

32. Seis persoas realizan unha viaxe de 12 días e pagan en total 40 800 €. Canto pagarán 15 persoas se a súa viaxe dura 4 días?

33. Se 16 lámpadas orixinan un gasto de 4 500 €, estando acesas durante 30 días, 5 horas diarias, que gasto orixinarían 38 lámpadas en 45 días, acesas durante 8 horas diarias?

34. Para alimentar a 6 vacas durante 17 días precísanse 240 quilos de alimento. Cantos quilos de alimento se precisarán para manter 29 vacas durante 53 días?

35. Se 12 homes constrúen 40 m de tapia en 4 días traballando 8 horas diarias, cantas horas diarias deben traballar 20 homes para construír 180 m en 15 días?

36. Cunha cantidade de penso podemos dar de comer a 24 animais durante 50 días cunha ración de 1 kg para cada un. Cantos días poderemos alimentar a 100 animais se a ración é de 800 g?

37. Para encher un depósito ábrense 5 billas que lanzan 8 litros por minuto e tardan 10 horas. Canto tempo tardarán 7 billas similares que lanzan 10 litros por minuto?

38. Se 4 máquinas fabrican 2 400 pezas funcionando 8 horas diarias. Cantas máquinas se deben poñer a funcionar para conseguir 7 000 pezas durante 10 horas diarias?

3. REPARTOS PROPORCIONAIS

Cando se realiza un reparto en partes desiguais débese establecer previamente se se trata dun reparto proporcional directo ou inverso.

3.1. Reparto proporcional directo

Nun reparto proporcional directo corresponderalle máis a quen teña máis partes.

Actividade resolta

- Tres amigos deben repartir os 400 € que gañaron nunha competición de acordo aos puntos que cada un obtivo. O primeiro obtivo 10 puntos, o segundo 7 e o terceiro 3 puntos.

  O reparto directamente proporcional iníciase sumando os puntos: 10 + 7 + 3 = 20 puntos.

  Calculamos o premio por punto: 400 : 20 = 20 €.

  O primeiro obterá 20 · 10 = 200 €.

  O segundo: 20 · 7 = 140 €.

  O terceiro: 20 · 3 = 60 €.

  A suma das tres cantidades é 200 + 140 + 60 = 400 €, a cantidade total a repartir.

Como se trata dunha proporción, débese establecer a seguinte regra:

Sexa N (no exemplo anterior 400) a cantidade a repartir entre catro persoas, ás que lles corresponderá A, B, C, D de maneira que N = A + B + C + D. Estas cantidades son proporcionais á súa participación no reparto: *a, b, c, d*.

a + *b* + *c* + *d* = *n* é o número total de partes nas que debe distribuírse N.

N : *n* = *k* que é a cantidade que corresponde a cada parte. No exemplo anterior: *k* = 400 : 20 = 20.

O reparto finaliza multiplicando *k* por *a*, *b*, *c* e *d*, obténdose así as cantidades correspondentes A, B, C e D.

É dicir, agora a ecuación da recta é: $y = \frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}x = \frac{N}{n}x$

Actividades propostas

39. Cinco persoas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 e 5 participacións respectivamente. Se obtiveron un premio de 18 000 €, canto corresponde a cada un?

40. Tres socios investiron 20 000 €, 34 000 € e 51 000 € este ano na súa empresa. Se os beneficios a repartir a final de ano ascenden a 31 500 €, canto corresponde a cada un?

41. A Unión Europea concedeu unha subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 e 10 millóns de habitantes. Como debe repartirse o diñeiro, sabendo que é directamente proporcional ao número de habitantes?

42. Repártese unha cantidade de diñeiro, entre tres persoas, directamente proporcional a 2, 5 e 8. Sabendo que á segunda lle corresponde 675 €, calcula o que lle corresponde á primeira e á terceira.

43. Unha avoa reparte 100 € entre os seus tres netos de 12, 14 e 16 anos de idade; proporcionalmente ás súas idades. Canto corresponde a cada un?

3.2. Reparto proporcional inverso

Nun reparto proporcional inverso recibe máis quen menos partes ten.

Sexa N a cantidade a repartir e *a*, *b* e *c* as partes. Ao ser unha proporción inversa, o reparto realízase aos seus inversos 1/*a*, 1/*b*, 1/*c*.

Para calcular as partes totais, reducimos as fraccións a común denominador, para termos un patrón común, e tomamos os numeradores que son as partes que corresponden a cada un.

Actividade resolta

- Repartir 4 000 € de forma inversamente proporcional a 12 e 20.

Calculamos o total das partes: 1/12 + 1/20 = **5**/60 +**3**/60 = **8**/60.

4 000 : 8 = 500 € cada parte.

500 · 5 = 2 500 €.

500 · 3 = 1 500 €.

En efecto, 2 500 + 1 500 = 4 000.

Actividades propostas

44. Nun concurso acumúlase puntuación de forma inversamente proporcional ao número de erros. Os catro finalistas, con 10, 5, 2 e 1 erros, deben repartir os 2 500 puntos. Cantos puntos recibirá cada un?

45. No testamento, o avó establece que quere repartir entre os seus netos 4 500€ de maneira proporcional ás súas idades, 12, 15 e 18 anos. Coidando que a maior cantidade sexa para os netos menores, canto recibirá cada un?

46. Repártese diñeiro inversamente proporcional a 5, 10 e 15; ao menor correspóndenlle 3 000 €. Canto corresponde aos outros dous?

47. Tres irmáns axudan ao mantemento familiar entregando anualmente 6 000 €. Se as súas idades son de 18, 20 e 25 anos e as achegas son inversamente proporcionais á idade, canto achega cada un?

48. Un pai vai cos seus dous fillos a unha feira e, na tómbola, gaña 50 € que reparte de forma inversamente proporcional á súas idades, que son 15 e 10 anos. Cantos euros debe dar a cada un?

3.3. Mestura e aliaxes

As **mesturas** que imos estudar son o resultado final de combinar distintas cantidades de produtos, de distintos prezos.

Actividade resolta

- Calcula o prezo final do litro de aceite se mesturamos 13 litros a 3.5 € o litro, 6 litros a 3.02 €/l e 1 litro a 3.9 €/l.

  Calculamos o custe total dos distintos aceites:

  $$13 \cdot 3.5 + 6 \cdot 3.02 + 1 \cdot 3.9 = 67.52 \text{ €}.$$

  E o número total de litros: 13 + 6 + 1 = 20 l.

  O prezo do litro de mestura valerá 67.52: 20 = 3.376 €/l.

Actividades propostas

49. Calcula o prezo do quilo de mestura de dous tipos de café: 3.5 kg a 4.8 €/kg e 5.20 kg a 6 €/kg.

50. Cantos litros de zume de pomelo de 2.40 €/l deben mesturarse con 4 litros de zume de laranxa a 1.80 €/l para obter unha mestura a 2.13 €/l?

Grans de café

Unha **aliaxe** é unha mestura de metais para conseguir un determinado produto final con mellores propiedades ou aspecto.

As aliaxes realízanse en xoiaría mesturando metais preciosos, ouro, prata, platino, con cobre ou rodio. Segundo a proporción de metal precioso, dise que unha xoia ten máis ou menos **lei.**

A lei dunha aliaxe é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.

Exemplo:

- Una xoia de prata de 50 g de peso contén 36 g de prata pura. Cal é a súa lei?

$$\textbf{Lei} = \frac{peso\ metal\ \ puro}{peso\ total} = \frac{36}{50} = 0.72$$

Outra forma de medir o grao de pureza dunha xoia é o **quilate**.

Un quilate dun metal precioso é 1/24 da masa total da aliaxe.

Para que unha xoia sexa de ouro puro debe ter 24 quilates.

Exemplo:

Una xoia de ouro de 18 quilates pesa 62 g. Que cantidade do seu peso é de ouro puro?

$$\text{Peso en ouro} = \frac{62 \cdot 18}{24} = 46.5 \text{ g}.$$

O termo ***quilate*** vén da palabra grega *"keration" (alfarroba).* Esta planta, de sementes moi uniformes, utilizábase para pesar xoias e xemas na antigüidade.

Actividades propostas

51. Calcula a lei dunha xoia sabendo que pesa 87 g e contén 69 g de ouro puro.

Cantos quilates ten, aproximadamente, a xoia anterior?

4. INTERESE

4.1. Cálculo de interese simple

O **interese** é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo.

No **interese simple**, ao capital *C* depositado aplícaselle un tanto por cento ou rédito *r* anualmente.

O cálculo do interese obtido ao cabo de varios anos realízase mediante a fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Se o tempo que se deposita o capital son meses ou días, o interese calcúlase dividindo a expresión anterior entre 12 meses ou 360 días (ano comercial).

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1\,200}$ tempo en meses $\qquad$ $I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36\,000}$ tempo en días

Actividades resoltas

- Depositamos 4 000 € ao 2 % anual. Canto diñeiro teremos ao cabo de 30 meses?

Calculamos o interese simple:

$$I = \frac{4\,000 \cdot 2 \cdot 30}{1\,200} = 200 \text{ €}$$

Sumamos capital e réditos:

$$4\,000 + 200 = 4\,200 \text{ €}$$

Actividades propostas

52. Calcula o interese simple que producen 10 000 € ao 3 % durante 750 días.

53. Que capital hai que depositar ao 1.80 % durante 6 anos para obter un interese simple de 777.6 €?

4.2. Interese composto

Desde outro punto de vista, o interese é a porcentaxe que se aplica a un préstamo ao longo dun tempo, incrementando a súa contía á hora de devolvelo.

Este tipo de interese non se calcula como o interese simple senón que se establece o que se chama "*capitalización*".

O **interese composto** aplícase tanto para calcular o capital final dunha inversión, como a cantidade a devolver para amortizar un préstamo.

Normalmente os préstamos devólvense mediante cotas mensuais que se calcularon a partir dos xuros xerados polo préstamo ao tipo de interese convido.

A capitalización composta propón que, a medida que se van xerando xuros, pasen formar parte do capital inicial, e ese novo capital producirá xuros nos períodos sucesivos.

Se se trata dun depósito bancario, o capital final calcularase seguindo o seguinte procedemento:

C_i (capital inicial)	1 ano	i (tanto por un)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 anos	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 anos	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
…………..	……….	……………	…………….
	n anos		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cabo de n anos, o capital final será $\boldsymbol{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$.

Para facer os cálculos podes utilizar unha "Folla de cálculo". Basta que na folla de cálculo adxunta modifiques os datos das casas B5 onde está o "Capital inicial", casa B6 onde está o "Tanto por un" e da casa B7 onde aparece o número de "Anos", e arrastres na columna B ata que o número final de anos coincida con esta casa.

F15 =E15-B5

	A	B	C	D	E	F
1	**Interese composto**					
2	**Problema:**					
3	O capital inicial dun depósito ascende a 82 000 €. O tanto por cento aplicado é o 3% a interese composto					
4	durante 5 anos. Calcula o capital final.					
5	Capital inicial:	82000				
6	Tanto por cento ou rédito:	3				
7	Número de anos:	5				
8						
9						
10	Capital inicial: C_i	Anos	r (tanto por un)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interese total
11	82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
12	84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
13	86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
14	89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72
15	92291,72	5	0,03	1,15927407	95060,47	13060,47
16						
17	O capital final é:	13060,47				

Actividades resoltas

- O capital inicial dun depósito ascende a 82 000 €. O tanto por cento aplicado é o 3% a interese composto durante 5 anos. Calcula o capital final.

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82\,000 \cdot (1 + 0.03)^5 = 82\,000 \cdot 1.159\ldots = 95\,060\ €$$

Actividades propostas

54. Ao 5% de interese composto durante 12 anos, cal será o capital final que obteremos ao depositar 39 500 €?

CURIOSIDADES. REVISTA

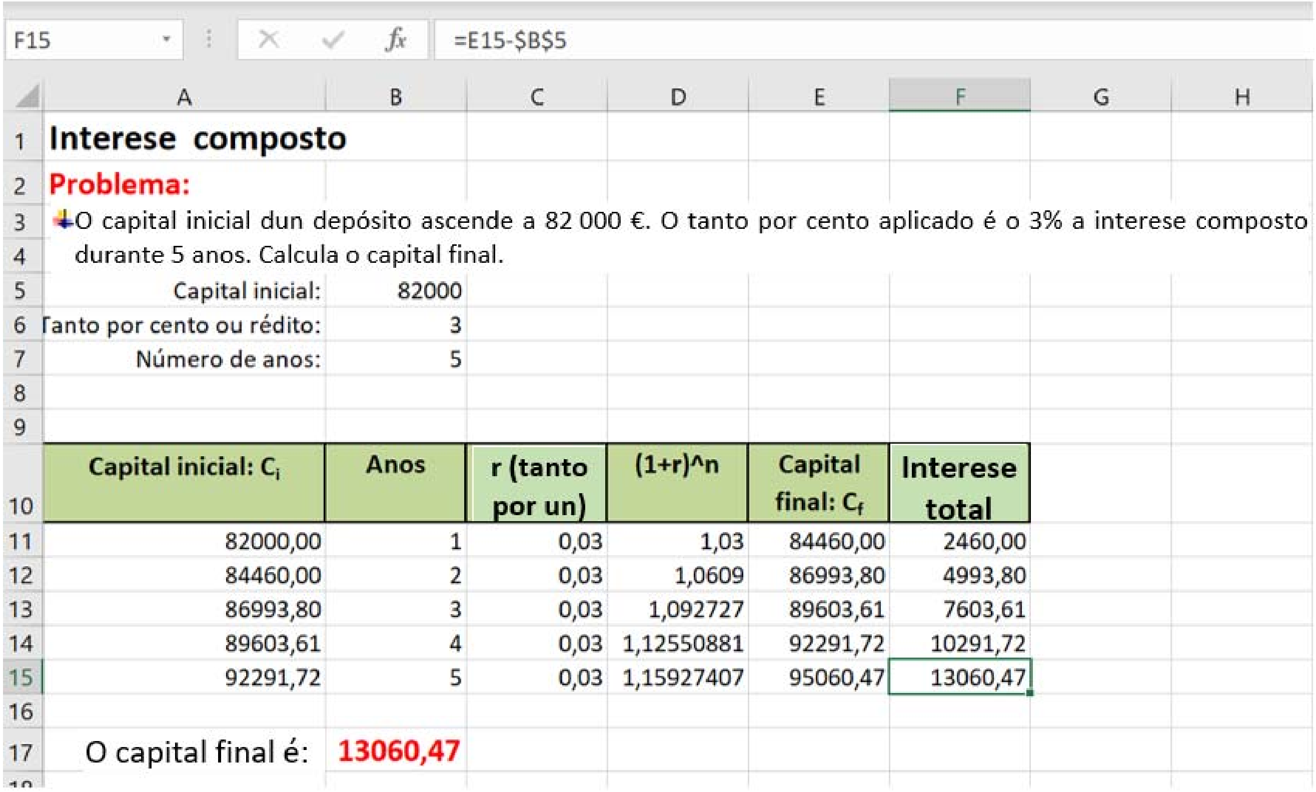
Confecciona a túa propia folla de cálculo

Imos resolver o problema “O capital inicial dun depósito ascende a 82 000 €. O tanto aplicado é o 3 % a interese composto durante 5 anos. Calcula o capital final” confeccionando unha folla de cálculo.

Abre Excel ou calquera outra folla de cálculo. Verás que as follas están formadas por cuadrículas, con letras na horizontal e números na vertical. Así cada cuadrícula da folla pode designarse por unha letra e un número: A1, B7, …

Imos deixar as primeiras 9 filas para poñer títulos, anotacións…

Na fila 10 imos escribir os títulos das casas. Na casa A10 escribe: Capital inicial. Na B10: Anos. Na C10: Tanto por un. Na D10: $(1 + r)^n$. Na E10: capital final. Na F10: Interese total.


F15 =E15-B5

Interese composto

Problema:

O capital inicial dun depósito ascende a 82 000 €. O tanto por cento aplicado é o 3% a interese composto durante 5 anos. Calcula o capital final.

Capital inicial:	82000
Tanto por cento ou rédito:	3
Número de anos:	5

Capital inicial: C_i	Anos	r (tanto por un)	(1+r)^n	Capital final: C_f	Interese total
82000,00	1	0,03	1,03	84460,00	2460,00
84460,00	2	0,03	1,0609	86993,80	4993,80
86993,80	3	0,03	1,092727	89603,61	7603,61
89603,61	4	0,03	1,12550881	92291,72	10291,72
92291,72	5	0,03	1,15927407	95060,47	13060,47

O capital final é: 13060,47

Na fila 11 comezamos os cálculos. En A11 anotamos 82000, que é o capital inicial.

En B11, escribimos 1, pois estamos no ano primeiro; en B12, escribimos 2 e, seleccionando as casas B11 e B12, arrastramos ata B15, pois pídennos 5 anos.

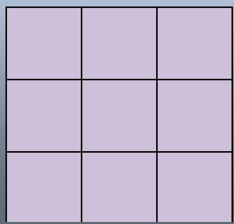
Como se puxo o capital ao 3 %, o tanto por un é 0,03, cantidade que copiamos en C11 e arrastramos ata C15.

Para calcular $(1 + r)^n$, podemos facelo usando a función POTENCIA. Para iso escribimos un signo = na casa D11 e buscamos a función POTENCIA, en número escribiremos 1+C11 e en expoñente B11. Quedarache: =POTENCIA(1+C11;B11). Agora, sinálalo e arrástralo ata D15.

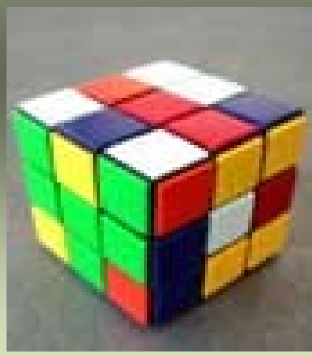
Para calcular $C \cdot (1 + r)^n$, na columna E, só temos que multiplicar A11*D11. Queremos deixar invariante o capital inicial, para dicirllo a Excel, que non nolo cambie, escribimos: =A11*D11 e arrastramos ata a fila E15.

Proporcionalidade en áreas e volumes

Ao aumentar o lado dun cadrado ao dobre, a súa superficie queda multiplicada por 4. Ao multiplicar por 3 o lado, a área multiplícase por 9.



Ao aumentar o lado dun cubo ao dobre, o seu volume queda multiplicado por 8. Ao multiplicar por 3 o lado, o volume multiplícase por 27.



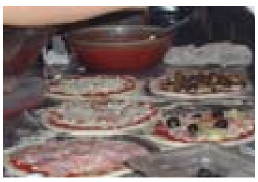
En xeral, se facemos un cambio de escala de factor de proporcionalidade k, a área ten un factor de proporcionalidade k^2, e o volume k^3.

Utiliza esta observación para resolver os seguintes problemas:

A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída en ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis?

Antes de empezar a calcular, dá a túa opinión.

Axuda: k^3 = 8 000 000/1 logo k = 200. Se a Torre Eiffel mide 300 metros de altura, a nosa torre medirá 300/200 = 1.5 m. Metro e medio! Moito máis que un lapis!



1. Nunha pizzería a pizza de 20 cm de diámetro vale 3 euros e a de 40 cm vale 6 euros. Cal ten mellor prezo?
2. Vemos no mercado unha pescada de 40 cm que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior, que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?
3. Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual abrigados, cal dos dous terá máis frío?

RESUMO

<table>
<tr><th>Noción</th><th>Definición</th><th>Exemplos</th></tr>
<tr><td>Proporcionalidade directa</td><td>Dúas magnitudes son directamente proporcionais cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

A función de proporcionalidade directa é unha recta que pasa pola orixe: $y = kx$. A pendente da recta, k, é a razón de proporcionalidade directa.</td><td>Para empapelar 300 m^2 utilizamos 24 rolos de papel, Se agora a superficie é de 104 m^2, necesitaremos 8.32 rolos, pois $k = 300/24 = 12.5$, $y = 12.5x$, polo que $x = 104/12.5 = 8.32$ rolos.</td></tr>
<tr><td>Proporcionalidade inversa</td><td>Dúas magnitudes son inversamente proporcionais cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número.

A función de proporcionalidade inversa é a hipérbole $y = k'/x$. Polo tanto a razón de proporcionalidade inversa k' é o produto de cada par de magnitudes: $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$.</td><td>Dúas persoas pintan unha vivenda en 4 días. Para pintar a mesma vivenda, 4 persoas tardarán: $k' = 8$, $y = 8/x$, polo que tardarán 2 días.</td></tr>
<tr><td>Porcentaxes</td><td>Razón con denominador 100.</td><td>O 87 % de 2 400 é $\frac{87 \cdot 2\,400}{100} = 2\,088$</td></tr>
<tr><td>Escalas</td><td>A escala é a proporción entre as medidas do debuxo e as medidas na realidade.</td><td>A escala 1:50000, 35 cm son 17.5 km na realidade.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Reparto proporcional directo
Repartir directamente a 6, 10 e 14, 105 000 €
6 + 10 + 14 = 30
105 000 : 30 = 3 500
6 · 3 500 = 21 000 €
10 ·3 500 = 35 000 €
14 · 3 500 = 49 000 €</td><td>Reparto proporcional inverso
Repartir 5 670 inversamente a 3, 5 e 6
$1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}$
5 670 : 21 = 270
270 · 10 = 2 700
270 · 6 = 1 620
270 · 5 = 1 350</td></tr>
<tr><td>Mesturas e aliaxes</td><td>Mesturar distintas cantidades de produtos, de distintos prezos.

A lei dunha aliaxe é a relación entre o peso do metal máis valioso e o peso total.</td><td>Una xoia que pesa 245 g e contén 195 g de prata, a súa lei é: $\frac{195}{245} = 0.795$</td></tr>
<tr><td>Interese simple e composto</td><td>O interese é o beneficio que se obtén ao depositar un capital nunha entidade financeira a un determinado tanto por cento durante un tempo</td><td>$C = 3\,600$; $r = 4.3$ %; $t = 8$ anos
$I = \frac{3\,600 \cdot 4.3 \cdot 8}{100} = 1\,238.4$ €</td></tr>
</table>

EXERCICIOS E PROBLEMAS

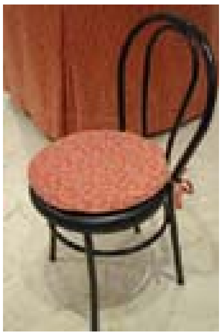
1. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade e completa a táboa de proporcionalidade directa:

litros	8.35		0.75	1.5	
euros		14	2.25		8

2. Estima cantas persoas caben de pé nun metro cadrado. Houbo unha festa e encheuse completamente un local de 400 m^2, cantas persoas estimas que foron a esa festa?

3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. Canto gastaremos durante o mes de febreiro?

4. Con 85 € pagamos 15 m de tea, canto nos custarán 23 m da mesma tea?



5. Para tapizar cinco cadeiras utilicei 0.6 m de tea, cantas cadeiras poderei tapizar coa peza completa de 10 m?

6. Un camión transportou en 2 viaxes 300 sacos de patacas de 25 kg cada un. Cantas viaxes serán necesarias para transportar 950 sacos de 30 kg cada un?

7. Unha edición de 400 libros de 300 páxinas cada un acada un peso total de 100 kg. Cantos kg pesará outra edición de 700 libros de 140 páxinas cada un?

8. Sabendo que a razón de proporcionalidade directa é k = 1.8, copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

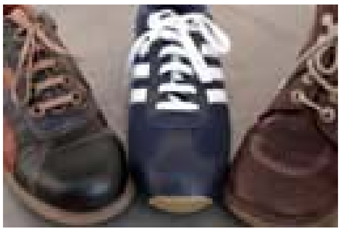
Magnitude A	15.9			0.01	
Magnitude B		6	0.1		10

9. O modelo de teléfono móbil que custaba 285 € + IVE está agora cun 15 % de desconto. Cal é o seu prezo rebaixado? (IVE 21 %)

10. Por atrasarse no pagamento dunha débeda de 1 500 €, unha persoa debe pagar unha recarga do 12 %. Canto ten que devolver en total?

11. Se un litro de leite de 0.85 € aumenta o seu prezo nun 12 %, canto vale agora?

12. Que tanto por cento de desconto se aplicou nunha factura de 1 900 € se finalmente se pagaron 1 200 €?



13. Se unhas zapatillas de 60 € se rebaixan un 15 %, cal é o valor final?

14. Ao comprar un televisor obtiven un 22 % de desconto, polo que ao final paguei 483.60 €, cal era o prezo do televisor sen desconto?

15. Luís comprou unha camisola que estaba rebaixada un 20 % e pagou por ela 20 €. Cal era o seu prezo orixinal?

16. Por liquidar unha débeda de 35 000 € antes do previsto, unha persoa paga finalmente 30 800 €, que porcentaxe da súa débeda aforrou?

17. O prezo dunha viaxe anúnciase a 500 € IVE incluído. Cal era o prezo sen IVE? (IVE 21 %)

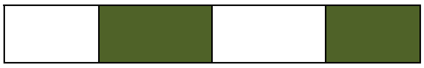
18. Que incremento porcentual se efectuou sobre un artigo que antes valía 25 € e agora se paga a 29 €?

19. Un balneario recibiu 10 mil clientes no mes de xullo e 12 mil en agosto. Cal é o incremento porcentual de clientes de xullo a agosto?

20. Un mapa está debuxado a escala 1: 800000. A distancia real entre dúas cidades é 200 km. Cal é a súa distancia no mapa?

21. A distancia entre Oviedo e A Coruña é de 340 km. Se no mapa están a 12 cm, cal é a escala á que está debuxado?

22. Interpreta a seguinte escala gráfica e calcula a distancia na realidade para 21 cm.



0 3 6 9 12 km

23. Copia no teu caderno e completa a seguinte táboa:

Tamaño no debuxo	Tamaño real	Escala
20 cm longo e 5 cm de ancho		1:25000
10 cm	15 km	
	450 m	1:30000

24. Copia no teu caderno, calcula a razón de proporcionalidade inversa e completa a táboa:

Magnitude A	8	7.5		3.5	
Magnitude B		12	0.15		10

25. Determina se as seguintes magnitudes se encontran en proporción directa, inversa ou en ningunha delas:

a) Velocidade á que circula un coche e espazo que percorre.

b) Diñeiro que tes para gastar e bolsas de améndoas que podes comprar.

c) Talle de zapatos e prezo dos mesmos.

d) Número de membros dunha familia e litros de leite que consomen.

e) Número de entradas vendidas para un concerto e diñeiro recadado.

f) Números de billas que enchen unha piscina e tempo que esta tarda en encherse.

g) Idade dunha persoa e estatura que ten.

h) Número de traballadores e tempo que tardan en facer un valado.

i) Idade dunha persoa e número de amigos que ten.

26. Que velocidade debería levar un automóbil para percorrer en 4 horas certa distancia, se a 80 km/h tardou 5 horas e 15 minutos?

27. A razón de proporcionalidade inversa entre A e B é 5. Copia no teu caderno e completa a táboa seguinte:

A	20		7		10.8
B		0.05		0.3	

Autora: Nieves Zuasti
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e María Molero

28. Na granxa faise o pedido de forraxe para alimentar a 240 porcos durante 9 semanas. Véndense 60 porcos, cantas semanas lles durará a forraxe? E se en lugar de vender, compra trinta porcos? E se decide rebaixar a ración unha cuarta parte cos 240 porcos?

29. Un granxeiro con 65 galiñas ten millo para alimentalas 25 días. Se vende 20 galiñas, cantos días poderá alimentar ás restantes?

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada un poden comer 150 galiñas diariamente. Se os paquetes fosen de 2.7 kg, cantos necesitariamos para dar de comer ás mesmas galiñas?

31. Determina se as dúas magnitudes son directa ou inversamente proporcionais e completa a táboa no teu caderno:

A	24	8	0.4	6		50
B	3	9	180		20	

32. Se a xornada laboral é de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un traballo. Se rebaixamos a xornada en media hora diaria, cantos operarios serán necesarios para realizar o mesmo traballo?

33. Nun almacén gárdanse reservas de comida para 100 persoas durante 20 días con 3 racións diarias, cantos días duraría a mesma comida para 75 persoas con 2 racións diarias?

34. Se 15 operarios instalan 2 500 m de valado en 7 días. Cantos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valado?

35. Nun concurso o premio de 168 000 € repártese de forma directamente proporcional aos puntos conseguidos. Os tres finalistas conseguiron 120, 78 e 42 puntos. Cantos euros recibirá cada un?

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionais a 160, 140, 120.

37. Un traballo págase a 3 120 €. Tres operarios fano achegando o primeiro 22 xornadas, o segundo 16 xornadas e o terceiro 14 xornadas. Canto recibirá cada un?

38. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionais a 18, 30, 45.

39. Mesturamos 3 kg de améndoas a 14 €/kg, 1.5 kg de noces a 6 €/kg e 1.75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula o prezo final do paquete de 250 g de mestura de froitos secos.

40. Calcula o prezo do litro de zume que se consegue mesturando 8 litros de zume de ananás a 2.5 €/l, 15 litros de zume de laranxa a 1.6 €/l e 5 litros de zume de uva a 1.2 €/l. A canto debe venderse unha botella de litro e medio se se lle aplica un aumento do 40 % sobre o prezo de custe?

41. Para conseguir un tipo de pintura mestúranse tres produtos: 5 kg do produto X a 18 €/kg, 19 kg do produto E a 4.2 €/kg e 12 kg do produto Z a 8 €/kg. Calcula o prezo do kg de mestura.

42. Cinco persoas comparten un microbús para realizaren distintos traxectos. O custe total é de 157.5 € máis 20 € de suplemento por servizo nocturno. Os quilómetros percorridos por cada pasaxeiro foron 3, 5, 7, 8 e 12 respectivamente. Canto debe abonar cada un?

43. Decidiuse penalizar ás empresas que máis contaminan. Para iso repártense 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % e 15 % de grao de contaminación. Canto recibirá cada unha?

44. Un lingote de ouro pesa 340 g e contén 280.5 g de ouro puro. Cal é a súa lei?

45. Cantos gramos de ouro contén unha xoia de 0.900 de lei, que se formou cunha aliaxe de 60 g de 0.950 de lei e 20 g de 0.750 de lei?

46. Que capital hai que depositar ao 3.5 % de rédito en 5 anos para obter un interese simple de 810 €?

47. Cal é o capital final que se recibirá por depositar 25 400 € ao 1.4% en 10 anos?

48. Cantos meses debe depositarse un capital de 74 500 € ao 3 % para obter un interese de 2 980 €?

49. Ao 3% de interese composto, un capital converteuse en 63 338.5 €. De que capital se trata?

50. Na construción dunha ponte de 850 m utilizáronse 150 vigas, pero o enxeñeiro non está moi seguro e decide reforzar a obra engadindo 50 vigas máis. Se as vigas se colocan uniformemente ao longo de toda o ponte, a que distancia se colocarán as vigas?

51. Nun colexio de primaria convócase un concurso de ortografía no que se dan varios premios. O total que se reparte entre os premiados son 500 €. Os alumnos que non cometeron ningunha falta reciben 150 €, e o resto distribúese de maneira inversamente proporcional ao número de faltas. Hai dous alumnos que non tiveron ningunha falta, un tivo unha falta, outro dúas faltas e o último tivo catro faltas, canto recibirá cada un?

AUTOAVALIACIÓN

1. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade directa son:

A	10	0.25		0.1	100
B		50	5		

a) 612.5; 1000; 0.0005; 0.5 b) 1.25; 2.5; 125; 0.125 c) 62; 500; 0.005; 0.05

2. Con 500 € pagamos os gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2 000 € b) 1 900 € c) 1 800 € d) 1 500 €.

3. Un artigo que custaba 2 000 € rebaixouse a 1 750 €. A porcentaxe de rebaixa aplicada é:

a) 10 % b) 12.5 % c) 15.625 % d) 11.75 %

4. Para envasar 510 litros de auga utilizamos botellas de litro e medio. Cantas botellas necesitaremos se queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas b) 700 botellas c) 650 botellas d) 680 botellas

5. Os valores que completan a táboa de proporcionalidade inversa son:

A	5.5	10		11	
B	20		0.5		0.1

a) 40; 200; 11.5; 1 000 b) 11; 200; 20; 300 c) 11; 220; 10; 1 100 d) 40; 220; 10; 500

6. Tres agricultores reparten os quilogramos da colleita de forma proporcional ao tamaño das súas parcelas. A meirande, que mide 15 ha, recibiu 30 toneladas; a segunda é de 12 ha e a terceira de 10 ha recibirán:

a) 24 t e 20 t b) 20 t e 24t c) 24 t e 18 t d) 25 t e 20 t

7. A escala á que se debuxou un mapa no que 2.7 cm equivalen a 0.81 km é:

a) 1:34000 b) 1:3000 c) 1:30000 d) 1:300

8. Con 4 rolos de papel de 5 m de longo, podo forrar 32 libros. Cantos rolos necesitaremos para forrar 16 libros se agora os rolos de papel son de 2 m de longo?

a) 3 rolos b) 5 rolos c) 4 rolos d) 2 rolos

9.O prezo final do kg de mestura de 5 kg de fariña clase A, a 1.2 €/k; 2.8 kg clase B a 0.85 €/kg e 4 kg clase C a 1 €/kg é:

a) 1.12 € b) 0.98 € c) 1.03 € d) 1.049 €

10. A lei dunha aliaxe é 0.855. Se o peso da xoia é 304 g, a cantidade de metal precioso é:

a) 259.92 g b) 255.4 g c) 248.9 g d) 306 g

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 7: Semellanza

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz

Revisora: Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

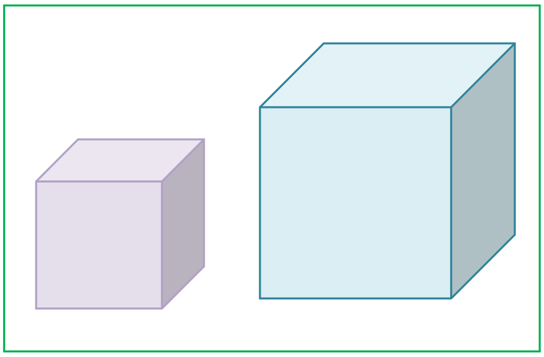
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e Jorge Muñoz

Índice

Resumo

Un dos problemas *históricos* da Matemática é o da **duplicación dun cubo**. En Atenas houbo unha tremenda peste que asolaba á poboación. Mesmo o seu gobernante, *Pericles*, morreu no ano 429 a. C. Consultado o oráculo de *Apolo* este dixo que se acabaría coa peste se se construía un altar que fose o dobre do que había (que tiña forma de cubo).



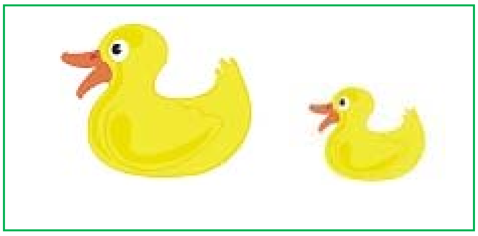
Non se logrou dar coa solución. Débese buscar a razón de proporcionalidade entre os lados para que o volume sexa dobre. A peste rematou e o problema quedou sen resolver durante séculos pero ti vas saber solucionalo cando estudes este capítulo.

Tamén imos estudar o teorema de *Tales* e a súa aplicación a recoñecer cando dous triángulos son semellantes. Son os criterios de semellanza de triángulos.

Utilizando a semellanza de triángulos demostraremos dous teoremas, o teorema da altura e o do cateto.

1. FIGURAS SEMELLANTES

1.1. Figuras semellantes



Durante este capítulo falaremos unicamente da proporcionalidade xeométrica, a semellanza.

Dúas figuras semellantes teñen a *mesma forma*. É moi útil saber recoñecer a semellanza para poder estudar unha figura e inferir así propiedades dunha figura semellante a ela que é máis grande ou inaccesible. A semellanza conserva os ángulos e mantén a proporción entre as distancias.

Dous polígonos son semellantes se os seus lados son proporcionais e os seus ángulos son iguais.

1.2. Razón de semellanza. Escala

Dúas figuras son **semellantes** se as lonxitudes de elementos correspondentes son proporcionais. Ao coeficiente de proporcionalidade chámaselle **razón de semellanza**. Cando representamos algo mediante unha figura (3D) ou un plano (2D) a razón de semellanza tamén se chama **escala**.

Na linguaxe matemática existen dúas ferramentas fundamentais para describir unha proporción: o produto e o cociente.

O produto indica cantas veces maior é a representación fronte ao modelo. Sóese denotar mediante o signo de produto **"X"** (10X, 100X, etc.) indicando así a razón de semellanza.

Exemplo:

- *Unha representación a escala 100X dunha célula indica que a representación é 100 veces máis grande que o modelo, ou que 100 células en fila teñen a mesma lonxitude que a representación.*

A división indica o camiño contrario, ou canto máis pequeno é o modelo fronte á súa representación. Sóese denotar mediante o símbolo de división **":"** (1:100, 1:500, etc.) o que indica a razón de semellanza.

Exemplo:

- *Un plano de construción dun edificio de escala* 1:100, *indica que a representación é 100 veces máis pequena que o modelo*. Se unha distancia no plano é 10 cm, esa mesma distancia na realidade será de 1 000 cm = 10 m.

Para escribir unha **razón de semellanza** en linguaxe alxébrica utilízanse dous operadores: o produto (x) e o cociente (:).

Cando falamos de semellanza xeométrica, referímonos a proporcionalidade en canto a lonxitudes pero tamén hai outros atributos nos que podemos atopar semellanzas entre un modelo e o seu semellante. En xeral, calquera magnitude que sexa medible, tanto no modelo como no seu semellante, é apta para establecer unha relación de semellanza.

Sempre que se poidan comparar dúas magnitudes dun atributo común, é posible establecer unha **razón de semellanza**.

Actividades resoltas

- *Se un microscopio ten un aumento de 100X, que tamaño (aparente) pensas que terá a imaxe que se vexa polo obxectivo se observamos un pelo de 0.1 mm de espesor?*

0.1 mm X 100 = 10 mm = 1 cm.

- *Pescuda a altura dunha casa que mide* 20 *cm de alto nun plano de escala* 1:100.

Se H é a altura da casa e h o tamaño no plano, sabemos que $h = H/100$, polo tanto, $H = 100 \cdot h$.

$H = 100 \cdot 20$ cm = 20 m. *Comprobación*: é unha casa duns 7 andares.

Actividades propostas

1. Mide a túa altura nunha foto e calcula o factor de semellanza.

1.3. Semellanza en lonxitudes, áreas e volumes

Lonxitudes de figuras semellantes

Nas figuras semellantes a forma non varía, unicamente cambia o tamaño. As lonxitudes son proporcionais. No seguinte apartado demostraremos o teorema de Tales que é o fundamento matemático da semellanza.

A **razón de semellanza** aplícase a todas as **lonxitudes** do modelo por igual.

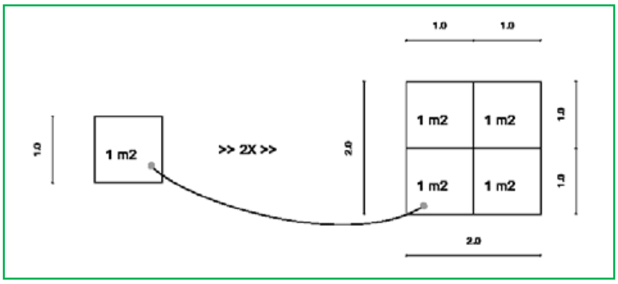
Cando as propiedades dunha figura dependen da lonxitude, como a área e o volume, estas propiedades tamén cambian na figura semellante, aínda que non da mesma maneira que a lonxitude.

Exemplo:

- *Se a área do cadrado é $A = L^2 = L \cdot L$, a área dun cadrado semellante de razón* 2*, será:*

$A = 2 \cdot L \cdot 2 \cdot L = 2 \cdot 2 \cdot L \cdot L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$

Áreas de figuras semellantes



A área dunha figura é unha propiedade que depende da lonxitude dos seus segmentos. En concreto, a relación entre a lonxitude dunha figura e a súa área é cuadrática.

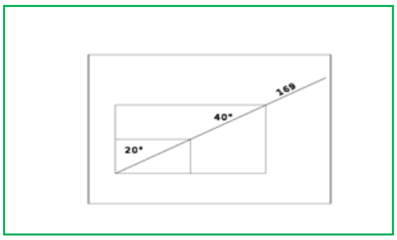
Cando se aplica o factor de semellanza, consérvase a relación cuadrática entre lonxitude e área polo que, nunha figura plana (2D), provocará un aumento da súa área proporcional ao cadrado.

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, a relación entre as súas áreas, A e A', é:

$A' = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 = k \cdot k \cdot L_1 \cdot L_2 = k^2 \cdot A$

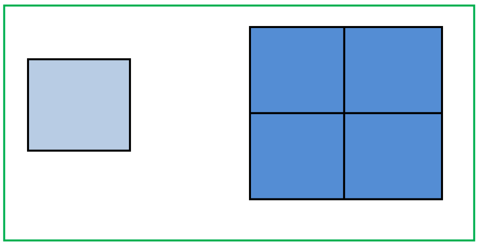
Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, entón a razón entre as súas áreas é $\boldsymbol{k^2}$.

Exemplo:



- *Un televisor de* 40 *polgadas custa aproximadamente catro veces máis que un de* 20. Por estraño que pareza, o aumento de prezo está xustificado. O tamaño do televisor, indica a lonxitude da súa diagonal en polgadas. Unha lonxitude dobre, implica unha área catro veces maior e por tanto necesita catro veces máis compoñentes electrónicos.

Exemplo:



- *Observa a figura da marxe.* Se multiplicamos por 2 o lado do cadrado pequeno, a área do cadrado grande é $2^2 = 4$ veces a do pequeno.

Volumes de figuras semellantes

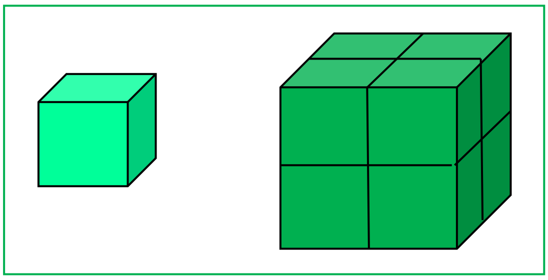
O volume dunha figura é unha propiedade que depende da lonxitude dos seus segmentos. Neste caso, a relación entre as lonxitudes dunha figura e o seu volume é cúbica.

Cando se aplica o factor de semellanza, esta relación cúbica provocará un aumento do seu volume proporcional ao cubo (k^3). Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, e o volume de partida é $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: ao aplicar a semellanza tense:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = \mathrm{k} \cdot \mathrm{k} \cdot \mathrm{k} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é $\boldsymbol{k}$, entón entre os seus volumes é $\boldsymbol{k^3}$.

Exemplo:



- *Observa a figura da marxe*. Ao multiplicar por 2 o lado do cubo pequeno obtense o cubo grande. O volume do cubo grande é 8 (2^3) veces o do cubo pequeno.

Actividades resoltas

- *A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída de ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis?*

O peso está relacionado co volume. A torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, e queremos construír unha, exactamente do mesmo material que pese 1 quilo. Polo tanto, k^3 = 8 000 000/1 = 8 000 000, e k = 200. A razón de proporcionalidade entre as lonxitudes é de 200.

Se a Torre Eiffel mide 300 *m* de altura (mide un pouco máis, 320 m), e chamamos x ao que mida a nosa temos: $300/x = 200$. Despexamos x que resulta igual a $x = 1.5$ *m*. Mide metro e medio! É moito maior que un lapis!

Actividades propostas

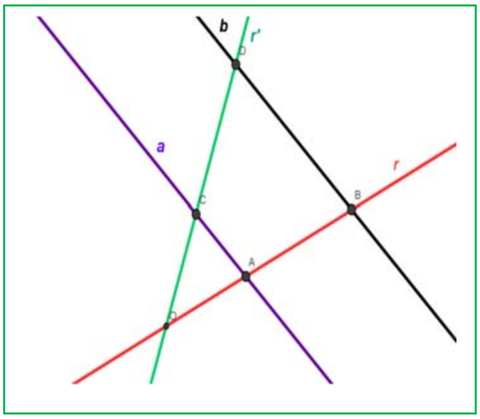
2. O diámetro dun pexego é tres veces maior có do seu óso, e mide 8 *cm*. Calcula o volume do pexego, supoñendo que é esférico, e o do seu óso, tamén esférico. Cal é a razón de proporcionalidade entre o volume do pexego e o do óso?

3. Na pizzería teñen pizzas de varios prezos: 3 €, 6 € e 9 €. Os diámetros destas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* e 30 *cm*, cal resulta máis económica? Calcula a relación entre as áreas e compáraa coa relación entre os prezos.

4. Unha maqueta dun depósito cilíndrico de 1 000 litros de capacidade e 5 metros de altura, queremos que teña unha capacidade de 1 litro. Que altura debe ter a maqueta?

2. O TEOREMA DE TALES

2.1. Teorema de *Tales*



Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. A recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*. Entón o Teorema de Tales afirma que os segmentos son proporcionais:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$$

Dise que os triángulos *OAC* e *OBD* están en **posición *Tales***. Son **semellantes**. Teñen un ángulo común (coincidente) e os lados proporcionais.

Actividades resoltas

- *Sexan OAC e OBD dous triángulos en posición Tales. O perímetro de OBD é* 20 *cm, e OA mide* 2 *cm, AC mide* 5 *cm e OC mide* 3 *cm. Calcula as lonxitudes dos lados de OBD.*

Utilizamos a expresión: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$ substituíndo os datos:

$$\frac{2}{OB} = \frac{3}{OD} = \frac{5}{BD} = \frac{2+3+5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2},$$

polo que despexando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, e *BD* = 5·2 = 10 cm.
En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro do triángulo.

- *Conta a lenda que Tales mediu a altura da pirámide de Keops comparando a sombra da pirámide coa sombra do seu bastón. Temos un bastón que mide* 1 *m. Se a sombra dunha árbore mide* 12 *m e a do bastón (á mesma hora do día e no mesmo momento) mide* 0.8 *m, canto mide a árbore?*

As alturas da árbore e do bastón son proporcionais ás súas sombras (forman triángulos en posición *Tales*), polo que, se chamamos *x* á altura da árbore, podemos dicir:

$\frac{0.8}{1} = \frac{12}{x}$. Polo tanto, *x* = 12/0.8 = 15 metros.

Actividades propostas

5. Nunha foto hai un neno, que sabemos que mide 1,5 *m*, e un edificio. Medimos a altura do neno e do edificio na foto e resultan ser: 2 *cm* e 10 *cm*. Que altura ten o edificio? *Comprobación*: O resultado paréceche real? É posible que un edificio teña esa altura?

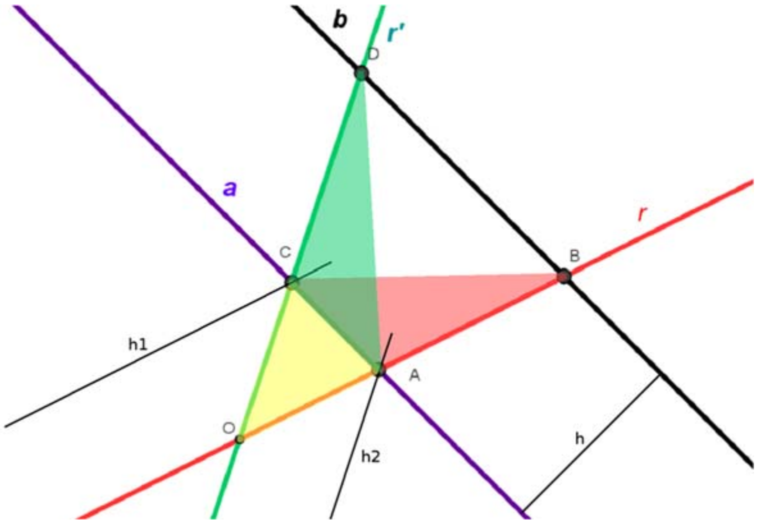
6. Debúxase un hexágono regular. Trázanse as súas diagonais e obtense outro hexágono regular. Indica a razón de semellanza entre os lados de ambos os hexágonos.

7. Nun triángulo regular *ABC* dado 1 *cm* trazamos os puntos medios, *M* e *N*, de dous dos seus lados. Trazamos as rectas *BN* e *CM* que se cortan nun punto *O*. Son semellantes os triángulos *MON* e *COB*? Cal é a razón de semellanza? Canto mide o lado *MN*?

8. Unha pirámide regular hexagonal, de lado da base 3 *cm* e altura 10 *cm*, córtase por un plano a unha distancia de 4 *cm* do vértice, co que se obtén unha nova pirámide. Canto miden as súas dimensións?

2.2. Demostración do teorema de Tales

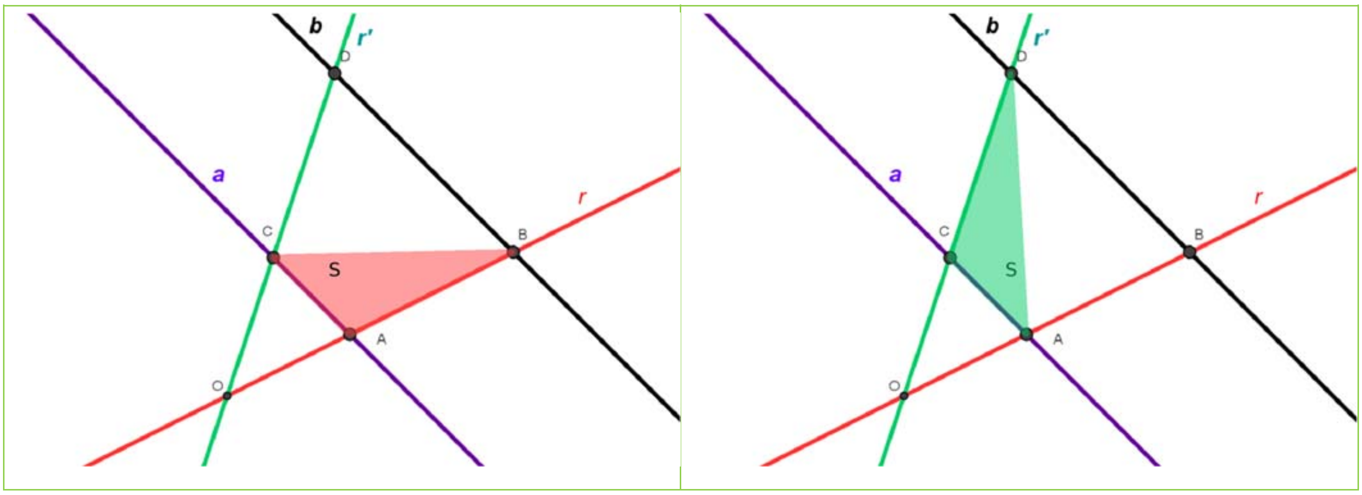
Para a demostración utilízanse os triángulos *ABC*, *ADC* e *OCA,* que se amosan na figura.



Imos dar varios pasos para demostrar o teorema de Tales.

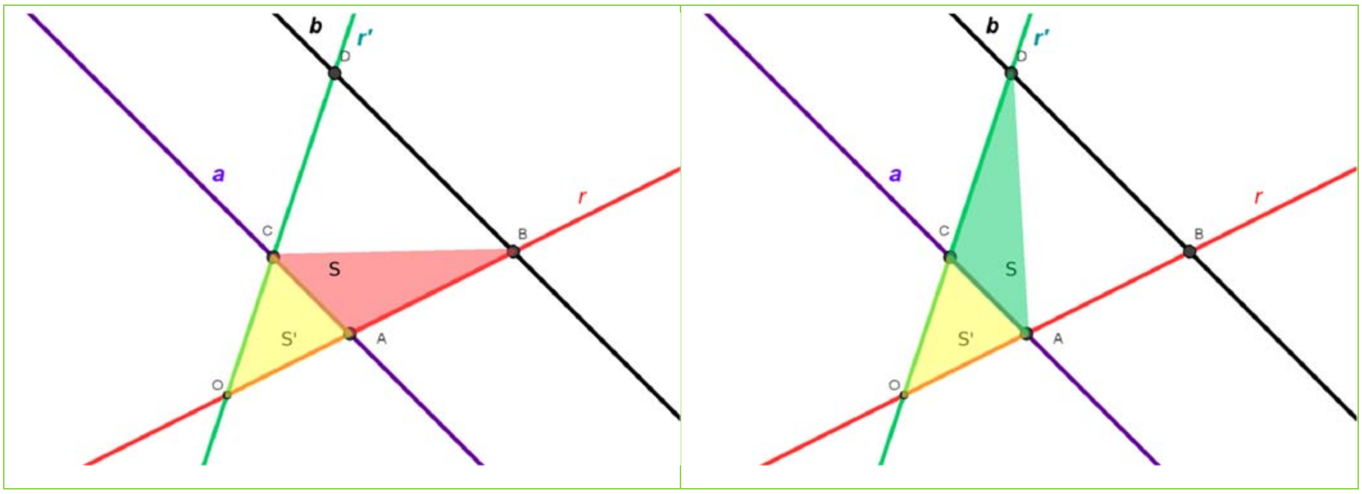
- A área do triángulo *ABC* é a mesma que a área do triángulo *ADC* pois teñen a mesma base (*AC)* e a mesma altura (*h*), a distancia entre as rectas paralelas ***a*** e ***b***:

$$Área\ (ABC) = Área\ (ADC) = CA \cdot h/2 = S$$



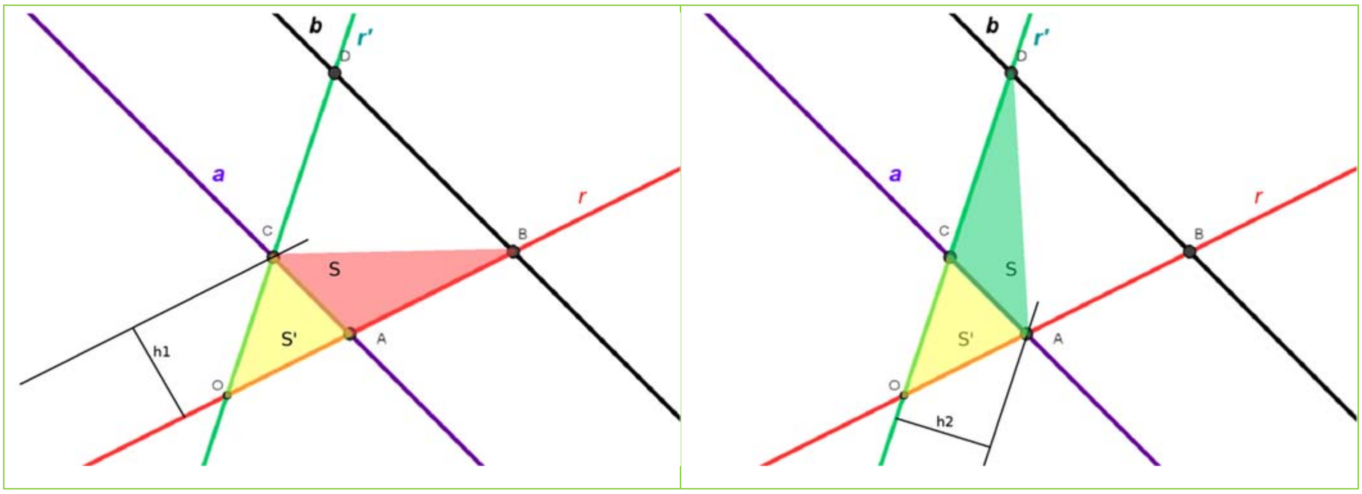
- A área do triángulo *OCB* é a mesma que a área do triángulo *OAD* pois sumamos ás áreas dous triángulos anteriores, a área do triángulo *OAC*:

Área (*OCB*) = *Área* (*OAD*) = S + S'



- Calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *OBC*. Para calcular as áreas, tomamos as bases que están sobre a recta ***r***, entón a altura de ambos os triángulos é a mesma pois teñen o vértice *C* común, polo que o cociente entre as súas áreas é igual ao cociente entre as súas bases.
- Do mesmo modo calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *OAD* tomando agora as bases sobre a recta ***r'*** e a altura, que é a mesma, a do vértice común *A*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)}=\frac{S'}{S+S'}=\frac{OA\cdot h_1/2}{OB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{OB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(OAD)}=\frac{S'}{S+S'}=\frac{OC\cdot h_2/2}{OD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{OD}$$

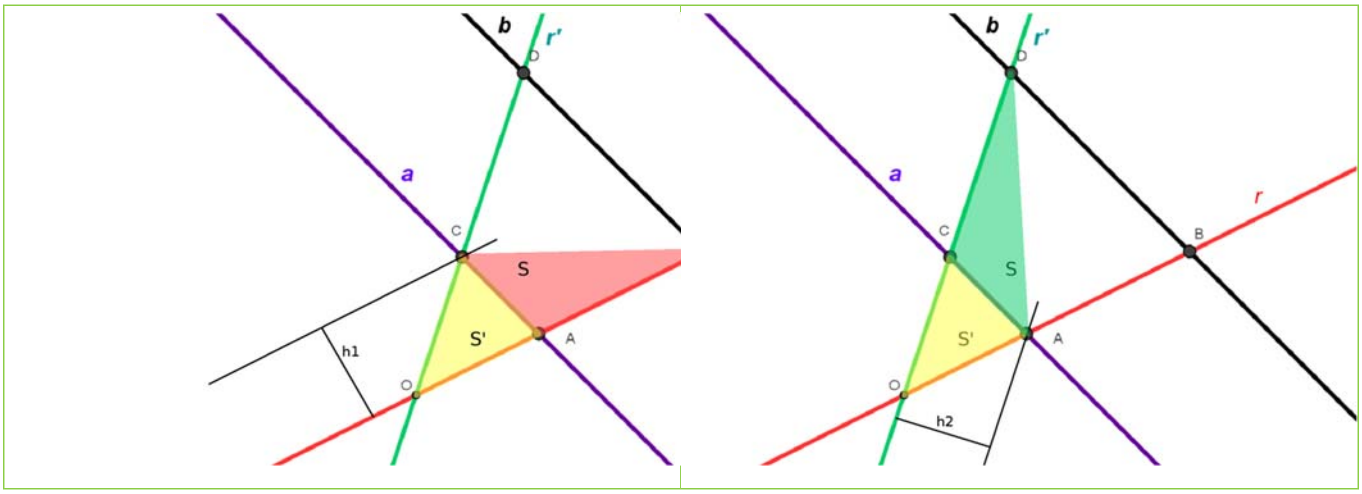


- Xa demostramos que *Área* (*OBC*) = *Área* (*OAD*) = S, substituíndo:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(OBC)}=\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}. \qquad (1)$$

- Para obter a outra relación de proporcionalidade utilizamos un razoamento similar. Calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *ABC* tomando as bases sobre a recta ***r*** e a altura do vértice común *C*.
- Despois calculamos o cociente entre as áreas dos triángulos *OAC* e *ADC* tomando as bases sobre a recta ***r'*** e a altura, que é a mesma, desde o vértice común *A*, polo que ese cociente é proporcional ás bases *OC* e *CD*:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OA\cdot h_1/2}{AB\cdot h_1/2}=\frac{OA}{AB} \qquad \frac{Área(OAC)}{Área(ADC)}=\frac{S'}{S}=\frac{OC\cdot h_2/2}{CD\cdot h_2/2}=\frac{OC}{CD}$$



- Pero como as áreas de *ABC* e de *ADC* (S) son iguais obtense:

$$\frac{Área(OAC)}{Área(ABC)}=\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\Rightarrow\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}. \qquad (2)$$

Igualando as expresións (1) e (2) conséguese a primeira afirmación do teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}\Leftrightarrow\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Actividades resoltas

- Demostra que se $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ entón $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$

En efecto, se dicimos que $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=k$ obtemos que:

$$OA = k\cdot OC; OB = k\cdot OD; AB = k\cdot CD \Rightarrow$$

$$OA + OB + AB = k\cdot OC + k\cdot OD + k\cdot CD = k\cdot(OC + OD + CD)$$

E despexando *k* logramos probar que:

$$k=\frac{OA+OB+AB}{OC+OD+CD} \text{ e polo tanto}$$

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}, \text{ o teorema de } Tales.$$

- *Sexan OAC e OBD dous triángulos en posición Tales. O perímetro de OAC é 50 cm, OB mide 12 cm, BD mide 9 cm e OD mide 9 cm. Calcula as lonxitudes dos lados de OAC.*

Utilizamos a expresión do Teorema de Tales:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$$

substituíndo os datos:

$$\frac{OA}{12}=\frac{OC}{9}=\frac{AC}{9}=\frac{50}{12+9+9}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3},$$

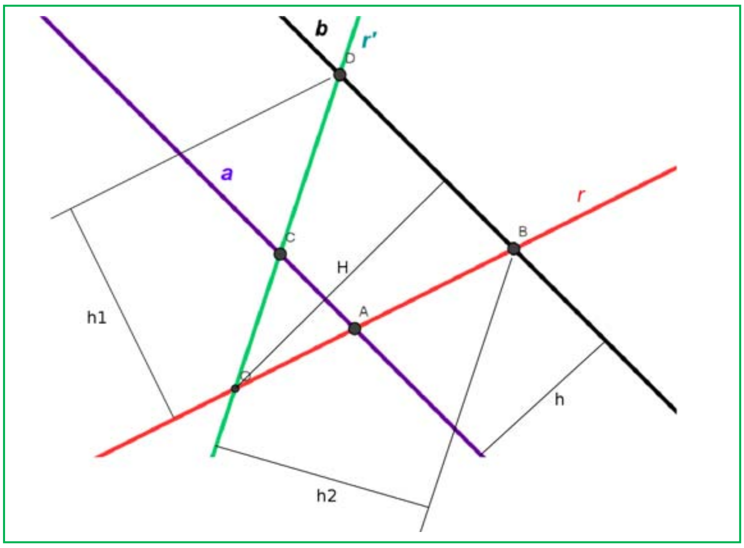
polo que, despexando, sabemos que:

OA = $12\frac{5}{3}$ = 20 cm;

OC = $9\frac{5}{3}$ = 15 cm, e

AC = $9\frac{5}{3}$ = 15 cm.

En efecto: 20 + 15 + 15 = 50 cm, perímetro do triángulo.



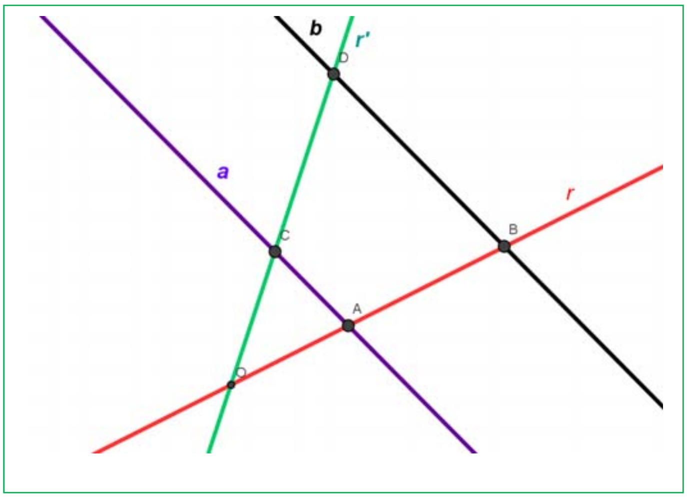
Actividades propostas

9. Sexan *ABC* e *AED* dous triángulos en posición Tales. Sábese que *AB* = 7 m, *BC* = 5 m, *AC* = 4 m e *AD* = 14 m. Calcula as dimensións de *AED* e o seu perímetro.

10. *Reto*: Utiliza unha folla en branco para demostrar o teorema de Tales sen axuda. Non fai falla que utilices o mesmo procedemento que o libro. Hai moitas maneiras de demostrar o teorema.

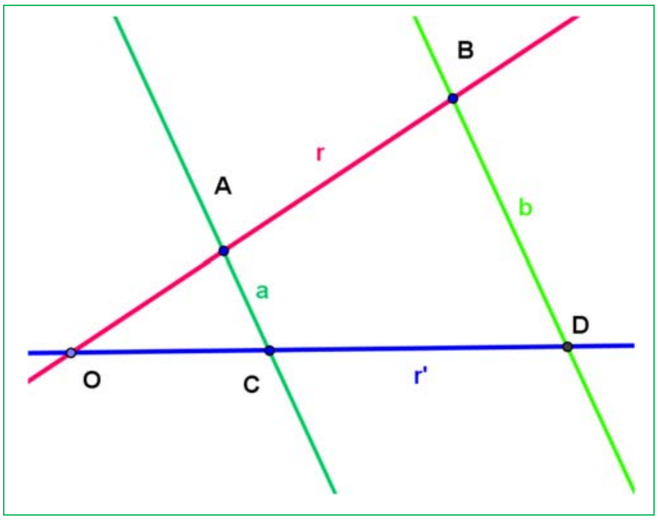
2.3. Recíproco do teorema de *Tales*

Dadas dúas rectas, ***r*** e ***r'***, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas ***a*** e ***b*** tales que a recta ***a*** corta ás rectas ***r*** e ***r'*** nos puntos *A* e *C*, e a recta ***b*** corta ás rectas ***r*** e ***r'*** nos puntos *B* e *D*. Entón o recíproco do Teorema de Tales afirma que se todos os segmentos formados polos puntos *A, B, C* e *D* son proporcionais, as rectas ***a*** e ***b*** son paralelas entre si.



Se $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entón ***a*** e ***b*** son paralelas.

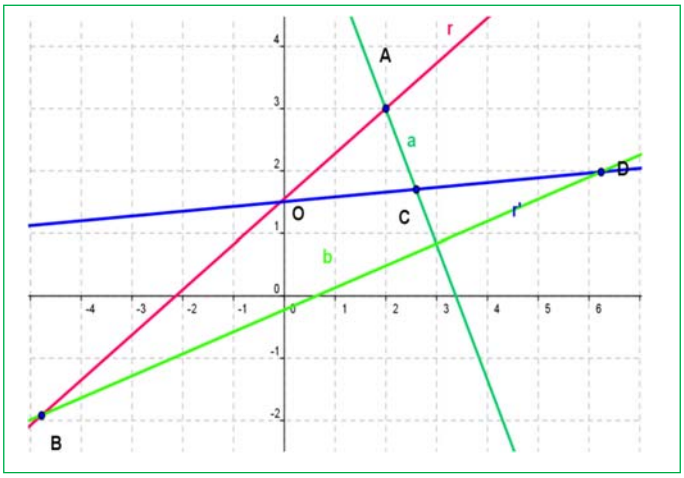
Actividades resoltas



- *Na figura adxunta sábese que OA* = 2 cm, *OC* = 2 cm, AC = 1 cm, *OB* = 5 cm, *OD* = 5 cm, BD = 2.5 cm. Como son as rectas ***a*** e ***b***?

Substituímos na expresión do teorema de Tales: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$, que se verifica xa que: $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} = \frac{1}{2.5}$, logo as rectas ***a*** e ***b*** son paralelas, e o segmento *AC* é paralelo a *BD*.

- *Na figura adxunta sábese que OA* = *OC* = 2 cm, e que *OB* = 5 cm = *OD*. As rectas ***a*** e ***b*** non son paralelas, por que?



Porque non verifica o teorema de Tales.

$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \neq \frac{AC}{BD}$ => $\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \neq \frac{AC}{BD}$.

Non basta con que se verifique unha das igualdades, deben verificarse as dúas.

Comprobación: Mide cunha regra os valores de *AC* e *BD*.

Actividades propostas

11. Sexan *O*, *A* e *B* tres puntos aliñados e sexan *O*, *C*, *D* outros tres puntos aliñados nunha recta diferente á anterior. Verifícase que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$. Podemos asegurar que o segmento *AC* é paralelo ao segmento *BD*? Razoa a resposta.

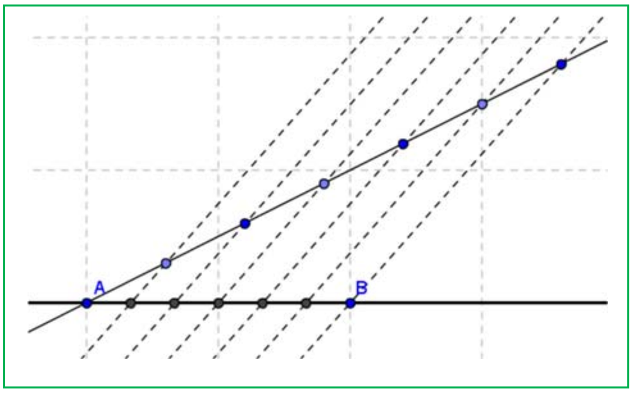
12. Sexan *O*, *A* e *B* tres puntos aliñados e sexan *O*, *C*, *D* outros tres puntos aliñados nunha recta diferente á anterior. Verifícase que $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$. Podemos asegurar que o segmento *AC* é paralelo ao segmento *BD*? Razoa a resposta.

2.4. Aplicacións do teorema de *Tales*

Ao estudar a representación de números racionais na recta numérica aprendemos a representar fraccións para o que cumpría dividir segmentos en partes iguais.

Recorda que:

Para dividir un **segmento *AB* en *n* partes iguais** trázase unha semirrecta *r* con orixe en A onde se sinalan, coa axuda dun compás, *n* segmentos consecutivos da mesma lonxitude. O extremo do último segmento únese con *B*, e trázanse paralelas a este segmento por cada un dos puntos sinalados da semirrecta.



Observa que a figura obtida é de triángulos en posición Tales, e que os segmentos obtidos en A*B* son todos de igual lonxitude.

Do mesmo modo o teorema de *Tales* sérvenos para **dividir un segmento en partes que teñan unha proporción dada**. O procedemento é o mesmo que o anterior. A diferenza é que agora unicamente nos interesa unha das divisións da semirrecta *r*.

O teorema de Tales tamén nos permite coñecer moito máis sobre a **semellanza de triángulos**. Se dous triángulos son semellantes imos poder aplicar un movemento a un deles (translación, xiro ou simetría) e colocalo en posición Tales co segundo, e a partir de aí utilizar o teorema de Tales. Isto verémolo con máis detemento nos apartados seguintes.

Actividades resoltas

- *Na figura anterior dividimos o segmento AB* en 6 partes iguais. Identifica os 6 triángulos en posición de Tales e calcula o factor de semellanza con respecto ao primeiro.

Os triángulos en posición de Tales son os que comparten o mesmo ángulo do vértice A.
Se chamamos *d* á distancia entre dous cortes sobre o segmento *AB*, pódese calcular *d* = *AB*/6.
O factor de semellanza calcúlase mediante a proporción entre as súas lonxitudes. Ao seren triángulos en posición Tales, sabemos que todas as proporcións son iguais para todos os lados, polo que o factor de semellanza coincide coa proporción entre calquera par de lados, incluíndo os que coinciden co segmento *AB*.

Temos entón que a base do primeiro triángulo (o máis pequeno) é *d*, e a base do segundo triángulo é 2 · *d*, así que a razón de semellanza destes dous triángulos é 2.
Da mesma maneira, as razóns de semellanza dos demais triángulos serán 3, 4, 5 e 6.

Actividades propostas

13. Se divides o segmento *AB* en 6 partes iguais, busca a relación de semellanza entre o sexto segmento e o terceiro.

14. Debuxa no teu caderno un segmento e divídeo en 5 partes iguais utilizando regra e compás. Demostra que, utilizando o teorema de Tales os segmentos obtidos son, en efecto, iguais.

15. Debuxa no teu caderno un segmento de 7 cm de lonxitude, e divídeo en dous segmentos que estean nunha proporción de 3/5.

16. Debuxa no teu caderno unha recta numérica e representa nela as seguintes fraccións:

a) 1/2 b) 5/7 c) –3/8 d) 5/3

3. SEMELLANZA DE TRIÁNGULOS

3.1. Criterios de semellanza de triángulos

Como se sabe se dúas figuras son semellantes?

Xa sabes que:

Dúas figuras son semellantes cando teñen a mesma forma pero distinto tamaño. Aínda que esta definición pode parecer moi clara na linguaxe natural, non é útil en Matemáticas xa que non se pode escribir en linguaxe lóxica.

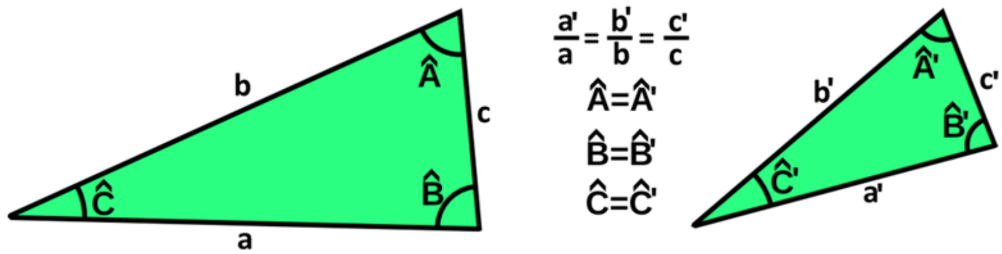
Imos traballar a semellanza coa figura máis simple que existe: o **triángulo**.

As dúas condicións para a semellanza son a forma e o tamaño. Un triángulo é unha figura formada por tres lados e tres ángulos.

Dous triángulos teñen a mesma forma se os tres ángulos son iguais. Se un só ángulo é distinto teñen distinta forma e trátase de triángulos non semellantes.

Cando dous triángulos teñen a mesma forma (os mesmos ángulos), podemos falar de triángulos semellantes. Se son semellantes, a proporción entre os seus lados é constante, como afirma o teorema de Tales.

Dous triángulos **semellantes** teñen todos os ángulos iguais e os lados proporcionais.



Para recoñecer dous triángulos semellantes non é necesario coñecer todos os lados e ángulos, é suficiente con que se cumpra algún dos seguintes **criterios de semellanza.**

Criterios de semellanza de triángulos

Para que dous triángulos sexan semellantes deben ter os seus tres ángulos iguais. Isto cúmprese nos seguintes tres casos.

Dous triángulos son semellantes se:

Primeiro: Teñen dos ángulos iguais.

Ao teren dos ángulos iguais e seren a suma dos ángulos dun triángulo igual a 180°, o terceiro ángulo é necesariamente igual. Co que ambos os triángulos se poden superpoñer e levar á posición de triángulos en posición Tales. Dous dos seus lados son entón coincidentes e o terceiro é paralelo.

Segundo: Teñen os tres lados proporcionais.

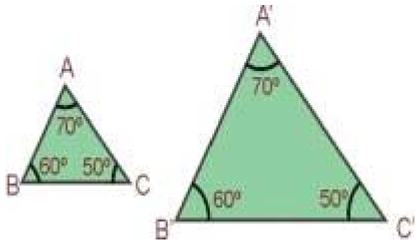
Se os seus tres lados son proporcionais, necesariamente son semellantes polo teorema de Tales.

Terceiro: Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.

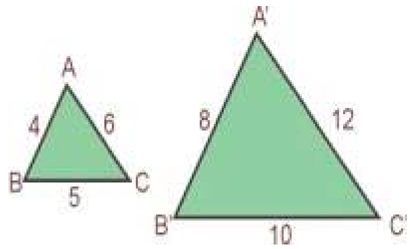
Como acabamos de ver, a demostración dos criterios de semellanza baséase nos criterios de igualdade de triángulos. Xa sabes que dous triángulos son iguais se teñen os seus tres lados iguais e os seus tres ángulos iguais, pero non é necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que o sexan. Basta por exemplo que teñan un lado e dous ángulos iguais. Así, pódese construír un triángulo igual a un dos dados en *posición Tales* co segundo e deducir a semellanza.

Exemplo

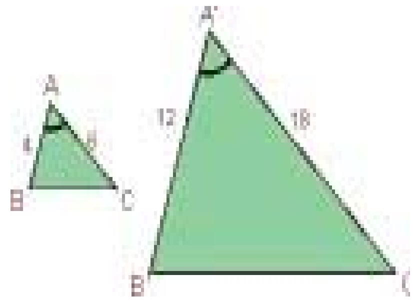
- *Os triángulos das ilustracións son semellantes. Cada unha das figuras verifica un dos criterios de semellanza de triángulos.*



Primeiro criterio



Segundo criterio



Terceiro criterio

Actividades resoltas

- *Calcula os valores descoñecidos b' e c' para que os triángulos de datos a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 *cm. a' = 6 cm sexan semellantes:*

Sabemos que debe verificarse que: *a/a'* = *b/b'* = *c/c'*. Ao substituír tense: 9/6 = 6/*b'* = 12/*c'* e ao despexar: *b'* = 6 · 6 / 9 = 4 cm, *c'* = 12 · 6 / 9 = 8 cm.

Actividades propostas

17. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 60° e outro de 40°. Un ángulo de 80° e outro de 60°.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
c) *a* = 30°, *b* = 8 cm, *c* = 10 cm. *a'* = 30°, *b'* = 4 cm, *c'* = 5 cm
d) *a* = 7 cm, *b* = 8 cm, *c* = 12 cm. *a'* = 14 cm, *b'* = 16 cm, *c'* = 25 cm

18. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) *a* = 12 cm, *b* = 15 cm, *c* = 10 cm. *a*' = 5 cm, *b*', *c*'?

b) *a* = 37°, *b* = 10 cm, c = 12 cm. *a'* = 37°, *b*' = 10 cm, *c*'?

19. Un triángulo ten lados de 12 cm, 14 cm e 8 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 80 cm. Canto miden os seus lados?

3.2. Semellanza de triángulos rectángulos: Teorema da altura e do cateto

Os triángulos rectángulos teñen un ángulo de 90°, así que para que dous triángulos rectángulos sexan semellantes chégalles con ter outro ángulo igual.

Se dous triángulos rectángulos teñen un ángulo, distinto do recto, igual, son semellantes e os seus lados son proporcionais.

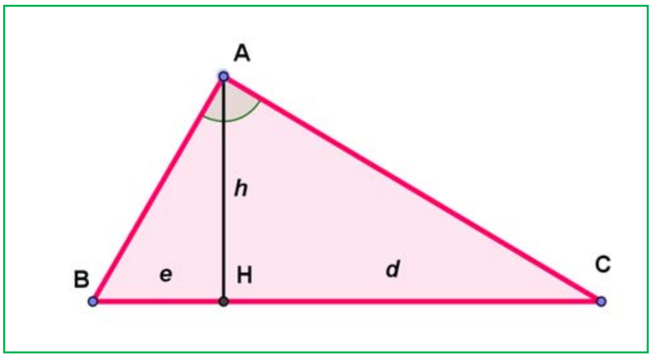
Debido a isto, a altura sobre a hipotenusa divide ao triángulo rectángulo en dous novos triángulos rectángulos que son semellantes (pois comparten un ángulo co triángulo de partida).

Agora que os lados son proporcionais podemos escribir dous teoremas, o teorema da altura e o do cateto.

Teorema da altura

Nun triángulo rectángulo a altura é a media proporcional entre os segmentos nos que divide á hipotenusa:

$$\frac{h}{e}=\frac{d}{h} \text{ logo } h^2 = e \cdot d.$$



En efecto, sexan as lonxitudes da altura *AH* = *h*, do segmento *BH* = *e*, e do segmento *HC* = *d*, ao ser o triángulo *ABC* semellante ao triángulo *ABH* e á súa vez semellante ao triángulo *AHC*, estes dous triángulos son semellantes, polo que os seus lados son proporcionais, polo que:

Cateto menor de *AHC* / cateto menor de *ABH* = Cateto maior de *AHC* / cateto maior de *ABH*⇒

$$\frac{h}{e}=\frac{d}{h},$$

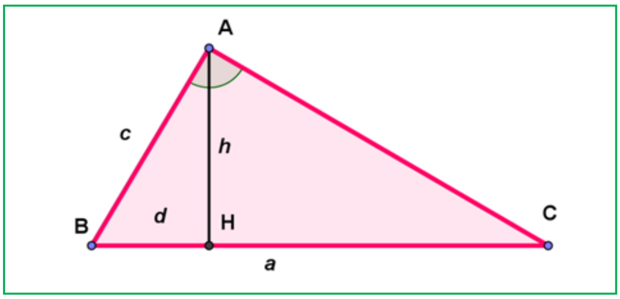
ou o que é o mesmo:

$$h^2 = e \cdot d.$$

Teorema do cateto

Nun triángulo rectángulo un cateto é a media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección sobre ela:

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d} \text{ logo } c^2 = a \cdot d.$$



Pola semellanza dos triángulos *ABC* e *HBA* sabemos que os lados correspondentes son proporcionais, polo que:

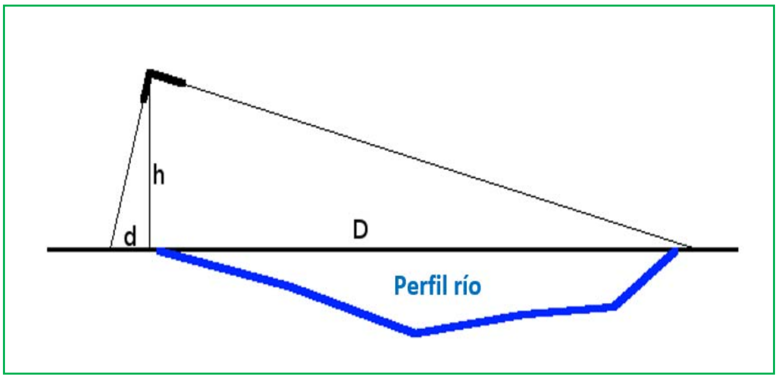
hipotenusa do triángulo grande *ABC* / hipotenusa do triángulo pequeno *AHB* = cateto menor do triángulo grande *ABC* / cateto menor do triángulo pequeno *AHB*

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{d}, \text{ ou o que é o mesmo: } c^2 = a \cdot d.$$

Actividades resoltas

- *Encargáronnos medir o ancho dun río en varios puntos do curso. Na maioría dos puntos puidemos medilo cunha corda, pero hai un ensanche no que no podemos medilo así. Imos inventar un método que aplica o teorema da altura que nos permita medilo.*

Imos a unha tenda e compramos dous punteiros láser. A continuación, unímolos formando un ángulo de 90°. Despois imos á parte do río que queremos medir e enfocamos un deles cara á outra beira ata que vexamos o punteiro. Agora buscamos o punteiro do outro láser que colocaramos a 90° e marcamos sobre o chan.



Despois de medir a altura á que sostemos os punteiros e a distancia da base ata o segundo punteiro, temos os seguintes datos:

d = 5 cm e h = 150 cm.

Aplicando o teorema da altura, sabemos que:

$h^2 = d \cdot D$, así que $D = h^2/d$.

Polo tanto, $D = 150^2/5$ = 4 500 cm = 45 metros.

Actividades propostas

20. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 3 e 4 cm, canto mide a altura sobre a hipotenusa?

21. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 3 e 4 cm, canto mide a proxección sobre a hipotenusa de cada un deses catetos?

22. Debuxa os tres triángulos semellantes para o triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 en posición de *Tales*.

3.3. Aplicación informática para a comprensión da semellanza

A semellanza nun pentágono regular

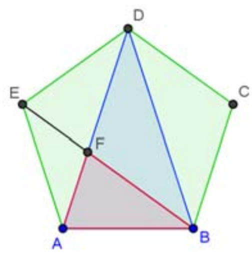
Nesta actividade vaise utilizar o programa *Xeoxebra* para realizar un estudo da semellanza de diferentes triángulos que podemos debuxar nun pentágono regular calculando de forma aproximada a súa razón de semellanza. Tamén se comprobará a relación que existe entre a razón entre as áreas de dúas figuras semellantes e a súa razón de semellanza.

Actividades resoltas

- *Cálculo da razón de semellanza*

Abre unha ventá de *Xeoxebra,* no menú **Visualiza** desactiva **Eixes** e **Cuadrícula** e no menú **Opcións** elixe en **Rotulado** a opción **Só os novos puntos**.

- Determina con **Novo punto** os puntos *A* e *B* e debuxa con **polígono regular** o pentágono que ten como vértices os puntos *A* e *B*.
- Debuxa con **Polígono** o triángulo *ABD,* utiliza **Segmento** para debuxar a diagonal *BE* e define o punto *F* como punto de **intersección de dous obxectos** (as diagonais *AD* e *BE*), determina con **polígono** o triángulo *ABF*. É conveniente cambiar a cor de cada un dos polígonos debuxados para recoñecelos na ventá alxébrica, para isto utiliza a opción **Propiedades** do menú contextual ao situar o cursor sobre o polígono ou sobre o seu nome na ventá alxébrica



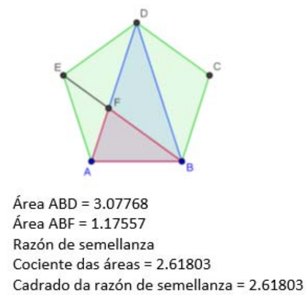
- Os triángulos *ABD* e *ABF* son semellantes. Sabes demostrar por que?

Recorda que é suficiente demostrar que teñen dous ángulos iguais e como os ángulos interiores dun pentágono regular miden 108°, é evidente que no triángulo isósceles *ABD* o ángulo desigual mide 36° e os ángulos iguais 72°. No triángulo *ABF*, o ángulo *ABF* mide 36° e o *BAF,* 72° polo que os triángulos son semellantes e ademais o ángulo *BFA* tamén mide 72°.

- Utiliza a ferramenta de *Xeoxebra* que permite medir ángulos para comprobar estes resultados.
- Para calcular a razón de semellanza calculamos o cociente entre dous lados correspondentes destes triángulos, por exemplo, *BD* e *AD.* É dicir entre unha diagonal e un lado do pentágono. Para facelo con *Xeoxebra* definimos na liña de entrada a variable **razón de semellanza = f/a** (*f* é unha diagonal e *a* un lado). Observamos na ventá alxébrica que este valor é 1.62. Se aumentamos o número de decimais en **Redondeo** do menú **Opcións** comprobamos que este valor é unha aproximación do número de ouro.

- *A razón de semellanza e o cociente entre as áreas.*

- Define na liña de entrada a variable **cociente de áreas = polígono 2/polígono 3**, sendo o polígono 2 o triángulo *ABD* e o polígono 3 o *ABF*



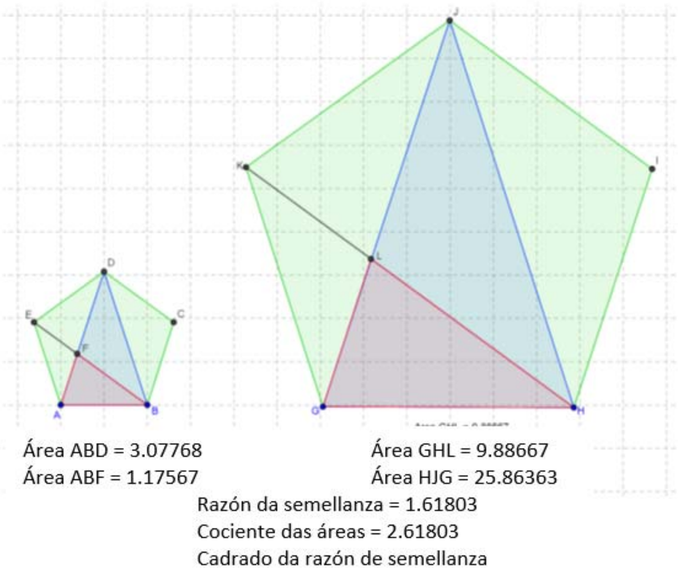
- Define, tamén, na liña de entrada a variable **cadrado razón de semellanza = razón de semellanza^2.** Observa como o cadrado da razón de semellanza coincide co cociente entre as áreas. Aumenta o número de decimais para comprobar que estes valores coinciden.
- Utiliza a ferramenta **Área** para que apareza na pantalla gráfica a área dos triángulos *ABD* e *ABF*, e **Inserir texto** para que aparezan os valores da razón de semellanza, o cociente entre as áreas e o cadrado da razón de semellanza.

Comproba estes resultados noutro pentágono.

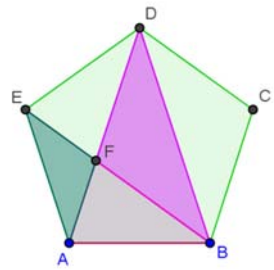
Actividades propostas

23. Debuxa un pentágono *GHIJK* do mesmo modo que construíches o *ABCDE* coa condición de que a lonxitude dos seus lados sexa o triplo do que xa está construído. Para facilitar a tarefa podes activar a **cuadrícula** e mover os puntos iniciais.

a) Calcula as áreas dos triángulos *HJG* e *GHL*, a súa razón de semellanza, o cociente entre as súas áreas e o cadrado da razón de semellanza.

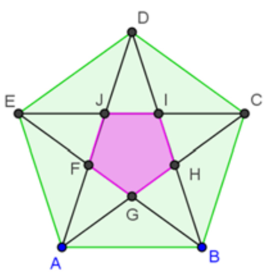


b) Comproba que a razón de semellanza, o cociente entre as áreas e o cadrado da razón de semellanza dos triángulos *GHJ* e *GHL* do pentágono *GHIJK* coinciden coas dos triángulos *ABD* e *ABF* do pentágono *ABCDE.*

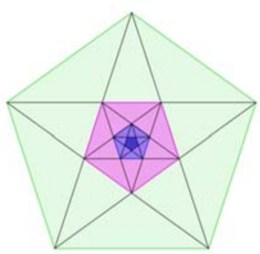


24. Calcula as áreas dos dous pentágonos anteriores e relaciona o seu cociente co cadrado da razón de semellanza.

25. *Outros triángulos do pentágono.* Investiga se os triángulos *AFE* e *BDF* son semellantes e se o son calcula a súa razón de semellanza, o cociente entre as súas áreas e compara este resultado co cadrado da razón de semellanza.



26. *Pentágono dentro dun pentágono.* Debuxa o pentágono *FGHIJ* que se forma no pentágono *ABCDE* ao trazar as súas diagonais, ambos son semellantes porque son polígonos regulares. Calcula a razón de semellanza e o cociente entre as súas áreas. Observa os triángulos AGF e ABD, son semellantes?



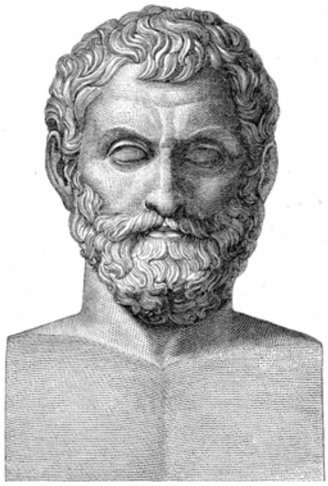
27. Observa os pentágonos regulares da figura: a) Son todos semellantes? b) Paréceche que o proceso de debuxar pentágonos dentro de pentágonos é infinito, por que? c) Cal é a sucesión das razóns de semellanza entre o pentágono maior e cada un dos seguintes?

CURIOSIDADES. REVISTA

Tales de Mileto (ca. 624 – 548 a.C.)

Sobre a vida de *Tales* sábese moi pouco. Os antiguos opinaban que era excepcionalmente intelixente sendo considerado un dos Sete Sabios de Grecia, e que viaxara e coñecera os saberes de Exipto e Babilonia.

Pero non existe ningún documento que certifique nada sobre a súa vida, e é probable que non deixara obra escrita á súa morte. *Eudemo de Rodas* escribiu unha historia das Matemáticas, que se perdeu, pero alguén fixo un resumo dunha parte, que tamén se perdeu, e no século V d.C. *Proclo* incluíu parte deste resumo nun comentario sobre os elementos de *Euclides*. Iso é o que sabemos sobre Tales e a Matemática!



Hai moitas lendas sobre a súa vida como que:

- Se fixo rico alugando uns muíños de aceite durante un ano no que a colleita de oliva foi abundante.
- Foi mercador de sal.
- Foi observador das estrelas. Un día, por mirar as estrelas, caeu a un pozo e cando se rían diso dixo que quería coñecer as cousas do ceo pero que o que estaba aos seus pés lle escapaba.
- Foi un home de estado.
- Dirixu unha escola de náutica.

Ademais de dicirse del que:

- predixo unha eclipse,
- construíu unha canle para desviar as aguas dun río para que o cruzara un exército

e tamén se di que utilizou a semellanza de triángulos para

- calcular a altura da pirámide de *Keops*
- e a distancia dun barco á praia.

Saberías ti resolver eses dous últimos problemas?

Sobre matemáticas atribúenselle diversos teoremas, aínda que algúns xa eran coñecidos polos babilonios, pero quizais el utilizou un razoamento dedutivo. Por exemplo, dise que demostrou:

- Un ángulo inscrito nunha semicircunferencia é un ángulo recto.
- Un diámetro divide un círculo en dúas partes iguais.
- Un triángulo isósceles ten dous ángulos iguais.
- Dous triángulos con dous ángulos iguais e un lado igual, son iguais.
- Os ángulos opostos polo vértice son iguais.

A que todos estes teoremas xa os sabías ti?

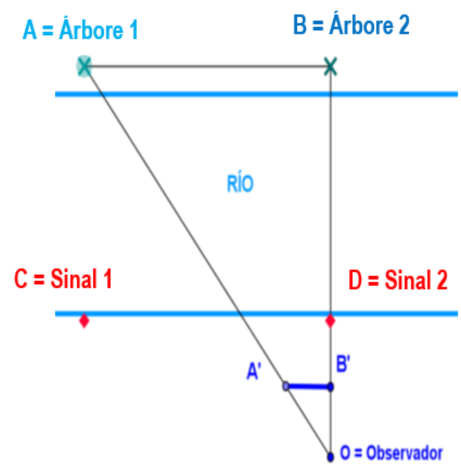
Algúns problemas

- Calcula a altura da *Pirámide de Keops* sabendo que a súa sombra mide 175.93 metros e que ao mesmo tempo a sombra dun bastón, de altura un metro, mide 1.2 metros.

- Calcula a altura dunha árbore sabendo que a súa sombra mide 15 metros e que ao mesmo tempo a sombra dun pau, de altura un metro, mide 1.5 metros.

- Uns exploradores atopan un río e queren construír unha pasarela para cruzalo pero como coñecer a anchura do río, se non podemos ir á outra beira? Pensa! Pensa! Seguro que se che ocorren moitas boas ideas, mellores que a que che imos comentar a continuación.

Buscas na beira oposta dúas árbores (ou dúas rochas, ou …), A e B. Colocándote na túa beira perpendicular a eles, marcas dous sinais (Sinal 1 e Sinal 2) e mides así a distancia entre esas dúas árbores. Agora medindo ángulos debuxas dous triángulos semellantes. Un, na túa beira, podes medilo e, por semellanza de triángulos, calculas os lados do outro.



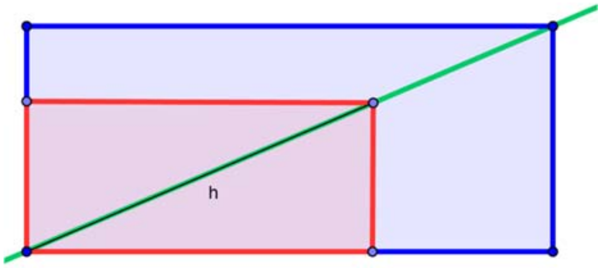
- Imaxina que a distancia *CD* é de 10 metros, que *A'B'* mide 2 metros e que *OB'* = 2.5 m. Canto mide *OB*? Se *OD* mide 5 metros, canto mide a anchura de río?

Pensa! Pensa!

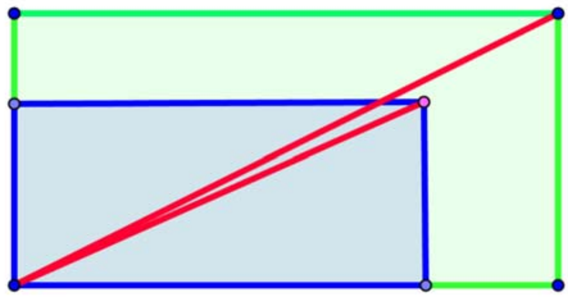
Como poderías coñecer a que distancia da costa está un barco?

Rectángulos semellantes

Para saber se dous rectángulos son semellantes colócanse un sobre o outro, con dos lados comúns, e se teñen a mesma diagonal, son semellantes.



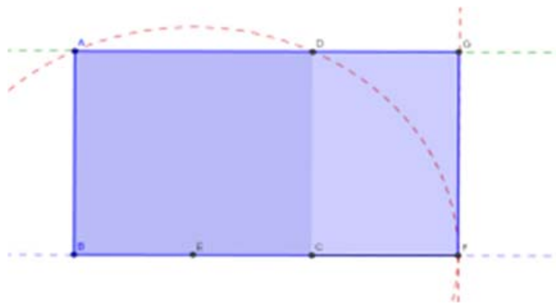
Rectángulos semellantes



Non son semellantes

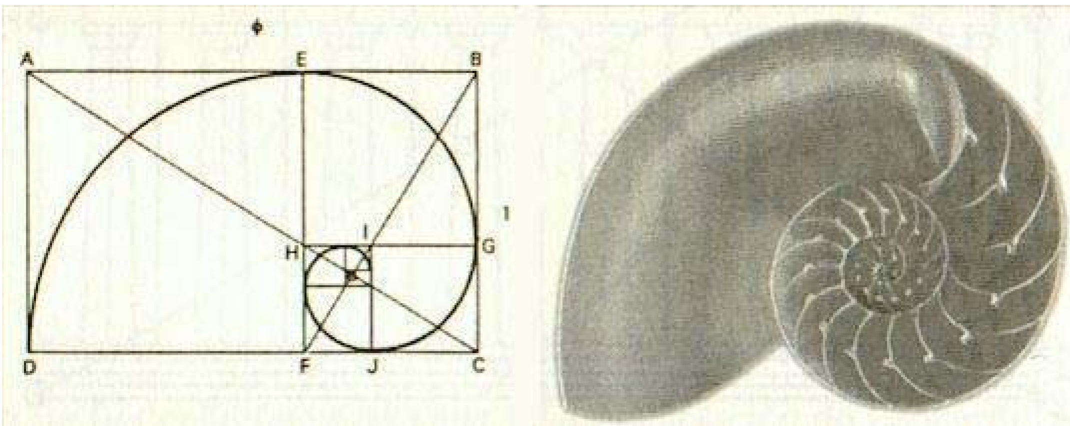
Rectángulo áureo

Un rectángulo é áureo se os seus lados están en proporción áurea. Todos os rectángulos áureos son semellantes.

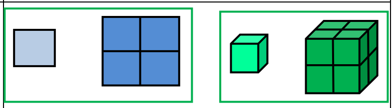
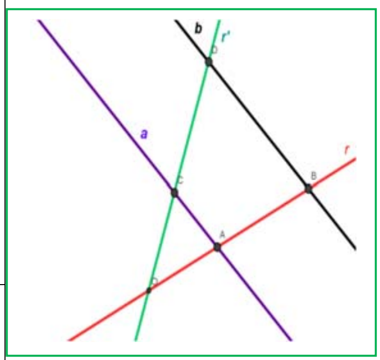
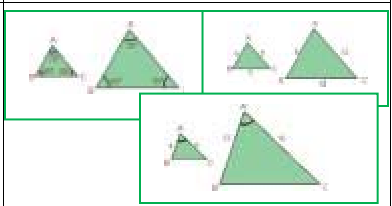
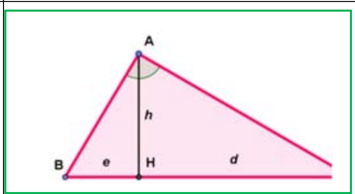
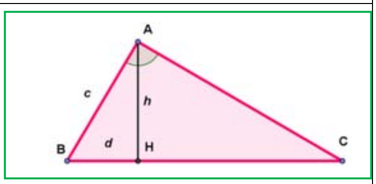


Se a un rectángulo áureo se lle quita (ou engade) un cadrado, obtense un rectángulo semellante ao de partida e polo tanto tamén áureo.

Podes construír unha espiral con rectángulos áureos como indica a figura



RESUMO

Noción	Definición	*Exemplos*
Figuras semellantes	Se as lonxitudes dos elementos correspondentes son proporcionais.	
Razón de semellanza	Coeficiente de proporcionalidade.	
Semellanza en lonxitudes, áreas e volumes	Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é ***k***, entón a razón entre as súas áreas é $\boldsymbol{k^2}$ e entre os seus volumes é $\boldsymbol{k^3}$.	
Teorema de Tales	Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. A recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*. Entón: $$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$	
Recíproco do teorema de Tales	Se $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$ entón ***a*** e ***b*** son paralelas.	
Semellanza de triángulos	Dous triángulos son **semellantes** se teñen todos os ángulos iguais e os lados proporcionais.	
Criterios de semellanza de triángulos	Dous triángulos son semellantes se: **Primeiro:** Teñen dos ángulos iguais. **Segundo:** Teñen os tres lados proporcionais. **Terceiro:** Teñen dous lados proporcionais e o ángulo que forman é igual.	
Teorema da altura	Nun triángulo rectángulo a altura é media proporcional dos segmentos nos que divide á hipotenusa: $\frac{h}{e}=\frac{d}{h}$ logo $h^2 = ed$.	
Teorema do cateto	Nun triángulo rectángulo un cateto é media proporcional entre a hipotenusa e a súa proxección sobre ela: $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$ logo $c^2 = ad$.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Figuras semellantes

1. Busca fotografías, planos, fotocopias, figuras a escala, etc. Toma medidas e determina as razóns de semellanza. Calcula as medidas reais e comproba que a razón de semellanza obtida é correcta.

2. Nun mapa de estradas de escala 1:3000 a distancia entre dúas cidades é de 2.7 cm. Calcula a distancia real entre as cidades.

3. Un microscopio ten un aumento de 500X, que tamaño ten a imaxe que se ve polo obxectivo se observamos un paramecio de 0.034 mm de diámetro?

4. Pericles morreu de peste no ano 429 a. C. Consultado o oráculo de Apolo debían construír un altar en forma de cubo cuxo volume duplicara exactamente o que xa existía. Cal debía ser a razón de proporcionalidade dos lados? É posible construír exactamente un cubo con esta razón?

5. Nunha fotografía unha persoa que sabe que mide 1.75 m ten unha altura de 2.3 cm. Aparece unha árbore que na fotografía mide 5.7 cm, canto mide na realidade?

6. Canto mide o lado dun icosaedro cuxa superficie é o triplo doutro icosaedro de lado 4 cm?

7. Supoñemos que un pexego é unha esfera e que o seu óso ten un diámetro que é un terzo do do pexego. Canto é maior a polpa do pexego có seu óso?

8. Son semellantes todos os cadrados? E todos os rombos? E todos os rectángulos? Cando son semellantes dous rombos? E dous rectángulos?

9. A área dun rectángulo é 10 cm^2 e un dos seus lados mide 2 cm. Que área ten un rectángulo semellante ao anterior no que o lado correspondente mide 1 cm? Que perímetro ten?

10. Son semellantes todas as esferas? E os icosaedros? E os cubos? E os dodecaedros? Cando son semellantes dous cilindros?

11. A aresta dun octaedro mide 7.3 cm e a doutro 2.8 cm. Que relación de proporcionalidade hai entre as súas superficies? E entre os seus volumes?

12. A medida normalizada A$ ten a propiedade de que partimos o rectángulo pola metade da súa parte máis longa, o rectángulo que se obtén é semellante ao primeiro. Duplicando, ou dividindo, obtéñense as dimensións dos rectángulos A1, A2, A3, A4, A5…. O rectángulo A4 mide 29.7 cm x 21 cm. Determina as medidas de A3 e de A5.

13. Debuxa un pentágono regular e traza as súas diagonais. Tes un novo pentágono regular. Cal é a razón de semellanza?

14. Debuxa no teu caderno un pentágono regular e traza as súas diagonais. Canto miden os ángulos do triángulo formado por un lado do pentágono e as dúas diagonais do vértice oposto? Este triángulo denomínase *triángulo áureo* pois ao dividir o lado maior entre o menor obtense o número de ouro. Na figura que trazaches hai outros triángulos semellantes ao áureo, que relación de proporcionalidade hai entre eles?

15. O mapa a escala 1:1500000 dunha rexión ten unha área de 1 600 cm^2, canto mide a superficie verdadeira desta rexión?

16. *Eratostenes de Alexandría* (276 – 196 a. C.) observou que en Siena a dirección dos raios solares era perpendicular á superficie da Terra no solsticio de verán. Viaxou seguindo o curso do Nilo unha distancia de 790 km (5 mil estadios) e mediu a inclinación dos raios do sol no solsticio de verán en Alexandría que era de α = 7° 12'. Utilizou a proporcionalidade: $2\pi R/790 = 360°/\alpha$ para determinar o radio da Terra. Que obtivo?

17. Temos un conxunto de rectángulos dados: A: 4 e 7, B: 2 e 5, C: 8 e 14, D: 4 e 10, E: 3 e 7, F: 9 e 21. Indica cales son semellantes. Debuxa e recorta o rectángulo A, e debuxa o resto dos rectángulos. Superpón o rectángulo A cos outros rectángulos e explica que observas co que é semellante. Que lonxitude ten o outro lado dun rectángulo semellante a A cuxo lado menor mide 10 cm?

O teorema de *Tales*

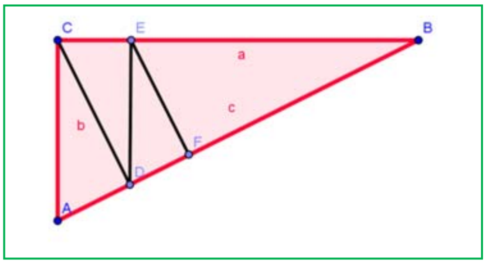
18. Divide un segmento calquera en 5 partes iguais utilizando o teorema de *Tales*. Saberías facelo por outro procedemento exacto?

19. Divide un segmento calquera en 3 partes proporcionais a 2, 3, 5 utilizando o teorema de Tales.

20. Se alguén mide 1.75 m e a súa sombra mide 1 m, calcula a altura do edificio cuxa sombra mide 25 m á mesma hora.

21. Un rectángulo ten unha diagonal de 75 m. Calcula as súas dimensións sabendo que é semellante a outro rectángulo de lados 36 m e 48 m.
Sexan *OAC* e *OBD* dous triángulos en posición *Tales*. O perímetro de *OBD* é 200 cm, e *OA* mide 2 cm, *AC* mide 8 cm e *OC* mide 10 cm. Determina as lonxitudes dos lados de *OBD.*

22. No museo de Bagdad consérvase unha taboíña na que aparece debuxado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 e *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* e *EFB*, e o escriba calculou a lonxitude do lado *AD*. Utiliza o teorema de Tales para determinar as lonxitudes dos segmentos *AD*, *CD*, *DE, DF, EB, BF* e *EF*. Calcula a área do triángulo *ABC* e dos triángulos *ACD, CDE, DEF* e *EFB*.



Semellanza de triángulos

23. O triángulo rectángulo *ABC* ten un ángulo de 54° e outro triángulo rectángulo ten un ángulo de 36°. Podemos asegurar que son semellantes? Razoa a resposta.

24. A hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 25 cm e a altura sobre a hipotenusa mide 10 cm, canto miden os catetos?

25. Indica se son semellantes os seguintes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 50° e outro de 40°. Un ángulo de 90° e outro de 40°.

b) Triángulo isósceles cun ángulo desigual de 40°. Triángulo isósceles cun ángulo igual de 70°.

c) *A* = 72°, *b* = 10 cm, *c* = 12 cm. *A'*= 72°, *b'* = 5 cm, *c'* = 6 cm.

d) *a* = 7 cm, *b* = 5 cm, *c* = 8 cm. *a'* = 21 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 24 cm.

26. Calcula o valor descoñecido para que os triángulos sexan semellantes:

a) a = 12 cm, b = 9 cm, c = 15 cm. a' = 8 cm, b', c'?

b) A = 45°, b = 6 cm, c = 4 cm. A' = 45°, b' = 24 cm, c'?

27. As lonxitudes dos lados dun triángulo son 7 cm, 9 cm e 10 cm. Un triángulo semellante a el ten un perímetro de 65 cm. Canto miden os seus lados?

28. A sombra dun edificio mide 23 m e a do primeiro piso 3 m. Sabemos que a altura dese primeiro piso é de 2.7 m, canto mide o edificio?

29. Demostra que en dous triángulos semellantes as bisectrices son proporcionais.

30. Un triángulo rectángulo isósceles ten a hipotenusa de lonxitude 9 cm, igual a un cateto doutro triángulo semellante ao primeiro. Canto valen as áreas de ambos os triángulos?

31. Unindo os puntos medios dos lados dun triángulo obtense outro triángulo. Son semellantes? Que relación hai entre os seus perímetros? E entre as súas áreas?

32. A altura e a base dun triángulo isósceles miden respectivamente 7 e 5 cm; e é semellante a outro de base 12 cm. Calcula a altura do novo triángulo e as áreas de ambos os dous.

33. Os triángulos seguintes son semellantes. Pescuda a medida dos ángulos que faltan sabendo que:

a) Son rectángulos e un ángulo do primeiro triángulo mide 52°.

b) Dous ángulos do primeiro triángulo miden 30° e 84°.

34. Os triángulos seguintes son semellantes. Averigua as medidas que faltan sabendo que:

a) Os lados do primeiro triángulo miden 10 m, 15 m e z m. Os do segundo: x m, 9 m e 8 m.

b) Os lados do primeiro triángulo miden 4 m, 6 m e 8 m. Os do segundo: 6 m, x m e z m.

c) Un lado do primeiro triángulo mide 12 cm e a altura sobre este lado 6 cm. O lado correspondente do segundo mide 9 cm e a altura x cm.

d) Un triángulo isósceles ten o ángulo desigual de 35° e o lado igual de 20 cm e o desigual de 7 cm; o outro ten o lado igual de 5 cm. Canto miden os seus outros lados e ángulos?

35. Enuncia o primeiro criterio de semellanza de triángulos para triángulos rectángulos.

36. Os exipcios usaban unha corda con nós, todos á mesma distancia, para obteren ángulos rectos. Formaban triángulos de lonxitude 3, 4 e 5. Por que? Os indios e os chineses usaban un procedemento similar, aínda que utilizando cordas cos nós separados en 5, 12 e 13, e tamén 8, 15 e 17. Por que? Escribe as lonxitudes dos lados de triángulos semellantes aos indicados.

37. Quérese calcular a altura dunha árbore para o que se mide a súa sombra: 13 m, e a sombra dun pau de 1.2 m de lonxitude, 0.9 m. Que altura ten a árbore?

38. Agora non podemos usar o procedemento da sombra porque a árbore é inaccesible (hai un río no medio) pero sabemos que está a 30 m de nós. Como o farías? Pepe colleu un lapis que mide 10 cm e colocouno a 50 cm de distancia. Dese modo conseguiu ver aliñada a base da árbore cun extremo do lapis, e a punta da árbore co outro. Canto mide esta árbore?

39. *Arquímedes* calculaba a distancia á que estaba un barco da costa. Cunha escuadra *ABC* aliñaba os vértices *BC* co barco, *C'*, e coñecía a altura do cantil ata o vértice *B*. Debuxa a situación, determina que triángulos son semellantes. Calcula a distancia do barco se *BB'* = 50 m, *BA* = 10 cm, *AC* = 7 cm.

AUTOAVALIACIÓN

1. Nun mapa de estradas de escala 1:1200 a distancia entre dúas vilas é de 5 cm. A distancia real entre estas vilas é de:

a) 60 m b) 60 km c) 240 km d) 240 cm

2. Se un microscopio ten un aumento de 1000X, que tamaño (aparente) pensas que terá a imaxe que se vexa polo obxectivo se observamos unha célula de 0.01 mm de diámetro

a) 1 cm b) 1 mm c) 0.1 cm d) 100 mm

3. Queremos construír un cadrado de área dobre dun dun metro de lado. O lado do novo cadrado debe medir:

a) 2 metros b) $\sqrt{2}$ metros c) $\sqrt[3]{2}$ metros d) 1.7 metros

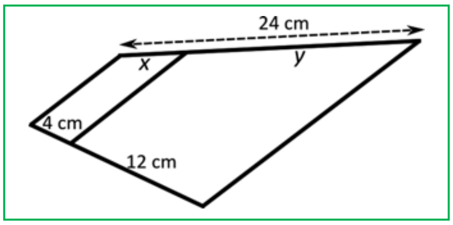
4. Sexan *OAC* e *OBD* dous triángulos en posición *Tales*. O perímetro de *OBD* é 50 cm, e *OA* mide 1 cm, *AC* mide 1.5 cm e OC mide 2.5 cm. As lonxitudes dos lados de *OBD* son:

a) *OB* = 10 cm, *OD* = 20 cm, *BD* = 30 cm b) *OB* = 25 cm, *OD* = 10 cm, *BD* = 15 cm

c) *OB* = 10 cm, *OD* = 15 cm, *BD* = 25 cm d)*OB* = 15 cm, *OD* = 25 cm, *BD* = 30 cm.

5. Na figura adxunta os valores de *x* e y son:

a) 6 e 12 cm b) 5 e 19 cm c) 6 e 18 cm d) 5 e 20 cm



6. Os triángulos *ABC* e *DEF* son semellantes. Os lados de *ABC* miden 3, 5 e 7 cm, e o perímetro de *DEF* mide 60 m. Os lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 e 14 cm b) 12, 20 e 28 cm c) 9, 15 21 m d) 12, 20 e 28 m

7. Dous triángulos rectángulos son proporcionais se:

a) Teñen a hipotenusa proporcional.

b) Teñen un ángulo igual.

c) Teñen un ángulo distinto do recto igual.

d) As súas áreas son proporcionais.

8. Os triángulos *ABC* e *DEF* son semellantes. O ángulo A mide 30°, e B, 72°. Canto miden os ángulos *D*, *E* e *F*?

a) *D* = 72°, *E* = 78° e *F* = 30° b) *D* = 30°, *E* = 88° e *F* = 72° c) *D* = 30°, *E* = 72° e *F* = 68°

9. A altura dun triángulo rectángulo divide á hipotenusa en dous segmentos de lonxitude 5 e 4 cm, canto mide a altura?

a) 5.67 cm b) 4.47 cm c) 6 cm d) 5 cm

10. A proxección dun cateto sobre a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 4 cm, e a hipotenusa 9 cm, canto mide o cateto?

a) 7 cm b) 5 cm c) 5.67 cm d) 6 cm.

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 8: TRIGONOMETRÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Mª Fernanda Ramos Rodríguez e

Mª Milagros Latasa Asso

Revisora: Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Etimoloxicamente *trigonometría* significa *medición de triángulos*. ou seu obxectivo é establecer as relacións matemáticas entre as medidas dos lados dun triángulo coas amplitudes dos seus ángulos, de maneira que resulte posible calcular unhas mediante as outras.

Os primeiros escritos relacionados con ela que aparecen na historia remóntanse á época babilónica da que se conservan unhas taboíñas con medicións de lados e ángulos de triángulos rectángulos. A trigonometría aplícase desde as súas orixes na agrimensura, na navegación e na astronomía xa que permite calcular distancias que é imposible obter por medición directa.

Neste capítulo estudarás as primeiras definicións trigonométricas e coñecerás algunhas das súa aplicacións.

Inscrición babilónica. Museo Pérgamo de Berlín

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1.1. Sistema sesaxesimal

Recordarás que, no sistema sesaxesimal de medida de ángulos, a unidade é o **grao sesaxesimal** que se define como a trescentos sesentava parte dun ángulo completo. Ten dous divisores que son o **minuto** que é a sesentava parte dun grao e o **segundo** que é a sesentava parte dun minuto. Recorda a notación que se emprega neste sistema:

1º = 1 grao sesaxesimal; 1´ = 1 minuto sesaxesimal; 1´´ = 1 segundo sesaxesimal.

Como consecuencia da definición:

1 ángulo completo = 360 º; 1 ou = 60´; 1´ = 60´´.

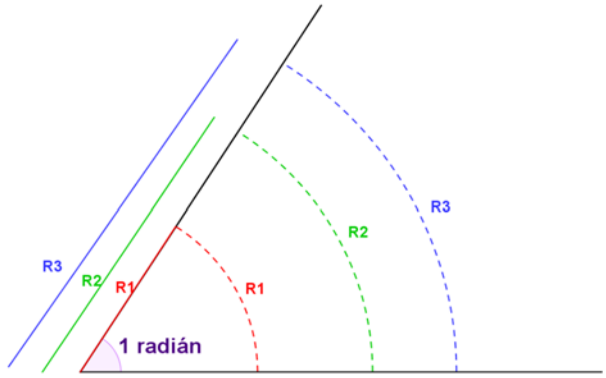
1.2. Sistema internacional

No sistema internacional, a unidade de medida de ángulos é o **radián.**

O **radián** é un ángulo tal que calquera arco que se lle asocie mide exactamente o mesmo que o radio utilizado para trazalo.

Denótase por **rad.**

A un ángulo completo correspóndelle un arco de lonxitude 2πR, a un radián un arco de lonxitude R, entón:



Nº de radiáns dun ángulo completo = $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ **rad.**

E a relación co sistema sesaxesimal obtémola a partir do ángulo completo:

1 ángulo completo = 360 º= 2π rad ⇔ 1 ángulo raso = 180 ºu = π rad.

Por esta relación obtense que 1 rad ≅ 57.216º ≅ 57º 12´ 58´´.

Actividades propostas

1. Expresa en radiáns as seguintes medidas: 45 º, 150 º, 210 º, 315 º**.**

2. Expresa en graos sesaxesimais: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{8}$ radiáns.

3. Dous ángulos dun triángulo miden respectivamente 40º e $\frac{\pi}{3}$ radiáns. Calcula en radiáns o que mide o terceiro ángulo.

4. Un ángulo dun triángulo isósceles mide $\frac{5\pi}{6}$ radiáns. Calcula en radiáns a medida dos outros dous.

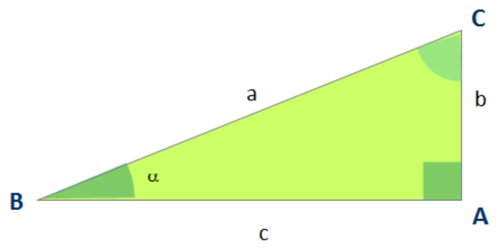
5. Debuxa un triángulo rectángulo isósceles e expresa en radiáns a medida de cada un dos seus ángulos.

2.RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO AGUDO

2.1. Razóns trigonométricas directas dun ángulo agudo

Comecemos por considerar un ángulo agudo calquera, utilizaremos unha letra grega α (alfa) para denotalo. É sempre posible construír un triángulo rectángulo de modo que α sexa un dos seus ángulos. Sexa $\overset{\Delta}{ABC}$ un destes triángulos e situemos nel o vértice *B*, o ángulo α.

Defínense as razóns trigonométricas directas do ángulo α:
seno, coseno e tanxente como:



$$seno\ \ de\ \ \alpha = sen\ \alpha = sen\ \hat{B} = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

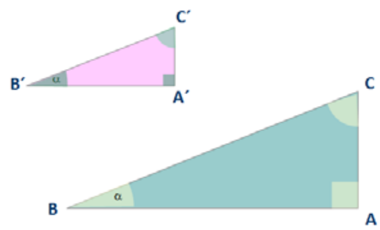
$$\cos eno\ \ de\ \ \alpha = \cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{cateto\ adxacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$tanxente\ de\ \ \alpha = \tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adxacente} = \frac{b}{c}$$

Tamén se utilizan as expresións tgα e tag α como símbolos da tanxente de α.

A miúdo noméanse os ángulos dun triángulo coa mesma letra maiúscula có vértice correspondente.

Esta definición non depende do triángulo elixido. Imos demostralo. Para iso consideremos outro triángulo rectángulo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ con α no vértice *B´*.



Segundo o segundo criterio de semellanza de triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ e $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ son semellantes porque teñen dous ángulos iguais 90º e α. Polo tanto os lados de ambos os dous son proporcionais:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{b'}{a'} \Rightarrow & \textbf{o}\text{ seno }\textbf{é}\text{ independente do triángulo np que se mide} \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'} \Rightarrow & \textbf{o}\text{ coseno }\textbf{é}\text{ independente do triángulo no que se mide} \\ \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{b'}{c'} \Rightarrow & \textbf{a}\text{ tanxente }\textbf{é}\text{ independente do triángulo no que se mide} \end{cases}$$

Actividades resoltas

- *Calcula as razóns trigonométricas dos ángulos agudos dun triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cuxos catetos miden b = 30 cm e c = 40 cm.*

Calculamos en primeiro lugar o valor da hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1\,600 = 2\,500 \Rightarrow a = \sqrt{2\,500} = 50$ cm.

$$sen\ \hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6;\ cos\ \ \hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8;\ tg\ \hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0.8;\ cos\ \ \hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0.6;\ tg\ \hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

2.2. Relacións fundamentais

Se coñecemos unha das razóns trigonométricas do ángulo α, é posible calcular as razóns trigonométricas restantes, grazas ás dúas relacións trigonométricas fundamentais seguintes:

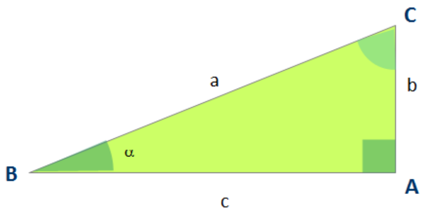
PRIMEIRA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

que tamén verás escrita como $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$ dado que as potencias das razóns trigonométricas soen escribirse co seu expoñente sobre a última letra da súa notación e a continuación o nome do ángulo.

Demostración:

A demostración é sinxela. Volvamos ao triángulo inicial do parágrafo anterior: polo teorema de *Pitágoras* $a^2 = b^2 + c^2$. Dividamos a ambos os membros entre a^2:



$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \\ sen\ \alpha = \frac{b}{a} \\ cos\ \alpha = \frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2$$

SEGUNDA RELACIÓN FUNDAMENTAL:

$$\tan \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$$

Demostración:

No mesmo triángulo anterior: $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c}\frac{a}{a} = \frac{b}{c} = tan\ \alpha.$

Actividades resoltas

- *Sabendo que α é un ángulo agudo, calcula as restantes razóns trigonométricas de α nos casos seguintes: a)* $sen\alpha = \frac{1}{5}$ *b)* $\tan \alpha = 3$

a. $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \Rightarrow \quad cos\ \alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{1}{5} : \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{5}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

b. $\left.\begin{array}{l} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ tan\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \\ sen\ \alpha = 3\ cos\ \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (3\,cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow 10\,cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad cos\ \alpha = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10},\ sen\ \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

2.3. Outras razóns trigonométricas. Outras relacións

Outras razóns trigonométricas dun ángulo α son a cosecante, a secante e a cotanxente de α e a súas notacións son *cosec*α, *sec*α, *cotan*α.

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}\,;\, sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}\,;\, cotan\,\alpha = \frac{1}{tan\,\alpha}\,.$$

Coa súa definición, aparecen novas identidades trigonométricas, entre as que destacan:

a) $sen\ \alpha\ .\ cosec\ \alpha = 1\,;\, cos\ \alpha\ .\ sec\ \alpha = 1\,;\, tan\ \alpha\ .\ cotan\ \alpha = 1$.

b) $sec^2\ \alpha = 1 + tan^2\alpha$

c) $cosec^2\ \alpha = 1 + cotan^2\alpha$

A primeira delas é evidente por definición. A segunda e a terceira teñen unha demostración moi parecida polo que atoparás só unha das dúas e a outra como actividade proposta.

Demostración b):

A partir de $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, dividimos ambos os membros entre $cos^2\ \alpha$:

$$\frac{sen^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} + \frac{cos^2\ \alpha}{cos^2\ \alpha} = \frac{1}{cos^2\ \alpha} \Rightarrow tan^2\ \alpha + 1 = sec^2\ \alpha\ .$$

Actividades propostas

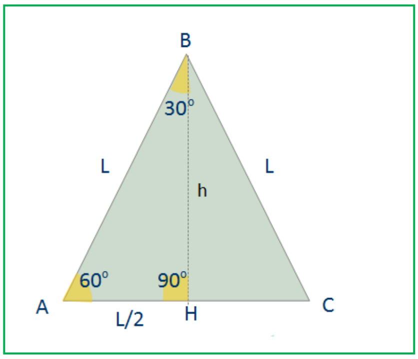
6. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, calcula as razóns trigonométricas secante, cosecante e cotanxente de α.

7. Se *cotan*α = 2, calcula as cinco razóns trigonométricas do ángulo α.

8. Demostra que $cosec^2\ \alpha = 1 + cotan^2\alpha$

2.4. Razóns trigonométricas de 30º, 45º e 60º.

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 30º e 60 º



Consideramos un triángulo equilátero de lado *L.* Trazamos a altura correspondente ao lado sobre o que se apoia. Con iso queda dividido en dous triángulos rectángulos iguais cuxos ángulos miden 90º, 30 º e 60 º. Ademais a hipotenusa mide *L* e un dos seus catetos L/2. Polo teorema de *Pitágoras* podemos obter o que nos falta:

$$h=\sqrt{L^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2}=\sqrt{L^2-\frac{L^2}{4}}=\sqrt{\frac{3L^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Calculamos as razóns trigonométricas de 30º e 60 º no triángulo $\overset{\Delta}{ABH}$:

$$sen\,60^o = \frac{h}{L}=\frac{\sqrt{3}\;L}{2}:\,L=\frac{\sqrt{3}\;L}{2\;L}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen30^o = \frac{L}{2}:\,L=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 60^o = \frac{L}{2}:\,L=\frac{L}{2L}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{h}{L}=\frac{\sqrt{3}\;L}{2}:\,L=\frac{\sqrt{3}\;L}{2\;L}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tag\,60^o = h:\frac{L}{2}=\frac{2h}{L}=\frac{2\sqrt{3}\,L}{2}:L=\frac{2\sqrt{3}\,L}{2L}=\sqrt{3}$$

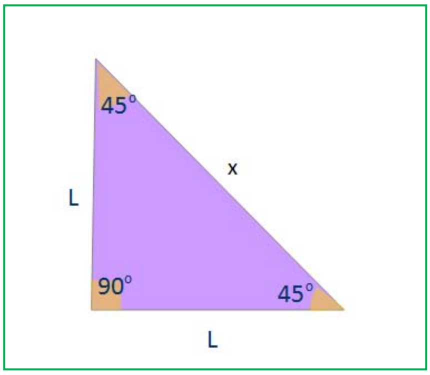
$$tag\,30^o = \frac{L}{2}:h=\frac{L}{2}:\frac{\sqrt{3}\;L}{2}=\frac{2L}{2\sqrt{3}\,L}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DE 45º

Agora imos traballar cun triángulo rectángulo isósceles. Poñamos que os dous catetos teñen unha lonxitude *L*. Utilizamos de novo o teorema de *Pitágoras* e obtemos o valor da hipotenusa *x* en función de *L*:

$$x=\sqrt{L^2+L^2}=\sqrt{2L^2}=L\sqrt{2}$$

Agora podemos calcular xa as razóns trigonométricas de 45º



$$sen\,45^o = \frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}:=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^o = \frac{L}{x}=\frac{L}{L\sqrt{2}}:=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tag\,45^o = \frac{L}{L}=1$$

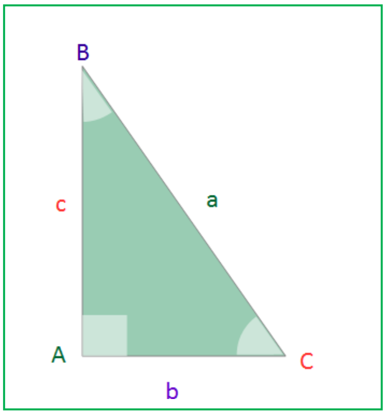
	Seno	Coseno	Tanxente
30º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$

2.5. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo é calcular as amplitudes dos tres ángulos e as lonxitudes dos tres lados.

No caso de que o triángulo sexa rectángulo podemos considerar tres casos dependendo das hipóteses ou datos iniciais. En cada un deles existen varias formas de obter a solución. Imos describir unha en cada caso:

Primeiro caso: Coñécense un ángulo $\hat{B}$ e a hipotenusa *a*:



$$\text{Como } \hat{A} = 90^\circ \; \hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$$

Agora a partir das razóns trigonométricas de $\hat{B}$ ou $\hat{C}$, obtemos os lados que nos faltan. Tamén cabe utilizar o teorema de *Pitágoras* cando coñezamos un dos dous catetos.

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\,sen\,\hat{B}; \qquad \cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B}$$

Segundo caso: Coñécense un ángulo $\hat{B}$ e un cateto *b*:

$$\text{Como } \hat{A} = 90^\circ \; \hat{C} = 90^\circ - \hat{B}$$

Tamén neste caso as razóns trigonométricas de $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ serven para obter polo menos un dos lados e pode utilizarse o teorema de *Pitágoras* cando calculemos o valor dun lado máis. Unha forma de resolución é:

$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{tg\,\hat{B}}; \qquad sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Terceiro caso: Coñécense dous lados:

Neste caso utilizaremos en primeiro lugar o teorema de *Pitágoras* para calcular o terceiro lado, tanto se o que falta é un cateto como se é a hipotenusa. Seguindo co triángulo da figura:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obter o primeiro dos ángulos agudos, calcularemos en primeiro lugar unha das súas razóns trigonométricas, por exemplo $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ e para coñecer o valor do ángulo, despexamos escribindo:

$\hat{B} = arc\ sen\,\frac{b}{a}$, que significa "*ángulo cuxo seno é B*" e que se obtén coa calculadora activando o comando ***sin***$^{-1}$ o que conseguiremos coa secuencia  $\frac{b}{a}$.

Analogamente, se partimos de $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ ou ben $tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ o ángulo *B* é $\hat{B} = arc\cos\frac{c}{a}$ ou $\hat{B} = arc\tan\frac{b}{c}$ que obteremos coas secuencias  $\frac{c}{a}$ ou ben  $\frac{b}{c}$.

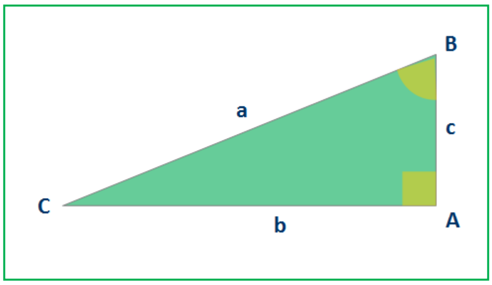
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

Actividades resoltas

- *Resolver o triángulo ABC con ángulo recto en A nos dous casos seguintes:*

  a) $\hat{B} = 42^o$ *e a hipotenusa a = 12 m.*

  b) os catetos miden 12 dm e 5 dm.



a) Cálculo dos ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 42^o$; $\hat{C} = 90^o - 42^o = 48^o$

Cálculo dos lados: $sen\ 42^o = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12\ sen\ 42^o \approx 8.03$ m.

$cos\ 42^o = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12\ cos\ 42^o \approx 8.92$ m.

b) Cálculo da hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$ dm

Cálculo dos ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = arc\ \tan \frac{12}{5} = 67^o 22'\ 48''$; $\hat{C} = 90^o - 67^o 22'\ 48'' = 22^o 37'\ 12''$.

2.6. Aplicacións da resolución de triángulos rectángulos ao cálculo de distancias

Resolución de triángulos rectángulos

A resolución de triángulos rectángulos pode aplicarse directamente nalgúns casos ao cálculo de distancias.

Actividades resoltas

- Calcular a altura dunha árbore sabendo que determina unha sombra de 3.5 metros cando os raios *de sol forman un ángulo de 30º co chan.*

A razón trigonométrica de 30º que relaciona o lado coñecido e o que nos piden é a tanxente:

$$tan\ \ 30^o = \frac{h}{3.5} \Rightarrow h = \ 3.5\ \ tan\ \ 30^o = \ 3.5\ .\ \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2.02 \text{ m.}$$

Técnica da dobre observación

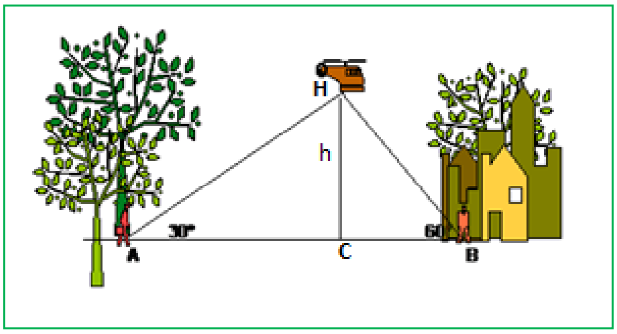
Utilízase para calcular alturas de obxectos aos que resulta difícil chegar como por exemplo, edificios, montañas, obxectos no extremo oposto dunha rúa, etc.

Precisamos dun instrumento para medir ángulos. Habitualmente utilízase o chamado **teodolito**. A técnica consiste en tomar a medida do ángulo que forma unha visual dirixida ao punto máis alto do obxecto a medir coa horizontal, desde dous puntos distintos e situados a unha distancia coñecida para nós.

Aparecen entón dous triángulos rectángulos cun lado común que é a altura a medir. É posible propor un sistema de ecuacións en cuxa formulación é clave a definición das razóns trigonométricas dun ángulo agudo. Vexamos algúns exemplos:

Actividades resoltas

- *Dúas persoas, separadas **30** metros ven un helicóptero. A persoa situada en A dirixe unha visual á base do mesmo que forma co chan un ángulo de **30º**. Tamén a persoa situada en B dirixe a súa vista ao mesmo punto obtendo un ángulo de **60º**. A que altura voa o helicóptero?*



Sexa h esta altura. As visuais e o chan determinan dous triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AHC}$ e $\overset{\Delta}{BHC}$ nos que:

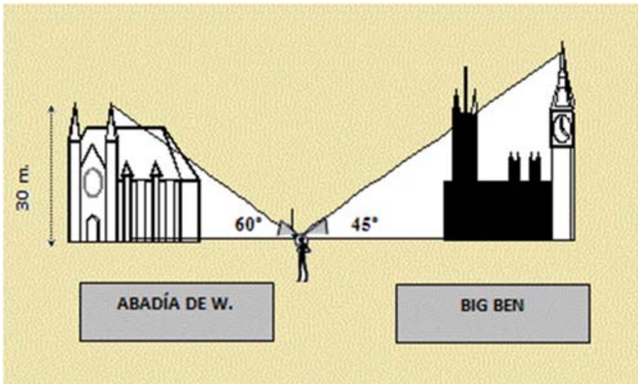
AC + CB = 30 $\Rightarrow$ *CB = 30 – AC* e se facemos *AC = x*

$$\tan\ 30^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\ \tan\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x$$

$$\tan\ 60^\circ = \frac{h}{30-x} \Rightarrow h = (30-x)\ \tan\ 60^\circ = \sqrt{3}\ (30-x) \Rightarrow x = (30-x)\cdot 3 \Rightarrow 4x = 90 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \frac{90}{4} = \frac{45}{2} = 22.5\ m$. Substituíndo, chegamos á solución $h = \frac{\sqrt{3}}{3}\ x\ = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{45}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx\ 13\ m$

- Nunha viaxe *de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algúns dos viaxeiros fixeron prácticas de trigonometría (xa sabes, sempre hai un teodolito a man).*

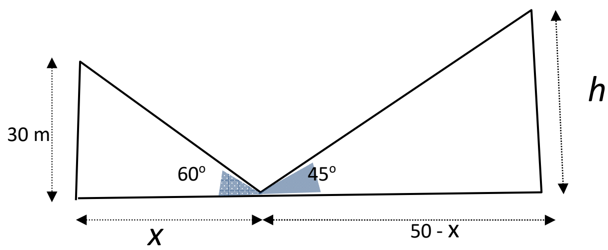


Ao coñecer que as torres da Abadía de Westminster teñen **30** metros de altura, decidiron aproveitar os seus coñecementos para calcular a altura da coñecida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos os edificios divísase o punto máis alto da Abadía cun ángulo de **60**° e o Big Ben cun ángulo de **45**°. Se a distancia entre as bases das torres dos dous edificios é de **50** metros, cal foi o resultado dos seus cálculos?, a que distancia se encontraba de cada edificio? (Nota: os datos son totalmente ficticios)

No triángulo esquerdo determinado pola *Abadía*:

$$\tan\ 60^\circ = \frac{30}{x} \Rightarrow$$

$$x = \frac{30}{\tan 60^o} = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}\ m$$



No triángulo que determina o *Big Ben*:

$$\tan\ 45^\circ = \frac{h}{50-10\sqrt{3}} \Rightarrow h = \left(50-10\sqrt{3}\right)\tan 45^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 50-10\sqrt{3}\ \ m \approx 32.7\ \ m$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

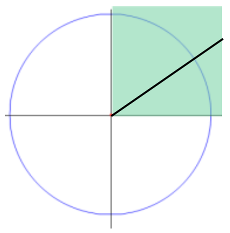
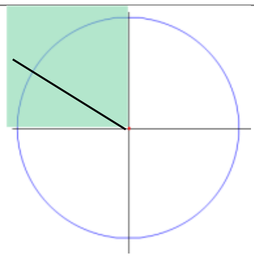
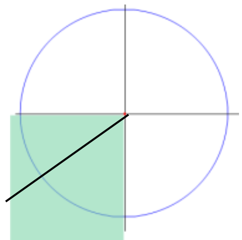
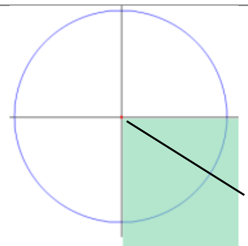
3. RAZÓNS TRIGONOMÉTRICAS DUN ÁNGULO CALQUERA

3.1. Circunferencia trigonométrica. Cuadrantes

Chámase **circunferencia trigonométrica** ou **goniométrica** a unha circunferencia de radio unidade centrada na orixe de coordenadas.

É posible representar calquera ángulo na circunferencia trigonométrica. Para iso sempre se toma un lado fixo que é a semirrecta definida pola parte positiva do eixe de abscisas; o segundo lado é a semirrecta variable que corresponda segundo a súa medida. O sentido dun ángulo mídese de OX^+ á semirrecta variable que determina a súa amplitude. Enténdese que para un ángulo negativo coincide co das agullas dun reloxo analóxico e para un ángulo positivo, o contrario.

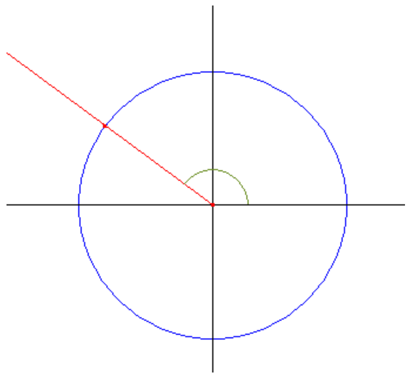
A circunferencia trigonométrica divide o plano en catro rexións que se denominan cuadrantes.

			
PRIMEIRO CUADRANTE	SEGUNDO CUADRANTE	TERCEIRO CUADRANTE	CUARTO CUADRANTE

3.2. Razóns trigonométricas dun ángulo calquera

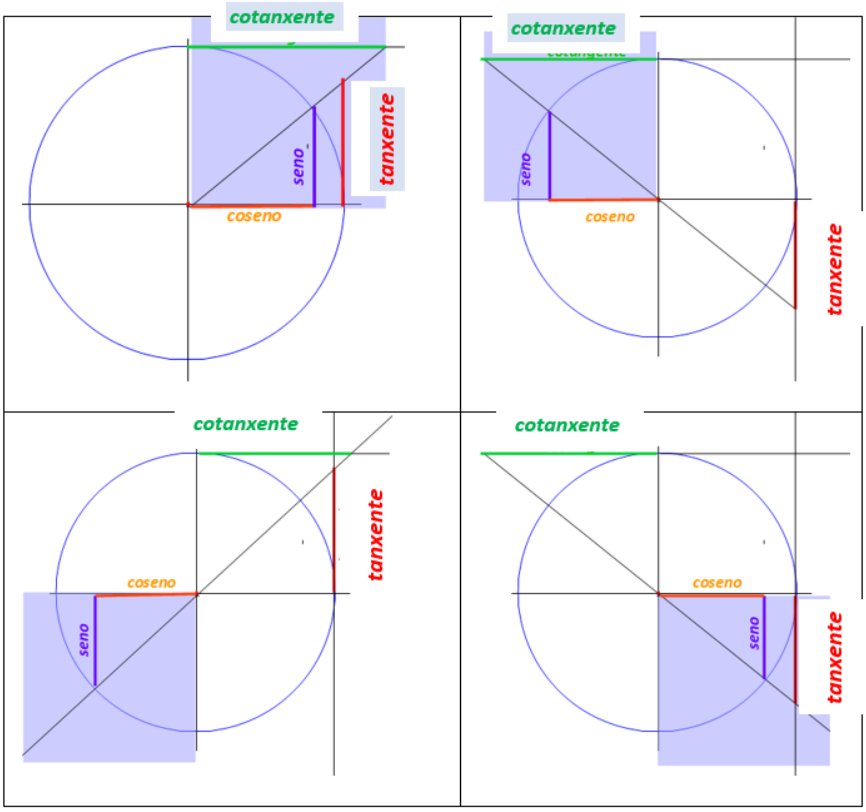
A semirrecta variable que define un ángulo α na circunferencia trigonométrica é clave para a definición dun ángulo calquera. Esta semirrecta corta á circunferencia nun punto $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ a partir do que se define:

$$sen\ \alpha = \frac{y_\alpha}{R} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha\ ;\ cos\ \alpha = \frac{x_\alpha}{R} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha\ ;\ tag\ \alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}.$$



Consérvase a definición para ángulos agudos que son ángulos do primeiro cuadrante e amplíase a ángulos de calquera signo e amplitude.

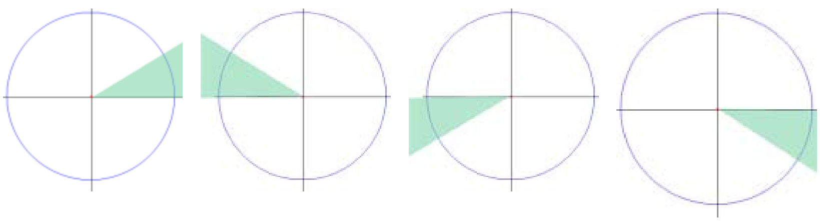
Ademais, esta definición permite ter unha representación xeométrica do seno e o coseno dun ángulo que coincide cos segmentos y_α, x_α, ordenada e abscisa do punto P_α. As rectas tanxentes á circunferencia goniométrica nos puntos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ proporcionan tamén representacións xeométricas da tanxente e cotanxente que son os segmentos determinados por estas tanxentes xeométricas, o eixe OX e a semirrecta correspondente a cada ángulo.



3.3. Redución ao primeiro cuadrante

Os ángulos α dos cuadrantes segundo, terceiro ou cuarto poden relacionarse con ángulos agudos β que podemos situar no primeiro cuadrante e que teñen razóns trigonométricas cos mesmos valores absolutos que os ángulos α iniciais.

Estas relacións permiten obter as razóns trigonométricas de calquera ángulo α en función dun do primeiro cuadrante β. En cada caso calcularemos a amplitude da zona sombreada.



Nos casos nos que desexemos obter que ángulos corresponden a unha razón trigonométrica dada, resulta especialmente importante xa que, aínda que fagamos uso da calculadora, esta devolveranos un único valor e, porén, existen infinitos ángulos solución deste problema. Grazas ao que describiremos neste epígrafe, poderemos encontralos sen dificultade.

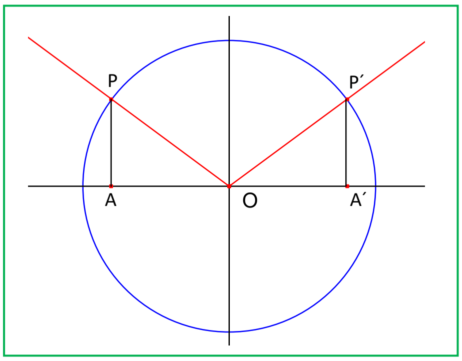
Debes pensar que os ángulos destes cuadrantes non sempre son positivos nin teñen un valor absoluto menor que 360º.

Observa que, se o seu valor absoluto é maior que 360º, equivale ao número de voltas que indique o cociente enteiro da división de α entre 360º máis o resto da división.

O signo dun ángulo depende só da forma de percorrelo (medido desde a parte positiva do eixe *OX* cara á semirrecta que o define).

Para facer máis cómoda a explicación consideraremos que a partir de P se miden as razóns trigonométricas do ángulo α e a partir de P´ as do ángulo β.

ÁNGULOS DO SEGUNDO CUADRANTE



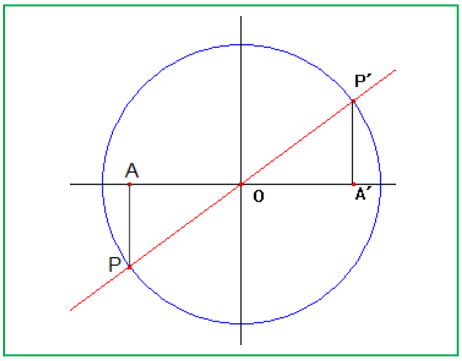
Construímos os triángulos rectángulos *OPA* e *OP´A´* iguais de forma que a hipotenusa sexa en ambos os casos o radio da circunferencia goniométrica e ademais β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*

$$sen\,\alpha = \overline{AP} = \overline{A'P'} = sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

E dividindo membro a membro, obtemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{sen\,\beta}{-cos\,\beta} = -tan\,\beta$

ÁNGULOS DO TERCEIRO CUADRANTE



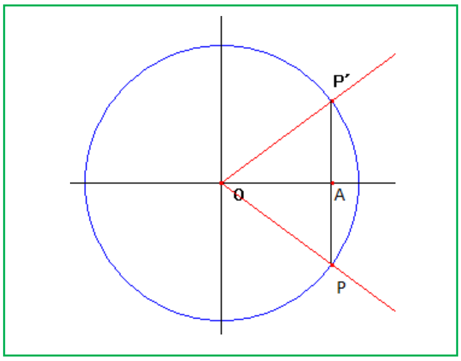
Tamén neste caso os triángulos rectángulos *OPA* e *OP´A´* son iguais. A súa hipotenusa é o radio da circunferencia goniométrica e os seus catetos os segmentos determinados polas coordenadas dos puntos *P* e *P´*. A construción realízase ademais de modo que β = ángulo *AOP* = ángulo *A´OP´*

$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{A'P'} = -sen\,\beta$$

$$cos\,\alpha = \overline{AO} = -\overline{A'O} = -cos\,\beta$$

E dividindo membro a membro, obtemos $tan\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \dfrac{-sen\,\beta}{-cos\,\beta} = tan\,\beta$

ÁNGULOS DO CUARTO CUADRANTE



Por último, construímos os triángulos rectángulos *OPA* e *OP´A* iguais de modo análogo ao descrito nos dous casos anteriores, observando que, neste caso, *A* = *A´*.

$$sen\,\alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -sen\,\beta$$

$cos\,\alpha = \overline{AO} = cos\,\beta$ en ambos os casos.

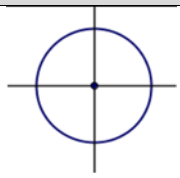
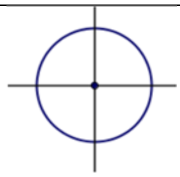
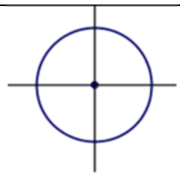
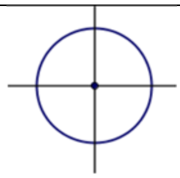
E dividindo membro a membro, obtemos:

$$tan\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{-sen\,\beta}{cos\,\beta} = -tan\,\beta$$

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

Actividades propostas

9. Sitúa no cuadrante que corresponda e expresa en función dun ángulo agudo, o seno, coseno e tanxente dos seguintes ángulos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tanxente*
165 º				
–230 º				
315 º				
3 625 º				

10. Utiliza a calculadora e o aprendido neste epígrafe para encontrar todos os ángulos positivos menores que 360º cuxo seno é de 0.4.

11. Ídem todos os ángulos negativos menores en valor absoluto que 360º cuxa tanxente vale 2.

12. Ídem todos os ángulos comprendidos entre 360º e 720º cuxo coseno vale 0.5.

ÁNGULOS DETERMINADOS POLOS SEMIEIXES

Os ángulos $0^o + 360^o n$; $90^o + 360^o n$; $180^o + 360^o n$; $270^o + 360^o n$ están determinados por semieixes de coordenadas e as súas razóns trigonométricas mídense a partir de puntos dos eixes. Estes puntos son, respectivamente P_1 $(1,\ 0)$,P_2 $(0,\ 1)$, P_3 $(-1,\ 0)$e P_4 $(0,\ -1)$ co que se obtén con facilidade:

$sen\ \ (0^o + 360^o n) = 0$; $cos\ \ (0^o + 360^o n) = 1$; $tan\ \ (0^o + 360^o n) = 0$.

$sen\ \ (90^o + 360^o n) = 1$; $cos\ \ (90^o + 360^o n) = 0$; $tan\ \left(90^o + 360^o n\right)$ non existe.

$sen\ \ (180^o + 360^o n) = 0$; $cos\ \ (180^o + 360^o n) = -1$; $tan\ \ (180^o + 360^o n) = 0$

$sen\ \ (270^o + 360^o n) = -1$; $cos\ \ (270^o + 360^o n) = 0$; $tan\ \left(270^o + 360^o n\right)$ non existe.

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CALQUERA

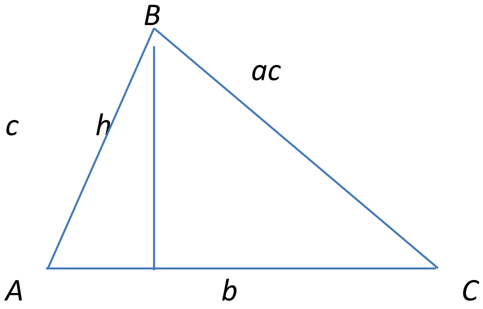
As definicións de seno, coseno e tanxente que aplicamos en triángulos rectángulos non se poden aplicar en triángulos non rectángulos. Para resolver triángulos non rectángulos aplícanse dous teoremas moi importantes en trigonometría: o teorema dos senos e teorema dos cosenos.

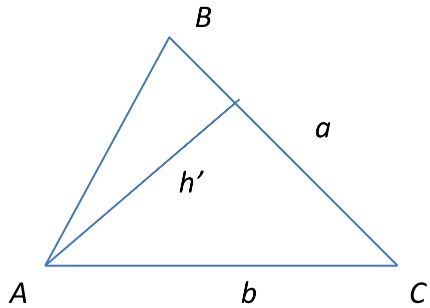
4.1. Teorema dos senos

O **teorema dos senos** afirma que en todo triángulo se cumpre que os lados son proporcionais aos senos dos ángulos opostos. É dicir,

$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Consideremos o triángulo *ABC* e tracemos dúas alturas calquera *h* e *h´* que dividen ao triángulo non rectángulo en dous triángulos rectángulos.





Aplicando a definición de seno aos triángulos nos que intervén *h*:

$$sen\ \hat{A}=\frac{h}{c}\longrightarrow h=c\,sen\ \hat{A}$$

$$sen\ \hat{C}=\frac{h}{a}\longrightarrow h=c\,sen\ \hat{C}$$

Polo tanto:

$$c\,sen\,\hat{A}=a\,sen\ \hat{C}\longrightarrow\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Aplicando a definición de seno aos triángulos nos que intervén *h'*:

$$sen\,\hat{B}=\frac{h'}{c}\longrightarrow h'=c\,sen\,\hat{B}$$

$$sen\ \hat{C}=\frac{h'}{b}\longrightarrow h'=b\,sen\,\hat{C}$$

Polo tanto:

$$c\,sen\hat{B}=b\,sen\hat{C}\longrightarrow\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

Entón, dedúcese que: $\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$

Notas

Se o triángulo é obtusángulo, un razoamento análogo lévanos ás mesmas fórmulas.

Podemos resolver facilmente triángulos utilizando o teorema dos senos se coñecemos:

a) dous ángulos (é dicir, tres ángulos) e un lado

b) dous lados e o ángulo oposto a un deles.

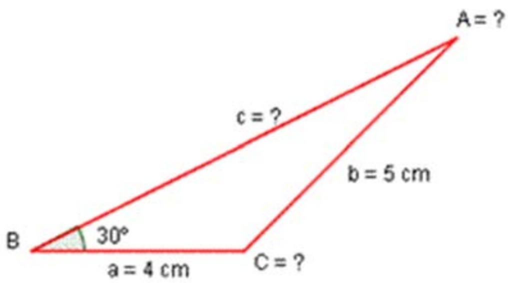
Actividades resoltas

- *Resolver o seguinte triángulo B = 30°, a = 4 cm e b = 5 cm.:*

Coñecemos dous lados e o ángulo oposto a un deles, *b.*

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\,\hat{A}} = \frac{5}{sen\,30º} \rightarrow$$

$$sen\hat{A} = \frac{4\cdot(1/2)}{5} = 0.4.$$



Polo tanto: $\hat{A}$ = *arcsen* 0.4 = 23.58°

O ángulo $\hat{C}$ = 180° – (23.58° + 30°) = 126.42°.

Para calcular o lado *c* volvemos aplicar o teorema dos senos:

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{5}{sen30°} = \frac{c}{sen126.42°}$$

Entón: $c = \frac{5\cdot sen126.42°}{sen30°} = 8.1$ cm.

4.2. Teorema dos cosenos

O **teorema dos cosenos** afirma que nun triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ calquera se cumpre que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

O próximo ano estudarás a demostración deste teorema. De momento só veremos algunhas das súas aplicacións.

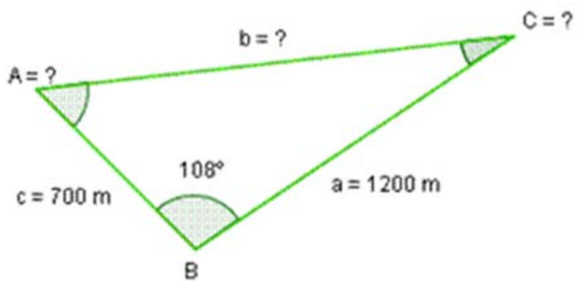
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

Notas

- Si te fixas, o teorema dos cosenos é unha **xeneralización do teorema de *Pitágoras***. É dicir, cando o triángulo é rectángulo, o teorema dos cosenos e o teorema de *Pitágoras* son o mesmo.
- Podemos utilizar o teorema dos cosenos se nun triángulo coñecemos:
  a) os tres lados
  b) dous lados e o ángulo oposto a un deles
  c) dous lados e o ángulo que forman.

Actividades resoltas

- *Resolve o seguinte triángulo do que coñecemos B = 108 º, c = 700 m e a = 1 200 m:*



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ logo $b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2\cdot 700\cdot 1200\cdot \cos 108} \rightarrow b$ = 1 564.97 m.

Con *a, b e c* coñecidos, calculamos o ángulo *C*:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C} \longrightarrow \widehat{\cos C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2\cdot a\cdot b} = \frac{700^2 - 1\,200^2 - 1\,564.97^2}{-2\cdot 1\,200\cdot 1\,564.97} = 0.9 \longrightarrow \hat{C}$ = 25.18º.

O ángulo $\hat{C}$ tamén se podería calcular utilizando o teorema dos senos.

Para calcular $\hat{A}$: $\hat{A}$ = 180º – (108º + 25.18º) = 46.82º.

Actividades propostas

13. Calcula a lonxitude do lado *a* dun triángulo, sabendo que *C* = 25, *b* = 7 cm e *c* = 4 cm.

14. Calcula os ángulos do triángulo de lados: *a* = 6, *b* = 8 e *c* = 5.

4.3. Resolución de triángulos calquera

As ferramentas básicas para resolver triángulos calquera son os teoremas dos senos e dos cosenos vistos anteriormente. O próximo curso ampliarase brevemente a resolución destes triángulos, estudando casos nos que non existirá solución ou casos nos que haxa dúas solucións.

Tamén se formularán problemas de cálculo de distancias entre puntos inaccesibles.

CURIOSIDADES. REVISTA

OS NOSOS SENTIDOS ENGÁNANNOS?

A foto amosa un tramo de estrada cara ao horizonte. Todas as liñas son rectas, a fotografía non engana pero os nosos sentidos, si. Segundo a nosa percepción, estas liñas córtanse no punto do horizonte, aínda que nós, cando estamos nesa situación, sabemos que non é así. Entón, por que o vemos así? Por dúas razóns: porque a luz viaxa en liña recta e porque a nosa percepción visual se basea nos ángulos, o que fai que a anchura da estrada diminúa coa distancia.

Pero agora que coñeces as relacións entre ángulos e lados dun triángulo, saberás razoar se os obxectos diminúen o seu tamaño de forma inversamente proporcional á distancia á que se atopan.

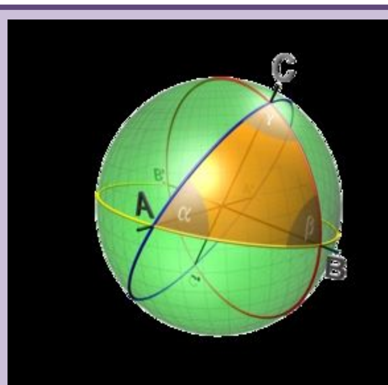
Sabías que...?

O teorema dos senos utilizouse no século XIX para medir de forma precisa o meridiano de París e así poder definir o metro.

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

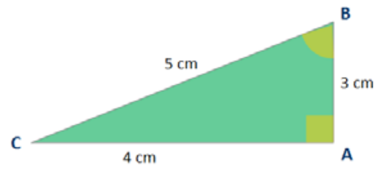
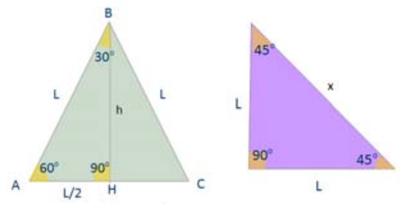
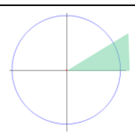
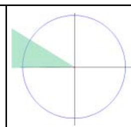
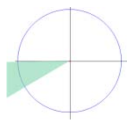
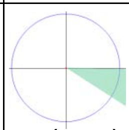
A trigonometría esférica estuda os triángulos que se forman sobre unha superficie esférica

- Na trigonometría esférica a distancia más curta entre dous puntos non é unha recta senón un arco.
- Os ángulos dun triángulo esférico suman máis de 180º.
- É a base da navegación e a astronomía. Curioso, non?



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

RESUMO

<table>
<tr><th>Noción</th><th colspan="4">Definición</th><th>Exemplos</th></tr>
<tr><td>Radián</td><td colspan="4">É un ángulo tal que calquera arco que se lle asocie mide exactamente o mesmo que o radio utilizado para trazalo. Denótase por rad.
Nº de radiáns dun ángulo completo = 2π rad</td><td>90^{ou} son $\pi/2$ rad
1 radián = 57.216^{ou} =
$57^{ou}\ 12'\ 58''$</td></tr>
<tr><td>Razóns trigonométricas dun ángulo agudo</td><td colspan="4">$sen\ \alpha = \dfrac{cateto\ \ oposto}{hipotenusa} = \dfrac{b}{a}$
$cos\ \ \alpha = \dfrac{cateto\ \ adxacente}{hipotenusa} = \dfrac{c}{a}$
$\boldsymbol{tan\alpha = \dfrac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adxacente} = \dfrac{b}{c}}$</td><td>
$sen\,C = \dfrac{3}{5}$, $cos\,C = \dfrac{4}{5}$</td></tr>
<tr><td>Relacións fundamentais</td><td colspan="4">$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \ \alpha)^2 = 1$
$tan\ \ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \ \alpha}$</td><td>$(sen\,30^o)^2 + (cos\,30^o)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$</td></tr>
<tr><td>Outras razóns trigonométricas</td><td colspan="4">$cosec\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha}$ $sec\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$ $cotan\alpha = \dfrac{1}{tan\alpha}$</td><td>cosec 90º =1
sec 90º non existe
cotan 45º=1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Razóns trigonométricas de 30º, 45º e 60º</td><td></td><td>seno</td><td>coseno</td><td>tanxente</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>30º</td><td>$\dfrac{1}{2}$</td><td>$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>45 º</td><td>$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>60º</td><td>$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\dfrac{1}{2}$</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>Redución ao primeiro cuadrante</td><td colspan="4">As razóns trigonométricas de calquera ángulo α poden expresarse en función das dun ángulo agudo β.
2º CUADRANTE: $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$
3º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$
4º CUADRANTE: $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$</td><td>

$sen\ 135^o = sen\ 45^o$

$sen\ 200^o = -sen\ 20^o$

$cos\ (-60^o) = cos\ 60^o$</td></tr>
<tr><td>Teorema dos senos</td><td colspan="4">$\dfrac{a}{sen\hat{A}} = \dfrac{b}{sen\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\hat{C}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>Teorema dos cosenos</td><td colspan="4">$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc\ cosA;\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac\ cosB;$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab\ cosC;$</td><td></td></tr>
</table>

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Expresa as seguintes medidas de ángulos en radiáns:

   a) 30º b) 60º c) 100º d) 330º

2. Canto mide en graos sesaxesimais un ángulo de 1 rad? Aproxima o resultado con graos, minutos e segundos.

3. Calcula a medida en graos dos seguintes ángulos expresados en radiáns:

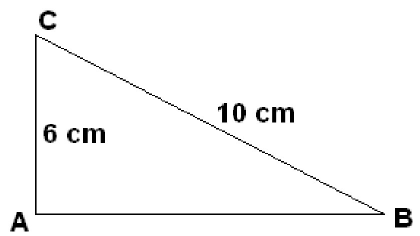
   a) π b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ d) 2π

4. Usando a calculadora calcula o seno, o coseno e a tanxente de :

   a) 28º b) 62º

Encontras algunha relación entre as razóns trigonométricas de ambos os ángulos?

5. Calcula o seno e o coseno dos ángulos *B* e *C* do debuxo. Que relación atopas?



6. Nun triángulo rectángulo *ABC* con ángulo recto en A, se *tan B* = 1.2 e *b* = 3 cm, canto mide *c*?

7. Traballando con ángulos agudos, é certo que a maior ángulo lle corresponde maior seno? E para o coseno?

8. Usando a calculadora calcula o seno, o coseno e a tanxente de 9º e 81º. Atopas algunha relación entre as razóns trigonométricas de ambos os ángulos?

9. Se *a* é un ángulo agudo e *cos a* = 0.1, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

10. Comprobar as relacións trigonométricas fundamentais con 30º, 45º e 60º sen utilizar decimais nin calculadora.

11. Se *a* é un ángulo agudo e *tan a* = 0.4, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

12. Completa no teu caderno o seguinte cadro sabendo que α é un ángulo agudo.

$sen\ \alpha$	$\cos\alpha$	$tg\ \alpha$
	0.7	
1/3		
		2

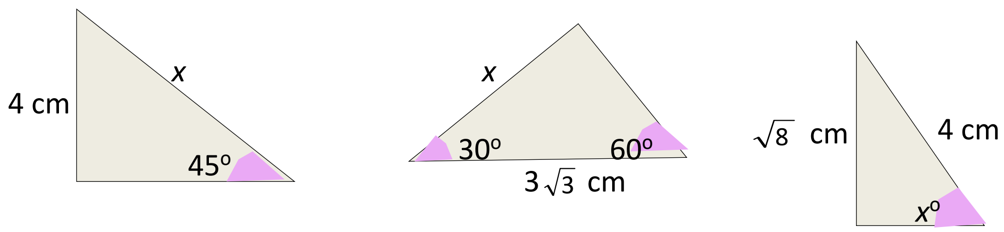
13. É rectángulo un triángulo cuxos lados miden 12, 13 e 5 cm? En caso afirmativo determina o seno, coseno e tanxente dos dous ángulos agudos.

14. Os catetos dun triángulo rectángulo miden 5 e 12 cm. Calcula as razóns trigonométricas dos seus ángulos agudos. Que amplitude teñen?

15. Se α é un ángulo agudo tal que $sen\ \alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

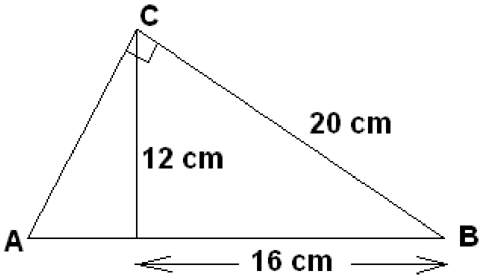
i) As restantes razóns trigonométricas de α.
ii) As razóns trigonométricas de $180° - \alpha$.
iii) As razóns trigonométricas de $180° + \alpha$.
iv) As razóns trigonométricas de $360° - \alpha$.

16. Sen utilizar calculadora, calcula o valor de *x* nos seguintes triángulos rectángulos:



17. Beatriz suxeita un papaventos cunha corda de 42 m. A que altura se atopa este no momento no que o cable tenso forma un ángulo de 52° 17' co chan?

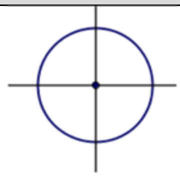
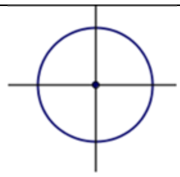
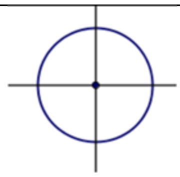
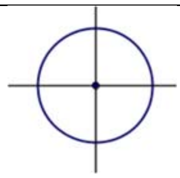
18. Calcula o seno, coseno e tanxente do ángulo *A* no seguinte debuxo:



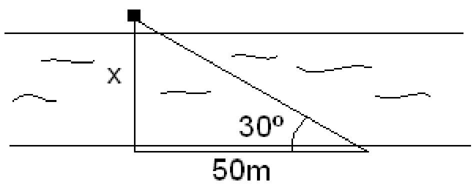
19. Se *a* é un ángulo do segundo cuadrante e *cos a* = –0.05, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

20. Se *a* é un ángulo obtuso e *sen a* =0.4, canto valen as outras dúas razóns trigonométricas?

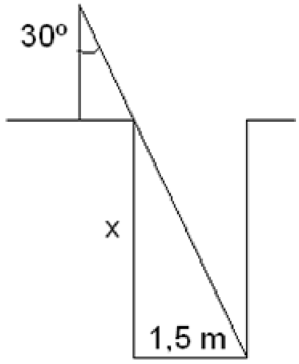
21. Debuxa no teu caderno a táboa seguinte e sitúa no cuadrante que corresponda e expresa en función dun ángulo agudo, o seno, coseno, tanxente, secante, cosecante e cotanxente dos seguintes ángulos. Se podes, calcúlaos:

Ángulo	*cuadrante*	*seno*	*coseno*	*tanxente*	*secante*	*cosecante*	*cotanxente*
–225°							
150°							
–60°							
3 645°							

22. Calcula a anchura do río representado na figura seguinte:



23. Pescuda a altura da torre dunha igrexa se a unha distancia de 80 m, e medido cun teodolito de altura 1.60 m, o ángulo de elevación do pararraios que está no alto da torre é de 23º.



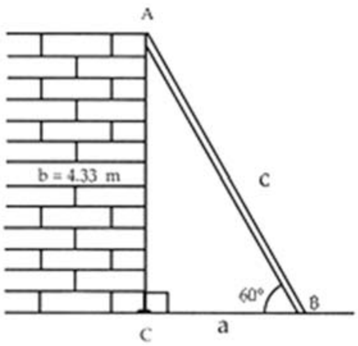
24. Calcula a área dun hexágono regular de lado 10 cm.

25. Calcula a profundidade dun pozo de 1.5 m de diámetro sabendo o ángulo indicado na figura da dereita.

26. Cal é a altura dunha montaña cuxa cima, se nos situamos a unha distancia de 3 000 m do pé da súa vertical e medimos cun teodolito de altura 1.50 m, presenta un ángulo de inclinación de 49°.

27. Cal é o ángulo de inclinación dos raios solares no momento no que un bloque de pisos de 25 m de altura proxecta unha sombra de 10 m de lonxitude?

28. Calcula a altura e a área dun triángulo isósceles cuxa base mide 20 cm e cuxo ángulo desigual vale 26°.

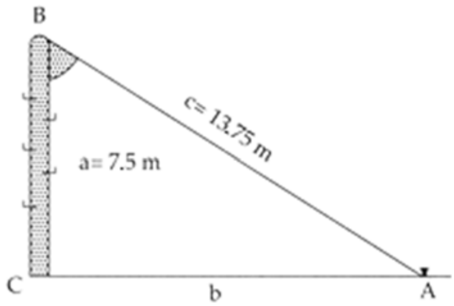


29. Calcula a área dun dodecágono regular de lado 16 cm.

30. Obter a lonxitude dunha escaleira apoiada nunha parede de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60° con respecto ao chan.

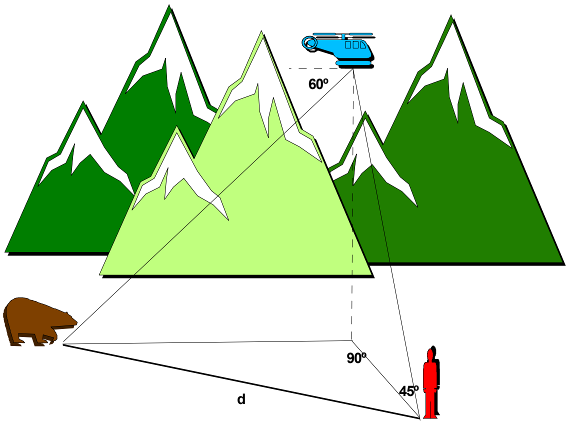
31. O fío dun papaventos totalmente estendido mide 150 m e forma un ángulo co chan de 40° mentres o suxeito a 1.5 m do chan. A que altura do chan está o papaventos?

32. Para medir a altura dun campanario a cuxa base non podemos acceder, tendemos unha corda de 30 m de longo desde o alto da torre ata tensala no chan, formando con este un ángulo de 60°. Cal é a altura do campanario?



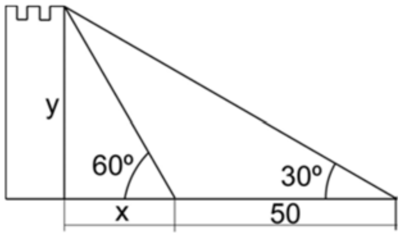
33. Obter o ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto cun cable tirante que vai, desde a punta do primeiro ata o piso, e que ten un longo de 13.75 m.

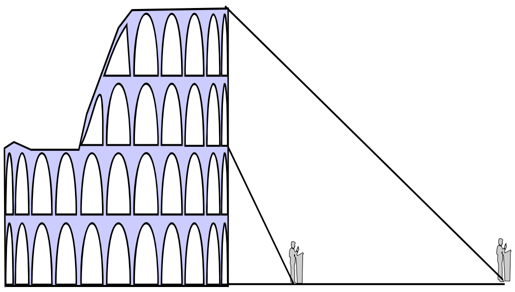
34. Dous amigos observan desde a súa casa un globo que está situado na vertical da liña que une as súas casas. A distancia entre as súas casas é de 3 km. Os ángulos de elevación medidos polos amigos son de 45º e 60º. Calcula a altura do globo e a distancia deles ao globo.



35. Un biólogo encóntrase no porto de Somiedo facendo un seguimento dos osos pardos. Conta coa axuda dun cámara e dun piloto que voan nun helicóptero, manténdose a unha altura constante de **40** $\sqrt{3}$ m. No momento que describe a figura, o cámara ve desde o helicóptero ao oso cun ángulo de depresión (ángulo que forma a súa visual coa horizontal marcado no debuxo) de **60**°. O biólogo dirixe unha visual ao helicóptero que forma co chan un ángulo de **45**°. Calcula a distancia **d** entre o biólogo e o oso.

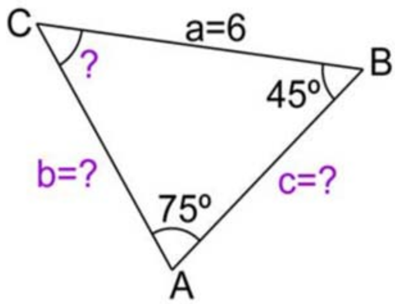
36. Desde certo lugar do chan vese o punto máis alto dunha torre, formando a visual un ángulo de 30° coa horizontal. Se nos achegamos 50 m á torre, ese ángulo faise de 60°. Calcula a altura da torre.





37. Cun teodolito de 1 metro de altura, dúas persoas pretenden medir a altura do *Coliseo de Roma.* Unha delas achégase ao anfiteatro, separándose **40 m**. da outra. Esta última obtén que o ángulo de elevación do punto máis alto é de **30**°**.** A outra non divisa o Coliseo completo polo que mide o ángulo de elevación ao punto que marca a base do terceiro piso, obtendo **60**° como resultado**.** Calcular a altura do Coliseo e a distancia dos dous observadores á base do mesmo.

38. Resolve o triángulo: $a = 6$; $B = 45°$; $A = 75°$

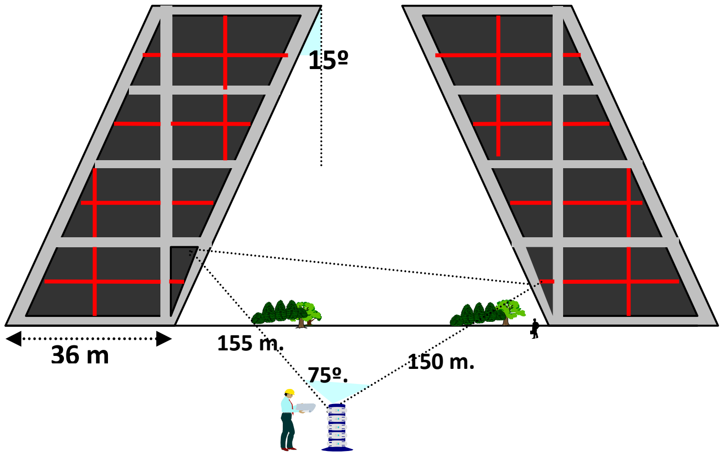


39. Os pais de Pedro teñen unha parcela no campo de forma triangular cuxos lados miden 20, 22 e 30 m. Pedro quere calcular os ángulos. Cales son eses ángulos?

40. Estando situado a 100 m dunha árbore, vexo a súa copa baixo un ángulo de 30°. O meu amigo ve a mesma árbore baixo un ángulo de 60°. A que distancia está o meu amigo da árbore?

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

41. As coñecidas *torres Kio* de *Madrid* son dúas torres xemelgas que están no *Paseo da Castellana*, xunto á *Praza de Castilla*. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa.
    a. Cos datos que aparecen na figura, determina a súa altura.
    b. Desde dúas oficinas situadas en torres distintas estendéronse dous cables ata un mesmo punto que miden 155 e 150 metros e que forman un ángulo de 75° no seu punto de encontro. Que distancia en liña recta hai entre ambas as dúas?



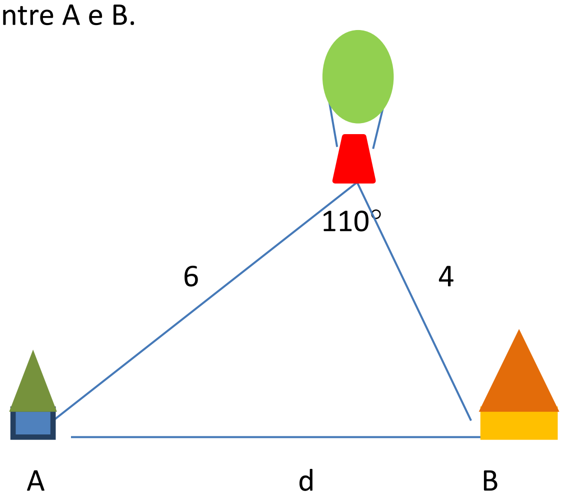
42. Tres vilas están unidas por estradas: *AB* = 10 km, *BC* = 12 km e o ángulo formado por *AB* e *BC é* de 120°. Canto distan *A* e *C*.

43. Van construír un túnel do punto *A* ao punto *B*. Tómase como referencia unha antena de telefonía (*C*) visible desde ambos os puntos. Mídese entón a distancia *AC* = 250 m. Sabendo que o ángulo en A é de 53° e o ángulo *B* é de 45° calcula cal será a lonxitude do túnel.

44. Calcula o lado dun pentágono regular inscrito nunha circunferencia de radio 6 m.

45. O punto máis alto dun repetidor de televisión, situado na cima dunha montaña, vese desde un punto do chan *P* baixo un ángulo de 67°. Se nos achegamos á montaña 30 m vémolo baixo un ángulo de 70° e desde ese mesmo punto vemos a cima da montaña baixo un ángulo de 66°. Calcular a altura do repetidor.

46. Desde o alto dun globo obsérvase unha vila A cun ángulo de 50°. Outra vila, B situada ao lado e en liña recta obsérvase desde un ángulo de 60°. O globo atópase a 6 km da vila A e a 4 km de B. Calcula a distancia entre A e B.



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

47. Resolve os triángulos:
    a) a =20 m; B = 45°; C = 65°
    b) c = 6 m, A = 105°, B = 35°
    c) b = 40 m; c = 30 m, A = 60°.

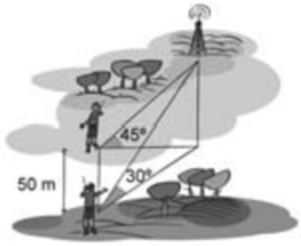
48. Dado o triángulo de vértices A, B, C, e sabendo que A = 60°, B = 45° e que b = 20 m. Resolvelo e calcular a súa área.

49. Calcula a lonxitude dos lados dun paralelogramo cuxas diagonais son de 20 e 16 m. E as diagonais forman entre si un ángulo de 37°.

50. Un triángulo isósceles con base 30 m ten dous ángulos iguais de 80°. Canto miden os outros dous lados?

51. Tres amigos sitúanse nun campo de fútbol. Entre Álvaro e Bartolo hai 25m e entre Bartolo e César, 12 metros. O ángulo formado na esquina de César é de 20°. Calcula a distancia entre Álvaro e César.

52. Un home que está situado ao oeste dunha emisora de radio observa que o seu ángulo de elevación é de 45º. Camiña 50 m cara ao sur e observa que o ángulo de elevación é agora de 30º. Calcula a altura da antena.



53. Os brazos dun compás miden 12 cm e forman un ángulo de 60°. Cal é o radio da circunferencia que pode trazarse con esa abertura?

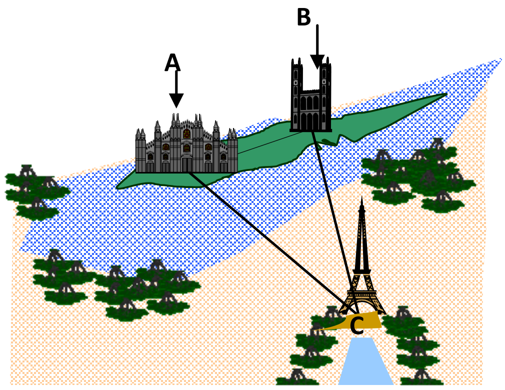
54. Escribe catro ángulos co mesmo seno que 135º.

55. Encontra dous ángulos que teñan a tanxente oposta á de 340º.

56. Busca dous ángulos co mesmo seno que 36º e coseno oposto.

57. Que ángulos negativos, comprendidos entre –360º e 0º, teñen o mesmo seno que 60º?

58. En París e na *l' Île da Cité* atópanse *Nôtre Dame* e a *Sainte Chapelle* a unha distancia de **200** metros. Imaxinemos que un observador situado en A ve *B* e *C* cun ángulo de **56**° e que outro, situado en *B,* ve *A* e *C* cun ángulo de **117°.** Calcular as distancias entre a torre *Eiffel* (*C*) e *Nôtre Dame* (*B*), así como entre a torre *Eiffel* (*C) e* a *Sainte Chapelle* (A).



Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Autoras: Fernanda Ramos Rodríguez e Milagros Latasa Asso
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF, Milagros Latasa e Fernanda Ramos

AUTOAVALIACIÓN

1. A expresión en radiáns de 65º é:

   a) 1.134 rad b) 1.134π rad c) 2.268 rad d) 2.268π rad

2. O valor da hipotenusa nun triángulo rectángulo cun ángulo de 25º e cun dos catetos de 3 cm é:

   a) 3.3 cm b) 7.1 cm c) 6.4 cm d) 2.2 cm

3. Se α é un ángulo agudo e $sen\,\alpha$ =0.8, a tanxente de α é:

   a) 0.6 b) –0.6 c) –1.33 d) 1.33

4. Selecciona a opción correcta:

a) $tan\,\hat{A} = \frac{2}{3}$ significa que $sen\,\hat{A} = 2$ e $\cos\hat{A} = 3$

b) a secante dun ángulo sempre está comprendida entre –1 e 1

c) No segundo e cuarto cuadrantes a tanxente e cotanxente dun ángulo teñen signo negativo .

d) O seno dun ángulo é sempre menor cá súa tanxente.

5. Se o seno dun ángulo do segundo cuadrante é $\frac{4}{5}$, entón as súas tanxente e secante son respectivamente:

   a) $-\frac{3}{5}$ e $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$ c) $-\frac{4}{3}$ e $-\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{4}$

6. A altura dun edificio é de 50 m, a medida da súa sombra cando os raios do sol teñen unha inclinación de 30º coa horizontal é de

   a) 25 m b) 100 m c) $50\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m

7. O ángulo de –420º é un ángulo que se sitúa en

a) o primeiro cuadrante b) o segundo cuadrante c) o terceiro cuadrante d) O cuarto cuadrante

8. Se α é un ángulo agudo e β é o seu suplementario, cúmprese:

   a) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$ b) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$

   c) $sen\ \alpha = sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = \cos\ \beta$ d) $sen\ \alpha = -sen\ \beta$ e $\cos\ \alpha = -\cos\ \beta$

9. Para calcular a altura dunha montaña mídese cun teodolito desde *A* o ángulo que forma a visual á cima coa horizontal, que é $\hat{A}$ = 30 º. Avanzando 200 m, vólvese medir e o ángulo resulta ser $\hat{B}$ = 35.2º. A altura da montaña é de:

   a) 825 m b) 773 m c)595 m d) 636 m

10. Se o radio dun pentágono regular é 8 cm, a súa área mide

    a) 305.86 cm^2 b) 340.10 cm^2 c) 275.97 cm^2 d) 152.17 cm^2

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO
Capítulo 9: Xeometría

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez

Revisores: Javier Rodrigo e David Hierro

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Milagros Latasa e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

A Xeometría é unha das ramas máis antigas das Matemáticas e ou seu estudo axúdanos a interpretar mellor a realidade que percibimos. O seu nome significa "*medida da Terra*". Medir é calcular lonxitudes, áreas e volumes. Neste tema recordarás as fórmulas que estudaches xa ou ano pasado e afondarás sobre as súas aplicacións na vida real.

Movémonos no espazo de dimensión tres, camiñamos sobre unha esfera (que por ser grande, consideramos plana), as casas son case sempre ortoedros. A información que percibimos por medio dos nosos sentidos interpretámola en termos xeométricos. Precisamos das fórmulas de áreas e volumes dos corpos xeométricos para calcular as medidas dos mobles que caben no noso salón ou para facer un orzamento da reforma da nosa vivenda.

Moitas plantas distribúen as súas follas buscando o máximo de iluminación e as súas flores en forma esférica buscando un aproveitamento óptimo do espazo. O átomo de ferro dispón os seus electróns en forma de cubo, os sistemas de cristalización dos minerais adoptan formas poliédricas, os panais das abellas son prismas hexagonais. Estes son algúns exemplos da presenza de corpos xeométricos na natureza.

ORIXE DA IMAXE: WIKIPEDIA

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

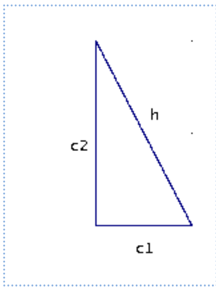
1. TEOREMA DE PITÁGORAS E TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de *Pitágoras*

Teorema de *Pitágoras* no plano

Xa sabes que:

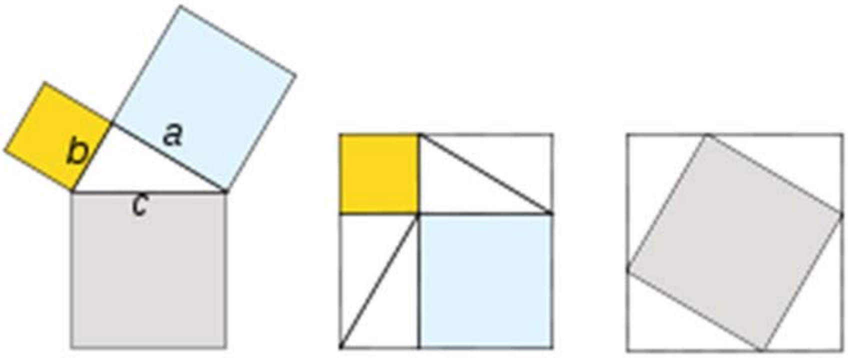
Nun triángulo rectángulo chamamos **catetos** aos lados incidentes co ángulo recto e **hipotenusa** ao outro lado.



Nun triángulo rectángulo, a hipotenusa ao cadrado é igual á suma dos cadrados dos catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Demostración:



Exemplo:

- Se os catetos dun triángulo rectángulo miden 6 *cm* e 8 *cm*, a súa hipotenusa vale 10 *cm*, xa que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10\,cm.$$

Actividades resoltas

- *Se a hipotenusa dun triángulo rectángulo mide 13 dm e un dos seus catetos mide 12 dm, calcula a medida do outro cateto:*

  Solución: Polo teorema de *Pitágoras*:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5\ dm$$

Actividades propostas

1. É posible atopar un triángulo rectángulo cuxos catetos midan 12 e 16 *cm* e a súa hipotenusa 30 *cm*? Se a túa resposta é negativa, calcula a medida da hipotenusa dun triángulo rectángulo cuxos catetos miden 12 e 16 *cm*.

2. Calcula a lonxitude da hipotenusa dos seguintes triángulos rectángulos de catetos:
   a) 4 *cm* e 3 *cm* b) 1 *m* e 7 *m*
   c) 2 *dm* e 5 dm d) 23.5 *km* e 47.2 *km*.

Utiliza a calculadora se che resulta necesaria.

3. Calcula a lonxitude do cateto que falta nos seguintes triángulos rectángulos de hipotenusa e cateto:

a) 8 *cm* e 3 *cm* b) 15 *m* e 9 *m*

c) 35 *dm* e 10 *dm* d) 21.2 *km* e 11.9 *km*

4. Calcula a área dun triángulo equilátero de lado 5 *m*.

5. Calcula a área dun hexágono regular de lado 7 *cm*.

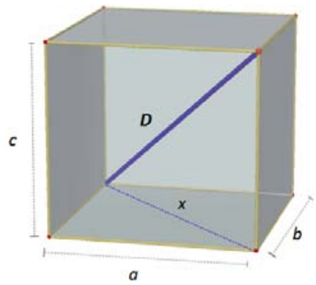
Teorema de *Pitágoras* no espazo

Xa sabes que:

A diagonal dun ortoedro ao cadrado coincide coa suma dos cadrados das súas arestas.

Demostración:

Sexan *a, b* e *c* as arestas do ortoedro que supoñemos apoiado no rectángulo de dimensións *a, b*.



Se *x* é a diagonal deste rectángulo, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

O triángulo de lados *D, x, a* é rectángulo logo: $D^2 = x^2 + c^2$

E tendo en conta a relación que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resoltas

- *Calcula a lonxitude da diagonal dun ortoedro de arestas 7, 9 e 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16.55$ cm.

- *As arestas da base dunha caixa con forma de ortoedro miden 7 cm e 9 cm e a súa altura 12 cm. Estuda se podes gardar nela tres barras de lonxitudes 11 cm, 16 cm e 18 cm.*

O rectángulo da base ten unha diagonal *d* que mide: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11.4$ cm.

Logo a barra máis corta cabe apoiada na base.

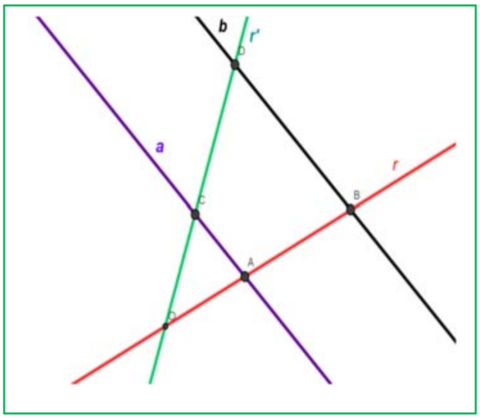
A diagonal do ortoedro vimos na actividade anterior que mide 16.55, logo a segunda barra si cabe, inclinada, pero a terceira, non.

Actividades propostas

6. Unha caixa ten forma cúbica de 3 *cm* de aresta. Canto mide a súa diagonal?

7. Calcula a medida da diagonal dunha sala que ten 8 metros de longo, 5 metros de ancho e 3 metros de altura.

1.2. Teorema de *Tales*



Xa sabes que:

Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. A recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*. Entón o Teorema de Tales afirma que os segmentos son proporcionais:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}$$

Dise que os triángulos *OAC* e *OBD* están en posición *Tales*. Son **semellantes**. Teñen un ángulo común (coincidente) e os lados proporcionais.

Actividades resoltas

- *Sexan OAC e OBD dous triángulos en posición Tales. O perímetro de OBD é 20 cm, OA mide 2 cm, AC mide 5 cm e OC mide 3 cm. Calcula as lonxitudes dos lados de OBD.*

Utilizamos a expresión: $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}=\frac{OA+OC+AC}{OB+OD+BD}$ substituíndo os datos:

$\frac{2}{OB}=\frac{3}{OD}=\frac{5}{BD}=\frac{2+3+5}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$, polo que despexando, sabemos que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, e *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecto: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetro do triángulo.

- *Conta a lenda que Tales mediu a altura da pirámide de Keops comparando a sombra da pirámide coa sombra do seu bastón. Temos un bastón que mide 1 m. Se a sombra dunha árbore mide 12 m e a do bastón (á mesma hora do día e no mesmo momento) mide 0.8 m, canto mide a árbore?*

As alturas da árbore e do bastón son proporcionais ás súas sombras (forman triángulos en posición *Tales*) polo que, se chamamos *x* á altura da árbore, podemos dicir:

$\frac{0.8}{1}=\frac{12}{x}$. Polo tanto *x* = 12/0.8 = 15 metros.

Actividades propostas

8. Nunha foto hai un neno, que sabemos que mide 1.5 *m*, e un edificio. Medimos a altura do neno e do edificio na foto, e resultan ser: 0.2 *cm* e 10 *cm*. Que altura ten o edificio?

9. Debúxase un hexágono regular. Trázanse as súas diagonais e obtense outro hexágono regular. Indica a razón de semellanza entre os lados de ambos os hexágonos.

10. Nun triángulo regular *ABC* dado, 1 *cm*, trazamos os puntos medios, *M* e *N*, de dous dos seus lados. Trazamos as rectas *BN* e *CM* que se cortan nun punto *O*. Son semellantes os triángulos *MON* e *COB*? Cal é a razón de semellanza? Canto mide o lado *MN*?

11. Unha pirámide regular hexagonal de lado da base 3 *cm* e altura 10 *cm*, córtase por un plano a unha distancia de 4 *cm* do vértice, co que se obtén unha nova pirámide. Canto miden as súas dimensións?

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

1.3. Proporcionalidade en lonxitudes, áreas e volumes

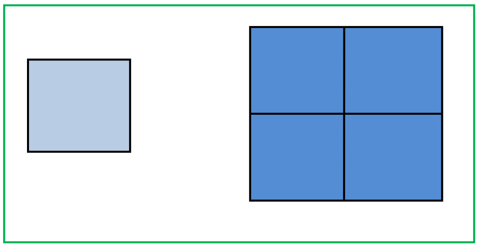
Xa sabes que:

Dúas figuras son **semellantes** se as lonxitudes de elementos correspondentes son proporcionais. Ao coeficiente de proporcionalidade chámaselle **razón de semellanza**. En mapas, planos… á razón de semellanza chámase **escala**.

Áreas de figuras semellantes

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, entón a razón entre as súas áreas é $\boldsymbol{k^2}$.

Exemplo:

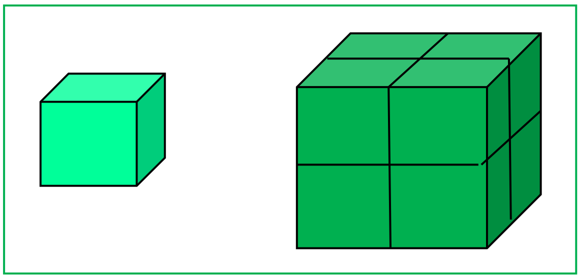


- Observa a figura da marxe. Se multiplicamos por 2 o lado do cadrado pequeno, a área do cadrado grande é $2^2 = 4$ veces a do pequeno.

Volumes de figuras semellantes

Se a razón de semellanza entre as lonxitudes dunha figura é k, entón entre os seus volumes é $\boldsymbol{k^3}$.

Exemplo:



- Observa a figura da marxe. Ao multiplicar por 2 o lado do cubo pequeno obtense o cubo grande. O volume do cubo grande é 8 (2^3) o do cubo pequeno.

Actividades resoltas

- *A torre Eiffel de París mide 300 metros de altura e pesa uns 8 millóns de quilos. Está construída de ferro. Se encargamos un modelo a escala da torre, tamén de ferro, que pese só un quilo, que altura terá? Será maior ou menor que un lapis?*

O peso está relacionado co volume. A torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos e queremos construír unha, exactamente do mesmo material, que pese 1 quilo. Polo tanto, k^3 = 8 000 000/1 = 8 000 000, e k = 200. A razón de proporcionalidade entre as lonxitudes é de 200.

Se a Torre Eiffel mide 300 *m* e chamamos x ao que mide a nosa temos: $300/x = 200$. Despexamos x que resulta igual a $x = 1.5$ *m*. Mide metro e medio! É moito maior que un lapis!

Actividades propostas

12. O diámetro dun pexego é tres veces maior có do seu óso e mide 8 *cm*. Calcula o volume do pexego, supoñendo que é esférico, e o do seu óso, tamén esférico. Cal é a razón de proporcionalidade entre o volume do pexego e o do óso?

13. Na pizzería teñen pizzas de varios prezos: 1 €, 2 € e 3 €. Os diámetros destas pizzas son: 15 *cm*, 20 *cm* e 30 *cm*, cal resulta máis económica? Calcula a relación entre as áreas e compáraa coa relación entre os prezos.

14. Unha maqueta dun depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidade e 5 metros de altura, queremos que teña unha capacidade de 1 litro. Que altura debe ter a maqueta?

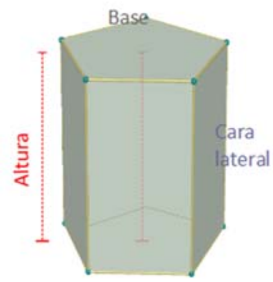
Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

2. LONXITUDES, ÁREAS E VOLUMES

2.1. Lonxitudes, áreas e volumes en prismas e cilindros

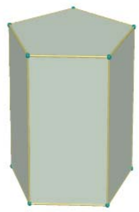
Prismas

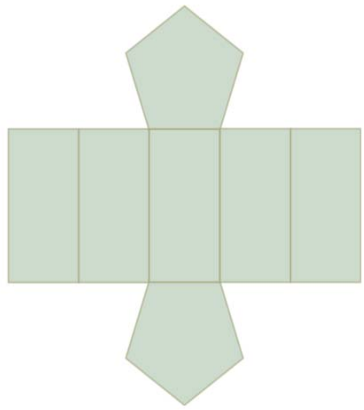
Un ***prisma*** é un poliedro determinado por dúas caras paralelas que son polígonos iguais e tantas caras laterais, que son paralelogramos, como lados teñen as bases.



Áreas lateral e total dun prisma

A **área lateral** dun prisma é a suma das áreas das caras laterais.





Como as caras laterais son paralelogramos da mesma altura, que é a altura do prisma, podemos escribir:

Área lateral = Suma das áreas das caras laterais =

= Perímetro da base · altura do prisma.

Se denotamos por h a altura e por P_B o perímetro da base:

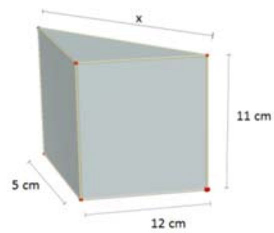
$$\text{Área lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

A **área total** dun prisma é a área lateral máis o dobre da suma da área da base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Actividades resoltas

- *Calcula as áreas lateral e total dun prisma triangular recto de 11 cm de altura se a súa base é un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 5 cm.*



Calculamos en primeiro lugar a hipotenusa do triángulo da base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \quad cm$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30 \ cm; \ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \ cm^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330 \ cm^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390 \ cm^2$$

Volume dun corpo xeométrico. Principio de *Cavalieri*

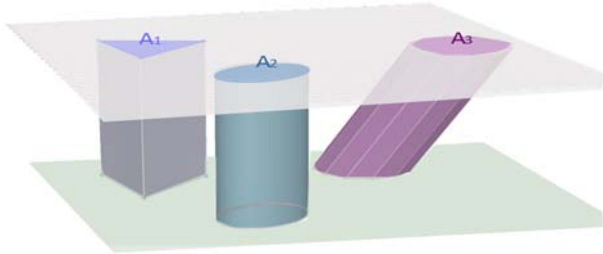
Recorda que:

Bonaventura Cavalieri, matemático do século XVII, enunciou o principio que leva o seu nome e que afirma:

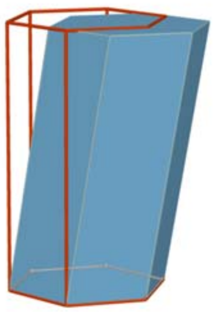
"Se dous corpos teñen a mesma altura e, ao cortalos por planos paralelos ás súas bases, se obteñen seccións coa mesma área, entón os volumes dos dous corpos son iguais".

Exemplo:

Na figura adxunta as áreas das seccións A_1, A_2, A_3, producidas por un plano paralelo ás bases, son iguais entón, segundo este principio, os volumes dos tres corpos son tamén iguais.



Volume dun prisma e dun cilindro



O volume dun prisma recto é o produto da área da base pola altura. Ademais, segundo o principio de *Cavalieri*, o volume dun prisma oblicuo coincide co volume dun prisma recto coa mesma base e altura. Se denotamos por *V* este volume, A_B a área da base e *h* a altura:

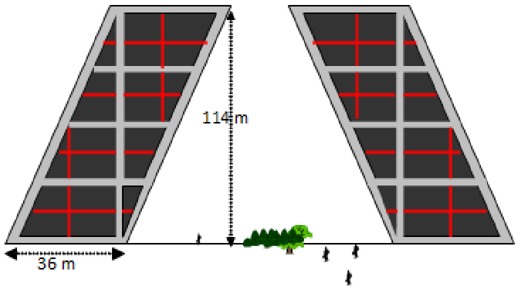
Volume prisma = $V = A_B \cdot h$

Tamén o volume dun cilindro, recto ou oblicuo é área da base por altura. Se chamamos *R* ao radio da base, A_B a área da base e *h* a altura, o volume escríbese:

Volume cilindro = $V = A_B \cdot h \quad = \quad \pi R^2 \cdot h$

Actividades resoltas

- *As coñecidas torres Kio de Madrid son dúas torres xemelgas que están no Paseo da Castellana, xunto á Praza de Castilla. Caracterízanse pola súa inclinación e representan unha porta cara a Europa.*
  Cada unha delas é un prisma oblicuo cuxa base é un cadrado de 36 metros dado e teñen unha altura de 114 metros. O volume interior de cada torre pode calcularse coa fórmula anterior:



$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\,744\ m^3$

Actividades propostas

15. Calcula o volume dun prisma recto de 20 *dm* de altura cuxa base é un hexágono de 6 *dm* de lado.

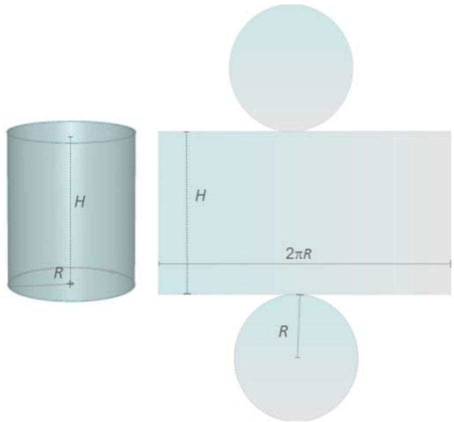
16. Calcula a cantidade de auga que hai nun recipiente con forma de cilindro sabendo que a súa base ten 10 *cm* de diámetro e que a auga acada 12 *dm* de altura.

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Áreas lateral e total dun cilindro

O cilindro é un corpo xeométrico desenvolvible. Se recortamos un cilindro recto ao longo dunha xeratriz, e o estendemos nun plano, obtemos dous círculos e unha rexión rectangular. Desta maneira obtense o seu desenvolvemento.

A partir deste podemos ver que a área lateral do cilindro está determinada pola área do rectángulo que ten como dimensións a lonxitude da circunferencia da base e a altura do cilindro.



Suporemos que a altura do cilindro é H e que R é o radio da base co que a área lateral A_L é:

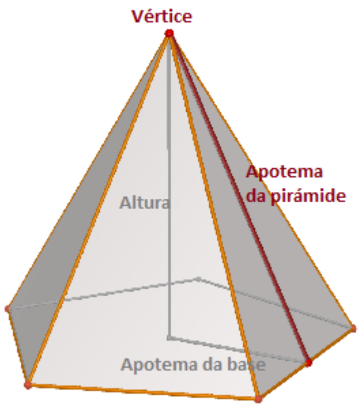
$$A_L = \text{Lonxitude da base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R)\cdot H = 2\pi RH$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área dos dous círculos que constitúen as bases, obtemos a área total do cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Lonxitudes, áreas e volumes en pirámides e conos

Áreas lateral e total dunha pirámide e dun tronco de pirámide regulares

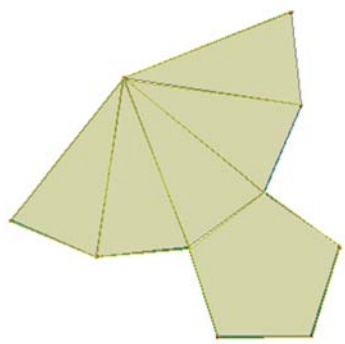


Unha **pirámide** é un poliedro determinado por unha cara poligonal denominada base e tantas caras triangulares cun vértice común como lados ten a base.

A área lateral dunha pirámide regular é a suma das áreas das caras laterais.

Son triángulos isósceles iguais polo que, se a aresta da base mide b, a apotema da pirámide é Ap e a base ten n lados, esta área lateral é:

Desenvolvemento de pirámide pentagonal regular



$$\text{Área lateral} = \text{ao} = n\cdot\frac{b\cdot Ap}{2} = \frac{n\cdot b\cdot Ap}{2}$$

e como $n \cdot b$ = Perímetro da base

$$A_L = \frac{\text{Perímetro da base}\ .\ \text{Apotema da pirámide}}{2} = \frac{\text{Perímetro da base}}{2}\cdot \text{Apotema}$$

A área lateral dunha pirámide é igual ao semiperímetro pola apotema.

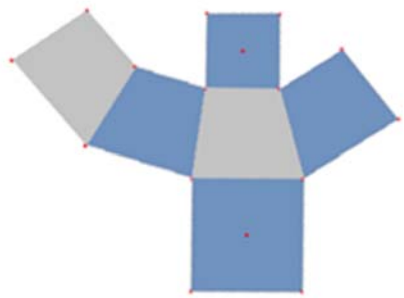
A área total dunha pirámide é a área lateral máis a área da base:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronco de pirámide regular é un corpo xeométrico desenvolvible. No seu desenvolvemento aparecen tantas caras laterais como lados teñen as bases. Todas elas son trapecios isósceles.

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Desenvolvemento de tronco de pirámide cuadrangular



Se B é o lado do polígono da base maior, b o lado da base menor, n o número de lados das bases e Ap é a apotema dunha cara lateral

$$\text{Área lateral} = a_O = \boldsymbol{n} \cdot \frac{(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{Ap}}{\mathbf{2}} = \frac{(\boldsymbol{P_B}+\boldsymbol{P_b}) \cdot \boldsymbol{Ap}}{\mathbf{2}} =$$

$$= \frac{\textit{Suma de perímetro das bases} \cdot \textit{Apotema do tronco}}{2}$$

A área total dun tronco de pirámide regular é a área lateral máis a suma das áreas das bases:

$$\text{Área total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Actividades resoltas

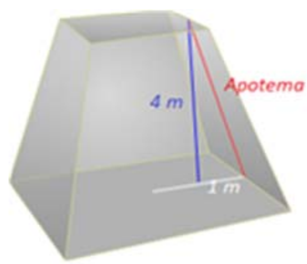
- *Calculemos a área total dun tronco de pirámide regular de 4 m de altura se sabemos que as bases paralelas son cadrados de 4 m e de 2 m de lado.*

En primeiro lugar, calculamos o valor da apotema. Tendo en conta que o tronco é regular e que as bases son cadradas fórmase un triángulo rectángulo no que se cumpre:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4.12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot Ap}{2} = \frac{(16+8) \cdot 4.12}{2} = 49.44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49.44 + 16 + 4 = 69.44\ m^2$$



Actividades propostas

17. Calcula as áreas lateral e total dun prisma hexagonal regular sabendo que as arestas das bases miden 3 *cm* e cada aresta lateral 2 *dm*.

18. A área lateral dun prisma regular de base cadrada é 16 m^2 e ten 10 *m* de altura. Calcula o perímetro da base.

19. O lado da base dunha pirámide triangular regular é de 7 *cm* e a altura da pirámide 15 *cm*. Calcula a apotema da pirámide e a súa área total.

20. Calcula a área lateral dun tronco de pirámide regular, sabendo que as súas bases son dous octógonos regulares de lados 3 e 8 *dm* e que a altura de cada cara lateral é de 9 *dm*.

21. Se a área lateral dunha pirámide cuadrangular regular é 104 cm^2 e a aresta da base mide 4 cm, calcula a apotema da pirámide e a súa altura.

Áreas lateral e total dun cono

Recorda que:

Tamén o cono é un corpo xeométrico desenvolvible. Ao recortar, seguindo unha liña xeratriz e a circunferencia da base, obtemos un círculo e un sector circular con radio igual á xeratriz e lonxitude de arco igual á lonxitude da circunferencia da base.

Chamemos agora *R* ao radio da base e *G* á xeratriz. A área lateral do cono é a área do sector circular obtido. Para calculala pensemos que esta área debe ser directamente proporcional á lonxitude de arco que á súa vez debe coincidir coa lonxitude da circunferencia da base. Podemos escribir entón:

$$\frac{A\ Lateral\ do\ cono}{Lonxitude\ de\ arco\ correspondente\ ao\ \ sec\,t\,or} = \frac{A\ total\ do\ círculo\ de\ radio\ G}{Lonxitude\ da\ circunferencia\ de\ radio\ G}$$

É dicir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ e despexando A_L temos:

$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Se á expresión anterior lle sumamos a área do círculo da base, obtemos a área total do cono.

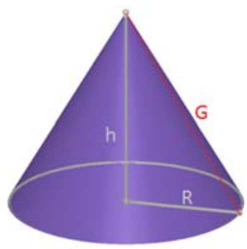
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2$$

Actividades resoltas

- *Calcula a área total dun cono de 12 dm de altura, sabendo que a circunferencia da base mide 18.84 dm.* (*Toma 3.14 como valor de π*)

Calculamos en primeiro lugar o radio *R* da base:

$$2\pi R = 18.84 \Rightarrow \quad R = \frac{18.84}{2\pi} \approx \frac{18.84}{6.28} = 3\ dm.$$



Calculamos agora a xeratriz *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12.37\ dm.$$

Entón $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3.14 \cdot 3 \cdot 12.37 + 3.14 \cdot 3^2 \approx 144.79\ dm^2$.

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

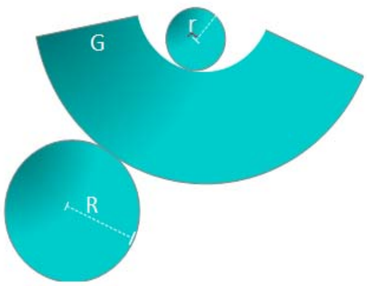
Áreas lateral e total dun tronco de cono

Recorda que:

Ao cortar un cono por un plano paralelo á base, obtense un tronco de cono. Ao igual que o tronco de pirámide, é un corpo desenvolvible e o seu desenvolvemento constitúeno os dous círculos das bases xunto cun trapecio circular, cuxas bases curvas miden o mesmo que as circunferencias das bases.

Chamando *R* e *r* aos radios das bases e *G* á xeratriz resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi\ R + 2\pi\ r\ )G}{2} = \frac{2(\pi\ R + \pi\ r)\ G}{2} = (\pi\ R + \pi\ r)\ G$$



Se á expresión anterior lle sumamos as áreas dos círculos das bases, obtemos a área total do tronco de cono:

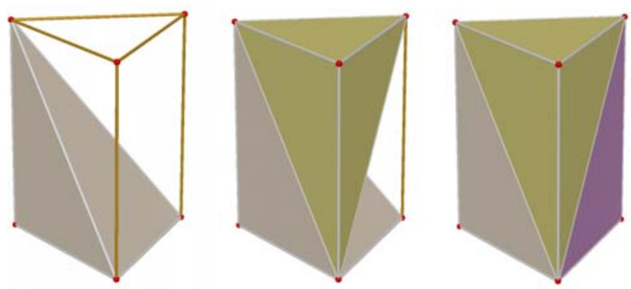
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

Volume dunha pirámide e dun cono

Recorda que:

Tamén nos casos dunha pirámide ou cono, as fórmulas do volume coinciden en corpos rectos e oblicuos.

O volume dunha pirámide é a terceira parte do volume dun prisma que ten a mesma base e altura.



$$\text{Volume pirámide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Se comparamos cono e cilindro coa mesma base e altura, concluímos un resultado análogo

$$\text{Volume cono} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi\ R^2 \cdot h}{3}$$

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

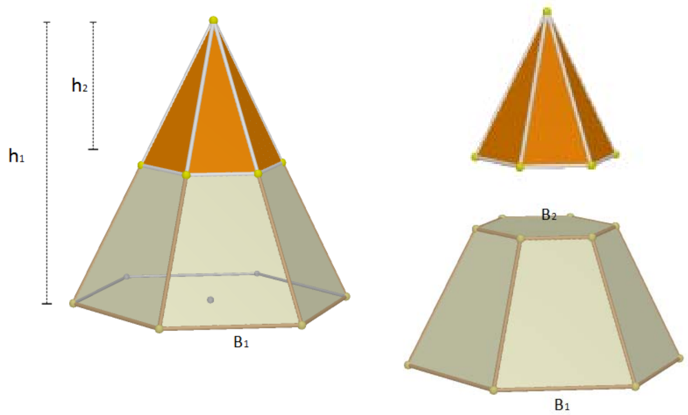
Volume dun tronco de pirámide e dun tronco de cono

Existe unha fórmula para calcular o volume dun tronco de pirámide regular pero evitarémola. Resulta máis sinxelo obter o volume dun tronco de pirámide regular restando os volumes das dúas pirámides a partir das que se obtén.

Se representamos por A_{B1} e A_{B2} as áreas das bases e por h_1 e h_2 as alturas das pirámides citadas, o volume do tronco de pirámide é:

Volume tronco de pirámide =

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3}$$



O volume do tronco de cono obtense de modo parecido. Se R_1 e R_2 son os radios das bases dos conos que orixinan o tronco e h_1 e h_2 as súas alturas, o volume do tronco de cono resulta:

$$\text{Volume tronco de cono} = V = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot h_1}{3} - \frac{\pi \cdot R_2^2 \cdot h_2}{3}$$

Actividades resoltas

- *Calcula o volume dun tronco de pirámide regular de 10 cm de altura se as súas bases son dous hexágonos regulares dados 8 cm e 3 cm.*

Primeiro paso: calculamos as apotemas dos hexágonos das bases:

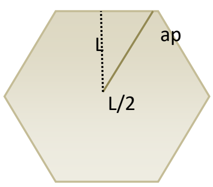


Figura 1

Para cada un destes hexágonos:

$$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Logo as apotemas buscadas miden: $\mathbf{ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx\ 2.6\ cm;\ ap_2 = \frac{8\sqrt{3}}{2} \approx\ 6.1\ cm}$

Como segundo paso, calculamos a apotema do tronco de pirámide

$$A^2 = 10^2 + 3.5^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{112.25} \approx\ 10.6\ cm$$

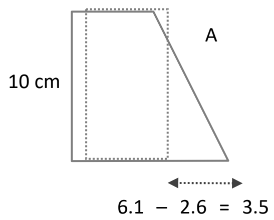


Figura 2

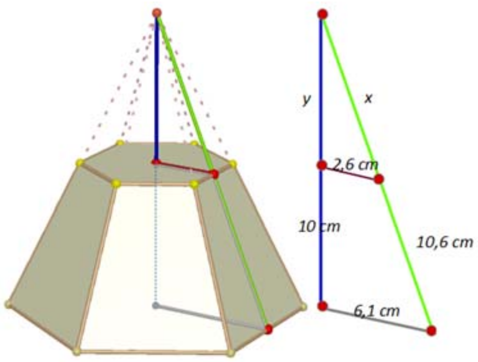


Figura 3

En terceiro lugar, calculamos o valor dos segmentos *x, y* da figura 3 que nos servirán para obter as alturas e apotemas das pirámides que xeran o tronco co que traballamos. Polo teorema de *Tales*: $\mathbf{\frac{x}{2.6} = \frac{10.6 + x}{6.1} \Rightarrow 6.1\ x = (10.6 + x)2.6 \Rightarrow}$

$$\mathbf{6.1\ x - 2.6x = 27.56 \Rightarrow x = \frac{27.56}{3.5} \approx\ 7.9\ cm}$$

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Entón a apotema da pirámide grande é 10.6 + 7.9 = 18.5 cm e o da pequena 7.9 *cm*. E aplicando o teorema de *Pitágoras*:

$$y^2 = x^2 - 2.6^2 = 7.9^2 - 2.6^2 = \ 55.65 \Rightarrow y = \sqrt{55.65} \approx 7.5cm$$

Logo as alturas das pirámides xeradoras do tronco miden 10 + 7.5 = 17.5 *cm* e 7.5 *cm.*

Por último calculamos o volume do tronco de pirámide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 18.5 \cdot 17.5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 7.9 \cdot 7.5}{2} = \frac{15\,540}{6} - \frac{1\,066.5}{6} = 2\,412.25\ cm^3$$

Actividades propostas

22. Unha columna cilíndrica ten 35 *cm* de diámetro e 5 *m* de altura. Cal é a súa área lateral?

23. O radio da base dun cilindro é de 7 *cm* e a altura é o triplo do diámetro. Calcula a súa área total.

24. Calcula a área lateral dun cono recto sabendo que a súa xeratriz mide 25 *dm* e o seu radio da base 6 *dm*.

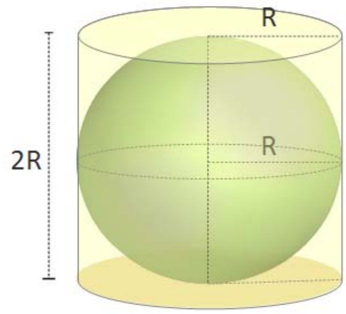
25. A circunferencia da base dun cono mide 6.25 *m* e a súa xeratriz 12 *m*. Calcula a área total.

2.3. Lonxitudes, áreas e volumes na esfera

Área dunha esfera

A esfera non é un corpo xeométrico desenvolvible polo que é máis complicado que nos casos anteriores encontrar unha fórmula para calcular a súa área.

Arquímedes demostrou que a área dunha esfera é igual que a área lateral dun cilindro circunscrito á esfera, é dicir, un cilindro co mesmo radio da base que o radio da esfera e cuxa altura é o diámetro da esfera.



Se chamamos *R* ao radio da esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

A área dunha esfera equivale á área de catro círculos máximos.

Actividades propostas

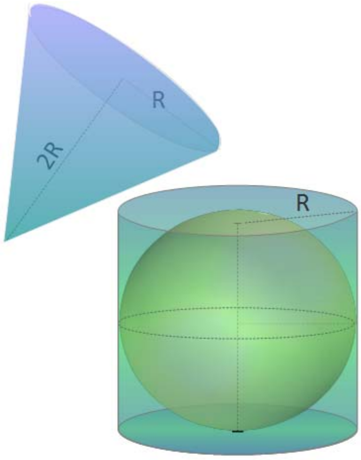
26. Unha esfera ten 4 *m* de radio. Calcula:

a) A lonxitude da circunferencia máxima.

b) A área da esfera.

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

Volume da esfera

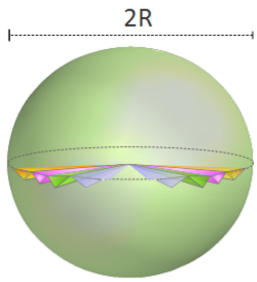


Volvamos pensar nunha esfera de radio *R* e no cilindro que a circunscribe. Para encher con auga o espazo que queda entre o cilindro e a esfera, precísase unha cantidade de auga igual a un terzo do volume total do cilindro circunscrito.

Dedúcese entón que a suma dos volumes da esfera de radio *R* e do cono de altura *2R* e radio da base *R*, coincide co volume do cilindro circunscrito á esfera de radio *R*. Polo tanto:

$$\text{Volume}_{\text{esfera}} = \text{Volume}_{\text{cilindro}} - \text{Volume}_{\text{cono}} \Rightarrow$$

$$\text{Volume}_{\text{esfera}} = \pi R^2(2R) - \frac{\pi R^2(2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



Existen demostracións máis rigorosas que avalan este resultado experimental que describimos. Así, por exemplo, o volume da esfera pódese obter como suma dos volumes das pirámides que a recobren, todas elas de base triangular sobre a superficie da esfera e con vértice no centro da mesma.

Actividades propostas

27. O depósito de gasóleo da casa de Irene é un cilindro de 1 *m* de altura e 2 *m* de diámetro. Irene chamou ao subministrador de gasóleo porque no depósito soamente quedan 140 litros.

a. Cal é, en dm^3, o volume do depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).

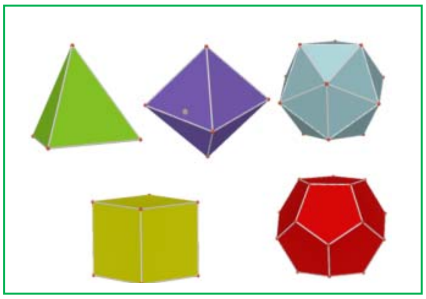
b. Se o prezo do gasóleo é de 0.80 € cada litro, canto deberá pagar a nai de Irene por encher o depósito?

28. Comproba que o volume da esfera de radio 4 *dm*, sumado co volume dun cono do mesmo radio da base e 8 *dm* de altura, coincide co volume dun cilindro que ten 8 *dm* de altura e 4 *dm* de radio da base.

2.4. Lonxitudes, áreas e volumes de poliedros regulares

Recorda que:

Un poliedro regular é un poliedro no cal todas as súas caras son polígonos regulares iguais e no cal os seus ángulos poliedros son iguais.

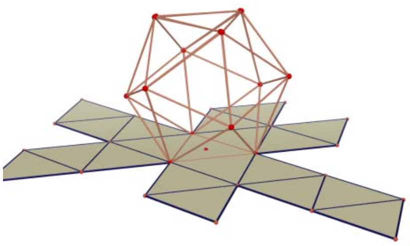


Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.

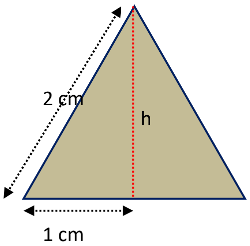
Área total dun poliedro regular

Como as caras dos poliedros regulares son iguais, o cálculo da área total dun poliedro regular redúcese a calcular a área dunha cara e despois multiplicala polo número de caras.

Actividades resoltas



Calcula a área total dun icosaedro de 2 cm de aresta.



Todas as súas caras son triángulos equiláteros de 2 *cm* de base. Calculamos a altura *h* que divide á base en dous segmentos iguais

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}\ cm$$

Logo a área dunha cara é:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{2\,.\,\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ cm^2$$

e polo tanto área icosaedro é:

$$A_{\text{icosaedro}} = 20\sqrt{3}\ cm^2$$

3. INICIACIÓN Á XEOMETRÍA ANALÍTICA

3.1. Puntos e vectores

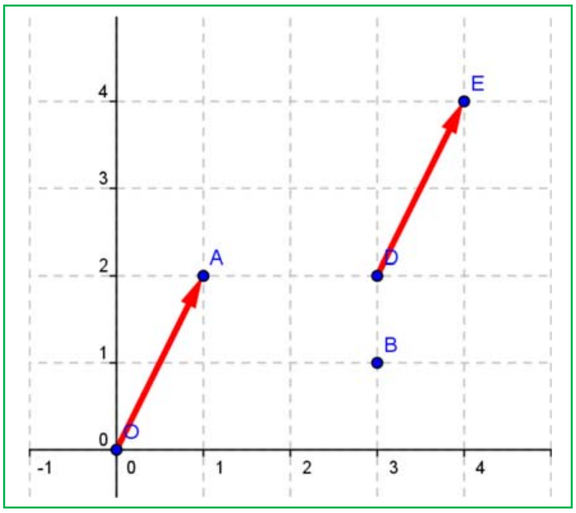
No plano

Xa sabes que

Un conxunto formado pola **orixe** *O*, os dous **eixes de coordenadas** e a **unidade de medida** é un **sistema de referencia cartesiano**.

As **coordenadas dun punto** *A* son un par ordenado de números reais **(*x*, *y*)**, sendo "***x***" a primeira coordenada ou **abscisa** e "***y***" a segunda coordenada ou **ordenada**.

Dados dous puntos, $D(d_1, d_2)$ e $E(e_1, e_2)$, as compoñentes do vector de orixe *D* e extremo *E*, ***DE***, veñen dadas por $\mathbf{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.



Exemplo:

As coordenadas dos puntos da figura son:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) e *E*(4, 4)

As compoñentes do vector ***DE*** son:

$$\mathbf{DE} = (4 - 3, 4 - 2) = (1, 2)$$

As compoñentes do vector ***OA*** son:

$$\mathbf{OA} = (1 - 0, 2 - 0) = (1, 2).$$

DE e ***OA*** son representantes do mesmo vector libre de compoñentes (1, 2).

No espazo de dimensión tres

As **coordenadas dun punto** *A* son unha terna ordenada de números reais **(*x, y, z*)** sendo "***z***" a altura sobre o plano *OXY*.

Dados dous puntos, $D(d_1, d_2, d_3)$ e $E(e_1, e_2, e_3)$, as compoñentes do vector de orixe *D* e extremo *E*, ***DE***, veñen dadas por $\mathbf{DE} = (e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Exemplo:

As coordenadas de puntos no espazo son:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) e *E*(4, 4, 4)

As compoñentes do vector ***DE*** son: ***DE*** = (4 – 3, 4 – 2, 4 – 1) = (1, 2, 3).

As compoñentes do vector ***OA*** son: ***OA*** = (1 – 0, 2 – 0, 3 – 0) = (1, 2, 3).

DE e ***OA*** son representantes do mesmo vector libre de compoñentes (1, 2, 3).

Actividades propostas

29. Representa nun sistema de referencia no espazo de dimensión tres os puntos:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) e *E*(4, 4, 4) e vectores: ***DE*** e ***OA***.

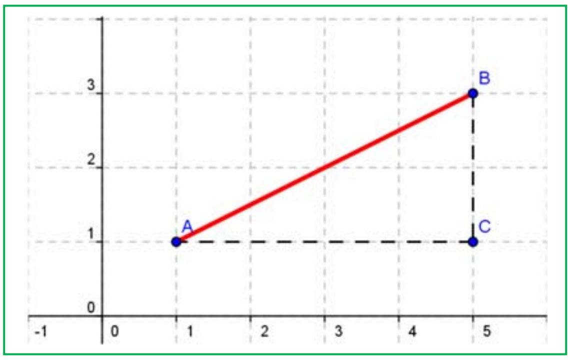
30. O vector de compoñentes ***u*** = (2, 3) e orixe *A* = (1, 1), que extremo ten?

3.2. Distancia entre dous puntos

No plano

A distancia entre dous puntos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ é:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Exemplo:

Polo Teorema de *Pitágoras* sabemos que a distancia ao cadrado entre os puntos $A = (1, 1)$ e $B = (5, 3)$ é igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

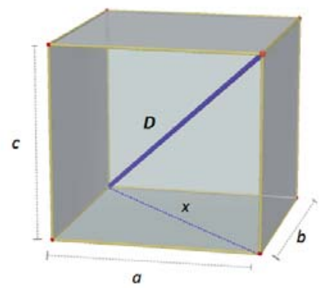
xa que o triángulo *ABC* é rectángulo de catetos 4 e 2.

Logo $D \approx 4.47$.

No espazo de dimensión tres

A distancia entre dous puntos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ é igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Exemplo:

- A distancia ao cadrado entre os puntos $A = (1, 1, 2)$ e $B = (5, 3, 8)$ é igual, polo Teorema de *Pitágoras* no espazo, a

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56.$$

Logo $D \approx 7.5$.

Actividades propostas

31. Calcula a distancia entre os puntos $A(6, 2)$ e $B(3, 9)$.

32. Calcula a distancia entre os puntos $A(6, 2, 5)$ e $B(3, 9, 7)$.

33. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\boldsymbol{u} = (3, 4)$

34. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\boldsymbol{u} = (3, 4, 1)$.

35. Debuxa un cadrado de diagonal o punto $O(0, 0)$ e $A(3, 3)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal do cadrado.

36. Debuxa un cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ e $A(3, 3, 3)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.

37. Sexa $X(x, y)$ un punto xenérico do plano e $O(0, 0)$ a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos *X* que distan de O unha distancia *D*.

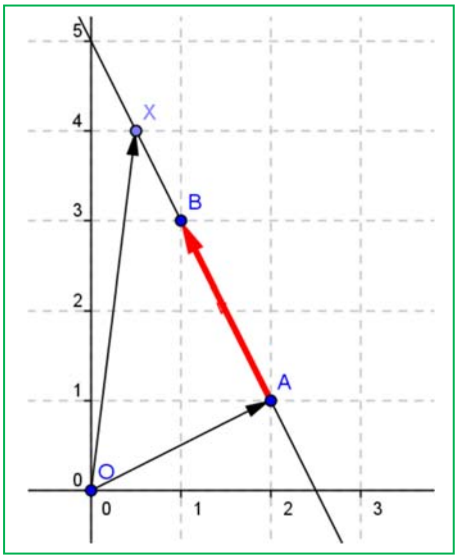
38. Sexa $X(x, y, z)$ un punto xenérico do espazo e $O(0, 0, 0)$ a orixe de coordenadas, escribe a expresión de todos os puntos *X* que distan de O unha distancia *D*.

3.3. Ecuacións e rectas e planos

Ecuacións da recta no plano

Xa sabes que a **ecuación dunha recta** no plano é: e = $mx + n$. É a expresión dunha recta como función. Esta ecuación denomínase **ecuación explícita** da recta.

Se pasamos todo ao primeiro membro da ecuación, quédanos unha ecuación: $ax + by + c = 0$, que se denomina **ecuación implícita** da recta.



Ecuación vectorial: Tamén unha recta queda determinada se coñecemos un punto: $A(a_1, a_2)$ e un vector de dirección $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que o vector ***OX*** pode escribirse como suma do vector ***OA*** e dun vector da mesma dirección que ***v***, $t\boldsymbol{v}$. É dicir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

onde t se denomina parámetro. Para cada valor de t, tense un punto distinto da recta. Con coordenadas quedaría:

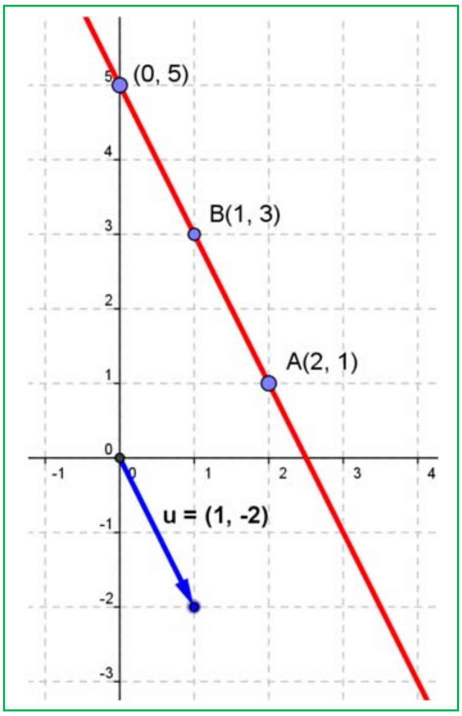
$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

que é a **ecuación paramétrica** da recta.

Paralelismo: Dúas rectas $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ son paralelas se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ e dúas rectas r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ e s: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ son paralelas se $\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{w}$ pois en ambos os casos teñen a mesma dirección.

Perpendicularidade: Dúas rectas $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ son perpendiculares se $a \cdot a' + b \cdot b' = 0$, e dúas rectas r: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v}$ e s: $\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OB} + t\boldsymbol{w}$ son perpendiculares se $v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 = 0$, pois neses casos podes comprobar graficamente que as súas direccións son ortogonais.

Actividades resoltas



- *Da recta de ecuación explícita* $y = -2x + 5$ coñecemos a pendente, –2, e a ordenada na orixe, 5. A pendente dános un vector de dirección da recta, en xeral $(1, m)$ e neste exemplo: (1, –2). A ordenada na orixe proporciónanos un punto, en xeral o $(0, n)$, e neste exemplo, (0, 5). A ecuación paramétrica desta recta é:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

A súa ecuación implícita é: $-2x - y + 5 = 0$.

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

- *Escribe a ecuación paramétrica da recta* que pasa polo punto $A(2, 1)$ e ten como vector de dirección **v** = (1, 2).

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escribe a ecuación da recta* que pasa polos puntos $A(2, 1)$ e $B(1, 3)$. Podemos tomar como vector de dirección o vector ***AB*** = (1 – 2, 3 – 1) = (–1, 2), e escribir a súa ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

A recta é, nos tres exemplos, a mesma, a da figura. Con iso podemos observar que unha recta pode ter moitas ecuacións paramétricas dependendo do punto e do vector de dirección que se tome. Pero eliminando o parámetro e despexando "*y*" chegamos a unha única ecuación explícita.

Actividades propostas

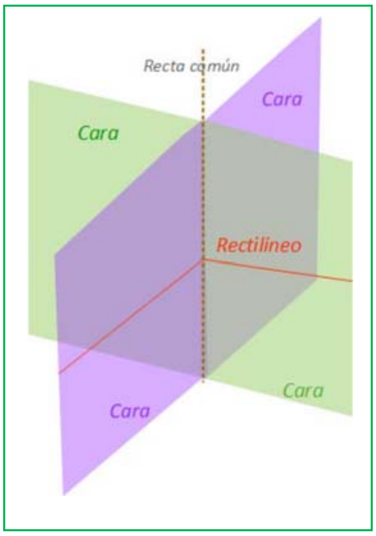
39. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(6, 2)$ e $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita e paramétrica. Represéntaa graficamente.

40. Representa graficamente a recta r: $-2x - y + 5 = 0$. Comproba que o vector (–2, –1) é perpendicular á recta. Representa graficamente a recta s: $x - 2y = 0$ e comproba que é perpendicular a r.

41. Representa graficamente a recta r: $-2x - y + 5 = 0$. Representa graficamente as rectas: $-2x - y = 0$, $-2x - y = 1$, e comproba que son paralelas a r.

Ecuacións da recta e o plano no espazo.

A ecuación **implícita dun plano** é: $ax + by + cz + d = 0$. Observa que é parecida á ecuación implícita da recta pero cunha compoñente máis.



A **ecuación vectorial dunha recta** no espazo é: ***OX*** = ***OA*** + ***tv***, aparentemente igual á ecuación vectorial dunha recta no plano pero ao escribir as coordenadas, agora puntos e vectores, ten tres compoñentes:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Unha recta tamén pode vir dada como intersección de dous planos:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dous puntos determinan unha recta e tres puntos determinan un plano.

Actividades resoltas

- *Escribe a ecuación da recta no espazo que pasa polos puntos A(1, 2, 3) e B(3, 7, 1).*

Tomamos como vector de dirección da recta o vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) e como punto, por exemplo o *A*, entón:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podemos encontrar as ecuacións de dous planos que se corten na recta, eliminando t en dúas ecuacións. Por exemplo, sumando a primeira coa terceira tense: $x + z = 4$. Multiplicando a primeira ecuación por 5, a segunda por 2 e restando tense: $5x - 2y = 1$. Logo outra ecuación da recta, como intersección de dous planos, é:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escribe a ecuación do plano que pasa polos puntos A e B da actividade anterior, e C(2, 6, 2).*

Impoñemos á ecuación $ax + by + cz + d = 0$ que pase polos puntos dados:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0.$

Restámoslle á segunda ecuación a primeira, e á terceira, tamén a primeira:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b - 2c = 0$

$a + 4b - c = 0$

Multiplicamos por 2 a terceira ecuación e restámoslle a segunda:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b - c = 0$

$3b = 0$

Xa coñecemos un coeficiente, $b = 0$. Substituímolo nas ecuacións:

$a + 3c + d = 0$

$a \ - c = 0$

Vemos que $a = c$, que substituído na primeira: $4c + d = 0$. Sempre, ao ter 3 ecuacións e 4 coeficientes, teremos unha situación como a actual, na que o podemos resolver salvo un factor de proporcionalidade. Se $c = 1$, entón $d = -4$. Logo $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ e $d = -4$. É o plano de ecuación:

$$x + z = 4$$

plano que xa obtivemos na actividade anterior.

Actividades propostas

42. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(6, 2, 5)$ e $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, e como intersección de dous planos.

43. Escribe as ecuacións dos tres planos coordenados.

44. Escribe as ecuacións dos tres eixes coordenados no espazo.

45. No cubo de diagonal $O(0, 0, 0)$ e $A(6, 6, 6)$ escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe as ecuacións de todas as súas arestas e as coordenadas dos seus vértices.

3.4. Algunhas ecuacións

Actividades resoltas

- Que puntos verifican a ecuación $x^2 + y^2 = 1$?

Depende! Depende de se estamos nun plano ou no espazo.

No plano podemos ver a ecuación como que o cadrado da distancia dun punto xenérico $X(x, y)$ á orixe $O(0, 0)$ é sempre igual a 1:

$$D^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

O lugar de todos os puntos do plano que distan 1 da orixe é a circunferencia de centro $O(0, 0)$ e radio 1.

No espazo o punto xenérico $X(x, y, z)$ ten tres coordenadas e $O(0, 0, 0)$, tamén. Non é unha circunferencia, nin unha esfera. Que é entón? O que está claro é que se cortamos polo plano OXY, $(z = 0)$ temos a circunferencia anterior. E se cortamos polo plano $z = 3$? Tamén unha circunferencia. É un cilindro. O cilindro de eixe, o eixe vertical, e de radio da base 1.

- Que puntos verifican a ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Agora si. Si podemos aplicar a distancia dun punto xenérico $X(x, y, z)$ á orixe $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

É a ecuación da superficie esférica de centro a orixe e radio 1.

Actividades propostas

46. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, o eixe OZ e radio 2.

47. Escribe a ecuación da esfera de centro a orixe de coordenadas e radio 2.

48. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ e radio 1.

49. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro $A(2, 5)$ e radio 2.

50. Ao cortar a un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

CURIOSIDADES. REVISTA

Problemas, problemas, problemas…

1. Deltaedros

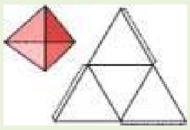
Na trama de triángulos debuxa todos os diamantes-dous posibles, todos os diamantes-tres posibles e todos os diamantes-catro posibles. Con cales podo construír un corpo no espazo? A estes corpos de caras triangulares imos chamalos **DELTAEDROS**. Investiga e constrúe todos os deltaedros posibles. Cantos hai?

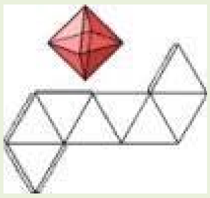
(Podemos restrinxir a busca a deltaedros convexos)

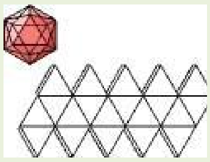
Cales son tamén poliedros regulares? Que orde teñen os seus vértices?

Hai deltaedros con menos de catro caras? Hai deltaedros convexos cun número impar de caras? Hai deltaedros con máis de vinte caras?

Fai un cadro cos resultados obtidos: Nº caras, Nº vértices, Nº arestas, Nº vértices de orde tres, de orde catro, de orde cinco, descrición dos posibles deltaedros: bipirámides, esquinas, bandas...







2. Estuda as maneiras de dividir un cadrado en catro partes iguais en forma e en área.

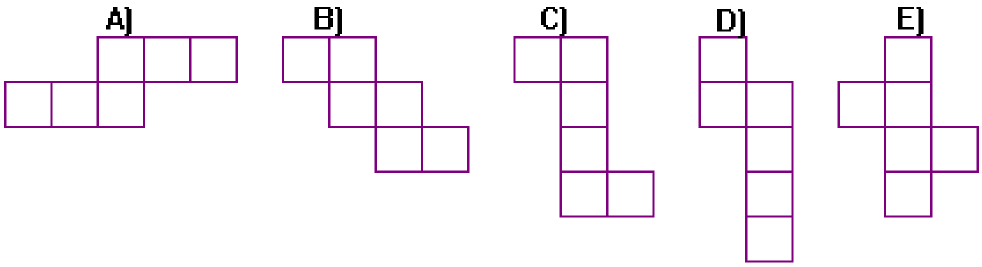
3. Constrúe figuras de cartolina que mediante un só corte se poidan dividir en catro anacos iguais.

4. O radio da Terra é de 6 240 km aproximadamente. Rodeamos a Terra cun cable. Canto deberiamos aumentar a lonxitude do cable para que se separase polo Ecuador unha distancia de dous metros? Menos de 15 m? Máis de 15 m e menos de 15 km? Máis de 15 km?

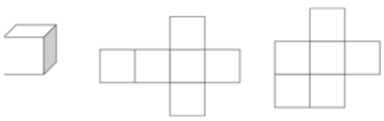
Para empezar faino máis fácil. Pensa na Terra como unha mazá que ten un radio de 3 cm.

5. Como podemos construír catro triángulos equiláteros iguais con seis escarvadentes coa condición de que o lado de cada triángulo sexa a lonxitude do escarvadentes?

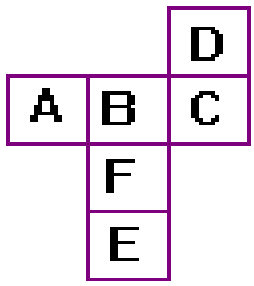
6. Cal das seguintes figuras non representa o desenvolvemento dun cubo?



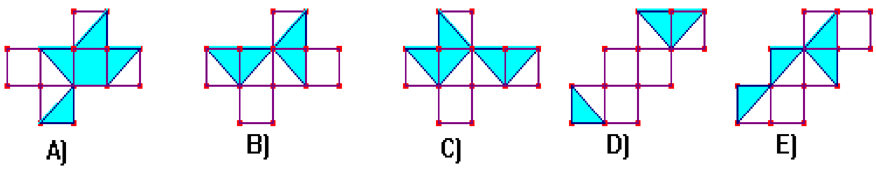
7. Utiliza unha trama de cadrados ou papel cuadriculado e busca todos os deseños de seis cadrados que se che ocorran. Decide cales poden servir para construír un cubo



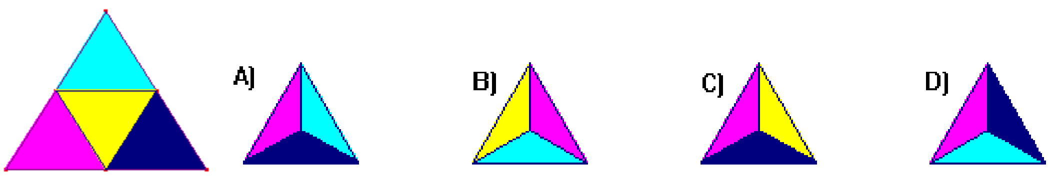
8. Ao formar un cubo co desenvolvemento da figura, cal será a letra oposta a F?



9. A partir dun destes desenvolvementos bicolores, pódese fabricar un cubo, de forma que as cores sexan as mesmas nas dúas partes de cada unha das arestas. Cal deles o verifica?

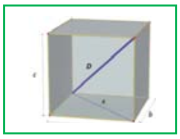
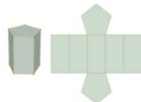
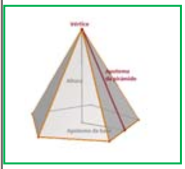
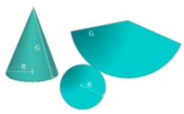


10. O triángulo da figura pregouse para obter un tetraedro. Tendo en conta que o triángulo non está pintado por detrás. Cal das seguintes vistas en perspectiva do tetraedro é falsa?



Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

RESUMO

Noción	Definición	*Exemplos*
Teorema de *Pitágoras* no espazo	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, entón $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ $D = \sqrt{29} = 5.4$.
Teorema de Tales:	Dadas dúas rectas, *r* e *r'*, que se cortan no punto *O*, e dúas rectas paralelas entre si, *a* e *b*. Se a recta *a* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *A* e *C*, e a recta *b* corta ás rectas *r* e *r'* nos puntos *B* e *D*, entón os segmentos correspondentes son proporcionais.	
Poliedros regulares	Un poliedro regular é un poliedro no que todas as súas caras son polígonos regulares iguais e no que os seus ángulos poliedros son iguais. Hai cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo e dodecaedro.	
Prismas	 $A_{Lateral} = Perímetro_{Base} \cdot Altura$ $A_{total} = Área_{Lateral} + 2Área_{Base}$ $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Pirámides	 $A_{Lateral} = \dfrac{Perímetro_{Base} \cdot Apotema_{pirámide}}{2}$ $A_{total} = Área_{Lateral} + Área_{Base}$ $Volume = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindro	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volume = Área_{base} \cdot Altura$	
Cono	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volume = \dfrac{Área_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volume = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	
Ecuacións da recta no plano	**Ecuación explícita:** $y = mx + n$. **Ecuación implícita:** $ax + by + c = 0$ **Ecuación paramétrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Ecuacións da recta e do plano no espazo.	**Ecuación implícita dun plano**: $ax + by + cz + d = 0$ **Ecuación paramétrica dunha recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Teorema de *Pitágoras* e teorema de *Tales*

1. Calcula o volume dun tetraedro regular de lado 7 *cm*.

2. Calcula a lonxitude da diagonal dun cadrado de lado 1 *m*.

3. Calcula a lonxitude da diagonal dun rectángulo de base 15 *cm* e altura 6 *cm*.

4. Debuxa un paralelepípedo cuxas arestas midan 4 *cm*, 5 *cm* e 6 *cm* que non sexa un ortoedro. Debuxa tamén o seu desenvolvemento.

5. Se o paralelepípedo anterior fose un ortoedro, canto mediría a súa diagonal?

6. Un vaso de 11 *cm* de altura ten forma de tronco de cono no que os radios das bases son de 5 e 3 *cm*. Canto medirá como mínimo unha culleriña para que sobresaia do vaso polo menos 2 *cm*?

7. É posible gardar nunha caixa con forma de ortoedro de arestas 4 *cm*, 3 *cm* e 12 *cm* un bolígrafo de 13 *cm* de lonxitude?

8. Calcula a diagonal dun prisma recto de base cadrada sabendo que o lado da base mide 6 *cm* e a altura do prisma 8 *cm*.

9. Se un ascensor mide 1.2 *m* de ancho, 1.6 *m* de longo e 2.3 *m* de altura, é posible introducir nel unha escaleira de 3 *m* de altura?

10. Cal é a maior distancia que se pode medir en liña recta nunha habitación que ten 6 *m* de ancho, 8 *m* de longo e 4 *m* de altura?

11. Calcula a lonxitude da aresta dun cubo sabendo que a súa diagonal mide 3.46 *cm*.

12. Calcula a distancia máxima entre dous puntos dun tronco de cono cuxas bases teñen radios 5 *cm* e 2 *cm*, e altura 10 *cm*.

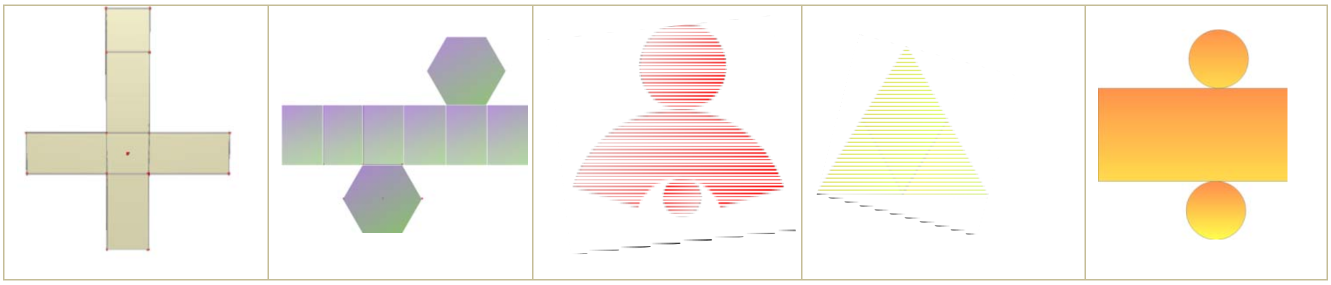
13. Nunha pizzería a pizza de 15 *cm* de diámetro vale 2 € e a de 40 *cm* vale 5 €. Cal ten mellor prezo?

14. Vemos no mercado unha pescada de 30 *cm* que pesa un quilo. Parécenos un pouco pequena e pedimos outra un pouco maior que resulta pesar 2 quilos. Canto medirá?

15. Nun día frío un pai e un fillo pequeno van exactamente igual abrigados, cal dos dous terá máis frío?

Lonxitudes, áreas e volumes

16. Identifica a que corpo xeométrico pertencen os seguintes desenvolvementos:

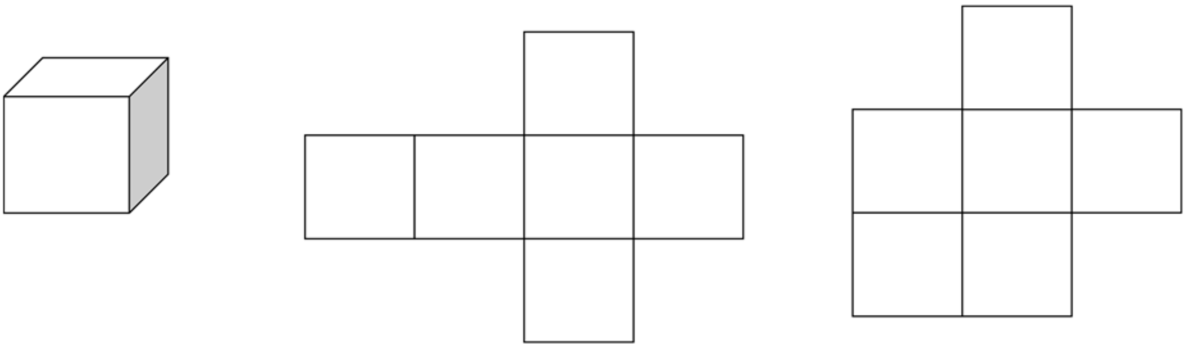


17. Poderá existir un poliedro regular cuxas caras sexan hexagonais? Razoa a resposta.

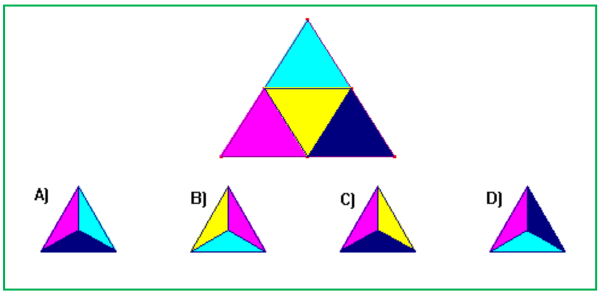
18. Cantas diagonais podes trazar nun cubo? E nun octaedro?

19. Podes encontrar dúas arestas paralelas nun tetraedro? E en cada un dos restantes poliedros regulares?

20. Utiliza unha trama de cadrados ou papel cuadriculado e busca todos os deseños de seis cadrados que se che ocorran. Decide cales poden servir para construír un cubo.



21. O triángulo da figura pregouse para obter un tetraedro. Tendo en conta que o triángulo non está pintado por detrás, cal das seguintes vistas en perspectiva do tetraedro é falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* de altura ten como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* e 4 *dm*. Calcula as áreas lateral e total do prisma.

23. Debuxa un prisma hexagonal regular que teña 3 *cm* de aresta basal e 0.9 *dm* de altura e calcula as áreas da base e total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* de altura ten unha base de 30 cm^2 de área. Calcula o seu volume.

25. Calcula a área total dun ortoedro de dimensións 2.7 *dm*, 6.2 *dm* e 80 *cm*.

26. Calcula a superficie total e o volume dun cilindro que ten 7 *m* de altura e 3 *cm* de radio da base.

27. Calcula a área total dunha esfera de 7 *cm* de radio.

28. Calcula a apotema dunha pirámide regular sabendo que a súa área lateral é de 150 cm^2 e a súa base é un hexágono de 4 cm dado.

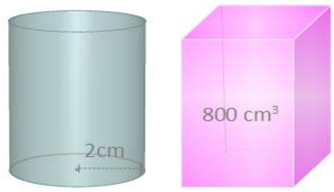
29. Calcula a apotema dunha pirámide hexagonal regular sabendo que o perímetro da base é de 36 dm e a altura da pirámide é de 6 dm. Calcula tamén a área total e o volume desta pirámide.

30. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm e 16 cm xira arredor do seu cateto menor xerando un cono. Calcula a área lateral, a área total e o volume.

31. Tres bólas de metal de radios 15 dm, 0.4 m e 2 m fúndense nunha soa, cal será o diámetro da esfera resultante?

32. Cal é a capacidade dun pozo cilíndrico de 1.50 m de diámetro e 30 m de profundidade?

33. Canto cartón precisamos para construír unha pirámide cuadrangular regular se queremos que o lado da base mida 12 cm e que a súa altura sexa de 15 cm?



34. Calcula o volume dun cilindro que ten 2 cm de radio da base e a mesma altura que un prisma cuxa base é un cadrado de 4 cm de lado e 800 cm^3 de volume.

35. Cal é a área da base dun cilindro de 1.50 m de alto e 135 dm^3 de volume?

36. A auga dun manancial condúcese ata uns depósitos cilíndricos que miden 10 m de radio da base e 20 m de altura. Logo embotéllase en bidóns de 2.5 litros. Cantos envases se enchen con cada depósito?

37. Calcula a cantidade de cartolina necesaria para construír un anel de 10 tetraedros cada un dos cales ten un centímetro de aresta.

38. Ao facer o desenvolvemento dun prisma triangular regular de 5 dm de altura, resultou un rectángulo dun metro de diagonal como superficie lateral. Calcula a área total.

39. Determina a superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 cm de lado da base e 5 cm de altura.

40. O Concello de Madrid colocou unhas xardineiras de pedra nas súas rúas que teñen forma de prisma hexagonal regular. A cavidade interior, onde se deposita a terra, ten 80 cm de profundidade e o lado do hexágono interior é de 60 cm. Calcula o volume de terra que enchería unha xardineira por completo.

41. Unha habitación ten forma de ortoedro e as súas dimensións son directamente proporcionais aos números 2, 4 e 8. Calcula a área total e o volume se ademais se sabe que a diagonal mide 18.3 m.

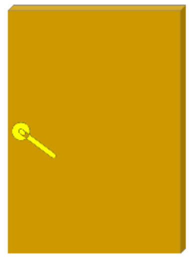
42. Un ortoedro ten 0.7 dm de altura e 8 dm^2 de área total. A súa lonxitude é o dobre da súa anchura, cal é o seu volume?

43. Se o volume dun cilindro de 15 cm de altura é de 424 cm^3, calcula o radio da base do cilindro.

44. Instalaron na casa de Xoán un depósito de auga de forma cilíndrica. O diámetro da base mide 2 metros e a altura é de 3 metros. a) Calcula o volume do depósito en m^3. b) Cantos litros de auga caben no depósito?

45. Un envase dun litro de leite ten forma de prisma, a base é un cadrado que ten 10 *cm* de lado. a) Cal é, en cm^3, o volume do envase? b) Calcula a altura do envase en cm.

46. Unha circunferencia de lonxitude 18.84 *cm* xira arredor dun dos seus diámetros xerando unha esfera. Calcula o seu volume.



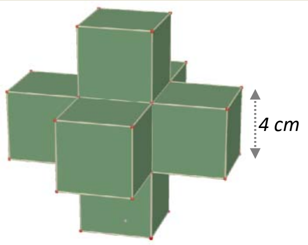
47. Unha porta mide 1.8 *m* de alto,70 *cm* de ancho e 3 *cm* de espesor. O prezo da instalación é de 100 € e cóbrase 5 € por m^2 en concepto de vernizado, ademais do custe da madeira, que é de 280 € cada m^3. Calcula o custe da porta se só se realiza o vernizado das dúas caras principais.

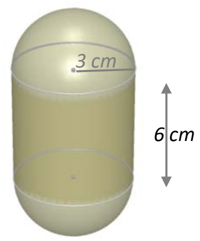
48. A auga contida nun recipiente cónico de 21 *cm* de altura e 15 *cm* de diámetro da base vértese nun vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro da base. Ata que altura chegará a auga?

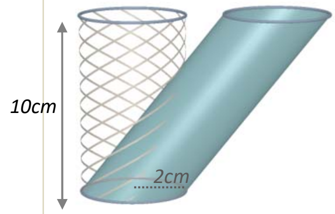
49. Segundo Arquímedes, que dimensións ten o cilindro circunscrito a unha esfera de 7 *cm* de radio que ten a súa mesma área? Calcula esta área.

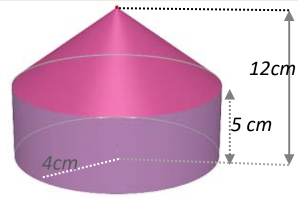
50. Cal é o volume dunha esfera na que a lonxitude dunha circunferencia máxima é 251.2 *m*?

51. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos

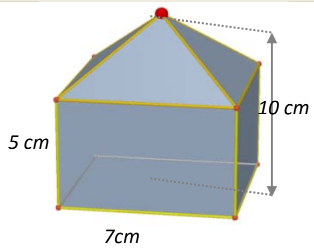




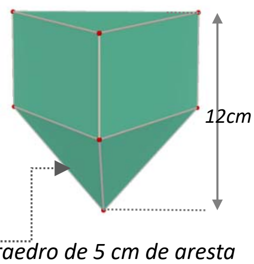




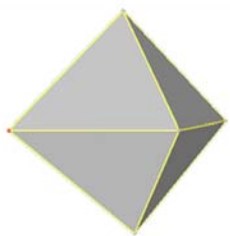
52. Calcula a área lateral e o volume dos seguintes corpos xeométricos



A base é cadrada



Tetraedro de 5 cm de aresta

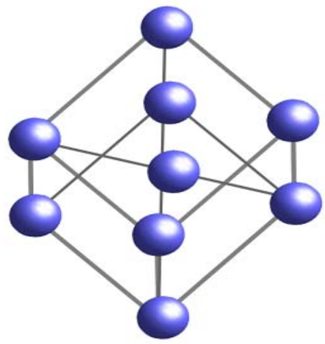

Octaedro de 6 cm de aresta


Pirámides construídas no interior dunha estrutura cúbica de 5 dm de aresta.

53. Na construción dun globo aerostático esférico dun metro de radio emprégase lona que ten un custe de 300 €/m^2. Calcula o importe da lona necesaria para a súa construción.

54. Calcula o radio dunha esfera que ten 33.51 dm^3 de volume.

55. O *Atomium* é un monumento de Bruxelas que reproduce unha molécula de ferro. Consta de 9 esferas de aceiro de 18 m de diámetro que ocupan os vértices e o centro dunha estrutura cúbica de 103 m de diagonal realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Se utilizamos unha escala 1:100 e tanto as esferas como os cilindros son macizos, que cantidade de material necesitaremos?

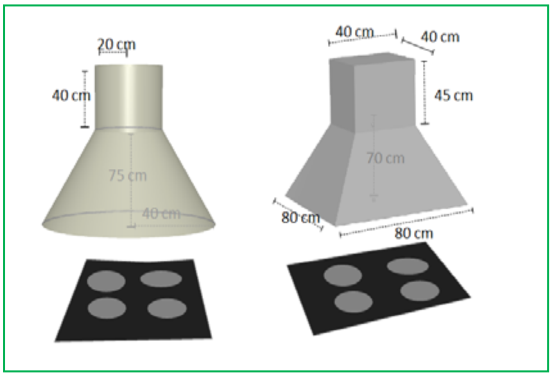


56. Pintouse por dentro e por fóra un depósito sen tapa de 8 dm de alto e 3 dm de radio. Tendo en conta que a base só se pode pintar por dentro, e que se utilizou pintura de 2 €/dm^2, canto diñeiro custou en total?

57. Unha piscina mide 20 m de longo, 5 m de ancho e 2 m de alto.

a. Cantos litros de auga son necesarios para enchela?

b. Canto custará recubrir o chan e as paredes con PVC se o prezo é de 20 €/ m^2?

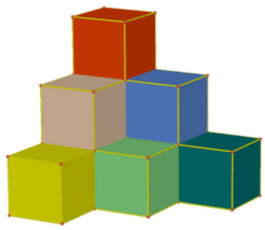


58. Cal das dúas cambotas extractoras da figura esquerda ten un custe de aceiro inoxidable menor?

59. Nunha vasilla cilíndrica de 3 *m* de diámetro e que contén auga introdúcese unha bóla. Cal é o seu volume se despois da inmersión sobe 0.5 *m* o nivel da auga?

60. O prezo das tellas é de 12.6 €/m^2. Canto custará retellar unha vivenda cuxo tellado ten forma de pirámide cuadrangular regular de 1.5 *m* de altura e 15 m de lado da base?

61. Enrolase unha cartolina rectangular de lados 40 *cm* e 26 *cm* formando cilindros das dúas formas posibles, facendo coincidir lados opostos. Cal dos dous cilindros resultantes ten maior volume?



62. Cada un dos cubos da figura ten 2 *cm* de aresta. Cantos hai que engadir para formar un cubo de 216 cm^3 de volume?

63. Un tubo de ensaio ten forma de cilindro aberto na parte superior e rematado por unha semiesfera na inferior. Se o radio da base é de 1 *cm* e a altura total é de 12 *cm*, calcula cantos centilitros de líquido caben nel.

64. O lado da base da pirámide de Keops mide 230 *m*, e a súa altura 146 *m*. Que volume encerra?

65. A densidade dun tapón de cortiza é de 0,24 g/cm^3, canto pesan mil tapóns se os diámetros das súas bases miden 2.5 *cm* e 1.2 *cm*, e a súa altura 3 *cm*?

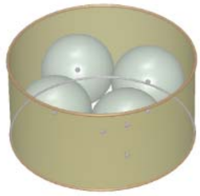
66. Comproba que o volume dunha esfera é igual ao do seu cilindro circunscrito menos o do cono de igual base e altura.

67. Calcula o volume dun octaedro regular de aresta 2 *cm*.

68. Constrúe en cartolina un prisma cuadrangular regular de volume 240 cm^3, e de área lateral 240 cm^2.

Autoras: Milagros Latasa Asso e Fernanda Ramos Rodríguez
Revisores: Javier Rodrigo, Fernanda Ramos e David Hierro
Ilustracións: Milagros Latasa/Banco de Imaxes de INTEF

69. O cristal dun farol ten forma de tronco de cono de 40 *cm* de altura e bases de radios 20 e 10 *cm*. Calcula a súa superficie.



70. Un bote cilíndrico de 15 *cm* de radio e 30 *cm* de altura ten no seu interior catro pelotas de radio 3.5 *cm*. Calcula o espazo libre que hai no seu interior.

71. Un funil cónico de 15 *cm* de diámetro ten un litro de capacidade, cal é a súa altura?

72. Nun depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, unha billa verte 15 litros de auga cada minuto. Canto aumentará a altura da auga despois de media hora?

73. A lona dun parasol aberto ten forma de pirámide octogonal regular de 0.5 *m* de altura e 40 *cm* de lado da base. Fíxase un mastro no chan no que se encaixa e o vértice da pirámide queda a unha distancia do chan de 1.80 *m*. No momento no que os raios de sol son verticais, que área ten o espazo de sombra que determina?

74. Unha peixeira con forma de prisma recto e base rectangular énchese con 65 litros de auga. Se ten 65 *cm* de longo e 20 *cm* de ancho, cal é a súa profundidade?

75. Nun xeado de cornete, a galleta ten 12 *cm* de altura e 4 *cm* diámetro. Cal é a súa superficie? Se o cornete está completamente cheo de xeado e sobresae unha semiesfera perfecta, cantos cm^3 de xeado contén?

Iniciación á Xeometría Analítica

76. Calcula a distancia entre os puntos $A(7, 3)$ e $B(2, 5)$.

77. Calcula a distancia entre os puntos $A(7, 3, 4)$ e $B(2, 5, 8)$.

78. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\boldsymbol{u} = (4, 5)$.

79. Calcula a lonxitude do vector de compoñentes $\boldsymbol{u} = (4, 5, 0)$.

80. O vector $\boldsymbol{u} = (4, 5)$ ten a orixe no punto $A(3, 7)$. Cales son as coordenadas do seu punto extremo?

81. O vector $\boldsymbol{u} = (4, 5, 2)$ ten a orixe no punto $A(3, 7, 5)$. Cales son as coordenadas do seu punto extremo?

82. Debuxa un cadrado de diagonal o punto $A(2, 3)$ e $C(5, 6)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cadrado? Calcula a lonxitude do lado e da diagonal do cadrado.

83. Debuxa un cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ e $B(4, 4, 4)$. Que coordenadas teñen os outros vértices do cubo? Xa sabes, son 8 vértices. Calcula a lonxitude da aresta, da diagonal dunha cara e da diagonal do cubo.

84. Sexa $X(x, y)$ un punto do plano e $A(2, 4)$, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de A unha distancia 3.

85. Sexa $X(x, y, z)$ un punto do espazo e $A(2, 4, 3)$, escribe a expresión de todos os puntos X que distan de A unha distancia 3.

86. Escribe a ecuación paramétrica da recta que pasa polo punto $A(2, 7)$ e ten como vector de dirección $\boldsymbol{u} = (4, 5)$. Represéntaa graficamente.

87. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(2, 7)$ e $B(4, 6)$, de forma explícita, implícita e paramétrica. Represéntaa graficamente.

88. Escribe a ecuación da recta que pasa polos puntos $A(2, 4, 6)$ e $B(5, 2, 8)$, de forma explícita, e como intersección de dous planos.

89. No cubo de diagonal $A(1, 1, 1)$ e $B(5, 5, 5)$ escribe as ecuacións dos planos que forman as súas caras. Escribe tamén as ecuacións de todas as súas arestas e as coordenadas dos seus vértices.

90. Escribe a ecuación do cilindro de eixe $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e radio 3.

91. Escribe a ecuación da esfera de centro $A(2, 7, 3)$ e radio 4.

92. Escribe a ecuación do cilindro de eixe, a recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ e radio 2.

93. Escribe a ecuación da circunferencia no plano de centro $A(3, 7)$ e radio 3.

94. Ao cortar un certo cilindro por un plano horizontal tense a circunferencia do exercicio anterior. Escribe a ecuación do cilindro.

AUTOAVALIACIÓN

1. As lonxitudes dos lados do triángulo de vértices $A(2, 2)$, $B(1, 4)$ e $C(0, 3)$ son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. No triángulo rectángulo de catetos 3 e 4 *cm* multiplícanse por 10 todas as súas lonxitudes. A área do novo triángulo é:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0.6 m^2

3. A altura dun prisma de base cadrada é 20 *cm* e o lado da base é 5 *cm*, a súa área total é:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0.45 m^2

4. Un depósito de auga ten forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura e lado da base 1 *m*. O volume de auga que hai neles:

a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) $30\,000\sqrt{2}$ dm³ d) $7.5\sqrt{3}$ m³

5. O tellado dunha caseta ten forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5 *m* de altura e 1000 *cm* de lado da base. Se se precisan 15 tellas por metro cadrado para recubrir o tellado, utilízanse un total de:

a) 1 508 tellas. b) 150 tellas. c) 245 tellas. d) 105 tellas.

6. Unha caixa de dimensións 30, 20 e 15 *cm*, está chea de cubos de 1 *cm* de aresta. Se se utilizan todos para construír un prisma recto de base cadrada de 10 *cm* de lado, a altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. O radio dunha esfera que ten o mesmo volume que un cono de 5 *dm* de radio da base e 120 *cm* de altura é:

a) $5\sqrt{3}dm$ b) $\sqrt[3]{75}dm$ c) $150cm$ d) $\sqrt[3]{2\,250}cm$

8. Distribúense 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura e 3 *cm* de radio da base. O número de envases necesario é:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. A ecuación dunha recta no plano que pasa polos puntos $A(2, 5)$ e $B(1, 3)$ é:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y-2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. A ecuación da esfera de centro A(2, 3, 5) e radio 3 é:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$.

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB de ESO

Capítulo 10:
Funcións e gráficas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García e Javier Sánchez

Revisores: Javier Rodrigo e José Gallegos

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Andrés García e Javier Sánchez

Índice

Resumo

Un dos conceptos máis importantes que aparecen nas Matemáticas é a idea de *función*. Intuitivamente, unha función é calquera proceso polo que se transforma un número noutro. Máis formalmente, unha función *f é unha* correspondencia que a un número *x* lle asigna un único número *y*, tal que $y = f(x)$.
Non é difícil encontrar exemplos de funcións. O espazo percorrido en función do tempo, o peso dunha persoa en función da súa altura, o que pagamos de teléfono en función dos minutos que falamos.
Neste capítulo aprenderemos como tratar de maneira rigorosa a idea intuitiva de función e como estudar as funcións. Veremos como describir as súas características e estudaremos a maneira de facer un modelo matemático dalgunhas situacións da vida real que nos axude a tomar mellores decisións. Practicamente calquera situación real pode ser estudada con axuda de funcións. Temos pois moito campo…

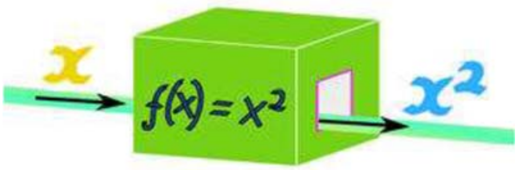
1. FUNCIÓNS REAIS

1.1. Concepto de función

Unha ***función*** é unha relación ou correspondencia entre dúas magnitudes, tales que a cada valor da variable independente, *x*, lle corresponde un ***só*** valor da dependente, *y*.

Para indicar que a variable (*y*) depende ou é función doutra, (*x*), úsase a notación ***y* = *f*(*x*),** que se le *"y é función de x"*.

As funcións son como máquinas ás que se lles mete un elemento, *x*, e devolve outro valor, *y* = *f*(*x*). Por exemplo, na función $f(x) = x^2$, introdúcense valores de *x*, e devólvenos os seus cadrados.



É MOI IMPORTANTE que teñamos un só valor de *y* (variable dependente) para cada valor de *x* (variable independente). En caso contrario non temos unha función.
As funcións introducíronse para estudar procesos. Se facendo o mesmo nos poden saír cousas distintas, non se pode estudar do mesmo modo.

Exemplos:

- *Pensemos na factura de teléfono. Se sabemos cantos minutos falamos (supoñendo, claro, que custen o mesmo todos) tamén sabemos canto nos toca pagar. O diñeiro que pagamos é función do tempo.*

- *Imos ao casino e apostamos a vermello ou negro. Se apostamos un euro, podemos gañar dous ou non gañar nada. Se dicimos canto apostamos non sabemos canto imos gañar. Polo tanto, as ganancias nun casino non son unha función da aposta.*

Actividades resoltas

- Indica se as seguintes situacións representan unha función ou non:
  a. O espazo percorrido por un coche e o tempo.
  b. As ganancias na Bolsa en función do investido.
  c. O cadrado dun número.

Solución:

Son funcións a) e c). O b) non o é porque non sabemos canto gañamos.

1.2. Gráfica dunha función

En moitas ocasións, a maneira máis sinxela de ver como se comporta unha función é debuxala no plano cartesiano. Imos recordar moi brevemente que era o plano cartesiano (cartesiano, vén de *Cartesio*, que era o nome co que asinaba o seu inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dúas rectas numéricas perpendiculares chamadas **eixes**. O punto no que se cortan os eixes é a orixe do sistema, tamén chamada orixe **de coordenadas.**

Normalmente representámolo cun eixe vertical e o outro horizontal. Ao eixe horizontal denominámolo **eixe de abscisas** ou tamén eixe X e ao vertical **eixe de ordenadas** ou eixe Y.

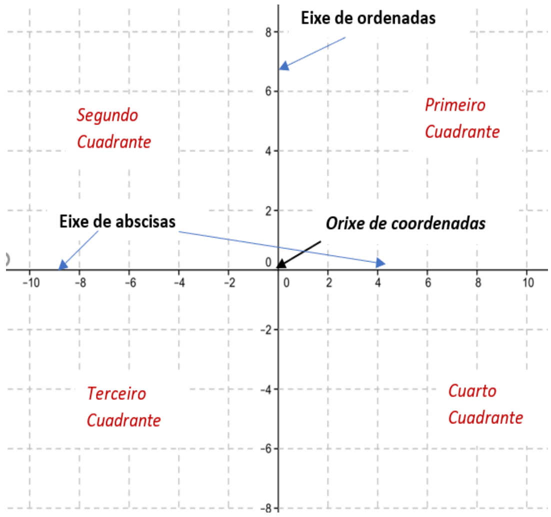
Ao cortárense os dous eixes, o plano queda dividido en catro zonas que se coñecen como **cuadrantes**:

- Primeiro cuadrante: Zona superior dereita.

- Segundo cuadrante: Zona superior esquerda.

- Terceiro cuadrante: Zona inferior esquerda.

- Cuarto cuadrante: Zona inferior dereita.



Sistema de referencia cartesiano

Para representar puntos, só hai que recordar que a primeira compoñente (ou abscisa) é *x*, polo que debe ir ao eixe X (eixe de abscisas). A segunda compoñente (ou ordenada) é *y*, polo tanto vai ao eixe Y (eixe de ordenadas).

O sentido positivo é á dereita e arriba. Se algunha das compoñentes é negativa, entón colócase en sentido contrario.

Para representar unha gráfica, o que debemos facer é simplemente tomar valores (*x*, *y*) ou, o que é o mesmo (*x*, *f*(*x*)) posto que *y* = *f*(*x*). Logo unímolos, ben con liñas rectas, ben axustando "a ollo" unha liña curva. Naturalmente agora aparécennos dúas cuestións:

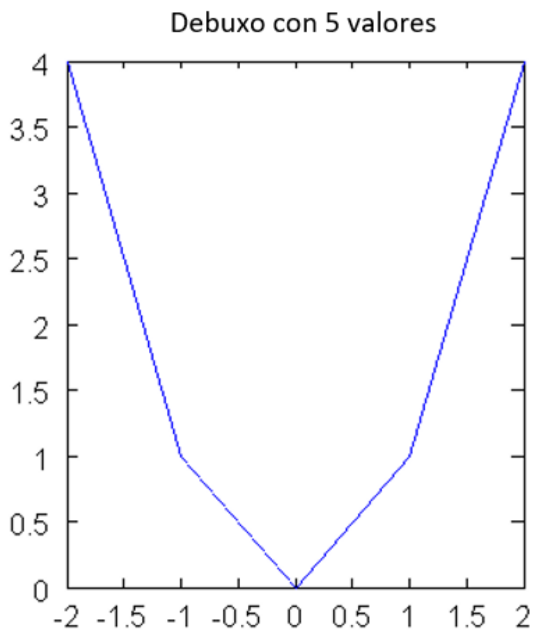
- Cantos valores hai que dar?
- Que valores lle damos?

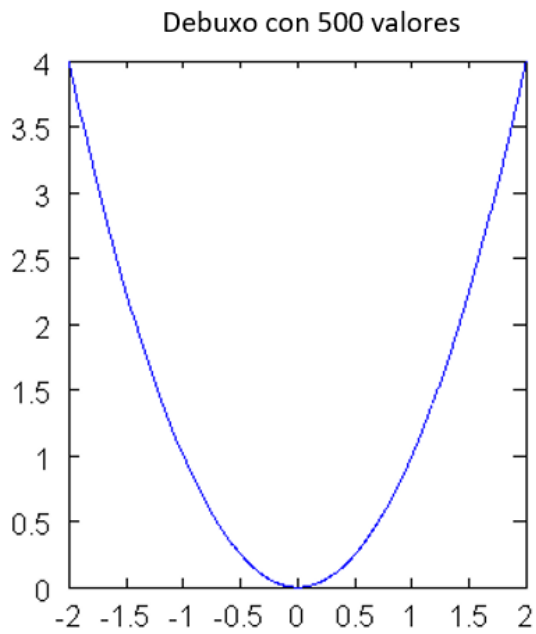
En xeral, non hai unha resposta clara a esas preguntas, aparte da obvia "canto máis, mellor". Se unha gráfica se debuxa con ordenador, normalmente dáselle un intervalo e o número de valores que queremos que represente. Tipicamente un ordenador dá MOITOS valores: 500, 1 000…

Exemplo:

- *Debuxamos a función* $y = x^2$ no intervalo [–2, 2] cun ordenador (este debuxo está feito co programa *Octave* que é código aberto e podes descargar libremente).

Facemos dúas gráficas, unha dando 5 valores e a outra 500. Observa a diferenza entre os dous debuxos. Observa tamén que o ordenador une os puntos con segmentos de rectas.



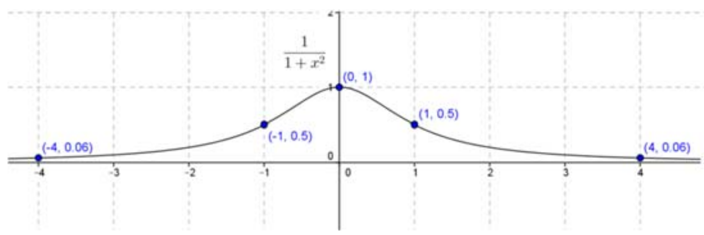


Actividade resolta

- *Debuxar a función* $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Máis tarde indicaremos os valores que é recomendable tomar. De momento, limitarémonos a dar uns poucos e unir puntos. Por ningunha razón en especial tomamos –4, –1, 0, 1 e 4. Recordemos que ao substituír úsanse SEMPRE parénteses. Así $\frac{1}{(-4)^2+1}=\frac{1}{16+1}=\frac{1}{17}=0.06$. Obtemos entón a táboa de valores e basta unir os puntos (dándolles "a ollo" un pouco de curva).

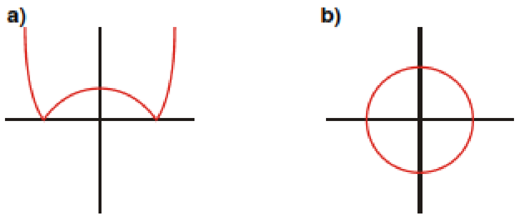
x	f (x)
–4	0.06
–1	0.5
0	1
1	0.5
4	0.06



Unha cuestión a destacar das gráficas é o feito de que, directamente a partir dun debuxo, podemos ver se corresponde a unha función ou non. Para velo, basta fixarse en se hai algún valor de *x* que corresponda a máis dun valor de *y*. Se non o hai, é unha función. Observamos que o exemplo anterior é unha función.

Actividade resolta

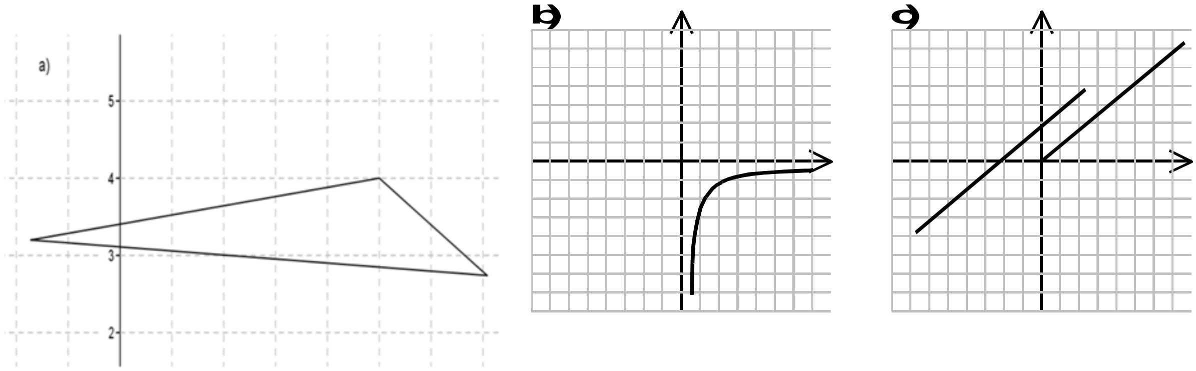
- *Indica cales das seguintes representacións corresponden á gráfica dunha función:*



A gráfica a) é unha función. A gráfica b) non o é porque, por exemplo, o punto x = 0 ten dous valores de y.

Actividade proposta

1. Das seguintes gráficas indica cales delas corresponden a funcións.



1.3. Diferentes maneiras de expresar unha función

Recordemos, unha vez máis, que unha función é a descrición de como se relacionan dúas magnitudes. Así pois, esta descrición podemos sabela de varias maneiras.

Funcións dadas por táboas

Probablemente, a maneira máis sinxela na que se pode dar unha función é cunha táboa de valores. É ademais a maneira máis experimental: observamos un proceso e medimos as cantidades que nos saen. Así temos unha idea de como se relacionan.

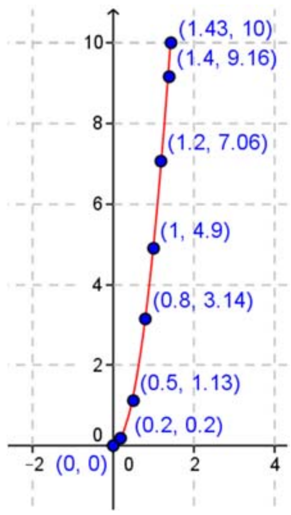
Debuxar a súa gráfica non pode ser máis sinxelo. Basta poñer os puntos e, no seu caso, unilos.

Exemplo:

- *Soltamos unha pelota desde 10 m de altura e medimos o espazo percorrido (en segundos). Obtemos entón a táboa seguinte:*

Espazo (m)	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.43
Tempo (s)	0	0.2	1.13	3.14	4.9	7.06	9.16	10.00

É moi sinxelo debuxar a súa gráfica. Basta representar os puntos e unilos (esta gráfica está feita co programa *Xeoxebra*, tamén de código aberto):



Dáte conta que ten sentido “*encher*” o espazo entre puntos. Aínda que non o teñamos medido, a pelota non pode teletransportarse, polo que seguro se pode falar de onde está no instante 0.7, por exemplo. E, obviamente, o espazo percorrido estará entre 1.13 (que corresponde a 0.5 segundos) e 3.14 (que corresponde a 0.8 segundos).

A cuestión que formulamos é a seguinte: é sempre así? Pode haber funcións onde non TEÑA SENTIDO poñer valores intermedios?

A pouco que penses, daraste conta de que si as hai.

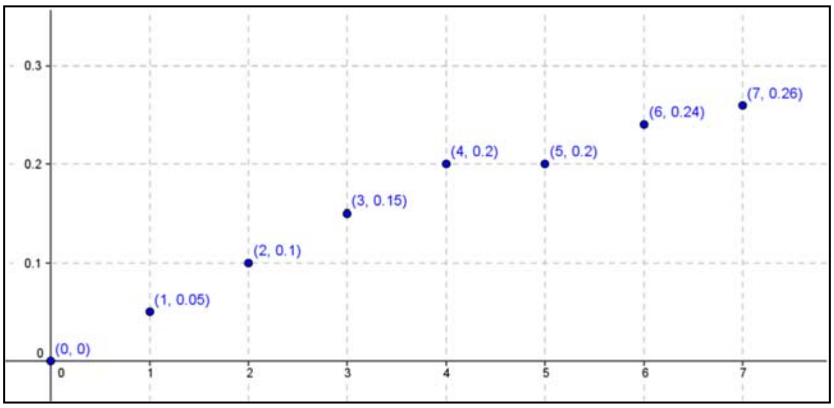
Vexamos un exemplo:

Exemplo:

- *Nunha libraría puxeron a seguinte táboa co prezo das fotocopias, dependendo do número de copias:*

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Prezo (euros)	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.2	0.24	0.28

Pódese construír a representación gráfica debuxando estes puntos.



A cuestión de se podemos debuxar puntos intermedios entre os anteriores respóndese por si soa.

Non se poden facer 1.5 copias. Só podes facer un número enteiro de copias.

Polo tanto, non ten sentido pensar sequera dar valores intermedios nin debuxalos.

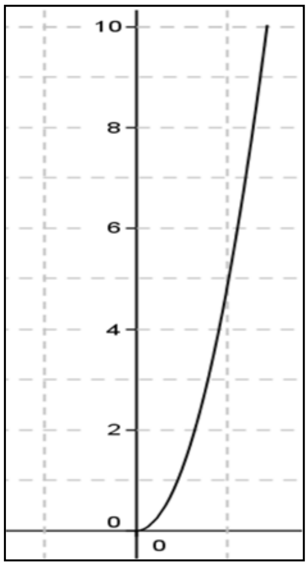
Funcións dadas por unha expresión

En moitísimas ocasións sabemos suficiente da relación entre dúas magnitudes como para coñecer exactamente unha expresión que as relaciona. Imos empezar cun exemplo.

Exemplo:

- *Volvamos ao caso que vimos antes, onde soltabamos unha pelota.*

Non precisamos medir os tempos e os espazos. É un corpo en caída libre e polo tanto o que en Física se chama movemento uniformemente acelerado. Neste caso $e = \frac{1}{2}at^2$ onde *e* é o espazo, *t* é o tempo e *a* é a aceleración. Ademais, *a* é coñecida pois é a gravidade, é dicir, 9.8 m/s^2.



Polo tanto, as dúas magnitudes, espazo e tempo, están relacionadas pola ecuación $e = \frac{1}{2}9.8t^2$. En Matemáticas é máis usual poñer *x* e *y*, polo que sería $y = \frac{1}{2}9.8x^2$ pero é exactamente o mesmo.

E, como temos todos os puntos que queiramos, podemos debuxar a función sen ningún problema cos seus puntos intermedios. Ou indicarlle a un ordenador que a debuxe.

O resultado, naturalmente, é o mesmo.

Actividades propostas

2. Un ciclista bebe 1/2 litro de auga cada 10 km de percorrido. Se no coche de equipo levan un bidón de 40 litros, fai unha táboa que indique a súa variación e escribe a función que a representa.
3. Un ciclista participa nunha carreira percorrendo 3 km cada minuto. Tendo en conta que non partiu da orixe senón 2 km por detrás representa nunha táboa o percorrido durante os tres primeiros minutos. Escribe a función que expresa os quilómetros en función do tempo en minutos e debúxaa.

Funcións definidas a anacos

- *Pensa na seguinte situación para a tarifa dun teléfono móbil. Págase un fixo de 10 € ao mes e con iso son gratis os 500 primeiros minutos. A partir de aí, págase a 5 céntimos por minuto.*

É evidente que é diferente o comportamento antes de 500 minutos e despois.

Unha **función definida a anacos** é aquela que vén dada por unha expresión distinta para diferentes intervalos.

No exemplo anterior, é fácil ver que $f(x) = \begin{cases} 10 + 0.05(x - 500) & x > 500 \\ 10, & x \le 500 \end{cases}$.

Vexamos brevemente por que. Para valores menores que 500, o gasto é sempre 10 €. Para valores maiores, os minutos que gastamos POR RIBA DE 500 son (*x* – 500) e polo tanto o que pagamos polos minutos é 0.05(*x* – 500) pois medímolo en euros. Hai que sumarlle os 10 € que pagamos de fixo.

Actividades propostas

4. Representa as seguintes funcións a anacos. Indícanse os puntos que tes que calcular.

a. $f(x)=\begin{cases} x-1, & si \ \ x<-3 \\ -x+1, & si \ \ -3\le x<0 \\ 3, & si \ \ 0\le x<\infty \end{cases}$ Puntos:–5, –3.1, –3, –1, –0.1, 0, 1.

b. $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & si \ \ x<-2 \\ 3, & si \ \ -2\le x<1 \\ \sqrt{x}, & si \ \ 1\le x \end{cases}$ Puntos: –3, –2.1, –2, 0, 0.9, 1, 4, 9.

1.4. Dominio e percorrido dunha función

Ata agora non nos preocupamos de que valores poden ter o *x* e o *y*. Pero é evidente que non sempre poden tomar todos os valores da recta real. Por exemplo, se unha función nos dá a altura con respecto do peso non imos poder ter valores negativos. Para iso existen os conceptos de dominio e percorrido.

O **dominio** dunha función é o conxunto de valores que a variable independente (*x*) pode tomar. Escríbese *Dom f* ou *Dom* (*f*).

O **percorrido ou rango** dunha función é o conxunto de valores que a variable dependente (*y*) pode tomar. Escríbese *Rgf* ou *Rg* (*f*).

Normalmente, o percorrido é máis directo de calcular. Simplemente, miramos a gráfica e vemos que valores pode tomar a variable dependente (*y*).

O dominio soe ser un asunto bastante máis complicado. En xeral, existen dúas razóns polas que un valor de *x* non pertenza ao dominio.

1. A función non ten sentido para eses valores. Por exemplo, se temos unha función que represente o consumo de electricidade a cada hora do día, é evidente que *x* debe estar entre 0 e 24. Un día ten 24 horas!! De ningunha maneira podemos falar sequera do que gastamos na hora 25.

2. A operación que nos dá *f*(*x*) non pode facerse. Por exemplo, non se pode dividir entre 0, polo que a función $f(x)=\frac{1}{x}$ ten como dominio o conxunto $\{x \in \Re; x \neq 0\}$, é dicir $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

O primeiro caso vén dado pola aplicación práctica e o noso sentido común. O segundo é o que ten máis dificultade e por iso imos dedicarlle un pouco máis de tempo.

Cálculo de dominios

Existen dúas operacións que non están permitidas.

a. Dividir entre 0.

b. Facer raíces cadradas ou de índice par de números negativos. Ten en conta que a raíz cadrada de 0 SI está definida (vale 0).

En capítulos futuros veremos algunha operación máis pero, por agora, só esas dúas operacións. Imos ver un método sistemático para calcular o dominio.

Método para calcular o dominio

1. Enmarca TODAS as operacións problemáticas.
2. Para TODAS esas operacións, formula unha ecuación igualándoa a 0. Resolve esta ecuación.
3. Representa nunha recta todas as solucións de todas as ecuacións.
4. Dá valores á función. Un valor en cada intervalo e os valores límite. Se a operación se pode facer, é que o punto ou o intervalo pertence ao dominio. Se non, pois non. Podes ver se unha operación vale, ou non, facéndoa coa calculadora. Se sae erro, é que non se pode. Marca cun X os valores que non valen e cun tick (V) se se poden facer.
5. Representa a solución con intervalos. Se o punto do extremo está, é un corchete como [] e se non, unha paréntese.

Así visto, pode parecer un pouco complicado. Imos ver un par de exemplos.

Actividades resoltas

- *Calcula o dominio das seguintes funcións:*

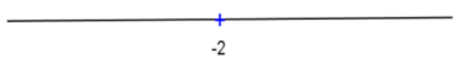
  a. $x+\sqrt{2x+4}$

  b. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

Apartado a

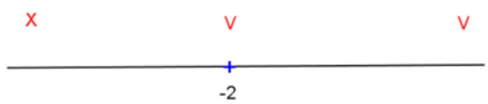
Imos seguir o procedemento punto por punto.

1. O único posible problema é a raíz cadrada de $2x+4$
2. Igualamos a 0 e resolvemos: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$



3. Representamos na recta os valores.
4. Temos que dar un valor á esquerda de –2, o valor –2 e un valor á dereita. Por exemplo, o –3, o –2 e o 0. Marcámolos na recta

X	–3	–2	0
É válido?	NON	SI	SI



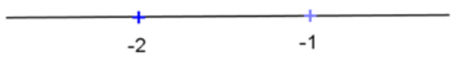
5. O dominio é $[-2,+\infty)$ (o infinito SEMPRE é aberto, nunca chegamos).

Apartado b

1. Temos dous posibles problemas. A raíz cadrada de $x+2$ e o denominador $\sqrt{x+2}-1$.
2. Temos que igualar os DOUS a cero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Por outra parte $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevando ao cadrado $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representamos na recta os valores.



4. Temos que dar un valor á esquerda de –2, o valor –2; un valor entre –2 e –1, o valor –1 e un valor á dereita de –1. Por exemplo, o –3, o –2, o –1.5, o –1 e o 0. Marcámolos na recta

X	–3	–2	–1.5	–1	0
É válido?	NON	SI	SI	NON	SI

5. O dominio é $[-2,-1) \cup (-1,+\infty)$.

Actividades propostas

5. Indica o dominio das seguintes funcións:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ **b)** $\sqrt{x+\dfrac{1}{x+2}}$

6. Indica o dominio e o percorrido das seguintes funcións:

a) $y = 14x + 2$ **b)** $y=\dfrac{1}{x-1}$ **c)** $y=\sqrt{2+x}$

7. Representa as seguintes funcións e indica o seu dominio e percorrido:

a) $f(x)=\begin{cases} x, \text{ se } x\in[-3,0) \\ 2, \text{ se } x\in[0,2] \end{cases}$ **b)** $g(x)=\begin{cases} -x, \text{ se } x\in[-2,1] \\ x, \text{ se } x\in(1,2] \end{cases}$

2. CARACTERÍSTICAS DUNHA FUNCIÓN

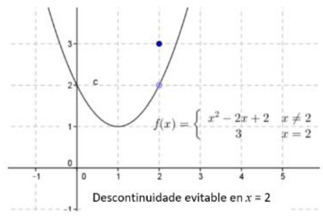
Recorda que: En terceiro xa estudiaches as características dunha función. É moi importante. Por iso imos insistir nisto.

2.1. Continuidade

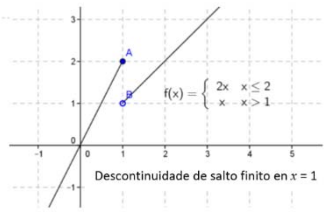
Intuitivamente, unha función é continua se a súa gráfica se pode debuxar sen levantar o lapis do papel. En caso contrario, prodúcense "saltos" en determinados valores da variable independente que reciben o nome de descontinuidades.

Unha descontinuidade pode ser de tres tipos:

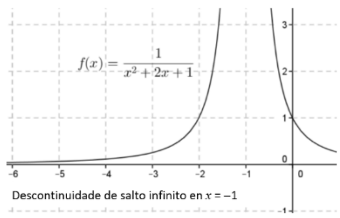
1. **Evitable**: Na función só "falla" un punto, que "non está onde debería estar". Máis formalmente, se nos aproximamos ao punto pola dereita e pola esquerda, aproximámonos a un valor que non é o da función. Neste caso, a función sería continua sen máis que cambiar a definición da función no punto que nos dá problemas.



2. **De salto finito:** Nun punto, a función ten dúas ramas diferentes a dereita e a esquerda do punto. Estas ramas aproxímanse a valores distintos (pero finitos) para cada lado. O punto de descontinuidade pode estar nunha calquera das ramas ou mesmo fóra delas. Dá o mesmo, a descontinuidade segue sendo de salto finito.

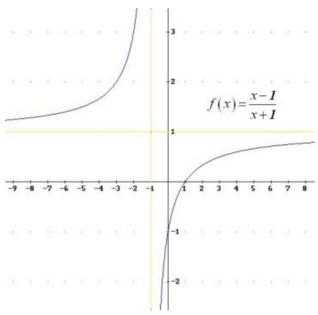


3. **De salto infinito:** Como no salto finito, nun punto a función ten dúas ramas diferentes. Pero neste caso, polo menos unha das dúas ramas (posiblemente as dúas) faise inmensamente grande ou inmensamente negativa (en termos máis informais "vaise a infinito").

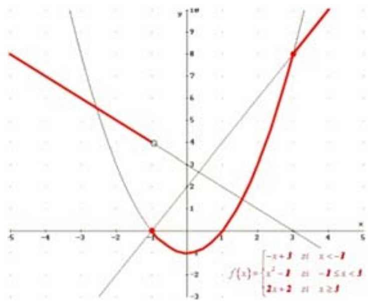


Actividades resoltas

- *Indica nestas funcións o/os valor/es da variable independente onde se produce a descontinuidade e indica o tipo de descontinuidade.*



Salto infinito en x = –1



Salto finito en x = –1

2.2. Monotonía: Crecemento e decrecemento, máximos e mínimos

As seguintes definicións quizais che resulten coñecidas de 3º de ESO.

Unha función é **constante** nun intervalo cando tome o valor que tome a variable independente, a dependente toma sempre o mesmo valor. En símbolos, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 e x_2.

Unha función é **estritamente crecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente aumenta tamén o da dependente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 e x_2.

Unha función é **crecente (en sentido amplo)** nun intervalo se é estritamente crecente ou constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo x_1 e x_2. Pode tamén dicirse que, ao aumentar o valor da variable independente, o valor da dependente non diminúe.

Unha función é **estritamente decrecente** nun intervalo cando ao aumentar o valor da variable independente diminúe tamén o da dependente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 e x_2.

Unha función é **decrecente (en sentido amplo)** nun intervalo se é estritamente decrecente ou constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, para todo x_1 e x_2. Pode tamén dicirse que, ao aumentar o valor da variable independente, o valor da dependente non aumenta.

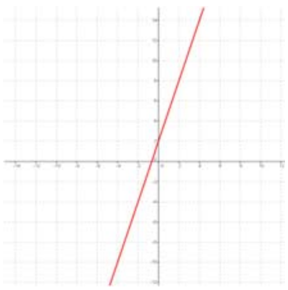
Unha función é **estritamente monótona** nun intervalo cando é estritamente crecente ou decrecente nese intervalo.

Unha función é **monótona (en sentido amplo)** nun intervalo cando é crecente ou decrecente (en sentido amplo) nese intervalo.

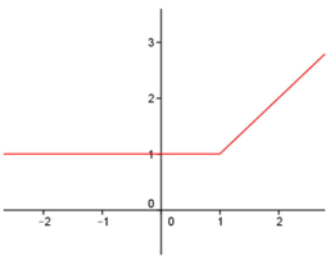
Como indican as definicións, a monotonía ou non dunha función dáse nun intervalo, é dicir, para un conxunto de números reais. Polo tanto, unha función pode ser crecente para unha serie de valores, para outros ser decrecente ou constante, logo pode volver ser crecente ou decrecente ou constante…

Exemplos:

- *Nas funcións seguintes estuda o crecemento e o decrecemento.*



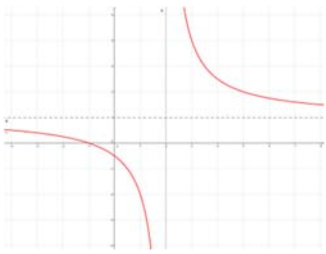
CRECENTE sempre



CONSTANTE ata x = 1

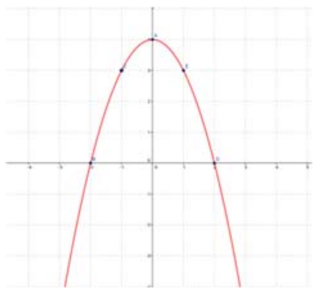
CRECENTE desde x = 1

CRECENTE (EN SENTIDO AMPLO) sempre



DECRECENTE ata x = 2

DECRECENTE desde x = 2



CRECENTE ata x = 0

DECRECENTE desde x = 0

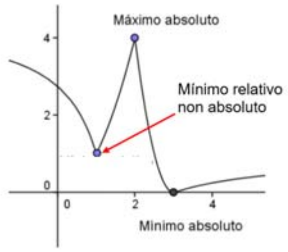
Extremos: máximos e mínimos

Unha función presenta un **máximo relativo** nun punto cando a imaxe da función nese punto é maior que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, a imaxe é maior que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **máximo absoluto** nel.

Unha función presenta un **mínimo relativo** nun punto cando a imaxe da función nese punto é menor que en calquera dos valores que están ao seu arredor (no seu *entorno*). Se, ademais, a imaxe é menor que en calquera outro punto da función, dise que a función acada un **mínimo absoluto** nel.

Se unha función presenta un máximo ou un mínimo nun punto, dise que ten un **extremo** nese punto, que poderá ser relativo ou absoluto.

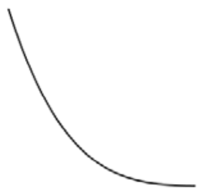
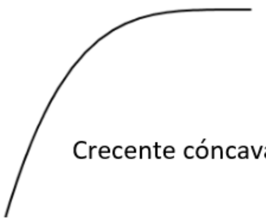
Exemplo:



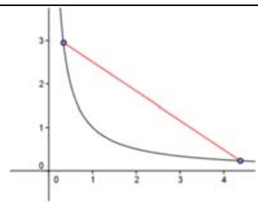
2.3. Curvatura: concavidade, convexidade e puntos de inflexión

Unha función é **convexa** se ao unir dous puntos da súa gráfica o segmento queda por enriba desta gráfica. Dise **cóncava** se ao facer a mesma operación queda por debaixo. Un punto onde se cambia de cóncava a convexa ou viceversa chámase **punto de inflexión**.

Unha imaxe vale máis que mil palabras. Así que imos debuxar os catro tipos de funcións que temos:

	Crecente	**Decrecente**
Convexa	 Crecente convexa	 Decrecente convexa
Cóncava	 Crecente cóncava	 Decrecente cóncava

Podes comprobar facilmente que se cumpre a definición. Se unes dous puntos, o segmento que forman está por enriba ou por debaixo da gráfica, segundo corresponde. Aquí á dereita podes ver un exemplo cun tramo decrecente e convexo. Observa como o segmento queda por enriba da gráfica da función.



2.4. Simetrías

Unha **función par é** aquela na que se obtén o mesmo ao substituír un número e o seu oposto:

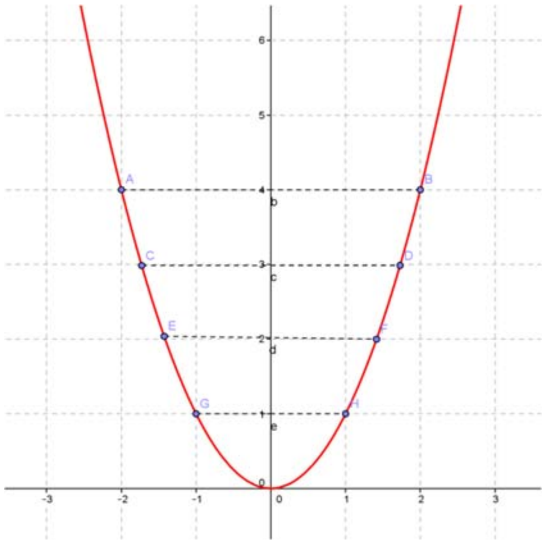
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é simétrica respecto ao eixe de ordenadas, é dicir, se dobramos o papel por este eixe, a gráfica da función coincide en ambos os lados.

Exemplo:

- *A función cuadrática* $f(x) = x^2$ *é par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Unha **función impar** é aquela na que se obtén o oposto ao substituír un número e o seu oposto:

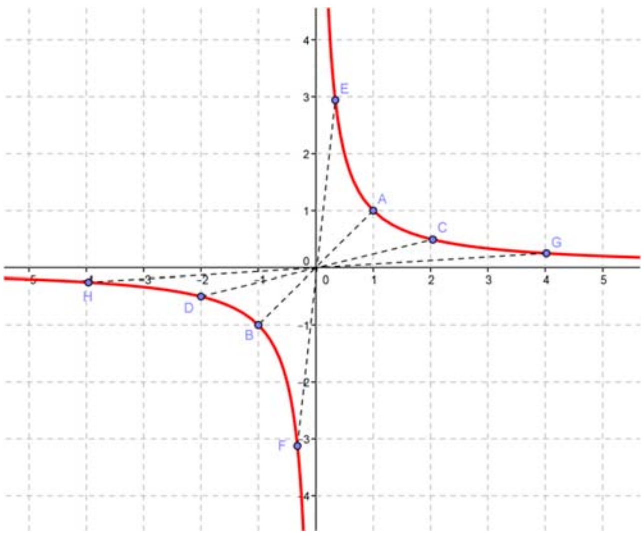
$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedade tradúcese en que a función é simétrica respecto á orixe de coordenadas, é dicir, se trazamos un segmento que parte de calquera punto da gráfica e pasa pola orixe de coordenadas, ao prolongalo cara ao outro lado encontraremos outro punto da gráfica á mesma distancia.

Exemplo:

A función de proporcionalidade inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ é impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

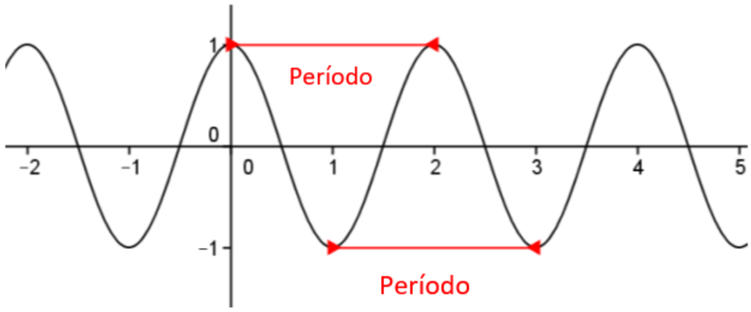


2.5. Periodicidade

Unha **función periódica é** aquela na que as imaxes da función se repiten conforme se lle engade á variable independente unha cantidade fixa chamada *período.*

Exemplo:

É moi claro que a seguinte función é periódica de período 2. Observa que o período se pode medir entre dous "picos" ou entre dous "vales". De feito pódese medir entre dous puntos equivalentes calquera.



2.6. Comportamento no infinito

O infinito é, por propia definición, inacadable. Pero dinos moito dunha función saber como é para valores moi grandes. Por iso se recomenda, ao debuxar unha gráfica, dar un valor (ou varios) positivo moi grande e un valor (ou varios) moi negativo.

Nalgunhas funcións simplemente ocorre que obtemos valores moi grandes e "nos saímos da táboa". Isto simplemente dános unha idea de cara a onde vai a función.

Pero noutras, e isto é o interesante, aproximámonos a un número finito. Iso significa que, para valores moi grandes de *x*, a función é aproximadamente unha recta horizontal. Esta recta chámase **asíntota**.

Actividade resolta

- *Debuxa a función* $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ *dando valores moi grandes e moi negativos.*

  Damos valores moi grandes e vemos que nos aproximamos a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1.0099,\ f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1.0001,\ f(1\,000)=\frac{1\,000^2+2}{1\,000^2+1}=1.000001$$

  Se damos valores moi negativos, pasa o mesmo:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1.0099,\ f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1.0001,$$

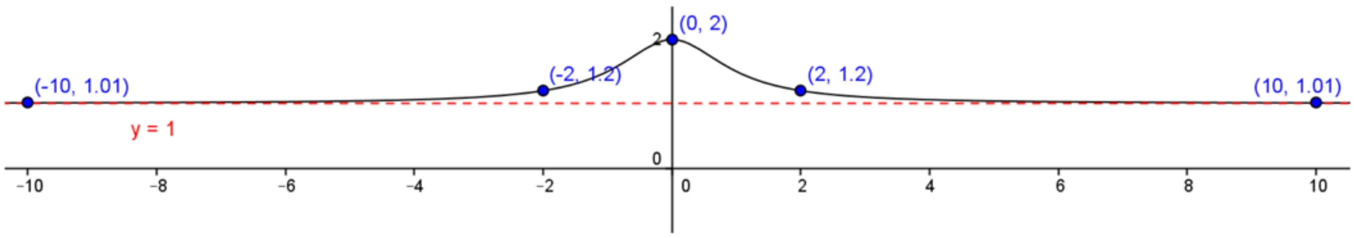
$$f(-1\,000)=\frac{(-1\,000)^2+2}{(-1\,000)^2+1}=1.000001$$

  Poderiamos ter visto directamente que os valores ían ser os mesmos porque a función é claramente par $f(-x)=f(x)$ e, polo tanto, $f(-10)=f(10)$, $f(-100)=f(100)$, etc.

  Iso dános unha idea de que a recta á que nos aproximamos (asíntota) é a recta horizontal *y* = 1.

Imos dar uns valores máis e debuxamos a función. Os valores negativos son iguais que os positivos. Redondeamos 1.0099 a 1.01

x	–10	–2	0	2	10
y	1.01	1.2	2	1.2	1.01



Observa a liña horizontal que é a asíntota debuxada en vermello a trazos.

2.7. Recompilatorio

Imos repasar o que vimos ata agora e como utilizalo para as dúas cuestións máis importantes deste capítulo.

Como debuxar unha función

Debuxar unha función é esencialmente unir puntos. Imos, de todas maneiras, a repasar os diferentes casos.

1. Primeiramente miramos se a función está definida por unha táboa ou por unha expresión. Se é unha táboa non hai nada que facer máis que debuxar e (se teñen sentido os valores intermedios) unir os puntos que nos dean e rematamos. Pasamos nese caso ao paso 2.
2. Se está definida por pedazos, damos o punto ou puntos onde cambia a definición e algúns puntos próximos. Tipicamente o punto crítico +0.1 e –0.1. Por exemplo, se cambia en 1, dariamos 1, 0.9 e 1.1.
3. En xeral, intentamos dar un valor moi grande e outro negativo, moi grande en valor absoluto. Se vemos que se estabiliza, poñémolos, é unha asíntota.
4. Damos dous ou tres puntos máis calquera.
5. Unimos os puntos (se teñen sentido os valores intermedios).

Actividades propostas

8. Indica o dominio e percorrido das seguintes funcións e debúxaas:

a. $\dfrac{1}{2x+6}$ b. $x+\dfrac{1}{3x-6}$ c. x^3-3x

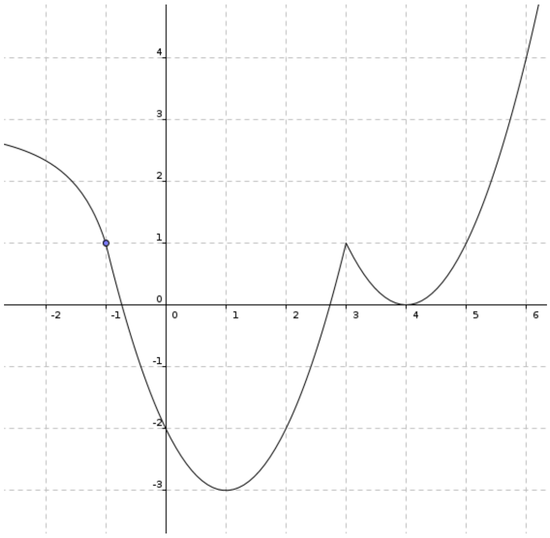
Como describir unha función

Se nos dan a gráfica dunha función e nos piden describila, é sinxelo:

1. Miramos os valores de *x* onde cambia o comportamento.
2. Describimos cada un dos tramos.
3. Describimos os máximos e mínimos indicando se son relativos ou absolutos.

Actividade resolta

- *Describir a función*



O primeiro, a función é continua. Os puntos onde "pasa algo" son $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 4$. Pasamos describir os tramos:

En $(-\infty, -1)$ decrecente cóncavo. En $(-1, 1)$ decrecente convexo. En $(1, 3)$ crecente convexo. No intervalo $(3, 4)$ decrecente convexo. En $(4, +\infty)$ crecente convexo.

Ás veces póñense separados o crecemento e a curvatura:

Crecente en $(1, 3) \cup (4, +\infty)$

Decrecente en $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

Cóncava en $(-\infty, -1)$. Convexa en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Finalmente hai un máximo relativo en $x = 3$. Hai mínimos relativos en $x = 1$ e $x = 4$. Non hai máximo absoluto e en $x = 1$ hai un mínimo absoluto.

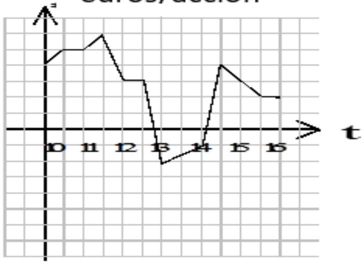
Non hai asíntotas. Cando *x* se fai moi grande, o y tende a $+\infty$, e cando o *x* se achega a $-\infty$ o e tende tamén a $+\infty$.

Actividades propostas

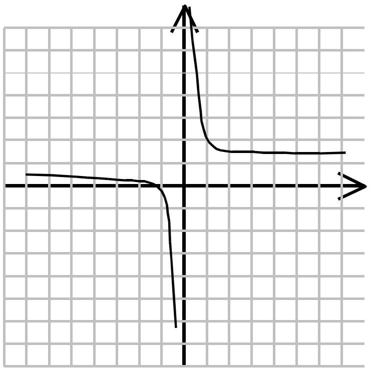
9. Debuxa as seguintes funcións e indica os seus intervalos de crecemento e decrecemento.

a) $y = x^3$ **b)** $y = x^5$ **c)** $y = \dfrac{1}{x^2}$

10. A gráfica que se dá a continuación indica a evolución dun valor da bolsa (no eixe vertical en miles de euros por acción) durante unha xornada. Estuda o seu dominio, percorrido, puntos de corte, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.



11. Estuda a seguinte gráfica, indicando: dominio, percorrido, puntos de corte cos eixes, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.



12. A gráfica que se dá a continuación representa o volume de combustible no depósito dunha gasolineira ao cabo dun día. Estuda o seu dominio, percorrido, puntos de corte, simetría, periodicidade, crecemento, continuidade, máximos e mínimos.

2.8. Ampliación: Translacións

Co que vimos anteriormente, xa podemos debuxar calquera función. O que imos describir agora é unha maneira de aforrar traballo nalgunhas ocasións.

Ás veces, debuxamos unha función e pídennos debuxar outra similar. Por exemplo, se estudamos un corpo en caída libre, o espazo percorrido é $y = \frac{1}{2}9.8x^2$. Pero, se o corpo xa percorrera un espazo de 10 m, sería $y = 10 + \frac{1}{2}9.8x^2$. Se a quixeramos debuxar, en principio deberiamos volver dar todos os valores. Pero, non poderemos evitarnos esforzos e aproveitar a gráfica que xa temos?

Si, podemos. Imos velo agora.

Translacións verticais.

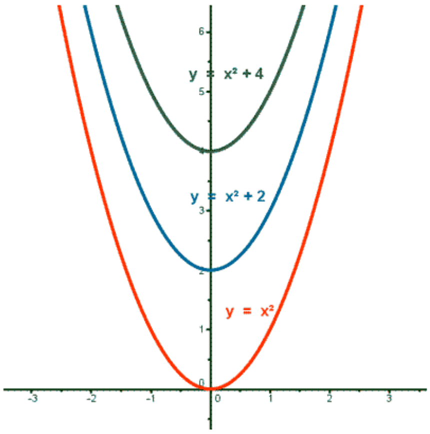
Trasladar verticalmente K unidades unha función *f*(*x*) é sumarlle á variable dependente *y* = *f*(*x*) a constante K. Noutras palabras, movemos a función cara arriba ou cara abaixo.

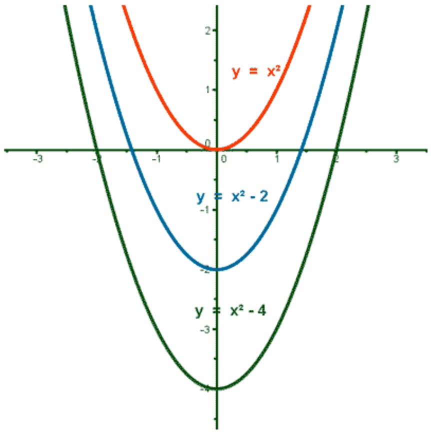
Obtense a función: ***y* = *f*(*x*) + K**

- se K > 0, a función trasládase **cara arriba**.
- se K < 0, a función trasládase **cara abaixo**.

Exemplo:

Representa, mediante a realización previa dunha táboa de valores, a función $f(x) = x^2$. A continuación, mediante translación, as das funcións $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 4$, $f(x) = x^2 - 2$ e $f(x) = x^2 - 4$.





Translacións horizontais.

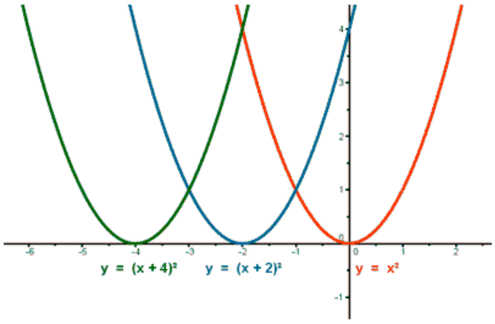
Trasladar horizontalmente K unidades unha función *f*(*x*) é sumarlle á variable independente *x* a constante K.

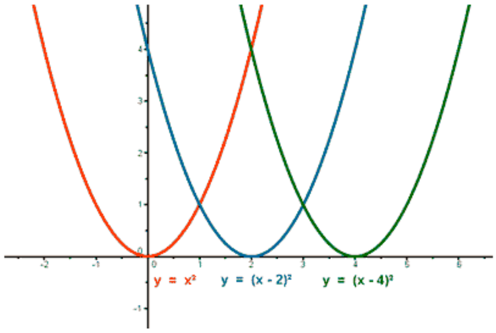
Obtense a función *y* = *f*(*x* + K)

- se K > 0, a función trasládase **cara á esquerda**.
- se K < 0, a función trasládase **cara á dereita.**

Exemplo:

- *Representa as funcións* $f(x)=x^2$, $f(x)=(x+2)^2$, $f(x)=(x+4)^2$, $f(x)=(x-2)^2$ *e* $f(x)=(x-4)^2$.





Actividades propostas

13. Representa a función $y = 10 + \frac{1}{2}9.8x^2$ que poñiamos como exemplo e interpreta o seu sentido físico.

14. Representa graficamente as seguintes funcións:

a) $y=x^2+2$ b. $y=2-x^2$ c. $y=2x^2$ d. $y=-2x^2$

15. Representa graficamente as seguintes funcións:

a) $y=\frac{1}{x}+5$ b. $y=\frac{5}{x}$ c. $y=\frac{1}{x}-2$ d. $y=\frac{2}{x}+3$

16. Representa a función $f(x) = 4 - x^2$ e, a partir dela, debuxa as gráficas das funcións:

a. $y = f(x) - 3$ b. $y = f(x) + 3$ c. $y = f(x-3)$ d. $y = f(x+3)$

3. VALORES ASOCIADOS ÁS FUNCIÓNS

Moitas veces, interésanos o comportamento dunha función nun valor concreto e algunha medida sobre ela. Por exemplo, se consideramos o espazo que percorre un coche, o que nos pode interesar non é todo o percorrido, senón só a velocidades ao pasar xunto a un radar. As medidas máis importantes imos describilas agora.

3.1. Taxa de variación e taxa de variación media (velocidades)

A **taxa de variación** dunha función entre dous puntos *a* e *b* é a diferenza entre o valor da función para *x* = *a* e o valor para *x* = *b*. En símbolos:

$$\boldsymbol{TV[a,b] = f(b) - f(a)}$$

A **taxa de variación media** (**velocidade media**) dunha función entre dous puntos *a* e *b* é o cociente entre a taxa de variación entre os mesmos e a diferenza *a e b*. En símbolos:

$$\boldsymbol{TVM[a,b] = \frac{TV[a,b]}{b-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Estes conceptos poden parecerche raros ao principio pero realmente son cousas que se aplican moito na vida diaria. Pensemos nun coche que se move. O espazo que percorre entre dous momentos de tempo é a taxa de variación. A velocidade media a que os percorreu é a taxa de variación media.

Actividade resolta

- *O coche no que circulamos percorre 100 Km a 50 Km/h e logo outros 100 Km a 100 Km/h. En consecuencia, o espazo percorrido vén dado pola función* $f(t) = \begin{cases} 50t, & t \le 2 \\ 100 + 100(t-2), & t > 2 \end{cases}$. *Pídese:*

1. Xustificar a función que dá o espazo percorrido.
2. Calcular e interpretar as taxas de variación TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2.5, 3].
3. Calcular e interpretar as taxas de variación medias TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2.5, 3].
4. Por que a velocidade media non foron 75 Km/h, que é a media das velocidades?

Apartado 1.

Para xustificar a función, só temos que recordar a supercoñecida fórmula $e = vt$. O único que hai que ver é cando cambia a velocidade.

Se o coche vai a 50 km/h, obviamente en 2 h chega aos 100 km e cambia a velocidade. Ata entón, o espazo percorrido é 50*t* (velocidade por tempo). A partir de aí, sería 100(*t*–2) posto que contamos o tempo desde o instante 2. A iso débeselle sumar o espazo xa percorrido, que son 100.

Apartado 2. A taxa de variación non é máis que o espazo percorrido. Basta con aplicar a definición. Como xa dixemos antes, non nos teñen que dar ningún medo as funcións definidas por pedazos. Simplemente substituímos onde corresponda e punto.

$TV[0,3] = f(3) - f(0) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - 50 \cdot 0 = 200$. Entre 0 e 3 horas percorremos 200 Km.

$TV[1,2] = f(2) - f(1) = 50 \cdot 2 - 50 \cdot 1 = 50$. Entre 1 e 2 horas percorremos 50 Km.

$TV[2.5,\ 3] = f(3) - f(2.5) = [100 + 100 \cdot (3-2)] - [100 + 100 \cdot (2.5-2)] = 100 \cdot (3-2.5) = 50$. Percorremos 50 Km entre as 2.5 horas e as 3.

Apartado 3. A taxa de variación media é o que na linguaxe da rúa se chama velocidade (media). E para calculala divídese o espazo entre o tempo, sen máis.

$TVM[0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-2} = \frac{[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0}{3-0} = 66.67$ Km/h. Entre 0 e 3 horas a nosa velocidade media foi de 66.67 Km/h, unha media (axustada polo tempo) das velocidades.

$TVM[1,2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{50}{2-1} = 50$. Entre 1 e 2 horas a nosa velocidade foi de 50 Km/h, como formulaba de feito o problema.

$TVM[2.5,3] = \frac{f(3)-f(2.5)}{3-2.5} = \frac{50}{3-2.5} = 100$. Entre 2.5 e 3 horas a nosa velocidade foi, como era de agardar, de 100 Km/h

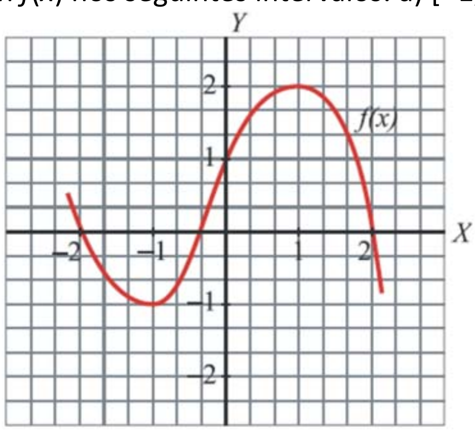
Apartado 4. Pois porque pasamos máis tempo circulando a 50 Km/h que a 100 Km/h e polo tanto a nosa velocidade media debe estar máis preto de 50 que de 100.

Actividades propostas

17. Dada a función $f(x) = (x-1)^3$, calcula a taxa de variación media no intervalo [0, 1]. É crecente ou decrecente a función nese intervalo?

18. Dada a función $f(x) = \frac{3}{x}$, calcula a taxa de variación media no intervalo [–3, –1]. É crecente ou decrecente a función nese intervalo?

19. Calcula a TVM desta función *f*(*x*) nos seguintes intervalos: a) [–1, 0] e b) [1, 2].



20. Consideremos a función $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Calcula a taxa de variación media no intervalo [0, 2] e indica se é crecente ou decrecente nese intervalo.

21. Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = 2x^2 - 3x$ no intervalo [1, 2] e indica se *f*(*x*) crece ou decrece nese intervalo.

3.2. Taxa de crecemento

"… a afiliación ao Réxime Xeral da Seguridade Social, onde hai 13.1 millóns de traballadores, apenas ascendeu en 16 852 persoas respecto a febreiro do 2013, un 0.13 % máis" (Diario *El Mundo*, edición dixital, 04/03/2014).

Seguro que liches (ou viches na tele) noticias como esta un montón de veces. A medida que están utilizando é o que se coñece como a taxa de crecemento. Imos definila.

A **taxa de crecemento** dunha función entre dous puntos a e b é o cociente entre a taxa de variación e o valor da función en $x = a$. En símbolos: $T_{Crec}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)}$ ou ben $T_{Crec}[a,b] = \frac{TV[a,b]}{f(a)}$.

Sóese expresar en tanto por cento, polo que normalmente se multiplica por 100. As fórmulas pasan ser entón $T_{Crec}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100$ ou $T_{Crec}[a,b] = \frac{TV[a,b]}{f(a)} \cdot 100$

Se $f(a)$ = 0 a taxa de crecemento non **está definida**. NON SE PODE DIVIDIR ENTRE 0.

Observa que a taxa de crecemento pode ser negativa, indicando unha diminución. Crecer ao –5 % significa ter perdido o 5 %.

Exemplo:

- *Imos comprobar que no xornal calcularon ben a taxa de crecemento.*

Os momentos do tempo non son importantes. No momento inicial é $f(a) = 13\,100\,000$ traballadores. No momento final hai que sumarlle o aumento $f(b) = 13\,100\,000 + 16\,852$ = 13 116 852.

Aplicando a fórmula

$$T_{Crec}[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \cdot 100 = \frac{13\,116\,852 - 13\,100\,000}{13\,100\,000} \cdot 100 = 0.1286\%$$

que se redondea ao 0.13 %. Está ben calculado.

Observa que a taxa de variación é 16 852 polo que a podiamos ter calculado directamente coa outra fórmula:

$$T_{Crec}[a,b] = \frac{TV[a,b]}{f(a)} \cdot 100 = \frac{16\,852}{13\,100\,000} \cdot 100 = 0.1286\ \%$$

e, obviamente, sae o mesmo.

Actividades propostas

22. Dada a función $f(x) = (x+1)^3$, calcula a taxa de crecemento no intervalo [0, 1].

23. A función $f(x) = 1\,000 \cdot (1.03)^x$ representa o resultado de ingresar 1 000 € no banco (x = 0 é o estado inicial e, naturalmente, vale 1 000 €). Calcula a súa taxa de crecemento entre 0 e 1, entre 1 e 2 e entre 2 e 3. Que relación hai entre elas? Podes dar unha explicación de por que?

24. A seguinte táboa representa a poboación mundial (estimada) en millóns de persoas. Calcula a taxa de crecemento para cada intervalo de 5 anos. Que observas?

Ano	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Poboación	3 692	4 068	4 435	4 831	5 264	5 674	6 071	6 456	6 916

25. Poderías dar un exemplo dunha función cuxa taxa de crecemento sexa constantemente 2?

CURIOSIDADES. REVISTA

Di o premio Nobel de 1963 EUGENE WIGNER:

"A enorme utilidade das Matemáticas nas ciencias naturais é algo que roza o misterioso e non hai explicación para iso. Non é en absoluto natural que existan "leis da natureza" e moito menos que o ser humano sexa capaz de descubrilas. O milagro do apropiada que resulta a linguaxe das Matemáticas para a formulación de leis da Física é un regalo maravilloso que non comprendemos nin nos merecemos".

As funcións utilizáronse para facer modelos matemáticos das situacións reais máis diversas. Antes da época dos ordenadores as funcións que soían utilizarse eran as funcións lineais (que xa coñeces pero que estudarás detidamente no próximo capítulo). *Linealizábanse* os fenómenos. Ao usar outras funcións, como por exemplo parábolas poden complicarse moito as cousas. Mesmo pode aparecer o caos.

Sabes que é o caos?

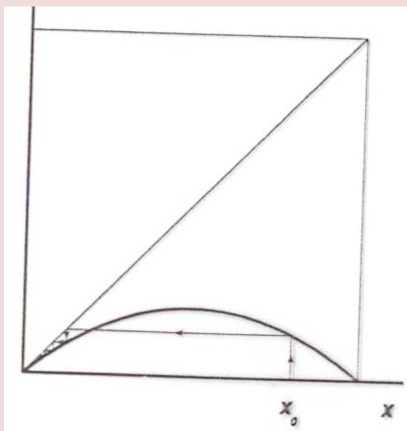
Imos estudar un exemplo no que aparece o caos: a **ecuación loxística**. É un modelo matemático proposto por *P. F. Verhulst* en 1845 para o estudo da dinámica dunha poboación. Explica o crecemento dunha especie que se reproduce nun entorno pechado sen ningún tipo de influencia externa. Considéranse valores x entre 0 e 1 da poboación.

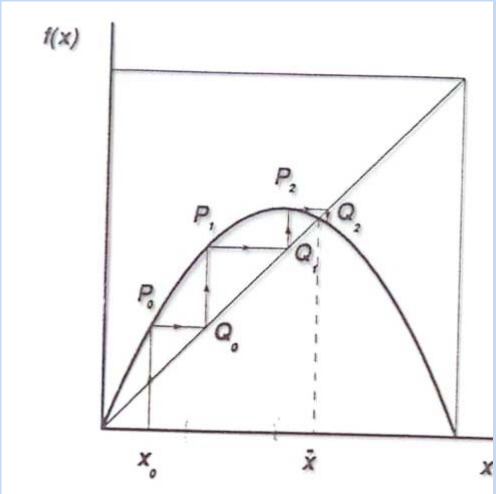
$$y = r(x(1 - x))$$

Se quedamos co primeiro termo, $y = rx$ sería un modelo lineal, e indica o crecemento da poboación, pero ten un termo de segundo grao que fai que sexa un polinomio de segundo grao. Se nalgún momento $y = x$ a poboación manterase sempre estable para ese valor. Por exemplo, se $x = 0$ entón $y = 0$, e sempre haberá unha poboación de tamaño 0. Estes valores que fan que $y = x$ denomínanse **puntos fixos**.

O comportamento é distinto segundo os valores que tome r. Por exemplo, para $r < 1$, extínguese a especie.

Debuxamos a parábola para $r = 0.9$. Imaxinamos que no instante inicial hai unha poboación x_0. Buscamos, cortando verticalmente á parábola, o valor de y. Para transformalo no novo x, cortamos a diagonal do primeiro cuadrante. Observa que a poboación cada vez é menor e que vai cara á extinción. Observa con coidado ese proceso de ir cortando á parábola e á diagonal, para volver cortar a parábola e así sucesivamente.





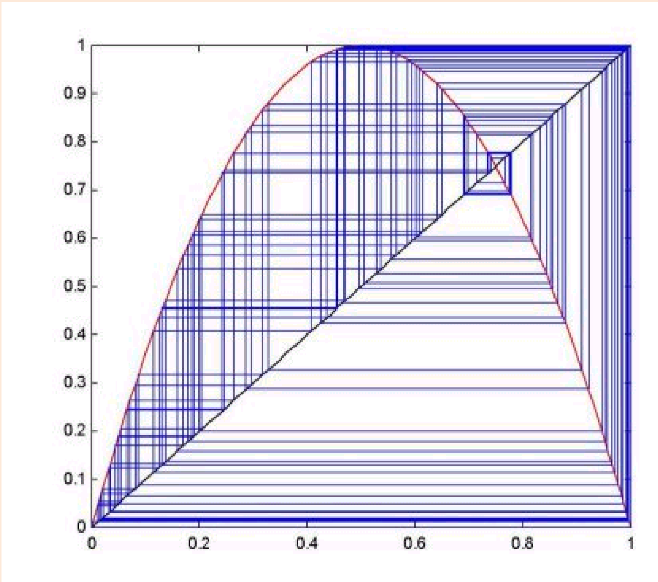
Para valores de r comprendidos entre 1 e 3: $1 < r < 3$, entón a poboación estabilízase, tende a un punto fixo.

Debuxamos a parábola para $r = 2.5$, e igual que antes partimos dun valor inicial calquera, neste caso x_0, que se converte en e = P_0. Ese valor tomámolo como abscisa: $x = Q_0$, e calculamos o novo valor de e = P_1… Observa como a poboación se estabiliza cara ao valor de intersección da parábola coa diagonal.

Para valores entre 3 e 3.56994546 as cousas empiezan a complicarse, ata que …

Para r maior ou igual a 3.56994546 temos sensibilidade extrema ás condicións iniciais, temos **caos**.

Non sabemos que pode ocorrer. A poboación flutúa constantemente. E ese comportamento tan errático é debido a unha función polinómica de segundo grao!



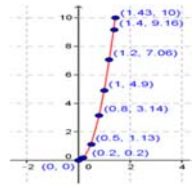
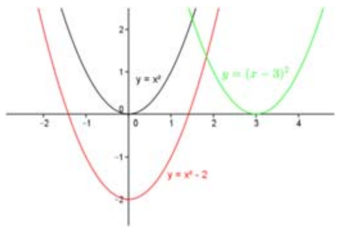
O termo **caótico** vai indicar que puntos próximos no instante inicial poden ter comportamentos dispares no futuro.

O meteorólogo americano *Edward N. Lorenz* utilizou o termo de **efecto bolboreta** para explicar porque o tempo atmosférico non é predicible a longo plazo, é dicir para explicar que existía unha dependencia sensible ás condicións iniciais: *"O **aletexo dunha bolboreta** no Brasil, podería provocar un tornado en Texas?"*

Oíralo?

Este é un exemplo de caos debuxado co ordenador. Hai 5 órbitas ben definidas, pero un punto da fronteira entre órbitas non sabemos en cal terminará.

RESUMO

<table>
<tr><th>Noción</th><th>Definición</th><th>Exemplos</th></tr>
<tr><td>Función</td><td>Unha relación ou correspondencia entre dúas magnitudes, tales que a cada valor da variable independente, x, lle corresponde un só valor da dependente, y.</td><td>$y = 2x + 3$, $y = \frac{1}{x^2+1}$</td></tr>
<tr><td>Gráfica dunha función</td><td>Son os (normalmente infinitos) puntos polos que pasa. É dicir, todos os valores $(x, f(x))$ posto que $y = f(x)$.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Maneiras de describir unha función</td><td>- Dando unha táboa de valores. Como na columna do lado.
- Dando unha expresión. $y = 2^x$
- A anacos: Varias expresións. $y = \begin{cases} x+1, x>2 \\ x, \ x \le 2 \end{cases}$</td><td><table><tr><th>X</th><th>Y</th></tr><tr><td>–3</td><td>2</td></tr><tr><td>–2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Dominio e percorrido</td><td>- Dominio. Son os valores de “x” onde a función teña sentido.
- Percorrido. Son os valores de “y” que se acadan.</td><td>O dominio da función $\sqrt{2-x}$ é (–∞, 2] e o seu percorrido $[0, +\infty)$.</td></tr>
<tr><td>Características dunha función</td><td>Debemos estudar a súa continuidade, crecemento, máximos e mínimos, curvatura, simetrías e comportamento no infinito.</td><td>$y = x^2 + 2$ é continua, crecente en $(-\infty, 0)$, decrecente en $(0, \infty)$, ten un mínimo absoluto en 0 e é sempre convexa.</td></tr>
<tr><td>Translacións</td><td>- Vertical. y = f(x) + K. En sentido de K: se K é positivo cara arriba, se non cara abaixo.
- Horizontal. y = f(x + K). En sentido contrario de K: se K é positivo cara á esquerda, se non cara á dereita.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Valores asociados</td><td>- Taxa de variación (TV): $f(b) - f(a)$
- Taxa de variación media (TVM): $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- Taxa de crecemento T_{crec}: $\frac{f(b)-f(a)}{f(a)}$</td><td>$y = x + 2$
$TV[3,5] = 2$
$TVM[3,5] = \frac{2}{5-3} = 1$
$T_{crec}[3,5] = \frac{2}{5} = 40\%$</td></tr>
</table>

Autores: Andrés García e Javier Sánchez
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisores: Javier Rodrigo, José Gallegos e Fernanda Ramos
Ilustracións: Andrés García e Javier Sánchez

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Paulo saíu da súa casa ás 8 da mañá para ir ao instituto. No recreo, tivo que volver á casa para ir co seu pai ao médico. A seguinte gráfica reflicte a situación. As distancias veñen dadas en metros, (non en km).

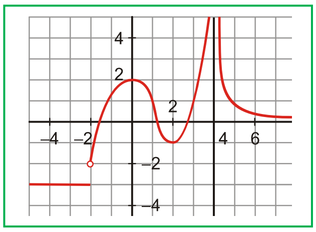
a. A que hora comezan as clases e a que hora empeza o recreo?
b. A que distancia da súa casa está o instituto? Que velocidade leva cando vai a clase?
c. A que distancia da súa casa está o consultorio médico? Que velocidade levan cando se dirixen alí?
d. Canto tempo estivo na clase? E no consultorio médico?

2. Dada a función a través da seguinte gráfica:

a) Indica cal é o seu dominio de definición.

b) É continua? Se non o é, indica os puntos de descontinuidade.

c) Cales son os intervalos de crecemento e cales os de decrecemento da función? Que ocorre no intervalo $(-\infty,-2]$?



3. Debuxa as gráficas destas hipérboles e determina os seus dominios, calcula as súas asíntotas e os puntos de corte cos eixes de coordenadas:

a. $y=\dfrac{2x}{x-2}$ b. $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ c. $y=\dfrac{4x}{2x+1}$

4. Debuxa a gráfica de $f(x)=\begin{cases}1-x & si \quad x\le 1\\ x^2-4x & si \quad 1<x\end{cases}$ e explica se é continua en $x=1$.

5. Tres quilos de peras custáronnos 4.5 €; e, por sete quilos, teriamos pagado 10.5 €. Encontra a ecuación da recta que nos dá o prezo total, "y", en función dos quilos que compremos, "x". Represéntaa graficamente.

6. Describe as seguintes funcións cuadráticas e fai un bosquexo da súa gráfica:

a. e = $4x^2 + 8x - 5$ b. $y = x^2 + 3x - 4$ c. $y = 8 - 2x - x^2$

7. Calcula os puntos de corte cos eixes e o vértice das seguintes parábolas e utiliza estes datos para representalas graficamente

a. $y = x^2 + 5x + 6$ b. $y = -x^2 + 4x + 5$

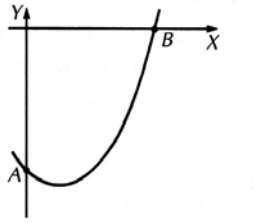
8. A altura sobre o chan dun proxectil lanzado desde o alto dunha muralla vén dada, en función do tempo, por $h(t) = -5t^2 + 15t + 20$, onde t se expresa en segundos, e h, en metros. Debuxa a gráfica desta función e calcula:

a. A altura da muralla.

b. A altura máxima acadada polo proxectil e o tempo que tarda en acadala.

c. O tempo que tarda en impactar contra o chan.

9. A gráfica amosa o debuxo aproximado da curva $y = x^2 - 2x - 8$. Calcula:



a. As coordenadas dos puntos A e B.

b. A ecuación dunha recta que pase polos puntos A e B.

10. Representa as seguintes funcións:

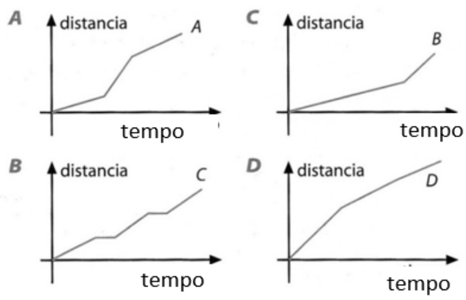
a. $y = 3/x$ b. $y = 4/x - 5$ c. $y = \sqrt{x+4}$

d. $y = \sqrt{x-2}$ e. $y = \begin{cases} x+3 & si \quad x < -1 \\ 2 & si \quad -1 \le x < 4 \\ x^2 - 10 & si \quad 4 \le x \end{cases}$

11. O custe diario de fabricación, en euros, de *x* artigos exprésase coa igualdade $C = 40x + 250$, e o ingreso diario da súa venda, mediante $V = -2x^2 + 100x$. Que cantidade de artigos se deben fabricar ao día para que a súa venda reporte un beneficio máximo? *Nota*: o beneficio é a diferenza entre o ingreso e o custe.

12. A base e a altura dun triángulo suman 4 centímetros. Que lonxitude deben ter ambas as dúas para que a área do triángulo sexa máxima?

13. Asigna as gráficas ao percorrido efectuado polos seguintes estudantes no seu camiño diario ao Instituto:



a) Emilio é o que vive máis lonxe do Instituto.

b) Ana debe recoller a dúas amigas polo camiño e sempre lle toca esperar.

c) Filipe é o que menos tempo tarda.

d) Isabel é durmiñona; sempre lle toca correr no último tramo, aínda que é a que vive máis preto do Instituto.

14. Un rectángulo ten un perímetro de 14 cm. Supoñendo que a base do mesmo ten unha lonxitude de *x* cm,

a. Probar que a área do mesmo *A* está dada pola función $A(x) = x(7 - x)$.

b. Debuxa a gráfica correspondente a esta función, tomando para iso valores de *x* de 0 a 7. Utilizando a gráfica, calcula os seguintes apartados.

c. A área do rectángulo cando $x = 2.25\ cm$.

d. As dimensións do rectángulo cando a súa área é 9 cm^2.

e. A área máxima do rectángulo.

f. As dimensións do rectángulo correspondentes a esa área máxima.

15. A velocidade *v* en m/s dun mísil *t* segundos despois do seu lanzamento vén dada pola ecuación $v = 54t - 2t^3$.Utilizando a gráfica desta función, calcula:

a. A máxima velocidade que acada o mísil.

b. O tempo que necesita para acelerar ata conseguir unha velocidade de 52 m/s.

c. O intervalo (aproximado, resolve graficamente) de tempo no cal o mísil voa a máis de 100 m/s.

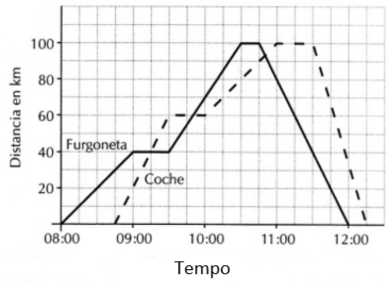
16. O prezo da viaxe de fin de curso dun grupo de alumnos é de 200 euros por persoa se van 30 alumnos ou menos. En cambio, se viaxan máis de 30 e menos de 40, rebaixan un 5% por cada alumno que exceda o número de 30, e se viaxan 40 ou máis, o prezo por persoa é de 100 euros. Calcula a expresión e debuxa a gráfica da función que fai corresponder ao número de viaxeiros o prezo da viaxe.

17. Calcula o dominio das seguintes funcións:

a. $y = \frac{5x-3}{4x-1}$ c. $y = \sqrt{3x+6}$ e. $y = \frac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

b. $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$ d. $y = 2 - \frac{3}{x^2-3x}$ f. $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$

18. A seguinte gráfica amosa as viaxes feitas por unha furgoneta e un coche saíndo desde Teruel cara á poboación de Alcañiz, ida e volta.



a) Canto tempo se detivo a furgoneta durante o traxecto?
b) A que hora adiantou o coche á furgoneta?
c) Que velocidade levaba a furgoneta entre as 9:30 e as 10:00?
d) Cal foi a maior velocidade acadada polo coche durante a viaxe?
e) Cal foi a velocidade media do coche na viaxe completa?

19. Representa graficamente a seguinte función: $f(x) = \begin{cases} x+4 & si\, x < -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 & si -2 \leq x \end{cases}$. Unha vez representada estuda as zonas de crecemento-decrecemento, os extremos (máximos-mínimos) e a súa continuidade.

20. Representa graficamente unha función, f, que cumpra as seguintes condicións:

a. Dom (f) = [–5, 6]
b. Crece nos intervalos (–5, –3) e (0, 6); decrece no intervalo (–3, 0).
c. É continua no seu dominio.
d. Corta ao eixe X nos puntos (–5, 0), (–1, 0) e (4, 0).
e. Ten un mínimo en (0, –2) e máximos en (–3, 3) e (6, 3).

21. Constrúe unha gráfica que represente a audiencia dunha determinada cadea de televisión durante un día, sabendo que:

a. Ás 0 horas había, aproximadamente, 0.5 millóns de espectadores.
b. Este número se mantivo practicamente igual ata as 6 da mañá.
c. Ás 7 da mañá acadou a cifra de 1.5 millóns de espectadores.
d. A audiencia descendeu de novo ata que, ás 13 horas, había 1 millón de espectadores.
e. Foi aumentando ata as 21 horas, momento no que acadou o máximo: 6.5 millóns de espectadores.
f. A partir dese momento, a audiencia foi descendendo ata as 0 horas, que volve haber, aproximadamente, 0.5 millóns de espectadores.

AUTOAVALIACIÓN

1. Indica cal das seguintes expresións alxébricas é unha función real:

a) $x^2 + y^2 = 1$ b) $y = -2x^5 + x^4 - x^3 + 5x - 1$ c) $y = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ d) $y^2 = x + 1$

2. Estamos confeccionando unha táboa de valores da función $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Indica que punto (ou puntos) non debería estar na táboa:

a) (0, 1) b) (1/2, 2) c) (2, 1/5) d) (1, 0)

3. O dominio da función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é:

a) a recta real b) $\{x \in \Re \mid x < 1\}$ c) $\{x \in \Re \mid x \geq 1\}$ d) $\{x \in \Re \mid x \geq 0\}$

4. Indica que tipo de descontinuidade ou continuidade presenta a función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ no punto $x = 1$:

a) é continua b) Ten unha descontinuidade evitable

c) Ten un salto finito de tamaño 2 d) Ten un salto infinito

5. Sinala a función que ten simetría par:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$

6. Sinala a función que ten como asíntota horizontal á recta $y = 0$:

a) $y = x$ b) $y = x^2 + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$

7. A taxa de variación da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) TV[–1, 2] = 1 b) TV[–1, 2] = 2 c) TV[–1, 2] = 3 d) TV[–1, 2] = 0

8. A taxa de variación media da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) TV[–1, 2] = 1/3 b) TV[–1, 2] = 2/3 c) TV[–1, 2] = 1 d) TV[–1, 2] = 3

9. A taxa de crecemento da función $f(x) = \begin{cases} -x, & si\ x \in [-2, 1] \\ x, & si\ x \in (1, 2] \end{cases}$ entre –1 e 2 é igual a:

a) T_{crec} [–1, 2] = 3 b) T_{crec} [–1, 2] = 2 c) T_{crec} [–1, 2] =0 d) T_{crec} [–1, 2] = 1

10. A función e = x^2 + 3 ten un mínimo absoluto no punto:

a) (1, 4) b) (0, 0) c) (0, 3) d) (3, 0)

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 11
Funcións polinómicas, definidas a anacos e de proporcionalidade inversa

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda Suárez
Revisora: María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez
Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

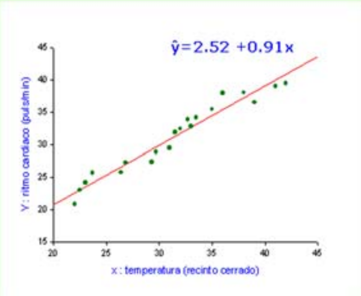
Resumo

Na nosa vida diaria facemos uso continuamente das relacións de proporcionalidade, como cando imos comprar calquera produto ao supermercado, ou se queremos comparar dúas tarifas de luz distintas para saber cal nos convén elixir. Nestes casos, a representación gráfica facilítanos a toma de decisións. O lanzamento de obxectos a certas distancias, como tirar un papel ao lixo, encher o vaso de auga ou dar un salto: a traxectoria que describe é unha curva que recibe o nome de *parábola*.

Neste capítulo estudaremos as propiedades máis importantes das *relacións de proporcionalidade directa e inversa* e as *funcións polinómicas*, así como os seus elementos e representacións gráficas no plano cartesiano.

Comprender estas funcións é moi útil para a ciencia, xa que se utilizan para comparar datos e para saber se eses datos teñen algunha relación lineal (os datos compórtanse como unha recta) ou doutro tipo (polinómica, exponencial…).

Ao estudo destes datos e das súas curvas dedícase a estatística mediante *a análise de regresión*. Coa aproximación de datos a rectas ou curvas coñecidas, realízanse estudos e predicións, de aí a súa importancia para a vida real.



Exemplo de Recta de regresión

Antes de comezar

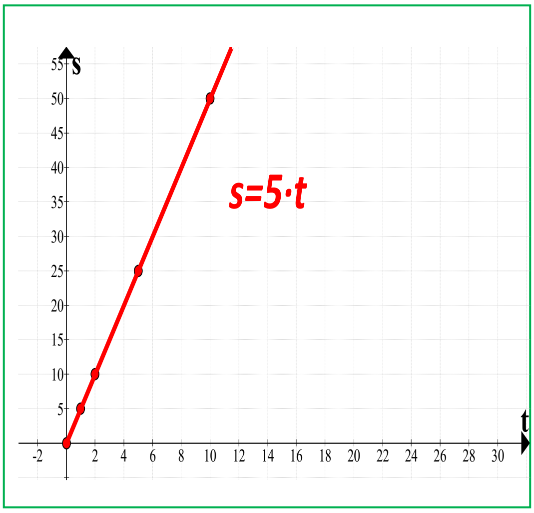
Actividades resoltas

Antes de comezar, imos representar mediante gráficas as seguintes situacións:

- *Situación 1:* A gráfica *s* - *t* dun movemento rectilíneo uniforme: o espazo percorrido, en función do tempo, por un ciclista que se despraza cunha velocidade de 5 m/s.

Ao tratarse dun movemento rectilíneo uniforme, podemos describir o espazo percorrido en función do tempo mediante a fórmula $s = v \cdot t$ onde *v* = 5 m/s.

Tempo (*t*)	Espazo (*s*)
0	0
1	5
2	10
5	25
10	50

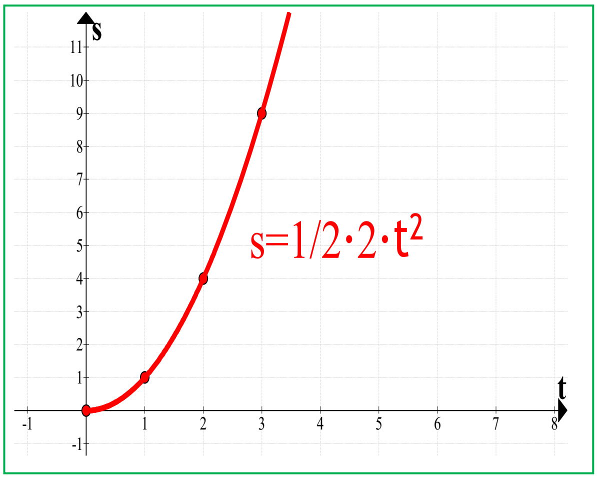


- *Situación 2*: a gráfica *v* - *t* dun movemento rectilíneo uniformemente acelerado: o espazo percorrido por un ciclista que se despraza cunha aceleración de 2 m/s².

Neste caso trátase dun movemento rectilíneo uniformemente acelerado, logo podemos describir o espazo percorrido pola fórmula $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$, onde o espazo inicial e a velocidade inicial son 0.

Representamos a función $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

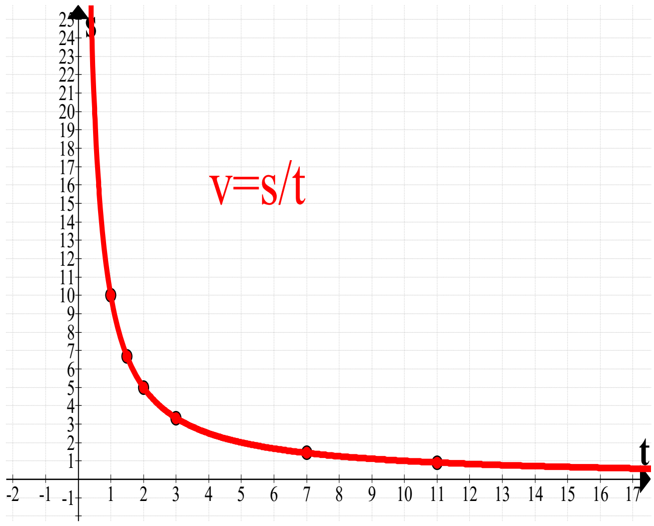
Tempo (*t*)	Espazo (*s*)
0	0
1	1
2	4
3	9



- *Situación 3*: Representamos a velocidade dun ciclista, con respecto ao tempo, cando percorre un espazo de 10 m.

O movemento que describe é un movemento rectilíneo uniforme, logo a fórmula que representamos é $v = \frac{s}{t}$, e como o espazo que percorre o ciclista é de 10 metros, $v = \frac{10}{t}$

Tempo (t)	Velocidade (v)
1	10
1.5	6.67
2	5
3	3.33
5	2
7	1.43
11	0.91



1. FUNCIÓNS POLINÓMICAS DE PRIMEIRO GRAO

1.1. Proporcionalidade directa

Recorda que dúas magnitudes son **directamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda multiplicada ou dividida polo mesmo número.

Ao realizar o cociente de calquera dous valores dunha variable e os correspondentes doutra, obtemos a **razón de proporcionalidade directa *k***.

Exemplo:

- Na situación 1, as magnitudes espazo e tempo son directamente proporcionais

Tempo (*t*)	0	1	2	5	10
Espazo (*s*)	0	5	10	25	50

e a razón de proporcionalidade é $k = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{25}{5} = \frac{50}{10} = 5$

Se observamos a súa gráfica, podemos comprobar que se trata dunha semirrecta cuxa orixe é a orixe de coordenadas. Nesta situación non é interesante considerar tempos negativos, razón pola cal a representación é unha semirrecta.

A representación gráfica no plano cartesiano de dúas **magnitudes directamente proporcionais** é unha **recta** que pasa pola orixe de coordenadas.

Pódese escribir a relación entre a magnitude A (a) e a magnitude B (b) como $b = k \cdot a$ onde k é a **razón de proporcionalidade**.

Para representar estas relacións de proporcionalidade directa, basta con situar os valores de cada magnitude no plano cartesiano e unilos mediante unha recta.

Actividades resoltas

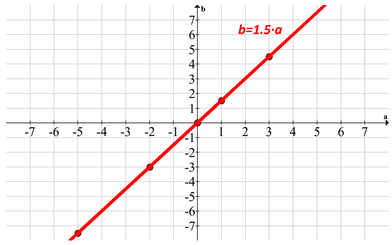
- Representa graficamente a seguinte relación de proporcionalidade dada na seguinte táboa:

Magnitude A (a)	−5	−2	0	1	3
Magnitude B (b)	−7.5	−3	0	1.5	4.5

Ao calcular a razón de proporcionalidade obtense:

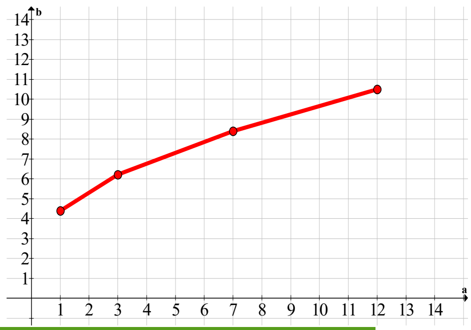
$$k = \frac{-7.5}{-5} = \frac{-3}{-2} = \frac{1.5}{1} = \frac{4.5}{3} = 1.5$$

A relación defínese así: $b = 1.5 \cdot a$



- A seguinte táboa mostra o peso dun bebé os primeiros meses de crecemento. Utilizando unha gráfica, decidir se son magnitudes directamente proporcionais.

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4.4	6.2	8.4	10.5



Ao representar os puntos no plano, obsérvase que a gráfica non é unha recta, entón **non son directamente proporcionais**.

Actividades propostas

1. O consumo medio de auga ao día por habitante (en 2011) é de 142 litros. Representa graficamente o consumo dunha persoa nunha semana.

2. A auga virtual é a auga necesaria para crear un produto. Representa graficamente as seguintes relacións:

a. 71 litros para producir unha mazá.

b. 10.850 litros para producir uns vaqueiros.

c. 4.000 litros para producir unha camisola.

1.2. Función lineal. Rectas da forma $y = m \cdot x$

A representación gráfica de dúas magnitudes directamente proporcionais é unha recta que pasa pola orixe. Logo a relación de proporcionalidade directa é unha función lineal.

Una **función lineal** é unha función polinómica de primeiro grao. A súa representación no plano cartesiano é unha recta.

Existen dous tipos de funcións lineais:

- Rectas cuxa expresión alxébrica é $\boldsymbol{y = m \cdot x}$
- Rectas cuxa función vén dada por $y = m \cdot x + n$

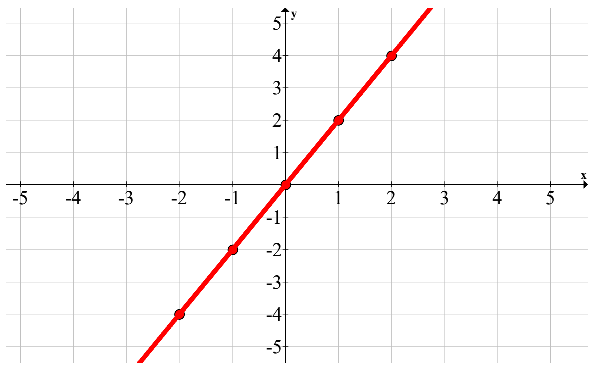
Neste apartado imos estudar as funcións lineais do primeiro tipo, é dicir, as rectas da forma $y=m \cdot x$

Exemplo:

- As proporcións represéntanse como rectas da forma $b = k \cdot a$
  - onde k é a razón de proporcionalidade, $k = \dfrac{b}{a}$
  - a e b son os valores que toman as magnitudes A e B respectivamente.
- A relación peso – custe de calquera produto é unha proporcionalidade e represéntase con rectas da forma $y = m \cdot x$.
- Moitas das relacións en física son proporcionais e represéntanse mediante rectas como espazo – tempo, peso – densidade, forza – masa, …

Actividades resoltas

- Representa a recta $y = 2 \cdot x$



Para iso, hai que construír unha táboa de valores e representar os puntos. A recta é a consecuencia de unir os puntos.

Pódese observar que a variable y se define dando valores á variable x. Por esta razón x é a variable independente (pode ser calquera valor que se lle dea) e y é a variable dependente (depende do valor do x).

Nota: para definir unha recta é suficiente con dar dous puntos dela.

As rectas $y = m \cdot x$ teñen os seguintes compoñentes:

x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–2	0	2	4

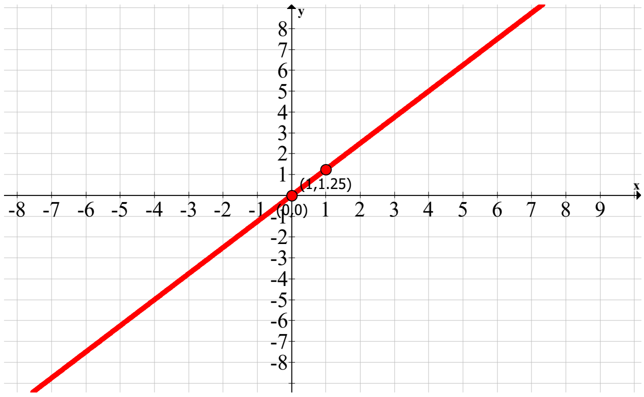
- x é a variable **independente**.
- y é a variable **dependente**.
- m é a **pendente** da recta, e é o que diferencia unha recta doutra.

As características máis importantes:

- Pasan pola orixe de coordenadas, é dicir, o punto (0, 0) pertence á recta.
- O seu dominio e o seu percorrido son todos os reais: tanto x como y aceptan calquera valor.
- Son simétricas respecto á orixe, ou o que é o mesmo, son funcións impares.

Actividades resoltas

- Estuda o dominio, máximos e mínimos e simetrías da función lineal $y = 1.25 \cdot x$



Ao tratarse dunha recta, pódese observar que o dominio son todos os reais, posto que se admite calquera valor do x .

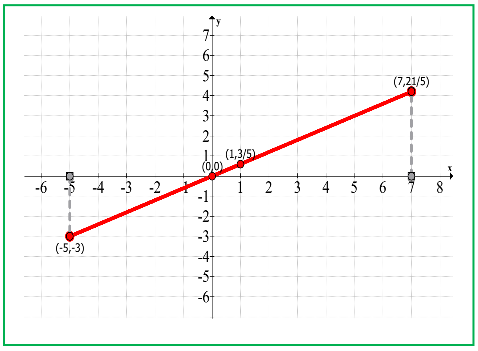
Se non se considera ningún intervalo, a recta non ten máximos nin mínimos absolutos e relativos.

Para ver a simetría, tomamos a función $y = f(x) = 1.25 \cdot x$

$$f(-x) = 1.25 \cdot (-x) = -1.25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f\ é\ impar$$

É dicir, é simétrica respecto á orixe de coordenadas.

- Estuda a función $y = \frac{3}{5} \cdot x$ no intervalo $[-5, 7]$.



O dominio é todo o intervalo [-5, 7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f\ é\ impar$, simétrica respecto á orixe.

Nos extremos do intervalo, existen mínimo (–5, –3) e máximo (7, 21.5).

Actividades propostas

3. Calcula o dominio, máximos e mínimos e a simetría das seguintes rectas:

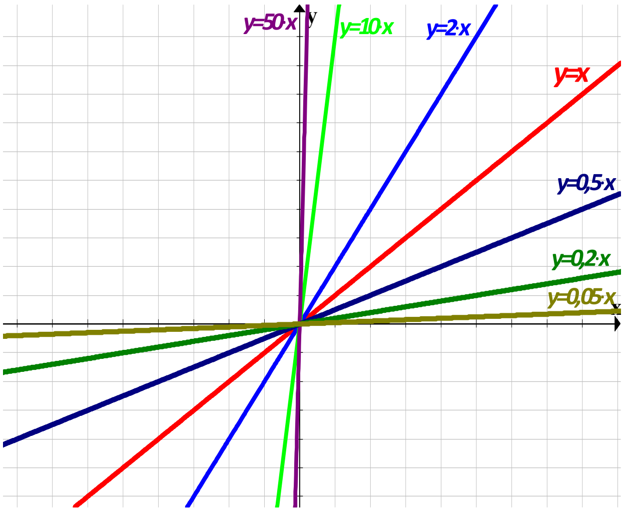
a. $y = 4 \cdot x$ b. $y = \frac{x}{3}$ c. $y = 2.65 \cdot x$

1.3. Estudo da pendente

Como vimos con anterioridade, a pendente m é o que diferencia unhas rectas doutras. Mide a inclinación da recta respecto ao eixe de abscisas.

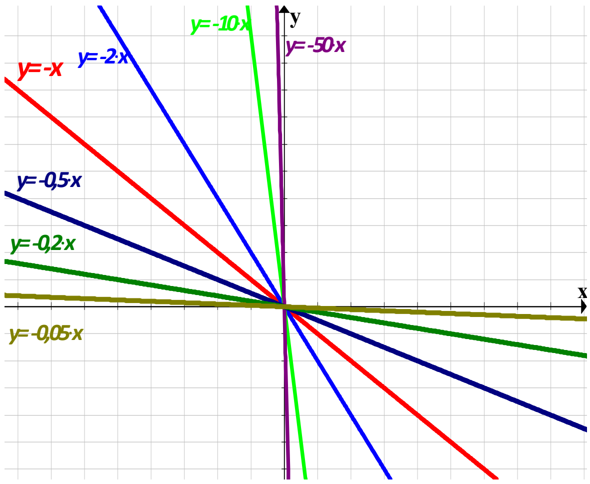
Nas relacións de proporcionalidade directa, a pendente vén dada pola razón de proporcionalidade *k*.

Observa no seguinte gráfico como varía a recta segundo imos aumentando ou diminuíndo a pendente. Partimos da recta $y = x$, onde $m=1$.



- se aumenta m , entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe y.
- se diminúe m , entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata case converterse no eixe x

Agora observa o que ocorre cando a pendente m toma valores negativos.



- se aumenta m , entón a recta faise cada vez máis horizontal, ata case converterse no eixe x .
- se diminúe m , entón a recta faise cada vez máis vertical, ata case converterse no eixe y.

Como se pode observar, ao variar a pendente a inclinación da recta tamén varia, segundo se van dando valores a m .

A pendente da recta é o valor que mide a inclinación da recta, é dicir, mide o crecemento ou decrecemento da función lineal:

- se $m > 0$, a recta é crecente.
- se $m < 0$, a recta é decrecente.

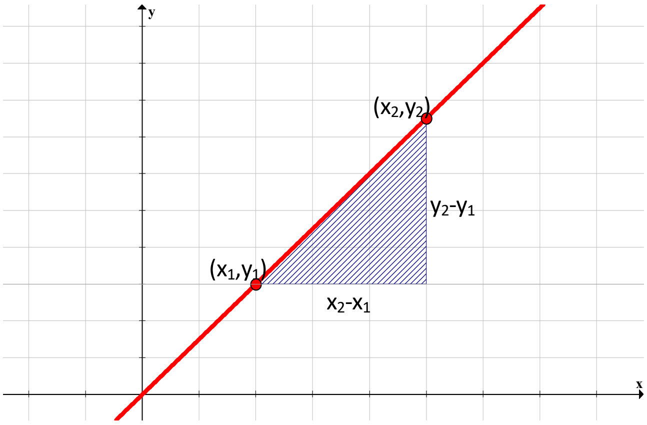
A pendente é o coeficiente que acompaña á variable independente x .

Interpretación xeométrica da pendente

A pendente da recta non só indica o crecemento e decrecemento da función, senón que tamén mide canto crece ou canto decrece. Pódese dicir que a pendente mide o crecemento da recta en función do que avanza:

- Se $m > 0$:
  - Para valores altos de m a recta crece con maior rapidez, isto é, a recta "sobe" moito e avanza pouco.
  - Para valores pequenos de m a recta crece con menos rapidez, é dicir, "sobe" pouco e avanza moito.
- Se $m < 0$:
  - Para valores altos de m a recta decrece con menos rapidez, é dicir, baixa pouco e avanza moito.
  - Para valores pequenos de m a recta decrece con maior rapidez, isto é, a recta "baixa" moito e "avanza" pouco.

Unha maneira de calcular a pendente, é dividindo o valor do que sobe a recta entre o que avanza, como se amosa no seguinte debuxo:



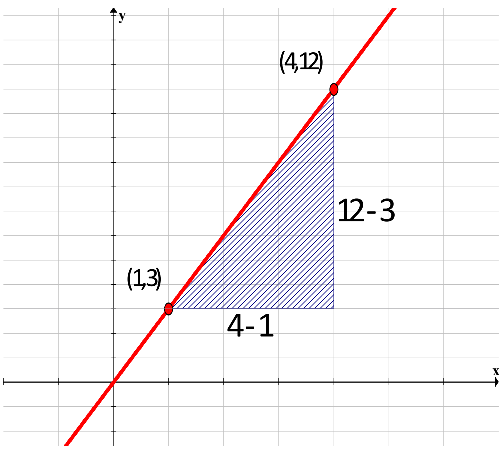
Dados dous puntos calquera da recta, a pendente calcúlase da seguinte forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

é dicir,

$$m = \frac{o\ que\ sobe}{o\ que\ avanza}$$

Exemplo:

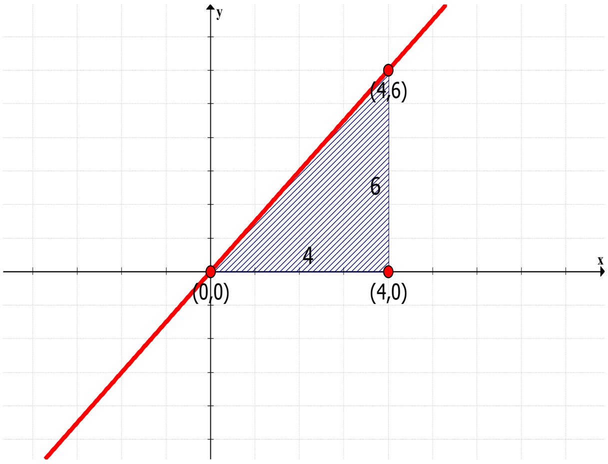


A recta sobe 12 – 3 = 9 e avanza 4 – 1 = 3, entón

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Actividades resoltas

- Calcula a pendente da seguinte recta e a súa expresión alxébrica.



Tomamos dous puntos calquera que pertenzan á recta, o (0, 0) e o (4, 6).

Neste caso a altura do triángulo sombreado indícanos o valor que sobe a recta, 6, e a base é o valor que a recta avanza, 4.

$$m = \frac{6}{4} = 1.5$$
$$y = 1.5 \cdot x$$

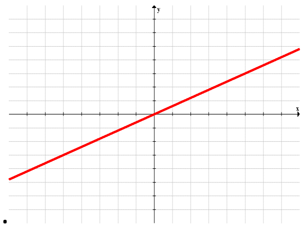
Ao dividir estes valores, obtemos a pendente e a expresión alxébrica da recta.

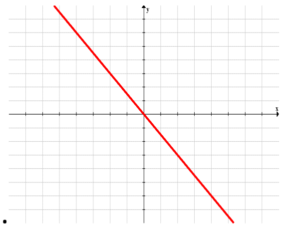
Nestes exemplos, a recta sempre sobe, é dicir, a función é crecente. Que ocorrería se a recta fose decrecente? Para non equivocarnos cos cálculos, sempre avaliamos a función de esquerda a dereita, é dicir, o primeiro punto estará máis á esquerda, será máis pequeno.

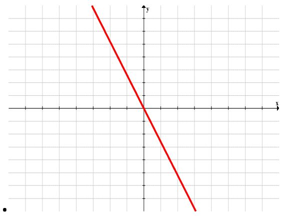
Isto é así porque a pendente mide a cantidade de crecemento (ou decrecemento) segundo a función vai aumentando ou o que é o mesmo, avanzando.

Actividades propostas

4. Calcula a pendente e a expresión alxébrica das seguintes rectas:


a.

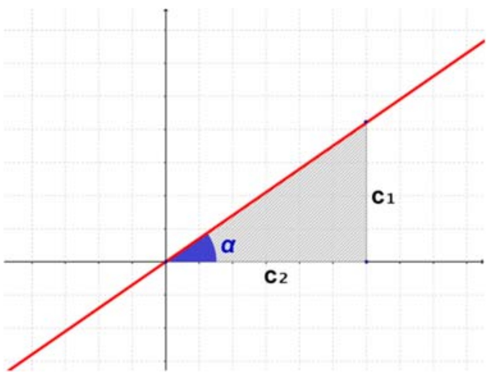

b.


c.

Outra expresión da pendente

Para calcular a pendente tómase como referencia a base e a altura do triángulo rectángulo que forman os vértices dos puntos da recta.

O cociente entre a altura e a base é a pendente. Como o triángulo construído é un triángulo rectángulo, a pendente é o cociente entre os seus dous catetos, ou o que é o mesmo, a pendente é a tanxente do ángulo que forma a recta co eixe horizontal.



$$tan\,\alpha = \frac{C_{oposto}}{C_{contiguo}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = tan\,\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

A pendente é a tanxente do ángulo que forma a recta co eixe de abscisas, é dicir, a recta coa horizontal.

1.4. Rectas da forma $y = m \cdot x + n$

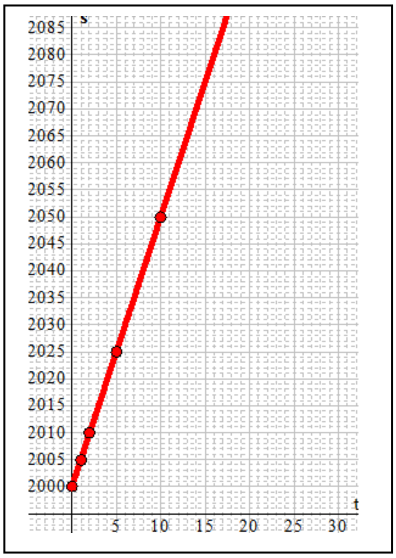
Volvemos á situación 1 ao principio do capítulo. Nese caso, queriamos calcular o espazo que percorría o ciclista. Agora supoñamos que o ciclista, antes de empezar coa súa ruta, tivo que desprazarse 2 Km ata o inicio do seu camiño.

Actividades resoltas

- *A gráfica s - t dun movemento rectilíneo uniforme*: o espazo percorrido, en función do tempo, por un ciclista que se trasladou 2 Km antes de empezar o percorrido e se despraza cunha velocidade de 5 m/s.

  Neste caso, a fórmula do MRU, como temos un espazo inicial, é $s = s_0 + v \cdot t$. Cos datos do exercicio, a expresión queda $s = 2\ 000 + 5t$.

  Construímos a nova táboa e debuxamos a gráfica:



Tempo(t)	Espazo(s)
0	2 000
1	2 005
2	2 010
5	2 025
10	2 050

  Podemos observar que tivemos que adaptar os eixes para poder pintar a gráfica xa que a recta se desprazou 2 000 posicións no eixe y.

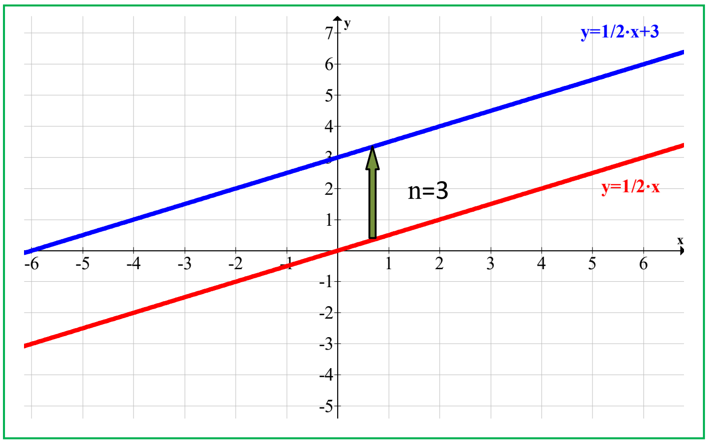
  A gráfica desta recta ten como expresión alxébrica e $= 5x + 2\ 000$, onde x corresponde ao tempo t e y ao espazo s , e 2 000 é o espazo inicial s_0.

  A **pendente** é 5 pero a recta non pasa polo punto (0, 0) senón que corta ao eixe de ordenadas no punto (2 000, 0). Dise que a **ordenada na orixe** é 2 000.

As rectas da forma $y = m \cdot x + n$ teñen a mesma pendente que as rectas $y = m \cdot x$ pero desprázanse no eixe de abscisas (eixe y) n posicións. Por esta razón, a n chámaselle **ordenada na orixe**, xa que é o valor da recta no punto de partida, é dicir, cando $x = 0$.

Exemplo:

- Comparemos a recta $y=\frac{1}{2}\cdot x$ coa recta $y=\frac{1}{2}\cdot x+3$



As dúas rectas teñen a mesma forma, é dicir, a mesma inclinación ou a mesma pendente. En ambos casos $m=\frac{1}{2}$. Son dúas rectas paralelas.

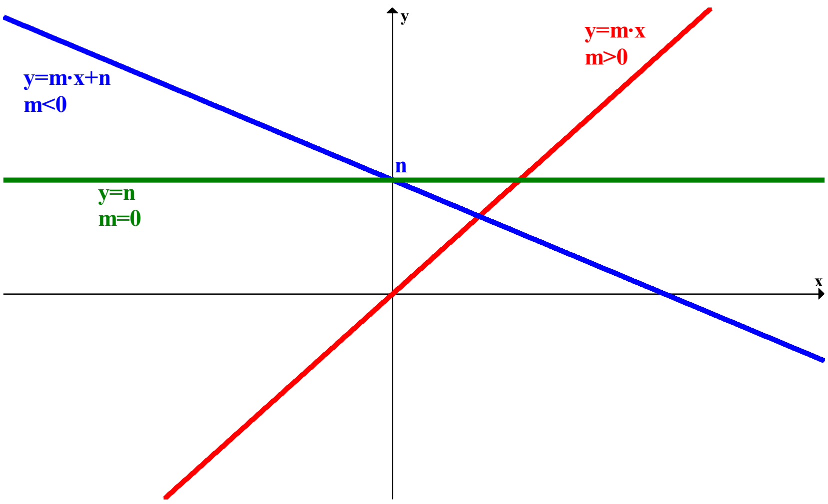
A diferenza está no valor de n : a recta $y=1/2\cdot x$ (onde $n=0$) desprazouse 3 posicións no eixe y para converterse na recta $y=\frac{1}{2}\cdot x+3$ (onde $n=3$).

As funcións polinómicas de primeiro grao, ou funcións lineais, descríbense alxebricamente da forma $y=m\cdot x+n$ e represéntanse mediante rectas.

Ademais da variable independente x , a variable dependente y, e a pendente m , engádese o valor n que é a ordenada na orixe.

A recta $y=m\cdot x+n$ é paralela á recta $y=m\cdot x$ (teñen a mesma pendente, m) desprazada verticalmente n posicións. Por esta razón, o crecemento ou decrecemento destas funcións compórtanse da mesma maneira:

- Se $m>0$, a función é **crecente**.
- Se $m<0$, a función é **decrecente**.
- Se $m=0$, a función é **constante**, nin crece nin decrece. É paralela ao eixe x , e pasa polo punto $y=n$.



Ás funcións $y=m\cdot x$ e $y=m\cdot x+n$ chámaselles **funcións lineais**, aínda que ás segundas tamén se lles llama **funcións afíns**.

Actividades propostas

5. Representa as seguintes funcións lineais:

a. $y = 3 \cdot x + 4$

b. $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$

c. $2x + \cdot 4y = 5$

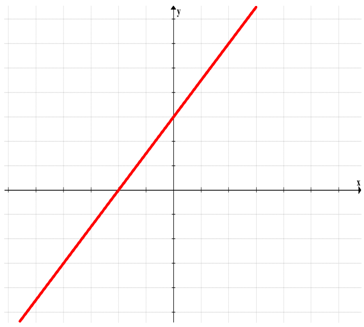
d. $y = 5$

e. $y = 0$

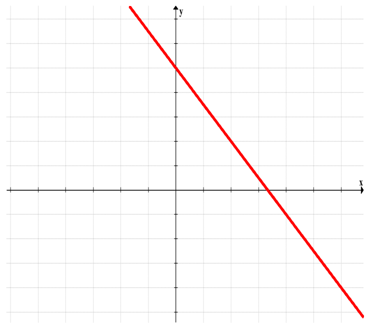
f. $y = -3$

6. Calcula a expresión das seguintes rectas:

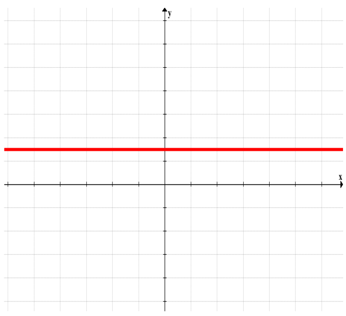
a.



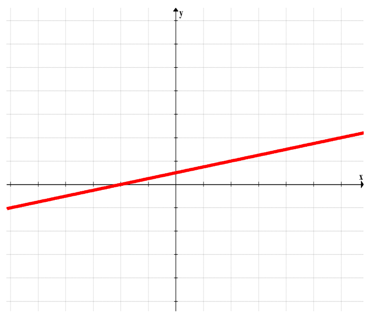
b.



c.



d.



2. FUNCIÓNS POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRAO

2.1. Funcións polinómicas de segundo grao. Parábola $y = a \cdot x^2$

No apartado anterior representamos as gráficas das funcións polinómicas de primeiro grao. Agora imos estudar a representación das funcións polinómicas de segundo grao. A gráfica deste tipo de funcións será semellante á representación da *situación 2* ao principio do capítulo.

As funcións polinómicas de segundo grao son aquelas que teñen como expresión alxébrica un polinomio de grao 2, é dicir, a súa expresión é da forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Represéntanse mediante **parábolas.**

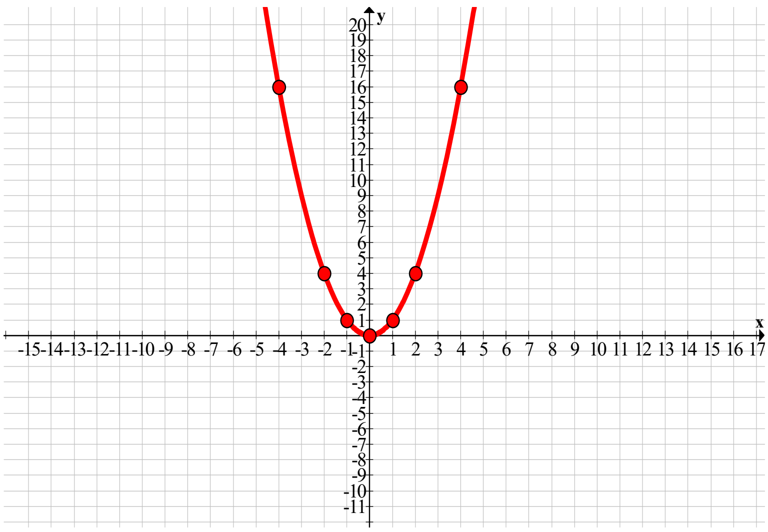
Exemplo:

- En Física, a traxectoria de moitos movementos represéntase mediante parábolas, e por iso recibe o nome de tiro parabólico: lanzar un proxectil con certo ángulo, a aterraxe dun avión nun portaavións, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Imos representar a parábola $y = x^2$. Para iso, construímos unha táboa de valores e representamos os pares de puntos no plano cartesiano.

x	*y*
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



Na táboa e na gráfica pódense observar algunhas características:

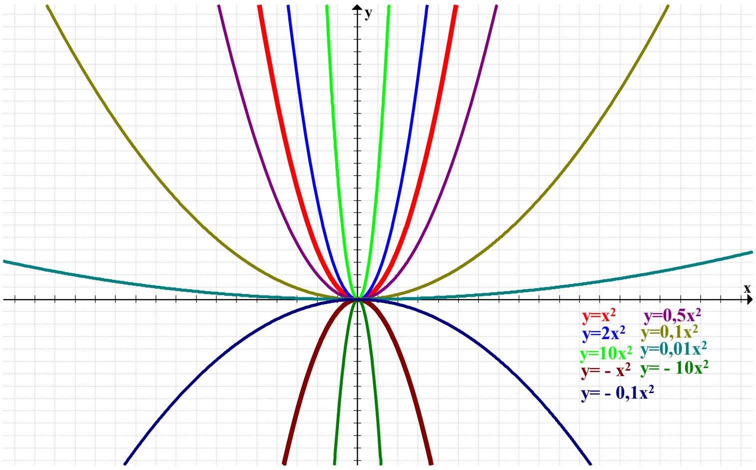
- O dominio é toda a recta real. O percorrido son os reais positivos e o cero.
- A función é continua porque non presenta saltos.
- É simétrica respecto ao eixe y, é dicir, é unha función par:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- É decrecente ata o 0, e despois crecente, logo ten un mínimo absoluto no (0, 0).

Neste caso, $a = 1$, e sabemos que se $a = -1$, a parábola ten a mesma forma, pero está aberta cara abaixo, e en vez dun mínimo, ten un máximo no (0, 0).

Vexamos o que sucede cando aumentamos ou diminuímos o coeficiente a :



- Se $a > 0$:
  - o ao aumentar a , a parábola faise máis estreita, e vaise achegando ao eixe y .
  - o ao diminuír a , a parábola faise máis ancha (plana), e vaise achegando ao eixe x .
- Se $a < 0$:
  - o ao aumentar a , a parábola faise máis ancha (plana), e vaise achegando ao eixe x .
  - o ao diminuír a , a parábola faise máis estreita e vaise achegando ao eixe y .

En xeral, as parábolas cuxa expresión alxébrica é $\boldsymbol{y = a \cdot x^2}$ teñen as seguintes características:

- Son **continuas** en todo o dominio.
- O dominio é toda a recta real.
- se $a > 0$, a parábola está aberta cara arriba, o percorrido son os reais positivos e o cero. Ten un **mínimo absoluto** no punto (0, 0).
- se $a < 0$, a parábola está aberta cara abaixo, o percorrido son os reais negativos e o cero. Ten un máximo absoluto no punto (0, 0).

A este punto chámaselle **vértice** da parábola.

- Son funcións pares, é dicir, simétricas respecto ao eixe y .

Actividades propostas

7. A partir da parábola $y = x^2$, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

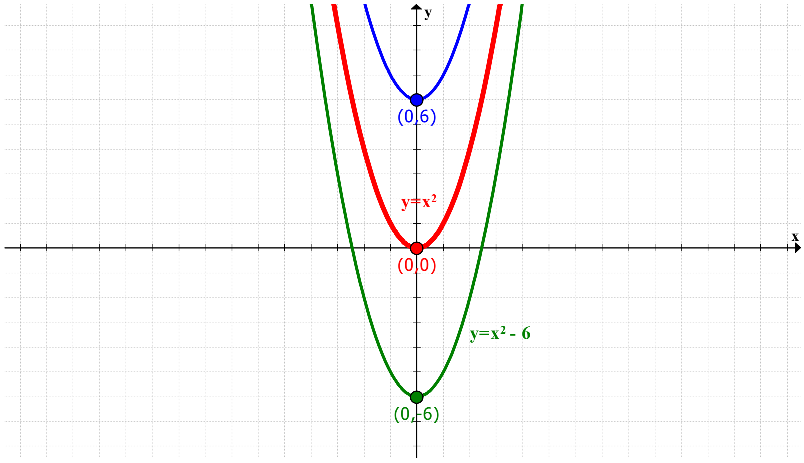
a. $y = \frac{5}{3}x^2$	b. $y = -3x^2$	c. $y = -\frac{15}{3}x^2$
d. $y = 4.12x^2$	e. $y = -\frac{6}{10}x^2$	f. $y = \frac{7}{8}x^2$

2.3. Translacións no plano

Utilizando como modelo a gráfica de $y=x^2$, pódense obter as gráficas doutras parábolas máis complexas, dependendo do tipo de desprazamento que utilicemos.

Desprazamentos verticais: translacións na dirección do eixe y : $y = x^2 + k$.

Neste caso, trátase de mover a parábola en dirección vertical, é dicir, cara arriba ou cara abaixo. Comparemos as parábolas $y=x^2+6$ e $y=x^2-6$ co noso modelo:



Pódese observar que, ao sumar 6 á parábola x^2, a gráfica é idéntica pero desprazada 6 unidades en sentido positivo no eixe y, é dicir, a parábola subiu 6 unidades. O novo vértice pasa ser o punto (0,6).

Algo parecido ocorre cando se resta 6 unidades a x^2. Neste caso a gráfica desprazouse 6 unidades en sentido negativo ata o vértice (0, –6), é dicir, baixa 6 unidades.

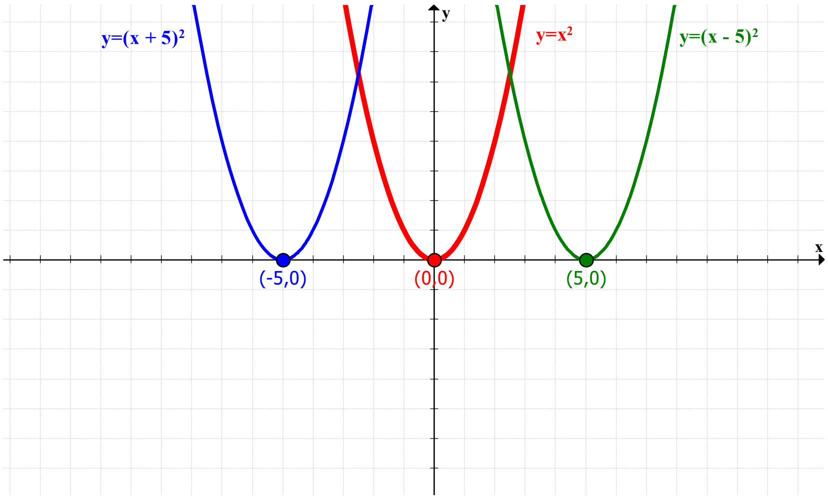
En xeral, a parábola $\boldsymbol{y=x^2+k}$ ten a mesma gráfica que $y=x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente no eixe y. Se k é positivo, a translación é cara arriba e se k é negativo, cara abaixo.

O **vértice** da parábola sitúase no punto (0, k).

Desprazamentos horizontais: translacións na dirección do eixe *x*: $y = (x - q)^2$.

Agora trasladamos a parábola en dirección horizontal. Cara á dereita ou cara á esquerda.

Comparemos as parábolas $y=(x+5)^2$ e $y=(x-5)^2$ co modelo:



Neste caso, ao aumentar a variable que se eleva ao cadrado, é dicir, sumar 5 unidades, a gráfica trasládase horizontalmente cara á esquerda 5 unidades, sendo o novo vértice o punto (–5, 0). Ao diminuír esta variable, é dicir, restar 5 unidades, a parábola desprázase cara á dereita sendo o novo vértice o punto (5, 0).

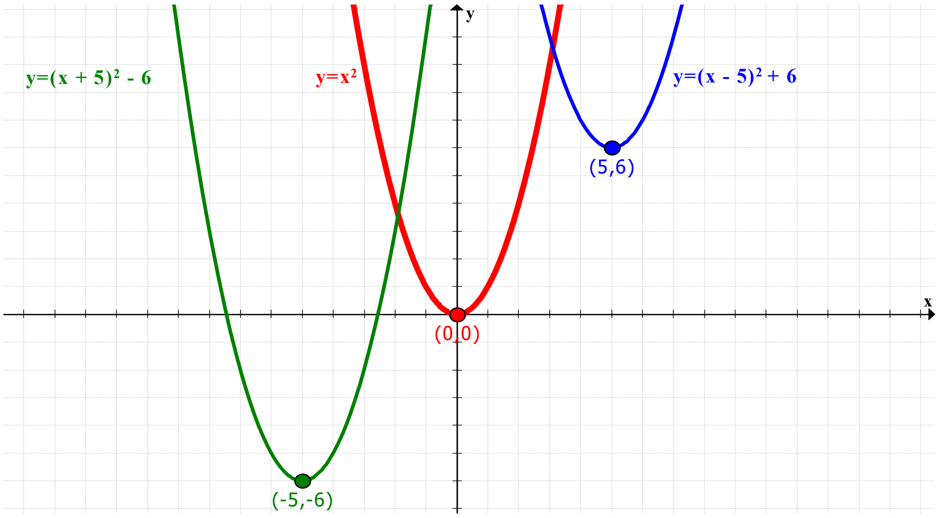
En xeral, a parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$ ten a mesma gráfica que $y=x^2$ trasladada $\boldsymbol{q}$ unidades no eixe x cara á dereita se $q > 0$ e cara á esquerda se $q < 0$.

O **vértice** da parábola sitúase no punto $(\boldsymbol{q}, \mathbf{0})$.

Desprazamentos oblicuos: translacións en ambos os eixes: $y = (x-q)^2 + k$.

O último movemento é o que combina os dous anteriores, é dicir, movemos o modelo k posicións de maneira vertical e q posicións de maneira horizontal, resultando un movemento oblicuo no plano.

Comparemos a parábola $y=(x-5)^2+6$ e $y=(x+5)^2-6$ co modelo $y=x^2$.



A parábola $y=(x-5)^2+6$ trasládase 5 unidades á dereita e 6 unidades cara arriba, mentres que a parábola $y=(x+5)^2-6$ trasládase 5 unidades cara á esquerda e 6 unidades cara abaixo.

É dicir, é a combinación dos dous movementos anteriores.

En xeral, a parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$ t na mesma gráfica que $y=x^2$ trasladádaa da seguinte forma:

$$q\ unidades \begin{cases} cara\ á\ dereita\ se\ q>0 \\ cara\ á\ esquerda\ se\ q>0 \end{cases} \quad ; \quad k\ unidades \begin{cases} cara\ arriba\ se\ k>0 \\ cara\ abaixo\ se\ k<0 \end{cases}$$

O **vértice** da parábola sitúase no punto (q, k) .

Representación de parábolas da forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabemos representar as parábolas da forma $y=(x-q)^2+k$ mediante translacións. Como podemos pintar a gráfica das parábolas cuxa expresión alxébrica é $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con converter esa expresión nunha cuxa función saibamos representar:

Actividades resoltas

- Representa a gráfica da función cuadrática $y=x^2+6\cdot x-4$

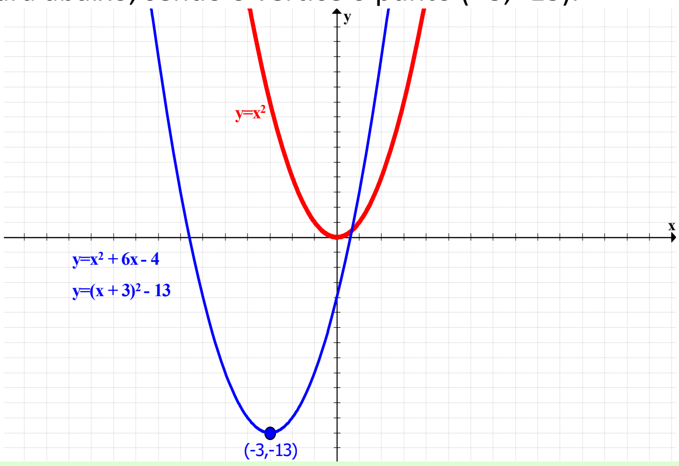
  A función vén dada da forma $y=x^2+r\cdot x+s$, e queremos convertela en $y=(x-q)^2+k$.

$$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

  Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, onde xa nos aparece x^2+6x. Agora temos que axustar o resto:

$$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K \Rightarrow K=-13 \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

  Coa parábola expresada desta maneira, basta con trasladar a gráfica de $y=x^2$, 3 unidades á esquerda e 13 unidades cara abaixo, sendo o vértice o punto (–3,–13).



En xeral, o vértice da parábola está no punto $x=\frac{-r}{2}$. A outra coordenada obtense substituíndo x na expresión da función.

Exemplo:

- No caso anterior, $y=x^2+6\cdot x-4$, o vértice está no punto (–3,–13).

Como r = 6, a primeira coordenada do vértice é $x=\frac{-r}{2}=\frac{-6}{2}=-3$. Substituíndo o valor na expresión:

$y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$

Actividades propostas

8. Representa a gráfica das seguintes parábolas e localiza o vértice:

a. $y=(x+4)^2-5$ b. $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$ c. $y=x^2-5$

d. $y=x^2-6x+16$ e. $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$ f. $y=-x^2+12x-26$

g. $y=x^2-10x+17$ h. $y=-x^2+2x-4$ i. $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

2.3. Función cuadrática. Parábolas da forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

As funcións polinómicas de segundo grao reciben o nome de **funcións cuadráticas**.

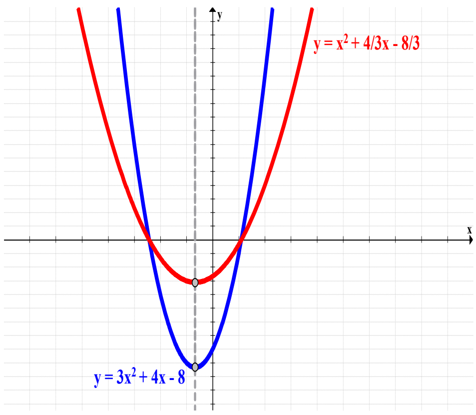
Ata agora só estudamos as funcións de tipo $y = x^2 + rx + s$, que é unha parábola aberta cara arriba, ou $y = -x^2 + rx + s$, aberta cara abaixo.

Sabemos como afecta o valor do coeficiente a na gráfica da parábola $y = a \cdot x^2$, facéndoa máis estreita ou máis ancha.

Para representar as funcións cuadráticas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ convértese esta expresión nunha máis familiar que sabemos representar:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resoltas



- Representa a parábola $y = 3x^2 + 4x - 8$:

  Convertemos a función nunha expresión máis doada de representar:

  $$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

  e comparámola con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

  $$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{16}{36} - \frac{8}{3} =$$
  $$(x + \frac{4}{6})^2 - \frac{16 + 96}{36} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{112}{36} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{28}{9}$$

  As dúas parábolas teñen o vértice no mesmo punto de abscisa, e a coordenada y queda multiplicada por 3.

  En canto á forma, a parábola é máis estreita, como se pode ver no punto 2.1.

En xeral, a representación da función cuadrática $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ pódese aproximar representando a parábola $y = x^2 + rx + s$, tendo o vértice no mesmo punto de abscisa e a forma dependerá do valor absoluto do coeficiente a, sendo máis ancha para valores grandes máis estreita para valores máis pequenos.

A orientación da parábola será:

- cara arriba se $a > 0$
- cara abaixo se $a < 0$

Elementos da parábola

Os elementos máis característicos da parábola axudan a representar a súa gráfica no plano cartesiano.

Coeficiente a:

Se $a > 0$ a parábola está aberta cara arriba.

Se $a < 0$ a parábola está aberta cara abaixo.

Vértice:

O **vértice** da parábola está no punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$:

Viramos que para a parábola da forma $y = x^2 + rx + s$, a primeira coordenada é $\frac{-r}{2}$.

A parábola no caso xeral é $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}) = a\cdot(x^2 + r\cdot x + s)$, é dicir, $r = \frac{b}{a}$,

entón a primeira coordenada do vértice é $\frac{-r}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{-b}{2a}$.

A segunda coordenada sae ao substituír $x = \frac{-b}{2a}$ na función cuadrática.

Puntos de corte co eixe OX:

Son os puntos onde a parábola corta o eixe x, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $y = 0$. Indica cando a parábola é positiva ou negativa.

Para calculalos, resólvese a ecuación de segundo grao $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$.

Punto de corte co eixe OY:

É o punto onde a parábola corta o eixe y, é dicir, é a intersección da parábola coa recta $x = 0$.
Cando $x = 0$ a parábola toma o valor de c, logo o punto de corte é o punto $(0, c)$.

Eixe de simetría:

A parábola é simétrica na recta paralela o eixe y que pasa polo vértice da parábola, é dicir, o **eixe de simetría** da parábola é a recta $x = \frac{-b}{2a}$.

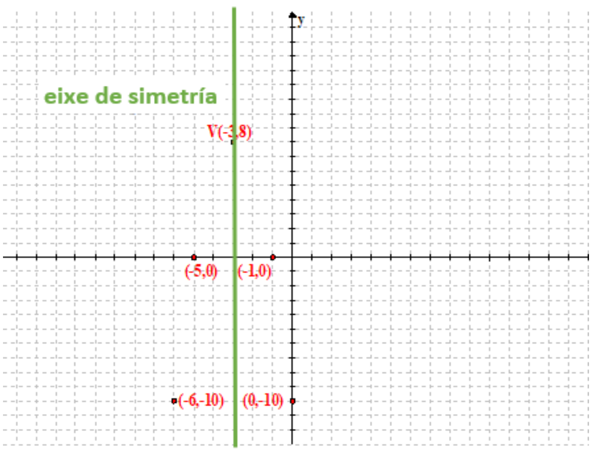
O eixe de simetría tamén pasa polo punto medio do segmento formado polos dous puntos de corte co eixe x.

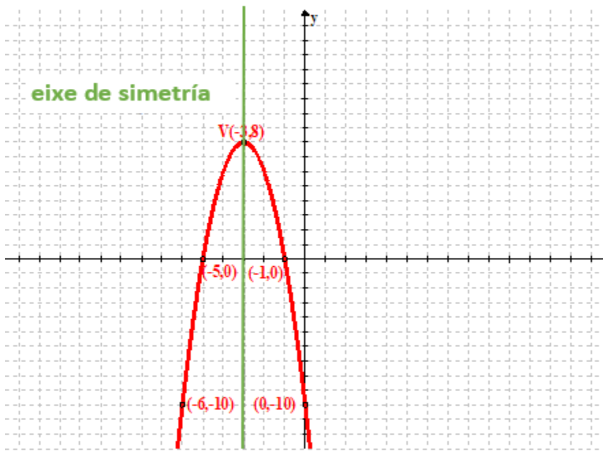
A partir destes elementos, pódese representar a gráfica dunha función cuadrática.

Actividades resoltas

- Determina os elementos da parábola $y = -2x^2 - 12x - 10$
  - $a = -2$, entón a parábola está aberta cara abaixo.
  - Vértice: $\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3, 8)$
  - Puntos de corte:
    - Eixe OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5, 0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1, 0) \end{cases}$
    - Eixe OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0, -10)$

    A parábola tamén pasa polo seu simétrico: $(-6, -10)$.
  - Eixe de simetría: recta $x = -3$.





Actividades propostas

9. Calcula os elementos característicos e representa as seguintes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$	b. $y = 6x^2 - 24x$	c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
d. $y = 2x^2 + 5x - 12$	e. $y = 3x^2 + 6x - 9$	f. $y = -2x^2 + 7x + 3$
g. $y = 7x^2 + 21x - 28$	h. $y = 5x^2 - 9x + 4$	i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

3. FUNCIÓNS DE PROPORCIONALIDADE INVERSA

3.1. Función de proporcionalidade inversa $y = \frac{k}{x}$

Dúas magnitudes son **inversamente proporcionais** cando ao multiplicar ou dividir á primeira por un número, a segunda queda dividida ou multiplicada polo mesmo número. A **razón de proporcionalidade inversa** *k* é o produto de cada par de magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Exemplo

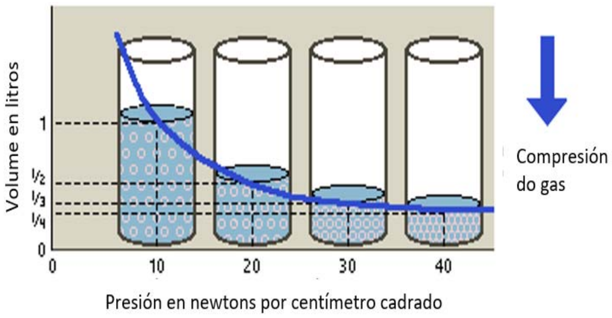
- Pódese comprobar na *situación 3* no inicio do capítulo que a velocidade e o tempo son magnitudes inversamente proporcionais. Neste caso, o espazo mantense constante, sendo a razón de proporcionalidade inversa $s = v \cdot t$.
- En Física encontramos moitos exemplos de magnitudes inversamente proporcionais: a densidade e o volume, a potencia e o tempo, a presión e a superficie…

Actividades resoltas

- Representa no plano a lei de *Boyle-Mariotte*: "a temperatura constante, o volume dunha masa fixa de gas é inversamente proporcional á presión que este exerce."

  A fórmula que describe esta lei é $P \cdot V = k$

  Se despexamos o volume final V, obtemos a seguinte expresión: $V = \frac{k}{P}$.



  A gráfica describe unha curva que a medida que aumenta a presión inicial, diminúe o volume e se vai aproximando ao eixe x e, ao contrario, se diminúe a presión, o volume que ocupa o gas é maior.

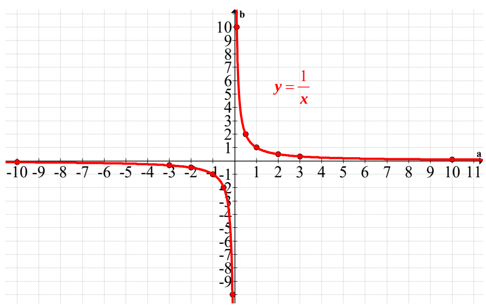
A función de proporcionalidade inversa defínese mediante a expresión $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$, onde k é a razón de proporcionalidade inversa e as variables x e y son os distintos valores que teñen as dúas magnitudes.
A súa representación gráfica no plano cartesiano é unha **hipérbole**.

Exemplo

- Representa a hipérbole $y = \frac{1}{x}$

  Damos unha táboa de valores e representamos os puntos no plano:

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/10	1/10	1/2	1	2	3
y=1/x	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	1/2	1/3



Pódese observar que a gráfica nunca corta aos eixes de coordenadas, xa que o 0 non pertence ao dominio e tampouco ao percorrido da función.

É fácil comprobar que a función é simétrica respecto da orixe, e continua en todo o dominio, é dicir, en $\Re - \{0\}$.

A hipérbole $y = \dfrac{k}{x}$

Actividades propostas

10. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa no mesmo sistema de coordenadas:

a. $y = \dfrac{-1}{x}$ b. $y = \dfrac{5}{x}$ c. $y = \dfrac{1}{2x}$

d. $y = \dfrac{3}{8x}$ e. $y = \dfrac{-5}{3x}$ f. $y = \dfrac{-12}{5x}$

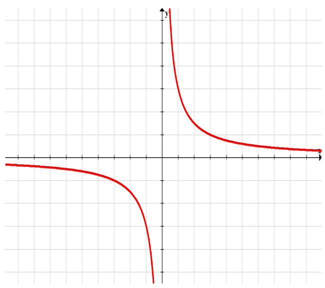
11. Describe o que sucede cando varía o valor de k. Axúdate das gráficas do exercicio anterior.

12. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles que pasan por cada un destes puntos. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.

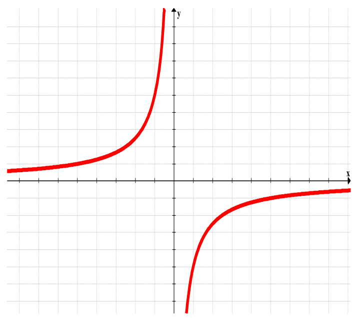
a. $(4, 2)$ b. $(3, -1)$ c. $(1/3, 5)$

d. $(12, 3)$ e. $(a, 1)$ f. $(1, b)$

13. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:



a)



b)

14. Calcula o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles, así como as hipérboles que pasan polos puntos:

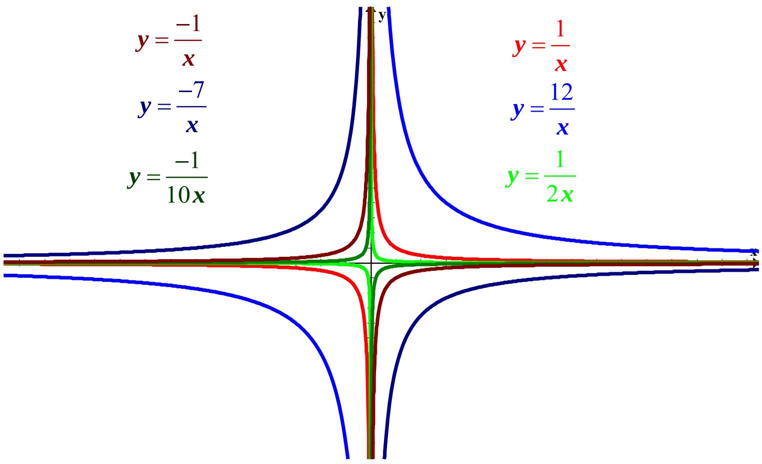
a. $y = \dfrac{9}{2x}$ b. $y = \dfrac{-5}{3x}$ c. $y = \dfrac{-0.3}{x}$

d. $(-5, 2)$ e. $(4, -9)$ f. $(1, 1/2)$

En xeral, as hipérboles cuxa expresión é $y = \frac{k}{x}$ teñen as seguintes propiedades:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  - Se o valor absoluto de k aumenta, a curva afástase da orixe de coordenadas.
  - Se o valor absoluto de k diminúe, a curva aproxímase á orixe de coordenadas.
- **Dominio:** son todos os reais menos o 0: $\Re - \{0\}$
- **Percorrido:** o seu percorrido son todos os reais menos o 0: $\Re - \{0\}$
- **Continuidade:** a función de proporcionalidade inversa é continua en todo o seu dominio, pero descontinua na recta real, xa que o 0 non está no dominio, e polo tanto, hai un salto.
- **Simetría:** son funcións impares, isto é, son simétricas respecto á orixe de coordenadas.
- **Asíntotas:** Cando os valores de x e os de y se fan moi grandes, a curva aproxímase aos eixes, pero sen tocalos, polo tanto, os eixes de coordenadas son as asíntotas das funcións de proporcionalidade inversa: as rectas $x=0$ e $y=0$.
- **Crecemento:** depende do signo de k:
  - Se $k>0$: a función é **decrecente** en todo o seu dominio de definición.
  - Se $k<0$: a función é **crecente** en todo o seu dominio de definición.

As asíntotas dividen á hipérbole en dúas curvas que reciben o nome de **ramas da hipérbole**.



3.2. A hipérbole $y = \dfrac{k}{x-b} + a$

A partir da representación da función $y = \dfrac{k}{x}$, é posible representar outro tipo de hipérboles? Ao igual que ocorre coas parábolas, podemos trasladar as hipérboles no plano en dirección horizontal ou vertical, segundo os valores que tomen os parámetros a e b.

Actividades propostas

15. Representa nos mesmos eixes de coordenadas, as seguintes hipérboles:

a. $y = \dfrac{5}{x}$ $\quad y = \dfrac{5}{x} + 3$ $\quad y = \dfrac{5}{x} - 3$

b. $y = \dfrac{-12}{x}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x-3}$ $\quad y = \dfrac{-12}{x+3}$

c. $y = \dfrac{3}{x}$ $\quad y = \dfrac{3}{x-1} + 5$ $\quad y = \dfrac{5x-2}{x-1}$

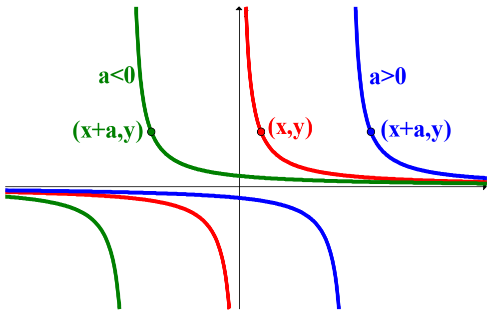
16. Describe o que sucede cando varían os parámetros a e b nas hipérboles do exercicio anterior.

En xeral, a representación gráfica das hipérboles cuxa expresión alxébrica é $y = \dfrac{k}{x-b} + a$ é unha translación no plano dependendo dos valores de a e b.

Desprazamentos horizontais

Ao variar o valor de $\boldsymbol{a}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase horizontalmente a unidades:

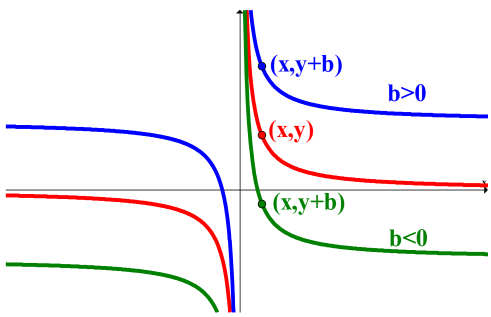
- Se $\boldsymbol{a > 0}$: a hipérbole desprázase cara á dereita.
- Se $\boldsymbol{a < 0}$: a hipérbole desprázase cara á esquerda.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x+a, y)$:
$$(x, y) \to (x+a, y)$$
- O vector de translación é o vector $(a, 0)$



Desprazamentos verticais

Ao variar o valor de $\boldsymbol{b}$, a representación gráfica da hipérbole desprázase verticalmente b unidades:

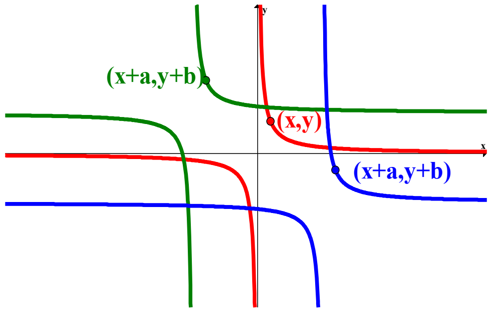
- Se $\boldsymbol{b > 0}$: a hipérbole desprázase cara arriba.
- Se $\boldsymbol{b < 0}$: a hipérbole desprázase cara abaixo.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x, y+b)$:
$$(x, y) \to (x, y+b)$$
- O vector de translación é o vector $(0, b)$



Desprazamentos oblicuos

Ao variar tanto o valor de a como o valor de b, a representación gráfica da hipérbole desprázase diagonalmente tantas unidades como sexa o valor dos parámetros:

- As direccións cara a onde se traslada dependerán dos signos de a e b.
- O punto (x, y) convértese no punto $(x+a, y+b)$:
$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$
- O vector de translación é o vector (a, b)



Actividades propostas

17. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa a partir da hipérbole $y = \frac{5}{x}$:

a. $y = \frac{10}{x-5} + 3$ b. $y = \frac{1}{x+4} + 8$ c. $y = \frac{100}{x+10} + 1$

d. $y = \frac{10}{2x-4} - 7$ e. $y = 6 - \frac{4}{x}$ f. $y = \frac{20}{5-x} - 2$

18. Estuda o dominio, percorrido, continuidade, simetría, asíntotas e crecemento das funcións de proporcionalidade inversa do exercicio anterior.

19. Escribe unha regra para expresar como se trasladan as asíntotas segundo os parámetros a e b.

Hipérbole $y = \frac{mx+n}{px+q}$

As funcións que se definen mediante esta expresión tamén son funcións de proporcionalidade inversa e represéntanse mediante hipérboles. Para iso, necesitamos facer o cambio nunha expresión como a estudada no apartado anterior que nos resulte máis fácil de manexar e representar:

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \to \text{Dividindo } (mx+n):(px+q) \to y = \frac{k}{x-a} + b$$

Actividades resoltas

- Converter a función $y = \frac{3x+2}{x-7}$ nunha función cuxa expresión sexa máis sinxela de representar.

  Dividimos $3x+2$ entre $x-7$:

  $$(3x+2) = 3(x-7) + 23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)} = \frac{3(x-7)}{(x-7)} + \frac{23}{(x-7)} = \frac{23}{(x-7)} + 3$$

  Esta última expresión é fácil de representar.

Actividades propostas

20. Representa as seguintes hipérboles:

a. $y = \frac{2x-4}{x+5}$ b. $y = \frac{3-5x}{x+2}$ c. $y = \frac{4x-12}{x-3}$

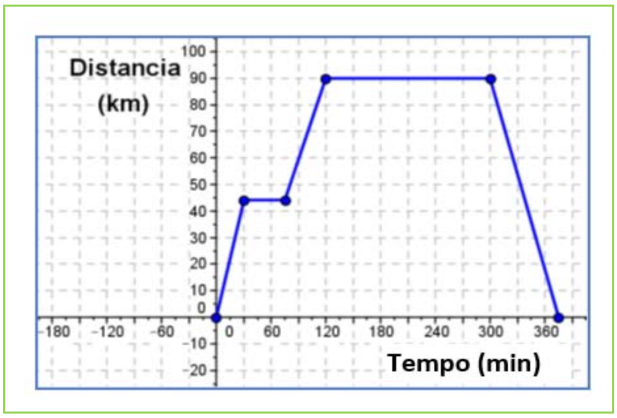
d. $y = \frac{6x+8}{1-x}$ e. $y = \frac{7x+5}{x-4}$ f. $y = \frac{6x+10}{2x-1}$

4. FUNCIÓNS DEFINIDAS A ANACOS

Hai gráficas que non podemos representar cunha única fórmula, como a da marxe:

Actividades resoltas

- *A gráfica da marxe representa unha excursión en autobús dun grupo de 1º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca unha expresión que a represente.*

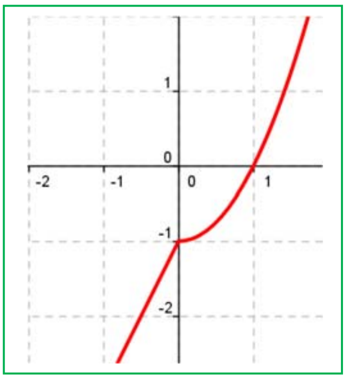


Este tipo de función denomínase **función definida a anacos** pois cada trozo ten unha expresión alxébrica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular as súas ecuacións pois coñecemos os puntos polos que pasan: ((0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) e (0, 360).

A súa expresión é:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & si\ 0 \le x \le 30 \\ 45 & si\ 30 < x \le 75 \\ 5x - 330 & si\ 75 < x \le 120 \\ 90 & si\ 120 < x \le 300 \\ -\frac{3}{2}x + 360 & si\ 300 < x \le 360 \end{cases}$$

- *Representa graficamente a función* $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x < 0 \\ x^2 - 1 & se\ x > 0 \end{cases}$.



Está definida de distinta maneira antes de 0, que é unha recta, que despois de 0, que é unha parábola. Simplemente debuxamos estas funcións nos intervalos indicados.

Actividades propostas

21. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x < 0 \\ x - 1 & se\ x > 0 \end{cases}$.

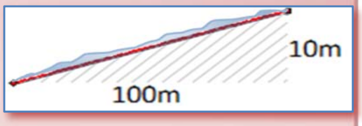
22. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & se\ x < 0 \\ 2x + 2 & se\ x > 0 \end{cases}$.

23. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & se\ x < 1 \\ x + 3 & se\ x > 1 \end{cases}$.

CURIOSIDADES. REVISTA

Coñeces este sinal?

Seguramente o viches nalgunha estrada, pero que indica? Mide a pendente da estrada con respecto á horizontal e significa que a pendente é do 10 %, é dicir, $\frac{10}{100}$. Quere dicir que subimos 10 metros de altura mentres que avanzamos 100 metros.



- Busca en internet o perfil do *L'Angliru* e comproba a pendente das súas ramplas.

Arquímedes e o raio de calor

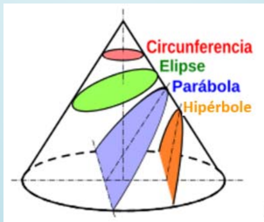
Arquímedes é un dos personaxes que máis achegaron a ciencia na historia. Este enxeñeiro, físico, inventor, astrónomo e matemático naceu en *Siracusa* (287 a.C. – 212 a.C.) e é o responsable de moitos teoremas e invencións que seguramente terás oído, como o famoso principio de *Arquímedes* ou o parafuso de *Arquímedes* utilizado nas cadeas de produción de moitas empresas.

Cando os romanos atacaron *Siracusa*, conta a lenda que *Arquímedes* construíu un sistema que concentraba os raios de sol nun raio de calor que provocou o incendio dos barcos inimigos. Este sistema estaba composto por espellos (ou escudos ben pulidos) colocados de tal forma que debuxasen unha superficie parabólica.

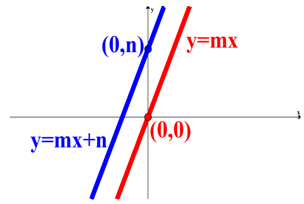
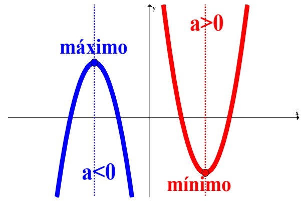
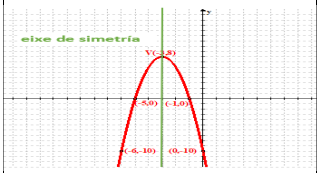
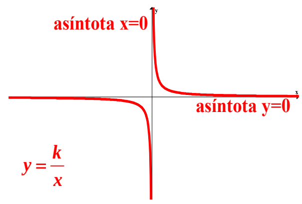
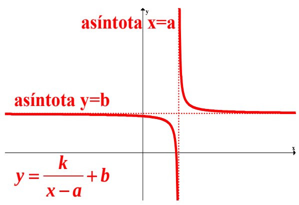
Mito ou realidade? Non se sabe, pero na actualidade, este sistema é a base do funcionamento dos fornos solares.

Apolonio de Pergue

Estivemos falando de parábolas e hipérboles pero, de onde veñen esas palabras e formas? O nome destas curvas debémosllo a *Apolonio de Pergue* (262 a.C.- 190 a.C.) que estudou este tipo de funcións na súa obra *As Cónicas*. As curvas xorden dos cortes dun cono: dependendo do ángulo de corte, obtemos unhas curvas ou outras. É como cortar unha barra de pan.



RESUMO

Función polinómica de primeiro grao: Rectas $y=m\cdot x$ $y=m\cdot x+n$	A súa expresión son polinomios de grao un. Represéntanse mediante **rectas**: Hai dous tipos: - **Funcións lineais ou de proporcionalidade directa**: $y=m\cdot x$, pasan pola orixe de coordenadas. - **Funcións afíns**: $y=m\cdot x+n$, son translacións no eixe y, n unidades. Pasan polo punto $(0,n)$.	
Función polinómica de segundo grao: Parábolas $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$	A súa expresión son polinomios de grao dous. Represéntanse mediante **parábolas**: **Vértice:** $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$ **Puntos de corte co eixe OX:** $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. **Punto de corte co eixe OY:** $x=0$, é o punto $(0,c)$. **Eixe de simetría**: é a recta $x=\frac{-b}{2a}$.	
Función de proporcionalidade inversa: Hipérboles $y=\frac{k}{x}$	$\lvert k\rvert$: afasta ou achega a curva á orixe de coordenadas. **Dominio e percorrido:** son todos os números reais menos o 0. **Continuidade:** continua en todo o seu dominio, descontinua en $x=0$. **Simetría:** impar, simétricas respecto á orixe de coordenadas. **Asíntotas:** as rectas $x=0$ e $y=0$. **Crecemento:** - Se $k>0$: **decrecente** en $(-\infty,0)$ e **crecente** en $(0,+\infty)$. - Se $k<0$: **crecente** en $(-\infty,0)$ e **decrecente** en $(0,+\infty)$.	
Hipérboles $y=\frac{k}{x-a}+b$	Son o resultado de trasladar a hipérbole $y=\frac{k}{x}$ polo vector de translación (a,b): - Dominio: $\Re-\{a\}$ Percorrido: $\Re-\{b\}$ - Puntos: $(x,y)\to(x+a,y+b)$ - Asíntotas: $\{x=0\to x=a\};\{y=0\to y=b\}$	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Función lineal

1. Representa graficamente a seguinte relación de proporcionalidade dada na seguinte táboa e escribe a súa ecuación. Describe que tipo de relación é.

Magnitude A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitude B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa as rectas a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2.3x$.
3. Estuda o dominio, máximos e mínimos e simetrías das funcións lineais a) $y = 1.5x$, b) $y = -0.5x$.
4. Estuda a función $y = 0{,}7x$ no intervalo $[-2, 5]$.
5. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos (1, 4) e (0, 0) e determina a súa expresión alxébrica.
6. Representa as seguintes funcións lineais:

   a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.
7. Calcula a pendente da recta que pasa polos puntos (1, 4) e (2, 1) e determina a súa expresión alxébrica.
8. Calcula a pendente das rectas que pasa polos puntos que se indican e determina a súa expresión alxébrica.

   a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)
9. Dúas empresas de telefonía móbil lanzan as súas ofertas: a empresa StarTo ofrece por cada chamada pagar 50 céntimos máis 2 céntimos por minuto falado; Tel-Hello ofrece 75 céntimos por chamada e minutos ilimitados. Que oferta é máis económica? Para dar a resposta, realiza os seguintes pasos, expresando os resultados analítica e graficamente:
   a. Hai algún momento no que as dúas ofertas sexan iguais?
   b. Se falo unha media de 15 minutos ao día, que oferta me convén?
   c. Se falo unha media de 35 minutos ao día, que oferta me convén?
   d. Se fago unha media de 10 chamadas ao día de 3 minutos de duración, que oferta me convén?
   e. Se fago unha media de 2 chamadas ao día de 30 minutos de duración, que oferta é a mellor?
   f. Que oferta é máis económica?
10. O escritor Xaime Joyce ten distintas ofertas editoriais para publicar a súa última novela. A editorial Dole ofrécelle 100 €, ademais do 20 % de cada libro que venda; a editorial Letrarte ofrécelle 350 €; e a editorial Paco ofrécelle segundo a venda dos libros: 50 € se vende ata 250 libros, 100 € se vende ata 500 libros, 300 € se vende ata 1 000 libros e 500 € se vende máis de 1 000 libros. Entre todas as editoriais, cal cres que é mellor oferta para Xaime?

Funcións cuadráticas

11. A partir da parábola $y = x^2$, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x-2)^2$ d) $y = (-x-3)^2$.

12. A partir da parábola e = x^2, debuxa a gráfica das seguintes parábolas:

a) $y = 2.5x^2$ b) $y = -1.2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0.7x^2$.

13. Representa a gráfica das funcións parabólicas seguintes e indica o vértice:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x-2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina os elementos das parábolas seguintes

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x-2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funcións de proporcionalidade inversa

15. Calcula a expresión analítica e representa a gráfica das hipérboles e = k/x que pasan polos puntos que se indican. Escribe os intervalos onde a función é crecente ou decrecente.

a) (5, 1), b) (4, –1) c) (1, 4) d) (–2, –4).

16. Representa as seguintes funcións de proporcionalidade inversa:

a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.

17. Determina o dominio, percorrido, continuidade, máximos e mínimos e o crecemento das seguintes hipérboles:

a) $y = 2.3/x$ b) $y = -1.7/x$ c) $y = 3.2/x$ d) $y = -2.1/x$.

18. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x-2)$ d) $y = -2/(x-3)$.

20. Representa as seguintes hipérboles:

a) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ b) $y = \frac{-x-3}{2x+1}$ c) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ d) $y = \frac{x+2}{-x-3}$.

Funcións definidas a anacos

21. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & se\ x < -1 \\ x^2 - 1 & se\ x > -1 \end{cases}$.

22. Determina os puntos de intersección cos eixes coordenados da función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Indica os intervalos onde a función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se\ x < 2 \\ -x^2 + 4 & se\ x > 2 \end{cases}$ é crecente.

24. Representa graficamente a función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & se\ x < 1 \\ 1/x & se\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOAVALIACIÓN

1. A recta $y = 4x + 2$ ten de pendente m e ordenada na orixe b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. A recta que pasa polos puntos (1, 6) e (–2, 4) ten de pendente m e ordenada na orixe b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/3$, $b = 16/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica cal das seguintes funcións lineais é simétrica respecto da orixe de coordenadas:

a) $y = (–10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = –x + 3$

4. Indica cal das seguintes funcións cuadráticas é simétrica respecto do eixe de ordenadas:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = –x^2 + 3x + 2$

5. Indica o vértice da función cuadrática e = $3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Sinala cal das seguintes funcións cuadráticas é *máis estreita* que $y = x^2$:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

7. Indica cal das seguintes hipérboles é simétrica respecto da orixe de coordenadas:

a) $y = –15/(21x)$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = –1/x + 3$

8. Sinala cal das seguintes hipérboles ten como asíntotas ás rectas $x = 2$ e $y = 3$:

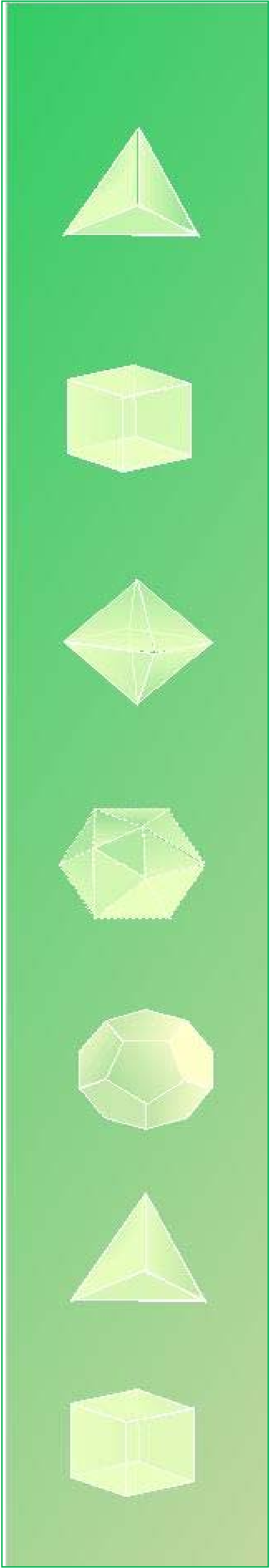
a) $y = –15/(x– 3) –2$ b) $y = 3/(x – 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) –3$ d) $y = –12/(x + 3) + 2$

9. Se traslado a hipérbole e = $3/x$ mediante o vector de translación (1, 3) obteño a hipérbole:

a) $y = 3/(x– 1) + 3$ b) $y = 3/(x – 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) –1$ d) $y = –3/(x + 1) – 3$

10. Sinala cal das seguintes funcións cuadráticas acada un mínimo absoluto:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB de ESO

Capítulo 12

Funcións exponenciais, logarítmicas e trigonométricas

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Miguel Ángel Paz

Revisora: María Molero e Javier Rodrigo

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Miguel Ángel Paz e Banco de Imaxes de INTEF

Índice

Resumo

Entre as diversas funcións hai algunhas que teñen unha importancia especial, ou tivérona historicamente. Nestes dous capítulos amosámosche tres tipos moi importantes.

Termos como *crecemento exponencial ou curva sinusoidal* derivan deste tipo de funcións.

Teñen unhas propiedades importantísimas na análise matemática, enxeñaría, medicina, ciencias sociais, etc. Neste capítulo aprenderás o cálculo de logaritmos e as propiedades das funcións exponenciais e circulares e das súas gráficas.

O termo *logaritmo* foi cuñado en 1614 polo matemático escocés *John Neper* (1550-1617). Antes da invención das calculadoras electrónicas, os logaritmos tamén foron imprescindibles para o cálculo de potencias de números non enteiros.

As funcións trigonométricas son moi coñecidas e constitúen un dos exemplos máis populares de funcións periódicas. Elas ou outras funcións relacionadas atópanse por todas as partes na natureza e utilízanse en física, electrónica, etc. Numerosas gráficas comparten as súas propiedades como, por exemplo, a forma dunha onda, tamén chamada *sinusoide*, que debe este nome á función *seno*.

John Napier (Neper). Barón de Merchiston

1. FUNCIÓNS EXPONENCIAIS

1.1. Función exponencial

Hai dous tipos de funcións cuxa **expresión analítica** ou **fórmula** é unha **potencia**:

- Se a variable independente está na base: $y = x^3$, chámase **función potencial**, e cando ademais o expoñente é un número natural é unha función polinómica.
- Se a variable independente está no expoñente: $y = 3^x$, chámase **función exponencial**.

Exemplo:

$$y = 10^x,\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ y = 2^{3x}\ ,\ y = 5^{-x}.$$

Unha función exponencial é aquela na que a variable independente está no expoñente.

Neste curso estudamos funcións exponenciais sinxelas, do tipo $y = b^x$, onde a base *b* é un número positivo distinto de 1.

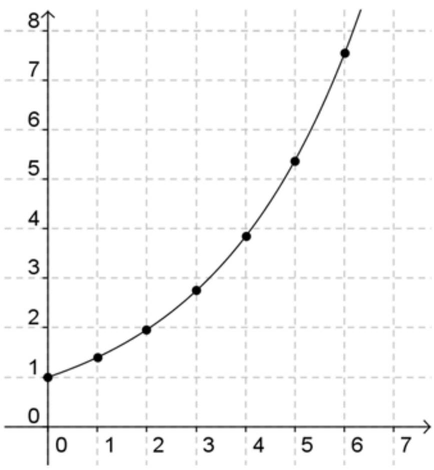
Actividades resoltas

- Se a cantidade de bacterias dunha determinada especie se multiplica por 1.4 cada hora, podemos escribir a seguinte fórmula para calcular o número *"y"* de bacterias que haberá ao cabo de *"x"* horas (comezando por unha soa bacteria): $y = 1.4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Táboa de valores da función**):

Horas transcorridas (*x*)	**Núm. bacterias (*y*)**
0	1
1	1.4
2	1.96
3	2.74
4	3.84
5	5.38
6	7.53
…	…

Gráfica da función



Observa que neste exemplo non se lle deu a “x” valores negativos, xa que non ten sentido un número de horas negativo. Nas funcións exponenciais en xeral o “x” si pode ter valores negativos. Porén a base b só pode ter valores positivos. Así mesmo, observarás que a variable “y” tamén resulta sempre positiva. Máis adiante recollemos estas propiedades ao falar de dominio e percorrido da función exponencial.

Actividades propostas

1. Proba agora a realizar no teu caderno unha táboa de valores e a gráfica para un caso similar, supoñendo que o número de bacterias se multiplica cada hora por 3 en lugar de por 1,4.

Observarás que os valores de “y” aumentan moito máis á présa e deseguida *se saen do papel*. Mentres que os valores de “x” aumentan de 1 en 1, os valores de e vanse multiplicando por 3. Isto chámase **crecemento exponencial**. Se en lugar de multiplicar se trata de dividir temos o caso de **decrecemento exponencial**.

2. No teu caderno, representa conxuntamente as gráficas de $y = x^2$ (función potencial) e $y = 2^x$ (función exponencial), con valores de “x” entre 0 e 6. Observa a diferenza cuantitativa entre o crecemento potencial e o crecemento exponencial.

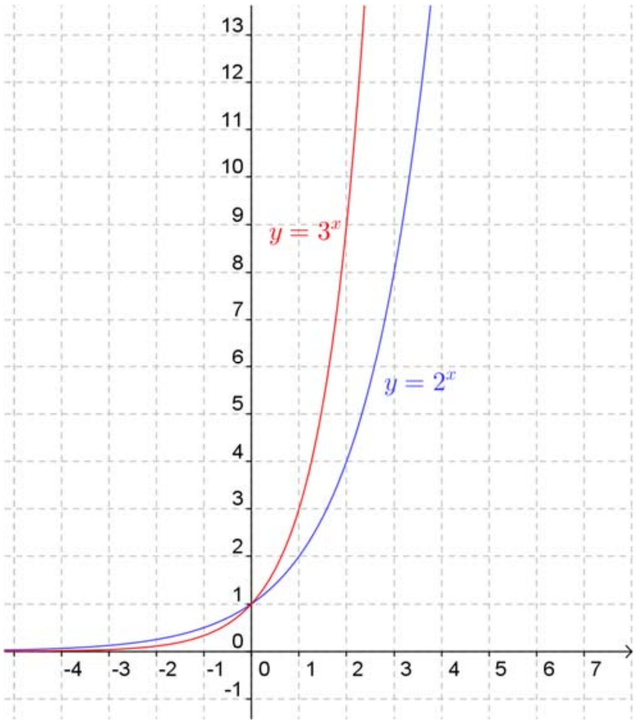
1.2. Distintas funcións exponenciais

As gráficas das funcións exponenciais $y = b^x$ diferéncianse segundo o valor da base “b”. Especialmente diferéncianse se $0 < b < 1$ ou $b > 1$.

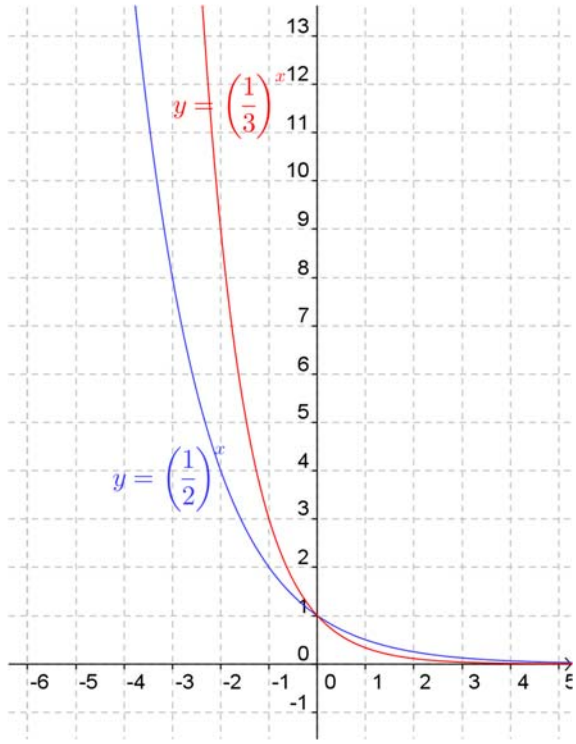
No caso no que $b = 1$ temos a función constante $y = 1$, cuxa gráfica é unha recta horizontal.

Vexamos as gráficas dalgunhas funcións exponenciais, comparándoas con outras:

Funcións $y = 2^x$ **e** $y = 3^x$



Funcións $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **e** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Observamos os seguintes aspectos comúns nas catro gráficas:

- O seu **dominio** é toda a recta real. Ademais son continuas.
- O seu **percorrido** é (0, +∞). É dicir, "*y*" nunca é cero nin negativo.
- Pasan todas polos puntos (0, 1), (1, *b*) e (–1, 1/*b*).
- A gráfica de $y = a^x$ e a de $y = (1/a)^x$ son simétricas respecto do eixe OY.

E observamos tamén aspectos diferenciados en ambas as ilustracións:

Cando a base é *b* > 1

Son funcións **crecentes**. Canto maior é a base o crecemento é máis rápido.
Cando $x \to -\infty$ a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte esquerda do eixe OX.
Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

Cando a base é 0 < *b* < 1

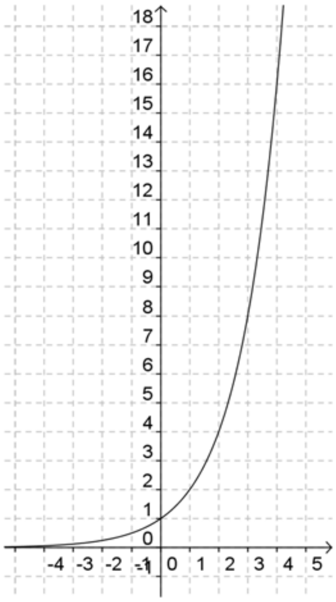
Son funcións **decrecentes**. Canto menor é a base o decrecemento é máis rápido.
Cando $x \to +\infty$ a función tende a 0. Polo tanto presenta unha **asíntota horizontal** na parte dereita do eixe OX.
Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota vertical pois non se aproximan a ningunha recta.

Actividades resoltas

- Representa graficamente as seguintes funcións exponenciais $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

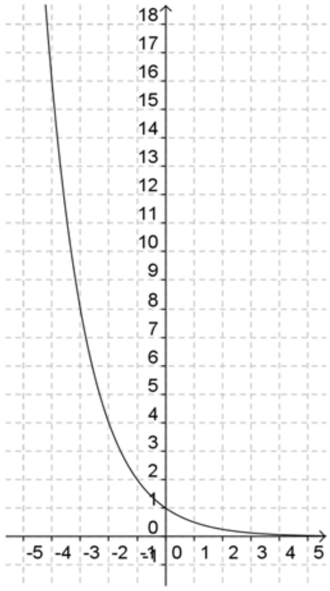
Función $y = 2^x$

x	*y*
…	…
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
…	…



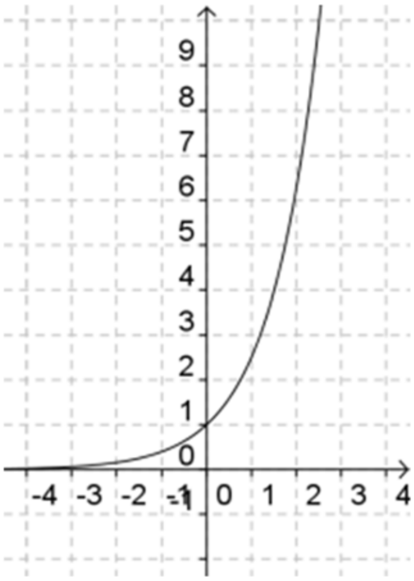
Función $y = 2^{-x}$

x	*y*
…	…
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8
4	1/16
5	1/32
6	1/64
…	…

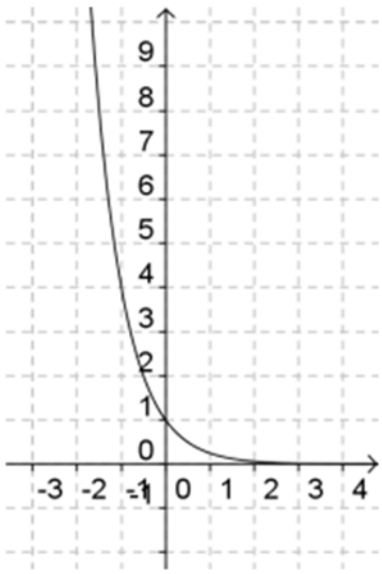


- Identifica as funcións correspondentes coas seguintes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas as dúas son funcións exponenciais porque pasan polo punto (0, 1) e teñen por un lado como asíntota horizontal o eixe OX, mentres que polo outro lado tenden a + ∞.

A función (a) é $y = 2.5^x$ porque pasa polo punto (1, 2.5).

A función (b) é $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ porque pasa polo punto (–1, 4).

- Representa a función $y = 3^{-x}$

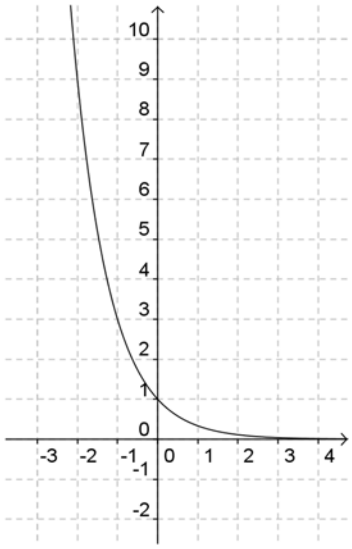
Solución:

Por ter expoñente negativo é:

$$y = 3^{-x} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^x .$$

Polo tanto a súa gráfica é a da marxe.

Observa que pasa polos puntos (–1, 3), (0, 1) e (1, 1/3).



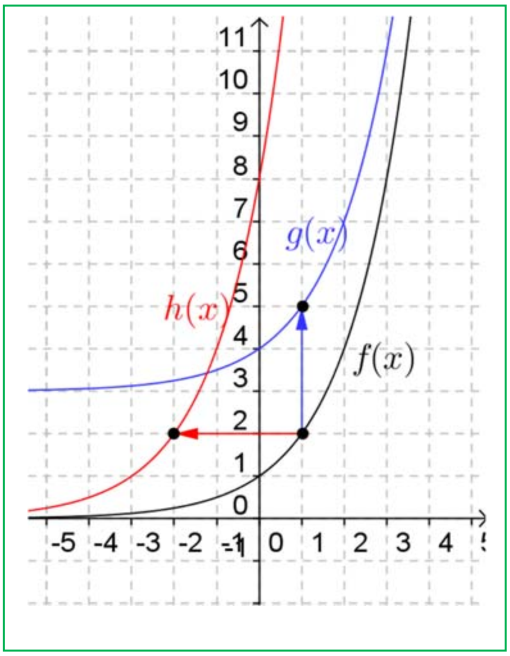
- Coñecendo a gráfica da función $f(x) = 2^x$, que se viu anteriormente, e sen calcular valores, debuxa as gráficas das funcións $g(x) = 2^x + 3$ e $h(x) = 2^{x+3}$.

Solución:

A función *g(x)* é a función *f(x)* desprazada cara arriba 3 unidades.

A función *h(x)* é a función *f(x)* desprazada cara á esquerda 3 unidades.

Polo tanto as súas gráficas son estas, representadas en diferente cor:



1.3. O número *e*. A función e^x

O número e ten unha gran importancia en Matemáticas, comparable mesmo ao número π aínda que a súa comprensión non é tan elemental e tan popular. Para comprender a súa importancia hai que acceder a contidos de cursos superiores. É un número irracional.

O número e defínese como o límite cando n tende a infinito da seguinte sucesión:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

O seu valor aproximado é e = 2.71828182846...

Trátase dun número irracional (aínda que ao velo pode parecer periódico).

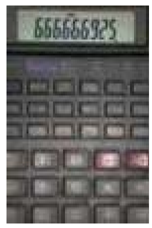
Coa axuda da calculadora pódese comprobar como os valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se achegan cada vez máis ao valor e = 2.71828182846... a medida que aumenta o valor de n.

Este número aparece nas ecuacións de crecemento de poboacións, desintegración de substancias radioactivas, xuros bancarios, etc.

Tamén se pode obter directamente o valor de e coa calculadora (sempre como aproximación decimal, posto que é un número irracional). Normalmente hai unha tecla coa etiqueta e pero podes usar tamén a tecla etiquetada e^x. Para iso terás que calcular o valor de e^1.

A función $y = e^x$ comparte as características descritas máis arriba para funcións exponenciais de base maior que 1.

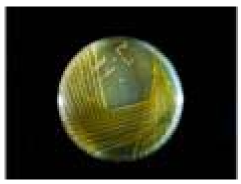
Actividades propostas



3. Utilizando a calculadora, no teu caderno fai unha táboa de valores e representa as funcións $y = e^x, y = e^{-x}$.

4. Unha persoa ingresou unha cantidade de 5 000 euros a interese do 3% nun banco, de modo que cada ano o seu capital se multiplica por 1.03. a) Escribe no teu caderno unha táboa de valores co diñeiro que terá esta persoa ao cabo de 1, 2, 3, 4, 5 e 10 anos. b) Indica a fórmula da función que expresa o capital en función do número de anos. c) Representa no teu caderno graficamente esta función. Pensa ben que unidades deberás utilizar nos eixes.

5. Un determinado antibiótico fai que a cantidade de certas bacterias se multiplique por 2/3 cada hora. Se a cantidade ás 7 da mañá é de 50 millóns de bacterias, (a) fai unha táboa calculando o número de bacterias que hai cada hora, desde as 2 da mañá ás 12 do mediodía (observa que tes que calcular tamén "cara atrás"), e (b) representa graficamente estes datos.



Cultivo da bacteria Salmonella

6. Representa no teu caderno as seguintes funcións e explica a relación entre as súas gráficas:

a) $y = 2^x$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $y = 2^{x-1}$.

7. Coñecendo a gráfica da función $f(x) = 2^x$, que se viu máis arriba, e sen calcular táboa de valores, debuxa no teu caderno as gráficas das funcións $g(x) = 2^x - 3$ e $h(x) = 2^{x-3}$.

2. FUNCIÓNS LOGARÍTMICAS

2.1. Definición e cálculo elemental de logaritmos

Recorda que:

A expresión $\log_b a$ lese "logaritmo de a en base *b*".

$\log_b a$ é o expoñente ao que hai que elevar "*b*" para que o resultado sexa"*a*".

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

"*b*" chámase **base** e "***a***" chámase **argumento**.

Observacións:

- A base ten que ser un número positivo e distinto da unidade.
- O argumento ten que ser positivo e distinto de 0.

Exemplos:

a) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$ b) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ porque $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Un par de propiedades elementais

- ✓ O logaritmo da base sempre vale 1: $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$.
- ✓ O logaritmo de 1 en calquera base sempre vale 0: $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$.

2.1.1. Logaritmos inmediatos

Chámanse así os que se calculan directamente aplicando a definición.

Exemplos:

- $\log_5 125 = 3$ porque $5^3 = 125$
- $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$
- log 10 000 = 4 porque $10^4 = 10\ 000$.

Cando non se escribe a base quere dicir que a base é 10 (*log* x). Os logaritmos en base 10 chámanse **logaritmos decimais**. Os logaritmos en base e chámanse logaritmos neperianos e escríbense *ln x*.

Outros logaritmos non son inmediatos pero pódense calcular tamén aplicando a definición, **igualando expoñentes**. Isto pasa cando a base e o argumento son potencias do mesmo número.

Exemplos:

- Para calcular $log_4 8$ poñemos $\log_4 8 = x \Rightarrow 4^x = 8 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Para calcular $log_4 32$ poñemos $\log_4 32 = x \Rightarrow 4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

Actividades resoltas

- Calcula os seguintes logaritmos: a) $\log_4 256$; b) $\log_2 1/32$; c) $\log_2 1/2$; d)$\log 1/100$; e) $\log_3 0.111...$; f) $\log_3 3$; g) $\log_2 1$; e calcula o valor de x nas seguintes igualdades: h) $x = \log_3 3\sqrt{3}$; i) $\log_x 16 = 4$.

Solucións:

a) $\log_4 256 = 4$, porque $4^4 = 256$.

b) $\log_2 1/32 = -5$, porque $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$.

c) $\log_2 1/2 = -1$, porque $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

d) $\log 1/100 = -2$, porque $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

e) $\log_3 0.111... = -2$, porque $0.111... = 1/9$, e entón $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

f) $\log_3 3 = 1$, porque $3^1 = 3$ (o logaritmo da base sempre vale 1)

g) $\log_2 1 = 0$, porque $2^0 = 1$ (o logaritmo de 1 sempre vale 0).

h) $x = \log_3 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{3/2} \Leftrightarrow x = 3/2$.

i) $\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 = 2^4 \Leftrightarrow x = 2$.

- Calcula o valor de x nas seguintes igualdades:

a) $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\log_{12} 12 = x \Leftrightarrow 12^x = 1 \Leftrightarrow x = 1$

c) $\log_{30} 900 = x \Leftrightarrow 30^x = 900 \Leftrightarrow x = 2$

d) $\log 0.1 = x \Leftrightarrow 10^x = 0.1 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-1} \Leftrightarrow x = -1$

e) $\log_3 243 = x \Leftrightarrow 3^x = 243 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5$

f) $\log_9 3 = x \Leftrightarrow 9^x = 3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = 1/2$

g) $\log_7 \frac{1}{49} = x \Leftrightarrow 7^x = 7^{-2} \Leftrightarrow x = -2$

h) $\log_{16} 4\,096 = x \Leftrightarrow 16^x = 4\,096 \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{12} \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

i) $\log 1\,000 = x \Leftrightarrow 10^x = 1\,000 \Leftrightarrow x = 3$

j) $\log_{25} \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 25^x = \sqrt{5} \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{1/2} \Leftrightarrow 2x = 1/2 \Leftrightarrow x = 1/4$

k) $\log 0 = x$ non existe solución, porque ningunha potencia dá 0 como resultado.

l) $\log (-100) = x$ non existe solución porque o resultado de calcular unha potencia de base positiva sempre é positivo.

m) $\log_x 7 = -2 \Leftrightarrow x^{-2} = 7 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

n) $\log_2 x = -1/2 \Leftrightarrow 2^{-1/2} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2^{1/2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Actividades propostas

8. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición (sen calculadora):

a) $\log_3 81$ b) $\log_2 256$ c) $\log 10\,000$ d) $\log_5 125$ e) $\log_2 0.25$ f) $\log 0.001$

9. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e igualando expoñentes (sen calculadora):

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_2 0.125$ e) $\log_3 \frac{1}{9}$ f) $\log_2 \frac{3}{12}$

g) $\log_{16} 2$ h) $\log_{64} 32$ i) $\log_4 \sqrt{2}$ j) $\log_3 \sqrt{27}$ k) $\log \sqrt[3]{100}$

10. Calcula o valor de *x* nas seguintes igualdades:

a) $\log_8 x = \frac{2}{3}$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$ d) $\log_x 0.5 = -1$ e) $\log x = -4$.

2.1.2. Logaritmos decimais e neperianos coa calculadora

Ata aquí aprendemos a calcular logaritmos utilizando a definición. Porén soamente se pode facer así nuns poucos casos (en concreto cando o argumento é unha potencia da base do logaritmo).

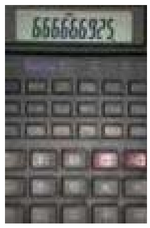
Por exemplo non se poden calcular $log_4\, 35$, $log_{10}\, 7$, $log_4 30$, $log_9 5$.

As calculadoras científicas dispoñen de teclas para calcular unicamente dous ou tres tipos de logaritmos (segundo o modelo de calculadora):

<table>
<tr><td>Logaritmos decimais (en base 10): </td><td rowspan="2">Logaritmos neperianos (en base e): 
Logaritmos neperianos son os que teñen como base o número e = 2.718281…
Tamén se chaman logaritmos naturais.
Os logaritmos neperianos escríbense de tres modos:
$\log_e x = \ln x = \mathrm{L}\, x$</td></tr>
<tr><td>Logaritmos en calquera base: 
Nalgunhas calculadoras pode calcularse directamente poñendo a base e o argumento.</td></tr>
</table>

Exemplos:

- Comproba coa túa calculadora que $log\ 7 = 0.845$ e que $\ln 7 = 0.946$ (valores redondeados).
- Comproba tamén que $\log 10 = 1$ e que $\ln e = 1$.



Para **calcular un número coñecendo o seu logaritmo** empréganse as mesmas teclas utilizando previamente a tecla de función inversa (normalmente *SHIFT* ou *INV*).

Exemplos:

- Comproba coa túa calculadora que o número cuxo logaritmo decimal vale 1.36 é 22.9 e que o número cuxo logaritmo neperiano vale 1.36 é 3.896.

2.1.3. Cambio de base de logaritmos

Coa calculadora tamén se poden calcular logaritmos que non sexan decimais nin neperianos, é dicir, en bases distintas a "10" e "*e*".

Para iso emprégase a **fórmula do cambio de base**:

Para cambiar de base "*a*" a base "*b*": $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Exemplo:

- Para calcular $log_4 7$ utilizando a calculadora facemos $log_4 7 = \frac{log_{10} 7}{log_{10} 4} = \frac{0.845}{0.602} = 1.40$

Actividades propostas

11. Calcula os seguintes logaritmos coa calculadora utilizando a fórmula do cambio de base e compara os resultados cos obtidos na actividade:

a) $\log_4 2$ b) $\log_9 27$ c) $\log_{81} 27$ d) $\log_{16} 2$ e) $\log_2 0.125$ f) $\log_3 \frac{1}{9}$.

2.2. Propiedades dos logaritmos

As propiedades dos logaritmos son as seguintes:

- $\mathbf{\log_b 1 = 0}$ xa que $b^0 = 1$ (o logaritmo de 1 en calquera base é 0).
- $\mathbf{\log_b b = 1}$ xa que $b^1 = b$ (o logaritmo da base é 1).
- O logaritmo dun **produto** é igual á suma dos logaritmos dos factores:

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

- O logaritmo dun **cociente** é igual á diferenza dos logaritmos:

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

- O logaritmo dunha **potencia** é igual ao expoñente polo logaritmo da base:

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

Exemplo:

$\log_2 10 + \log_2 3.2 = \log_2 (10 \cdot 3.2) = \log_2 32 = 5$

$\log 140 - \log 14 = \log (140/14) = \log 10 = 1$

$\log_3 9^5 = 5 \log_3 9 = 5 \cdot 2 = 10$

$\log_3 \sqrt[5]{9} = \log_3 9^{1/5} = \frac{1}{5} \log_3 9 = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$.

2.2.1. Expresións logarítmicas e alxébricas

As propiedades dos logaritmos empréganse en dous tipos importantes de operación:

- **Tomar logaritmos** nunha igualdade é aplicar o logaritmo a ambos os membros da mesma:

$$x = y \Leftrightarrow \log_b x = \log_b y.$$

- **Eliminar logaritmos** nunha igualdade é o contrario: conseguir que unha expresión logarítmica deixe de selo. Para isto é preciso que cada membro teña un único logaritmo:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y.$$

Actividades resoltas

- Sabendo que log 2 = 0.301, calcula:

a) $\log 32 = \log 2^5 = 5 \log 2 = 5 \cdot 0.301 = 1.505$

b) $\log 0.008 = \log (8/1\,000) = \log 8 - \log 1\,000 = 3 \log 2 - 3 = 3 \cdot 0.301 - 3 = -2.097$

Observa que o logaritmo en base 10 da unidade seguida de ceros é igual ao número de ceros que teña.

- Sabendo que log 2 = 0.301 e que log 3 = 0.477 calcula:

a) $log\, 6 = log(3 \cdot 2) = log\, 3 + log\, 2 = 0.301 + 0.477 = 0.778$

b) $log\, 180 = log(3^2 \cdot 2 \cdot 10) = 2\, log\, 3 + log\, 2 + log\, 10 = 2 \cdot 0.477 + 0.301 + 1 = 2.255$

c) $log\, 15 = log(3 \cdot 5) = log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = log\, 3 + log\, 10 - log\, 2 = 0.477 + 1 - 0.301 = 1.176$

- Toma logaritmos e desenvolve:

a) $a = \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log \frac{mn}{p} \Rightarrow \log a = \log m + \log n - \log p$

b) $a = \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} \Rightarrow \log a = \frac{3}{2} \log b + \frac{1}{2} \log c - 2 \log x$

- Elimina os logaritmos:

a) $\log a = \log c + \log d - \log e \Rightarrow \log a = \log \frac{\text{cd}}{\text{e}} \Rightarrow a = \frac{\text{cd}}{\text{e}}$

b) $\log b = \log 4 + \frac{1}{2}\log 5 - 3\log x \Rightarrow \log b = \log 4 + \log\sqrt{5} - \log x^3 \Rightarrow \log b = \log\frac{4\sqrt{5}}{x^3} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{5}}{x^3}$

c) $\log a + 3 = 2\log b - \frac{\log c}{3} \Rightarrow \log a + \log 1\,000 = \log b^2 - \log c^{1/3} \Rightarrow \log(1\,000a) = \log\frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

$\Rightarrow 1\,000a = \frac{b^2}{\sqrt[3]{c}}$

- Resolve a seguinte **ecuación logarítmica**: $2\log x = 2\log(x-1) + \log 4$

Solución:

Para resolvela é preciso eliminar logaritmos:

$$\log x^2 = \log(x-1)^2 + \log 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = \log 4(x-1)^2$$

A ecuación queda $x^2 = 4(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3x^2 - 8x + 4$ cuxas solucións son $x = 2$ e $x = 2/3$.

A segunda solución non é válida porque ao substituíla na ecuación orixinal quedaría log $(x - 1)$ como logaritmo dun número negativo, que non existe. Isto ocorre ás veces nas ecuacións logarítmicas, igual que nas ecuacións irracionais, e por iso é preciso comprobar a validez das solucións calculadas.

- No cálculo de **interese composto** o interese producido cada período de tempo pasa formar parte do capital. Así, se o período de tempo é un ano, a fórmula do interese cada ano calcúlase sobre un novo capital, que é o capital anterior máis os xuros producidos no ano. Polo tanto, se a porcentaxe de interese anual é r, o capital cada ano multiplícase por $1 + \frac{r}{100}$.

  Por exemplo se o interese é do 4 % hai que multiplicar por 1.04 cada ano transcorrido.

  A fórmula do capital acumulado ao cabo de n anos é: $C_n = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

  Calcula o capital final acumulado ao cabo de 4 anos para 6 000 € ao 2 % de interese composto anual.

Solución:

$C = 6\,000 \cdot (1 + 0.02)^4 = 6\,000 \cdot 1.02^4 = 6\,494.59$ €.

- A que interese composto hai que investir 10 000 euros para obter en 10 anos ao menos 16 000 euros?

$$16\,000 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1.6 = \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[10]{1.6} = 1.048 \Rightarrow \frac{r}{100} = 0.048$$

Así pois $r = 4.8\%$.

- Cando a incógnita é o número de anos (que está no expoñente) necesitamos tomar logaritmos para resolvelo: Se ingresamos nun banco 3 000 € ao 4 % de interese composto anual, cantos anos teñen que pasar para conseguir 4 500 €?

$4\,500 = 3\,000 \cdot (1 + 0.04)^n \Rightarrow 1.5 = 1.04^n \Rightarrow \log 1.5 = n\log 1.04 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1.5}{\log 1.04} = 10.34$ anos (teremos que agardar 11 anos).

- A fórmula do interese composto tamén se utiliza para os problemas de **crecemento ou decrecemento de poboacións**, que é unha función exponencial: Por exemplo, se a poboación dun país aumenta un 3% cada ano e actualmente ten 15 millóns de habitantes, cantos terá ao cabo de 5 anos?

$15\,000\,000 \cdot (1 + 0.03)^5 = 15\,000\,000 \cdot 1.03^5 = 17\,383\,111$ habitantes.

Actividades propostas

12. Sabendo que $\log 2 = 0.301$ e que $\log 3 = 0.477$ calcula:
a) $\log 5$ b) $\log 25$ c) $\log 24$ d) $\log 60$

13. Sabendo que $\log 8 = 0.903$, e sen utilizar calculadora, calcula os seguintes:
a) $\log 80$ b) $\log 2$ c) $\log 64$ d) $\log 0.8$ e) $\log 1.25$ f) $\log \sqrt[3]{800}$

14. Toma logaritmos e desenvolve: a) $A = \dfrac{2x^3y^2}{3z}$ b) $B = \dfrac{\sqrt{x^3y^2}}{10z}$

15. Reduce a un único logaritmo cada expresión:
a) $\log 2 - \log 12 + 1 + \log 3$ b) $2\log 5 + \dfrac{1}{2}\log 5 - 2$ c) $2\log 2a - \log a$

16. Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:
a) $\log(x + 1)^2 = 6$ b) $\log x + \log 5 = \log 20$ c) $\log(7 - 3x) - \log(1 - x) = \log 5$

17. Cando naceu un neno os seus pais colocaron 1.000 euros nunha cartilla de aforro ao 2.5 % de interese composto anual. Canto diñeiro terá a conta cando o neno cumpra 15 anos?

18. A poboación de certas bacterias multiplícase por 1.5 cada día. Se ao comezo hai 18 millóns de bacterias, cantas haberá ao cabo dunha semana?

19. A que tanto por cento de interese composto hai que investir un capital de 20 000 euros para gañar 1 000 euros en tres anos?

20. Se investimos 7 000 euros ao 1.35 % de interese composto anual, cantos anos deben transcorrer para ter gañado polo menos 790 euros?

21. Calcula en cantos anos se duplica unha poboación que crece ao ritmo do 10 % anual.

22. Se unha poboación de 8 millóns de habitantes se converteu en 15 millóns en 7 anos, canto medrou cada ano? (*Ollo*: non se trata de dividir entre 7!).

2.3. Funcións logarítmicas

2.3.1. Gráfica e características

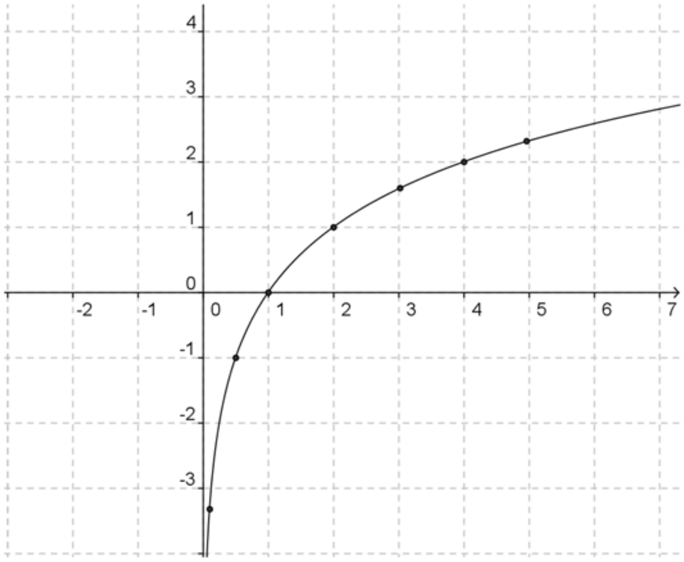
As funcións logarítmicas son as do tipo $y = \log_b x$.

Hai unha función distinta para cada valor da base b.

Exemplos:

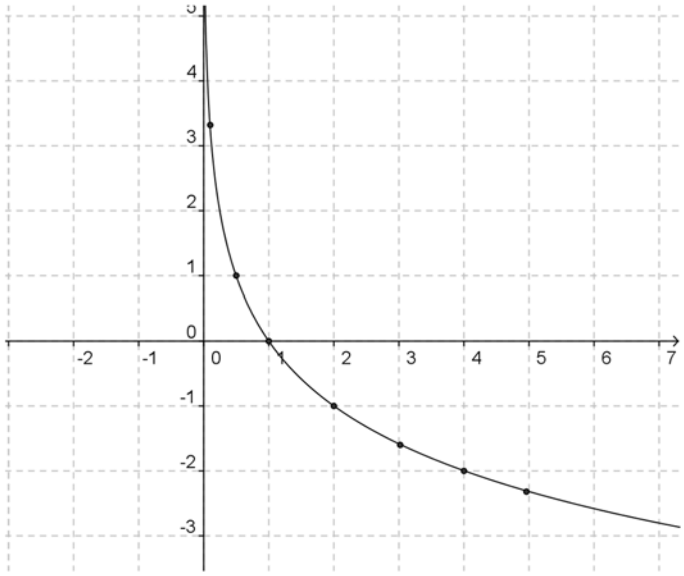
- A táboa de valores e a gráfica da función $y = \log_2 x$ son as seguintes:

x	$\log_2 x$
0.1	-3.3
0.5	-1.0
0.7	-0.5
1	0.0
2	1.0
3	1.6
4	2.0
5	2.3
...	...



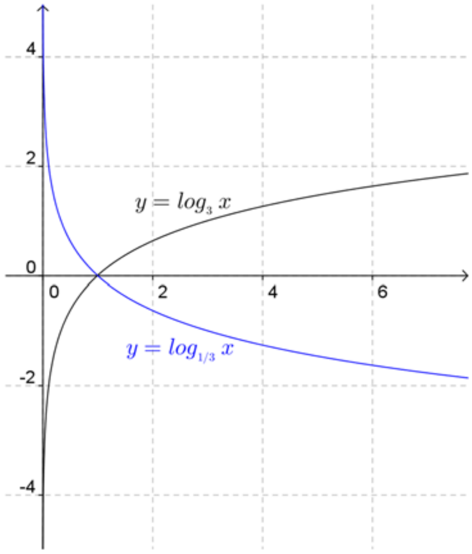
- A táboa de valores e a gráfica da función $y = \log_{1/2} x$ son as seguintes:

x	$\log_{1/2} x$
0.1	3.3
0.5	1.0
0.7	0.5
1	0.0
2	-1.0
3	-1.6
4	-2.0
5	-2.3...
...	



As características destas gráficas permítennos deducir as das funcións logarítmicas en xeral que son as seguintes:

- O seu **dominio** é (0, +∞). É dicir, só están definidas para "x" positivo.
- Son continuas.
- O seu **percorrido** é toda a recta real.
- Pasan polos puntos (1, 0), (b, 1) e (1/b, –1).
- A gráfica de $y = \log_b x$ e a de $y = \log_{1/b} x$ son simétricas respecto do eixe OX.



Por outra parte observamos unhas características propias nas funcións en ambas as ilustracións, segundo sexa a base do logaritmo maior ou menor que a unidade.

Cando a base é b > 1:

- Son funcións **crecentes**. Canto maior é a base o crecemento é máis rápido.
- Cando $x \to 0$ a función tende a –∞. Polo tanto presenta unha **asíntota vertical** na parte negativa do eixe OY.
- Aínda que nalgún casos poida aparentalo, non presentan asíntota horizontal, pois a variable "y" pode chegar a calquera valor.

Cando a base é 0 < b < 1:

- Son funcións **decrecentes**. Canto menor é a base o decrecemento é máis rápido.
- Cando $x \to 0$ a función tende a +∞. Polo tanto presenta unha **asíntota vertical** na parte positiva do eixe OY.
- Aínda que nalgúns casos poida aparentalo, non presentan asíntota horizontal, pois a variable "y" pode chegar a calquera valor.

2.3.2. Relación entre as funcións exponencial e logarítmica

Segundo a definición do logaritmo temos a seguinte relación: $y = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$

As funcións logarítmica e exponencial levan intercambiado o lugar do "x" e o "y". Polo tanto son **funcións inversas**.

En consecuencia, se partimos dun número e lle aplicamos a función logarítmica e logo ao resultado lle aplicamos a función exponencial, volvemos ao número de partida. O mesmo ocorre se primeiro aplicamos a función exponencial e despois a logarítmica.

Exemplo:

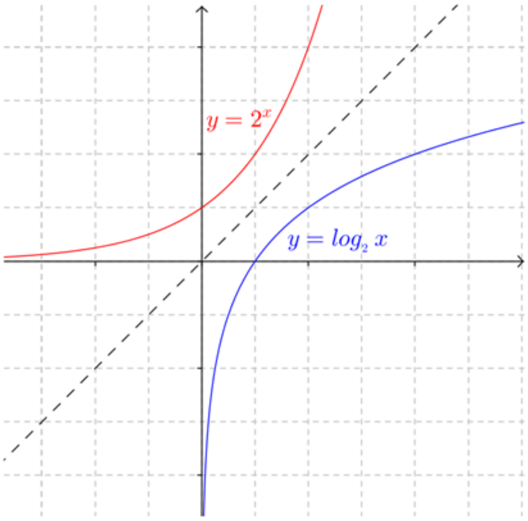
- Partindo do número 3, utilizando a calculadora, aplicamos unha función logarítmica: $log_5 3 = 0.6826$ (recorda a fórmula do cambio de base). A continuación, aplicamos a función exponencial: $5^{0.6826} = 3$ e obtemos o número do principio.
- Facéndoo en sentido inverso, partindo do número 3 aplicamos primeiro unha función exponencial: $5^3 = 125$. A continuación, aplicamos a función logarítmica: $\log_5 125 = 3$ e tamén obtivemos o número do principio.

Cando dúas funcións son inversas as súas gráficas son **simétricas**, sendo o seu eixe de simetría a bisectriz do primeiro cuadrante.

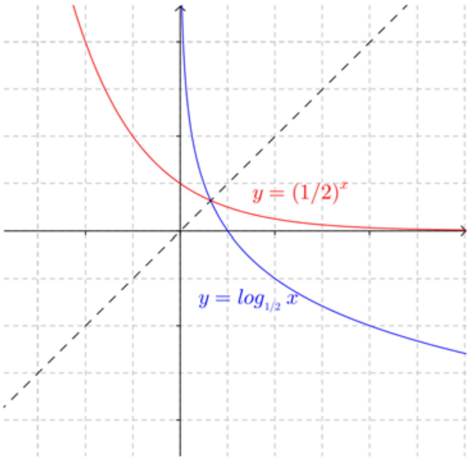
Isto débese a que se o punto (*a*, *b*) é da gráfica dunha delas, o punto (*b*, *a*) pertence á gráfica da outra.

Exemplos:

- As gráficas das funcións $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = 2^x$ teñen a seguinte simetría:



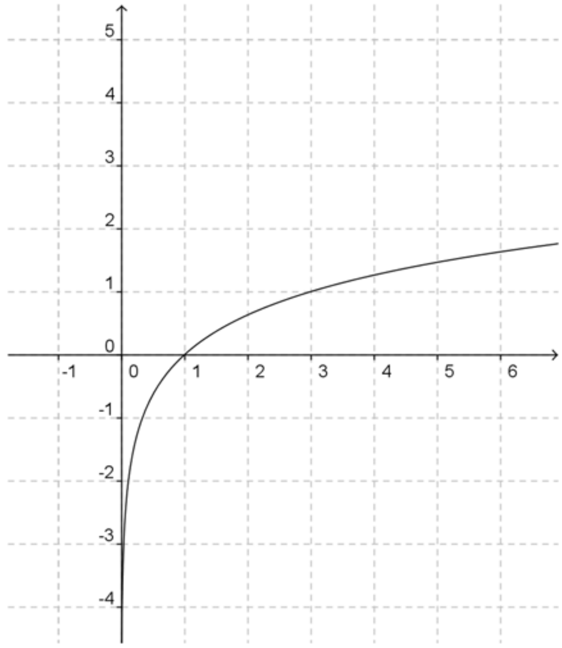
- As gráficas das funcións $f(x) = \log_{1/2} x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ teñen a seguinte simetría:



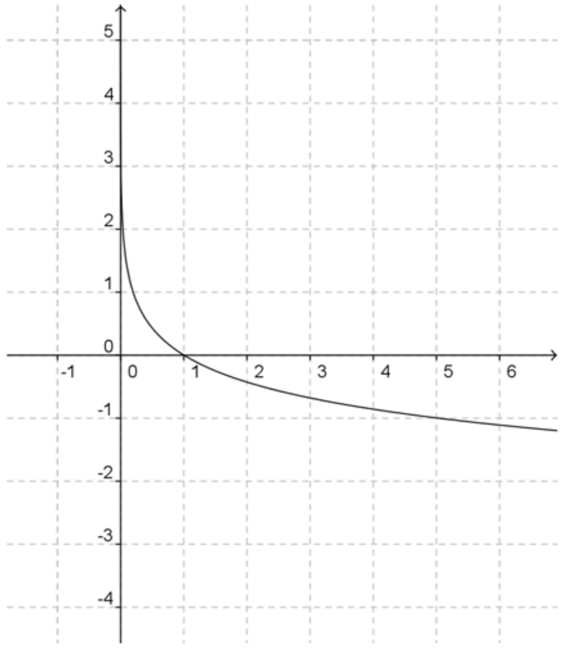
Actividades resoltas

- Identifica as funcións correspondentes coas seguintes gráficas:

a)



b)



Solución:

Ambas as dúas son funcións logarítmicas porque pasan polo punto (1, 0) e teñen como asíntota vertical o eixe OY (ben sexa na súa parte positiva ou negativa) e polo outro lado tenden a ∞.

A función (a) é $y = \log_3 x$ porque pasa polo punto (3, 1) e por (1/3, –1).

A función (b) é $y = \log_{1/5} x$ porque pasa polo punto (5, –1) e por (1/5, 1).

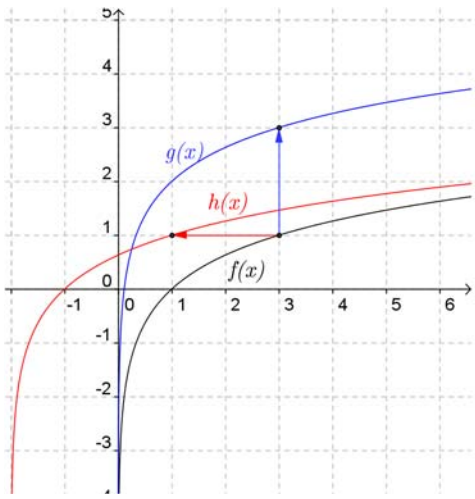
- Coñecendo a gráfica da función $f(x) = \log_3 x$, que se viu máis arriba, e sen calcular valores, debuxa as gráficas das funcións $g(x) = \log_3 x + 2$ e $h(x) = \log_3 (x+2)$.

Solución:

A función $g(x)$ é a función $f(x)$ desprazada cara arriba 2 unidades.

A función $h(x)$ é a función $f(x)$ desprazada cara á esquerda 2 unidades.

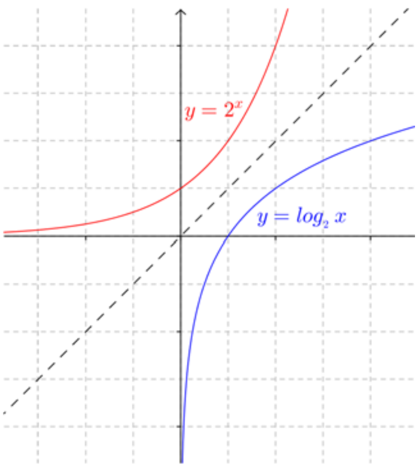
Polo tanto as súas gráficas son estas:



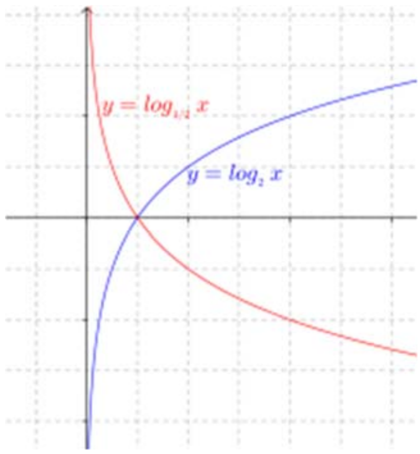
- Representa a función $y = \log_2 x$ usando unha táboa de valores. A continuación, a partir dela e sen calcular valores, representa as funcións seguintes: $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$, e utilizando tamén $y = 2^x$ representa $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución:

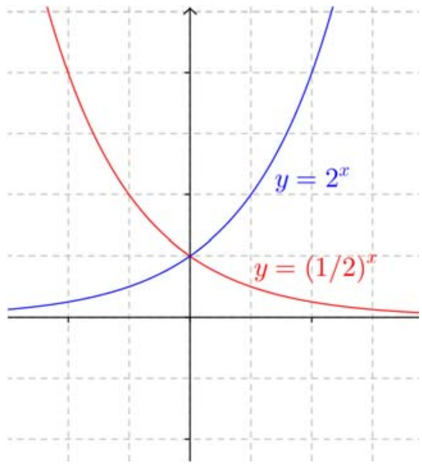
Pola simetría respecto á bisectriz do primeiro cuadrante:



Pola simetría respecto ao eixe OX:



Pola simetría respecto ao eixe OY:



Actividades propostas

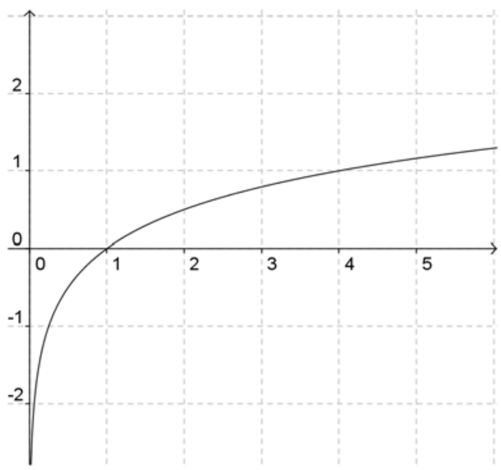
23. Representa no teu caderno, mediante táboas de valores, as gráficas das seguintes funcións:

a) $f(x) = \log_2 x$ b) $f(x) = \log_{1/2} x$ c) $f(x) = \log_{1,5} x$

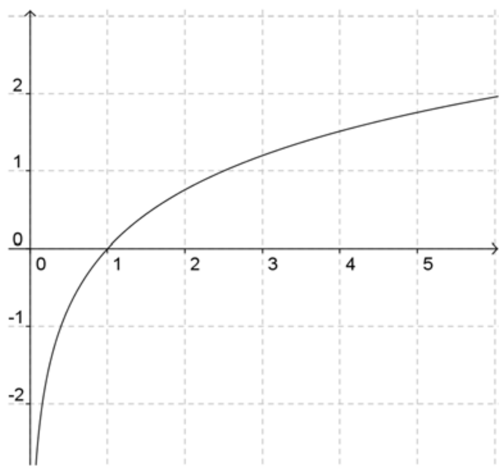
Comproba que en todos os casos pasan polos puntos (1, 0), (*b*, 1) e (1/*b*, –1).

24. Identifica as fórmulas das seguintes funcións a partir das súas gráficas, sabendo que son funcións logarítmicas:

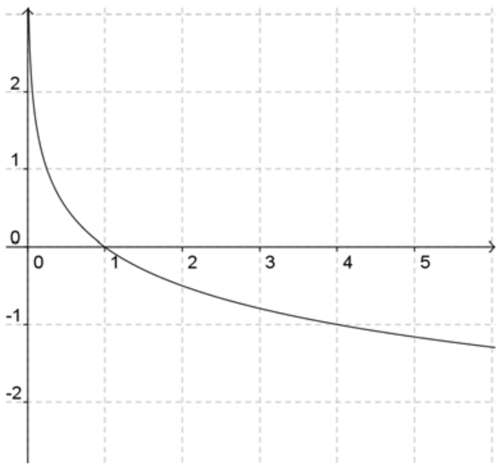
a)



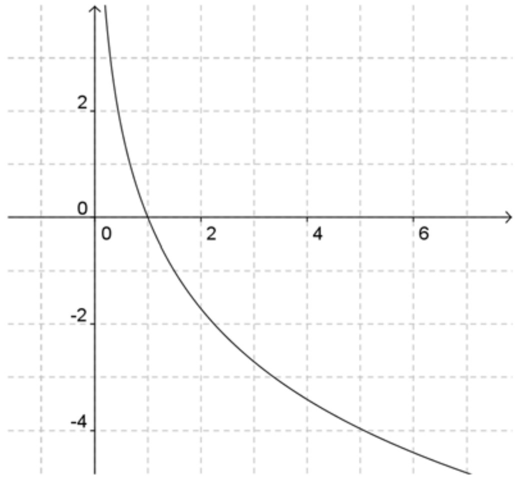
b)



c)



d)



25. Repite no teu caderno o debuxo da función $f(x)=\log_2 x$ representada no exercicio 23. Despois pensa que desprazamento sofren respecto a ela as funcións seguintes e represéntaas na mesma gráfica sen facer táboas de valores:

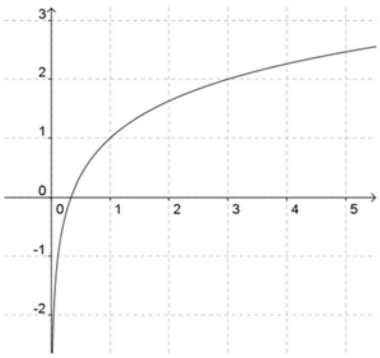
a) $g(x)=\log_2 x+3$ b) $h(x)=\log_2 x-3$ c) $i(x)=\log_2(x+3)$ d) $j(x)=\log_2(x-3)$

26. Fai o mesmo proceso do exercicio anterior coas funcións seguintes:

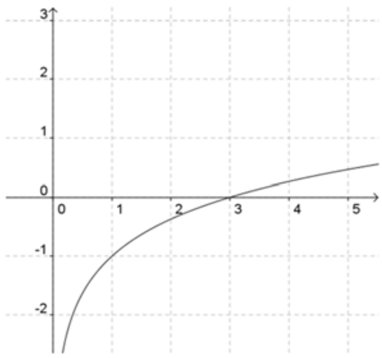
a) $g(x)=\log_2 x+2$ b) $h(x)=\log_2 x-2$ c) $i(x)=\log_2(x+2)$ d) $j(x)=\log_2(x-2)$

27. Identifica as fórmulas das seguintes funcións a partir das súas gráficas, sabendo que son funcións logarítmicas:

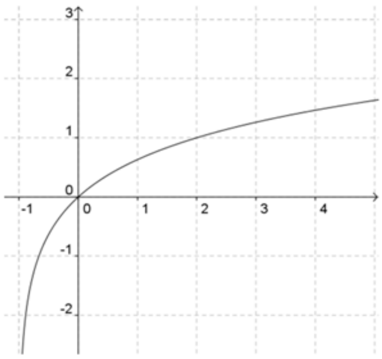
a)



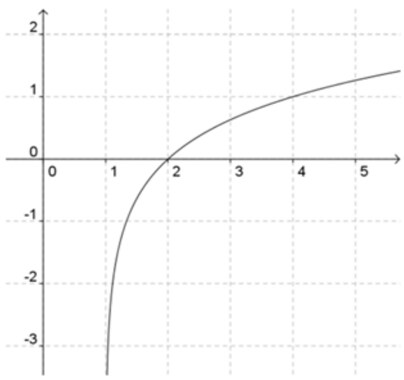
b)



c)



d)



28. Representa no teu caderno a función $y = 3^x$ usando unha táboa de valores. A continuación, a partir dela e sen calcular valores, representa as funcións seguintes: $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{1/3} x$.

3. FUNCIÓNS TRIGONOMÉTRICAS

No capítulo 7 estudaches Trigonometría polo que xa coñeces as razóns trigonométricas seno, coseno e tanxente dun ángulo. Agora imos estudar as funcións trigonométricas e as súas propiedades.

Recorda que:

Un radián defínese como a medida do ángulo central cuxo arco de circunferencia ten unha lonxitude igual ao radio. Polo tanto:

$360°$ equivalen a 2π radiáns

De onde se deduce que:

$180°$ equivalen a π radiáns

$90°$ equivalen a $\pi/2$ radiáns …

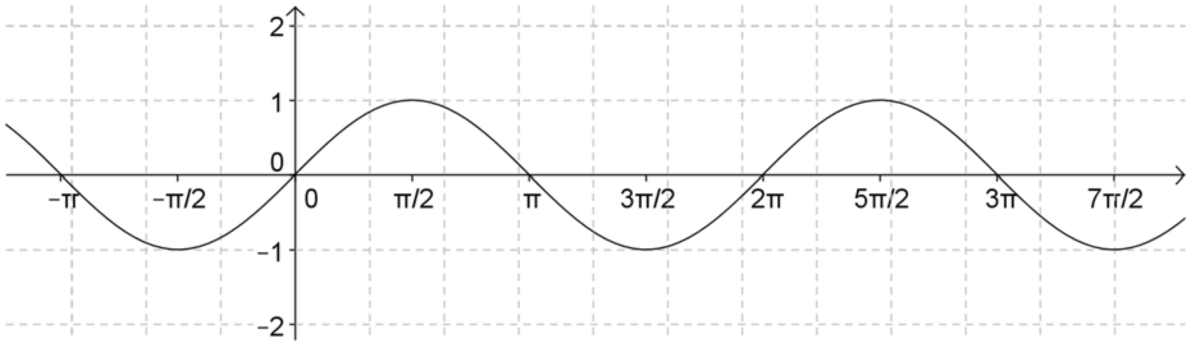
3.1. As funcións seno e coseno

Estas dúas funcións inclúense no mesmo apartado porque son moi parecidas.

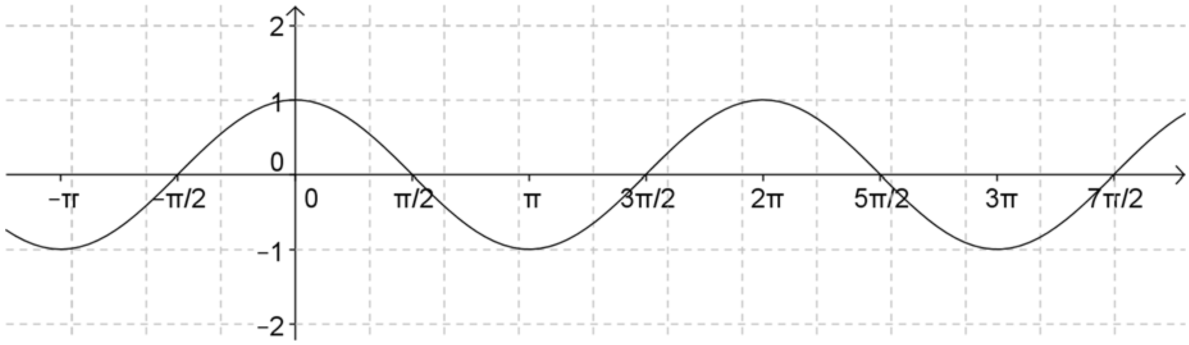
A súa gráfica é a chamada *sinusoide*, cuxo nome deriva do latín *sinus* (seno).

Xa sabes que nos estudos de Matemáticas se soe utilizar como unidade para medir os ángulos o radián. Polo tanto é necesario coñecer estas gráficas expresadas en radiáns. Podes obtelas facilmente coa calculadora. Fíxate nas súas similitudes e nas súas diferenzas:

Gráfica da función $f(x)$ = sen x



Gráfica da función $f(x)$= cos x



Xa sabes canto vale π, π = 3.14…. Teno en conta ao debuxar as gráficas.

Propiedades destas funcións:

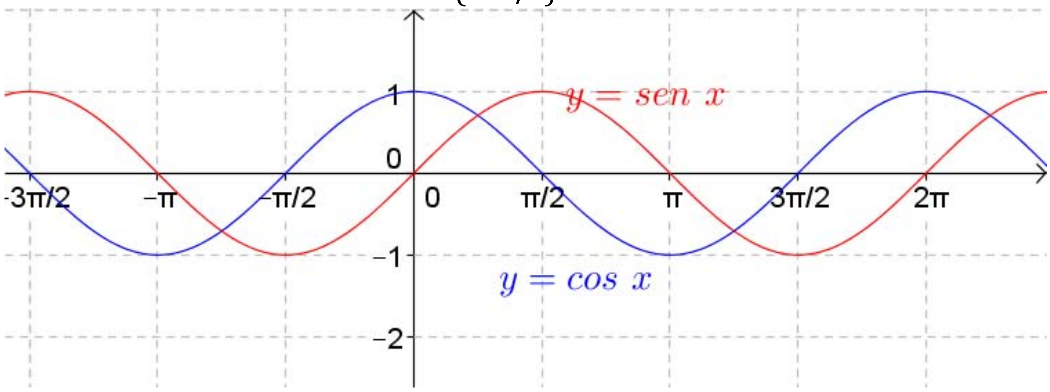
- Ambas as dúas son periódicas e o valor do seu período é 2π.

$$sen\,(x+2\pi) = sen x \qquad cos\,(x+2\pi) = cos x$$

- Son funcións continuas en todo o seu dominio.
- O seu dominio son todos os números reais.
- O seu percorrido é o intervalo [–1 , 1].

- A función seno ten simetría impar (simétrica respecto da orixe de coordenadas, é dicir, $senx = -sen\ (-x)$) e a función coseno ten simetría par (simétrica respecto do eixe OY, é dicir, $cosx = cos(-x)$).
- Ambas as funcións teñen a mesma gráfica pero desprazada en $\frac{\pi}{2}$ radiáns en sentido horizontal. é dicir:

sen $(x+\pi/2) = \cos x$

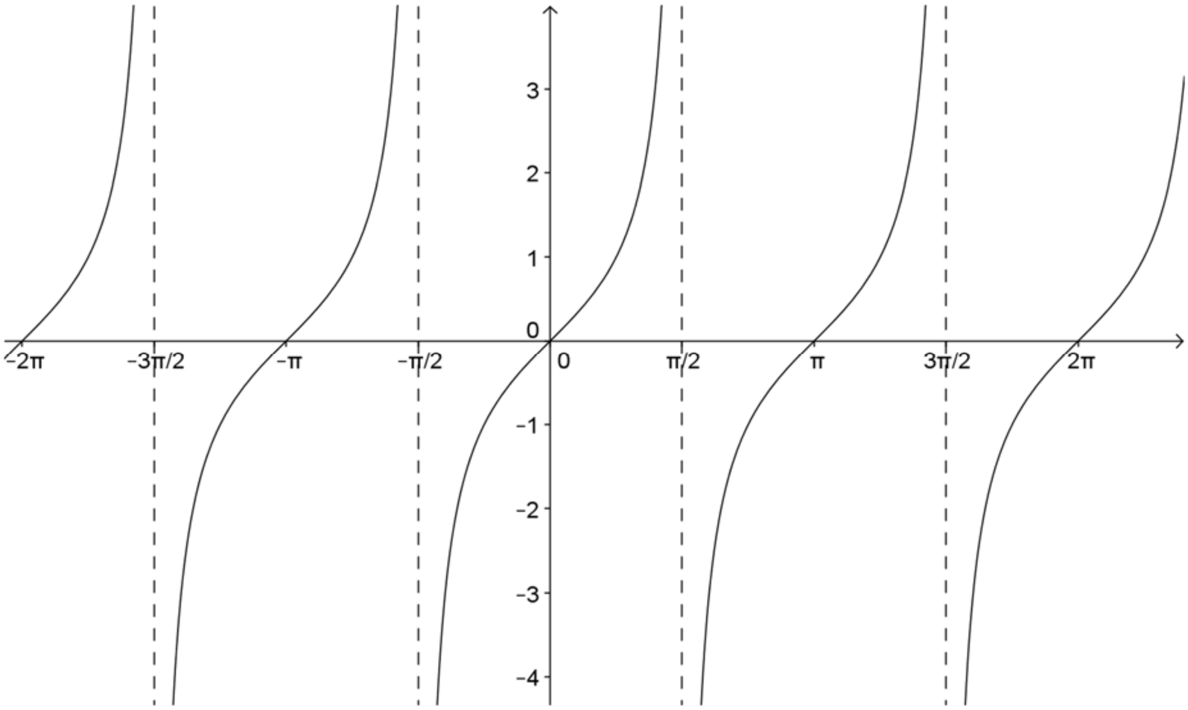


3.2. A función tanxente

Esta función é diferente ás outras dúas. Por esa razón presentámola separadamente.

Xa sabes que como razóns trigonométricas: $tg\ x = sen\ x / cos\ x$.

A gráfica da función $f(x) = tg\ x$ é a seguinte:



Recordamos en primeiro lugar que non existe a tanxente para os ángulos de ±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.

As propiedades desta función son as seguintes:

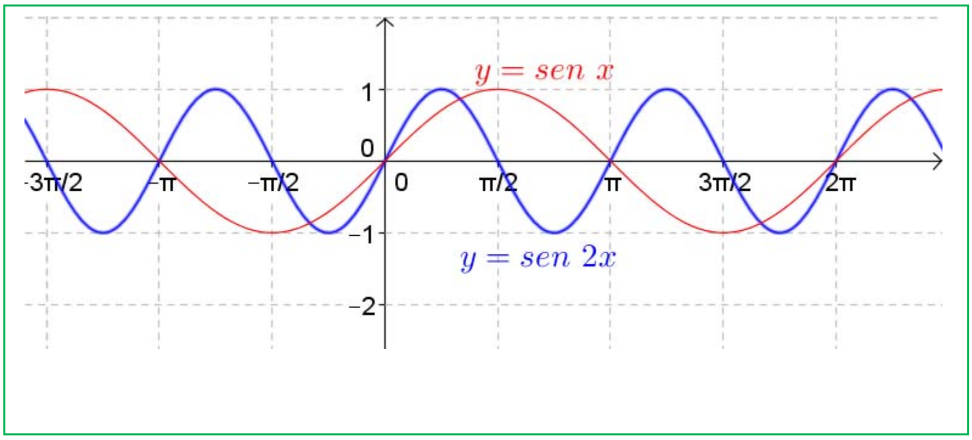
- É unha función periódica e o valor do seu período é agora menor, é π: tg $(x+\pi)$ = tg x.
- O seu dominio son todos os números reais excepto os múltiplos de π/2 por un número impar (±π/2, ±3π/2, ±5π/2, etc.), onde non existe. Neses valores presenta descontinuidades chamadas descontinuidades *inevitables*, porque non se poderían "taponar" mediante un punto.
- Ten asíntotas verticais neses mesmos valores do x. Representámolas no gráfico mediante liñas descontinuas.
- Ten simetría impar: é simétrica respecto da orixe de coordenadas, xa que tg(x) = –tg(–x)

Actividades resoltas

- Representa as gráficas das funcións y = sen$(2x)$ e y = 2sen x comparándoas despois coa gráfica de y = sen x.

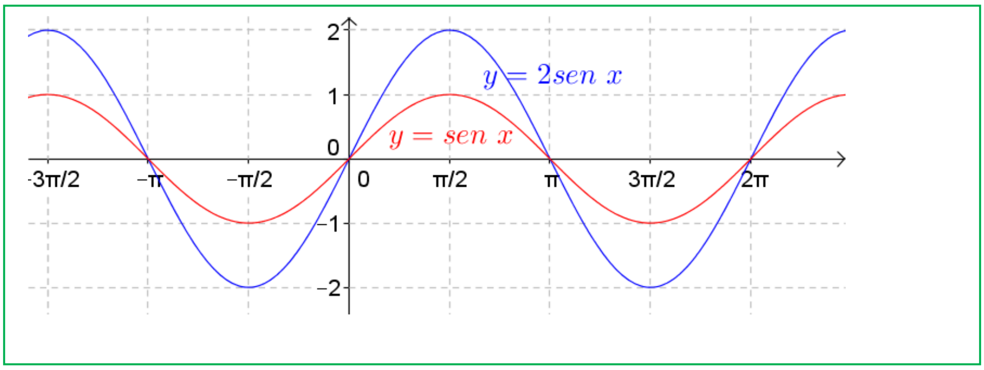
Solución:

Dando valores coa calculadora obtemos as seguintes gráficas, representadas en azul xunto á da función sen x, representada en vermello:



A gráfica de y = sen$(2x)$ é igual á de y = sen x contraéndoa horizontalmente. Cambia o período, que agora é de π.

A gráfica de y = 2sen x é igual á de y = sen x expandíndoa verticalmente. Teñen o mesmo período pero cambia a amplitude. Cando y = sen x acada en π/2 un valor máximo de 1, y = 2sen x acada en π/2 un valor máximo de 2. Dicimos que a súa amplitude vale 2.



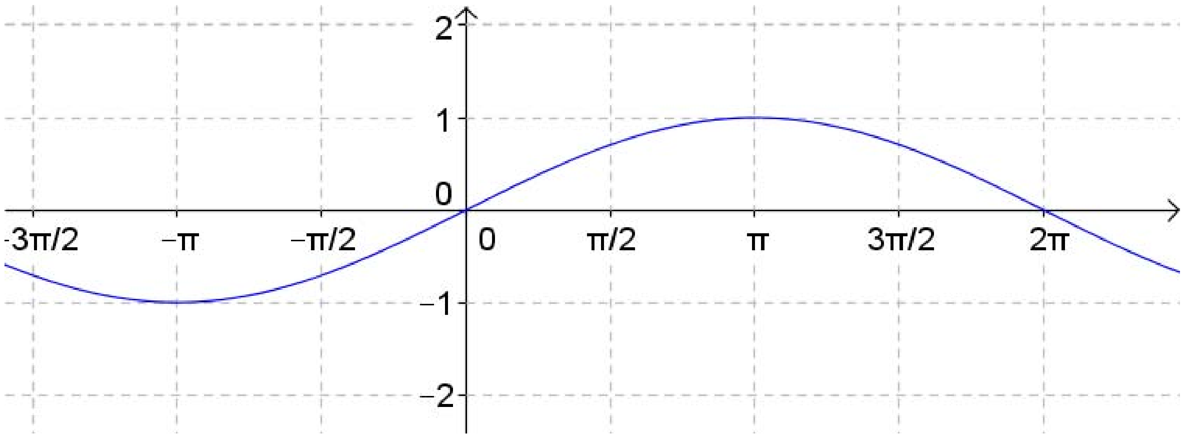
Actividades propostas

29. Representa no teu caderno as gráficas das funcións $y = \cos x$, $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ e $y = \frac{1}{2}\cos x$ comparándoas despois coa gráfica de $y = \cos x$.

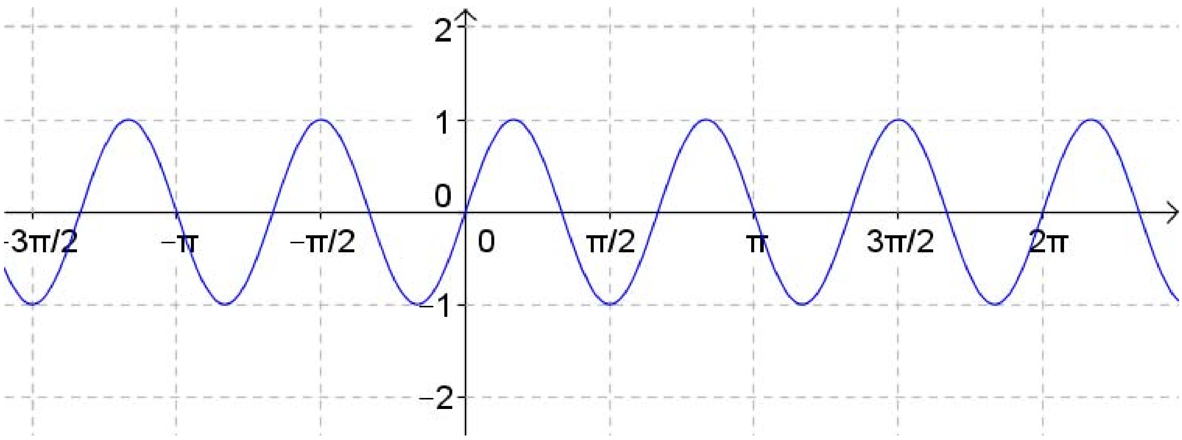
30. Partindo da gráfica da función e = sen x, representa no teu caderno, sen facer táboas de valores, as gráficas de $y = 1 + \text{sen } x$ e de $y = \text{sen }(x + \pi/6)$.

31. Identifica as gráficas das seguintes funcións trigonométricas:

a)



b)



CURIOSIDADES. REVISTA

As poboacións crecen exponencialmente

Nos modelos que se utilizan para estudar as poboacións utilízase a función exponencial. Suponse que unha poboación dunha certa especie crece exponencialmente mentres teña alimento suficiente e non existan depredadores. Chega un momento no que a poboación encheu o territorio (a Terra é finita) e entón cambia a función que se utiliza, estabilizándose o crecemento.

Isto permite estudar o crecemento das bacterias que se reproducen por fisión binaria, ou o crecemento das células do feto, ou a poboación de coellos cando chegaron a Australia... Malthus afirmou que se a poboación humana crecía de forma exponencial e a produción de alimentos crecía de forma lineal habería graves fames.

Logaritmos

Non hai tanto tempo non existían as calculadoras. Para calcular logaritmos usábanse “táboas”. Había unhas táboas de logaritmos que eran un libro cun lomo duns tres dedos de ancho. Usábanse en problemas de astronomía nos que había que utilizar fórmulas de trigonometría para resolvelos e se usaban números con moitas cifras decimais (máis de 10). Imaxinas o que é multiplicar ou dividir números con esas cifras decimais! Resultaba moi conveniente transformar as multiplicacións en sumas e divisións en restas. Esta mesma idea é a que levou *John Napier* (o *Neper*) a inventar os logaritmos.

Non todo o podes calcular con calculadora

Utiliza a túa calculadora para calcular 45^{79}. Verás que dá *erro*. Pero se usas logaritmos podes calculalo facilmente.

$$y = 45^{79} \Rightarrow$$

$$\log y = \log 45^{79} = 79 \cdot \log 45 = 130.6037886 \Rightarrow$$

$$y = 10^{130} \cdot 10^{0.6037886} \Rightarrow$$

$$10^{0.6037886} = 4.016 \Rightarrow$$

$$y = 45^{79} = 4.016 \cdot 10^{130}.$$

Decrecemento exponencial

Moitos fenómenos modélanse con funcións exponenciais de base menor que 1, como

- A desintegración de átomos dunha substancia radiactiva.
- A intensidade luminosa dun raio de luz.
- A probabilidade de supervivencia de certas especies que non teñen xeneticamente determinado o envellecemento celular.

Carbono 14

O carbono 14 é un isótopo radiactivo cun período de semi-desintegración (vida media) de 5 568 anos, moi utilizado para datar restos orgánicos. As plantas, por fotosíntese, e os animais, por inxestión, incorporan o carbono na mesma proporción que existe na atmosfera e, ao morrer o ser vivo, empeza o proceso de desintegración.

Sophia Kovalevkaya

Coñecemos moi ben moitas anécdotas da vida de *Sophia* (ou *Sonia* como a ela lle gustaba que a chamaran), unha muller matemática con teoremas co seu nome, porque escribiu a súa biografía nun precioso libro chamado *Unha infancia en Rusia*.

Cando *Sophia* tiña 14 anos, a súa familia recibiu a visita de *Nikolai Nikanorovich Tyrtov*, un veciño profesor de física, que lle deixou á familia unha copia do seu novo libro sobre esta materia. Sonia comezou a estudalo e quedou atascada ao chegar á sección de óptica na que se utilizaban razóns trigonométricas que non vira nunca. Entón foi directamente a *Tyrtov* preguntarlle que era exactamente un *seno* pero el, sen facerlle demasiado caso, contestoulle que non o sabía. De modo que *Sonia* comenzou a analizar e a explicar o que era un seno partindo das cousas que xa coñecía chegando a substituílo polo arco que, dado que as fórmulas que trataba o libro se aplicaban en ángulos moi pequenos, o aproximaban bastante ben. A seguinte vez que *Tyrtov* foi de visita á casa, *Sonia* pediulle que discutisen sobre o seu libro e el, tras intentar cambiar de tema, concluíu que o atopaba demasiado difícil para ela. Sonia comentoulle que o texto non tivera ningunha dificultade para ela e mesmo lle explicou como fora deducindo todo aquilo que non coñecía e que se utilizaba no libro. Tyrtov quedou estupefacto e comentoulle ao pai de Sonia que o seu desenvolvemento sobre o concepto de seno fora exactamente o mesmo co que historicamente se introducira tal concepto nas Matemáticas.

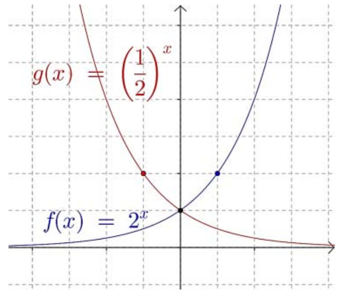
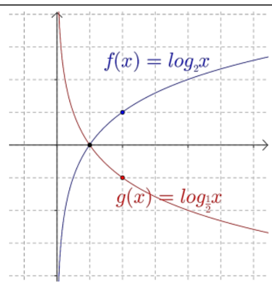
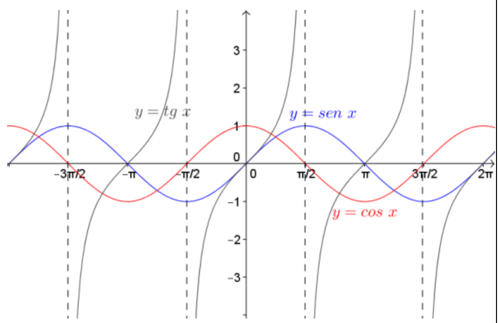
Fourier e o concepto de función

O concepto de función tardou moito en ser comprendido mesmo polos matemáticos, só dispostos a aceptar dous tipos de funcións, as que viñan dadas por unha fórmula ou as que se trazaban arbitrariamente debuxando a súa gráfica. A idea abstracta de función como correspondencia tardou un tempo en aparecer.

Foi *Joseph Fourier* na súa obra *A teoría analítica da calor* o motor para o afondamento do concepto de función. *Fourier* viviu durante a Revolución Francesa e participou na expedición de *Napoleón* a Exipto. Era moi frioleiro e por iso lle interesaba a propagación da calor. Na súa obra afirma que "toda" función podía escribirse como unha suma infinita de funcións seno e coseno.

Antoni Zygmund escribiu *"Esta teoría foi unha fonte de novas ideas para os analistas durante os dos últimos séculos e probablemente o será nos próximos anos. Moitas nocións e resultados básicos da teoría de funcións foron obtidos por matemáticos traballando sobre series trigonométricas".* Engade que esa obra de *Fourier* foi o catalizador para fixar o concepto de función, a definición de integral, afondar na Teoría de Conxuntos e actualmente coa Teoría de Funcións Xeralizadas ou Distribucións.

RESUMO

Noción	*Definición*	*Exemplos*
Función exponencial $y = b^x$	Dominio: Todos os números reais. Percorrido: Todos os números reais positivos. Continua en todo o dominio Asíntota horizontal: $y = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Crecente en todo o dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decrecente en todo o dominio Puntos destacables: $(0, 1)$, $(1, b)$, $(-1, 1/b)$	
Definición de logaritmo	$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a \quad (a > 0, b > 0, b \neq 1)$ Consecuencias elementais: $\log_b b = 1 \quad \log_b 1 = 0$	$\log_5 125 = 3$ $\log_4 8 = 3/2$
Cambio de base	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$	$log_4 7 = \frac{log\ 7}{log\ 4} = 1.40$
Operacións con logaritmos	Logaritmo dun produto: $\mathbf{\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ Logaritmo dun cociente: $\mathbf{\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y}$ Logaritmo dunha potencia: $\mathbf{\log_b x^y = y \cdot \log_b x}$	$\log \frac{\sqrt{b^3 c}}{x^2} =$ $\frac{1}{2}(3\log b + \log c) - 2\log x$
Función logarítmica $y = \log_b x$	*Dominio*: Todos os números reais positivos. *Percorrido*: Todos os números reais. **Continua** en todo o dominio Asíntota vertical: $x = 0$ $b > 1 \Leftrightarrow$ Crecente en todo o dominio. $0 < b < 1 \Leftrightarrow$ Decrecente en todo o dominio Puntos destacables: $(1, 0)$, $(b, 1)$, $(1/b, -1)$	
Funcións trigonométricas $y = \text{sen}\ x$ $y = \cos x$ $y = \text{tg}\ x$	<u>**Funcións seno e coseno**</u>: *Dominio*: Todos os números reais *Percorrido*: $[-1, 1]$ Continuas en todo o dominio. Periódicas de período 2π. <u>**Función tanxente**</u>: *Dominio e continuidade*: Todo $\Re$ agás $(2n+1)\cdot\pi/2$ (Neses valores hai asíntotas verticais). *Percorrido*: Todos os números reais. Periódica de período π. <u>**Simetría**</u>: Funcións seno e tanxente: simetría impar. Función coseno: simetría par.	

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Función exponencial

1. Representa mediante unha táboa de valores as seguintes funcións:

a) $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ b) $y=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$ c) $y=2^{x/2}$ d) $y=3^{-2x}$

2. Representa mediante unha táboa de valores a función $y=3^x$ e a continuación, sen táboa de valores, representa estoutras sobre o mesmo debuxo:

a) $y=3^x-1$ b) $y=3^x+1$ c) $y=3^{x+1}$ d) $y=3^{x-1}$

3. Encontra unha función exponencial $f(x)=b^x$ sabendo que $f(2)=9$.

4. Encontra unha función $f(x)=k{\cdot}b^x$ sabendo que $f(4)=48$ e que $f(0)=3$.

5. Se un capital de 3 500 euros se multiplica cada ano por 1.02 representa nun gráfico a evolución dese capital nos 10 primeiros anos. Escolle unhas proporcións adecuadas para os eixes.

6. Certo tipo de células reprodúcese por bipartición, comprobándose que o número delas se duplica cada día. Se nun día determinado o número de células era de 4 millóns:

a) Expresa mediante unha función o número de células en función do número de días.

b) Calcula o número de células que haberá dentro de 3 días e o que había hai 3 días.

c) En que día pensas que o número de células era de 31 250?

7. A descomposición de certo isótopo radioactivo vén dada pola fórmula $y = y_0 \cdot 2.7^{-0.25t}$, onde y_0 representa a cantidade inicial e t o número de milenios transcorrido. Se a cantidade actual é de 50 gramos, cal será a cantidade que queda ao cabo de 8 000 anos? Cal era a cantidade que había hai 5 000 anos?

Función logarítmica

8. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e sen utilizar a calculadora:

a) $\log_5 625$ b) $\log_2 128$ c) $\log 1\,000$ d) $\log_3 \dfrac{1}{27}$ e) $\log_5 0.2$ f) $\log 0.1$

9. Calcula os seguintes logaritmos utilizando a definición e igualando expoñentes, sen calculadora:

a) $\log_9 3$ b) $\log_4 3\,2$ c) $\log_2 0.125$ d) $\log_9 27$ e) $\log_2 \sqrt{8}$ f) $\log_8 2$

g) $\log_3 0.333...$ h) $\log_8 \sqrt{2}$ i) $\log_3 \sqrt[4]{27}$ j) $\log \sqrt{1\,000}$

10. Calcula os seguintes logaritmos coa calculadora utilizando a fórmula do cambio de base:

a) $\log_5 7$ b) $\log_9 12$ c) $\log_{20} 0.1$ d) $\log_{13} \sqrt{8}$ e) $\log_{16} \sqrt{1\,000}$

11. Utilizando os valores log 2 = 0.301 e que log 3 = 0.477 calcula, aplicando as propiedades dos logaritmos e sen calculadora:

a) $\log 27$ b) $\log 12$ c) $\log 20$ d) $\log 50$ e) $\log \sqrt{6}$ f) $\log \sqrt[3]{25}$

12. Chamando log9 = *x* expresa en función de *x* os seguintes logaritmos:

a) $\log 81$ b) $\log 900$ c) $\log 0.\hat{1}$ d) $\log 0.9$ e) $\log \sqrt[3]{900}$

13. Resolve as seguintes ecuacións logarítmicas:

a) $2 \log x = \log (10 - 3x)$

b) $\log 2 + \log (11 - x^2) = 2 \log (5 - x)$

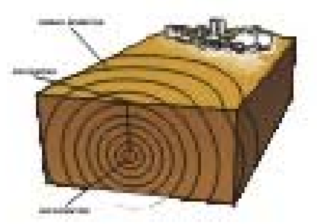
c) $\log (x^2 + 3x + 2) - \log (x^2 - 1) = \log 2$

d) $\log x + \log (x + 15) = 2$

14. Que relación hai entre o logaritmo dun número *x* e o do seu inverso 1/*x*?

15. Se se multiplica por 36 o número *x*, o seu logaritmo en certa base aumenta en dúas unidades. Cal é esta base?

16. A *escala Richter*, usada para medir a intensidade dos terremotos, é unha escala logarítmica: un terremoto de magnitude 5 é 100 veces máis intenso que un de magnitude 3, porque 5 = log 100 000 e 3 = log 1 000. Tendo isto en conta, se o famoso terremoto de San Francisco (en 1906) tivo unha magnitude de 8.2 e o de Haití (en 2010) foi de 7.2, cantas veces máis forte foi un que outro?



Terremoto

Funcións trigonométricas

17. Determina todos os ángulos que verifican que $sen\ x = 1/2$.

18. Determina todos os ángulos que verifican que $sen\ x = -1/2$.

19. Determina todos os ángulos que verifican que $cos\ x = 1/2$.

20. Determina todos os ángulos que verifican que $cos\ x = -1/2$.

21. Determina todos os ángulos que verifican que $tg\ x = -1$.

22. Calcula $sen\ x$ e $cos\ x$ se $tg\ x = -3$.

23. Calcula $sen\ x$ e $tg\ x$ se $cos\ x = 0.4$.

24. Calcula $tg\ x$ e $cos\ x$ se $sen\ x = -0.3$.

25. Calcula as razóns trigonométricas dos ángulos expresados en radiáns seguintes:

a) $17\pi/3$, b) $-20\pi/3$, c) $13\pi/2$, d) $-9\pi/2$.

26. Debuxa no teu caderno sobre uns mesmos eixes as gráficas das funcións seno, coseno e tanxente e indica o seguinte: a) Se o seno vale cero, canto valen o coseno e a tanxente? b) Se o coseno vale cero, canto valen o seno e a tanxente? c) Se a tanxente vale cero, canto valen o seno e o coseno? d) Cando a tanxente tende a infinito, canto vale o coseno?

27. Debuxa a gráfica da función $y = sen(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(2x)$					
y					

a) A amplitude é a ordenada do máximo. Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) A frecuencia é a inversa do período, cal é a súa frecuencia?

28. Debuxa a gráfica da función $y = 3\text{sen}(\pi x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

29. Debuxa a gráfica da función $y = 2sen((\pi/3)x) + \pi/2$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$(\pi/3)x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen((\pi/3)x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

30. Debuxa a gráfica da función $y = 3sen(\pi x + 2)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sen(\pi x + 2)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?
b) Cal é o seu período?
c) Cal é a súa frecuencia?

31. Debuxa a gráfica da función $y = cos(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(2x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?

b) Cal é o seu período?

c) Cal é a súa frecuencia?

32. Debuxa a gráfica da función $y = 3cos(\pi x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
πx	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?

b) Cal é o seu período?

c) Cal é a súa frecuencia?

33. Debuxa a gráfica da función $y = 2cos(\pi x + 2)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$\pi x + 2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$cos(\pi x + 2)$					
y					

a) Cal é a amplitude desta función?

b) Cal é o seu período?

c) Cal é a súa frecuencia?

34. Debuxa a gráfica da función $y = tg(2x)$, completando previamente a táboa seguinte no teu caderno:

x					
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$tg(2x)$					
y					

Cal é o seu período?

Problemas

35. Por efecto dun antibiótico o número de bacterias dunha colonia redúcese nun 7 % cada hora. Se no momento de administrarse o antibiótico había 40 millóns de bacterias, cantas haberá ao cabo de 10 horas?

36. Unha persoa inxire ás 8 da mañá unha dose de 10 mg de medicamento. Este medicamento vaise eliminando a través dos ouriños e a cantidade que queda no corpo ao cabo de *t* horas vén dada pola fórmula $M(t) = 10 \cdot 0.8^t$. Para que o medicamento faga efecto ten que haber polo menos unha cantidade de 2 mg no corpo. Canto tempo seguirá facendo efecto despois da súa inxestión?

37. A medida da presión atmosférica P (en milibares) a unha altitude de *x* quilómetros sobre o nivel do mar está dada pola ecuación $P(x) = 1\,035 \cdot e^{-0.12x}$.

a) Se a presión na cima dunha montaña é de 449 milibares, cal é a altura da montaña?

b) Cal será a presión na cima do *Everest* (altitude 8 848 metros)?

38. A que tanto por cento hai que investir un capital para duplicalo en 10 anos?

39. Cantos anos debe estar investido un capital para que ao 5 % de interese se converta en 1.25 veces o capital inicial?

40. Coñeces esas bonecas rusas que levan dentro outra boneca igual pero de menor tamaño e así sucesivamente? Supoñamos que cada boneca ten dentro outra que ocupa 2/3 do seu volume. Se a boneca maior ten un volume de 405 cm^3 e a máis pequena é de 80 cm^3, cantas bonecas hai en total na serie? Poderías dar unha fórmula xeral para este cálculo?

41. Indica, sen debuxar a gráfica, o período, a amplitude e a frecuencia das funcións seguintes:

a) $y = 2\,sen\,(x/2)$, b) $y = 0.4\,cos\,(\pi x/2)$, c) $y = 5\,sen\,(\pi x/3)$, d) $y = 3\,cos\,(\pi x)$.

AUTOAVALIACIÓN

1. O valor de x que verifica a ecuación exponencial $\frac{4^{x+3}}{2^{x-1}} = 64$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) –1

2. A función exponencial $y = e^x$ tende a *** cando x tende a $-\infty$ e a *** cando x tende a $+\infty$. Indica con que valores habería que encher os asteriscos:

a) 0, $+\infty$ b) $+\infty$, 0 c) 0, $-\infty$ d) $-\infty$, 0

3. Indica cal é a función exponencial $f(x) = b^x$ que verifica que $f(3) = 27$:

a) $f(x) = 2^x$ b) $f(x) = 3^x$ c) $f(x) = 27^x$ d) $f(x) = 5^x$

4. O valor de x que verifica $x = log_2 1\,024$ é:

a) 0 b) 5 c) 10 d) Outro valor

5. A ecuación logarítmica $\log x + \log 6 = \log 30$ ten como solución:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

6. Indica a afirmación verdadeira:

a) a función exponencial de base maior que 1 é decrecente.

b) a función logarítmica de base maior que 1 é decrecente.

c) a función exponencial sempre é crecente.

d) a función exponencial de base maior que 1 é crecente.

7. A expresión xeral de todos os ángulos cuxa tanxente vale 1, onde k é un número enteiro, é:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ b) $\frac{\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$

8. A función $f(x) = 3\,sen(4x)$ ten de amplitude, período e frecuencia, respectivamente:

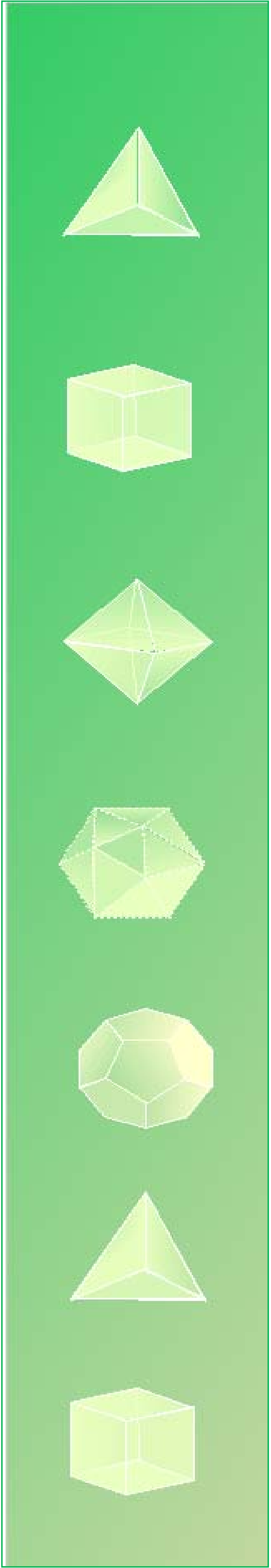
a) 3, $\pi/2$, $2/\pi$ b) 4, $\pi/3$, $3/\pi$ c) 4, $3/\pi$, $\pi/3$ d) 3, $2/\pi$, $\pi/2$

9. O seno, o coseno e a tanxente de $-\frac{7\pi}{4}$ valen respectivamente:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ 1$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ 1$

10. O seno, o coseno e a tanxente de $\frac{13\pi}{6}$ valen respectivamente:

a) $\frac{1}{2}, \ \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \ -\frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}, \ 1$



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 13: Estatística

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Caro

Revisoras: María Molero e Nieves Zuasti

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF

Índice

A Estatística utilízase na Ciencia. Tamén para facer **sondaxes de opinión** como a aceptación polo público dun programa de televisión ou as enquisas sobre a intención de voto a un partido político. Úsanse técnicas estatísticas nos procesos de fabricación, é o **control de calidade**. Para facer previsións e programar o tráfico ou as necesidades de enerxía dun país. Cando se analiza un fenómeno observable aparecen unha serie de resultados que deben ser tratados convenientemente, de maneira que se poidan comprender mellor tanto os resultados como a característica obxecto de estudo correspondente a este fenómeno. Para este fin utilízase a Estatística.

Neste capítulo aprenderemos a recoñecer e clasificar distintos tipos de variables estatísticas, construír táboas de frecuencias e gráficos estatísticos para distintos tipos de variables estatísticas e determinar e interpretar medidas de centralización, posición e dispersión.

Tamén nos centraremos no estudo de dúas variables de interese correspondentes a dúas características (ou variables) distintas. Neste sentido, pode ser interesante considerar simultaneamente os dous caracteres a fin de estudar as posibles relacións entre eles.

1.FASES E TAREFAS DUN ESTUDO ESTATÍSTICO

Enfrontámonos a diario á necesidade de recoller, organizar e interpretar datos e esta necesidade aumentará no futuro, debido ao desenvolvemento dos sistemas de comunicación e das bases de datos. É notable o aumento do uso das redes sociais tales como *Youtube* ou *Facebook*, onde as persoas teñen oportunidade de presentar información sobre elas mesmas, e de páxinas web onde se poden encontrar

e descargar gran variedade de datos estatísticos sobre diversos temas da actualidade: resultados deportivos dos seus equipos favoritos, temperatura máxima e mínima ao longo dun mes, vendas de turrón o pasado Nadal, etc. Noutras ocasións os datos son recollidos polo investigador mediante a realización dunha enquisa ou a través dun experimento. A enquisa requirirá a elaboración dun cuestionario, fixando os obxectivos do mesmo, elixindo as variables explicativas e redactando as preguntas que permitan obter a información desexada dunha forma clara e concisa.

Neste sentido, a estatística xogou un papel primordial neste desenvolvemento tecnolóxico que nos está tocando vivir, ao proporcionar ferramentas metodolóxicas xerais para analizar a variabilidade, determinar relacións entre variables, deseñar de forma óptima experimentos, mellorar as predicións e a toma de decisións en situacións de incerteza.

O tratamento estatístico dun problema comeza sempre coa presentación da magnitude que se quere analizar dunha determinada poboación e a selección da mostra pertinente para pasar á recollida de datos. Unha vez obtidos os datos ordénanse e preséntanse en táboas ou gráficas, de forma que sexa posible observar as particularidades que sinalan.

De aquí pódese considerar que un estudo estatístico consta dunha serie de fases e tarefas ben diferenciadas:

1. Definición da **poboación** e característica a estudar.

   Tarefas: Identificación das características cuantitativas e cualitativas; fixación da poboación; especificación da forma de recollida de datos (entrevistas, teléfono, correo electrónico, etc.).

2. Selección da **mostra**.

   Tarefas: Identificación do tamaño da mostra e orzamento necesario.

3. Recollida de **datos**.

   Tarefas: Deseño do cuestionario; deseño dunha mostra.

4. Organización e representación gráfica.

   Tarefas: Táboas e gráficas que axuden a unha máis fácil interpretación dos datos; isto consiste nun estudo de cada variable, a tabulación e representación(s) gráfica(s) máis apropiada(s).

5. Análise de datos.

   Tarefas: Tratamento dos datos. Isto consistirá nunha análise descritiva dos datos e/ou unha análise multivariante dos datos, dependendo do tipo de estudo a realizar e dos custes do mesmo.

6. Obtención de conclusións.

   Tarefas: recomendacións e toma de decisións a partir das conclusións.

Exemplo:

- Unha lista de puntos a ter en conta ao formular as preguntas da investigación é a seguinte:
  - Que queres probar? Que tes que medir /observar /preguntar?
  - Que datos necesitas? Como encontrarás os teus datos? Que farás con eles?
  - Cres que podes facelo? Encontrarás problemas? Cales?
  - Para que che servirán os resultados?

Desta maneira prepárase unha lista das características que queremos incluír no estudo, analizando as diferentes formas coas que poderían obterse os datos. Por simple observación: como o sexo, cor de pelo e ollos, se o alumno usa ou non lentes; se se require unha medición: como o peso, talle, perímetro de van; se habería que preguntar, é dicir, se se debe realizar unha enquisa: canto deporte practica, número do calzado, cantas horas dorme, cantas horas estuda ao día ou á semana, etc.

Polo tanto, é importante considerar a natureza das escalas de medida e tipo de variable estatística, xa que delas depende o método de análise de datos que se pode aplicar. A elección do conxunto de datos é crítica pois, dependendo do tipo de datos, a gama de técnicas estatísticas será máis ou menos ampla, xa que non todas as técnicas son aplicables a calquera tipo de dato.

2. POBOACIÓN E MOSTRA. VARIABLES ESTATÍSTICAS

2.1. Poboación

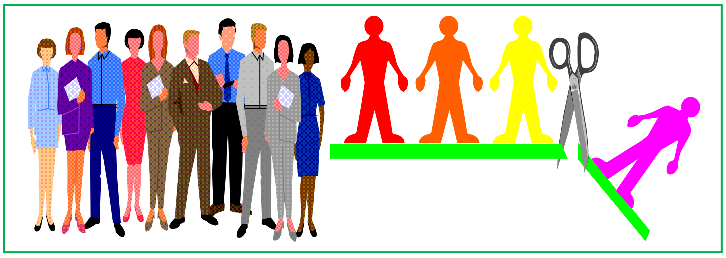
Poboación estatística, colectivo ou universo é o conxunto de todos os individuos (persoas, obxectos, animais, etc.) que conteñan información sobre o fenómeno que se estuda.

Exemplos:

- Se estudamos o prezo da vivenda nunha cidade, a poboación será o total das vivendas desta cidade.
- Vaise realizar un estudo estatístico sobre a porcentaxe de persoas casadas na península. Para iso non é factible estudar todos e cada un dos habitantes por razóns de custe e de rapidez na obtención da información. Polo tanto é necesario examinar só unha parte desta **poboación**. Esa parte é a **mostra** elixida.

1.2. Mostra

Mostra é un subconxunto representativo que se selecciona da poboación e sobre o que se vai realizar a análise estatística. O **tamaño da mostra** é o número dos seus elementos. Cando a mostra comprende todos os elementos da poboación denomínase **censo.**



Exemplo:

- Se se estuda o prezo da vivenda dunha cidade, o normal será non recoller información sobre todas as vivendas da cidade (xa que sería un labor moi complexo e custoso) senón que se soe seleccionar un subgrupo (mostra) que se entenda que é suficientemente representativo.

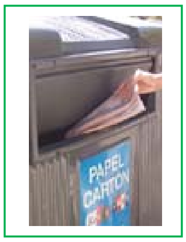
Actividades propostas

1. Sinalar en que caso é máis conveniente estudar a poboación ou unha mostra:

a) O diámetro dos parafusos que fabrica unha máquina diariamente.

b) A altura dun grupo de seis amigos.

2. Pódese ler o seguinte titular no xornal que publica o teu instituto: “*A nota media dos alumnos de 4º ESO da Comunidade de Madrid é de* 7.9”. Como se chegou a esta conclusión? Estudouse toda a poboación? Se tivesen seleccionado para o seu cálculo só ás mulleres, sería representativo o seu valor?



2.3. Individuo ou unidade estatística

Individuo ou **unidade estatística** é calquera elemento que conteña información sobre o fenómeno que se estuda.

Exemplo:

- Se estudamos as notas dos alumnos dunha clase, cada alumno é un individuo; se estudamos o prezo da vivenda, cada vivenda é unha unidade estatística.

2.4. Variable estatística

En xeral, suporemos que se está analizando unha determinada poboación, da que nos interesa certa característica, representada por unha **variable** observable ou estatística *X*. As variables que están baixo estudo pódense clasificar en dúas categorías:

Variables cualitativas ou atributos (datos non métricos), que non se poden medir numericamente. As escalas de medida non métricas clasifícanse en nominais (o categóricas) e ordinais.

Variables cuantitativas, que teñen un valor numérico. Este tipo de variables son as que aparecen con máis frecuencia e permiten unha análise máis detallada que as cualitativas. Dentro das variables cuantitativas, pódense distinguir as variables **discretas** e as variables **continuas**. As **variables discretas** toman valores illados, mentres que as **variables continuas** poden tomar calquera valor dentro dun intervalo.

Exemplo:

- Exemplos de variables cualitativas son a nacionalidade ou a raza dun conxunto de persoas.
- Exemplos de variables cuantitativas son as notas obtidas nunha materia, o peso ou a altura dun conxunto de persoas.
- Exemplos de variables discretas son o número de alumnos que aproban unha materia ou o número de compoñentes defectuosos que se producen ao día nunha fábrica.
- Exemplos de variables continuas son o tempo que tardamos en chegar ao instituto desde a nosa casa ou a velocidade dun vehículo.

Actividades resoltas

- Vaise realizar un estudo estatístico sobre a porcentaxe de persoas con fillos nunha localidade madrileña de 134 678 habitantes. Para iso elíxense 2 346 habitantes e esténdense as conclusións a toda a poboación. Identificar: variable estatística, poboación, mostra, tamaño dunha mostra e individuo.
    - *Variable estatística*: se unha persoa ten fillos ou non.
    - *Poboación*: os 134 678 habitantes da localidade.
    - *Mostra*: os 2 346 habitantes elixidos.
    - *Tamaño dunha mostra:* 2 346 persoas.
    - *Individuo*: Cada persoa á que se lle pregunte.

Actividades propostas

3. Indica o tipo de variable estatística que estudamos e razoa, en cada caso, se sería mellor analizar unha mostra ou a poboación:

a) O sexo dos habitantes dun país.
b) O diñeiro gastado á semana polo teu irmán.
c) A cor de pelo dos teus compañeiros de clase.
d) A temperatura da túa provincia.
e) O talle de pé dos alumnos do instituto.

4. Para realizar un estudo facemos unha enquisa entre os mozos dun barrio e preguntámoslles polo número de veces que van ao cine ao mes. Indica que características debería ter a mostra elixida e se deberían ser todos os mozos da mostra da mesma idade.

3. TÁBOAS DE FRECUENCIAS

3.1. Frecuencia absoluta

Cando se analiza unha *variable discreta*, a información resultante da mostra encóntrase resumida habitualmente nunha táboa ou distribución de frecuencias. Supoñamos que se tomou unha mostra de tamaño N na que se identificaron k valores (ou modalidades) distintos $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Cada un deles prodúcese cunha **frecuencia absoluta** n_i, é dicir, o número de veces que aparece na mostra.

A información obtida pódese resumir nunha **táboa de frecuencias**.

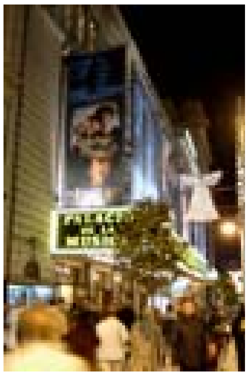
As táboas de frecuencia tamén se utilizan para representar información dunha *variable continua* procedente dunha mostra na que se agrupan as observacións en intervalos que se denominan **intervalos de clase** L_i ou celas.

Aínda que este procedemento supón, de feito, unha perda de información, esta perda non é de magnitude importante e vese compensada coa agrupación da información e a facilidade de interpretación que proporciona unha táboa de frecuencias.

Neste caso, os valores x_i correspóndense co punto medio do intervalo e denomínanse **marcas de clase**.

Exemplo:

- Cando realizamos un estudo sobre o ocio e enquisamos a 40 mozos dunha localidade sobre o número de veces que van ao cine os resultados desta enquisa podémolos recoller nunha táboa para resumir esta información.



Actividades resoltas

- Estase realizando un control do peso dun grupo de nenos. Para iso, contabilízase o número de veces que comen ao día unha barra de chocolate 13 nenos durante un mes, obtendo os seguintes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

A información obtida pódese resumir nunha táboa de frecuencias absolutas:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1

- Nunha fábrica realízase un estudo sobre o espesor, en *mm*, dun certo tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona unha mostra de tamaño N = 25, obtendo os seguintes valores: 7.8, 8.2, 7.6, 10.5, 7.4, 8.3, 9.2, 11.3, 7.1, 8.5, 10.2, 9.3, 9.9, 8.7, 8.6, 7.2, 9.9, 8.6, 10.9, 7.9, 11.1, 8.8, 9.2, 8.1, 10.5.

Esta información pódese resumir na seguinte táboa de frecuencias, con 5 intervalos: (7, 8], (8, 9], (9, 10], (10, 11], (11, 12], sendo as marcas de clase os puntos medios de cada intervalo: 7.5; 8.5; 9.5; 10.5; 11.5. Comproba que as frecuencias absolutas son as indicadas na táboa:

Intervalos de clase	**(7, 8]**	**(8, 9]**	**(9, 10]**	**(10, 11]**	**(11, 12]**
Marcas de clase	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2

Actividades propostas

5. Obter a táboa de frecuencias absolutas das notas en inglés de 24 alumnos:

6	6	7	8	4	9	8	7	6	5	3	5
7	6	6	6	5	4	3	9	8	8	4	5

3.2. Frecuencia relativa

Denomínase **frecuencia relativa** (f_i) dun valor da variable ao cociente entre a frecuencia absoluta e o número total de observacións N. Escríbese:

$$f_i = \frac{n_i}{N} \leq 1$$

Exemplo:

- Da mesma maneira podemos recoller a información obtida a partir dunha enquisa a 40 mozos dunha localidade sobre o número de veces que van ao cine mediante porcentaxe do número de veces que se repite un valor da variable sobre o total.

Actividades resoltas

- Estase realizando un control do peso dun grupo de nenos. Para iso, contabilízase o número de veces que comen ao día unha barra de chocolate 13 nenos durante un mes, obtendo os seguintes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

A información obtida pódese resumir nunha táboa de frecuencias relativas:

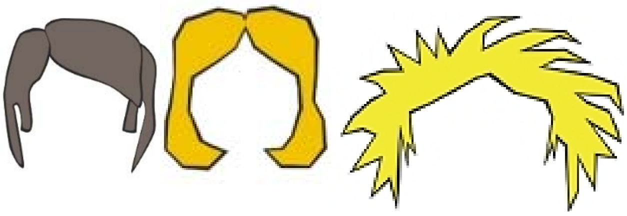
Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077

Actividades propostas

6. Construír unha táboa de frecuencias relativas coa cor de pelo de 24 persoas elixidas ao azar:

M =moreno; L = louro; P = pelirroxo

M	L	P	L	L	L
L	P	P	M	M	M
M	R	L	L	L	L
M	M	M	M	M	P



3.3. Frecuencia absoluta acumulada

Denomínase **frecuencia absoluta acumulada** dun valor da variable N_i á suma de todas as frecuencias absolutas dos valores menores ou iguais ca el. Calcúlase como:

$$N_i = \sum_{j=1}^{i} \left[n_j \right]$$

Verifícase a seguinte relación entre os valores de N_i:

$$N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k = N$$

Exemplo:

- Da mesma maneira podemos recoller a información obtida a partir dunha enquisa a 40 mozos dunha localidade sobre o número de veces que van ao cine mediante o número acumulado de veces que se repite un valor da variable sobre o total.

Actividades resoltas

- Estase realizando un control do peso dun grupo de nenos. Para iso, contabilízase o número de veces que comen ao día unha barra de chocolate 13 nenos durante un mes, obtendo os seguintes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

A información obtida pódese resumir nunha táboa de frecuencias absolutas:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia absoluta acumulada	2	4	8	9	11	12	12	13

Actividades propostas

7. O número de horas diarias de estudo de 14 alumnos é o seguinte:

3 4 2 5 3 4 3 2 3 4 5 4 3 2

a) Efectúa un reconto e organiza os resultados obtidos nunha táboa de frecuencias absolutas acumuladas.

b) Que significan as frecuencias acumuladas que calculaches?

3.4. Frecuencia relativa acumulada

Denomínase **frecuencia relativa acumulada** (F_i) dun valor da variable á suma de todas as frecuencias relativas dos valores menores ou iguais ca el. Calcúlase como:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} \left[f_j \right]$$

Verifícase a seguinte relación entre os valores de F_i:

$$F_1 \leq F_2 \leq \cdots \leq F_k = 1$$

Exemplo:

- Da mesma maneira podemos recoller a información obtida a partir dunha enquisa a 40 mozos dunha localidade sobre o número de veces que van ao cine mediante a porcentaxe acumulada do número de veces que se repite un valor da variable sobre o total.

Actividades resoltas

- Estase realizando un control do peso dun grupo de nenos. Para iso, contabilízase o número de veces que comen ao día unha barra de chocolate 13 nenos durante un mes, obtendo os seguintes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

A información obtida pódese resumir nunha táboa de frecuencias relativas:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077
Frecuencia relativa acumulada	0.154	0.308	0.615	0.692	0.846	0.923	0.923	1

- Nunha fábrica realízase un estudo sobre o espesor, en *mm*, dun certo tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona unha mostra de tamaño $N = 25$, obtendo os seguintes valores: 7.8, 8.2, 7.6, 10.5, 7.4, 8.3, 9.2, 11.3, 7.1, 8.5, 10.2, 9.3, 9.9, 8.7, 8.6, 7.2, 9.9, 8.6, 10.9, 7.9, 11.1, 8.8, 9.2, 8.1, 10.5.

Esta información pódese resumir na seguinte táboa de frecuencias, con 5 intervalos:

Intervalos de clase	**(7, 8]**	**(8, 9]**	**(9, 10]**	**(10, 11]**	**(11, 12]**
Marcas de clase	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2
Frecuencia relativa	0.24	0.32	0.2	0.16	0.08
Frecuencia relativa acumulada	0.24	0.56	0.76	0.92	1

- Organízase nunha táboa a información recollida das estaturas, en cm, dun grupo de 20 nenas:

130	127	141	139	138	126	135	138	134	131
143	140	129	128	137	136	142	138	144	136

A estatura é unha variable estatística cuantitativa continua. Polo tanto, podemos agrupar os valores da variable en intervalos que chamamos clases ou celas. A amplitude de cada intervalo vén dada pola fórmula:

$$\frac{Máx - Mín}{\sqrt{N}}$$

No noso caso concreto temos que:

$$\frac{144 - 126}{\sqrt{20}} = 4.02$$

Aproximando, a amplitude de cada intervalo é de 5 cm.

Estatura en intervalos	[125-130)	[130-135)	[135-140)	[140-145)
Frecuencia absoluta	4	3	8	5
Frecuencia relativa	0.2	0.15	0.4	0.25
Frecuencia absoluta acumulada	4	7	15	20
Frecuencia relativa acumulada	0.2	0.35	0.75	1

Actividades propostas

8. Nunha avaliación, dos 30 alumnos dunha clase, o 30 % aprobou todo, o 10 % suspendeu unha materia, o 40 % suspendeu dúas materias e o resto máis de dúas materias.

a) Realiza a táboa de frecuencias completa correspondente (frecuencias absolutas, frecuencias relativas, frecuencias absolutas acumuladas e frecuencias relativas acumuladas).

b) Hai algún tipo de frecuencia que corresponda á pregunta de cantos alumnos suspenderon menos de dúas materias? Razoa a resposta.

4. GRÁFICOS ESTATÍSTICOS

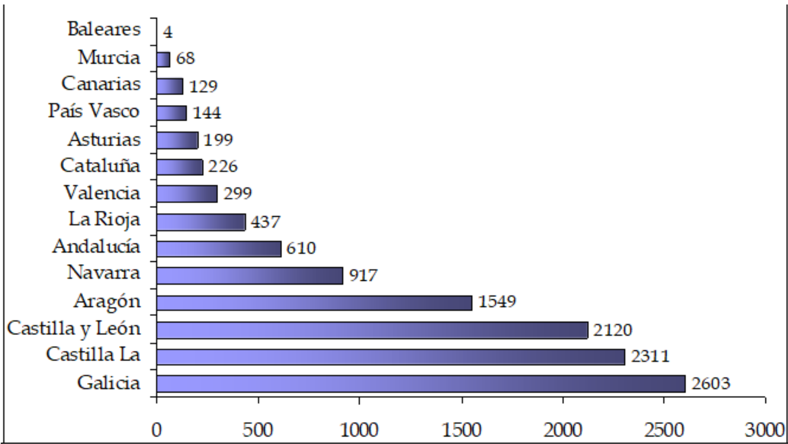
4.1. Diagrama de barras

Existen numerosas maneiras de representar graficamente a información que se obtivo dunha mostra, dependendo do tipo de variable que se estea analizando e do fin que se persiga coa representación.

Cando se quere representar graficamente unha variable cualitativa (atributo) ou unha variable cuantitativa discreta pódense utilizar os ***diagramas de barras ou rectángulos***. Colócanse os valores da variable (as modalidades do atributo ou valores da variable discreta) no eixe de abscisas e, no eixe de ordenadas, as frecuencias (absolutas ou relativas). Sobre cada valor levántase unha barra ou rectángulo cuxa altura é igual á frecuencia. Por comodidade, ás veces tamén se soen intercambiar os eixes.

Exemplo:

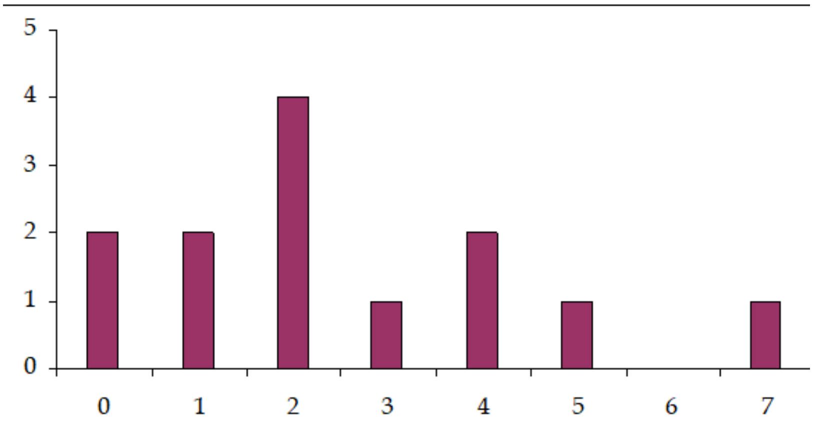
- Representouse graficamente a potencia eólica (fonte de enerxía eléctrica renovable) instalada en España por Comunidade Autónoma en xaneiro de 2014 (en Megavatios)



DATOS 2014 da AEE

Exemplo:

- Representouse graficamente o número de fallos mensuais dunha máquina de xeados



Número de fallos mensuais

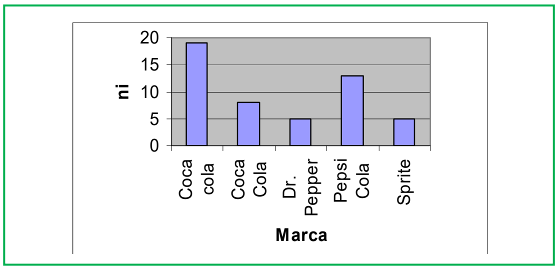
Actividades resoltas

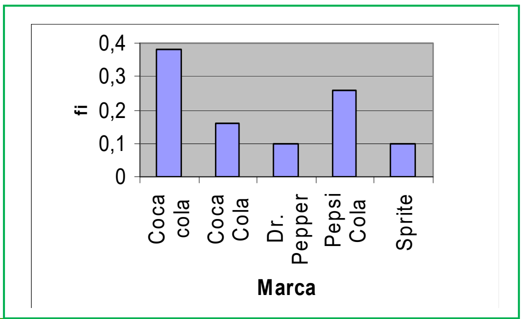
- Dada a seguinte información correspondente ás preferencias de 50 adolescentes americanos respecto á marca de refresco que consomen, construe a táboa asociada a estes datos e represéntaos graficamente nun diagrama de barras de frecuencias absolutas e noutro de frecuencias relativas.

COCA-COLA = CC; COCA-COLA LIGHT = CCL; DR.PEPPER = A; PEPSI-COLA = PC, SPRITE = S

CCL	CC	S	A	CC	CC	A	CC	P	CC
S	CCL	P	CCL	CC	CC	CCL	P	P	A
S	S	CC	CC	CC	A	P	CC	CCL	CC
CCL	CC	P	P	P	CCL	P	S	P	CC
CC	P	CCL	CC	CC	P	CC	P	CC	A

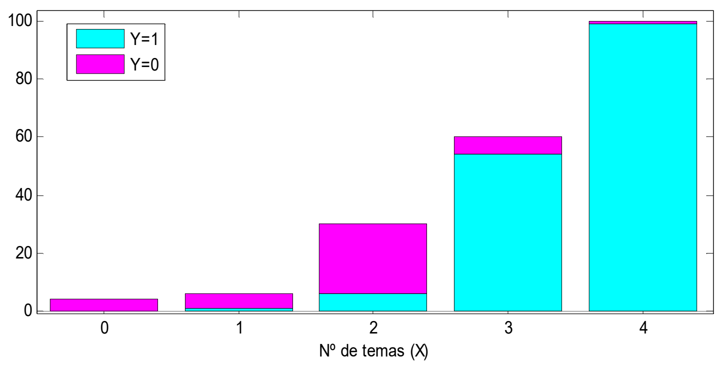
Marca	n_i	f_i
Coca Cola	19	0,38
Coca Cola Light	8	0,16
Dr. Pepper	5	0,10
Pepsi Cola	13	0,26
Sprite	5	0,10
	50	1

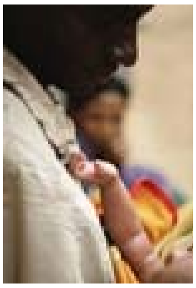




Actividades propostas

9. Se queremos representar conxuntamente valores da variable correspondentes a diferentes períodos de tempo, ou a distintas calidades, para comparar situacións podemos construír un diagrama de barras apiladas. Poderías interpretar este gráfico correspondente ao número de temas que os alumnos dunha materia de 4º ESO levan estudados? Tómase información en dúas clases dun instituto (azul e rosa).





10. O sexo de 18 bebés nacidos nun hospital de Madrid foi:

H	M	H	H	M	H
H	M	M	H	M	H
M	M	H	H	M	H

Constrúe a táboa asociada a estes datos e represéntaos.

11. Representa os valores da variable da táboa adxunta co gráfico adecuado correspondentes a unha enquisa realizada sobre o sector ao que pertence nun grupo de traballadores madrileños.

SECTOR	INDUSTRIAL	AGRARIO	SERVIZOS	OUTROS
% TRABALLADORES	20	16	45	19

4.2. Histogramas

A representación máis utilizada en variables cuantitativas continuas é o **histograma**.

No eixe de abscisas colócanse os diferentes intervalos nos que se agrupan as observacións da variable. Sobre estes intervalos, levántanse rectángulos cuxa **área** é proporcional á frecuencia observada en cada un deles.

No caso de que todos os intervalos teñan a mesma amplitude basta con que a altura dos rectángulos sexa proporcional á frecuencia.

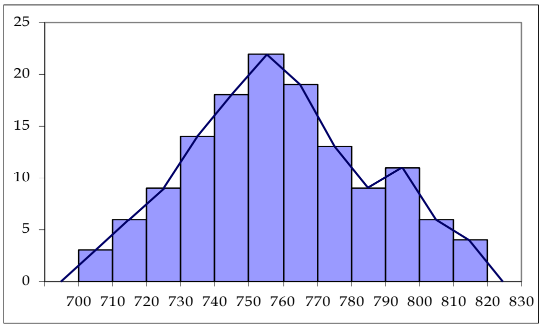
Dependendo das frecuencias que se utilicen, tratarase dun histograma de frecuencias relativas ou ben dun histograma de frecuencias absolutas.

En ocasións, únense os puntos medios dos segmentos superiores dos rectángulos, obténdose deste modo o **polígono de frecuencias**, xa sexan absolutas ou relativas. Estes polígonos constrúense utilizando un intervalo anterior ao primeiro (da mesma lonxitude ca este) e outro posterior ao último (da súa mesma lonxitude). Desta maneira, os polígonos delimitan unha área pechada.

En ambos os casos, tamén se poden utilizar as frecuencias acumuladas para construír os respectivos histogramas. Estes histogramas tamén levan asociados os correspondentes polígonos de frecuencias, que, neste caso, se constrúen unindo os vértices superiores dereitos de cada un dos intervalos.

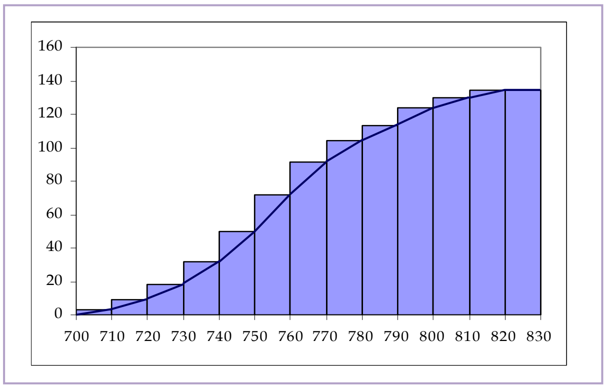
Exemplo:

- Representouse graficamente a información obtida a partir das emisións específicas de CO_2 dunha central de carbón (kg/megavatio-hora) a partir dun histograma e dun polígono de frecuencias absolutas.



Exemplo:

- Representouse graficamente a información obtida a partir das emisións específicas de CO_2 dunha central de carbón (kg/megavatio-hora) a partir dun histograma e dun polígono de frecuencias acumuladas absolutas.



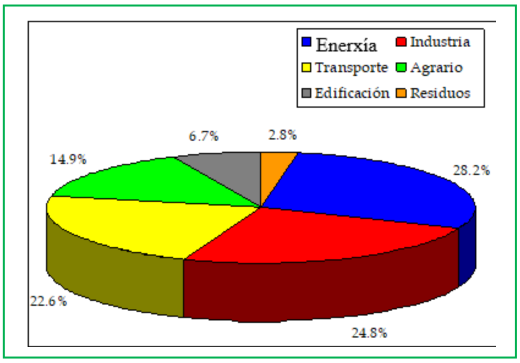
Actividades propostas

12. Completa a táboa de frecuencias para poder representar a información mediante o histograma de frecuencias acumuladas:

IDADE	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)
NÚMERO DE PERSOAS	25	45	55	65

13. A que representación gráfica corresponde o seguinte gráfico correspondente á información recollida sobre a idade de 100 persoas? Por que cres que se utilizou este e non outro?

4.3. Diagrama de sectores



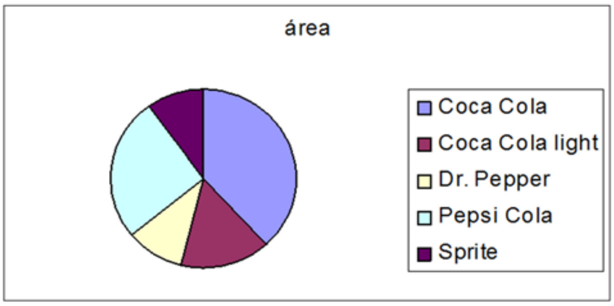
No **diagrama de sectores** colócanse as modalidades do atributo (variable cualitativa) ou valores dunha variable cuantitativa discreta nun círculo, asignando a cada un un sector do círculo de **ángulo proporcional á súa frecuencia**. Non resulta moi operativo cando a variable ten demasiadas categorías.

Exemplo:

Da mesma maneira podemos recoller a información obtida de emisións de gases de efecto invernadoiro en España no período 1999-2012 (%)

Actividades resoltas

- Dada a información correspondente ás preferencias de 50 adolescentes americanos respecto á marca de refresco que consomen da actividade resolta do apartado 3.1. realizar o gráfico de sectores.



Actividades propostas

14. Dos 100 asistentes a unha voda, o 34 % comeu tenreira de segundo prato, 25 % pato, 24 % año e o resto peixe.

a) Organiza a información anterior nunha táboa de frecuencias e representa os datos nun gráfico de sectores.

b) Realiza un diagrama de barras e explica como o fas. Cal dos dous gráficos prefires? Por que?

15. Recolleuse información sobre o contido de sales minerais de 24 botellas de auga dun grupo de escolares nunha excursión tal que:

45	45	65	56	33	65	23	23
34	23	43	67	22	43	34	23
12	34	45	34	19	34	23	43

a) Clasifica a variable estatística estudada.

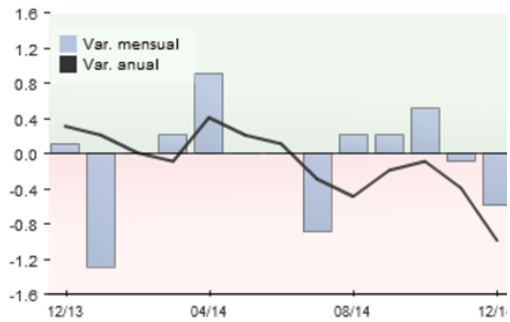
b) Sería conveniente tomar ou non intervalos ao facer unha táboa de frecuencias?

c) Realiza o gráfico que consideres máis oportuno.

4.3. Análise crítica de táboas e gráficas estatísticas nos medios de comunicación. Detección de falacias

Os medios de comunicación recorren con frecuencia a táboas e gráficas que axuden a unha máis doada interpretación dos datos por parte do público en xeral. Un caso pode ser o seguinte gráfico que presenta o Instituto Nacional de Estatística (INE), que representa o índice dos prezos ao consumo.

Índice de prezos de consumo. IPC.



Índice xeral nacional (%)

Porén, non é raro observar como se utilizan uns mesmos datos estatísticos para obter conclusións distintas.

- Unha suba de prezos ou do índice de desemprego pode parecer máis ou menos acentuada segundo quen presente a información.
- Un índice de audiencia ou o colesterol dun determinado alimento poden parecer máis ou menos altos segundo con que sexa comparado.
- As chamadas telefónicas parecen ser máis baratas nunha compañía que noutra.

A lista de exemplos é interminable.

Deste modo, a Estatística, ademais do papel instrumental que presentamos ata agora, ten un importante papel no desenvolvemento do pensamento crítico que nos manterá atentos a estes excesos.

Os erros máis frecuentes, aínda que ás veces non se trata de erros senón de manipulacións tendenciosas, son os seguintes:

- Erros na obtención de datos.
- Limitacións humanas ou dos instrumentos: é imposible, por exemplo, medir o peso ou a estatura dunha persoa con infinita precisión. Pero mesmo en estudos exhaustivos, como os censos, estímanse os erros de mostraxe.
- Cuestionarios mal formulados: se non se recollen todas as posibles respostas, se a pregunta inflúe na resposta, se as preguntas conteñen xuízos de valor ou se as diferentes opcións de resposta non son equilibradas (por exemplo: si, ás veces, non). O conxunto de respostas posibles pode facer que haxa duplicacións u omisións. Incorrer neste erro, deliberadamente ou non, deixa a individuos da poboación sen representación entre as respostas e, polo tanto, os resultados que saian do estudo estarán nesgados. As modalidades da variable deben ser incompatibles e exhaustivas (por exemplo: se preguntamos pola cor favorita e ofrecemos como posibles respostas "Vermello", "Azul" ou "Amarelo", deixamos sen poder responder aos que queren escoller outra cor; se non estamos interesados noutras cores, podemos incluír un apartado chamado "Outra").
- Delimitación imprecisa da poboación: Por exemplo, se se desexa estudar se os nenos madrileños ven demasiado a televisión, haberá que deixar claro que idades en concreto se considerarán, se entendemos por madrileño a calquera residente ou só aos nacidos en Madrid, etc.
- Selección da mostra non apropiada ou non representativa: a mostra non representa á poboación. A elección dos individuos concretos que forman parte da mostra debe facerse de forma aleatoria. Por exemplo: se estudamos os gustos televisivos dos adolescentes dun instituto e pensamos que estes gustos poden variar en función da idade, na selección da mostra deben escollerse idades variadas, a poder ser, na mesma proporción na que se presentan no instituto.
- Erros nas táboas: os datos non están ordenados, evitar ambigüidades nos extremos dos intervalos para variables continuas, etc.
- Erros nas gráficas: nos diagramas de barras falta a orixe, están truncados ou hai erros na escala dos eixes, etc. Hai que deixar claras as variables que se miden.
- Erros nos parámetros de medida: por exemplo a media non é representativa (poboacións heteroxéneas) ou vese afectada por valores moi grandes; confusión entre media e mediana.
- Erros nos pictogramas con superficies onde se inscriben proporcionais ao cadrado das frecuencias.

5. MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

As medidas de tendencia central ou de centralización son as que, intuitivamente, aparecen en primeiro lugar ao intentar describir unha poboación ou mostra.

Pódense dividir en tres clases: **medidas de tamaño, de frecuencia e de posición**.

No que segue, suporemos que estamos analizando unha poboación da que se toma unha mostra de tamaño *N*, é dicir, que está composta por *N* individuos (ou observacións), dos cales se desexa estudar a variable *X*, o que dá lugar á obtención de *N* valores que se representan por $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Estes valores non se supoñen ordenados senón que o subíndice indica a orde na que foron seleccionados.

5.1. Medidas de tamaño

As medidas de tamaño defínense a partir dos valores da mostra, así como da súa frecuencia.

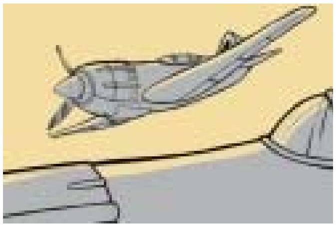
Definimos así a **media aritmética** ou **termo medio** ou, simplemente, **media** como:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [x_i]}{N}$$

Pódese interpretar como o centro de masas das observacións da mostra. Dentro das súas vantaxes pódese destacar que utiliza todas as observacións, que son facilmente calculables, teñen unha interpretación sinxela e boas propiedades matemáticas. O seu inconveniente é que se pode ver afectada polos valores anormalmente pequenos ou grandes que existan na poboación ou mostra (denominados *outliers*).

No caso de que teñamos unha variable cuantitativa agrupada en intervalos o valor da variable *X* que representa ao intervalo para poder calcular a media aritmética é a **marca de clase** e calcúlase como a semisuma dos valores extremos do intervalo.

Exemplo:



- Recóllese a información referida ao número de horas de voo diarias de 20 azafatas. Se a media é igual a 4.1, isto indica que, por termo medio, o número de horas de voo é 4.1.

Exemplo:

- Da mesma maneira se recollemos a información sobre a idade media da túa clase obteremos un valor entre 15 e 16 anos. A idade media será por exemplo 15.4, valor teórico, que pode non coincidir con ningún dos valores reais.

Actividades resoltas

- Un fabricante de xeados está realizando un control de calidade sobre certas máquinas respecto á súa capacidade de regular a temperatura de refrixeración. Para iso, selecciona unha mostra de N=16 máquinas da fábrica e mide con precisión o valor da súa capacidade (na unidade de medida μF), obtendo os seguintes resultados: 20.5, 19.8, 19.6, 19.2, 23.5, 28.9, 19.9, 19.2, 20.1, 18.8, 19.5, 20.2, 18.6, 19.7, 22.1, 19.3. Utilizando estes valores de capacidade, obter a media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i]}{N} = \frac{20.5+19.8+19.6+19.2+23.5+28.9+19.9+19.2+20.1+18.8+19.5+20.2+18.6+19.7+22.1+19.3}{16} = \mathbf{20.56} \quad \mathbf{\mu F}$$

Actividades propostas

16. Unha persoa ingresa 10 000 euros nun fondo de inversión o 1 de xaneiro de 2009. As rendibilidades anuais do fondo durante os anos seguintes foron as seguintes:

Ano	2009	2010	2011	2012
Rendibilidades (%)	5	3	–1	4

Se non retirou o capital, cal foi a rendibilidade media do fondo durante estes anos?

17. Interpreta os valores da variable desta táboa que representa o peso de 100.000 bombonas de butano dunha fábrica, en quilogramos. Que gráfico utilizarías? Calcula a media e interprétaa.

Peso [ )	**f_i %**	**n_i**	**N_i**
14.5 - 15	0.3	300	300
15 - 15.5	1.6	1 600	1 900
15.5 - 16	7.4	7 400	9 300
16 - 16.5	21.5	21 500	30 800
16.5 - 17	30.5	30 500	61 300
17 - 17.5	24.5	24 500	85 800
17.5 - 18	10.7	10 700	96 500
18 - 18.5	21.5	21 500	30 800

5.2. Medidas de frecuencia

Defínense tendo en conta unicamente a frecuencia dos valores da variable da mostra.

A **moda** (*Mo*) defínese como o valor da variable que se obtivo con maior frecuencia. Pode haber máis dunha moda.

Exemplo:

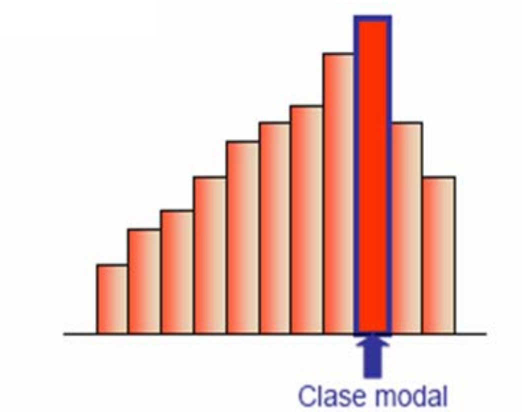
- Realízase un estudo entre 200 espectadores a un musical en Madrid para determinar o grao de satisfacción, obténdose os seguintes resultados:

Opinión	Moi bo	Bo	Regular	Malo	Moi malo
%	75	25	45	15	40

A modalidade que máis se repite é "moi bo", polo que a moda é Mo = Moi bo.

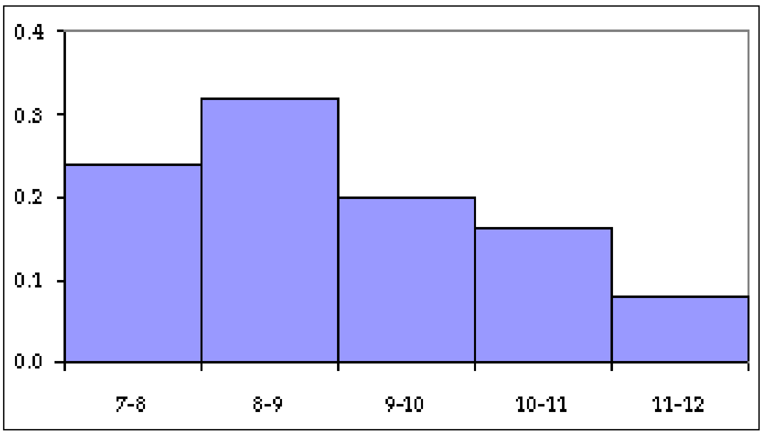
Exemplo:

- No caso de que a distribución estea agrupada en intervalos haberá que identificar a clase modal, é dicir, o intervalo onde hai maior número de valores da variable.



Actividades resoltas

- A partir da táboa de frecuencias do espesor de latas de refresco, podemos debuxar os seus histogramas de frecuencias relativas e determinar onde está a súa moda. É dicir no intervalo [8-9). A moda sinala que o máis frecuente é ter un espesor entre 8 e 9 mm.



Actividades propostas

18. Obter a media e a moda dos seguintes valores da variable referidos ao resultado de lanzar un dado 50 veces.

1	2	3	2	3	4	3	3	3	5
5	5	5	6	5	6	5	6	4	4
3	2	1	2	3	4	5	6	5	4
3	2	3	4	5	6	5	4	3	2
3	4	5	5	5	5	6	6	6	3

19. Realizar a actividade anterior pero agrupando en intervalos de amplitude 2, empezando en 0. Obtés os mesmos resultados? Por que?

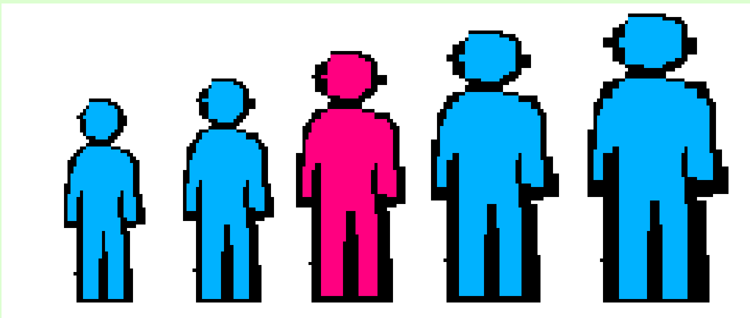
5.3. Medidas de posición

Defínense a partir da posición dos valores da mostra.

En xeral, coñécense co nome de **centís** ou **percentís**.

Se reordenamos en orde crecente os valores tomados da mostra e os denotamos por $x_{\{1\}}, x_{\{2\}},\dots, x_{\{N\}}$ pódense definir as seguintes medidas de posición:

- ✓ A ***mediana*** *Me* é un valor tal que o 50 % das observacións son inferiores a el. Non ten por que ser único e pode ser un valor non observado.



Altura mediana

- ✓ Os ***cuartís*** (ou cuartilas) Q_1, Q_2 e Q_3 son os valores tales que o 25 %, 50 % e 75 % (respectivamente) dos valores da variable son inferiores a el.
- ✓ Os ***decís*** $D_1, D_2,\dots, D_9$ son os valores tales que o 10 %, 20 %, … , 90 % (respectivamente) dos valores da variable son inferiores a el.

En xeral, defínese o **percentil** ou **centil** do k % (sendo $0 \le k \le 100$) como o valor tal que o k % das observacións son inferiores a el.

A mediana e o resto de medidas de posición teñen como principal vantaxe a súa fácil interpretación e a súa robustez (non se ven afectadas por observacións extremas).

Exemplo:

- Calcula os cuartís e o percentil 65 dos seguintes valores da variable referidos ao número de fillos das familias dun bloque de edificios da localidade de Madrid:

Número de fillos	f_i	F_i
1	11	11
2	27	38
3	4	42
4	18	60
Total	60	

Para calcular o primeiro cuartil calculamos o 25 % do total dunha mostra $N = 60$, é dicir, $60 \cdot 0.25 = 15$. Así, o primeiro cuartil ten 15 valores da variable menores e o resto maiores. Na columna de frecuencias acumuladas, o primeiro número maior ou igual que 15 é 38, que corresponde ao valor da variable 2. Polo tanto o primeiro cuartil é 2 (ou con mellor aproximación un valor entre 1 e 2). Da mesma forma o 50 % de 60 é 30, é dicir o cuartil 2 (Mediana) sería tamén 2 (ou de novo, un valor entre 1 e 2). O 75 % de 60 sería 45 e desta forma o cuartil 3 sería 4 (ou un valor entre 3 e 4) posto que o valor maior a 45 é 60, que corresponde ao valor 4 da variable obxecto de estudo. Por último, o percentil 65 corresponde ao valor 3 xa que 65 % de 60 é igual a 39 e o valor maior que 39 é 42.

Resumo:

25 % de 60 = 15 → 38 > 15 > 11 → $Q_1 = 2$

50 % de 60 = 30 → 38 > 30 > 11 → Me = $Q_2 = 2$

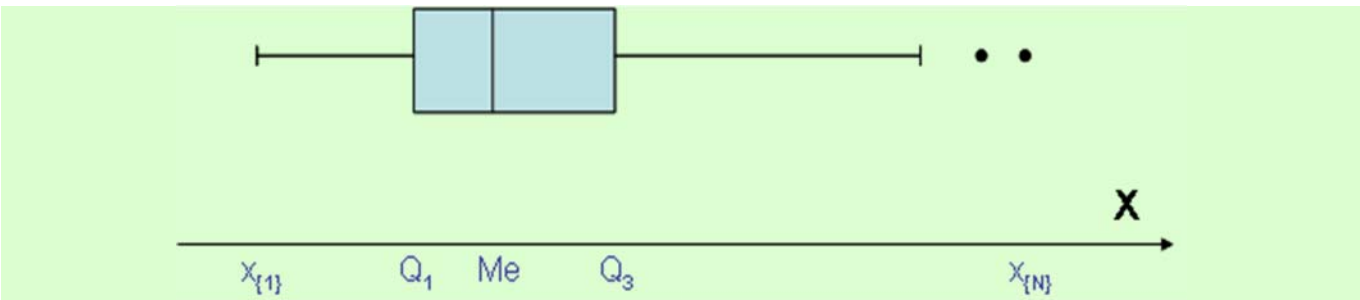
75 % de 60 = 45 → 60 > 45 > 42 → $Q_3 = 4$

65 % de 60 = 39 → 42 > 39 > 38 → $P_{65} = 3$

As medidas de posición permítennos realizar outro tipo de gráfico estatístico que se chama o ***gráfico de caixa***.

Para realizar este gráfico, constrúese unha *caixa* (xa sexa horizontal ou vertical), cuxos lados coinciden co *primeiro e terceiro cuartil* Q_1 e Q_3. Polo tanto, a caixa abrangue o 50% das observacións realizadas. Dentro desta caixa, inclúese un segmento (ou ben un punto) que corresponde á *mediana*.

De cada lado da caixa parte un segmento que se estende ata os valores correspondentes ás observacións *mínima e máxima* $x_{\{1\}}$ e $x_{\{N\}}$.



Actividades resoltas

- Estase realizando un control de calidade sobre os fallos dunhas determinadas máquinas. Para iso, contabilízanse os fallos de N=13 máquinas durante un mes, obtendo os seguintes números de fallos: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2. Utilizando estes valores obter as medidas de tendencia central e resumir nunha táboa de frecuencias a información obtida do número de fallos mensuais das máquinas, obtendo a media aritmética doutra maneira.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i]}{N} = \frac{2+5+3+2+0+4+1+7+4+2+1+0+2}{13} = \mathbf{2.54} \quad \textbf{fallos/mes}$$

$$Mo = \mathbf{2} \quad \textbf{fallos/mes}$$

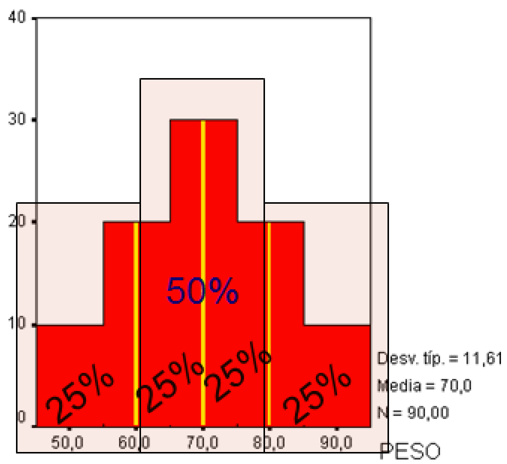
$$Q_1 = x_{\{4\}} = \mathbf{1} \quad \textbf{fallo/mes}$$

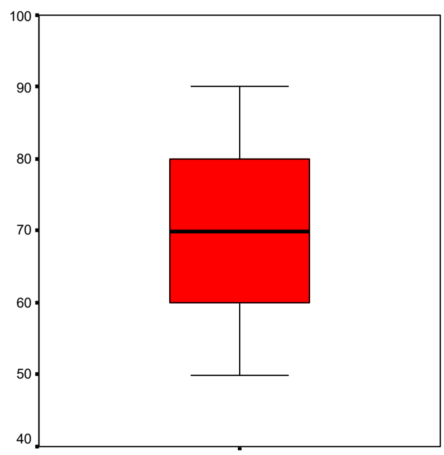
$$Q_3 = x_{\{10\}} = \mathbf{4} \quad \textbf{fallos/mes}$$

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077
Frecuencia relativa acumulada	0.154	0.308	0.615	0.692	0.846	0.923	0.923	1

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k}[f_i \cdot x_i] = 0.154\cdot 0 + 0.154\cdot 1 + 0.307\cdot 2 + 0.077\cdot 3 + 0.154\cdot 4 + 0.077\cdot 5 + 0.077\cdot 7 = \mathbf{2.54} \quad \textbf{fallos/mes}$$

- Recóllese información sobre o peso de 90 rapaces nunha clase de Matemáticas. Determinar os centís que nos permiten realizar o gráfico de caixa.





- Primeiro cuartil = percentil 25 = 60 Kg.
- Terceiro cuartil= percentil 75= 80 kg.

Actividades propostas

20. Debuxar un diagrama de caixa coñecendo os seguintes datos.

Mínimo valor = 2; cuartil 1 = 3; mediana = 6; cuartil 3 = 7; máximo valor = 12.

21. Un corredor de maratón adestra, de luns a venres percorrendo as seguintes distancias: 2, 3, 3, 6 e 4, respectivamente. Se o sábado tamén adestra:

a) Cantos quilómetros debe percorrer para que a media sexa a mesma?

b) E para que a mediana non varíe?

c) E para que a moda non varíe?

22. O salario mensual en euros dos 6 traballadores dunha empresa téxtil é o que se presenta. Cal dos tres tipos de medidas de tendencia central describe mellor os soldos da empresa?

1 700	1 400	1 700	1 155	1 340	4 565

23. Que valor ou valores poderiamos engadir a este conxunto de valores da variable para que a mediana siga sendo a mesma?

12	19	24	23	23	15	21	32	12	6	32	12	12	21

24. Saen 25 prazas para un posto de auxiliar de enfermaría e preséntanse 200 persoas coas seguintes notas.

notas	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	34	25	56	29	10	30	10

a) Con que nota se obtén unha das prazas mediante o exame?

b) Que percentil é a nota 5?

6. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

6.1. Medidas de desviacións

As medidas de tendencia central resultan insuficientes á hora de describir unha mostra. Ademais das tendencias, é necesario dispoñer de medidas sobre a variabilidade dos datos. Dentro destas medidas, imos estudar as medidas de desviacións e os rangos.

As medidas de desviacións recollen as desviacións dos valores da variable respecto dunha medida de tendencia central.

A ***varianza*** defínese como:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}}{N} - \overline{x}^2$$

As súas principais vantaxes son a súa manexabilidade matemática e que utiliza todas as observacións. Os seus principais inconvenientes son ser moi sensible a observacións extremas e que a súa unidade é o cadrado da unidade orixinal da mostra.

A **desviación típica** é a raíz cadrada da varianza e ten a principal vantaxe de que utiliza as mesmas unidades que os valores da variable orixinais.

Observa que a desviación típica é unha distancia, a distancia dos valores da variable á media. Recorda que a raíz cadrada é sempre un número positivo.

Asociado á media e á desviación típica, defínese o **coeficiente de variación**, definido en mostras con media distinta de cero como:

$$g = \frac{s}{\left|\overline{x}\right|}$$

Este coeficiente é adimensional (non ten unidades e sóese expresar en porcentaxe), o que resulta unha gran vantaxe, xa que permite comparar a variabilidade de distintas mostras, independentemente das súas unidades de medida. Algúns autores definen este coeficiente utilizando a media no denominador, en lugar do seu valor absoluto. Valores do coeficiente de variación maiores do 100% indican que a media non se pode considerar representativa do conxunto de valores da variable.

Exemplo:

- A nota media de 6 alumnos dunha mesma clase de 4º ESO en Matemáticas é de 5. Se a varianza é 0.4, a desviación típica será de 0.632, polo tanto, a media é bastante homoxénea na distribución. As notas que se obtiveron están situadas arredor da nota media 5.

Actividades resoltas

- O propietario dunha instalación mixta solar-eólica está realizando un estudo do volume de enerxía que é capaz de producir a instalación. Para iso, mide esta enerxía ao longo dun total de *N*=16 días que considera suficientemente representativos. A enerxía (en quilovatio, KWh) producida nestes días por dúas instalacións encóntrase recollida na seguinte táboa:

Xeración solar	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6
Xeración eólica	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2
Xeración solar	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Xeración eólica	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9

Utilizando estes valores da variable calcula as medidas de dispersión estudadas, comparando os resultados nas dúas instalacións

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{13.1+10.5+4.1+14.8+19.5+11.9+18+8.6+5.7+15.9+11.2+6.8+14.2+8.2+2.6+9.7}{16} = 10.925 \text{ Kwh}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{8.5+14.3+24.7+4+2.3+6.4+3.6+9.2+13.5+1.4+7.6+12.8+10.3+16.5+21.4+10.9}{16} = 10.463 \text{ Kwh}$$

$$s_x{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{13.1^2 + 10.5^2 + 4.1^2 + 14.8^2 + 19.5^2 + 11.9^2 + 18^2 + 8.6^2 + 5.7^2 + 15.9^2 + 11.2^2 + 6.8^2 + 14.2^2 + 8.2^2 + 2.6^2 + 9.7^2}{16}$$

$$= \frac{141.5}{16} - 10.9^2 = 22.16$$

$$s_y{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i{}^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{8.5^2 + 14.3^2 + 24.7^2 + 4^2 + 2.3^2 + 6.4^2 + 3.6^2 + 9.2^2 + 13.5^2 + 1.4^2 + 7.6^2 + 12.8^2 + 10.3^2 + 16.5^2 + 21.4^2 + 10.9^2}{16}$$

$$- 10.5^2 = \frac{150.48}{16} - 10.5^2 = 41.01$$

$$g_x = \frac{s_x}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{22.16}}{10.9} = \frac{4.7}{10.9} = 0.43$$

$$g_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{\sqrt{41.01}}{10.5} = \frac{6.4}{10.5} = 0.61$$

A media da primeira instalación é máis representativa que a media da segunda xa que o coeficiente de variación é menor na primeira. Os datos están menos agrupados na segunda das instalacións. A súa desviación típica é moito maior.

- Estase realizando un control de calidade sobre os fallos dunhas determinadas máquinas. Para iso, contabilízanse os fallos de *N* = 13 máquinas durante un mes, obtendo os seguintes números de fallos. Utilizando estes valores presentados na táboa de frecuencias obter as medidas de dispersión estudadas.

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia relativa	0.154	0.154	0.307	0.077	0.154	0.077	0	0.077
Frecuencia relativa acumulada	0.154	0.308	0.615	0.692	0.846	0.923	0.923	1

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} [x_i]}{N} = \frac{2+5+3+2+0+4+1+7+4+2+1+0+2}{13} = \mathbf{2.54} \quad \textbf{fallos/mes}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{k} \left[f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2 \right] = 0.154 \cdot (-2.54)^2 + 0.154 \cdot (-1.54)^2 + 0.307 \cdot (-0.54)^2 + 0.077 \cdot 0.46^2 + 0.154 \cdot 1.46^2 +$$

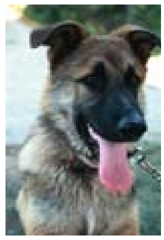
$$+ 0.077 \cdot 2.46^2 + 0.077 \cdot 4.46^2 = \mathbf{3.80} \quad (\textbf{fallos/mes})^2$$

Outra forma de realizar estes mesmos cálculos é:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7	Suma
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1	13
x_i^2	0	1	4	9	16	25	36	49	
$x_i^2 \cdot$ Fr. Abs.	0	2	16	9	32	25	0	49	133

Aplicamos a fórmula: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i{}^2}{N} - \overline{x}^2$ e obtemos que

$s^2 = 133/13 - 2.54^2 = 10.23 - 6.45 = 3.80$, polo que $s = 1.95$.



Actividades propostas

25. Un grupo de cans pastor alemán ten unha media de 70 kg e desviación típica 2 kg. Un conxunto de cans caniche ten unha media de 15 kg e desviación típica 2 kg. Compara ambos os grupos.

26. O tempo, en minutos, que un conxunto de estudantes de 4º ESO dedica a preparar un exame de Matemáticas é:

234	345	345	123	234	234	556
234	234	345	223	167	199	490

As cualificacións dese conxunto de estudantes son as seguintes:

4	5	6	7	6	5	8
9	8	7	8	7	6	8

a) Que teremos que facer para comparar a súa variabilidade? b) En que conxunto os valores da variable están máis dispersos? c) É a media sempre maior que a desviación típica?

6.2. Os rangos

Estas medidas proporcionan información sobre o intervalo total de valores que toma a mostra analizada.

O **rango total** ou **percorrido** é a diferenza entre os valores máximos e mínimos que toma a variable na mostra:

$$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$$

O **percorrido intercuartílico** é a diferenza entre o terceiro e o primeiro cuartil:

$$R_I = Q_3 - Q_1$$

Exemplo:

- Estase realizando un control de calidade sobre os fallos dunha determinada máquina. Para iso, contabilízanse os fallos de N=13 máquinas durante un mes, obtendo os seguintes números de fallos: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2. Utilizando estes valores obtemos o rango total igual a 7 e o percorrido intercuartílico igual a 3.

Actividades resoltas

- Saen 25 prazas para un posto de caixeiro nun supermercado e preséntanse 200 persoas. A seguinte información recolle as notas dun test de coñecementos básicos.

notas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	6	4	30	25	56	29	10	30	10

Calcula o rango total da variable obxecto de estudo.

Actividades propostas

27. Recolleuse unha mostra de 20 recipientes cuxos diámetros son:

0.91	1.04	1.01	1	0.77	0.78	1	1.3	1.02	1
1	0.88	1.26	0.92	0.98	0.78	0.82	1.2	1.16	1.14

a) Calcula todas as medidas de dispersión que coñezas.

b) A partir de que valor de diámetro dos recipientes se consideran o 20% con maior diámetro?

7. DISTRIBUCIÓNS BIDIMENSIONAIS

Este apartado céntrase na análise de datos bidimensional, no que son dúas as variables de interese. Deste modo, cando se está analizando unha poboación e se selecciona unha mostra, para cada individuo tómanse dous valores, correspondentes a dúas características (ou variables) distintas. Neste sentido, pode ser interesante considerar simultaneamente os dous caracteres a fin de estudar as posibles relacións entre eles.

7.1. Táboas de frecuencia dunha variable bidimensional

Cando se queren resumir os resultados dunha mostra bidimensional utilizando unha táboa de frecuencias (xa sexa por tratarse dunha variable discreta ou porque se desexen agrupar as observacións dunha variable continua), é preciso utilizar o que se denomina *táboa de dobre entrada* (ou bidimensional). Sexan $x_1, x_2, ..., x_k$ as modalidades da primeira variable e $y_1, y_2,..., y_p$ as da segunda. Estas modalidades poden corresponder tanto aos valores que se dan na mostra (se a variable é discreta), como ás marcas de clase dos intervalos utilizados (se a variable é continua). Para construír a táboa de frecuencias, utilízanse as frecuencias absolutas n_{ij} correspondentes ás observacións que toman simultaneamente valores correspondentes ás clases x_i e y_j. Obviamente, hase verificar que:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\left[n_{ij}\right] = N$$

Con isto, a táboa de frecuencias absolutas preséntase como:

	y_1	y_2	……	y_p	$n_{i\cdot}$
x_1	n_{11}	n_{12}	……	n_{1p}	$n_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}	……	n_{2p}	$n_{2\cdot}$
……	……	……	……	……	……
x_k	n_{k1}	n_{k2}	……	n_{kp}	$n_{k\cdot}$
$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	……	$n_{\cdot p}$	N

Os valores $n_{i\cdot}$ recollen as frecuencias absolutas da clase x_i, mentres que n_j é a suma de frecuencias absolutas da clase $y_{j.}$, co que se verifica:

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{p}\left[n_{ij}\right] \qquad n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{k}\left[n_{ij}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left[n_{i\cdot}\right] = N \qquad \sum_{j=1}^{p}\left[n_{\cdot j}\right] = N$$

Da mesma maneira, pódese realizar unha táboa de frecuencias relativas f_{ij}, utilizando os cocientes entre as frecuencias absolutas e o número de observacións:

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N} \leq 1$$

Actividades resoltas

- O propietario dunha instalación mixta solar-eólica está realizando un estudo do volume de enerxía que é capaz de producir a instalación. Para iso, mide esta enerxía ao longo dun total de *N=16* días que considera suficientemente representativos. A enerxía (en *kWh*) producida neses días polas instalacións solar e eólica pódese resumir nas seguintes táboas de dobre entrada de frecuencias absolutas e de frecuencias relativas:

		Enerxía eólica				
		[0,6.5]	(6.5,13]	(13,19.5]	(19.5,26]	$n_{i\cdot}$
Enerxía solar	[0,5]	0	0	0	2	**2**
	(5,10]	0	3	2	0	**5**
	(10,15]	2	3	1	0	**6**
	(15,20]	3	0	0	0	**3**
	$n_{\cdot j}$	**5**	**6**	**3**	**2**	**16**

		Enerxía eólica				
		[0,6.5]	(6.5,13]	(13,19.5]	(19.5,26]	$f_{i\cdot}$
Enerxía solar	[0,5]	0	0	0	0.125	**0.125**
	(5,10]	0	0.1875	0.125	0	**0.3125**
	(10,15]	0.125	0.1875	0.0625	0	**0.375**
	(15,20]	0.1875	0	0	0	**0.1875**
	$f_{\cdot j}$	**0.3125**	**0.375**	**0.1875**	**0.125**	**1**

7.2.Representación gráfica dunha variable bidimensional

Ao igual que no caso dunha mostra unidimensional, en numerosas ocasións resulta interesante realizar unha representación gráfica dunha mostra bidimensional.

Un modo sinxelo de representar unha mostra bidimensional é mediante o denominado **diagrama de dispersión** ou **nube de puntos**. Esta técnica consiste en representar no plano (*x,y*) os valores obtidos na mostra.

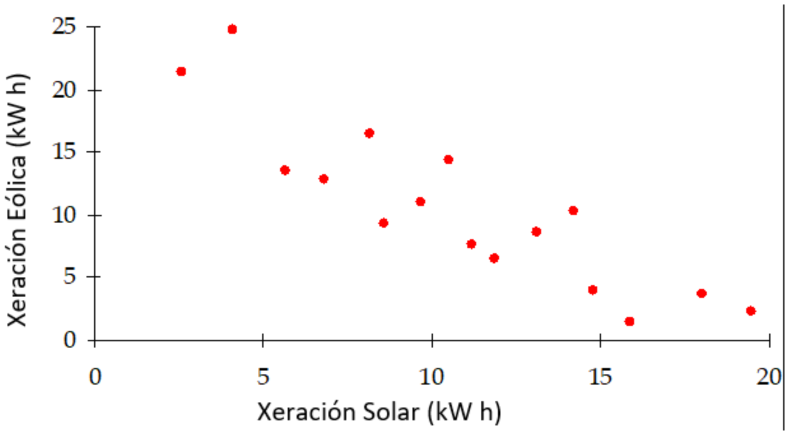


Diagrama de dispersión da xeración solar e eólica (en kWh) da actividade resolta

A figura anterior amosa o diagrama de dispersión. Pódese observar a existencia dunha dependencia inversa.

7.3. Medidas nunha variable bidimensional. Coeficiente de correlación

Cando se está analizando unha mostra bidimensional, pódense calcular as medidas que caracterizan a cada unha das variables da mostra por separado, tal e como se describiu anteriormente. Pero neste caso pódese dar un paso máis e calcular algunhas medidas conxuntas que teñen en conta simultaneamente os valores que toman ambas as variables en cada individuo.

Ao igual que cando se analiza unha única característica, suporemos que se toma unha mostra de tamaño N da poboación, é dicir, que está composta por N individuos (ou observacións), dos cales se desexa analizar as características (ou variables) X e Y. Isto dá lugar á obtención de N valores para cada unha das dúas variables: (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_N, y_N). De novo, estes valores non se supoñen ordenados, senón que o subíndice indica a orde na que foron seleccionados.

Seguindo esta notación pódense formular os cálculos dos momentos respecto á orixe e respecto á media para unha variable bidimensional. Definimos, polo tanto:

Momentos respecto á orixe da orde (r,s) como:

$$a_{r,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i^{\,r} \cdot y_i^{\,s}\right]}{N}$$

Observa que os momentos respecto á orixe da orde (1, 0) e (0, 1) coinciden coas medias de ambas as variables:

$$a_{1,0} = \overline{x} \qquad a_{0,1} = \overline{y}$$

Tamén resulta de interese ao momento da orde (1,1):

$$a_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i \cdot y_i\right]}{N}$$

Analogamente, pódense definir os momentos respecto á media da orde (r,s):

$$m_{r,s} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right)^r \cdot \left(y_i - \overline{y}\right)^s\right]}{N}$$

Os momentos respecto á media da orde (2, 0) e (0, 2) coinciden coas varianzas de ambas as variables:

$$m_{2,0} = s_X^{\,2} \qquad m_{0,2} = s_Y^{\,2}$$

O momento respecto á media da orde (1,1), que se denomina **covarianza** ou momento mixto, é de gran importancia:

$$m_{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right) \cdot \left(y_i - \overline{y}\right)\right]}{N}$$

Alternativamente á fórmula anterior, a covarianza pódese calcular a partir dos momentos respecto á orixe, segundo a fórmula:

$$m_{1,1} = a_{1,1} - a_{1,0} \cdot a_{0,1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

A covarianza, ao igual que a varianza, ten o inconveniente de que depende das unidades da mostra.

Por este motivo, utilízase o coeficiente de **correlación** lineal de Pearson (que se denota, indistintamente, como ρ ou *r*):

$$\rho = r = \frac{m_{1,1}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}$$

Este coeficiente terá o signo da covarianza e indicaranos se a dependencia entre as dúas variables obxecto de estudo son dependentes positiva ou negativamente. O coeficiente de correlación (ou simplemente correlación) toma un valor comprendido entre –1 e 1. Se a correlación é positiva dise que existe dependencia directa entre *X* e Y (a un aumento dunha das dúas variables correspóndelle unha tendencia ao aumento na outra). En cambio, se a correlación é negativa, dise que existe unha dependencia inversa (a un aumento dunha das dúas variables correspóndelle unha tendencia ao decremento na outra).

Actividades resoltas

- O propietario dunha instalación mixta solar-eólica está realizando un estudo do volume de enerxía que é capaz de producir a instalación. Para iso, mide esta enerxía ao longo dun total de *N*=16 días que considera suficientemente representativos. A enerxía (en kWh) producida neses días polas instalacións solar e eólica encóntrase recollida na seguinte táboa:

Xeración solar (x_i)	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Xeración eólica (y_i)	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9

Utilizando estas producións, imos calcular a covarianza e o coeficiente de correlación, denotando a xeración solar como variable ***X*** e a xeración eólica como variable ***Y***. Engadimos novas filas á nosa táboa:

Xeración solar (x_i)	13.1	10.5	4.1	14.8	19.5	11.9	18	8.6	5.7	15.9	11.2	6.8	14.2	8.2	2.6	9.7
Xeración eólica (y_i)	8.5	14.3	24.7	4	2.3	6.4	3.6	9.2	13.5	1.4	7.6	12.8	10.3	16.5	21.4	10.9
x_i^2	171.6	110.3	16.81	219.0	380.3	141.6	324	73.96	32.49	252.8	125.4	46.24	201.6	67.24	6.76	94.09
y_i^2	72.25	204.5	610.1	16	5.29	40.96	12.96	84.64	182.3	1.96	57.76	163.8	106.1	272.3	457.9	118.8
$x_i * y_i$	111.4	150.2	101.3	59.2	44.85	76.16	64.8	79.12	76.95	22.26	85.12	87.04	146.2	135.3	55.64	105.7

Previamente calculamos a media e a desviación típica de cada variable (que xa coñecemos dunha actividade resolta anterior). Sumando a primeira fila e dividindo por N = 16, obtemos a media da Xeración Solar en Kwh. Recorda $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$; polo tanto

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{13.1+10.5+4.1+14.8+19.5+11.9+18+8.6+5.7+15.9+11.2+6.8+14.2+8.2+2.6+9.7}{16} = 10.925 \text{ Kwh}$$

Sumando a segunda fila e dividindo por N = 16 obtemos a media da Xeración Eólica en Kwh:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \frac{8.5+14.3+24.7+4+2.3+6.4+3.6+9.2+13.5+1.4+7.6+12.8+10.3+16.5+21.4+10.9}{16} = 10.463 \text{ Kwh}$$

Na terceira fila calculamos os cadrados dos valores da primeira variable e utilizámolos para calcular a varianza: Recorda $s_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2$; polo tanto

$$s_x^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2$$
$$= \frac{13.1^2 + 10.5^2 + 4.1^2 + 14.8^2 + 19.5^2 + 11.9^2 + 18^2 + 8.6^2 + 5.7^2 + 15.9^2 + 11.2^2 + 6.8^2 + 14.2^2 + 8.2^2 + 2.6^2 + 9.7^2}{16}$$
$$= \frac{141.5}{16} - 10.9^2 = 22.16$$

Na cuarta fila calculamos os cadrados dos valores da segunda variable e calculamos a súa varianza tal que

$$s_y^{\,2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2}}{N} - \bar{y}^2 = \frac{8'5^2 + 14'3^2 + 24'7^2 + 4^2 + 2'3^2 + 6'4^2 + 3'6^2 + 9'2^2 + 13'5^2 + 1'4^2 + 7'6^2 + 12'8^2 + 10'3^2 + 16'5^2 + 21'4^2 + 10'9^2}{16} = \frac{150'48}{16} - 10'5^2 = 41'01$$

A desviación típica é a raíz cadrada da varianza, polo tanto:

$$s_x = \sqrt{22.16} = 4.71 \text{ e } s_y = \sqrt{41.01} = 6.4$$

Para calcular o coeficiente de correlación calculamos na quinta fila os produtos da variable x pola variable y. Así, 13.1*8.5 = 111.4. Queremos calcular o termo: $\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N}$. Ao sumar obtemos 1 401.2, que dividimos entre 16, restámoslle o produto das medias e dividimos polo produto das desviacións típicas:

$$\rho = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i)}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{1\,401.2 - (10.9 \cdot 10.5)}{4.71 \cdot 6.4} = \frac{-26.728}{4.71 \cdot 6.4} = -0.887$$

Este coeficiente de correlación negativo e achegado a –1 indícanos que a relación entre as dúas variables é negativa e bastante importante.

Utiliza o ordenador

- *Neves tivo en Matemáticas as seguintes notas: 8, 4, 6, 10 e 10. Calcula a súa media, a súa moda e a súa mediana.*

B7 | f_x =PROMEDIO(B2:B6)

	A	B	C	D	E
1		Datos			
2		8			
3		4			
4		6			
5		10			
6		10			
7	Media	7,6			
8	Mediana	8			
9	Moda	10			

Para calcular a media, a mediana e a moda coa folla de cálculo, copiamos na casa B2, B3… os datos: 8, 4, 6, 10 e 10. Escribimos na casa A7, Media, e para calcular a media escribimos un signo igual en B7. Buscamos, despregando as posibles funcións, a función PROMEDIO, e escribimos

=PROMEDIO(B2:B6),

que significa que calcule a media dos valores que hai nas casas desde B2 ata B6.

Do mesmo modo calculamos a mediana buscando nas funcións ou escribindo =MEDIANA(B2:B6) e a moda buscando nas funcións ou escribindo =MODA(B2,B6).

B10 | f_x =DESVESTP(B2:B6)

	A	B	C	D
1		xi		
2		8		
3		4		
4		6		
5		10		
6		10		
7	MAX	10	Percorrido =	6
8	MIN	4		
9	VARP	5,44		
10	DESVESTP	2,33		
11	CUARTIL 1	6	Intervalo Intercuartil =	4
12	CUARTIL 3	10		
13		8		

Igual que calculamos a media, a mediana e a moda, a folla de cálculo pódese utilizar para obter:

- O percorrido calculando MAX – MIN $\to$ 6.
- A varianza utilizando VARP $\to$ 5.44.
- A desviación típica usando DESVESTP $\to$ 2.33
- Os cuartís, (CUARTIL), sendo o cuartil 0 o mínimo; o cuartil 1, Q1; o cuartil 2, a mediana; o cuartil 3, Q3; e o cuartil 4, o máximo.
- Q1 = 6.
- Q3 = 10.
- O intervalo intercuartílico = 10 – 6 = 4.

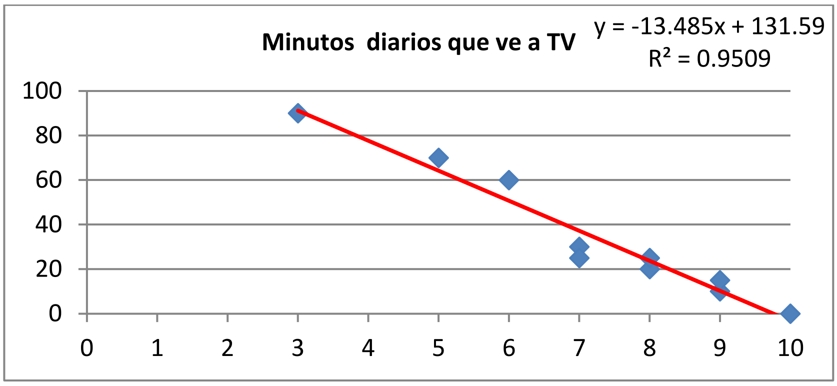
Utiliza o ordenador

- Preguntamos a 10 alumnos de 4º ESO polas súas cualificacións en Matemáticas, polo número de minutos diarios que ven a televisión, polo número de horas semanais que dedican ao estudo, e pola súa estatura en centímetros. Os datos recóllense na táboa adxunta. Queremos debuxar as nubes de puntos que os relacionan coas cualificacións de Matemáticas, o coeficiente de correlación e a recta de regresión.

Cualificacións de Matemáticas	10	3	7	8	5	9	9	8	6	7
Minutos diarios que ve a TV	0	90	30	20	70	10	15	25	60	25
Horas semanais de estudo	15	2	9	12	7	14	13	11	7	8
Estatura (en cm)	177	168	157	159	163	179	180	175	169	170

Para facelo, entramos en Excel, e copiamos os datos. Seleccionamos a primeira e a segunda fila, logo a primeira e a terceira e por último a primeira fila e a cuarta.

Coa primeira e segunda filas seleccionadas, imos *Inserir*, *Dispersión* e eliximos a *nube de puntos*. Podemos conseguir que o eixe de abscisas vaia de 0 a 10 en "*Dar formato ao eixe*". Pinchamos sobre un punto da nube e eliximos "*Agregar liña de tendencia*". Para que debuxe o ordenador a recta de regresión a liña de tendencia debe ser *Lineal*. Na pantalla que aparece marcamos a casa que di: "*Presentar ecuación no gráfico*" e a casa que di "*Presentar o valor de R cadrado no gráfico*".



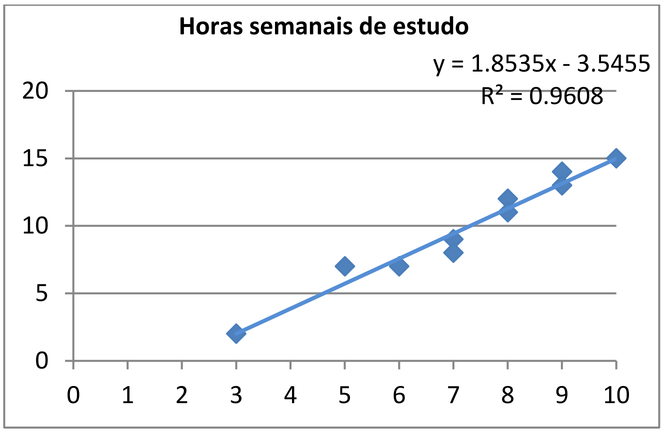
Observa: a recta de regresión, en cor vermella, é decrecente e a súa ecuación é aproximadamente:

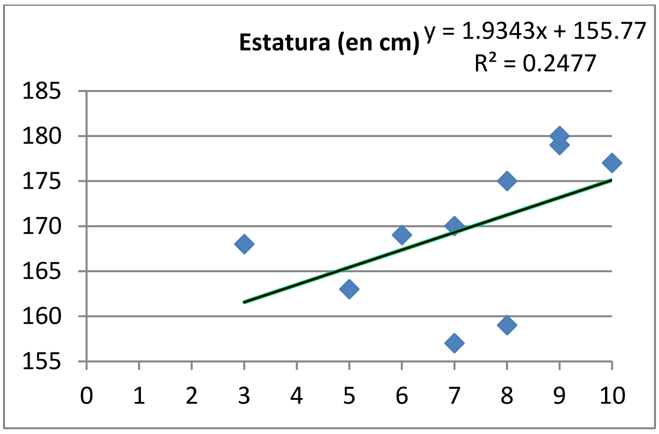
$$y = -13.5\,x + 132.$$

O cadrado do coeficiente de correlación é $\rho^2 = 0.95$. A correlación é negativa e alta:

$$\rho = \sqrt{0.95} = -0.975$$

Facemos o mesmo coa primeira e terceira fila e coa primeira e cuarta fila. Obtemos os gráficos:





Observa que en ambos os casos a pendente da recta de regresión é positiva pero, no primeiro, o coeficiente de correlación, positivo, é próximo a 1, $= \sqrt{0.96} = 0.98$. A correlación é alta e positiva.

No segundo $\rho = \sqrt{0.25} = 0.5$.

Actividades propostas

28. Medíronse os pesos e alturas de 6 persoas, como mostra das persoas que están nunha fila ou cola de espera, obténdose os seguintes resultados:

Pesos (kg)	65	60	65	63	68	68
Alturas (cm)	170	150	168	170	175	180

Pídese:

a) Calcular as medias e as varianzas deses dous conxuntos de datos unidimensionais.

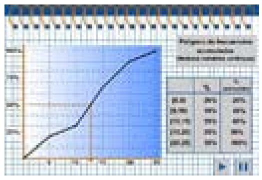
b) Que medidas están máis dispersas, os pesos ou as alturas?

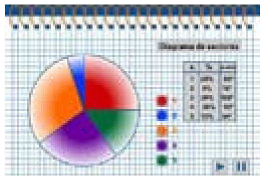
c) Representar graficamente ese conxunto de datos bidimensional. Calcular a covarianza e interpretar o seu valor.

d) Dar unha medida da correlación entre ambas as variables. Interpretar o seu valor.

CURIOSIDADES. REVISTA

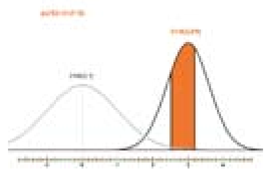
UTILIZAMOS A ESTATÍSTICA POR ENRIBA DAS NOSAS POSIBILIDADES?





Nas últimas décadas o uso de datos estatísticos é unha das principais maneiras coas que se presenta información de calquera tipo, proveña a súa fonte dos medios de comunicación, a través de mensaxes publicitarias ou relacionada con traballos de investigación. Actualmente consumir información convértese, en moitas ocasións, en entrar nun mundo de números, porcentaxes, gráficos, probabilidades, mapas e outros conceptos básicos desta disciplina que custa entender.

"TEÑO OS MEUS RESULTADOS HAI TEMPO, PERO NON SEI COMO CHEGAR A ELES"



Esta expresiva oración de Gauss -descubridor da campá que leva o seu nome, e que alude á distribución normal cando a cantidade de datos é bastante grande-, é aplicable a moitas das informacións erróneas que vemos a diario. Teñen os datos pero non saben como chegar ao núcleo da súa interpretación.

Moitas veces cando un medio de comunicación quere impresionar mediante un titular sobre a gravidade dunha situación que afecta a toda a poboación, fai uso de números absolutos en lugar de porcentaxes.

EL PAÍS | PORTADA | INTERNACIONAL | POLÍT

POLÍTICA

MONCLOA | FERRAZ | GÉNOVA | + PARTIDOS | CONGRESO | OPINIÓN | SUCESOS | BL

ESTÁ PASANDO | El órdago soberanista catalán | La imputación de la Infanta | Baltasar Garzón

OPERACIÓN RETORNO

40 muertos en carretera en Semana Santa

- Los principales atascos de la jornada se concentran en la zona centro
- Consulta el estado de las carreteras

EL PAÍS | Madrid | 9 ABR 2012 - 09:47 CET | 52

Por exemplo: Cando lemos o titular que dúbida cabe que todos pensamos que 40 mortos son moitos mortos sexan por accidente de tráfico ou por outra causa. A argucia está ben pensada para chamar a *atención do* lector pero, informativamente falando, esta presentación dos feitos utilizando números sen comparalos con outros números merece *"un suspenso"*. Os datos estatísticos non "falan por si mesmos". Un dato sempre hai que relacionalo con outros datos para comprender a variabilidade que experimentou o caso que estamos analizando. Se a noticia se tivese acompañado coas estatísticas de mortes por accidente de tráfico dos últimos anos en períodos de vacacións de catro días, rapidamente o lector se daría conta de que non é para alarmarse máis que outras veces xa que o número de mortos nin subiu nin baixou, é máis ou menos o mesmo que en calquera outra ponte similar en días. É dicir, este "abraiante" titular apoiado en datos numéricos, en realidade *nin sequera é noticia*…

RESUMO

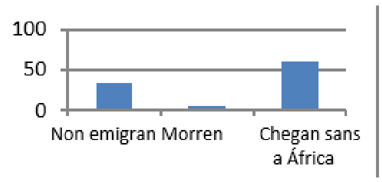
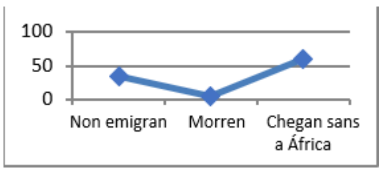
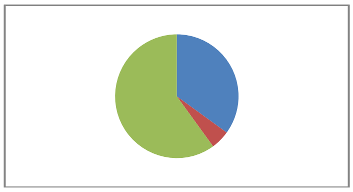
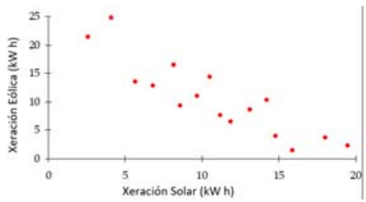
Noción	*Definición*	*Exemplos*
Poboación estatística, colectivo ou universo	O conxunto de todos os individuos (persoas, obxectos, animais, etc.) que conteñan información sobre o fenómeno que se estuda.	Número de persoas en España entre 16-65 anos.
Mostra	É un subconxunto representativo que se selecciona da poboación e sobre o que se vai realizar a análise descritiva. O tamaño da mostra é o número dos seus elementos. Cando a mostra comprende todos os elementos da poboación, denomínase censo.	Número de persoas nun barrio de Madrid entre 16 e 65 anos.
Variable observable ou estatística *X*	En xeral, suporemos que se está analizando unha determinada poboación, da que nos interesa certa característica que vén dada pola variable *X*.	As variables que están baixo estudo pódense clasificar en dúas categorías: Variables cualitativas ou atributos (datos non métricos). Variables cuantitativas, que teñen un valor numérico.
Frecuencia absoluta	Número de veces que se repite un valor da variable	Se ao tirar un dado obtivemos 2 veces o 3, 2 é a frecuencia absoluta de 3.
Frecuencia relativa	Frecuencia absoluta dividido polo número de experimentos	Se se realiza un experimento 500 veces e a frecuencia absoluta dun suceso é 107, a frecuencia relativa é 107/500.
Frecuencia acumulada	Súmanse as frecuencias anteriores	
Diagrama de rectángulos ou barras	Os valores da variable represéntanse mediante rectángulos de igual base e de altura proporcional á frecuencia. Indícanse no eixe horizontal a variable e no vertical as frecuencias.	
Polígono de frecuencias	Únense os puntos medios superiores dun diagrama de barras.	

Diagrama de sectores	Nun círculo debúxanse sectores de ángulos proporcionais ás frecuencias.	
Media aritmética	É o cociente entre a suma de todos os valores da variable e o número total de datos.	Nos datos 3, 5, 5, 7, 8, a media é: (3 + 5 + 5 + 7 + 8)/5 = 28/5 = 5.6.
Mediana	Deixa por debaixo a metade dos valores e por enriba a outra metade.	A mediana é 5.
Moda	O valor que máis se repite.	A moda é 5.
Varianza	Medida de desviación que recolle as desviacións dos valores da variable respecto da media aritmética.	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right]}{N}$
Desviación típica	A desviación típica é a raíz cadrada da varianza.	
Coeficiente de variación	Permite comparar a variabilidade de distintas mostras, independentemente das súas unidades de medida.	$g = \frac{s}{\lvert\overline{x}\rvert}$
Rango total ou percorrido	Diferenza entre os valores máximos e mínimos que toma a variable na mostra.	$R = x_{\{N\}} - x_{\{1\}}$
Percorrido intercuartílico	Diferenza entre o terceiro e o primeiro cuartil.	$R_I = Q_3 - Q_1$
Nube de puntos	Un modo sinxelo de representar unha mostra bidimensional. Esta técnica consiste en representar no plano (*x, y*) os valores obtidos na mostra.	
Coeficiente de correlación	Indica se a dependencia entre dúas variables obxecto de estudo son dependentes positiva ou negativamente.	$\rho = r = \frac{m_{1,1}}{s_x \cdot s_y}$

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Poboación e mostra. Variables estatísticas. Táboas de frecuencias

1. Lánzase unha moeda 700 veces e obtense cara 355 veces. Expresa nunha táboa as frecuencias absolutas, relativas e calcula tamén as frecuencias acumuladas absolutas e acumuladas relativas de caras e cruces neste experimento.

2. Lánzase un dado 500 veces e obtéñense os seguintes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Número de veces	70	81	92	85		81

a) Cantas veces saíu o 5?

b) Construír unha táboa coas frecuencias absolutas e as frecuencias absolutas acumuladas.

c) Construír unha táboa coas frecuencias relativas e as frecuencias relativas acumuladas.

3. Unha urna contén 10 bólas numeradas do 0 ao 9. Sacamos unha bóla, anotamos o número e devolvemos a bóla á urna. Repetimos o experimento 1000 veces e obtivéronse os resultados indicados na táboa:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0.12	0.13					0.1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

a) Cal é a frecuencia absoluta de 9?

b) Cal é a frecuencia absoluta acumulada de 2?

c) Cal é a frecuencia relativa acumulada de 1?

d) Copia a táboa no teu caderno e complétaa.

4. Pepa tirou un dado 25 veces e obtivo os seguintes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Construír unha táboa de frecuencias absolutas.

b) Construír unha táboa de frecuencias relativas.

c) Debuxa un diagrama de barras.

d) Debuxa un polígono de frecuencias e unha representación por sectores.

5. Nunha clase mediuse o tamaño das mans de cada un dos alumnos e alumnas, e o resultado en centímetros foi o seguinte:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Que tamaño foi o valor mínimo? E o máximo? Cal é o rango total da variable?

b) Construír unha táboa de frecuencias absolutas e outra de frecuencias relativas.

c) Construír unha táboa de frecuencias absolutas acumuladas e outra de frecuencias relativas acumuladas.

6. Calcula a frecuencia absoluta dos datos dunha enquisa na que se elixiu entre ver a televisión, t, ou ler un libro, l:

t, l, t, t, t, l, t, t, l, t, l, t, l, t, t, t, l, l, t, l, t, l, t, l, t.

7. A duración en minutos dunhas chamadas telefónicas foi:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Construír unha táboa de frecuencias absolutas e unha táboa de frecuencias relativas.

Gráficos estatísticos

8. Preguntouse nunha vila da provincia de Madrid o número de irmáns que teñen e obtívose a seguinte táboa de frecuencias absolutas sobre o número de fillos de cada familia:

Número de fillos	1	2	3	4	5	6	7	8 ou máis
Número de familias	46	249	205	106	46	21	15	6

a) Escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias relativas.

b) Fai un diagrama de barras de frecuencias absolutas e outro de frecuencias relativas.

c) Fai un polígono de frecuencias absolutas e outro de frecuencias absolutas acumuladas.

9. Fai unha enquisa similar cos teus compañeiros e compañeiras de curso preguntando o número de irmáns e confeccionando unha táboa sobre o número de fillos e o número de familias.

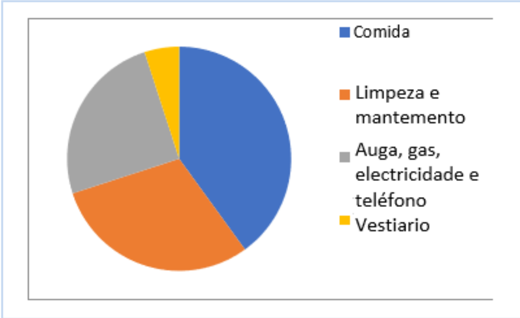
a) Constrúe unha táboa de frecuencias relativas.

b) Fai un diagrama de barras de frecuencias absolutas e relativas. Completa cun polígono de frecuencias.

c) Compara a táboa de frecuencias relativas e o diagrama de barras de frecuencias relativas que obteñas co obtido no exercicio anterior.

10. Un batido de froita contén 25 % de laranxa, 15 % de plátano; 50 % de mazá e o resto de leite. Representa nun diagrama de sectores a composición do batido.

11. Nun campamento de verán gastáronse dez mil euros. O gráfico amosa a distribución do gasto:



1. Comida: 40 %
2. Limpeza e mantemento: 30 %
3. Auga, gas, electricidade e teléfono: 25 %
4. Vestiario: ....

a) Que porcentaxe se gastou en vestiario?

b) Cantos euros se gastaron en comida?

c) Canto mide o ángulo do sector correspondente a actividades?

12. Busca en revistas ou periódicos dúas gráficas estatísticas, recórtaas e pégaas no teu caderno. En moitas ocasións estas gráficas teñen erros. Obsérvaas detidamente e comenta as seguintes cuestións:

a) Está clara a variable á que se refire? E as frecuencias?

b) Son correctas as unidades? Poden mellorarse?

c) Comenta as gráficas.

13. Faise unha enquisa sobre o número de veces que van ao cine uns mozos ao mes. Os valores da variable están na táboa:

Veces que van ao cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

a) Representa un diagrama de barras de frecuencias absolutas.

b) Representa un polígono de frecuencias relativas.

c) Representa os valores da variable nun diagrama de sectores.

14. Faise un estudo sobre o que se recicla nunha cidade e faise unha táboa co peso en porcentaxe dos distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	**Porcentaxe**
Orgánico	15
Papel e cartón	1
Vidro	15
Plástico	1
Pilas	15

a) Constrúe un diagrama de barras

b) Representa un polígono de frecuencias.

c) Representa os valores da variable nun diagrama de sectores.

15. Nun exercicio anterior obtívose o resultado de medir nunha clase o tamaño das mans de cada un dos alumnos e alumnas, e o resultado en centímetros foi o seguinte:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa os valores da variable nun diagrama de barras e nun polígono de frecuencias.

16. O 35 % das cegoñas non emigrou este ano a África e o 6 % morreu polo camiño. Debuxa un diagrama por sector que describa esta situación.

17. Nunha clase preguntouse polas preferencias deportivas e obtívose:

Fútbol	**Baloncesto**	**Natación**	**Karate**	**Ciclismo**
8	9	7	6	10

a) Copia a táboa no teu caderno e constrúe unha táboa de frecuencias relativas.

b) Representa estes valores da variable nun diagrama de sectores.

Medidas de centralización e dispersión

18. Pepa tirou un dado 25 veces nun exercicio anterior e obtivo os seguintes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

a) Calcula a media aritmética.

b) Calcula a mediana.

c) Cal é a moda? É única?

d) Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.

19. Sara tivo as seguintes notas nos seus exames de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9

a) Calcula a media aritmética.

b) Calcula a mediana.

c) Cal é a moda? É única?

d) Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.

e) Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?

f) Calcula a varianza e a desviación típica interpretando o seu resultado.

g) Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado.

20. Nun exercicio anterior obtívose o resultado de medir nunha clase o tamaño das mans de cada un dos alumnos e alumnas, e o resultado en centímetros foi o seguinte:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

a) Calcula a media aritmética.

b) Calcula a mediana.

c) Cal é a moda? É única?

d) Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.

e) Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?

f) Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.

g) Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado.

21. Interésanos coñecer a distribución de notas obtidas por 40 estudantes. As notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escribe no teu caderno unha táboa de frecuencias absolutas.

b) Fai un polígono de frecuencias absolutas.

c) Calcula a media.

d) Calcula a mediana.

e) Calcula a moda.

f) Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.

g) Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?

h) Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.

i) Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado.

j) Se as notas dos mesmos alumnos respecto a outra materia teñen unha media de 5.3 e desviación típica de 2, cal das dúas materias ten unha media máis homoxénea?

22. Os xogadores dun equipo de balonmán teñen as seguintes idades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

a. Calcula a media.

b. Calcula a mediana.

c. Calcula a moda.

d. Calcula o percentil 45 interpretando o seu resultado.

e. Calcula o percentil 75 interpretando o seu resultado. Que outro nome recibe?

f. Calcula a varianza e desviación típica interpretando o seu resultado.

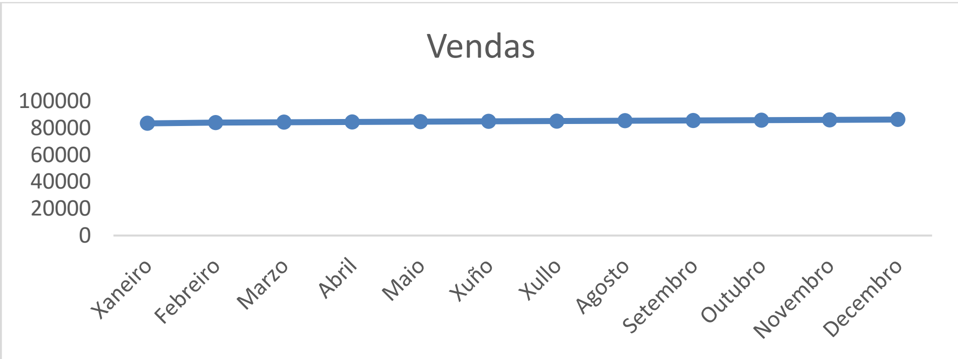
g. Calcula o coeficiente de variación interpretando o seu resultado.

Problemas

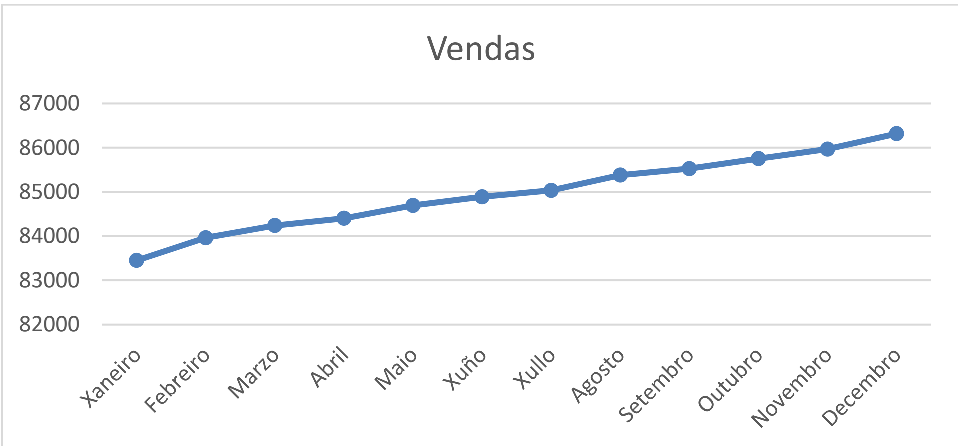
23. O Director Comercial dunha empresa vai ser avaliado. Para iso debe dar conta dos resultados obtidos. Quere quedar ben, pois iso pódelle supoñer un aumento de soldo. Vendeu as seguintes cantidades:

Meses	Xaneiro	Febreiro	Marzo	Abril	Maio	Xuño	Xullo	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Decembro
Vendas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	85967	86316

O estatístico da empresa entregoulle a seguinte gráfica:



Non lle gustou nada e, para a presentación, confecciona el mesmo o seguinte gráfico:



Ambos os gráficos son correctos. Escribe un informe sobre como poden os distintos gráficos dar impresións tan diferentes.

24. Tira unha moeda 15 veces e anota as veces que cae cara e as que non. Constrúe logo dúas táboas: unha de frecuencias absolutas e outra de frecuencias relativas. Representa o resultado nun diagrama de frecuencias e nun polígono de frecuencias.

25. A media de seis números é 5. Engádense dous números máis pero a media segue sendo 5. Canto suman estes dous números?

26. A seguinte táboa expresa as estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talle	1.50 – 1.56	1.56 – 1.62	1.62 – 1.68	1.68 - 1.74	1.74 - 1.80	1.80-1.92
Nº de soldados	20	150	200	330	200	100

Calcula:

a) A media e a desviación típica.

b) Os intervalos onde se encontran a mediana e os cuartís.

c) O intervalo ($\overline{x}$ - σ, $\overline{x}$ + σ) e a porcentaxe de individuos neste intervalo.

d) Representa os datos nun histograma.

27. Unha compañía aérea sospeita que existe unha relación entre as variables *X*, tempo dun voo, en horas; e *Y*, consumo de combustible (gasóleo) para este voo, en litros. Por esta razón, obtivéronse os seguintes datos, dentro do rango de niveis de interese para X nesta compañía.

X_i	0.4	0.5	0.6	0.65	0.7	0.8	1	1.15	1.2
Y_i	1 350	2 220	2 900	3 150	3 350	3 550	3 900	4 330	4 500

X_i	1.4	1.5	1.6	1.8	2.2	3
Y_i	5 050	5 320	5 650	6 400	7 500	10 250

Pídese:

a) Mediante a representación do diagrama de dispersión razoar o interese de relacionar estas variables.

b) Obter a covarianza e o coeficiente de correlación entre ambas as variables. Interpretar os resultados.

AUTOAVALIACIÓN

1. Un diagrama de caixa informa sobre:

a) Os cuartís e curtosis. b) Asimetría e varianza. c) Datos atípicos e simetría.

2. Sexa a variable aleatoria o número de persoas que é capaz de levantar un ascensor. Para calcular o nº de persoas a partir do cal se recolle o 30% dos valores da variable necesitamos obter

a) O percentil 30 b) o percentil 3 c) o percentil 70

3.O 25% dos madrileños gastan na factura do móbil por enriba de 100 euros mentres que o 25% gastan por debaixo de 20 euros. Entón coñecemos:

a) 100 e 20 son valores que corresponden ao cuartil 1 e 3, respectivamente.

b) 100 e 20 son valores que corresponden ao cuartil 3 e 1, respectivamente.

c) 100 e 20 son valores que non corresponden a ningún cuartil.

4.Nun diagrama de barras de frecuencias absolutas, a suma das súas alturas é proporcional a:

a) 100 b) 1 c) Total de valores da variable d) Suma das súas bases

5. A media dos seguintes valores da variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, é:

a) 6 b) 7 c) 4.8 d) 5.5

6.A mediana dos seguintes valores da variable 3, 4, 6, 7, 8, é:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

7.A moda dos seguintes valores da variable 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, é:

a) 6 b) 7 c) 4 d) 5

8.A media de 7 números é 8. Engádense dous números máis pero a media segue sendo 8. Canto suman estes dous números?

a) 10 b) 16 c) 20 d)14

9. Dúas revistas especializadas en emprego, A e B, publicaron unha media de ofertas de traballo de m_A = 10 e m_B = 20 con varianzas, respectivamente, de $s^2_A = 4$ e $s^2_B = 9$.

a) A revista B presenta maior coeficiente de variación que a revista A.

b) A revista A presenta maior coeficiente de variación que a revista B.

c) A revista B presenta igual coeficiente de variación que A

10. O 70 % dos madrileños gastan en regalos de Nadal por enriba de 100 euros mentres que o 5 % gastan por enriba de 500 euros. Entón coñecemos:

a) O valor correspondente ao percentil 30.

b) O valor correspondente ao percentil 70.

c) O valor correspondente ao percentil 5.

Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB da ESO

Capítulo 14: Combinatoria

www.apuntesmareaverde.org.es

Autoras: Adela Salvador e María Molero

Revisores: Andrés Hierro e Sergio Hernández

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e María Molero

Índice

Resumo

Saber contar é algo importante en Matemáticas. Xa Arquímedes no seu libro *Arenario* se preguntaba como contar o número de grans de area que había na Terra.

Neste capítulo imos aprender técnicas que nos permitan contar. Imos aprender a recoñecer as permutacións, as variacións e as combinacións; e a utilizar os números combinatorios en distintas situacións como para desenvolver un binomio elevado a unha potencia.

Estas técnicas de contar utilizarémolas noutras partes das Matemáticas como en *Probabilidade* para contar o número de *casos posibles* ou o número de *casos favorables*.

1. PERMUTACIÓNS

1.1. Diagramas en árbore

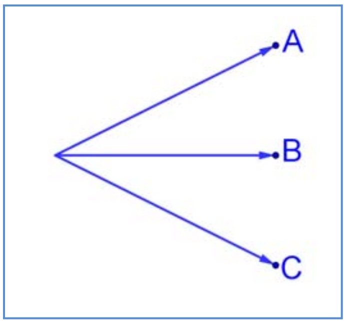
Actividades resoltas

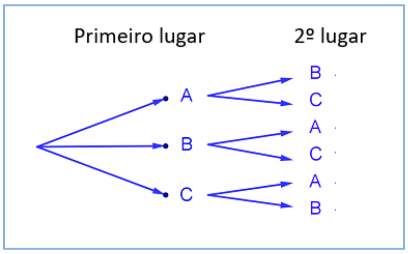
- *Nunha festa cóntase con tres grupos musicais que deben actuar. Para organizar a orde de actuación, cantas posibilidades distintas hai?*

Unha técnica que pode axudar moito é confeccionar un **diagrama en árbore**. Consiste nunha representación por niveis na que cada rama representa unha opción individual para pasar dun nivel ao seguinte, de tal maneira que todos os posibles percorridos desde a raíz ata o último nivel, o nivel das follas, son todos os posibles resultados que se poden obter.

Chamamos aos tres grupos musicais A, B e C.

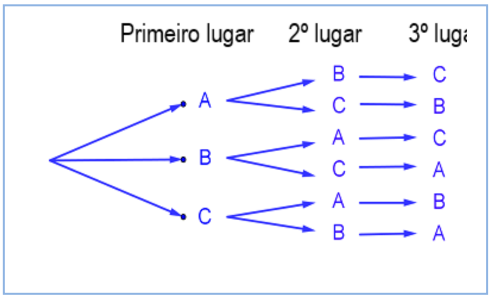
Primeiro nivel da árbore: En primeiro lugar poderán actuar ou ben A, ou ben B ou ben C.





Segundo nivel da árbore: unha vez que o grupo A foi elixido para actuar en primeiro lugar, para o segundo posto só podemos colocar a B ou a C. Igualmente, se xa B vai en primeiro lugar, só poderán estar no segundo lugar A ou C. E se actúa en primeiro lugar C, para o segundo posto as opcións son A e B.

Terceiro nivel da árbore: se xa se tivese decidido que en primeiro lugar actúa o grupo A e en segundo o grupo B para o terceiro lugar, que se pode decidir? Só nos queda o grupo C e, da mesma maneira, en todos os outros casos, só queda unha única posibilidade.



Confeccionar o diagrama en árbore, mesmo unicamente comezar a confeccionalo, permítenos contar con seguridade e facilidade. Para saber cantas formas temos de organizar o concerto, aplicamos o principio de multiplicación: só temos que multiplicar os números de ramificacións que hai en cada nivel: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas de organizar a orde de actuación dos grupos.

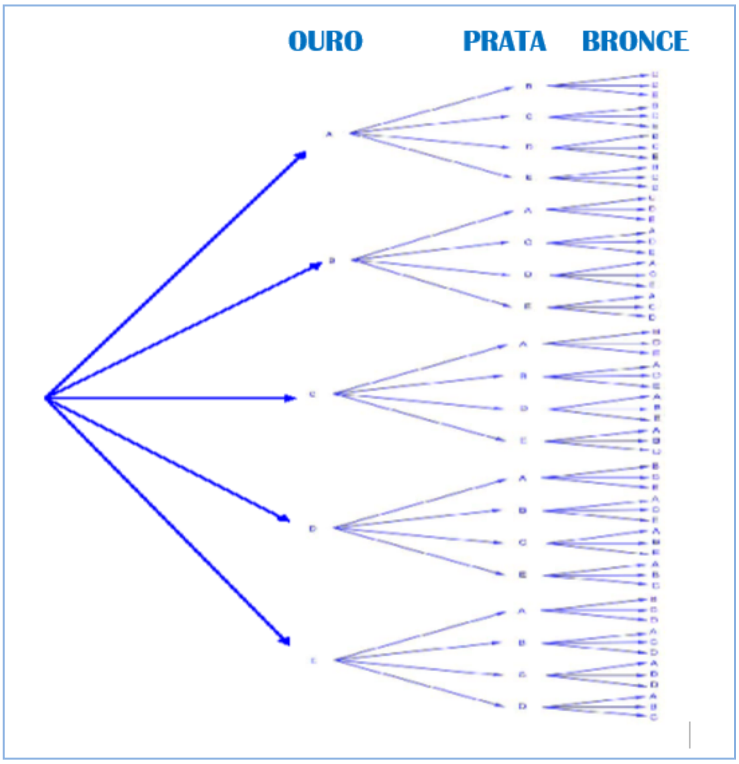
Tamén permite escribir esas seis posibles formas sen máis que seguir a árbore: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- *Nunha carreira compiten* 5 *corredores e vanse repartir tres medallas, ouro, prata e bronce. De cantas formas distintas poden repartirse?*

Facemos o diagrama en árbore. O ouro poden gañalo os cinco corredores que imos chamar A, B, C, D e E. Facemos as cinco frechas do diagrama. Se o ouro o gañase o corredor A, a prata só a podería gañar algún dos outros catro corredores: B, C, D ou E. Se o ouro o tivese gañado B tamén habería catro posibilidades para a medalla de prata: A, C, D e E. E así co resto.

Se supoñemos que a medalla de ouro a gañou A e a de prata B, entón a medalla de bronce poden gañala C, D ou E.

Polo tanto, hai 5 · 4 · 3 = 60 formas distintas de repartir as tres medalas entre os cinco xogadores.



Actividades propostas

1. Fai diagramas en árbore para calcular:

a) Cantas palabras de dúas letras distintas (con significado ou sen el) podes escribir coas letras A, B ou C.

b) Cantas palabras de tres letras distintas que empecen por vogal e terminen por consoante se poden formar coas letras do alfabeto. (*Recorda* que hai 5 vogais e 20 consoantes).

2. Ana ten 5 camisolas, 3 pantalóns e 4 pares de zapatillas. Pode levar unha combinación diferente de camisola, pantalón e zapatillas durante dous meses (61 días)? Cantos días deberá repetir combinación? *Axuda*: Seguro que un diagrama en árbore che resolve o problema.

3. Nun taboleiro cadrado con 25 casas, de cantas formas diferentes podemos colocar dúas fichas idénticas de modo que estean en distinta fila e en distinta columna? *Suxestión*: Confecciona un diagrama de árbore. Cantas casas hai para colocar a primeira ficha? Se descartamos a súa fila e a súa columna, en cantas casas podemos colocar a segunda ficha?

1.2. Permutacións ou ordenacións dun conxunto

Chamamos **permutacións** ás posibles formas distintas nas que se pode ordenar un conxunto de elementos distintos.

Cada cambio na orde é unha permutación.

Exemplos:

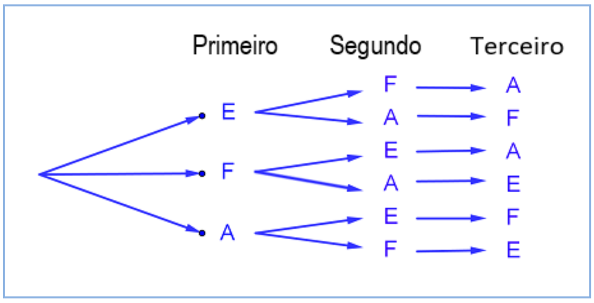
- *Son permutacións:*
  - As formas nas que poden chegar á meta 10 corredores.
  - As palabras de catro letras, sen repetir ningunha letra, con ou sen sentido que podemos formar coas letras da palabra MESA.
  - Os números de 5 cifras distintas que se poden formar cos díxitos: 1, 2, 3, 4 e 5.

O número de permutacións dun conxunto de n elementos desígnase por P_n, e lese *permutacións de n elementos*.

A actividade resolta dos tres grupos musicais que ían actuar nunha festa era de permutacións, era unha ordenación, logo escribiriámola como P_3, e lese *permutacións de 3 elementos*.

Actividades resoltas

- *Na fase preparatoria dun campionato do mundo están no mesmo grupo España, Francia e Alemaña. Indica de cantas formas poden quedar clasificados estes tres países.*



Son permutacións de 3 elementos: P_3. Facemos un diagrama de árbore. Poden quedar primeiros España (E), Francia (F) ou Alemaña (A). Se gañou España, poden optar ao segundo posto F ou A. E se xa tivesen gañado España e logo Francia, para o terceiro posto só quedaría Alemaña.

Poden quedar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

En xeral para calcular as permutacións de n elementos multiplícase n por $n - 1$, e así, baixando de un en un, ata chegar a 1: $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A este número chámaselle factorial de n, e indícase $n!$

$$\mathbf{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

Corresponde a unha árbore de n niveis con n, $n - 1$, $n - 2$, …, 3, 2, 1 posibilidades de elección respectivamente.

Para realizar esta operación coa calculadora utilízase a tecla $\boxed{!}$

Exemplos:

- As formas nas que poden chegar á meta 10 corredores son:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800.$$

- As palabras con ou sen sentido que podemos formar coas letras, sen repetir, da palabra MESA son $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

- Os números de 5 cifras, todas distintas, que se poden formar cos díxitos: 1, 2, 3, 4 e 5 son:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- España, Francia e Alemaña poden quedar clasificados de $P_3 = 3! = 6$ formas distintas.

Actividades propostas

4. De cantas formas poden repartir catro persoas, catro pasteis distintos, comendo cada persoa un pastel?

5. Nunha carreira de cabalos participan cinco cabalos cos números 1, 2, 3, 4 e 5. Cal deles pode chegar o primeiro? Se a carreira está amañada para que o número catro chegue o primeiro, cales poden chegar en segundo lugar? Se a carreira non está amañada, de cantas formas distintas poden chegar á meta? Fai un diagrama en árbore para responder.

6. De cantas maneiras podes meter catro obxectos distintos en catro caixas diferentes se só podes poñer un obxecto en cada caixa?

7. Cantos países forman actualmente a Unión Europea? Podes ordenalos seguindo diferentes criterios, por exemplo, pola súa poboación, ou con respecto á súa produción de aceiro, ou pola superficie que ocupan. De cantas maneiras distintas é posible ordenalos?

8. No ano 1973 había seis países no Mercado Común Europeo. De cantas formas podes ordenalos?

9. Nunha oficina de colocación hai sete persoas. De cantas formas distintas poden ter chegado?

Actividades resoltas

- *Cálculo de* $\frac{6!}{3!}$.

Cando calculamos cocientes con factoriais sempre simplificamos a expresión, eliminando os factores do numerador que sexan comúns con factores do denominador, antes de facer as operacións. En xeral sempre soe ser preferible simplificar antes de operar pero, neste caso, resulta imprescindible para que non saian números demasiado grandes.

$$\text{É } \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 6\cdot5\cdot4 = 120.$$

- *Expresa, utilizando factoriais, os produtos seguintes:* a) 10 · 9 · 8; b) (n + 4) · (n + 3) · (n + 2);

a) $10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{10!}{7!}$

b) $(n + 4) \cdot (n + 3) \cdot (n + 2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Actividades propostas

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

12. Expresa utilizando factoriais: a) 5 · 4 · 3; b) 10 · 11 · 12 · 13; c) 8 · 7 · 6; d) 10 · 9.

13. Expresa utilizando factoriais:

a) (n + 3) · (n + 2) · (n + 1);

b) n · (n + 1) · (n + 2) · (n + 3);

c) n · (n + 1) · (n + 2)·… ·(n + k).

14. Escribe en forma de factorial as distintas formas que teñen de sentar nunha clase os 30 alumnos nos 30 postos que hai. (Non o calcules. O resultado é un número moi grande. Para calculalo precísase un ordenador ou unha calculadora e habería que recorrer á notación científica para expresalo de forma aproximada).

15. Nove ciclistas circulan por unha estrada en fila india. De cantas formas distintas poden ir ordenados?

2. VARIACIÓNS

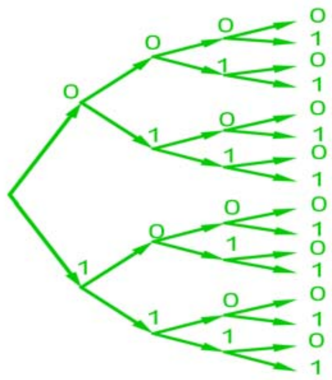
2.1. Variacións con repetición

Xa sabes que as quinielas consisten en adiviñar os resultados de 14 partidos de fútbol sinalando un 1 se pensamos que gañará o equipo da casa, un 2 se gaña o visitante e un X se esperamos que haxa empate. Nunha mesma xornada, cantas quinielas distintas poderían encherse?

Observa que agora cada diferente quiniela consiste nunha secuencia dos símbolos 1, 2 e X, nas que o mesmo símbolo pode aparecer varias veces **repetido** ao longo da secuencia e dúas quinielas poden diferenciarse polos **elementos** que a compoñen ou pola **orde** na que aparecen.

Actividades resoltas

- *Con dous símbolos,* 0 *e* 1*, cantas tiras de* 4 *símbolos se poden escribir?*



Igual que en anteriores exemplos, formamos o diagrama de árbore. Observando que no primeiro lugar da tira podemos poñer os dous símbolos. No segundo lugar, aínda que teñamos posto o 0, como se pode repetir, podemos volver poñer o 0 e o 1. O mesmo no terceiro e no cuarto lugar. É dicir, o número de ramificacións non se vai reducindo, sempre é igual, polo tanto o número de tiras distintas que podemos formar é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

As diferentes secuencias de lonxitude *n* que se poden formar cun conxunto de *m* elementos diferentes chámanse **variacións con repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n*. O número de diferentes secuencias que se poden formar desígnase coa expresión $VR_{m,n}$. E calcúlase coa fórmula:

$$\mathbf{VR_{m,n} = m^n}$$

Na ***actividade resolta*** anterior son variacións con repetición de 2 elementos tomados de 4 en 4:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tiras distintas.}$$

Actividade resolta

- No cálculo do *número de quinielas distintas* os elementos son 3 (1, 2, X) e fórmanse secuencias de lonxitude 14, polo tanto, trátase de *variacións con repetición* de 3 elementos tomados de 14 en 14:

  $$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969.$$

  Para ter a certeza absoluta de conseguir 14 acertos hai que encher 4 782 969 apostas simples.

- *A probabilidade de que che toque unha quiniela nunha aposta simple é*, polo tanto, $\frac{1}{4\,782\,969}$.

Actividades propostas

16. Cos 10 díxitos, cantos números distintos poden formarse de 6 cifras?

17. Cos 10 díxitos e as 20 consoantes do alfabeto, cantas matrículas de coche poden formarse tomando catro díxitos e tres letras?

18. Un byte ou octeto é unha secuencia de ceros e uns tomados de 8 en 8. Cantos bytes distintos poden formarse?

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

20. Expresa cunha fórmula:

a) As variacións con repetición de 3 elementos tomadas 5 a 5.

b) As variacións con repetición de 7 elementos tomadas 2 a 2.

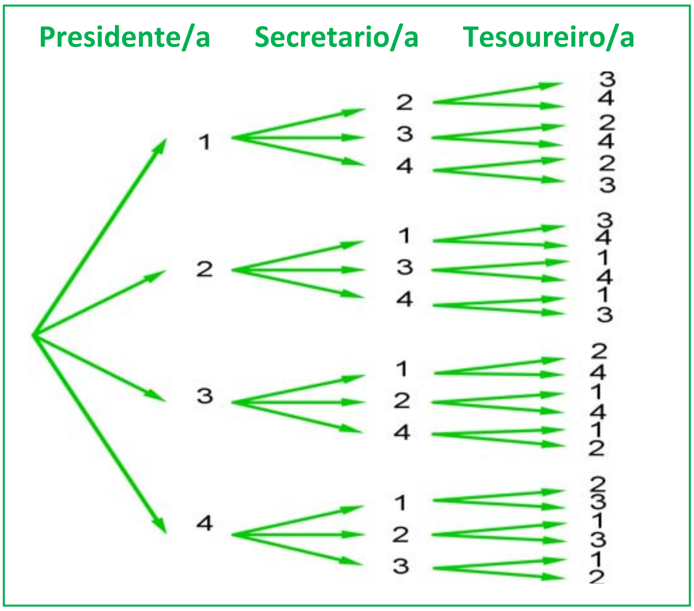
c) As variacións con repetición de 5 elementos tomadas 4 a 4.

21. Cantas palabras de tres letras (con significado ou non) podes formar que empecen por consoante e terminen coa letra R?

2.2. Variacións sen repetición

Actividades resoltas

- *Unha asociación de veciños vai renovar a xunta directiva. Esta consta de tres cargos, presidencia, secretaría e tesouraría. a) Se unicamente se presentan catro persoas, de cantas maneiras pode estar formada a xunta? b) Se antes que empece a votación se presentan outros dous candidatos, cantas xuntas diferentes poderán formarse agora?*



a) Confeccionamos o noso diagrama en árbore. Numeramos os candidatos do 1 ao 4. Á presidencia poden optar os 4 candidatos pero, se un determinado candidato xa foi elixido para a presidencia, non poderá optar aos outros dous cargos, polo que desde cada unha das primeiras catro ramas, só sairán tres ramas. Unha vez elixida unha persoa para a presidencia e a secretaría, para optar á tesourería haberá unicamente dúas opcións, polo cal de cada unha das ramas do segundo nivel, saen dúas ramas para o terceiro nivel.

Deste modo, multiplicando o número de ramificacións en cada nivel, temos que a xunta pode estar formada de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneiras.

b) Se en lugar de 4 candidatos fosen 6, podería estar formada de $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneiras.

Estas agrupacións de elementos, nas que un elemento pode aparecer en cada grupo como máximo unha vez, sen repetirse, e cada grupo se diferencia dos demais polos elementos que o compoñen ou pola orde na que aparecen denomínanse *variacións sen repetición*.

Nas variacións, tanto con repetición como sen repetición, téñense en conta a **orde** e os **elementos** que forman o grupo. A diferenza é que nas variacións con repetición poden repetirse os elementos e nas variacións ordinarias non. No exemplo anterior no tería sentido que un mesmo candidato ocupara dous cargos, **non se repiten os elementos**.

As **variacións sen repetición** (ou simplemente **variacións**) de m elementos tomados de n en n desígnanse como $V_{m,n}$. Son os grupos de n elementos distintos que se poden formar de modo que un grupo se diferencie doutro ben polos **elementos** que o compoñen ben pola **orde** na que aparecen.

O número de variacións é igual ao produto de multiplicar n factores partindo de m e decrecendo dun en un:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \text{ (} n \text{ factores)}$$

Observacións

1) m debe ser sempre maior ou igual que n.
2) As variacións de m elementos tomados de m en m coinciden coas permutacións de m elementos: $V_{m,m} = P_m$.

Actividades resoltas

- *Observa as seguintes variacións e intenta encontrar unha expresión para o último factor que se multiplica no cálculo das variacións:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

No caso a) 2 é igual a $4 - 3 + 1$.

En b) $4 = 6 - 3 + 1$.

En c) $5 = 10 - 6 + 1$.

En d) $6 = 9 - 4 + 1$.

En xeral o último elemento é $(m - n + 1)$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

Escribe a fórmula das variacións utilizando factoriais:

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Para escribilo como cociente de factoriais débese dividir por $(m-n)!$.

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

Para realizar esta operación coa *calculadora* utilízase a tecla etiquetada ***nPr*.**

Actividades propostas

22. Tres persoas van a unha pastelaría na que unicamente quedan catro pasteis, distintos entre si. De cantas formas distintas poden elixir o seu pastel se cada unha compra un?

23. Cos 10 díxitos deséxanse escribir números de catro cifras, todas elas distintas. Cantas posibilidades hai para escribir a primeira cifra? Unha vez elixida a primeira, cantas hai para elixir a segunda? Unha vez elixidas as dúas primeiras, cantas hai para a terceira? Cantas posibilidades hai en total?

24. Se tes 9 elementos diferentes e os tes que ordenar 5 a 5 de todas as formas posibles, cantas hai?

25. Coas letras A, B e C, cantas palabras de 2 letras non repetidas poderías escribir?

26. Cos díxitos 3, 5, 7, 8 e 9, cantos números de 3 cifras distintas podes formar?

27. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

28. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

Outra observación

Dixemos que $V_{m,m} = P_m$ pero se utilizamos a fórmula con factoriais temos que $V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}$.

Para que teña sentido asígnase a 0! o valor de 1.

0! = 1.

3. COMBINACIÓNS

3.1. Combinacións

Actividades resoltas

- *Nunha libraría queren facer paquetes de tres libros usando os seis libros máis lidos. Cantos paquetes diferentes poderán facer?*

Neste caso cada grupo de tres libros diferenciarase dos outros posibles polos libros (**elementos**) que o compoñen, sen que importe a orde na que estes se empaquetan. Esta agrupación é denominada combinación.

Chámase **combinacións** de *m* elementos tomados de *n* en *n* e desígnase $C_{m,n}$ aos grupos de *n* elementos que se poden formar a partir dun conxunto de *m* elementos diferentes entre si, de modo que cada grupo se diferencie dos demais polos **elementos** que o forman (non pola orde na que aparecen).

Designamos os libros coas letras A, B, C, D, E e F.

Paquetes con A				Paquetes sen A pero con B			Paquetes sen A nin B pero con C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Formamos primeiro todos os paquetes que conteñen o libro A, hai 10; logo seguimos formando os que non conteñen o libro A pero si conteñen o B. Logo os que non conteñen nin A nin B pero si C. E por último, o paquete DEF que non contén os libros A, B nin C. Con este reconto identificamos un total de 20 paquetes distintos. $C_{6,3} = 20$.

Esta forma de facelo é pouco práctica. Para atopar unha fórmula xeral que nos permita calcular o número de grupos, imos apoiarnos no que xa sabemos.

Se fose relevante a orde na que aparecen os libros en cada paquete, ademais dos libros que o compoñen, sería un problema de variacións e calculariamos: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferentes:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE, BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE, CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE, DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE, EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD, FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE,FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC, FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

Na lista anterior sinalamos coa mesma cor algúns dos paquetes que conteñen os mesmos tres libros, verás que o paquete cos libros A, B e C se repite seis veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. As mesmas veces repítese o paquete ABD, o ACF, etc. Podes probar a sinalar calquera outra combinación e verás que todas están repetidas exactamente seis veces. Iso é debido a que hai seis variacións posibles coa mesma composición de elementos, que se diferencian pola orde (as permutacións deses tres elementos que son $P_3 = 6$). Así pois, como no reconto de variacións, cada paquete está contado $P_3 = 6$ veces. Para saber o número de paquetes diferentes dividimos o total de variacións entre $P_3 = 6$.

Polo tanto basta con dividir as variacións entre as permutacións:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

E, en xeral, de acordo co mesmo razoamento calcúlanse as combinacións de *m* elementos tomados de *n* en *n*, dividindo as variacións entre as permutacións, coa fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Para realizar esta operación coa calculadora utilízase a tecla etiquetada **nCr .**

Actividades resoltas

- *Un test consta de* 10 *preguntas e para aprobar hai que responder* 6 *correctamente. De cantas formas se poden elixir esas* 6 *preguntas?*

Non importa en que orde se elixan as preguntas senón cales son as preguntas elixidas. Non poden repetirse (non ten sentido que respondas 3 veces a primeira pregunta). Unicamente inflúen as preguntas (os elementos). Trátase dun problema de combinacións, no que temos que formar grupos de 6, dun conxunto formado por 10 preguntas diferentes, logo son combinacións, $C_{10,6}$.

$$C_{10,6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \text{ maneiras.}$$

- *Temos 5 libros sen ler e queremos levar tres para lelos nas vacacións, de cantas maneiras distintas podemos elixilos?*

Son combinacións de 5 elementos tomados de 3 en 3. $C_{5,3} = 10$ formas.

- *Tes* 7 *moedas de euro que colocas en fila. Se* 3 *amosan a cara e 4 a cruz, de cantas formas distintas podes ordenalas?*

Bastará con colocar en primeiro lugar as caras e nos lugares libres poñer as cruces. Temos 7 lugares para colocar 3 caras, serán polo tanto as combinacións de 7 elementos tomados de 3 en 3. $C_{7,3} = 35$. Observa que se obtén o mesmo resultado se colocas as cruces e deixas os lugares libres para as caras xa que $C_{7,4} = 35$.

Actividades propostas

29. Temos 5 bombóns (iguais) que queremos repartir entre 7 amigos, de cantas formas se poden repartir os bombóns se a ningún lle imos dar máis dun bombón?

30. Xoán quere regalar 3 DVDs a Pedro dos 10 que ten, de cantas formas distintas pode facelo?

31. No xogo do póker dáselle a cada xogador unha man formada por cinco cartas, das 52 que ten a baralla francesa, cantas mans diferentes pode recibir un xogador?

3.2. Números combinatorios

As combinacións son moi útiles polo que o seu uso frecuente fai que se teña definido unha expresión matemática denominada número combinatorio.

O **número combinatorio** *m* sobre *n* desígnase $\binom{m}{n}$ e é igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Propiedades dos números combinatorios

Actividades resoltas

- *Calcula* $\binom{7}{0}, \binom{5}{0}, \binom{9}{0}, \binom{4}{0}$.

Terás comprobado que: $\binom{7}{0}$= 1, $\binom{5}{0}$ = 1, $\binom{9}{0}$ = 1 e $\binom{4}{0}$ = 1. Razoa o motivo. Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{0}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{m!\cdot 0!} = 1$. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{7}, \binom{5}{5}, \binom{9}{9}, \binom{4}{4}$.

Terás comprobado que: $\binom{7}{7}$= 1, $\binom{5}{5}$ = 1, $\binom{9}{9}$ = 1 e $\binom{4}{4}$ = 1. Razoa o motivo. Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{m}$ = 1? En efecto: $\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)!\cdot m!} = \frac{m!}{0!\cdot m!} = 1$. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}, \binom{5}{1}, \binom{9}{1}, \binom{4}{1}$.

Terás comprobado que: $\binom{7}{1}$= 7, $\binom{5}{1}$ = 5, $\binom{9}{1}$ = 9 e $\binom{4}{1}$ = 4. Razoa o motivo. Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{1}$ = *m*? En efecto: $\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)!\cdot 1!} = m$.

- *Calcula* $\binom{7}{4}, \binom{7}{3}, \binom{9}{7}, \binom{9}{2}$ *e indica cales son iguais.*

Terás comprobado que: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ e que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$. Razoa o motivo.

Podemos xeneralizar e dicir que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$?

En efecto: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Ata agora todas as propiedades foron moi fáciles. Temos agora unha propiedade máis difícil. Vexamos que: $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Pero antes comprobarémolo cun problema.

- *Luís e Míriam casaron e regaláronlles seis obxectos de adorno. Queren poñer tres nun andel pero Míriam quere que no andel estea, si ou si, o regalo da súa nai. Porén, a Luís no lle gusta ese obxecto e dálle igual calquera combinación na que non estea. Un dos dous sairá coa súa. Calcula cantas son as posibilidades de cada un.*

A Luís e a Míriam regaláronlles 6 obxectos de adorno e queren poñer 3 nun andel. As formas de facelo con $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Pero Míriam quere que no andel estea, si ou si, o regalo da súa nai. De cantas formas o faría Míriam? Son $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

Porén, a Luís ese obxecto non lle gusta e dálle igual calquera combinación na que non estea. De cantas formas o faría Luís? Son $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

As opcións de Míriam máis as de Luís son as totais: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comproba que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *e que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En xeral, $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Atréveste a demostralo?

Para demostralo recorremos á definición e realizamos operacións:

$$\binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot(n-1)!}$$ reducimos a común denominador

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n)!\cdot(n-1)!}$$ Recorda: $m \cdot (m-1)! = m!$

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!} + \frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ Poñemos o denominador común e sumamos os numeradores

$$= \frac{(m-n)\cdot(m-1)! + n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ Sacamos $(m-1)!$ factor común

$$= \frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$$ De novo usamos que $m \cdot (m-1)! = m!$

$$= \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \binom{m}{n}.$$

Triángulo de *Pascal* ou Triángulo de *Tartaglia*

A un matemático italiano do século XVI chamado Tartaglia, pois era tatexo, ocorréuselle dispoñer os números combinatorios así:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

….

Ou ben calculando os seus valores correspondentes:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

A ambos os triángulos chámaselles **Triángulo de *Pascal*** ou **Triángulo de *Tartaglia***.

Os valores que hai que poñer en cada fila do triángulo calcúlanse, sen ter que usar a fórmula dos números combinatorios, dunha forma máis fácil baseada nas propiedades dos números combinatorios que acabamos de probar:

Pola propiedade $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila empeza e termina con 1.

Pola propiedade $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabemos que o *Triángulo de Tartaglia* é simétrico ou sexa que o primeiro elemento de cada fila coincide co último, o segundo co penúltimo e así sucesivamente.

Pola propiedade $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podemos obter as seguintes filas sumando termos da anterior, xa que cada posición nunha fila é a suma das dúas que ten xusto enriba da fila anterior.

Deste modo o triángulo constrúese secuencialmente, engadindo filas por abaixo ata chegar á que nos interesa. Se só necesitamos coñecer un número combinatorio illado tal vez non valla a pena desenvolver todo o triángulo pero, en moitas ocasións, necesitamos coñecer os valores de toda unha fila do triángulo (por exemplo cando desenvolvemos un binomio de Newton ou cando resolvemos problemas de probabilidade).

Actividades propostas

32. Engade tres filas máis ao triángulo de *Tartaglia* da dereita.

33. Suma os números de cada fila e comproba que a suma dos elementos da fila m é sempre igual a 2^m.

34. Sen calculalos, indica canto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ e $C_{5,5}$ buscando o seu valor no triángulo.

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

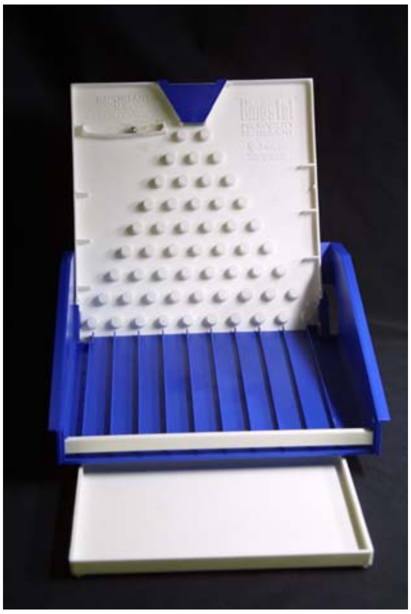
3.3. Distribución binomial

Percorridos aleatorios ou camiñadas ao azar

Os números combinatorios serven como modelo para resolver situacións moi diversas.

Actividades resoltas

O dispositivo que aparece á dereita denomínase *aparello de Galton*. O seu funcionamento é o seguinte: cando se introduce unha bóla polo funil superior, vai caendo polos ocos que existen en cada fila. En cada paso pode caer polo oco que ten á súa dereita ou polo que ten á súa esquerda con igual probabilidade, de forma que é imposible, cando poñemos unha bóla no funil, predicir en cal dos carrís inferiores acabará caendo.



- *Se introducimos moitas bólas polo burato superior, por exemplo* 1 024*, cres que ao chegar abaixo se distribuirán uniformemente entre todos os carrís ou haberá lugares aos que cheguen máis bólas?*

Observa que, para chegar á primeira fila, só hai un camiño posible, que é o que vai sempre cara á esquerda, e para chegar á última, o único camiño posible é o que vai sempre á dereita.

Para chegar aos ocos centrais de cada fila o número de camiños posibles é maior. Por exemplo, para chegar ao segundo oco da segunda fila, hai dous camiños. En xeral, ao primeiro oco de cada fila só chega un camiño, igual que ao último e a cada un dos outros ocos chegan tantos camiños como a suma dos camiños que chegan aos dous ocos que ten xusto enriba. Comproba que para chegar ao oco n da fila m hai $\binom{m}{n}$ camiños.

En resumo, o número de camiños aleatorios que chegan a cada oco calcúlase igual que os números no triángulo de *Tartaglia*. Se o noso *aparello de Galton* ten 9 filas, o número de camiños que chegan a cada un dos compartimentos de saída é o que se obtén coa novena fila do Triángulo de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, dun total de 2^9 = 512 camiños diferentes que pode realizar a bóla. Así que cando botamos no aparello 1024 bólas haberá aproximadamente 2 bolas que fagan cada un dos 512 percorridos posibles xa que todos teñen a mesma probabilidade de ocorrer. Polo tanto, o número de bolas que podemos esperar que caian en cada compartimento é o seguinte:

Compartimento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número aproximado de bólas	$\frac{1\,024}{512} = 2$	$9 \cdot 2 = 18$	$36 \cdot 2 = 72$	$84 \cdot 2 = 168$	$126 \cdot 2 = 252$	$126 \cdot 2 = 252$	$84 \cdot 2 = 168$	$36 \cdot 2 = 72$	$9 \cdot 2 = 18$	2

Vemos que non se deposita o mesmo número de bolas en todos os compartimentos. Mentres que nos extremos haberá aproximadamente 2 bólas, nos centrais haberá unhas 252.

De acordo coa lei dos grandes números, os resultados experimentais serán máis parecidos aos teóricos canto meirande sexa o número de veces que se realiza o experimento (é dicir, canto maior sexa o número de bólas). En *Youtube* buscando a expresión "*máquina de Galton*" podes ver moitos vídeos nos que se realiza o experimento e se verifica este feito.

Número de éxitos

Actividades resoltas

- *Nunha sesión de tiro ao prato realízanse sucesivamente 10 disparos. Cantas posibilidades haberá de acertar no branco exactamente tres veces (ter tres éxitos)?*

$$\text{Son as } C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120.$$

En resumo

$\binom{m}{n}$ = Número de combinacións de m elementos tomados de n en n.

= Número de camiños posibles para chegar ao oco n da fila m do aparello de *Galton.*

= Número de subconxuntos de n elementos tomados nun conxunto de m elementos.

= Número de sucesos nos que obtemos n éxitos en m probas.

= Números de mostras sen ordenar de tamaño n nunha poboación de tamaño m.

3.4. Binomio de *Newton*

Imos calcular as sucesivas potencias dun binomio. Xa sabes que:

$(a + b)^0 = 1$

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Para calcular $(a + b)^4$ multiplicamos $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

Para calcular $(a + b)^4$ multiplicamos $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

$(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a + b)$

$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + \quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Observa que para calcular cada un dos coeficientes de $(a + b)^4$, excepto o primeiro e o último que valen 1, se suman os coeficientes igual que no triángulo de Tartaglia. Obtense cada elemento sumando os dous que ten enriba.

Actividades resoltas

- *Serías capaz de calcular* $(a + b)^5$ *só observando?*

Fíxate que sempre aparecen todos os posibles termos do grao que estamos calculando polo que para calcular a quinta potencia teremos: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 e b^5. Os expoñentes están ordenados de maneira que os de a van descendendo desde 5 ata 0, e os de b van aumentando desde 0 ata 5 (recorda $a^0 = 1$).

O coeficiente do primeiro e último termo é 1.

Os coeficientes obtéñense sumando os dous termos da fila anterior como no Triángulo de *Tartaglia*. Son a quinta fila do Triángulo de *Tartaglia*.

Logo $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podemos escribilo tamén utilizando números combinatorios:

$$(a + b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Actividades propostas

35. Desenvolve $(a + b)^6$

En xeral:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Esta igualdade denomínase ***Binomio de Newton***.

Actividades resoltas

- *Como calcularías* $(a - b)^n$*?*

Basta aplica a fórmula do Binomio de Newton a $(a + (-b))^n$.

Recorda $(-b)$ elevado a un expoñente par ten signo positivo e elevado a un expoñente impar teno negativo. Polo tanto $(a - b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$. Os signos son alternativamente positivos e negativos.

Actividades propostas

36. Desenvolve:

a) $(a - b)^6$;

b) $(x - 3)^4$;

c) $(x + 2)^7$;

d) $(-x + 3)^5$.

37. Calcula o coeficiente de x^7 no polinomio que se obtén ao desenvolver $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

38. Expresa con radicais simplificados o polinomio que se obtén ao desenvolver $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. OUTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

4.1. Resolución de problemas

Recorda: para resolver un problema é conveniente ter en conta as seguintes fases:

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender ben o problema.

Le ata asegurarte de ter comprendido o enunciado, que datos che dan?, que che piden?

Fase 2: Busca unha boa estratexia.

Se o problema é de *Combinatoria* unha posible boa estratexia pode ser analizar se é un problema de permutacións, de variacións ou de combinacións e, nese caso, aplicar a fórmula que xa coñeces. Esta estratexia poderiamos chamala:

Mira se o teu problema se parece a algún que xa coñezas.

Pero outra posible boa estratexia, que non exclúe a anterior, é comezar a facer un diagrama en árbore. A esta estratexia podemos chamala:

Experimenta, xoga co problema.

Ou ben:

Fai un diagrama, un esquema, unha táboa...

A fase seguinte a seguir é:

Fase 3: Leva adiante a túa estratexia.

Seguro que utilizando estas estratexias, resolves o problema. Por último, cando xa o teñas resolto:

Fase 4: Pensa se é razoable o resultado. Comproba a estratexia. Xeneraliza o proceso.

4.2. Permutacións circulares

Imos utilizar estas técnicas, ou outras distintas, para resolver un problema:

Actividades resoltas

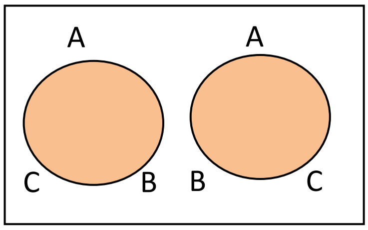
- *Dez amigos e amigas van xantar e no restaurante séntanos nunha mesa redonda. De cantas formas poden sentar?*

Se en lugar dunha mesa fose un banco xa sabemos resolver o problema, é un problema de *Permutacións*. A solución sería 10! formas distintas. Pero é unha mesa redonda, non ten un primeiro asento ni un derradeiro asento. Tampouco é sinxelo, polo mesmo motivo, deseñar o diagrama en árbore. Que facemos? Pensa. Busca unha boa estratexia.

Unha boa estratexia quizais sexa:

Faino máis fácil para empezar.

Dez son moitos. Pensa en tres: A, B e C. Se fose un banco, as posibilidades serían 3! = 6. Séntaos agora nunha mesa redonda. A posibilidade ABC, é agora a mesma que BCA e que CAB. Quédannos só dúas formas distintas de sentalos.



Chamamos PC a esa permutación circular.

Temos pois que $P_2 = 2! = 2$ e $PC_2 = 1$; $P_3 = 3! = 6$ e $PC_3 = 2$. Como podemos sentar a 4 persoas nunha mesa circular? A permutación ABCD agora é a mesma que BCDA, e que CDAB e que DABC, logo se $P_4 = 4! = 24$, entón $PC_4 = P_4/4 = 6$.

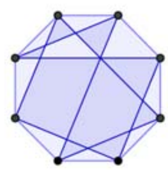
Sabemos xa resolver o noso problema inicial?

É $PC_{10} = P_{10}/10 = P_9 = 9!$ Razoa esta resposta.

Actividades propostas

39. Tres amigos "A", "B" e "C" están xogando ás cartas. Cada un pasa unha carta ao que está á súa dereita. Un é español, outro italiano e o outro portugués. "A" pásalle unha carta ao italiano. "B" pasoulla ao amigo que lla pasou ao español. Cal dos amigos é español, cal italiano e cal portugués? *Axuda*: Fai un diagrama circular como o anterior.

40. Ana e Alexandre convidan a cear a 3 amigos e 3 amigas, cantas formas teñen de colocarse nunha mesa redonda? En cantas están xuntos Ana e Alexandre? En cantas non hai dous mozos nin dúas mozas xuntos?



41. Cantas poligonais pechadas se poden debuxar cos 8 vértices dun octógono?

4.3. Permutacións con repetición

Actividades resoltas

- *Cantas palabras de 8 letras, con sentido ou sen el, se poden formar coas letras da palabra RASTREAR?*

Observamos que a letra "R" se repite tres veces e a letra "A", dúas veces. Se as 8 letras fosen distintas o número de palabras que se poderían formar sería 8!, pero entre estas 40 320 palabras observamos que todas aquelas nas que están permutadas as dúas letras "A" son iguais, polo tanto temos a metade das palabras 20 160. Ademais ao considerar as tres letras "R" que consideramos distintas e que son iguais temos que por cada palabra diferente hai 6, é dicir 3!, que son iguais, polo tanto o número de palabras diferentes é 3 360.

Polo tanto, as permutacións de 8 elementos dos que un se repite 3 veces e o outro 2 será:

$$PR_{8,3,2} = \frac{8!}{2!\ 3!} = 3\ 360.$$

Observa que o número das permutacións de dous elementos dos que un se repite k veces e o outro n – k veces coincide co número combinatorio $\binom{n}{k}$.

Actividades propostas

42. Cos díxitos 1, 2, e 3 cantos números distintos de 7 cifras podes formar con tres veces a cifra 1, dúas veces a cifra 2 e dúas veces a cifra 3.

43. Coas letras da palabra APARTARAS, cantas palabras con estas 9 letras, con sentido ou sen el, se poden formar?

44. Temos dúas fichas brancas, tres negras e catro vermellas, de cantas formas distintas podemos amontoalas? En cantas non quedan as dúas fichas brancas xuntas?

45. O cadeado da miña maleta ten 7 posicións nas que se pode poñer calquera dos 10 díxitos do 0 ao 9. Cantos contrasinais diferentes podería poñer? Cantos teñen todos os seus números distintos? Cantos teñen algún número repetido? Cantos teñen un número repetido dúas veces? *Axuda:* Observa que para calcular os que teñen algún número repetido o máis fácil é restar do total os que teñen todos os seus números distintos.

4.4. Combinacións con repetición

Actividades resoltas

- *Un grupo de 10 amigos van de excursión e un deles encárgase de comprar unha bebida para cada un, podendo elixir entre auga, batido ou refresco. De cantas maneiras diferentes pode realizarse o encargo?*

Para resolver este problema temos que formar unha secuencia de 10 elementos dun conxunto formado polos tres elementos A, B, R. Está claro que non importa a orde na que se compren as bebidas, polo que se trata de combinacións. Pero cada elemento pode aparecer na combinación máis dunha vez. Por exemplo unha solución formada por dúas de auga, tres de batido e cinco de refresco, representaríase AABBBRRRRR. Calquera outra combinación terá que diferenciarse desta polo menos un elemento da súa composición. Así que vendo que cada secuencia empeza cunha repetición do elemento A, segue con outra do elemento B e termina con repeticións do elemento R, sendo en total 10 os elementos que se toman, podemos representalas por unha serie de 10 ocos con dous guións de separación entre eles.

AA – BBB – RRRRR (Combinación que representa dous de auga, tres de batido e cinco de refresco).

– – RRRRRRRRRR (Combinación que representa só dez de refresco).

– BBBB – RRRRRR (Combinación que representa catro de batido e seis de refresco).

Así que cada unha das combinacións se corresponde cunha **forma de elixir onde colocar os guións**, é dicir, de 12 posibles posicións elixir dúas. Como non importa en que orde se coloquen os guións e non poden estar os dous na mesma posición, ese número será igual ás combinacións de 12 elementos tomados de 2 en 2, polo tanto será:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

En xeral,

Chámanse **combinacións con repetición** de *m* elementos tomados de *n* en *n* e desígnanse $CR_{m,n}$ os grupos de *n* elementos que se poden formar a partir dun conxunto de *m* elementos diferentes entre si, de modo que cada grupo se diferencie dos demais polos **elementos** que o forman e coa posibilidade de que cada elemento apareza máis dunha vez.

Coinciden co número de secuencias que se poden formar de *n* ocos e *m –1* guións, polo tanto:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{m-1} = \binom{m+n-1}{n}$$

Observa que por propiedades dos números combinatorios se pode escribir a segunda expresión.

Actividades propostas

46. Nunha caixa hai bólas vermellas, negras e azuis. Se metemos a man na caixa e sacamos 8 bólas, de cantas formas posibles pode realizarse a extracción?

47. De cantas maneiras posibles poden comer catro amigos 10 caramelos iguais?

Problemas de ampliación

Actividade resolta

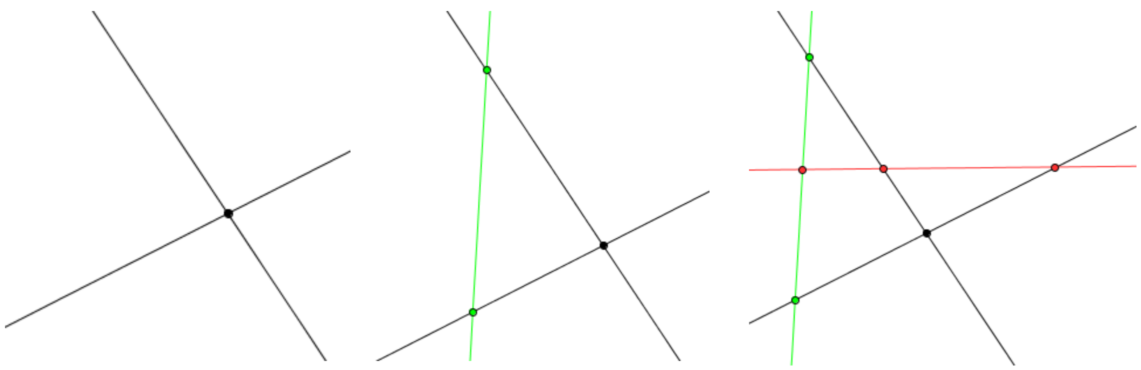
- *Se n rectas dun mesmo plano se cortan dúas a dúas en puntos que son todos distintos, pártese así o plano en rexións distintas. Cal é o número desas rexións? Cantos segmentos hai? Cantos puntos aparecen?*

Fase 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender ben o problema.

Para entender ben o problema debuxa rectas no plano para ir contando puntos, rexións e segmentos.

Fase 2: Busca unha boa estratexia.

Unha boa estratexia consiste en experimentar con casos particulares:



Obsérvase que:

Con 2 rectas hai 4 rexións, 1 punto e 4 segmentos infinitos (semirrectas).

Con 3 rectas: ao engadir a terceira recta

- Tres das rexións se dividiron en dous: 4 + 3 = 7 rexións.
- Engádense 2 puntos nos que esa recta corta ás anteriores 1 + 2 = 3.
- Téñense 5 segmentos máis: 3 finitos +2 semirrectas: 4 + 5 = 9.

  - En particular as semirrectas aumentaron en dúas: 4 + 2 = 6.

Con 4 rectas: ao engadir a cuarta recta:

- Catro das rexións divídironse en dúas: 7 + 4 = 11 rexións.
- Engádense 3 puntos nos que esa recta corta ás anteriores 3 + 3 = 6.
- Téñense 7 segmentos máis: 5 finitos + 2 semirrectas: 9 + 7 = 16.
  - En particular as semirrectas aumentaron en dúas: 6 + 2 = 8.

Outra boa estratexia é elaborar unha táboa cos resultados obtidos:

Rectas	Puntos	Rexións	Segmentos	Semirrectas
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

Fase 3: Leva adiante a túa estratexia.

Nesta fase buscamos expresións en función do número de rectas, *n*, para poder calcular o número de puntos, segmentos e rexións segundo os valores de *n*.

A fórmula para as **semirrectas** parece a máis fácil de obter porque aparentemente é o dobre que o número de rectas e ademais cada vez que engadimos unha recta temos 2 semirrectas máis. Se chamamos SS_n ao número de semirrectas que aparecen con *n* rectas temos que $\mathbf{SS_n = 2n}$.

Para calcular o número de **segmentos** (incluídas as semirrectas) que se obteñen con *n* rectas, a partir dos datos da táboa, parece plausible suxerir que é o cadrado do número de rectas, é dicir, se S_n designa ao número de segmentos (os finitos e as semirrectas) entón: $\mathbf{S_n = n^2}$.

Para determinar o número de **puntos**, na táboa obsérvase unha lei de recorrencia. O número de puntos, para calquera número de rectas, é igual ao número de puntos anterior máis o número de rectas tamén da fila anterior. Se denominamos P_n ao número de puntos que se teñen ao cortárense *n* rectas entón: $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$

Por outra parte observamos que se numeramos as rectas con 1, 2, 3, …, *n* e nomeando os puntos polo par de rectas que determina cada un temos que son: (1, 2), (1, 3), (1, 4) , … (1, *n*), (2, 3), (2, 4), … (2, *n*), (3, 4) …

O número destes pares de elementos coincide coas combinacións de *n* elementos tomados 2 a 2, é dicir, $\mathbf{P_n} = C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

A lei de recorrencia que nos suxire a táboa, para obter o número de **rexións** que se obteñen cando se cortan *n* rectas, é que o número de rexións de calquera fila da táboa é igual ao número rexións da fila anterior máis o número de rectas da súa fila, polo tanto, se R_n o número de rexións que se obteñen ao cortárense *n* rectas entón: $\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}$.

Para obter unha fórmula observamos que:

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1 + (1 + 2) + (3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Sumando 1 + 2 + 3 + … + *n*, obtemos que: $R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$

e polo tanto $$R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$$

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisores: Andrés Hierro, Sergio Hernández e Fernanda Ramos

Ilustracións: Banco de Imaxes de INTEF e María Molero

ou ben $$R_n = 1 + \frac{(n-1+2)n}{2} = 1 + n + \frac{(n-1)n}{2}$$

e por conseguinte

$$R_n = 1 + n + \binom{n}{2}$$

Fase 4: Pensa se é razoable o resultado. Comproba a estratexia. Xeneraliza o proceso.

Nesta fase trátase de xustificar ou demostrar que todas as conxecturas que realizamos son certas:

Con respecto ao número de **semirrectas** é sinxelo comprobar que é o dobre do número de rectas xa que por cada recta temos dúas semirrectas, é dicir: $\mathbf{SS_n := 2n}$

O número de **segmentos** é o cadrado do número de rectas xa que como en cada unha das rectas hai $n-1$ puntos temos n segmentos (finitos e semirrectas) e como hai n rectas tense que $\mathbf{S_n = n^2}$.

Como cada **punto** é a intersección de dúas rectas tense que $\mathbf{P_n} = \binom{n}{2}$, esta fórmula cumpre a lei de recorrencia $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$. Aplicando as propiedades dos números combinatorios:

$$P_{n-1} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2} = P_n$$

Respecto ás **rexións** vexamos que a hipótese $\mathbf{R_n} = 1 + \binom{n+1}{2}$, cumpre a lei de recorrencia:

$$\mathbf{R_n = R_{n-1} + n.}$$

Se $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$, entón $R_{n-1} = 1 + \binom{n}{2}$, e polas propiedades dos números combinatorios:

$$R_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 1 + \binom{n+1}{2} = R_n$$

Nesta fase tamén se pode xeneralizar o problema: Que ocorrería se p das n rectas fosen paralelas? E se q rectas das n rectas converxen nun mesmo punto?

Actividades propostas

48. De cantas maneiras se poden introducir 7 bólas idénticas en 5 caixas diferentes colocándoas todas se ningunha caixa pode quedar baleira? E se podemos deixar algunha caixa baleira? *Axuda:* Ordena as bólas nunha fila separadas por 4 puntos, así quedan divididas en 5 partes, que indican as que se colocan en cada caixa.

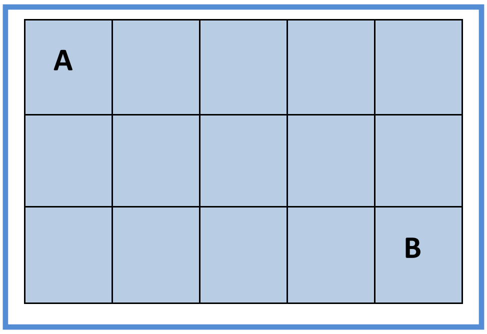
49. Cantas pulseiras diferentes podemos formar con 4 doas brancas e 6 vermellas? *Axuda:* Este problema é equivalente a introducir 6 bólas iguais en 4 caixas idénticas podendo deixar caixas baleiras.

50. Cantas formas hai de colocar o rei branco e o rei negro nun taboleiro de xadrez de forma que non se ataquen mutuamente. E dous alfís? E dúas raíñas?

CURIOSIDADES. REVISTA

No ano 1494 aparece a primeira obra impresa que ten cuestións sobre Combinatoria. É *Summa* escrita por Luca Pacioli. Lémbraste do Número de ouro? Un dos problemas que formula é o de calcular o número de formas distintas en que *n* persoas poden sentar nunha mesa redonda. Problema que xa resolvemos no apartado 4.2.

No ano 1559 escribiu Buteo en Francia o libro *Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur*, un dos primeiros libros que tratan sobre Combinatoria. Neste libro aparece o seguinte problema: Un cerralleiro fabrica cadeados formados por 7 discos e en cada disco hai 6 letras. Cantos candeados é posible fabricar de forma que cada un teña unha combinación diferente para abrir?



Un gato encóntrase en A e un rato en B. O gato avanza de centro de casa en centro de casa movéndose cara á dereita ou cara abaixo, nunca retrocede. Cantos camiños distintos pode percorrer o gato para cazar ao rato?

"Por esta razón de independencia, o amor ao estudo é, de todas as paixóns, a que máis contribúe á nosa felicidade".

Mme. de Châtelet

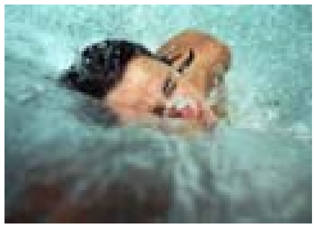
RESUMO

Noción	***Definición***	***Exemplos***
Permutacións	Considérase só a **orde**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacións con repetición	Considéranse a **orde** e os **elementos**. Os elementos poden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacións sen repetición	Inflúen a **orde** e os **elementos**. Os elementos **NON** poden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacións	Inflúen só os **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades dos números combinatorios	$\binom{m}{0} = 1$; $\binom{m}{m} = 1$; $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$; $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$; $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 ...
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Os PowerPoint seguintes son un bo resumo: Variacións e permutacións; Combinacións.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Permutacións



1. Tres nadadores botan unha carreira. De cantas formas poden chegar á meta se non hai empates? E se son 8 nadadores?

2. Loli, Paco, Ana e Xurxo queren fotografarse xuntos, de cantas maneiras poden facer a fotografía? Queren situarse de maneira que alternen mozos con mozas, de cantas maneiras poden agora facer a fotografía?

3. De cantas maneiras se poden introducir 6 obxectos distintos en 6 caixas diferentes se só se pode poñer un obxecto en cada caixa?

4. Nunha parada de autobús hai 5 persoas, en cantas ordes distintas poden ter chegado á parada? Ao chegar unha nova persoa aposta con outra a que adiviña a orde de chegada, que probabilidade ten de gañar?

5. Sete mozas participan nunha carreira, de cantas formas poden chegar á meta? Non hai empates. Cal é a probabilidade de acertar a orde de chegada á meta?

6. Cantos números distintos e de cinco cifras distintas poden formarse cos díxitos 3, 4, 5, 6, e 7? Cantos poden formarse se todos empezan por 5? E se deben empezar por 5 e terminar en 7?

Variacións

7. Cantas bandeiras de 3 franxas horizontais de cores distintas se poden formar coas cores vermello, amarelo e morado? E se se dispón de 5 cores? E se se dispón de 5 cores e non é preciso que as tres franxas teñan cores distintas?

8. Cantos números de 4 cifras distintas se poden escribir cos díxitos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Cantos deles son impares? Cantos son múltiplos de 4? *Recorda*: Un número é múltiplo de 4 se o número formado polas súas dúas últimas cifras é múltiplo de 4.

9. Cantos números de 4 cifras, distintas ou non, se poden escribir cos díxitos: 1, 2, 3, 4, 5 e 6? Calcula a suma de todos eles. *Suxestión*: Ordénaos de menor a maior e suma o primeiro co último, o segundo co penúltimo, o terceiro co antepenúltimo e así sucesivamente

10. A Mario encántalle o cine e vai a todas as estreas. Esta semana hai seis e decide ir cada día a unha. De cantas formas distintas pode ordenar as películas? Mala sorte. Anúncianlle un exame e decide ir ao cine soamente o martes, o xoves e o sábado. Entre cantas películas pode elixir o primeiro día? E o segundo? E o terceiro?

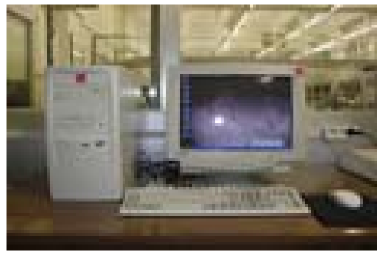
11. Cos díxitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, cantos números de catro cifras diferentes se poden formar? (*Observa: se* comeza por 0 non é un número de catro cifras). Cantos son menores de 3000?

Autoras: Adela Salvador e María Molero
Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez
Revisores: Andrés Hierro, Sergio Hernández e Fernanda Ramos

12. Coas letras da palabra “ARQUETIPO” cantas palabras de 6 letras se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas? a) Se todas as letras son distintas. b) Se se poden repetir letras.

13. Cantos números de tres cifras, diferentes ou non, se poden formar? Destes, cantos son maiores que 123?

14. A linguaxe do ordenador está escrita en secuencias de ceros e uns (díxitos binarios ou bits) de tamaño fixo. No contexto da informática estas cadeas de bits denomínanse palabras. Os ordenadores normalmente teñen un tamaño de palabra de 8, 16, 32 ou 64 bits. O código ASCII, co que se representaban inicialmente os caracteres para transmisión telegráfica, tiña 7 bits. Despois aplicouse aos ordenadores persoais, ampliándoo a 8 bits que é o que se denomina un byte ou ASCII estendido. Máis tarde substituíuse por Unicode, cunha lonxitude variable de máis de 16 bits. Cantos bytes diferentes (8 díxitos) se poden formar? Nun ordenador cuxa lonxitude de palabra tivera 16 díxitos, cantas se poderían formar que fosen diferentes? Se existira un ordenador cuxa lonxitude de palabra tivera 4 díxitos, poderíase escribir con eles as letras do alfabeto?



Combinacións

15. Escribe dous números combinatorios con elementos diferentes que sexan iguais e outros dous que sexan distintos.

16. Tes sete bólas de igual tamaño, catro brancas e tres negras, se as colocas en fila. De cantas formas podes ordenalas?

17. Con 5 latas de pintura de distintas cores, cantas mesturas de 3 cores poderás facer?

18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

20. De cantas maneiras se pode elixir unha delegación de 4 estudantes dun grupo de 30? E no teu propio grupo?

21. Cantos produtos diferentes se poden formar cos números: 2, 1/3, 7, 5 e π tomándoos de 3 en 3? Cantos deses produtos darán como resultado un número enteiro? Cantos un número racional non enteiro? Cantos un número irracional?

22. Cantas aliaxes de 3 metais poden facerse con 7 tipos distintos de metal?

23. Calcula:

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

24. Cal é a forma máis fácil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$ sen calcular cada un dos números combinatorios?

25. De cantas formas podes separar un grupo de 10 estudantes en dous grupos de 3 e 7 estudantes respectivamente?

26. Unha materia componse de 20 temas e vaise realizar un exame no que caen preguntas de dous temas. Cantas posibilidades hai para elixir os temas que caen? Se só estudaches 16 temas, cantas posibilidades hai de que che toquen dous temas que non saibas? Cal é a probabilidade de que che toquen dous temas que non saibas? E a de que che toque só un tema que non saibas?

27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO vai visitar un museo no que poden elixir entre dúas actividades diferentes. Cantas formas distintas pode haber de formar os grupos de alumnos?

28. Desenvolve o binomio a) $(4-x)^5$; b) $(3-2x)^4$; c) $(2ab-3c)^6$; d) $(\frac{x}{2}-\sqrt{2x})^3$.

29. Calcula *x* nas seguintes expresións:

a) $\binom{6}{4}+\binom{6}{x}=\binom{x+2}{x}$ b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$

c) $\binom{7}{4}+\binom{7}{x}=\binom{x+3}{x}$ d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$

30. Escribe o valor de *x* nas igualdades seguintes:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x\neq 3$; b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x\neq 3$; c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+1}$

31. Calcula en función de *n* a suma dos seguintes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2}+n$ c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$

32. Calcula o sexto termo no desenvolvemento de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

33. Calcula o coeficiente de x^2 no desenvolvemento de: $(-1-5x)^9$.

34. Cantas opcións hai para elixir catro materias entre sete optativas?

35. Xógase unha partida de tiro ao prato na que se lanzan sucesivamente doce pratos. Cal é o número de sucesos nos que se obteñen catro éxitos, é dicir, acértase catro veces no branco? No mesmo caso anterior, cal é a probabilidade de ter éxito no derradeiro tiro?

Problemas

36. En "*Curiosidades e Revista*" tes o problema de *Buteo*. Con 7 discos e 6 letras en cada disco, cantas combinacións distintas se poden facer? *Axuda:* No primeiro disco podemos poñer calquera das 6 letras. O mesmo no segundo. E no terceiro? Pero se é facilísimo! Se xa sabemos resolvelo.

37. Nun restaurante hai 5 primeiros pratos, 4 segundos e 6 sobremesas, de cantas formas diferentes se pode combinar o menú?

38. Lanzamos unha moeda e logo un dado, cantos resultados distintos podemos obter? E se lanzamos dúas moedas e un dado? E se fosen 3 moedas e 2 dados?

39. Estanse elixindo os actores e actrices para facer de protagonistas nunha teleserie. Presentáronse 6 mozos e 8 mozas. Cantas parellas distintas poderían formarse?

40. Unha caixa dun coñecido xogo educativo ten figuras vermellas, amarelas e azuis que poden ser triángulos, círculos ou cadrados, e de dous tamaños, grandes e pequenas. De cantas pezas consta a caixa?

41. Nun restaurante hai 8 primeiros pratos e 5 segundos, cantos tipos de sobremesas debe elaborar o restaurante para poder asegurar un menú diferente os 365 días do ano?

42. Nunha reunión todas as persoas se saúdan estreitando a man. Sabendo que houbo 91 saúdos. Cantas persoas había? E se houbo 45 saúdos, cantas persoas había?

43. De cantas maneiras se poden introducir 5 obxectos distintos en 5 caixas diferentes se só se pode poñer un obxecto en cada caixa? E se se poden poñer varios obxectos en cada caixa colocando todos? Cal é a probabilidade de que na primeira caixa non haxa ningún obxecto?

44. A meirande parte dos contrasinais das tarxetas de crédito son números de 4 cifras. Cantos posibles contrasinais podemos formar? Cantos teñen algún número repetido? Cantos teñen un número repetido dúas veces?

45. Temos 10 rectas no plano que se cortan 2 a 2, é dicir, non hai rectas paralelas. Cantos son os puntos de intersección?, e se tes 15 rectas?, e se tes *n* rectas?

46. Cantas diagonais ten un octógono regular?, e un polígono regular de 20 lados?

47. Cantas diagonais ten un icosaedro regular?, e un dodecaedro regular? *Axuda*: Recorda que o icosaedro e o dodecaedro son poliedros duais, é dicir, o número de caras dun coincide co número de vértices doutro. Para saber o número de arestas podes utilizar a *Relación de Euler*: C + V = A + 2

48. Cantos números diferentes de 5 cifras distintas podes formar cos díxitos 1, 2, 3, 5 e 7? Cantos que sexan múltiplos de 5? Cantos que empecen por 2? Cantos que ademais de empezar por 2 terminen en 7?

49. Con 5 bólas de 3 cores distintas, a) cantas filas diferentes podes formar? b) Cantas pulseiras distintas podes formar?

50. Hai moitos anos as placas de matrícula eran como esta: M 677573; logo foron como esta: M 1234 AB; e actualmente como esta: 6068 BPD. Investiga que vantaxes ten cada un destes cambios respecto ao anterior.

51. Cos díxitos 1, 2, 3, 4, 5, cantos números de cinco cifras distintas se poden formar? Calcula a suma de todos estes números.

52. Calcula *x* nos seguintes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\dfrac{C_{x+1,4}}{C_{x,2}} = \dfrac{7}{3}$

53. Iker e María xogan ao tenis e deciden que gaña aquel que primeiro gañe 3 sets. Cal é o número máximo de sets que terán que disputar? Cantos desenvolvementos posibles pode ter o encontro?

54. Pedro coñeceu onte a unha moza. Pasárono moi ben e ela deulle o seu número de móbil pero el non levaba nin o seu móbil nin bolígrafo. Pensou que se acordaría pero… só recorda que empezaba por 656, que había outras catro cifras que eran todas distintas entre si e menores que 5. Calcula cantas posibilidades ten de acertar se marca un número. Moi poucas. Fai memoria e recorda que as dúas últimas son 77. Cantas posibilidades hai agora de acertar facendo unha chamada?

55. Un club de alpinistas organizou unha expedición ao Kilimanjaro formada por 11 persoas, 7 expertos e 4 que están en formación. Nun determinado tramo só poden ir 3 expertos e 2 que non o sexan, de cantas formas pode estar composto ese equipo de 5 persoas? Ti es un experto e vas ir nese tramo, cantas formas hai agora de compoñelo?

56. Nun festival de curtametraxes con 15 participantes repártense 3 000 euros en premios. Indica o número de formas diferentes de realizar o reparto segundo cada unha das tres modalidades propostas.

a. *Modalidade A:* Repártense tres premios de 1 000 euros a tres curtametraxes elixidas por un xurado.

b. Modalidade B: Realízase unha votación e entréganse 1 500 euros ao máis votado, 1 000 ao segundo e 500 ao terceiro.

c. *Modalidade C*: Entréganse tres premios de 1 000 euros cada un en tres categorías: mellor guión, mellor realización e mellor interpretación. Nota: Podería ocorrer que unha curtametraxe fose a mellor en varias categorías.

57. Nos billetes dunha liña de autobuses van impresos os nomes da estación de partida e da de chegada. Hai en total 8 posibles estacións. Cantos billetes diferentes tería que imprimir a empresa de autobuses? Agora queren cambiar o formato e só imprimir o prezo, que é proporcional á distancia. As distancias entre as estacións son todas distintas. Cantos billetes diferentes tería que imprimir neste caso?

58. Unha parella ten un fillo de 3 anos que entra na gardería ás 9 da mañá. O pai traballa nunha fábrica que ten 3 quendas mensuais rotativas: de 0 a 8, de 8 a 16 e de 16 a 24 horas. A nai traballa nun supermercado que ten dúas quendas rotativas mensuais, de 8 a 14 e de 14 a 20 horas. Cantos días ao ano, por termo medio, non poderá ningún dos dous levar o seu fillo á gardería?

59. Un tiro ao branco ten 10 cabaliños numerados que xiran. Se se acerta a un deles acéndese unha luz co número do cabaliño. Tiras 3 veces, de cantas maneiras se poden acender as luces? E se o primeiro tiro non lle dá a ningún cabaliño?

60. Nunha festa hai 7 mozas e 7 mozos. Xoán baila sempre con Ana. Antón é o máis decidido e sempre sae bailar o primeiro, de cantas formas pode elixir parella nos próximos 4 bailes?

61. Cos díxitos 0, 1, 2, 3, 4, 5:

a) Cantos números de cinco cifras se poden formar?

b) Cantos hai con dúas veces a cifra 1 e tres a cifra 2?

c) Calcula a suma de todos estes últimos números.

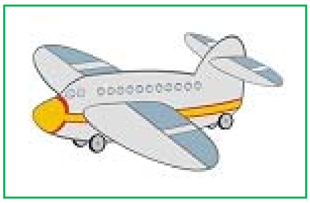
62. Cantas palabras, con ou sen sentido, se poden formar coas letras da palabra PORTA que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas?

63. Cantos números capicúa de dúas cifras existen? E de tres cifras? E de catro cifras?

64. Coas letras da palabra ARGUMENTO, cantas palabras de 5 letras se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas? a) Se todas as letras son distintas. b) Se se poden repetir letras.

65. Cantos números hai entre o 6 000 e o 9 000 que teñan todas as súas cifras distintas?

66. Unha fábrica de xoguetes ten á venda 8 modelos distintos. Cantos mostrarios distintos pode facer de 4 xoguetes cada un? Cal é a probabilidade de que o último modelo de avión fabricado chegue a un determinado cliente? Se se quere que neses mostrarios sempre estea o último modelo de xoguete fabricado, cantos mostrarios distintos pode facer agora?



67. A primeira obra impresa con resultados de Combinatoria é *Summa* de *Luca Pacioli*, de 1494. Nesta obra proponse o seguinte problema: de cantas formas distintas poden sentar catro persoas nunha mesa circular?

68. Cantos números de catro cifras teñen polo menos un 5?

69. Nunha compañía militar hai 10 soldados, cantas gardas de 3 soldados poden facerse? Un dos soldados é Alexandre, en cantas destas gardas estará? E en cantas non estará?

70. A encargada dun gardarroupa distraeuse e sabe que dos cinco últimos bolsos que recolleu a tres bolsos lles puxo o resgardo equivocado e a dous non. De cantas formas se pode ter producido o erro? E se fosen dous os equivocados?

71. Coas letras da palabra SABER, cantas palabras, con ou sen sentido, de letras diferentes, se poden formar que non teñan dúas vogais nin dúas consoantes xuntas. O mesmo para as palabras CORTE, PORTA e ALBERTE.

72. Coas letras da palabra GRUPO, cantas palabras de 5 letras con ou sen sentido se poden formar que teñan algunha letra repetida?

73. Un mozo ten no seu armario 10 camisolas, 5 pantalóns e tres pares de zapatillas. Sabendo que ten que facer a equipaxe para un campamento e só pode meter na mochila catro camisolas, tres pantalóns e dous pares de zapatillas, de cantas maneiras diferentes poderá encher a mochila?

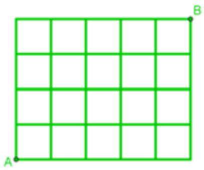
74. Cos díxitos 1, 3 e 5, cantos números menores de 6 000 se poden formar? Cantos hai con 4 cifras que teñan dúas veces a cifra 5?

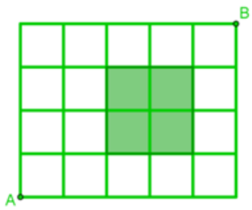
75. Camiños nunha cuadrícula

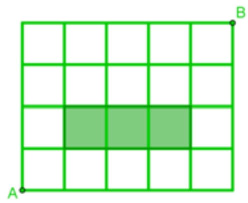
a) Cantos camiños hai para ir de A ata B se só podemos ir cara á dereita e cara arriba?

b) Se non podemos atravesar o cadrado verde, nin camiñar polos seus lados, cantas formas temos agora para ir desde A cara a B?

c) Se non podemos atravesar o rectángulo verde, nin camiñar polos seus lados, cantas formas temos agora para ir desde A cara a B?







Xeneralización

d) Cantos camiños hai nunha cuadrícula cadrada con *n* cadrados en cada lado?

e) Cantos camiños hai nunha cuadrícula rectangular con *m* cadrados verticais e *n* horizontais?

AUTOAVALIACIÓN

1. Tes nove moedas iguais que colocas en fila. Se catro amosan a cara e cinco a cruz, de cantas formas distintas podes ordenalas?

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. Nunha compañía aérea hai dez auxiliares de voo e un avión necesita levar catro na súa tripulación, de cantas formas se poden elixir?

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. Cantos produtos distintos poden obterse con tres factores diferentes elixidos entre os díxitos: 2, 3, 5 e 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Temos cinco obxectos distintos e queremos gardalos en cinco caixas diferentes poñendo un obxecto en cada caixa, de cantas formas podemos facelo?

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutacións de *n*+4 elementos dividido entre permutacións de *n*+1 elementos é igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/C_{n+4,n+1}$

6. As variacións de 10 elementos tomados de 6 en 6 é igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6\cdot 5\cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

7. Indica que afirmación é falsa:

a) $0! = 1$ b) $V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)$ c) $VR_{m,n} = m^n$ d) $P_n = n!$

8. O valor dos seguintes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ é:

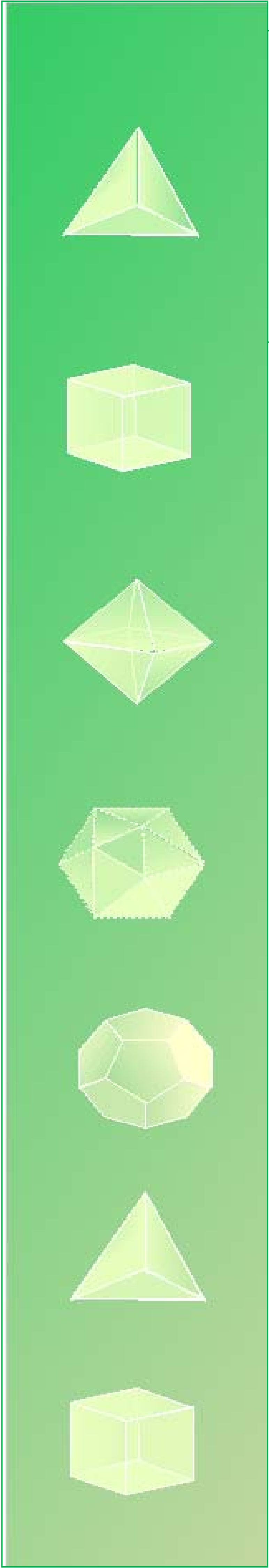
a) 0, 1, e 1 b) 0, 9 e 4 c) 1, 1 e 4 d) 5, 9 e 4

9. O valor de *x*, distinto de 4, na igualdade $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ é:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. O coeficiente do termo cuarto do desenvolvemento do Binomio de Newton de $(a + b)^7$ é:

a) $\binom{7}{3}$ b) 1 c) $\binom{7}{4}$ d) $V_{7,4}$



Matemáticas orientadas ás ensinanzas académicas

4ºB ESO

Capítulo 15:

Azar e Probabilidade

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Tradutora: Mª Teresa Seara Domínguez

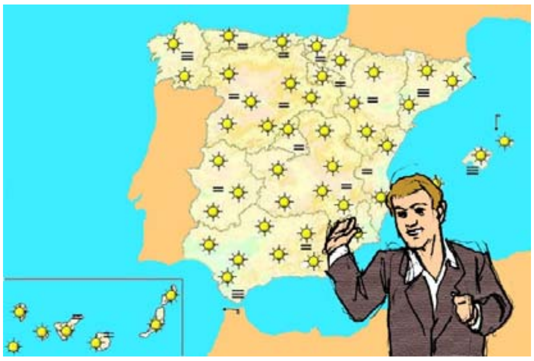
Revisora da tradución ao galego: Fernanda Ramos Rodríguez

Ilustracións: Fernando Blasco, Banco de Imaxes de INTEF e Wikipedia

Índice

Resumo

Todos os días utilizamos conceptos probabilísticos informalmente: decidimos se levar abrigo ou non cando saímos pola mañá da casa, xogamos a xogos de azar ou de estratexia, lemos estatísticas e sondaxes ou nos preguntamos se hoxe choverá. Porén, a nosa intuición probabilística non está moi desenvolvida. Neste capítulo introducimos algunhas regras probabilísticas formais e amosamos como se pode utilizar a combinatoria ou os diagramas de árbore para calcular probabilidades. En realidade, o único segredo consiste en sermos capaces de contar ben. Con estes coñecementos non deixaremos que outros manipulen estatísticas. O coñecemento daranos a clave para tomar decisións propias.

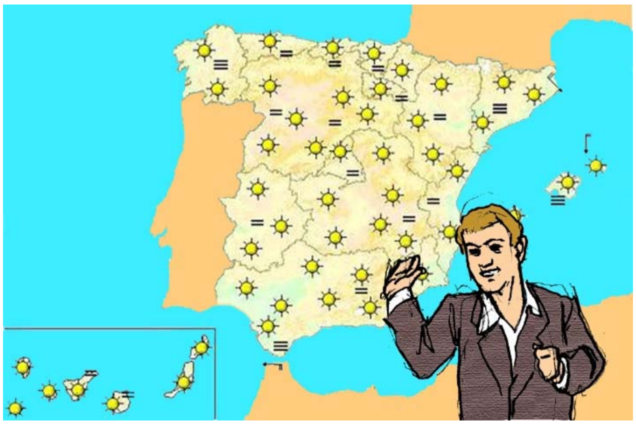


Tamén amosaremos algúns exemplos que poden parecer contrarios á nosa intuición. Hai feitos que, facendo as contas, resultan moito máis probables do que nos parece a simple vista. Coñecelos axudaranos a distinguir outros casos similares.

1. EXPERIENCIA E PROBABILIDADE

1.1. A lei de *Laplace*

Todos os días estamos obrigados a calcular probabilidades, aínda que sexa dun modo intuitivo: gañará a Liga o meu equipo favorito?, choverá mañá?, gustareille a esa persoa "especial" que hai na clase?, daranme unha beca?



A cada suceso pódeselle asignar unha **probabilidade** que é un número comprendido entre 0 e 1. Canto maior sexa a posibilidade de que ese suceso ocorra, o número que indica a probabilidade será máis próximo a 1 e se temos poucas opcións de que ocorra ese feito, a súa probabilidade estará próxima a 0.

A nosa experiencia (e tamén a teoría que podes consultar nos Apuntamentos Marea Verde de 3º ESO) axúdanos a calcular probabilidades mediante a **Lei de *Laplace*** cando todos os casos sexan equiprobables (isto é, non haxa sucesos simples que teñan máis probabilidade de saír que outros).

A regra de *Laplace* está baseada no *principio de razón insuficiente*: se a priori non existe ningunha razón para supoñer que un resultado se pode presentar con máis probabilidade que os demais, podemos considerar que todos os resultados teñen a mesma probabilidade de ocorrencia.

$$P(S) = \frac{\textit{número de casos favorables ao suceso } S}{\textit{número de casos posibles}}$$

Un pouco máis adiante neste capítulo imos volver formalizar (e ampliar) a matemática que hai debaixo do cálculo de probabilidades pero preferimos agora amosar uns cantos exemplos que nos sirvan para adestrar a nosa intuición.

Exemplos:

- Nunha clase hai 16 mozos e 17 mozas. Como non se presenta ninguén para ser delegado faise un sorteo. Cal é a probabilidade de que na clase haxa delegada?

Como hai 17 mozas (os casos favorables) sobre unha poboación de 33 individuos, de acordo coa Lei de *Laplace*, a probabilidade pedida é

$$P(S) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ ao\ suceso\ S}{número\ de\ casos\ posibles} = \frac{17}{33}$$

- No moedeiro temos 7 moedas de 1 céntimo, 5 moedas de 5 céntimos, 6 moedas de 10 céntimos e 3 moedas de 50 céntimos. Sacamos unha moeda ao chou, cal é a probabilidade de que a cantidade obtida sexa un número par de céntimos?

Ao sacar unha moeda, para ter un número par de céntimos ten que ser de 10 c ou de 50 c. Polo tanto, o total de casos favorables é de 9 (hai 6 de 10 e 3 de 50). O número de casos posibles é o de moedas que temos no moedeiro que son 7 + 5 + 6 + 3 = 21.

A probabilidade de obter un número par de céntimos é $P(par) = \frac{casos\, favorables}{casos\, posibles} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Actividades propostas

1. Nunha caixa temos mesturados 25 cravos de 2 cm de longo, 15 cravos de 3 cm, 20 cravos de 2.5 cm e 40 cravos de 3.5 cm. Sacamos ao chou un cravo da caixa (asúmese que todos os cravos teñen a mesma probabilidade de seren elixidos). Que probabilidade hai de que o cravo extraído teña a menor lonxitude?

2. A ruleta francesa consta dos números que van do 0 ao 36. Se sae 0 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo).

a) Que probabilidade temos de gañar a aposta?

b) A ruleta americana consta dun 0, un 00 e dous números que van do 1 ao 36. Se sae 0 ou 00 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo). Que probabilidade temos de gañar a aposta?

3. Nun instituto de 800 alumnos hai 400 estudantes que falan inglés, 300 que falan francés, 100 que falan alemán, 100 que falan inglés e francés, 80 que falan inglés e alemán, 50 que falan francés e alemán e 30 que falan os tres idiomas.

Elíxese un estudante ao chou. Cal é a probabilidade de que fale soamente unha lingua estranxeira?

1.2. Sacando bólas dunha bolsa

Unha forma sinxela de facérmonos unha idea dos conceptos probabilísticos é facer *experimentos* con obxectos coñecidos. Por exemplo, son moi típicos os problemas nos que sacamos bólas (ou caramelos, ou papeletas…) dunha bolsa.

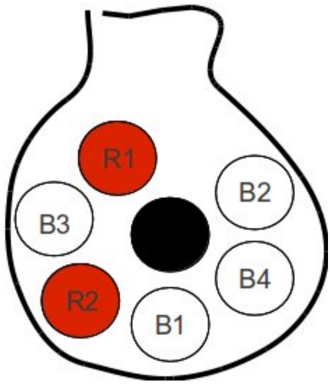
Exemplo:

- *Unha bolsa contén 4 bólas brancas, 2 bólas vermellas e unha bóla negra.*

a) Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha branca e unha negra?
b) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla branca e unha bóla negra?
c) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?
d) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?
e) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?
f) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla branca?

Hai moitas maneiras de resolver estes exemplos. A clave está en contar ben os casos que aparecen. Empregaremos métodos distintos, que imos desenvolver despois ao longo do capítulo.

a) Aínda que non nos digan nada no problema, e aínda que as bólas sexan indistinguibles, imos imaxinar que cada unha ten un número escrito, como as bólas de billar americano. Iso axudaranos a contar. Así, a situación é a representada na figura.



Formalmente non nos importa en que orde saen as bólas. En principio collemos as dúas ao mesmo tempo.

Os casos favorables son

Os casos posibles son as combinacións de 7 elementos tomados 2 a 2. Isto é,

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$$

Así, a probabilidade pedida é $\frac{4}{21}$.

b) Aínda que pareza distinto por como o enunciamos, neste exemplo preguntamos exactamente o mesmo que no exemplo (a). En efecto, só nos interesa o que ocorre tras da segunda extracción. Así que xa sabemos o resultado.
Se quixeramos poderiamos formulalo tendo en conta a orde na que saen as bólas. Nese caso, para contar o total de casos posibles, teremos que utilizar variacións de 7 elementos tomados 2 a 2.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N, N B1, N B2, N B3, N B4 (considérase orde de extracción).
Casos posibles: son todas as formas de elixir unha parella de bólas nas que si importa a orde de elección (primeiro sácase unha e despois outra):

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Así, a probabilidade pedida é $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{8}{42} = \dfrac{4}{21}$

c) Este exemplo cambia con respecto ao anterior en que si nos importa a orde na que saen as bólas.
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N.
Casos posibles

$$V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{4}{42} = \dfrac{2}{21}$.

d) Neste exemplo os casos favorables son os mesmos que no exemplo anterior. Pero hai moitas máis posibilidades, xa que volvemos introducir na bolsa a bóla que sacamos na primeira extracción. Para contar o número de casos posibles utilízanse as *variacións con repetición.*
Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N.

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{4}{49}$.

e) Neste exemplo hai un único caso favorable: que saia a bóla negra 2 veces. O número de casos posibles é o que calculamos no exemplo anterior, xa que realizamos dúas extraccións e importa a orde.
Casos favorables: N N.
Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\,favorables}{casos\,posibles} = \dfrac{1}{49}$

f) Nesta ocasión volvemos ter o mesmo número de casos posibles que nos dous exemplos anteriores. O que cambia é o modo de contar o número de casos favorables. Podemos facelo “ao besta” ou ben utilizando combinatoria, que para iso a estudamos.

Os casos posibles son B1 B1, B1 B2, B1 B3, B1 B4, B2 B1, B2 B2, B2 B3, B2 B4, B3 B1, B3 B2, B3 B3, B3 B4, B4 B1, B4 B2, B4 B3, B4 B4. É dicir, 16 casos.

Poderiamos telo calculado dunha forma moito máis sinxela tendo en conta que hai 4 bólas brancas e extráense, con substitución, 2 veces. Iso dá lugar a un problema típico de variacións con repetición.
Casos favorables:

$$VR_{4,2} = 4^2 = 16$$

Casos posibles:

$$VR_{7,2} = 7^2 = 49$$

Probabilidade = $\dfrac{casos\, favorables}{casos\, posibles} = \dfrac{16}{49}$

Actividades propostas

4. Volve facer todos os apartados do exemplo anterior pero substituíndo en cada caso “bóla branca” por “bóla vermella”. É dicir, a bolsa ten agora 6 bólas vermellas e unha bóla negra:

a) Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha vermella e unha negra?

b) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla vermella e unha bóla negra?

c) Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa vermella e a segunda negra?

d) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa vermella e a segunda negra?

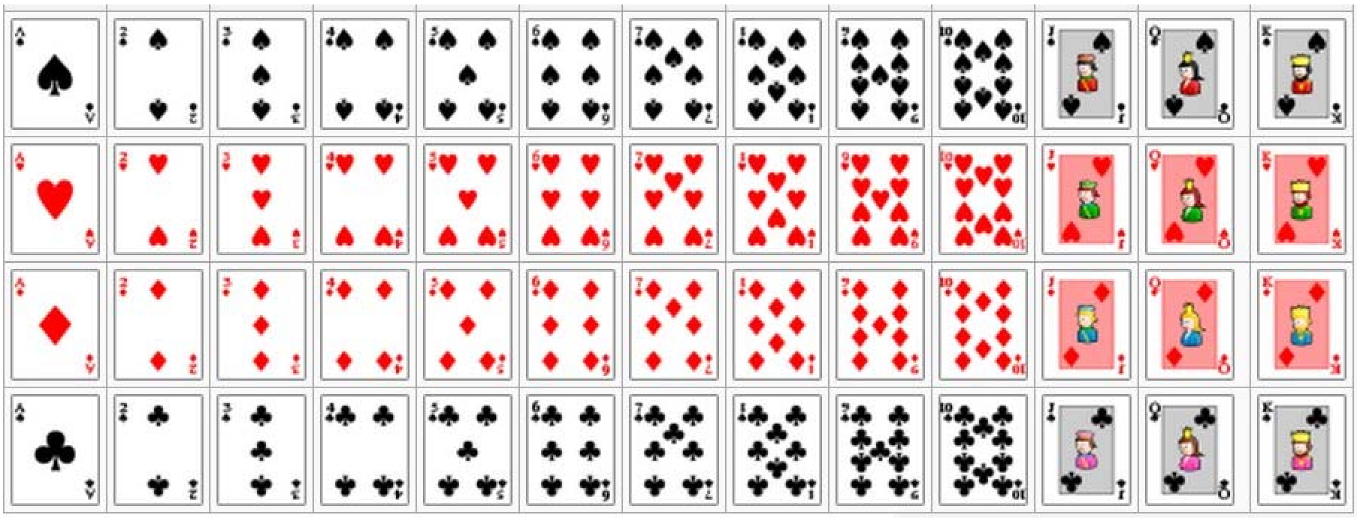
e) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?

f) Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla vermella?

5. Na lotería primitiva unha aposta consiste en marcar 6 casas de entre 49 posibles. O día do sorteo extráense 6 bólas (de entre 49). Cal é a probabilidade de que a túa aposta coincida coa combinación gañadora? Cal é a probabilidade de que acertes unicamente 5 números? E a de que acertes unicamente 4 números?

1.3. Mesturando cartas

Nunha baralla americana temos 4 paus: picas, corazóns, trevos e diamantes. As cartas de picas e de trevos son negras mentres que os diamantes e os corazóns son cartas vermellas. Cada pau ten 13 cartas, das que hai cartas con números do 1 ao 10, e 3 figuras: a sota (J), a dama (Q) e o rei (K). Na baralla francesa (a orixinal, pero menos vista) en lugar de aparecer J, Q, K aparecen V, D, R (Valet, Dame e Roi). Ademais, a baralla ten 2 comodíns pero non os imos utilizar nos nosos exemplos.



As mesturas de cartas teñen propiedades moi interesantes. De feito, hai moitos xogos de cartomaxia que se basean en propiedades matemáticas das mesturas (e non precisamente probabilísticas). Nos exemplos que imos ver a continuación suporemos sempre que traballamos cunha baralla ben mesturada e a extracción das cartas farase sempre de forma aleatoria.

Exemplos:

- *Repártese ao chou* 5 *cartas dunha baralla de póker. Cal é a probabilidade de que teñas* 4 *cartas do mesmo valor?* (esa é a xogada que se chama *póker*).

Non nos importa a orde, co que o número de mans posibles se calcula mediante combinacións. Isto é,

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2\,598\,960.$$

Para contar o número de casos favorables pensaremos, de momento, en algo máis concreto: cantas posibilidades hai de obter un *póker de ases.*

A man que nos interesa é AAA *, onde * pode ser calquera carta. Hai 12 · 4 = 48 posibilidades para este (o 52 – 4 = 48). En efecto, a única elección posible é a carta que acompaña os ases.

Así, como temos 13 posibles valores do póker (do As ao 10 e as 3 figuras), hai 13 · 48 = 624 casos favorables. Con isto, a probabilidade pedida é

$$P(póker) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{624}{2\,598\,960} = \frac{156}{649\,740}$$

- *Unha xogada de 5 cartas chámase full se nela hai 3 cartas dun valor e outras 2 dun valor distinto. Cal é a probabilidade de conseguir un full de ases e de douses, isto é, AAA 22?*

Os casos posibles son os mesmos de antes: o número de posibles xogadas de 5 cartas.
Para conseguir AAA temos 4 cartas (os 4 ases) dos que debemos escoller 3. Calcúlanse con combinacións.

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4.$$

Para conseguir os douses temos que elixir 2 douses de entre 4. Volvemos utilizar combinacións.

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Combinando as 4 posibilidades que temos para conseguir os 3 ases e as 6 posibilidades que temos para conseguir os 2 douses, quédannos un total de 24 formas de conseguir ese full de ases e de douses.
Así,

$$P(AAA22) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{24}{2\,598\,960} = \frac{1}{108\,290}$$

- *Cal é a probabilidade de conseguir un full (independentemente da súa composición)?*

No exemplo anterior calculamos a probabilidade de conseguir un full concreto: o full AAA22.

Pero para conseguir un full arbitrario temos 13 posibilidades de elección para as 3 cartas do mesmo valor e 12 para elixir as outras 2 cartas (claro, xa non podemos usar o valor que eliximos para o trío). Así hai $13 \cdot 12$ posibilidades de conseguir un full concreto.

Como un full fixado se podía obter de 24 formas diferentes (calculámolo no exemplo anterior), o total de casos favorables é:

Casos favorables = 13 · 12 · 24 = 3 744.

E así

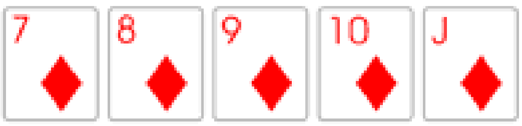
$$P(full) = \frac{3\,744}{2\,598\,960} = \frac{78}{54\,145}.$$

Actividades propostas

6. a) Chámase *trío* á xogada que consiste en 3 cartas do mesmo valor e outras dúas de diferente valor ao desas 3 e ademais con diferentes valores entre si. Calcula a probabilidade de obter un *trío de ases* nunha xogada de 5 cartas.

b) Calcula a probabilidade de obter un *trío* calquera.

7. a) Chámase *escaleira de cor* a unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau ordenadas consecutivamente. Calcula a probabilidade de obter esta *escaleira de cor*:



b) Calcula a probabilidade de obter unha *escaleira de cor* calquera. A escaleira de cor pode ser As, 2, 3, 4, 5, que é a escaleira de cor mínima, ou, 10, J, Q, K, As que é a escaleira de cor máxima ou escaleira real.

8. Chámase *cor* a unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau que non son consecutivas. Calcula a probabilidade de obter *cor* nunha xogada.

2. AFONDANDO NA TEORÍA

2.1. Combinatoria para poder contar

Os exemplos que fixemos ao principio do capítulo amosan o importante que é o dominio da combinatoria para contar os casos favorables e os casos posibles que temos. A modo de recordatorio, incluímos un cadro extraído do resumo do capítulo anterior:

Permutacións	Inflúe só a orde. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacións con repetición	Inflúen a orde e os **elementos**. Os elementos poden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacións sen repetición	Inflúen a orde e os **elementos**. Os elementos non poden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinacións	Inflúen só os **elementos**. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \dbinom{m}{n}$	$C_{9,7} = \dbinom{9}{7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

2.2. Nomenclatura en probabilidade

É moi importante chamar a cada cousa polo seu nome. A precisión e a linguaxe en Matemáticas poden converter en sinxelo algo que, en principio, podería parecer moi complicado.

Un **experimento aleatorio** é unha acción (experimento) cuxo resultado depende do azar.

A cada un dos resultados posibles dun experimento aleatorio chamarémoslle **caso** ou **suceso elemental**.

O conxunto de todos os casos posibles chámase **espazo dunha mostra** ou **suceso seguro**.

Un **suceso** é un subconxunto do espazo dunha mostra.

Se S é un suceso verifícase o **suceso contrario** de S sempre que non se verifica S. Representarémolo por S^C.

Dise que dous sucesos son **sucesos independentes** se que se verifique un deles non afecta á probabilidade de verificación do outro.

Exemplo:

- *Experimentos aleatorios:*

  a) Elixir unha persoa ao chou e ver en que día da semana naceu.

  b) Sacar unha carta da baralla de póker e ver de que pau é.

  c) Lanzar un dado de parchís e observar o número da cara superior.

  d) Lanzar 3 moedas ao aire e observar a posición na que caen.

- *Espazos dunha mostra*. Para os experimentos do exemplo anterior os espazos dunha mostra son, respectivamente:

  a) {luns, martes, mércores, xoves, venres, sábado, domingo}.

  b) {picas, corazóns, trevos, diamantes}.

  c) {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

  d) {CCC, CCX, CXX, XXX}.

- *Sucesos contrarios*. Usaremos os experimentos (a), (b), (c), (d) deste exemplo.

  a) O suceso contrario a "un día da fin de semana" é {luns, martes, mércores, xoves, venres}.

  b) O suceso contrario a "carta vermella" é {picas, trevos}.

  c) O suceso contrario a "número múltiplo de 3" é {1,2,4,5}.

  d) O suceso contrario a "saen as 3 caras" é {CCX, CXX, XXX}.

- *Sucesos independentes*. Usaremos os experimentos (a), (b), (c), (d) deste exemplo.

a) Os sucesos "ter nacido en fin de semana" e "ter nacido en luns" son independentes. Os sucesos "ter nacido en fin de semana" e "ter nacido en domingo" son dependentes.

b) Os sucesos "obter unha carta vermella" e "obter unha carta de picas" son independentes. Os sucesos "obter unha carta vermella" e "obter unha carta de corazóns" son dependentes.

c) Os sucesos "obter un número par" e "obter un 5" son independentes. Os sucesos "obter un número par" e "obter un 6" son dependentes.

d) Os sucesos "obter tres caras" e "obter tres cruces" son independentes. Os sucesos "Obter tres resultados iguais" e "obter tres cruces" son dependentes.

Como a unión dun suceso e o seu suceso **contrario** é o suceso seguro tense que

$$P(S^C) = 1 – P(S).$$

Cando dous sucesos son independentes, a probabilidade de que se dea o **suceso intersección** (isto é, que se verifiquen ambos os sucesos á vez) é o produto das probabilidades de cada un deles.

Se A e B son **independentes**,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Actividades propostas

9. Considéranse os seguintes experimentos aleatorios:

1) Téñense 5 fichas de Scrabble formando a palabra CASAS. Métense nunha bolsa e extráense 3 fichas.
2) Mestúrase unha baralla de póker, córtase e mírase o valor da carta superior.
3) Un moedeiro contén 4 moedas de 5 céntimos, 2 moedas de 10 céntimos e 1 moeda de 20 cm. Extráense ao chou dúas moedas del.
4) Dos 30 alumnos dunha clase elíxese un ao chou. Pregúntaselle en que mes naceu.

a) Describe os espazos dunha mostra de cada un dos 4 experimentos aleatorios anteriores.
b) Indica os sucesos contrarios a
   1. {AAC}.
   2. {A, 2, 3, 4, 5}.
   3. Sacar unha cantidade par de céntimos.
   4. Ter nacido nun mes no que seguro que é verán.
c) Son independentes estes pares de sucesos?
   1. {AAC} e {{ASA}, {CAS}}.
   2. "Obter un 6" e "obter un número par".
   3. "Obter unha cantidade par de céntimos" e "sacar dúas moedas de 5 céntimos".
   4. "Ter nacido nun mes que seguro é de verán" e "ter nacido en xuño".

A linguaxe é moi importante á hora de **comprender** que nos están pedindo en cada caso.

2.3. Non todos os sucesos teñen a mesma probabilidade

Hai casos nos que intuímos perfectamente que non todos os sucesos teñen a mesma probabilidade. Por exemplo, se lanzamos un dado, a probabilidade de obter un número par é 1/2 mentres que a de obter un múltiplo de 3 é 1/3.

Noutras ocasións pode custarnos máis.

Exemplo

- *Considera o experimento aleatorio "mesturar unha baralla, cortar e mirar a cor das dúas cartas que quedaron arriba".*

  a) Se escribimos o espazo dunha mostra veremos que é {RR, RN, NN}. Claro: ou ben as dúas cartas son vermellas, ou ben as dúas son negras, ou ben hai unha de cada cor.
  b) Pero... e se tivesemos escrito a cor de cada carta, por orde de aparición? Nesta situación, os casos posibles serían {RR, RN, NR, NN}.

Como a linguaxe que utilizamos é imperfecta, para un mesmo experimento podemos considerar dous espazos dunha mostra distintos. Non hai problema nisto sempre que saibamos o que nos están preguntando e o que debemos facer.

En realidade, o RN que escribimos en (a) correspóndese cos casos RN e NR de (b).

Traballando co espazo dunha mostra de (b) todos os casos son equiprobables mentres que se traballamos co espazo dunha mostra de (a) os sucesos RR e NN teñen probabilidade 1/4 mentres que RN ten probabilidade 1/2.

Actividades resoltas

- *Téñense* 5 *fichas de Scrabble formando a palabra* CASAS. *Métense nunha bolsa e extráense* 3 *fichas. Dá dous casos que sexan equiprobables e outros dous que non o sexan.*

Son equiprobables {AAC} e {SSC}. Non son equiprobables {AAC} e {CAS}.

- *Mestúrase unha baralla de póker, córtase e súmanse os valores das dúas cartas superiores* (asumimos A = 1, J = 11, Q = 12, K = 13). *Dá dous casos que sexan equiprobables e outros dous que non o sexan.*

Neste exemplo o espazo dunha mostra é {2, 3, …, 26} (os números que poden obterse ao sumar os valores das dúas cartas).

Son casos equiprobables {2} e {26} ou {3} e {25}. Non son equiprobables {2} e {3}.

- *Dos* 30 *alumnos dunha clase elíxese un ao chou. Pregúntaselle en que mes naceu. Dá dous casos que sexan equiprobables e dous que non o sexan.*

O espazo dunha mostra é {xaneiro, febreiro … novembro, decembro}. En realidade, non todos estes casos son equiprobables. Para sabelo temos que aproximar a probabilidade mediante a frecuencia relativa e para iso é necesaria a estatística.

No ano 2012 os datos de nacementos en España, por meses, reflíctense nesta táboa:

xaneiro	febreiro	marzo	abril	maio	xuño	xullo	agosto	set	outubro	nov	dec
11 765	10 967	11 776	11 329	11 954	11 314	11 874	12 031	11 672	12 324	11 510	11 318

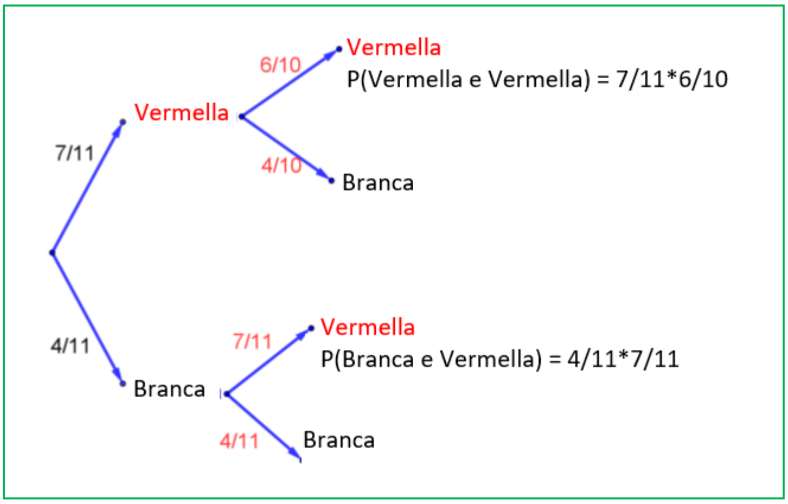
2.4. Uso de diagramas de árbore

Xa se utilizou a representación en diagrama de árbore para xerar variacións, combinacións ou permutacións. Ese mesmo tipo de estrutura é tamén útil cando hai que calcular probabilidades.

Exemplo

- *Temos unha caixa con 7 bólas vermellas e 4 bólas brancas. Sácase unha bóla ao chou. Se é branca, vólvese meter na caixa. Se é vermella, déixase fóra. Nestas condicións sácase outra bóla da caixa. Que probabilidade hai de que esta bóla sexa vermella?*

Poden ocorrer dúas cousas: que a bóla da primeira extracción sexa vermella ou que sexa branca.



1.- Se a bóla sacada é vermella (ocorre con probabilidade 7/11) a bóla quedará fóra e a composición da caixa xusto antes da segunda extracción é de 6 bólas vermellas e 4 bólas brancas.

A probabilidade de que neste momento se saque unha bóla vermella é de 6/10.

2.- Se a bóla sacada é branca (ocorre con probabilidade 4/11), a bóla vólvese meter na caixa e a composición desta antes da segunda extracción será a mesma que ao principio. Así a probabilidade de que na segunda extracción saia unha bóla vermella é de 7/11.

Pódese chegar a obter unha bóla vermella na segunda extracción por dúas vías: dependendo da cor da bóla que se saque na primeira extracción.

A **probabilidade total** de que saia unha bóla vermella na segunda extracción é:

$$P(vermella) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{371}{605}$$

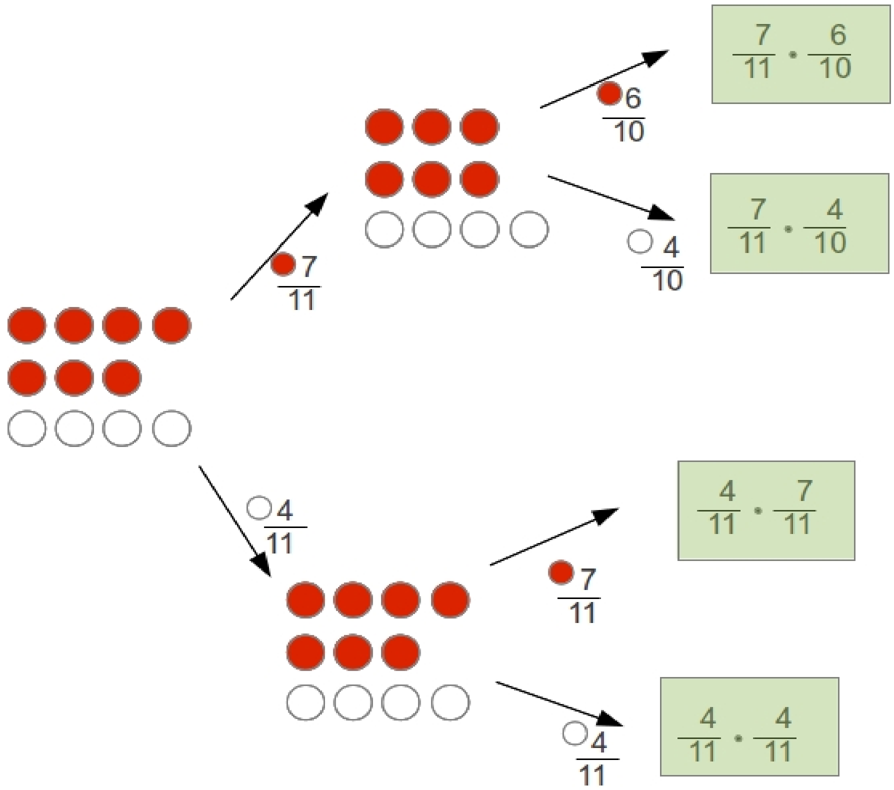
Probabilidade de obter vermella na primeira extracción.

Probabilidade de obter vermella na 2ª extracción tendo sacado vermella na 1ª.

Probabilidade de obter branca na 1ª extracción.

Probabilidade de obter vermella na 2ª extracción tendo sacado branca na 1ª.

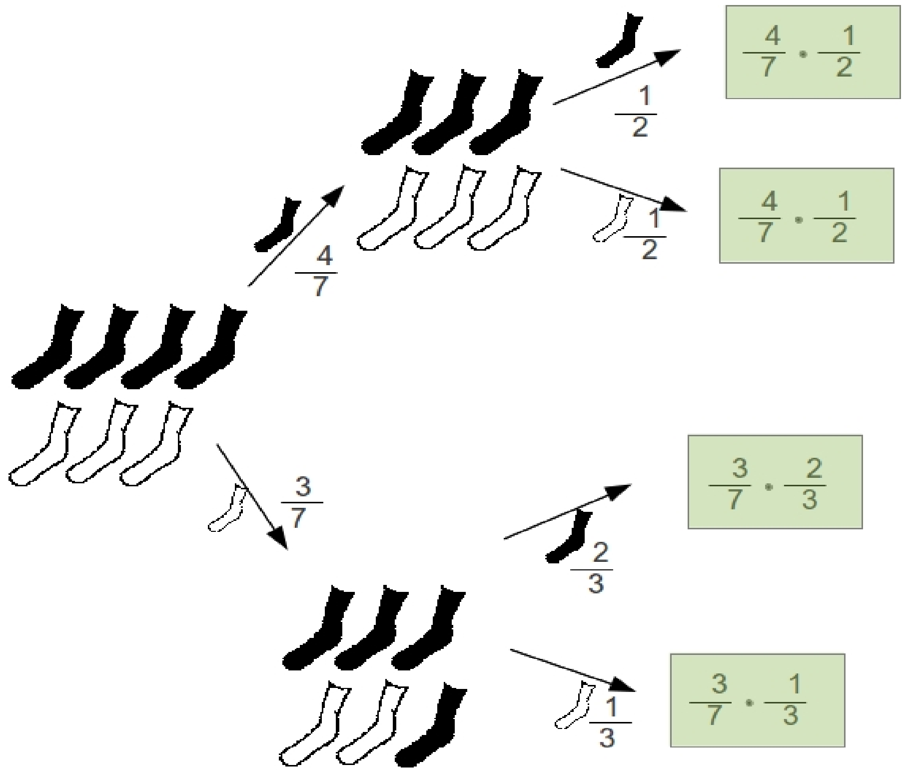
Todo este proceso soe resumirse e simplificarse utilizando un **diagrama de árbore:**



Actividade resolta

- *Nun caixón temos 7 calcetíns: 4 negros e 3 brancos. Sacamos, sen mirar, dous calcetíns do caixón. Que é máis probable, que sexan ambos da mesma cor ou que sexan de cores distintas?*

Faremos un diagrama de árbore calculando a probabilidade de cada caso.



A probabilidade de que obteñamos dous calcetíns negros é 2/7, de que obteñamos 2 calcetíns brancos é 1/7. Así temos que a probabilidade de obter dous da mesma cor é 3/7, fronte á probabilidade de obter dous de cores distintas, que é 4/7.

É máis probable sacar un par de calcetíns de cores distintas.

Observación

Tamén poderiamos ter resolto este problema mediante a *Lei de Laplace*.

Casos posibles: $C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$.

Casos favorables a sacar 2 calcetíns negros: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$.

Casos favorables a sacar 2 calcetíns brancos: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$.

Casos favorables: 6 + 3 = 9.

Probabilidade = $\dfrac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$.

Como sacar un calcetín de cada cor é o suceso contrario a este, a súa probabilidade é $1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$. É máis probable este caso.

Recorda que os problemas de Matemáticas se poden abordar desde diferentes puntos de vista. O importante é que sexas capaz de resolvelos. Por iso é importante coñecer máis dun método. Nunhas ocasións será mellor utilizar un e noutras será mellor usar un método alternativo. Por iso debes estudar diversas "ferramentas" que che axuden a resolver os problemas que aparecen.

Actividades propostas

10. Elabora unha árbore de probabilidades para calcular a probabilidade de obter *dobre parella* nunha xogada de 5 cartas de póker. (*Dobre parella* consiste en 2 pares de cartas do mesmo valor, diferentes entre si e unha carta, indiferente, de valor distinto aos dous anteriores. Por exemplo, AA 33 Q).

11. No moedeiro teño 3 moedas dun céntimo, 2 de 5 céntimos, 3 de 10 céntimos, 1 de 20 e 1 de 50 céntimos. Saco 3 moedas ao chou. Cal é a probabilidade de que obteña un número par de céntimos?

2.5. Probabilidade condicionada

Nos casos de diagramas de árbore, en cada paso aparecen probabilidades que están condicionadas a un paso anterior. No exemplo da sección 2.4 a probabilidade de que na segunda extracción a bóla sexa vermella condicionada a que na primeira extracción teña saído unha bóla vermella era 6/10 mentres que a probabilidade de sacar unha bóla vermella na segunda extracción, sabendo que na primeira tiña saído unha bóla branca, era 7/11.

En moitos casos a probabilidade que hai que determinar é unha **probabilidade condicionada** á verificación dun suceso anterior.

A probabilidade de verificación do suceso A condicionada á verificación do suceso B represéntase por *P*(*A*/*B*).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemplos

- *No lanzamento dun dado saíu un número par. Calcula a probabilidade de que sexa un* 6.

Non é necesario formalizar este así pero, para acostumarnos á notación, daremos nomes aos sucesos que interveñen:

A = Obter un 6 = {6}.

B = Obter número par = {2, 4, 6}.

Os casos posibles son {2, 4, 6} (porque nos din que saíu un número par}.

O único caso favorable é {6}.

Así pois:

P(*sacar* 6 *condicionado a par*) = $\dfrac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \dfrac{1}{3}$

Tamén poderiamos ter calculado este con álxebra de sucesos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- *O 40 % da poboación fuma e o 10 % fuma e é hipertenso. Cal é a probabilidade de que un fumador sexa hipertenso?*

Asumiremos que as porcentaxes de poboación se corresponden con probabilidades. Así, a probabilidade de que un individuo, elixido ao chou, sexa fumador é 0.4 e a probabilidade de que sexa fumador e hipertenso é 0.1. Deste modo,

A = Ser fumador e hipertenso.

B = Ser fumador.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Como $P(A) = 0.1 \neq P(A/B) = 0.25$ os sucesos "*ser fumador*" e "*ser hipertenso*" son sucesos dependentes.

Actividades propostas

12. Un analista deportivo, que se equivoca o 20 % das veces, dixo que o noso equipo favorito vai gañar a liga. O analista da competencia, que se equivoca o 25 % das veces, dixo que o noso equipo favorito non vai gañar a liga. Á vista destas análises, que probabilidade hai de que o noso equipo gañe a liga?

13. Unha compañía de produtos avícolas empaqueta ducias de ovos en tres lugares diferentes. O 40 % da produción ten lugar na planta A, o 25 % en B e o resto en C. Un control de calidade dinos que un 5 % dos paquetes elaborados en A, un 10 % dos de B e un 8 % dos de C conteñen algún ovo roto. Que probabilidade hai de que nos toque unha ducia de ovos con algún ovo roto?

14. Nun instituto con 300 alumnos estase estudando se a cualificación obtida en *Lingua Galega* ten que ver coa cualificación obtida en *Matemáticas*. Tras facer unha enquisa, obtéñense os seguintes resultados:

		Matemáticas		
		Sobresaliente	**Notable**	**Outro**
Lingua	**Sobresaliente**	110	25	18
	Notable	420	70	40
	Outro	10	5	2

Elíxese un alumno ao chou. Cal é a probabilidade de que teña un sobresaliente en *Lingua*, se o tivo en *Matemáticas*?

Cal é a probabilidade de que teña un sobresaliente en *Matemáticas*, se o tivo en *Lingua*?

3. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

3.1. Exemplos comúns

Actividades resoltas

- *Nun caixón teño un par de calcetíns vermellos, un par de calcetíns negros e un par de calcetíns brancos. Ao facer a maleta, coas présas, collo 3 calcetíns sen mirar. Que probabilidade teño de ter collido 2 da mesma cor?*

Collerei 2 da mesma cor sempre que non colla os 3 de cores diferentes. É dicir, vou usar o suceso contrario.

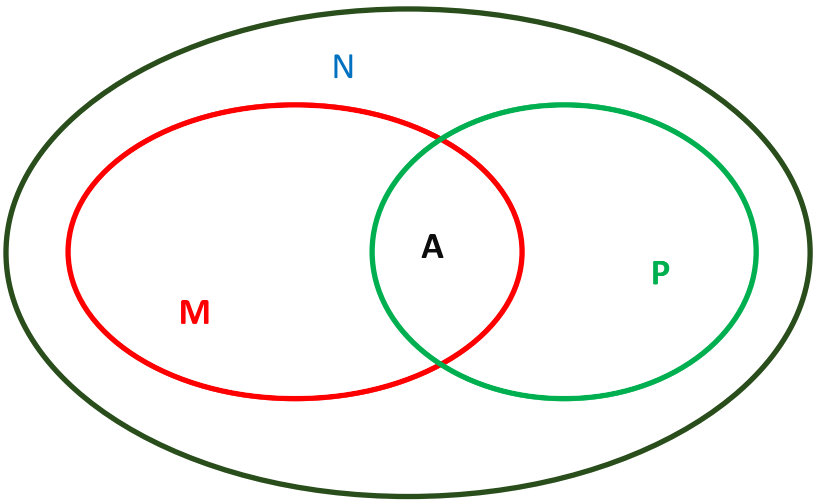
Dáme igual a cor do primeiro que saco. Para o segundo sérvenme 4 de entre 5, pois unicamente non me serve o que é da mesma cor que antes xa sacara. E na terceira extracción, como necesito unha cor diferente, sérvenme 2 de entre 4.

Así a probabilidade do suceso contrario é $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{5}$.

Por iso a probabilidade pedida é $\frac{2}{5}$.

- *Faise un estudo de consumo nunha poboación. Descóbrese que ao 80% das persoas ás que lles gusta o xeado de pistacho tamén lles gusta o de mango e que ao 80% das persoas ás que lles gusta o xeado de mango tamén lles gusta o de pistacho. Ao 60% de esa poboación non lle gustan os xeados de mango nin de pistacho. Elíxese ao chou unha persoa desa poboación. Cal é a probabilidade de que lle guste tanto o xeado de mango como o de pistacho?*

Imos calcular as porcentaxes da poboación á que lle gusta o xeado de mango e de pistacho. Representaremos todos os datos con diagramas de Venn.



Consideremos

M = Porcentaxe de persoas ás que lles gusta o xeado de mango.

P = Porcentaxe de persoas ás que lles gusta o xeado de pistacho.

A = Porcentaxe de persoas ás que lles gustan ambos os xeados (pistacho e mango).

N = Porcentaxe de persoas ás que non lles gusta nin o xeado de pistacho nin o de mango.

Sabemos que A = 0.8 · P e tamén que A = 0.8 · M. Polo tanto, M = P.

Agora podemos referir todo a X, o número total de individuos da poboación.

O número de persoas ás que lles gusta polo menos un deses tipos de xeado é:

$$M + P - A = 2M - 0.8M = 1.2M$$

Pero sabemos que iso coincide co 60% da poboación.

Así $1.2M = 0.4X \Rightarrow M = \frac{4}{5}X$

E, finalmente, $A = 0.8 \cdot \frac{1}{3}X = \frac{4}{15}X.$

Co que a probabilidade de que á persoa elixida ao chou non lle guste nin o xeado de pistacho nin o de mango é:

$$P = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{\frac{4}{15}X}{X} = \frac{4}{15}.$$

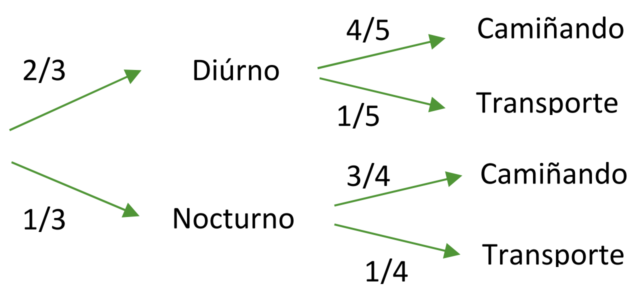
- *Na lotería primitiva apóstanse* 6 *números de entre* 49. *Xogando unha soa aposta, cal é a probabilidade de que che toque un premio de* 5 *acertos máis complementario?*

O número de casos posibles son as combinacións de 49 elementos tomados 6 a 6: $C_{49,6}$.

Os casos favorables teñen que incluír necesariamente ao *número complementario*. As outras 5 posicións téñense que encher con 5 dos 6 elementos da combinación gañadora. Así, o número de casos favorables vén dado polas combinacións de 6 elementos tomados de 5 en 5: $C_{6,5}$.

Así, $P(5 + complementario) = \frac{C_{6,5}}{C_{49,6}} = \frac{6}{13\,983\,816} = \frac{1}{2\,330\,636}.$

- *Nun IES hai Bacharelato diúrno e Bacharelato nocturno. En diúrno estudan 2/3 dos alumnos e o terzo restante faino en nocturno. A cuarta parte dos alumnos de nocturno e a quinta dos de diúrno utiliza un medio de transporte para ir ao instituto. O resto chega camiñando. Elíxese ao chou un estudante dese instituto. Que probabilidade hai de que vaia á clase andando?*



A probabilidade de que un alumno acuda á clase camiñando é $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{47}{60}.$

- *Tras volver de Dublín, no moedeiro temos 6 moedas de euro procedentes de España e 9 de Irlanda. Temos que pagar 3 euros. Que probabilidade hai de que o fagamos con moedas do mesmo país?*

Temos 6 moedas de euro de España, 9 de Irlanda.

Debemos tomar 3 moedas ao chou.

Os casos posibles son as combinacións de 15 elementos tomados 3 a 3. $C_{15,3} = 455$.

Os casos favorables proveñen de coller as 3 moedas españolas ou as tres irlandesas. Así resulta:

$$C_{6,3} + C_{9,3} = 20 + 84 = 104.$$

Polo tanto, a probabilidade pedida é $\frac{104}{455}$.

- *Un tafur xoga cunha baralla trucada de 48 cartas. Saca unha carta, míraa, volve metela na baralla e mestura. Repite este procedemento outras 2 veces máis. A baralla está preparada de tal modo que o feito de que unha das tres cartas vistas sexa unha figura ten unha probabilidade de 19/27. Cantas figuras ten a súa baralla?*

Chamaremos *x ao* número de figuras que hai na baralla trucada. A probabilidade de non obter figura na primeira carta é $\frac{48-x}{48}$*, a* de non obtela na segunda volve ser a mesma probabilidade e o mesmo coa terceira. Así a probabilidade de non obter figura é $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3$.

Como *non obter ningunha figura* é o suceso contrario de *obter algunha figura*, a súa probabilidade é:

$$P\ (\textit{non obter ningunha figura}) = 1 - P\ (\textit{obter figura}) = 1 - \frac{19}{27} = \frac{8}{27}.$$

Así chegamos á ecuación

$$\left(\frac{48-x}{48}\right)^3 = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$$

De onde

$$\frac{48-x}{48} = \frac{2}{3}$$

E, despexando nesa ecuación, resulta $x = 16$.

Actividades propostas

15. Unha bolsa contén 9 bólas vermellas e 6 bólas negras. Extráese ao chou unha delas e substitúese por dúas doutra cor. Tras isto extráese unha segunda bóla. Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa vermella? Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa da mesma cor que a primeira?

16. No comedor escolar a probabilidade de que non haxa pasta unha semana é 1/3; a probabilidade de que haxa polo é 3/5 e a probabilidade de que haxa pasta e polo é 4/7. Calcula a probabilidade de que non haxa nin pasta nin polo. Calcula a probabilidade de que non haxa polo sabendo que houbo pasta.

17. Temos no peto moedas procedentes de 3 países: españolas (60 %), francesas (30 %) e alemás (o resto). O 30 % das moedas españolas e o 20 % das francesas son de 50 céntimos. Tamén sabemos que, do total de moedas, o 30 % son de 50 céntimos. Extráese unha moeda ao chou. Que probabilidade hai de que sexa unha moeda francesa de 50 céntimos? Que probabilidade hai de que sexa unha moeda de 50 céntimos, sabendo que é alemá?

18. Nunha clase hai 24 alumnos e 16 alumnas. Fórmanse equipos de traballo de 5 persoas. Calcula a probabilidade de formar un equipo nas seguintes condicións:

a) Todos os participantes son do mesmo sexo.
b) No equipo hai polo menos 3 mozas.
c) No equipo hai exactamente 3 mozas.
d) No equipo hai 3 estudantes dun sexo e 2 doutro.

3.2. Cousas sorprendentes

Levamos todo o capítulo insistindo en que non temos suficientemente desenvolvido o sentido da probabilidade. É necesario educar a intuición neste sentido. Por iso hai feitos que, sendo totalmente explicables desde as Matemáticas, nos seguen parecendo paradoxais. Imos comentar brevemente tres exemplos.

Actividades resoltas

- *Aínda que pareza unha casualidade, por ter o ano 365 días, é moi probable que na túa clase haxa 2 alumnos que celebren o seu aniversario o mesmo día. Comprobáchelo?*

A probabilidade de que iso ocorra nun grupo de 23 persoas é 1/2. Nun grupo de 30 persoas a probabilidade é maior de 0.7 e nun grupo de 40 persoas é 0.89.

Como podemos calculalo?

Máis fácil que calcular a probabilidade de que haxa unha coincidencia é calcular a probabilidade do suceso contrario: que non haxa coincidencias.

Suporemos neste exemplo que hai a mesma probabilidade de ter nacido nun día ou noutro (aínda que saibamos que, en realidade, non é así).

- Supoñamos que temos 2 persoas. A primeira terá nacido un día. Para que non coincida a data de nacemento da segunda temos 364 posibilidades de elección. Así a probabilidade de que non haxa unha coincidencia nun grupo de 2 persoas é $\frac{364}{365}$.

- Se agora temos 3 persoas e non queremos que haxa coincidencias, hai 364 posibilidades para elixir a segunda persoa e 363 para elixir a terceira. Así esta probabilidade é:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$$

- Analogamente, a probabilidade de que nun grupo de 4 persoas non haxa coincidencias é:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}$$

- Seguindo con este razoamento, chegamos a que a probabilidade de que nun grupo de 23 persoas non haxa coincidencias é:

$$\underbrace{\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}}_{22\text{ factores}} = 0.4927.$$

Así que a de que haxa coincidencias é 1 – 0.4927 = 0.5073, maior do 50 %!

Para os outros casos que comentamos, podes facer ti os cálculos. Son similares aos que acabamos de facer.

Actividades resoltas

- A Administración Pública acostuma sortear a letra do apelido pola que comezará un proceso. Pode ser a orde da actuación dos concursantes nunha oposición, antano para sortear excedentes de cota do servizo militar, adxudicación de vivendas protexidas ou para adxudicar as prazas nun colexio.

Malia que os matemáticos insistimos en que eses sorteos non son xustos, xa que non tratan a todos os individuos por igual, a administración continúa realizándoos (e mesmo defende con teimosía a súa ecuanimidade). Efectivamente, os casos do espazo dunha mostra non son equiprobables.

- Supoñamos que, entre as xogadoras da Selección Feminina de Baloncesto que gañou o Eurobasket 2013, se sortea cal delas sobe recoller a copa e faise sorteando unha das 27 letras do alfabeto español.

Apelido	Letras coas que gañará
Aguilar	yza
Domínguez	bcd
Gil	efg
Lima	hijkl
Nicholls	mn
Ouviña	o
Palau	p
Queralt	r
Sancho	rs
Torrens	t
Valdemoro	uv
Xargay	x

Vemos que Cindy Lima tería unha probabilidade de 5/27 de subir recoller a copa, fronte a 1/27 de Ouviña, Palau, Queralt, Torrens ou Xargay.

Tristemente este sistema séguese utilizando. Mesmo o usou a Comunidade de Madrid para asignar prazas en colexios para o curso 2014/2015.

Actividade proposta

19. Supón que se sortea ser delegado da túa clase polo método descrito antes. Quen tería máis probabilidade de saír? Hai alguén que non tería ningunha posibilidade? Faino cunha lista da túa clase.

3.3. Cousas aínda máis sorprendentes

Actividade proposta

20. Toma 2 cartolinas de cores, cada unha dunha cor distinta (por exemplo, vermella e azul) e recorta en cada unha delas 3 rectángulos do mesmo tamaño. Pega eses rectángulos entre si de modo que un sexa vermello-vermello, outro azul-azul e outro vermello-azul. Mete as 3 cartolinas así preparadas nun sobre e saca unha ao chou, con coidado de non amosar nada máis que un lado. Pregunta a un compañeiro que “*adiviñe*” a cor da cara que está oculta. Repite o proceso con todos os compañeiros. Escribe os resultados do experimento nunha táboa como esta que copies no teu caderno:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Oculto																														
Aposta																														
Sae																														
Acerta?																														

Que observas? É mellor dicir que a cor oculta é o mesmo que a visible? Ou é peor?

Exemplos

1.- O paradoxo de *Bertrand*

En 1889 *Joseph Bertrand* propuxo o seguinte experimento: temos tres caixas nas que introducimos nunha unha moeda de prata e unha de bronce; noutra, dúas moedas de prata e noutra dúas moedas de bronce. As moedas de prata e bronce son indistinguibles ao tacto. Elíxese unha caixa ao chou e sácase unha moeda dunha delas. Vese que a moeda é de prata. De que material cres que é a outra moeda da caixa, prata ou bronce?

En principio pensamos que como vemos unha moeda de prata, pode tratarse da caixa que contén dúas moedas de prata ou a que ten unha de cada tipo. Por iso, nos inclinamos a pensar que a probabilidade de que a outra moeda sexa de prata ou de bronce é a mesma: 1/2.

Se pensamos un pouco máis veremos que este problema é, en realidade, equivalente á actividade proposta coa que comezamos esta sección. En lugar de termos cartolinas con cores diferentes temos caixas con moedas de materiais diferentes. As matemáticas do problema son as mesmas nos dous casos. Así que, se fixeches a actividade anterior, agora terás argumentos para decidir que o máis probable é que a outra moeda da caixa sexa de prata.

En efecto, o que se elixe ao chou é a caixa. A probabilidade de ter elixido unha caixa con dúas moedas iguais é 2/3, mentres que a probabilidade de elixir a caixa que ten unha moeda de cada tipo é soamente 1/3. Por iso o máis probable é que teñamos elixido unha caixa coas dúas moedas iguais. Como vemos que unha é de prata o mellor que podemos dicir é que a outra tamén o é.

Este é un exemplo típico de probabilidade condicionada, aínda que non o parece.

2.- O problema de *Monty Hall*

Monty Hall era o presentador do concurso da televisión americana *Let's have a deal!* Nese concurso había un premio final onde se amosaban tres portas. Detrás dunha delas había un coche e en cada unha das outras dúas había unha cabra. Claro, os concursantes o que querían era levar o coche.

Monty Hall procedía sempre do mesmo modo:

- Dicía ao concursante que elixira unha porta: a A, a B ou a C.
- Unha vez elixida a porta polo concursante abría unha das que non elixira e amosaba que detrás dela había unha cabra.
- Dáballe ao concursante a oportunidade de cambiar a súa elección ou manterse co que elixira ao principio.

(Inciso antes de seguir lendo: ti que farías?, cambiarías?, manterías a túa elección?, dá igual?, é mellor unha cosa cá outra?).

Como ensina unha porta cunha cabra, o coche está ou na que elixe o concursante ou na outra, en principio ao 50 %. En realidade, a probabilidade non é do 50 %, como veremos agora.

Marilyn vos Savant é unha persoa que presumía (e gañaba a vida utilizándoo) de ter o récord *Guinness* de cociente intelectual. Escribía unha columna na revista *Parade* e nela dixo que a mellor estratexia era cambiar a elección despois que *Monty Hall* amosase a cabra. Tras a publicación desta columna numerosos matemáticos escribiron á revista queixándose de semellante erro. Para todos era obvio que a probabilidade de acerto, tanto se cambiaba a elección como se non o facía, era 1/2.

A polémica resolveuna *Paul Erdös* (un matemático húngaro, un pouco raro, que non tiña un domicilio fixo nin un traballo estable, pero que publicou un montón de resultados matemáticos) dando razón a *vos Savant*, para sorpresa de moitos. Si, algúns matemáticos (mesmo algúns importantes) equivocáranse ao calcular probabilidades. Non pasa nada, todos cometemos erros.

Volvemos ao problema. Vas ver que simple é o razoamento. En realidade, hai 3 casos: "elixes a porta do coche" "elixes a da cabra 1" ou "elixes a da cabra 2". O importante é que realizas esta elección ANTES que *Monty Hall* che ensine nada.

- Supoñamos que elixiches a porta co coche. *Monty Hall* ensinarache a cabra 1 ou a cabra 2. Se cambias, perdes. Se non cambias, gañas.
- Supoñamos que elixes a porta coa cabra 1. *Monty Hall* ensinarache a cabra 2. Se cambias gañas: só queda a porta que oculta ao coche. Se non cambias, perdes.
- Supoñamos que elixes a porta coa cabra 2. *Monty Hall* ensinarache a cabra 1. Se cambias gañas: só queda a porta que oculta ao coche. Se non cambias, perdes.

Así, cambiando a túa elección despois que *Monty Hall* abra a porta gañarás 2 de cada 3 veces. Sorprendido?

CURIOSIDADES. REVISTA

Pascal e Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1655) mantiveron unha interesante correspondencia durante o ano 1654 que se podería considerar o inicio da Teoría da Probabilidade malia tratarse de problemas de xogos e apostas. Son problemas propostos polo Cabaleiro da Mérè que non era matemático.

Un é éste:

Un xogador aposta unha bolsa de moedas a que saca polo menos un 6 en 8 lanzamentos dun dado. Tirou xa o dado 3 veces sen sacar ningún 6 e decide deixar o xogo, que parte da bolsa lle correspondería?

Ti sabes resolvelo. Fai un diagrama en árbore e calcula en primeiro lugar a probabilidade que ten o xogador de gañar e a que ten de perder nun principio.

Cada tirada é un suceso independente (non depende do que se obtivese nas anteriores) así que, segundo Fermat, se o xogador renuncia a unha xogada ten dereito a 1/6 da bolsa.

Se renuncia a 2 lanzamentos, entón debe ser indemnizado con 1/6 + 5/36.

A ruleta

William Jaggers chegou a Montecarlo cuns poucos francos no peto e, durante un mes anotou os números que saían en cada ruleta, e en catro días gañou dous millóns catrocentos mil francos. *Jaggers* conseguiu quebrar á banca en *Montecarlo* analizando as frecuencias relativas de cada número da ruleta e observando que se desgastara algo do mecanismo dunha delas co que todos os valores non tiñan igual probabilidade. Apostou aos números máis probables e gañou.

O Cabaleiro da *Meré*

Ao *Cabaleiro da Meré* gustáballe xogar e era un gran xogador por iso sabía que era favorable apostar, ao tirar un dado, "sacar polo menos un 6 en 4 tiradas dun dado" e que non o era ao tirar dous dados ou "sacar polo menos un 6 dobre en 24 xogadas".

Vese que xogara moito para saber que as frecuencias relativas lle dicían que o primeiro suceso tiña unha probabilidade superior a 0,5, e o segundo a tiña inferior. Pero non o comprendía. Non era matemático e só sabía a regra de tres. Isto non é unha proporcionalidade! Dixo 6 : 4 = 36 : 24. Pero as frecuencias relativas dicíanlle que non era así, polo que escribiu a *Pascal* para que lle solucionara o problema.

Ti xa sabes o suficiente para solucionalo. Antes de seguir lendo, intenta resolvelo.

En lugar de calcular a probabilidade de *sacar polo menos un 6* en 4 tiradas, calcula a probabilidade de non *sacar un 6*, que é o seu suceso contrario, e é $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Polo tanto a probabilidade de *sacar polo menos un 6* en 4 tiradas é:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculamos do mesmo modo a probabilidade de sacar *polo menos un seis dobre* ao tirar dous dados 24 veces, calculando a do seu suceso contrario, a de non *sacar ningún seis dobre*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, polo que sacar polo menos un 6 dobre é:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

Canto debeu xogar o *Cabaleiro da Meré* para darse conta desa pequena diferenza nas probabilidades!

Se queres saber máis, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

O inicio da Teoría da Probabilidade, como sabes, foron os xogos de azar.

Galileo

No século XVI formulou o seguinte problema: ao tirar tres dados, por que é máis probable obter que a suma das caras superiores sexa 10 a que sexa 9?

Continuaba a reflexión coas posibles descomposicións nesas sumas:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambos os casos hai 6 descomposicións posibles, porén, tirando moitas veces os 3 dados comprobaba que é máis probable sacar un 10.

Se fas un diagrama en árbore comprobarás que todas esas descomposicións non son igualmente probables.

Por exemplo: (3, 3, 3) ten unha probabilidade de 1/216, mentres que a suma 6 + 2 + 2, pode saír con tres sucesos (6, 2, 2), (2, 6, 2) e (2, 2, 6), logo a súa probabilidade é 3/216.

- Calcula as probabilidades de cada unha das sumas e a de sacar 10 e a de sacar 9.

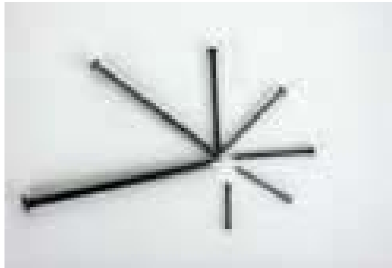
RESUMO

Concepto	*Definición*	*Exemplos*
Experimento aleatorio	O resultado depende do azar.	Tirar unha moeda ou un dado.
Suceso elemental	Cada un dos posibles resultados dun experimento aleatorio.	Cara ou cruz serían sucesos elementais no experimento "tirar unha moeda e observar o resultado".
Espazo dunha mostra	Conxunto de casos posibles.	{cara, cruz}. {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Suceso	Subconxunto do espazo dunha mostra.	{2, 4, 6}.
Lei de *Laplace*	Se os sucesos elementais son equiprobables entón $P(S)=\frac{número\ de\ casos\ favorables\ ao\ suceso\ S}{número\ de\ casos\ posibles}$	Ao tirar un dado: *P* (sacar 3) = 1/6. P (sacar múltiplo 2) = 3/6.
Combinatoria	Utiliza a combinatoria (combinacións, variacións, variacións con repetición...) para contar ben os casos favorables e os posibles.	A probabilidade de ter póker nunha baralla francesa é: $P(póker)=\frac{13\cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en árbore	Problemas moi difíciles que podes resolver representando un diagrama en árbore.	
Suceso contrario	O suceso contrario de S (S^c) verifícase se non se verifica S. $P(S^C) = 1 - P(S)$.	Suceso contrario de sacar par é: {1, 3, 5} = 1 – 3/6 = 1/2.
Sucesos independentes	Dous sucesos son independentes se a probabilidade de que se verifique un, non queda afectada por que se teña verificado o outro.	A probabilidade de sacar un 3 ao tirar un dado e volver tiralo.
Intersección de sucesos	Se A e B son independentes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En xeral $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.	Nunha baralla española a probabilidade de sacar dous ases é (4/40) · (3/39).
Probabilidade condicionada	$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$	Probabilidade de sacar un as tendo xa sacado outro as sen substitución é 3/39.
Unión de sucesos	Se A e B son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. En xeral $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.	Nunha baralla española a probabilidade de sacar un as ou ben un ouro é: (4/40) + (10/49) – (1/40) = 13/40.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

1. Nunha clase hai 15 mozos e 18 mozas. Como non se presenta ninguén para ser delegado faise un sorteo. Cal é a probabilidade de que na clase haxa delegada?

2. No moedeiro temos 8 moedas de 1 céntimo, 3 moedas de 5 céntimos, 8 moedas de 10 céntimos e 5 moedas de 50 céntimos. Sacamos unha moeda ao chou, cal é a probabilidade de que a cantidade obtida sexa un número par de céntimos?



3. Nunha caixa temos mesturados 50 cravos de 2 cm de longo, 30 cravos de 3 cm, 35 cravos de 2.5 cm e 60 cravos de 3.5 cm. Sacamos ao chou un cravo da caixa (asúmese que todos os cravos teñen a mesma probabilidade de ser elixidos). Que probabilidade hai de que o cravo extraído teña a menor lonxitude?

4. Nun instituto de mil estudantes hai 700 que falan inglés, 400 que falan francés, 50 que falan alemán, 200 que falan inglés e francés, 30 que falan inglés e alemán, 10 que falan francés e alemán e 5 que falan os tres idiomas. Elíxese un estudante ao chou. Cal é a probabilidade de que fale soamente unha lingua estranxeira?

5. A ruleta francesa consta dos números que van do 0 ao 36. Se sae 0 gaña a banca. Decidimos apostar a "*par*" (gañaremos se sae un número par non nulo). Que probabilidade temos de gañar á aposta? E se apostamos a 7? E se apostamos a un número impar?

6. Unha bolsa contén 7 bólas brancas, 5 bólas vermellas e 3 bólas negras. Extráense dúas bólas ao mesmo tempo. Cal é a probabilidade de que sexan unha branca e unha negra?

7. Unha bolsa contén 10 bólas brancas, 9 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que tras a segunda extracción teñamos unha bóla branca e unha bóla negra?

8. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Despois sácase unha segunda bóla, sen volver meter na bolsa a primeira. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?

9. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que a primeira bóla sexa branca e a segunda negra?

10. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído a bóla negra?

11. Unha bolsa contén 15 bólas brancas, 4 bólas vermellas e unha bóla negra. Extráese unha bóla da bolsa. Tras mirar de que cor é, introdúcese na bolsa de novo. Sácase unha segunda bóla. Cal é a probabilidade de que as dúas veces teña saído unha bóla branca?

12. Na lotería primitiva unha aposta consiste en marcar 6 casas de entre 49 posibles. O día do sorteo extráense 6 bólas (de entre 49). Cal é a probabilidade de que a túa aposta coincida coa combinación gañadora? Cal é a probabilidade de que acertes un número? E a de que acertes 2 números?

13. Repártense ao chou 5 cartas dunha baralla española. Cal é a probabilidade de que teñas 4 cartas do mesmo número?

14. Nunha xogada repártense 5 cartas. Cal é a probabilidade de conseguir tres ases e dous reis? Cal é a probabilidade de ter tres cartas iguais? E unha parella? E de ter tres cartas iguais e as outras dúas tamén iguais entre si?

15. Nunha xogada repártense 5 cartas. Chámase *escaleira de cor* unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau ordenadas consecutivamente. Calcula a probabilidade de obter unha escaleira de cor de trevos.

16. Nunha xogada repártense 5 cartas. Chámase *cor* unha xogada composta por 5 cartas do mesmo pau que non son consecutivas. Calcula a probabilidade de obter *cor* de trevos.

17. Considera o experimento aleatorio "mesturar unha baralla, cortar e mirar a cor das dúas cartas que quedaron arriba". Cal é a probabilidade de que ambas as dúas teñan a mesma cor?

18. Temos unha caixa con 12 bólas vermellas e 8 bólas brancas. Sácase unha bóla ao chou. Se é branca vólvese meter na caixa. Se é vermella déixase fóra. Nestas condicións sácase outra bóla da caixa. Que probabilidade hai de que esta bóla sexa vermella?

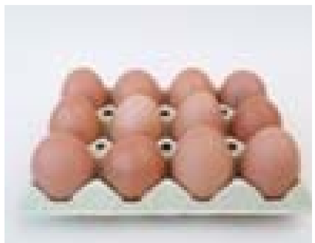
19. Nun caixón temos 10 calcetíns: 6 negros e 4 brancos. Sacamos, sen mirar, dous calcetíns do caixón. Que é máis probable, que sexan ambos da mesma cor ou que sexan de cores distintas?

20. Elabora unha árbore de probabilidades para calcular a probabilidade de obter *dobre parella* de ases e de treses nunha xogada de 5 cartas de póker. (*Dobre parella* consiste en 2 pares de cartas do mesmo valor, diferentes entre si, e unha carta indiferente, de valor distinto aos dous anteriores. Por exemplo, AA 33 Q).

21. No moedeiro teño 7 moedas dun céntimo, 4 de 5 céntimos, 6 de 10 céntimos, 5 de 20 e 7 de 50 céntimos. Saco 3 moedas ao chou. Cal é a probabilidade de que obteña un número impar de céntimos?

22. O 60 % dunha determinada poboación fuma, o 30 % é hipertenso, e o 12 % fuma e é hipertenso. Utiliza estas frecuencias para obter probabilidades e determina se ser hipertenso é dependente ou independente de fumar. Cal é a probabilidade condicionada de que unha persoa fumadora sexa hipertensa?

23. Un analista deportivo, que se equivoca o 10 % das veces, dixo que o noso equipo favorito vai gañar a liga. O analista da competencia, que se equivoca o 20 % das veces, dixo que o noso equipo favorito non vai gañar a liga. Á vista destas análises. Que probabilidade hai de que o noso equipo gañe a liga?



24. Unha compañía de produtos avícolas empaqueta ducias de ovos en tres lugares diferentes. O 60 % da produción ten lugar na planta A, o 30 % en B e o resto en C. Un control de calidade dinos que un 5 % dos paquetes elaborados en A, un 7 % dos de B e un 10 % dos de C conteñen algún ovo roto. Que probabilidade hai de que nos toque unha ducia de ovos con algún ovo roto?

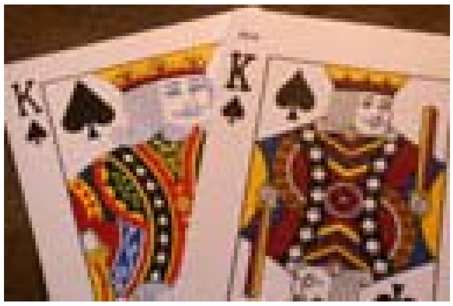
25. Nun caixón teño un par de calcetíns vermellos, un par de calcetíns negros e un par de calcetíns brancos. Ao facer a maleta, coas présas, collo 3 calcetíns sen mirar. Que probabilidade teño de ter collido 2 da mesma cor?

26. Faise un estudo de consumo nunha poboación. Descóbrese que ao 70 % das persoas ás que lles gusta a marmelada de laranxa tamén lles gusta a de grosella e que ao 80% das persoas ás que lles gusta a marmelada de grosella tamén lles gusta a de laranxa. Ao 40 % desa poboación non lle gusta nin a marmelada de laranxa nin a de grosella. Elíxese ao chou unha persoa desa poboación. Cal é a probabilidade de que lle gusten ambas as marmeladas?

27. Na lotería primitiva apóstanse 6 números de entre 49. Xogando a dúas apostas, cal é a probabilidade de que che toque un premio de 5 acertos máis complementario?

28. Nun instituto hai Bacharelato e Formación Profesional. En Bacharelato estudan 1/3 dos estudantes e o resto faino en Formación Profesional. A cuarta parte dos estudantes de Bacharelato e a sexta parte dos Formación Profesional utiliza un medio de transporte para ir ao instituto. O resto chega camiñando. Elíxese ao chou un estudante dese instituto. Que probabilidade hai de que vaia á clase utilizando un medio de transporte?

29. Un tafur xoga cunha baralla trucada de 40 cartas. Saca unha carta, míraa, volve metela na baralla e mestura. Repite este procedemento outras 2 veces máis. A baralla está preparada de tal modo que o feito de que unha das tres cartas vistas sexa unha figura ten unha probabilidade de 19/27. Cantas figuras ten a súa baralla?



30. Unha bolsa contén 10 bólas vermellas e 5 bólas negras. Extráese ao chou unha delas e substitúese por dúas da outra cor. Tras isto extráese unha segunda bóla. Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa negra? Que probabilidade hai de que a segunda bóla sexa da mesma cor que a primeira?

31. No comedor escolar a probabilidade de que non haxa patacas unha semana é 2/5; a probabilidade de que haxa peixe é 2/5 e a probabilidade de que haxa patacas e peixe é 1/10. Calcula a probabilidade de que non haxa nin patacas nin peixe. Calcula a probabilidade de que non haxa peixe sabendo que houbo patacas.

32. Nunha clase hai 20 alumnos e 10 alumnas. Fórmanse equipos de traballo de 6 persoas. Calcula a probabilidade de formar un equipo: a) con unicamente mozas, b) con 3 mozas, c) con unicamente mozos, d) con polo menos 3 mozas.

33. Aínda que pareza unha casualidade, por ter o ano 365 días, é moi probable que nunha clase de 35 alumnos haxa dous que celebren o seu aniversario o mesmo día. Calcula esta probabilidade. O mesmo se a clase ten 20 estudantes.

34. Utiliza a táboa para obter unha táboa de continxencia sobre os accidentes de tráfico:

	En estrada (C)	**En zona urbana (U)**	**Total**
Con vítimas (V)	34 092	32 295	66 387
Só danos materiais (D)	11 712	20 791	32 503
Total	45 804	53 086	98 890

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); $P(V \cap C)$; $P(D \cap U)$; P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Sábese que houbo un accidente na estrada, cal é a probabilidade de que tivese vítimas? Son independentes os sucesos do accidente con vítimas e accidente na estrada?

35. Realízanse estudos sobre unha determinada enfermidade e coñécese que a probabilidade de que unha persoa a teña é de 0.04. Unha determinada proba detecta se unha persoa está enferma cunha probabilidade de 0.97 pero tamén cualifica como enferma, en ocasións, a unha persoa sa cunha probabilidade de 0.01. Representa esta situación nun diagrama en árbore. Constrúe a táboa de continxencia asociada. Calcula a probabilidade de que unha persoa sa sexa detectada como enferma.

36. No control de calidade dun proceso de fabricación sábese que a probabilidade de que un circuíto sexa defectuoso é 0.02. Un dispositivo para detectar os defectuosos ten unha probabilidade de detectalos de 0.9 pero tamén cualifica como defectuosos a 0.03 dos correctos. Representa esta situación nun diagrama en árbore. Constrúe a táboa de continxencia asociada. Calcula a probabilidade de que un circuíto defectuoso sexa cualificado como correcto.

37. Nunha clase hai 25 alumnas e 15 alumnos e sábese que o 80 % das alumnas aproban as matemáticas mentres que as aproban o 60 % dos alumnos. Utiliza estas porcentaxes para asignar probabilidades e calcula a probabilidade que hai ao elixir unha persoa da clase ao chou de que:

a) Sexa alumna e aprobe as matemáticas.

b) Sexa alumna ou aprobe as matemáticas.

c) Sexa alumno e suspenda matemáticas.

d) Teña aprobado as matemáticas.

38. Estúdanse as familias de tres fillos. Para simplificar facemos a hipótese de que a probabilidade de mozo sexa igual á de moza. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

a) A = O primeiro fillo é moza.

b) B = polo menos hai un home.

c) $A \cup B$.

d) $A \cap B$.

39. Nunha bolsa hai 3 bólas verdes, 4 bólas vermellas e unha bóla branca. Sacamos dúas bólas da bolsa. Calcula a probabilidade dos sucesos: A = "algunha das bólas é verde", B = "saíu a bóla branca". Calcula tamén: $P(A^c)$, $P(B^c)$, $P(A \cup B)$ e $P(A^c \cap B)$. Son A e B sucesos incompatibles? Son sucesos independentes?

40. Dados os sucesos A e B de probabilidades: $P(A^c) = 3/5$; $P(A \cap B) = 1/8$; $P(B \cup A) = 3/4$; calcula as seguintes probabilidades: P(A); P(B); $P(B^c)$; $P(B/A^c)$; $P(A^c \cap B^c)$; P(A/B). Son A e B sucesos independentes?

41. Determina se son compatibles ou incompatibles os sucesos A e B tales que:

a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$;

b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;

42. Dados os sucesos A e B de probabilidades: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula as seguintes probabilidades: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. Son A e B sucesos independentes?

43. Dous tiradores ao prato teñen unhas marcas xa coñecidas. O primeiro acerta cunha probabilidade de 0.8 e o segundo de 0.6. Lánzase un prato e ambos os dous disparan. Expresa mediante un diagrama de árbore e a táboa de continxencia asociada as distintas posibilidades. Calcula: a) Que probabilidade hai de que, polo menos, un dos tiradores dea no prato? b) Probabilidade de que ningún acerte? c) Sabemos que o disparo acertou no branco, cal é a probabilidade de que o fixera o primeiro tirador?

44. Disponse de dos urnas A e B. A urna A ten 7 bólas verdes e 3 amarelas. A urna B ten 5 bólas verdes e 7 amarelas. Sácase unha bóla ao chou dunha das dúas urnas, tamén ao chou, e resulta ser amarela. Calcula a probabilidade de que sexa da urna B. (*Axuda*: Representa as posibilidades mediante un diagrama en árbore, escribe a táboa de continxencia asociada e o outro diagrama en árbore).

45. Sábese que, en certa poboación, a probabilidade de ser home e daltónico é un décimo e a probabilidade de ser muller e daltónica é 1/20. A proporción de persoas de ambos os sexos é a mesma. Elíxese unha persoa ao chou.

a) Calcular a probabilidade de que non sexa daltónico.

b) Se a persoa elixida é muller, calcular a probabilidade de que sexa daltónica.

c) Cal é a probabilidade de que a persoa elixida padeza daltonismo?

46. En certo instituto ofrécese informática e teatro como asignaturas optativas. O grupo A consta de 35 estudantes e o B ten 30 estudantes. O 60% do grupo A elixiu teatro, así como o 40 % do grupo B e o resto elixiu informática.

a) Se se pregunta a un estudante elixido ao chou, calcular a probabilidade de que teña elixido informática.

b) Se un estudante elixiu teatro, calcula a probabilidade de que pertenza ao grupo B.

47. Nunha baralla española de corenta cartas elimináronse varias cartas. Sábese que a probabilidade de extraer un as entre as que quedan é 0.1, a probabilidade de que saia unha copa é 0.3 e a probabilidade de que non sexa nin as nin copa é 0.6.

a) Calcular a probabilidade de que a carta extraída sexa as ou copa.

b) Calcular a probabilidade de que a carta sexa o as de copas. Pódese afirmar que entre as cartas que non se eliminaron está o as de copas?

48. Nunha cidade na que hai dobre número de homes que de mulleres, hai unha epidemia. O 10% dos homes e o 5 % das mulleres están enfermos. Elíxese ao chou un individuo. Calcular a probabilidade de:

a) Que sexa home.
b) Que estea enfermo.
c) Que sexa home, sabendo que está enfermo.

AUTOAVALIACIÓN

1. Nunha bolsa hai 6 bólas negras e 3 bólas brancas, a probabilidade de sacar unha bóla negra é:

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

2. Indica cal dos seguintes experimentos non é un experimento aleatorio:

a) Tirar un xiz e anotar o número de anacos nos que rompe.

b) Tirar un dado trucado e anotar o número da cara superior.

c) Cruzar unha rúa e estudar se hai un atropelo.

d) Calcular o consumo de gasolina dun coche.

3. O espazo dunha mostra de tirar 3 moedas ao aire e anotar se caen en cara (C) ou en cruz (X) con sucesos elementais equiprobables é:

a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}

c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

4. O suceso contrario a sacar polo menos unha cara no experimento anterior é:

a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC} d) {CCC, CCX, CXC, XCC}

5. Indica cal dos seguintes sucesos non son independentes:

a) Sacar un ouro e sacar un rei con substitución.

b) Tirar unha moeda e sacar cara e volver tirala e volver sacar cara.

c) Tirar un dado e sacar 6 e volver tiralo e volver sacar 6.

d) Tirar un dado e sacar un múltiplo de 2, e sacar un 6.

6. A probabilidade de non sacar un as nunha baralla de póker é:

a) 4/52 b) 48/52 c) 36/40 d) 1 – 36/40

7. A probabilidade de que a suma das caras superiores sexa 7 do experimento tirar dous dados é:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

8. Nunha bolsa hai 7 bólas vermellas e 4 brancas. Sácase unha bóla ao chou e se é branca vólvese meter na bolsa, mentres que se é vermella déixase fóra. Sácase outra bóla da bolsa, a probabilidade de que sexa vermella é:

a) 42/110 b) 28/121 c) 371/605 d) 411/605

9. Nunha bolsa hai 4 bólas vermellas e 3 brancas. Sacamos sen mirar dúas bólas. A probabilidade de que sexan da mesma cor é:

a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7

10. Ao lanzar un dado saíu un número par, a probabilidade de que sexa un 6 é P (sacar 6/ a par):

a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6

CUARTO B DE ESO

ÍNDICE

NÚMEROS. ÁLXEBRA

XEOMETRÍA

FUNCIÓNS E ESTATÍSTICA

ÍNDICE