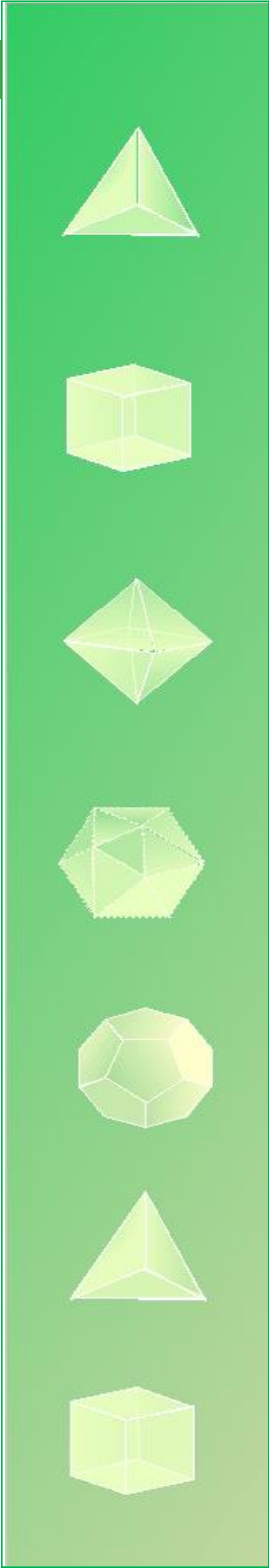


# Actividades para el aula con calculadora

# 1º BACHILLERATO



www.apuntesmareaverde.org.es



**Realizados por: FESPM**

**Recopilados por: Luis Carlos Vidal del Campo**

**IES ATENEA, CIUDAD REAL**

**Todos los ejercicios que se presentan a continuación han sido recopilados de la página de "RECURSOS DIDÁCTICOS" de la web de CASIO:**

**https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/**

**Concretamente del apartado "Actividades para el aula":**

**https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16**

**En la página se pueden encontrar más ejercicios.**

# ÁLGEBRA



www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16



**Realizados por: FESPM**

**Recopilados por: Luis Carlos Vidal Del Campo**

**IES ATENEA, CIUDAD REAL**

# Resolución de circuitos eléctricos de corriente alterna mediante el uso de números complejos.

Marià Cano Santos
Profesor de Matemáticas del IES Institut Sòl-de-Riu de Alcanar

La actividad propuesta corresponde a un ejemplo de resolución de circuitos eléctricos de corriente alterna que fue planteado en las Pruebas de Acceso a la Universidad convocadas en Andalucía durante el curso 2014-15 para la materia de Electrotecnia. En la realización de la prueba no se permitía el uso de calculadoras programables, gráficas o con capacidad para transmitir o almacenar datos, pero sí podían utilizarse los modelos ClassWiz fx-570/991 SP X II, que tienen integrado el cálculo de operaciones aritméticas básicas con números complejos.

Con un electrogenerador rotativo como los que existen en las centrales hidroeléctricas, o en una simple dinamo de bicicleta, se pueden producir **señales de tensión alterna**. Se trata de señales senoidales en el tiempo de tipo periódico cuya expresión algebraica es de la forma:

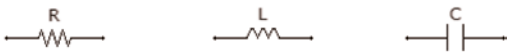
$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

siendo $V_0$ la amplitud de tensión máxima, $\omega$ la frecuencia angular de la señal y $\varphi$ el desfase.

La tensión alterna puede representarse utilizando la interpretación geométrica de los números complejos de Wessel y Argand, así como la notación de Euler, como un valor numérico complejo $V$ de la forma:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi) + V_0 \sin(\omega t + \varphi) j = V_0 \cdot e^{(\omega t + \varphi)j}$$

Los elementos básicos que pueden estar conectados en un circuito con tensión alterna son: **resistencias (R)**, **bobinas (L)**, y **condensadores (C)**. Las resistencias actúan como disipadores puros de energía en forma de calor (efecto Joule eléctrico); las bobinas, como reguladores temporales de inducción de señal, y los condensadores, como depósitos de carga eléctrica. En un circuito estos elementos se representan mediante la siguiente simbología gráfica:




La **impedancia Z** es una magnitud compleja que se relaciona con la oposición que muestra un dispositivo al paso de la corriente eléctrica. Se define como:

$$Z = Xe^{\varphi j}$$

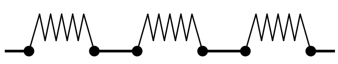
Se pueden definir los siguientes valores de impedancia para los elementos básicos de un circuito eléctrico:

$$Z_R = X_R e^{0 \cdot j} \qquad Z_L = X_L e^{\frac{\pi}{2} \cdot j} \qquad Z_C = X_C e^{-\frac{\pi}{2} \cdot j}$$

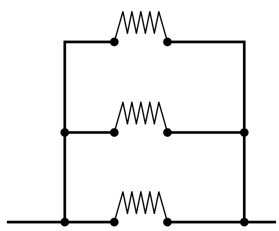
Las magnitudes $X_R$, $X_L$ y $X_C$ se denominan, respectivamente, **resistencia**, **inductancia** y **capacitancia**. Dada la tensión alterna en la forma compleja $V = V_0 \cdot e^{\omega t j}$, se puede escribir la **ley de Ohm generalizad**a como una  elegante expresión en forma de división compleja:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 \cdot e^{\omega t j}}{X \cdot e^{\omega j}} = \frac{V_0}{X} \cdot e^{\omega t - \varphi}$$

La **ley de Ohm generalizada** tiene además otra virtud, y es que mantiene igualmente válidas las leyes de asociaciones de resistencias puras en serie y paralelo de los circuitos de corriente continua, pero ahora con impedancias (resistencias complejas):



$$Z_{\text{serie}} = \sum_k Z_k$$



$$\frac{1}{Z_{\text{paralelo}}} = \sum_k \frac{1}{Z_k}$$

## PROBLEMA

Una carga RLC en serie se conecta a un generador de corriente alterna de 50 Hz. Se mide con un polímetro la tensión de cada uno de los elementos considerados ideales, ofreciendo en la resistencia una lectura de 4 V, en la bobina de 16 V y en el condensador de 25 V. También se mide la intensidad de corriente, siendo su valor de 2 A.

**a)** Determine los valores de la resistencia, el coeficiente de autoinducción de la bobina y la capacidad del condensador.

**b)** Calcule la tensión del generador.

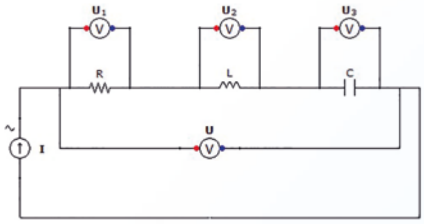
**c)** Obtenga el factor de potencia de la carga RLC.

**d)** ¿Qué condensador es necesario conectar en paralelo al que ya hay en el circuito para que se produzca resonancia?

## SOLUCIÓN

### a

El esquema de conexión del circuito al que se refiere el enunciado del problema es el siguiente:




Como se observa, los tres elementos están conectados en serie, por lo que la intensidad que circula por cada uno de ellos es la misma, e igual a la intensidad que circula por el circuito. Es decir:

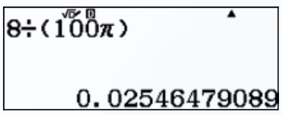
$$I = I_R = I_L = I_C = 2 \cdot e^{0j}$$

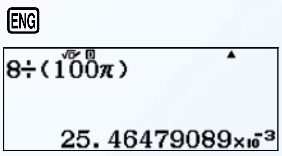
Para cada elemento del circuito se verifica que $Z_k = V_k/I_k$, por lo tanto, puede deducirse que:

$$R = \frac{4}{2} = 2\ \Omega,\ X_L = \frac{16}{2} = 8\ \Omega,\ X_C = \frac{25}{2} = 12{,}5\ \Omega$$

Puesto que la frecuencia de la señal es de 50 Hz, se tiene que $\omega = 2\pi f = 100\pi$, con lo cual, la inductancia resulta:

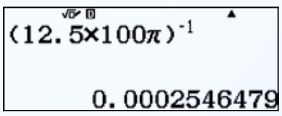
$$L = X_L/\omega = 8/100\pi \cong 0{,}0255\ \text{H} = 25{,}5 \cdot 10^{-3}\text{H} = 25{,}5\ \text{mH}$$

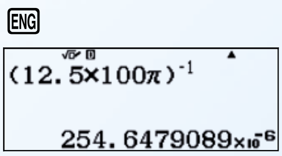



En cuanto a la capacitancia, resulta:

$$C = 1/X_C\omega = 1\ 12{,}5 \cdot 100\pi \cong 0{,}000255\ \text{F} = 0{,}255 \cdot 10^{-3}\text{F} = 0{,}255\ \text{mF} = 255\ \mu\text{F}$$



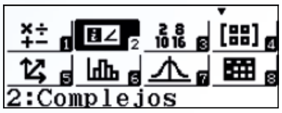
b

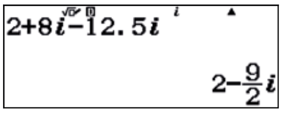
A partir de los valores de cada impedancia puede calcularse la impedancia total del circuito en serie:

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 = 2 \cdot e^{0j} + 8 \cdot e^{\frac{\pi}{2}j} + 12{,}5 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}j}$$

Puesto que se va a efectuar una suma, pueden expresarse los números complejos anteriores en forma rectangular:

$$Z = 2 \cdot (1 + 0j) + 8 \cdot (0 + j) + 12{,}5 \cdot (0 - j) = 2 - 4{,}5j$$



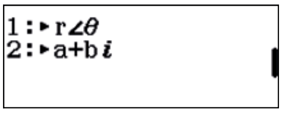


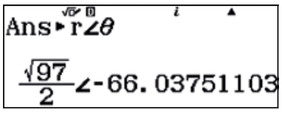

A partir de la Ley de Ohm se calcula la tensión total en el circuito:

$$V = I \cdot Z = 2 \cdot e^{\theta j} \cdot (2 - 4{,}5j)$$

Como se trata de una multiplicación compleja, se adopta la expresión polar:

OPTN ▼ 1






Es decir, la impedancia total viene dada en forma polar como:

$$Z = (2 - 4{,}5j) \cong \frac{\sqrt{97}}{2} \cdot e^{-66{,}04^\circ j}$$

En consecuencia, la tensión resulta:

$$V = I \cdot Z \cong 2 \cdot e^{\theta j} \cdot \frac{\sqrt{97}}{2} \cdot e^{-66{,}04^\circ j} = \sqrt{97}\, e^{(\theta - 66{,}04^\circ)j} \cong 9{,}85 \cdot e^{(\theta - 66{,}04^\circ)j}\ \mathrm{V}$$

Se puede asumir que la fuente de alimentación de corriente alterna tiene una fase inicial de 0, con lo cual, $\theta = \omega \cdot t = 100\pi \cdot t$ y:

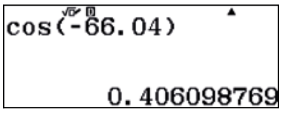
$$V(t) = V_0 \sin(\omega t + \varphi) \cong 9{,}85 \cdot \sin\left(100\pi t - \frac{66{,}04}{180}\pi\right)\ \mathrm{V}$$

Por lo tanto, el valor nominal de tensión en el circuito será del orden de 9,85 V.

c

Del resultado anterior se deduce directamente que el desfase entre tensión y corriente viene dado por: $\varphi \cong -66{,}04^\circ = \frac{66{,}04}{180}\pi$ rad. Con lo cual, el factor de potencia del conjunto RLC es:

$$\cos(\varphi) \cong \cos(-66{,}04^\circ) \cong 0{,}41$$




d

Se dice que el circuito entra en resonancia cuando el factor de potencia es máximo, es decir, cuando $\cos(\varphi) = 1$, lo que significa que la diferencia de fase entre la señal de intensidad y de voltaje es nula. Cabe recordar que la intensidad y el voltaje se relacionan mediante la ley de Ohm según la expresión $V = I \cdot Z$, de lo que se deduce que la diferencia de fases viene determinada exclusivamente por la impedancia del circuito. Para que el circuito entre en resonancia hay que conectar un nuevo elemento al circuito de forma que la impedancia total tenga argumento nulo. Ello se consigue conectando un segundo condensador en paralelo al condensador inicial, tal como muestra la figura:


La nueva impedancia total del circuito se obtiene a partir de la ley de asociación en paralelo:

$$Z = R \cdot e^{0j} + X_L \cdot e^{\frac{\pi}{2}j} + Z_C$$

Donde $Z_C$ resulta de la asociación en paralelo de los dos condensadores:

$$Z_C = \left(\frac{1}{Z_{C_1}} + \frac{1}{Z_{C_2}}\right)^{-1}$$

Siendo $Z_{C_1} = X_{C_1} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}j} = \frac{-1}{C_1\omega}j$ y $Z_{C_2} = X_{C_2} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}j} = \frac{-1}{C_2\omega}j$, así pues:

$$\frac{1}{Z_C} = (C_1\omega + C_2\omega)\,j \Rightarrow Z_C = \frac{-1}{(C_1\omega + C_2\omega)}j = \frac{-1}{(C_1\omega + C_2\omega)}\,e^{-\frac{\pi}{2}j}$$

Por lo que la impedancia total del circuito se expresa como:

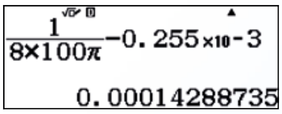
$$Z = R \cdot e^{0j} + X_L \cdot e^{\frac{\pi}{2}j} + Z_C = R + L\omega j - \frac{1}{(C_1\omega + C_2\omega)}$$

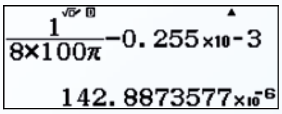
Puesto que el argumento de un número complejo cualquiera $a + bj$ viene dado por $\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}$, puede afirmarse que el argumento es nulo cuando la parte imaginaria es nula, es decir, cuando se cumple que:

$$L\omega - \frac{-1}{(C_1\omega + C_2\omega)} = 0 \Rightarrow (C_1 + C_2)\omega = \frac{1}{L\omega} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{L\omega^2} - C_1$$

Sustituyendo en la igualdad anterior los valores de $L$, $\omega$ y $C_1$ se obtiene que es necesario conectar un condensador con una capacidad de:

$$C_2 \cong \frac{1}{\frac{8}{100\pi} \cdot 100\pi \cdot 100\pi} - 0{,}255 \cdot 10^{-3} \cong 143\ \mu\text{F}$$



# La división de secretos

Antonio Miguel Alonso Fumero
San Cristóbal de La Laguna (Tenerife)

Con este problema se enfoca de manera diferente el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones, incluyendo aplicaciones que pueden despertar la curiosidad del alumnado.

En determinadas ocasiones es preferible que una información secreta no esté en manos de una sola persona y que sean varias las que tengan una parte de dicha información. De esta manera, el mensaje inicial completo se recupera si se juntan un número mínimo de estas personas.

El primer artículo sobre este tema fue publicado en 1 976 por A. Shamir, un criptógrafo muy conocido. En su artículo, Shamir propone el uso de polinomios para llevar a cabo un esquema umbral para el reparto de un número secreto.

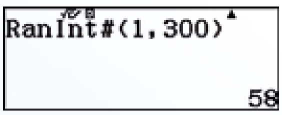
Por ejemplo, el jefe de un proyecto informático no quiere que ninguno de sus programadores disponga de la clave maestra del software que están desarrollando. Por ese motivo, decide repartir entre cinco de sus programadores, parte de la información, de manera que para conseguir la clave maestra tengan que juntarse al menos tres de esos cinco programadores. Esta idea se conoce como esquema umbral (5,3).

Vamos a imaginar que la clave maestra secreta sea $c$ = 26 481. El jefe del proyecto, elegirá entonces dos números aleatorios que designaremos como $a$ y $b$, con los que podrá construir el polinomio de segundo grado:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Vamos a elegir, por ejemplo, $a$ = 58 y $b$ = 212, utilizando la función aleatoria de la calculadora:

ALPHA · 1 SHIFT ) 3 0 0 ) =




=

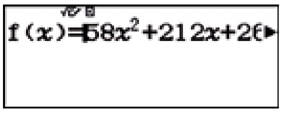
Con esos coeficientes, podemos entonces expresar el polinomio así:

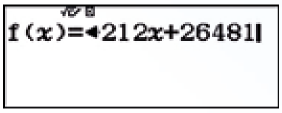
$$P(x) = 58x^2 + 212x + c$$

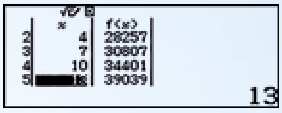
Donde $c$ es la clave maestra secreta.

Usando la función tabla de la calculadora, calculamos 5 puntos del polinomio:

[MENU] [9] [5] [8] [$x$] [$x^2$] [+] [2] [1] [2] [$x$] [+] [2] [6] [4] [8] [1] [=] [=] [▼] [1] [3] [=] [3] [=] [=]








Los puntos: (1, 26 751), (4, 28 257), (7, 30 807), (10, 34 401), (13, 39 039) se suelen denominar "sombras" en los esquemas de división de secretos. Y solamente cuando se reúnan al menos tres, se podrán tener datos suficientes para calcular el polinomio y, consecuentemente, descubrir la clave maestra, que es el término independiente del polinomio: $c = P(0)$ .

## PROBLEMA

El director de un museo tiene la clave de la caja fuerte donde se guardan varios tesoros de valor incalculable. Quiere compartir esa responsabilidad dividiendo el secreto de dicha clave entre sus cinco empleados de máxima confianza. Usando el esquema de Shamir, calcula las "sombras" que se deben entregar a esos cinco empleados para que sea necesario como mínimo reunir a cuatro de ellos para poder obtener la clave de la caja fuerte. Para ello, deberás inventar una clave, digamos de seis dígitos, y los coeficientes para el correspondiente polinomio. Utiliza la calculadora para el cálculo de las "sombras". Posteriormente, demuestra que se puede reconstruir la clave juntando a los empleados 2, 3, 4 y 5. Explica los diferentes pasos que vayas dando para la resolución de la actividad.

## SOLUCIÓN

1

Para generar una clave de seis dígitos podemos usar la calculadora (RanInt):

[ALPHA] [·] [1] [SHIFT] [)] [9] [9] [9] [9] [9] [9] [=]


Por tanto, escogemos como clave el número 563 708.

2

De la misma forma "inventamos" los coeficientes del polinomio, que será de tercer grado:

[ALPHA] [·] [1] [SHIFT] [)] [9] [9] [=]

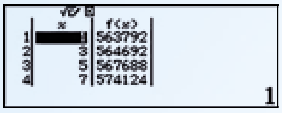
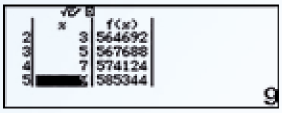

Entonces, el polinomio será:

$P(x) = 28x^3 + 10x^2 + 46x + 563\ 708$

## 3

Calculamos ahora las "sombras", es decir el valor del polinomio en 5 puntos diferentes, por ejemplo, para $x = \{1,3,5,7,9\}$:

[MENU] [9] [2] [8] [$x$] [SHIFT] [$x^2$] [+] [1] [0] [$x$] [$x^2$] [+] [4] [6] [$x$]
[+] [5] [6] [3] [7] [0] [8] [=] [=] [1] [=] [9] [=] [2] [=] [=]

Las "sombras" son:

1: (1, 563 792)
2: (3, 564 692)
3: (5, 567 688)
4: (7, 574 124)
5: (9, 585 344)

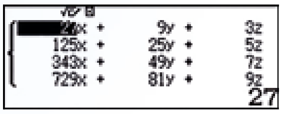
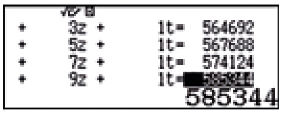
## 4

Ahora demostraremos que juntando las "sombras" 2, 3, 4 y 5 se puede obtener la clave. Para ello habrá que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

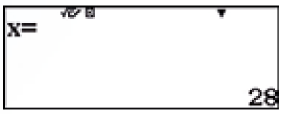
$$\begin{cases} 27x + 9y + 3z + t = 564\,692 \\ 125x + 25y + 5z + t = 567\,688 \\ 343x + 49y + 7z + t = 574\,124 \\ 729x + 81y + 9z + t = 585\,344 \end{cases}$$

Donde $t$ será la clave que queremos encontrar.

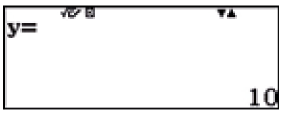
Entramos en el *Menú A: Ecuación/Func*, escogemos sistemas de ecuaciones, seleccionamos 4 incógnitas e introducimos nuestros datos:

[=]

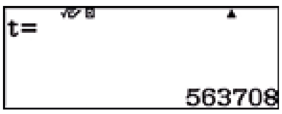



[=]




[=]


[=]




Y como se ha visto, el valor obtenido de $t$ coincide con la clave, como se quería demostrar:

Clave = 563 708 = $t$

Es decir, que se ha podido hallar la clave a partir de las cuatro "sombras", según nos indicaba el esquema de Shamir.

# 08 | Regularidades numéricas
## Números poligonales y números piramidales

Una sucesión $\{a_n\}n\in\mathrm{N}$ es **polinomial de grado $n$** cuando el término general de dicha sucesión es un polinomio de grado $n$.

- Las progresiones aritméticas son sucesiones polinomiales de grado 1.
- La sucesión de término general $a_n = n^2 + 1$ es polinomial de grado 2.

Una sucesión $\{a_n\}n\in\mathrm{N}$ es una **progresión aritmética** de orden $k$ si la sucesión que se obtiene al realizar $k$ veces las diferencias sucesivas de sus términos es constante.

Analicemos, por ejemplo, el caso de la sucesión $a_n = n^2 + 1$.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n = n^2 + 1$ | 2 | | 5 | | 10 | | 17 | | 26 |
| Primera diferencia sucesiva | | 3 | | 5 | | 7 | | 9 | |
| Segunda diferencia sucesiva | | | 2 | | 2 | | 2 | | |

Como se observa, la segunda diferencia sucesiva es constante, por lo que se trata de una progresión aritmética de orden 2.

Las sucesiones polinomiales de grado $n$ son progresiones aritméticas de grado $n$.

**1** Comprueba que la sucesión de números triangulares $T_n = \{1, 3, 6, 10, 15, \ldots\}$ es una progresión aritmética de orden superior y encuentra su expresión polinomial.

**2** Utilizando la técnica anterior, halla el término general de los números cuadrados, pentagonales, hexagonales, heptagonales y octogonales.

**3** Fíjate ahora solamente en los coeficientes líderes de los polinomios que has obtenido. ¿Existe alguna relación entre ellos? Responde a esta cuestión analizando el resto de coeficientes.

**4** Ensaya una fórmula para los números decagonales.

**5** Vamos a pensar ahora en 3D. Los números piramidales se obtienen si formamos pirámides con los correspondientes números poligonales, de forma que una pirámide de cuatro alturas y base triangular es la reconstrucción del número 20 = 1 + 3 + 6 + 10, o lo que es lo mismo, la suma de los cuatro primeros números triangulares. Comprueba que la sucesión de los números piramidales triangulares es una sucesión aritmética de orden tres y obtén su término general. Haz lo mismo con la sucesión de números piramidales cuadrados.

# Números poligonales y números piramidales



**MATERIALES**

Calculadora CASIO fx-570/991 SP X II Iberia

**NIVEL EDUCATIVO**

1º de Bachillerato

**ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS**

- Aunque a priori pueda parecer que los sistemas de ecuaciones que se derivan de esta actividad son de tediosa resolución, incluso cuando se usa la calculadora, hay que resaltar el hecho de que los distintos sistemas solo se diferencian entre sí por los términos independientes, por lo que su resolución es solo cuestión de segundos.

- Para resolver los sistemas de ecuaciones que aparecen en la actividad se hará uso del modo *Ecuación/Función*.

## EJEMPLO DE SOLUCIÓN

**1**

En primer lugar, hay que comprobar que la sucesión de los números triangulares es una progresión aritmética de orden superior.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Números triangulares | 1 | | 3 | | 6 | | 10 | | 15 |
| Primera diferencia sucesiva | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
| Segunda diferencia sucesiva | | | 1 | | 1 | | 1 | | |

La segunda diferencia sucesiva es constante, por lo que se trata de una progresión aritmética de orden 2. El término general de dicha sucesión es de la forma: $T_n = an^2 + bn + c$. Para determinar los coeficientes basta con resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

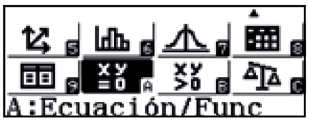
$$\left.\begin{array}{l} T_1 \longrightarrow 1 = a + b + c \\ T_2 \longrightarrow 3 = 4a + 2b + c \\ T_3 \longrightarrow 6 = 9a + 3b + c \end{array}\right\}$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si en lugar de utilizar las incógnitas $a$, $b$ y $c$ se usan las incógnitas $x$, $y$ y $z$, se tiene:

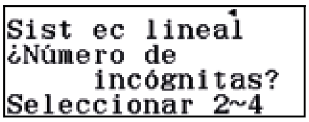
$$\left.\begin{array}{l} 1 = x + y + z \\ 3 = 4x + 2y + z \\ 6 = 9x + 3y + z \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema se accede al menú *Ecuación/Función*, se selecciona la opción *Sistema de ecuaciones lineales* y se indica el número de incógnitas:

MENU (−) 1 3

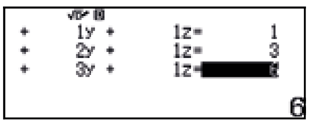


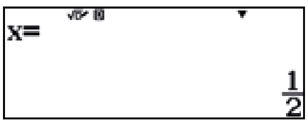


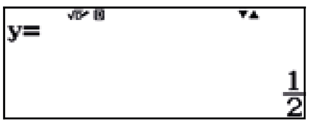


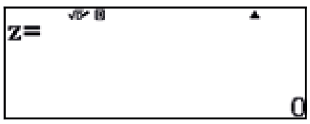

Seguidamente se introduce el sistema y se resuelve:

= = =






En consecuencia, el término general de la sucesión de números triangulares resulta:

$$T_{3,n} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

# Números poligonales y números piramidales

## 2

Para resolver esta actividad se puede recurrir a las tablas que se obtuvieron en la actividad 05 Números poligonales.

| | | | $n$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Lados del polígono ($p$) | 3 | Triangulares | 1 | 3 | 6 | 10 |
| | 4 | Cuadrados | 1 | 4 | 9 | 16 |
| | 5 | Pentagonales | 1 | 5 | 12 | 22 |
| | 6 | Hexagonales | 1 | 6 | 15 | 28 |
| | 7 | Heptagonales | 1 | 7 | 18 | 34 |
| | 8 | Octogonales | 1 | 8 | 21 | 40 |

Se plantea, en cada caso, el sistema de ecuaciones y se resuelve de forma análoga a la actividad 1.

Cuadrados:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=4\\ 9x+3y+z&=9 \end{aligned}\right\}$$

x= $1$    y= $0$    z= $0$

Pentagonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=5\\ 9x+3y+z&=12 \end{aligned}\right\}$$

x= $\frac{3}{2}$    y= $-\frac{1}{2}$    z= $0$

Hexagonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=6\\ 9x+3y+z&=15 \end{aligned}\right\}$$

x= $2$    y= $-1$    z= $0$

Heptagonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=7\\ 9x+3y+z&=18 \end{aligned}\right\}$$

x= $\frac{5}{2}$    y= $-\frac{3}{2}$    z= $0$

Octogonales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ 4x+2y+z&=8\\ 9x+3y+z&=21 \end{aligned}\right\}$$

x= $3$    y= $-2$    z= $0$

## 3

Los coeficientes de los términos generales son:

| | Triangular | Cuadrado | Pentagonal | Hexagonal | Heptagonal | Octogonal | ... | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficiente de $n^2$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{3}{2}$ | 2 | $\frac{5}{2}$ | 3 | | $\frac{p-2}{2}$ |

| | Triangular | Cuadrado | Pentagonal | Hexagonal | Heptagonal | Octogonal | ... | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Coeficiente de $n$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-\frac{3}{2}$ | $-2$ | | $-\frac{p-4}{2}$ |

**4**

El alumnado no debe tener ninguna dificultad en encontrar el término general de la sucesión de números decagonales, es más, llegado el caso y dependiendo de cómo se haya desarrollado la unidad, se puede ensayar una fórmula para el término general de la sucesión de números *p*-agonales.

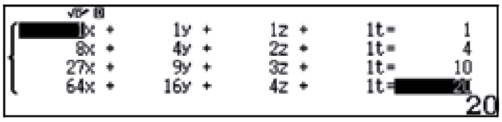
$$T_{p,n} = \frac{p-2}{2} \cdot n^2 - \frac{p-4}{2} \cdot n$$

Que para el caso de $p = 10$ quedaría de la siguiente forma:

$$T_{10,n} = 4n^2 - 3n$$

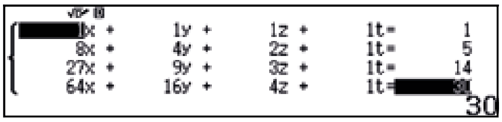
**5**

Para el caso de los números piramidales triangulares, una vez comprobado que se trata de una sucesión aritmética de orden tres, el sistema a resolver es:



, quedando como término general $P_{3,n} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{13}$

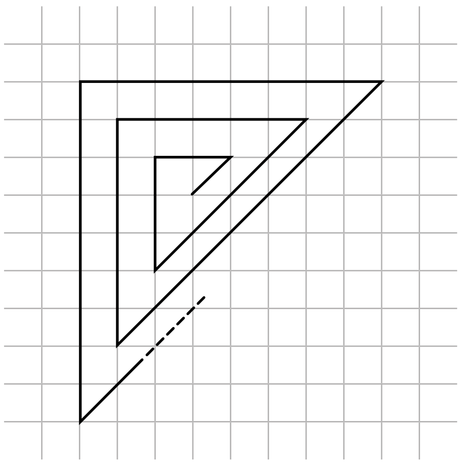
Para el caso de los números piramidales cuadrangulares se obtiene:



, quedando, en este caso, $P_{4,n} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

## Ampliación

**1** En un papel cuadriculado se ha dibujado la siguiente cenefa de 999 segmentos. (Cada cuadrícula mide 5 mm de lado)



**a)** Calcula la longitud de la línea poligonal.

**b)** Calcula la longitud de la línea poligonal con una aproximación a metros.

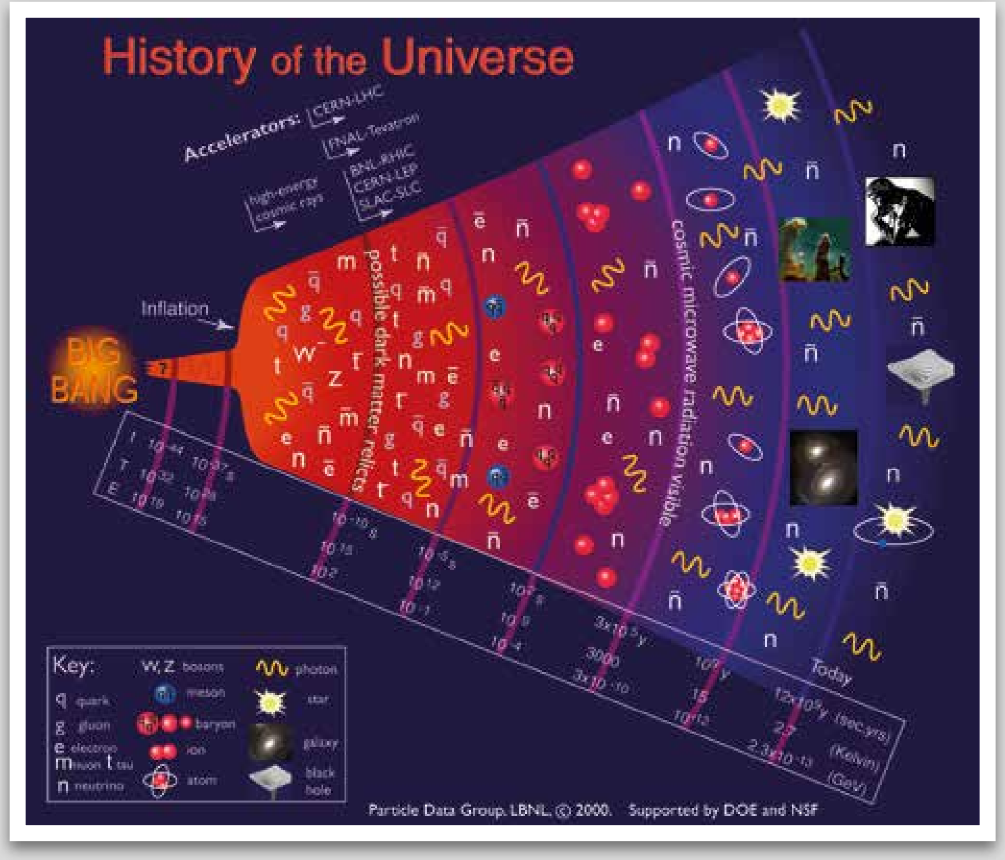
# 14 | Notación científica
# *Back to the BigBang*: el timeline del Universo (I)

El CERN es el centro de investigación física más importante de Europa y uno de los más importantes del mundo. Decenas de premios nobel han usado y usan sus instalaciones. La investigación científica en el CERN hace uso de grandes aceleradores de partículas en los que se generan billones de colisiones, las cuales son analizadas por un complejo sistema informático que filtra, recoge y distribuye los datos.

El mayor de los aceleradores, actualmente en funcionamiento en el laboratorio de física de partículas, es el LHC (Large Hadron Collider). La densidad de energía y la temperatura que se alcanza en el LHC es similar a la que los modelos teóricos predicen que había instantes después del *Big Bang*. Es por ello que los físicos esperan descubrir cómo ha evolucionado el Universo desde su origen hasta su estado actual, analizando los datos que se obtienen del LHC.

Una de las dificultades conceptuales con las que nos encontramos a la hora de entender los estudios de la física de partícula y de la cosmología son los valores ínfimos y/o gigantescos de las escalas temporales y energéticas.

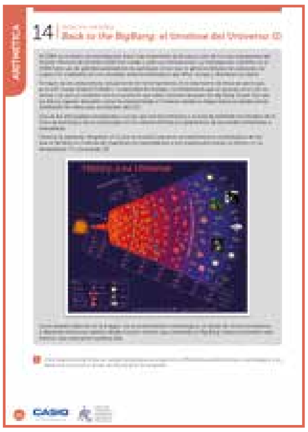
Observa la siguiente infografía, en la que se muestra una serie acontecimientos cosmológicos de los que se facilitan los órdenes de magnitud correspondientes a tres magnitudes físicas: el tiempo ($t$), la temperatura ($T$) y la energía ($E$).




Como puedes observar en la imagen, los acontecimientos cosmológicos se sitúan de forma concéntrica a diferentes distancias radiales desde el punto central, que representa el *Big Bang*, hasta el perímetro más exterior, que representa nuestros días.

**1** ¿Qué relación existe entre los valores temporales asociados a los diferentes acontecimientos cosmológicos y las distancias a las que se sitúan del Big Bang en la infografía?

# 14 | Notación científica
# *Back to the BigBang*: el timeline del Universo (I)



## MATERIALES

Calculadora CASIO fx-82/85/350 SP X II
Hoja de cálculo (Excel Microsoft Office o Calc LibreOffice)
GeoGebra
Recursos on-line y bibliografía complementaria:

- Origen y evolución del Universo: http://www.iac.es/cosmoeduca/universo/charla1.html
- The Scale of the Universe: http://htwins.net/scale2/
- Nanoraisen, aventuras a través de los decimales: http://www.nanoreisen.com/espanol/index.html
- Potencias de 10: https://www.youtube.com/watch?v=9JUpIa4ncWg&feature=youtu.be
- The Scales of the Universe: https://finance.yahoo.com/video/3-minute-animation-change-way-181643354.html
- Linea de tiempo sobre el Universo: https://prezi.com/s3hdurrkr0lp/linea-del-tiempo-sobre-el-origen-del-universo/
- Is that a Big Number: http://www.isthatabignumber.com/home/

## NIVEL EDUCATIVO

3º de ESO, 4º de ESO y 1º Bachillerato

## ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- La actividad puede trabajarse individualmente o en pequeños grupos de estudio. Se recomienda trabajar conjuntamente con la asignatura de Física y Química, puesto que los contenidos de aplicación están directamente relacionados con esta materia. Asimismo, se aconseja acompañar alguna de las sesiones con algunos de los breves vídeos propuestos en la bibliografía complementaria.

- Para la realización de los cálculos propuestos en las actividades es necesario hacer uso del menú de configuración *Formato de número*. Se accede a dicho menú, en la calculadora científica fx-82/85/350 SP X II, mediante:

  [ON] [MENU] [1] [SHIFT] [MENU] [3]

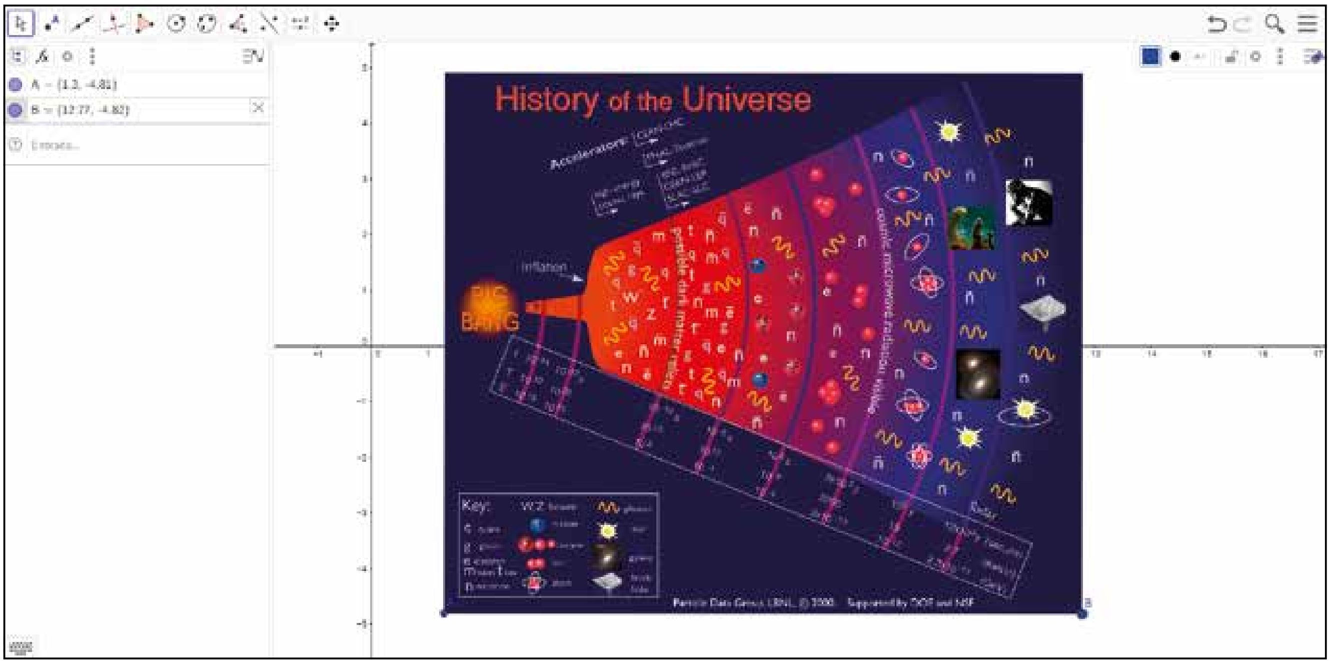
| 1:Entrada/Salida<br>2:Unidad angular<br>3:Formato número<br>4:Símb ingeniería | 1:Fijar decimales<br>2:Not científica<br>3:Normal |
|---|---|

  También deben utilizarse las teclas de las funciones exponencial y logarítmica de base 10, $10^x$ y $\log_{10} x$.

## EJEMPLO DE SOLUCIÓN

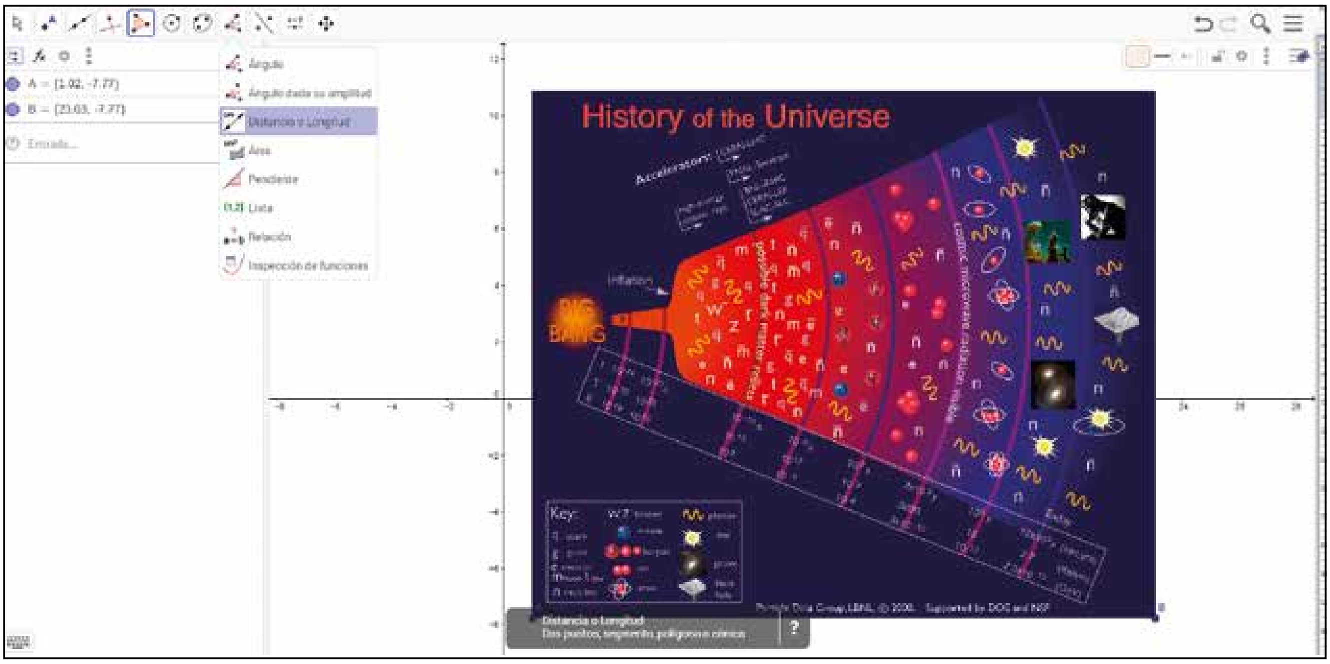
**1**

Las distancias sobre la infografía pueden medirse usando simplemente una regla graduada. Si se opta por un tratamiento digital de la imagen, puede hacerse uso de GeoGebra.



# 14 | Notación científica
## *Back to the BigBang*: el timeline del Universo (I)

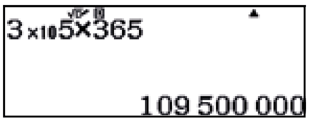
Se trata ahora de hacer uso de la opción *Distancia* o *Longitud* para determinar la distancia entre dos puntos.

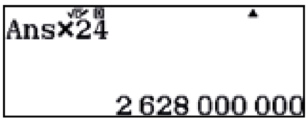


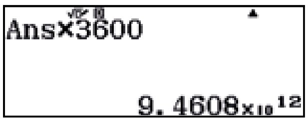

Se organiza en una tabla las distancias entre los acontecimientos cósmicos. Por ejemplo:

| $t_1$ | $t_2$ | distancia |
|---|---|---|
| $1{,}00 \cdot 10^{-44}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s | 0,62 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s | 1,56 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s | 1,10 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{2}$ s | 1,10 |
| $1{,}00 \cdot 10^{2}$ s | $3{,}00 \cdot 10^{5}$ y | 1,13 |
| $3{,}00 \cdot 10^{5}$ y | $1{,}00 \cdot 10^{9}$ y | 1,16 |
| $1{,}00 \cdot 10^{9}$ y | $1{,}20 \cdot 10^{10}$ y | 1,01 |

Lo primero que se observa es que el uso de unidades temporales no es homogéneo, algunos valores se indican en segundos y otros en años. Para poder comparar adecuadamente los datos, hay que expresarlos en las mismas unidades. Se opta por expresar todos los datos en segundos, por ser esta la unidad de tiempo en el SI. Para ello, se convierten, progresivamente, los años en días, los días en horas y las horas en segundos.




Se construye, así, una nueva tabla de valores entre tiempos sucesivos, expresados en segundos:

| $t_1$ | $t_2$ | distancia |
|---|---|---|
| $1{,}00 \cdot 10^{-44}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s | 0,62 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s | 1,56 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s | 1,10 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{2}$ s | 1,10 |
| $1{,}00 \cdot 10^{2}$ s | $9{,}46 \cdot 10^{12}$ s | 1,13 |
| $9{,}46 \cdot 10^{12}$ s | $3{,}15 \cdot 10^{16}$ s | 1,16 |
| $3{,}15 \cdot 10^{16}$ s | $3{,}78 \cdot 10^{17}$ s | 1,01 |

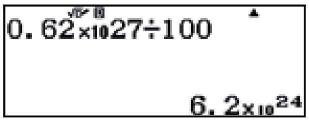
De la observación de la tabla se concluye que, mientras que el factor de incremento en la distancia entre sucesivos puntos de la imagen se mantiene prácticamente constante (con la excepción del primer y el segundo punto), no ocurre lo mismo con las distancias temporales:

# *Back to the BigBang*: el timeline del Universo (I)

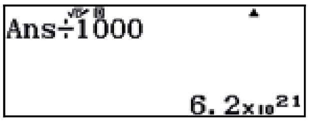


| $t_1$ | $t_2$ | distancia | $t_1/ t_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $1{,}00 \cdot 10^{-44}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s | 0,62 | $1{,}00 \cdot 10^{7}$ s | | |
| $1{,}00 \cdot 10^{-37}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s | 1,56 | $1{,}00 \cdot 10^{27}$ s | 1,56 / 0,62 | 2,5 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-10}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s | 1,10 | $1{,}00 \cdot 10^{5}$ s | 1,10 / 1,56 | 0,7 |
| $1{,}00 \cdot 10^{-5}$ s | $1{,}00 \cdot 10^{2}$ s | 1,10 | $1{,}00 \cdot 10^{7}$ s | 1,10 / 1,10 | 1,0 |
| $1{,}00 \cdot 10^{2}$ s | $9{,}46 \cdot 10^{12}$ s | 1,13 | $1{,}00 \cdot 10^{10}$ s | 1,13 / 1,10 | 1,0 |
| $9{,}46 \cdot 10^{12}$ s | $3{,}15 \cdot 10^{16}$ s | 1,16 | $9{,}46 \cdot 10^{3}$ s | 1,13 / 1,16 | 1,0 |
| $3{,}15 \cdot 10^{16}$ s | $3{,}78 \cdot 10^{17}$ s | 1,01 | $3{,}15 \cdot 10^{1}$ s | 1,01 / 1,16 | 0,9 |

En consecuencia, la separación entre las diferentes circunferencias concéntricas que aparecen en la infografía no respeta el factor de crecimiento temporal. Por otro lado, se observa que algunos factores de crecimiento toman valores gigantescos. Por ejemplo, el factor temporal de crecimiento entre los dos primeros puntos es del orden de $10^{27}$. Esto significa que si el primer punto está situado a 0,62 cm del origen, el segundo debería estarlo a $0{,}62 \cdot 10^{27}$ cm. Esta distancia se expresa en metros como:

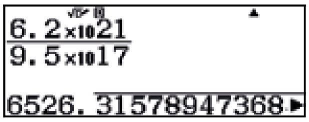



Y en kilómetros como:




Para poder hacernos una idea de hasta qué punto es grande esta distancia, podemos compararla con algunas distancias astronómicas conocidas.

- Diámetro de la Tierra: 12 800 km = $1{,}28 \cdot 10^{4}$ km
- Distancia de la Tierra a la Luna: 384 400 km = $3{,}84 \cdot 10^{5}$ km
- Distancia de la Tierra al Sol: 150 000 000 km = $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km
- Radio del sistema Solar: 4 500 000 000 km = $4{,}5 \cdot 10^{9}$ km
- Distancia a Alpha-Centauri: $41{,}3 \cdot 10^{12}$ km
- Diámetro de la Vía Láctea: del orden de $9{,}5 \cdot 10^{17}$ km




Es decir, el segundo punto estaría situado sobre el papel a una distancia superior a 6.500 veces el diámetro de nuestra galaxia. Y sí, ¡eso demasiado papel para un póster!

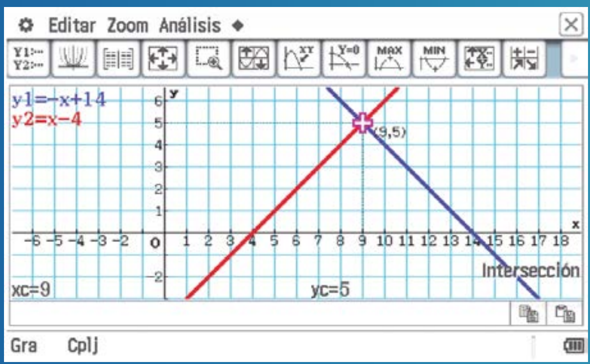
# Resolución de inecuaciones. Aplicación: ejercicio de programación lineal

Fernando Sánchez Grima
Profesor de Matemáticas del IES Gúdar-Javalambre en Mora de Rubielos (Teruel)

Sin darnos cuenta, son muchos y variados tanto, en naturaleza como en nivel, los conceptos necesarios para la resolución de un simple problema de programación lineal. Ya a lo largo de la etapa de la ESO, los alumnos aprenden a resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones por diferentes métodos, incluyendo el método gráfico, lo que hace que también deban saber representar funciones lineales, lo que supone el manejo de los ejes cartesianos, como se muestra en la siguiente figura.

EJEMPLO

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$$




En la ecuación A:

$$x + y = 14$$

En la ecuación B:

$$x - y = 4$$

La solución del sistema, la intersección de las dos rectas, es el punto P(9,5).

Además de estos conceptos relativamente básicos que se empiezan a estudiar en los primeros cursos de la ESO, son necesarios otros bastante más complejos estudiados en los últimos cursos de la ESO y en el bachillerato, tanto científico-técnico como en el de ciencias-sociales, como son las inecuaciones lineales y los sistemas de inecuaciones lineales, donde las soluciones son no solo un punto sino una región del plano. En este tipo de ejercicios además de un buen repaso de bastantes conceptos, se introducen nuevos como el de funciones de dos variables. A todos los puntos anteriores se una capacidad muy importante, la de leer y analizar un problema y traducirlo a lenguaje matemático, lo cual es fundamental para desarrollo del aprendizaje de las matemáticas. Pues la unión de todos los puntos anteriores, es lo que hace posible la resolución de un problema de programación lineal.

Pues todos y cada uno de los puntos anteriormente comentados se pueden llevar a cabo con la calculadora ClassPad II, lo que nos facilita la resolución y comprobación de dichos problemas.

## RESOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN LINEAL DE UNA Y DOS VARIABLES

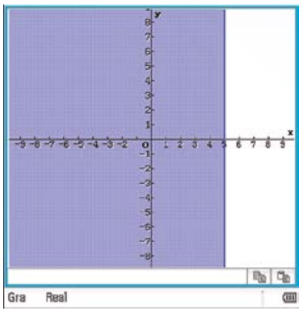
Antes de empezar la resolución del problema vamos a realizar un pequeño análisis de los dos tipos de inecuaciones que debemos saber resolver para realizar un problema de programación lineal a este nivel. Para familiarizarnos con la herramienta, todas las gráficas mostradas estarán realizadas con nuestra calculadora ClassPad II.

1

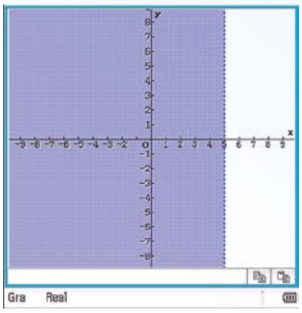
### Inecuación lineal con una incógnita

Las inecuaciones de una incógnita pueden ser de los siguientes tipos:

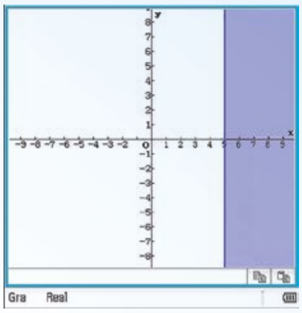
$x \leq a$



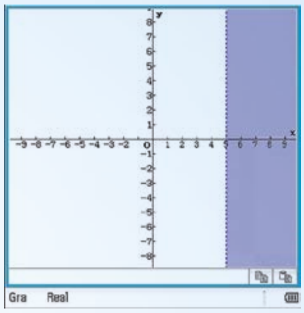
$x < a$



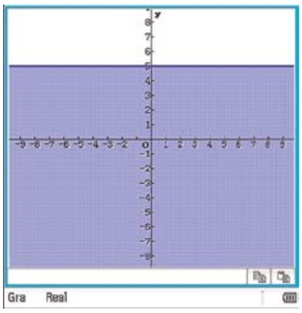
$x \geq a$



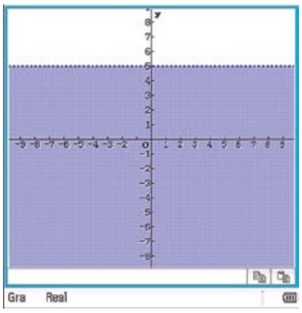
$x > a \;/ a \in \mathbb{R}$



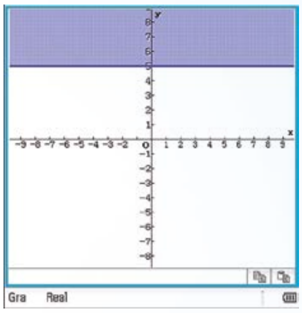
$y \leq a$



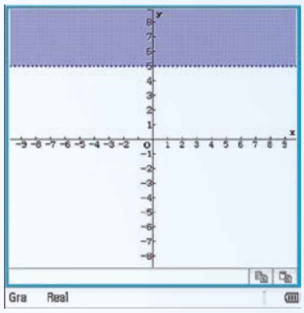
$y < a$



$y \geq a$

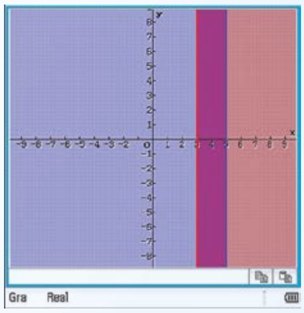


$y > a \;/ a \in \mathbb{R}$



Vemos como la diferencia de "menor o igual" a "menor estricto" es que aparece una línea continua o con puntos respectivamente, lo mismo ocurre con el mayor.

En general si queremos resolver alguna inecuación del tipo "$a \leq x \leq b \;/ a, b \;\in \mathbb{R}$" basta con dividirla en dos "$a \leq x\,,\; x \leq b \,/ a, b \;\in \mathbb{R}$" y la zona común es nuestra solución, como se muestra en la siguiente gráfica:



2

### Inecuación lineal con dos incógnitas

En este punto vamos a ver cómo resolver una inecuación con dos incógnitas de las formas:

- "$ax + by > c \;\; /a, b, c \;\in \mathbb{R}$"
- "$ax + by \geq c \;/a, b, c \;\in \mathbb{R}$"
- "$ax + by \leq c \;/a, b, c \;\in \mathbb{R}$"
- "$ax + by < c \;/a, b, c \;\in \mathbb{R}$"

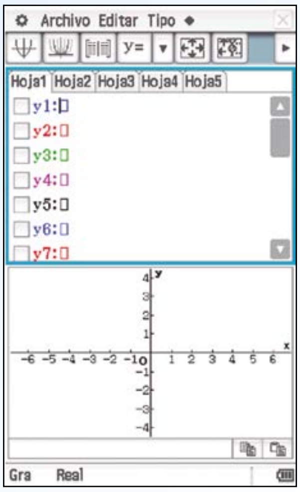
En cualquier caso se resuelve realizando los siguientes pasos:

- Lo tratamos como la ecuación de una recta y la representamos, se puede despejar de la forma "$y = \frac{c-ax}{b} \;/a, b, c \;\in \mathbb{R}$", la cual divide al plano en dos partes.
- Escogemos un punto cualquiera y comprobamos si satisface la inecuación, si es así esa región del plano sería la solución, si no fuera así la otra región sería nuestra solución.

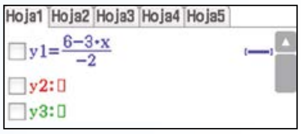
Por ejemplo la siguiente inecuación $3x - 2y \leq 6$:

- Despejamos la variable independiente $y = \frac{6-3x}{-2}$.
- Sustituimos por ejemplo el punto $P(0,0)$ y obtenemos $0 \leq 3$; lo cual es cierto por lo que la región del plano que contenga el $P(0,0)$ es la solución de nuestra inecuación.

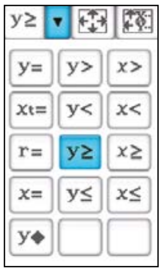
Vamos a resolver esta inecuación con nuestra calculadora ClassPad II, para ello en el menú principal Menu, pinchamos en “Gráficos & tablas” y aparece la siguiente pantalla:



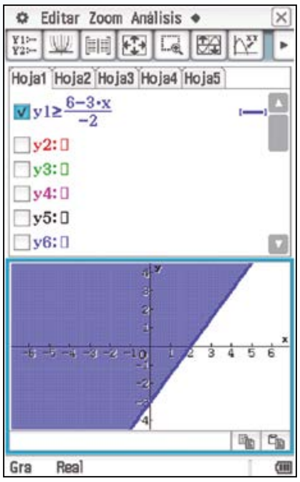

En esta pantalla escribimos la recta de la siguiente forma:




Y una vez introducida nuestra ecuación de la recta hacemos doble clic encima del igual o presionamos y= ▾ y seleccionamos la modalidad que deseemos del desplegable:


Y para finalizar pinchamos en y nos muestra la solución de nuestra inecuación:




Vemos como efectivamente la región del plano es la que contiene el $P(0,0)$.

Nota: recordar que si dividimos por un número negativo cambia el sentido de la inecuación.

3

## Resolución de un problema sencillo de programación lineal

Dado el siguiente problema:

“Un ayuntamiento concede licencias para la construcción de una urbanización de a lo sumo 120 viviendas, de dos tipos A y B. Para ello la constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros, siendo el coste de la construcción de la vivienda de tipo A de 100.000 euros y de la de tipo B 300.000 euros.

Si el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 euros y por una del tipo B a 40.000 euros, ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener un beneficio máximo?”

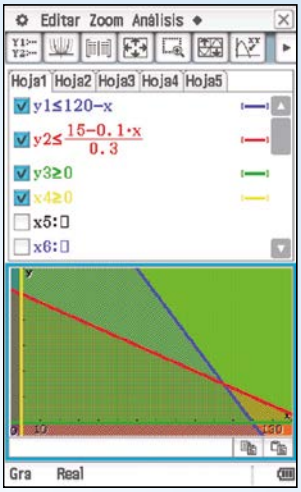
En este problema podemos denotar a las viviendas de tipo A con “x” y las de tipo B con “y”, y deducir las siguientes ecuaciones, que introduciremos en nuestra ClassPad II:

- $x + y \leq 120$
- $0{,}1x + 0{,}3y \leq 15$
- $x \geq 0$ (el número de viviendas debe ser positivo)
- $y \geq 0$ (el número de viviendas debe ser positivo)


Ajustamos los ejes con

En la figura, vemos cual es la denominada región factible, que son todos los puntos que cumplen las condiciones anteriormente citadas, pero debemos de buscar la solución que maximiza los beneficios. Antes de seguir, debemos buscar la función que rige nuestros beneficios, que del enunciado se deduce que es:

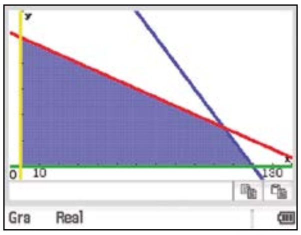
- $F(x,y) = 20x + 40y$




Y además sabemos que la solución está en una de las esquinas de nuestra región factible, que en nuestro caso son cuatro, los puntos de corte siguientes:

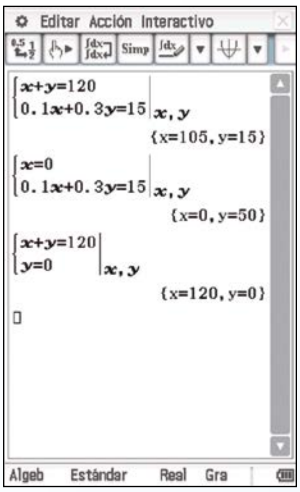
- $y1$ e $y2$
- $y1$ e $y3$
- $y2$ y $x4$
- $y3$ y $x4$

Viendo el resultado observamos que a simple vista puede parecer un poco engorroso de localizar la región factible, posiblemente no en este caso, pero si hubiera más solapamientos podría ocurrir que nos resultara más complejo. Por ello vamos a seleccionar que nos muestre solo la intersección de todas las zonas, es decir la región factible. Para ello pinchamos y posteriormente "Formato de gráfico" y en "Gráfico de desigualdad" seleccionamos "Intersección" y obtenemos lo siguiente:


Vemos, como ya solo nos muestra la región factible, y de esta forma además nos resulta más sencillo ver cuáles son las rectas que se cortan entre sí para la posterior resolución de sistemas de ecuaciones, que es el siguiente punto del problema.

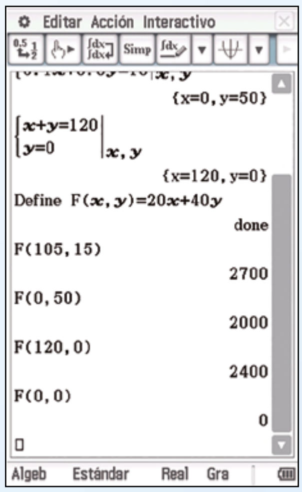
También podemos recurrir a nuestra calculadora para resolver los 4 sistemas de ecuaciones, para ello pulsamos la siguiente secuencia Menu , pulsamos el botón Keyboard y seleccionamos . Calculamos los tres primeros puntos (el cuarto es inmediato, el origen de coordenadas):




Una vez que tenemos todos los puntos los sustituimos en la función:

- P(105,15) $\rightarrow F(105,15) = 20 * 105 + 40 * 15 = 2700$
- Q(0,50) $\rightarrow F(0,50) = 20 * 0 + 40 * 50 = 2000$
- R(120,0) $\rightarrow F(120,0) = 20 * 120 + 40 * 0 = 2400$
- O(0,0) $\rightarrow F(0,0) = 20 * 0 + 40 * 0 = 0$

Por lo que nuestra conclusión final del ejercicio es que construyendo 105 casas del tipo A y 15 del tipo B maximizamos el beneficio, obteniendo 2.700.000 €.



# FUNCIONES



www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

**Realizados por: FESPM**

**Recopilados por: Luis Carlos Vidal Del Campo**

**IES ATENEA, CIUDAD REAL**

# Aplicaciones de las derivadas

## División educativa CASIO

Se plantea a continuación un ejercicio típico de 2º de Bachillerato resuelto con la calculadora gráfica fx-CG50. Gracias a su menú gráfico se visualizan los elementos del problema facilitando su comprensión, desarrollo y cálculo.

### PROBLEMA

Dada la función $f(x) = x \cdot e^x$

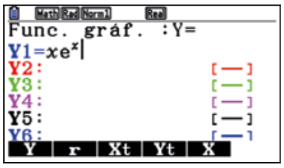
**1)** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

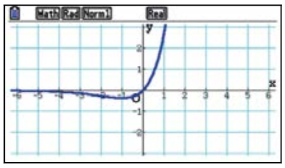
**2)** Determina en que intervalos la función $f(x)$ es creciente y en cuales es decreciente.

### SOLUCIÓN

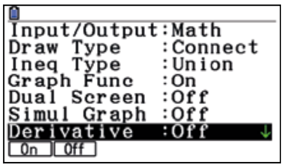
1

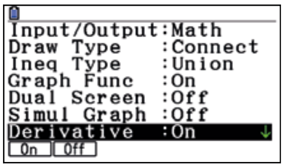
Se entra en el menú **Gráfico**, se escribe la función $f(x) = x \cdot e^x$ y se pulsa dos veces EXE para dibujarla:

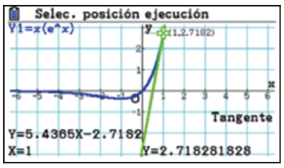



Para que la ecuación explícita de la recta tangente aparezca en pantalla, se configura la calculadora desde **SET UP** (SHIFT MENU). Hay que desplazarse hacia abajo con las flechas (▲ ▼) hasta **Derivative** y seleccionar la opción **On** (F1):




Para dibujar la recta tangente, desde la última pantalla mostrada, la secuencia de teclas es: EXIT, EXE, **Sketch** (F4), **Tangent** (F2) y 1. La ecuación de la recta tangente se mostrará pulsando EXE dos veces:



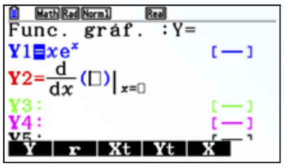

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$ es:

$$y = 5.4365x - 2.7182 \rightarrow y = 2ex - e$$

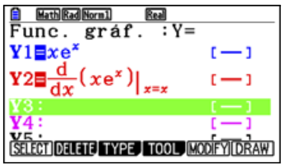
2

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento se dibuja $f'(x)$ en el menú **Gráfico** y se calcula $f'(x) = 0$.

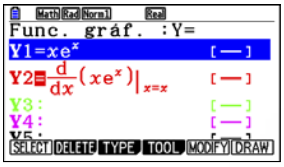
Desde la pantalla del apartado anterior, para dibujar $f'(x)$, se pulsa EXIT, OPTN, **CALC** (F2), $d/dx$ (F1):

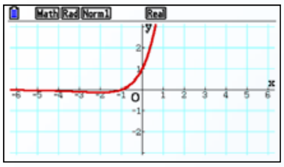



Se escribe la función evaluándola en $x$ y se pulsa EXE:




Para que solo se dibuje la función **Y2** en la pantalla gráfica, hay que desplazarse a la función **Y1** y pulsar **SELECT** (F1). Se pulsa EXE para dibujar **Y2**:



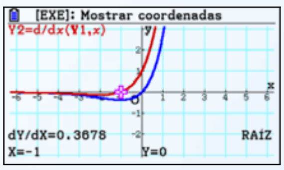
Se calcula en que valores $f'(x) = 0$ pulsando **G-Solve** (F5), y **ROOT** (F1):


Se observa que:

$$f'(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -1) \rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (-\infty, -1)$$

$$f'(x) > 0 \text{ en } (-1, \infty) \rightarrow f(x) \text{ es creciente en } (-1, \infty)$$

Para ver las dos funciones a la vez y comprobar gráficamente el resultado, se pulsa EXIT, se selecciona de nuevo la función **Y1** (situando el cursor encima y con **SELECT** (F1)) y se pulsa EXE:



CASIO
ACTIVIDADES

# Ultra trail

**Julio Guerola Font**
Colegio San Cristóbal (Castellón)

DIFICULTAD
1 2 **3**

## ACTIVIDAD

Con esta actividad orientada a 2º de Bachillerato, los resultados de inecuaciones, ecuaciones e integrales toman sentido en una situación contextualizada con una carrera de montaña. Gracias a la generación del código QR en la calculadora, la visualización gráfica de las funciones que se trabajan, facilita la interpretación de las soluciones al alumnado.

## PROBLEMA

En los últimos años el mundo de las carreras de montaña ha tenido un aumento espectacular en modalidades y participantes, las hay de todas las distancias, desde pocos kilómetros hasta más de 100 y con distintos desniveles. Estas carreras ofrecen, además de la parte deportiva, unos paisajes incomparables por donde discurren.

Juan corre por la montaña durante 5 horas. Su aceleración en el instante $t$ viene dada por la función:

$$a(t) = 3t^2 - 14t + 8 \qquad 0 \le t \le 5$$

**a)** Escribe los valores de $t$ en los que Juan no cambia de velocidad ($a=0$).

**b)** Halla todos los posibles valores de $t$ para los cuales Juan asciende la montaña (la velocidad de Juan desciende).

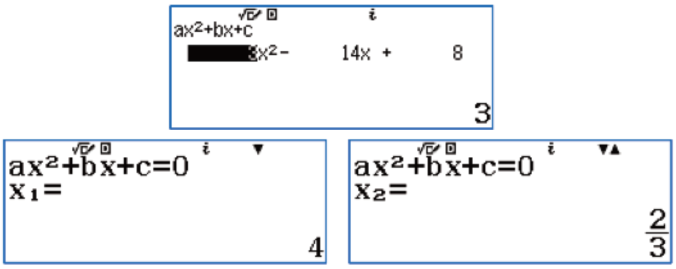
Suponiendo que Juan parte de una velocidad inicial de 3 km/h:

**c)** Halla una expresión para la velocidad de Juan en el instante $t$.

**d)** Halla la distancia total que recorre cuando desciende (cuando su velocidad va aumentando).

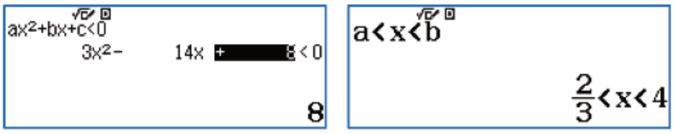
## SOLUCIÓN

**a)** Con el menú **Ecuación**, se resuelve $3t^2-14t+8=0$:



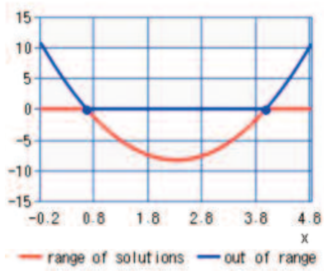

Juan no cambia de velocidad cuando $t=\frac{2}{3}=0{,}67$ h (a los 40 min) y $t=4$ h.

**b)** Con el menú **Inecuación** se resuelve $3t^2-14t+8<0$:




Entre los 40 minutos de carrera y la cuarta hora está ascendiendo la montaña, ya que la aceleración es negativa y por tanto la velocidad baja.

Generando el código QR, se puede visualizar la gráfica de la función para entender mejor los resultados:

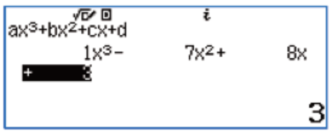


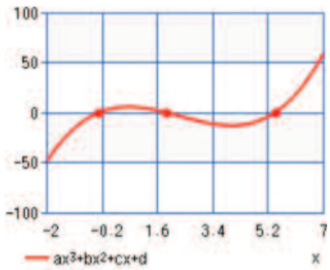

**c)** Integrando la función $a(t)$ se obtiene la expresión de la velocidad, $v(t)=t^3-7t^2+8t+C$.

Para $t=0$, $v(0)=3$ km/h luego $C=3$.

La expresión que indica la velocidad de Juan en cualquier instante $t$ es $v(t)=t^3-7t^2+8t+3$.

Se dibuja la gráfica desde el menú **Ecuación** para ver la situación:

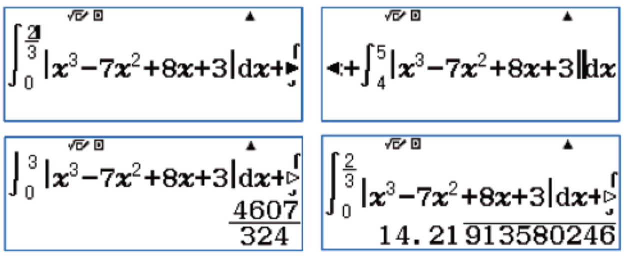



**d)** Como la velocidad decrece en $\frac{2}{3}<t<4$, crecerá en $0<t<\frac{2}{3}$ y $4<t<5$.

Juan está descendiendo durante 14,22 kilómetros:

$$\int_0^{\frac{2}{3}}|t^3-7t^2+8t+3|\;dt+\int_4^5|t^3-7t^2+8t+3|\;dt=14{,}22$$



# La pendiente de la tangente a la parábola

Goyo Lekuona Muxika
Profesor de Matemáticas de Secundaria de Euskadi

**Veamos cómo podemos calcular la pendiente de la tangente en un punto de la parábola con la calculadora CASIO ClassWiz fx-82SP X, que no es capaz de trabajar con derivadas, pero tiene una interesante función que es el trabajo en modo tabla, y ahora además, es capaz de escribir dos tablas a la vez.**

Esta cuestión viene motivada, y resuelta por una cuestión que nos planteó Koldo, un alumno de hace un par de años. Estábamos estudiando las parábolas y ante el lio general que tenían sobre hacia donde tienden las ramas de la parábola y la pendiente de la función, les volví a repetir por enésima vez que si el coeficiente del término de segundo grado es positivo, significa que la parábola es abierta hacia arriba, el vértice es un mínimo o que la función, hasta el vértice es decreciente y después pasa a ser creciente. Y en caso de que el signo del coeficiente fuese negativo, ocurría al revés, y que por ningún motivo dijesen que la parábola es creciente, o decreciente, ya que en todas las parábolas que podamos dibujar, hay una sección creciente y otra decreciente, que la diferencia está en el orden en el que se dan dichas fases.

Bueno, parece que el tema le gustó a Koldo, y picado por la curiosidad quiso saber como era de creciente y decreciente la parábola, ya que a simple vista se podía comprobar que no se comportaba uniformemente como hacían las funciones de primer grado. Ya que en estas la "inclinación" era constante en toda la gráfica, y en las de segundo grado había zonas con una "pendiente" más pronunciada y otras en las que apenas variaba.

Como en el nivel en el que estaba (cuarto de la E.S.O.) no ven la derivada, le dije que sí se podía calcular, pero que lo verían más adelante. Pero, no, la respuesta no le satisfizo, si se podía calcular, el "quería" saber como conseguir la pendiente de la tangente en un punto cualquiera de la gráfica.

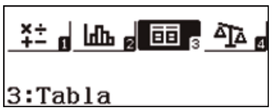
Lo que viene a continuación es una explicación de lo que hicimos y como intenté salir del aprieto en el que me pusieron los alumnos, al pedir que **estudiásemos la pendiente de la tangente a la función $2x^2 - 3x - 10$ en el punto $x = -1$, y ya puestos, poder calcularla para cualquier otro valor de $x$.**

1

**Estudiemos la parábola**

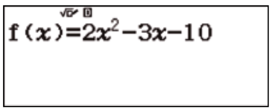
En un primer punto dibujamos la función. Valiéndonos de las calculadoras que teníamos, la CASIO FX-82SP X, entramos en el modo **Tabla**:

MENU 3

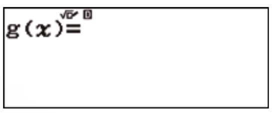


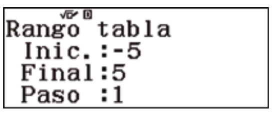

y le damos la ecuación de la parábola a estudiar, que era:

$2x^2 - 3x - 10$ (2 $x$ $x^2$ − 3 $x$ − 1 0)

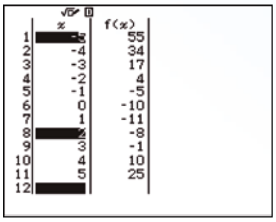



La segunda función, ***g(x)***, de momento la dejamos vacía. A continuación nos pregunta los valores para construir la tabla. Como nosotros queremos estudiarla en -1, le decimos que **Inic.** -5, por poner un valor, posteriormente nos pide el valor **Final** de la tabla, como íbamos a estudiarla para valores enteros, le dijimos que el final fuese el 5 y el **Paso** (incremento entre un valor de la tabla y el siguiente) de 1.



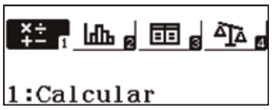
Con lo cual, la calculadora, nos genera la siguiente tabla:




Bien, ya tenemos la tabla con los puntos a representar de nuestra parábola, que luego resulta que casi nadie representa, por que ya nos imaginamos como es. Podemos comprobar que las coordenadas del punto que nos interesa, el elemento 5 de la tabla, son $\boldsymbol{x}$ = **-1** e $\boldsymbol{y}$ = **-5**. Vemos que la función va creciendo hasta $\boldsymbol{x}$ = **1**, el vértice no está ahí, ya que la tabla no es simétrica respecto a ese punto, pero como hemos dado la fórmula para encontrar la coordenada $x$ del vértice de la parábola $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, la aplican directamente en la calculadora:

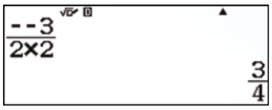
Pasamos al modo **Calcular**

[MENU] [1]




y aquí han de calcular ***–b/2a***

[▭/▭] [(−)] [(−)] [3] [▼] [2] [×] [2] [=]




que nos da ¾ y pulsando [S⇔D] 0,75.

De manera que ahora ya sabemos donde está el vértice de la parábola.

2

## Estudiemos las secantes

Como sabemos que la pendiente de una recta viene dada por la fórmula de $m = \frac{incremento\ de\ Y}{incremento\ de\ X}$ o lo que viene a ser lo mismo $m = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}$ siendo ($x_1$, $y_1$) las coordenadas de un punto y ($x_0$, $y_0$) las del segundo punto por el que pasa la recta, podíamos calcular las pendientes de las rectas secantes que pasasen por el punto $P_0$ que nos interesaba estudiar $P_0$ = **(-1, -5)** y como punto $P_1$ utilizaríamos los diferentes puntos de la tabla.

Explicado lo cual, les indiqué que no calcularíamos el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $P_0$ pero podríamos ver como la pendiente de la secante se iba acercando a dicho valor, y una vez que el punto $P_1$ pasase de $P_0$ los valores se irían alejando. Quiero decir, que el primero de los valores obtenidos distaría mucho de ser el de la tangente, pero poco a poco se iría acercando, conforme $\boldsymbol{x}$ se acercase a $x_0$ y después se iría alejando.

De manera que nuevamente utilizaríamos el modo tabla de la CASIO fx-82SP X, pero en este caso para calcular además las pendientes de las rectas secantes. Para ello el valor de $y_1$ sería el de la imagen del punto, esto es (**2**$\boldsymbol{x^2}$ **– 3**$\boldsymbol{x}$ **-10**); el valor de $x_1$ sería el de la x de cada caso, y como $y_0$ = **-5** y $x_0$ = **-1**.

De modo que la nueva función a calcular sería:

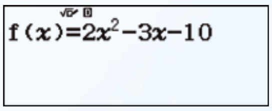
$$g(x) = \frac{(2x^2 - 3x - 10) - (-5)}{x - (-1)} \rightarrow \frac{2x^2 - 3x - 10 + 5}{x + 1} \rightarrow \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

Pulsamos

[MENU] [3]

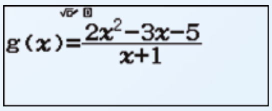

y la escribimos ***f***(***x***) era $2x^2 - 3x - 10$

[2] [x] [x²] [−] [3] [x] [−] [1] [0]




***g***(***x***) es $\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

[▭/▭] [2] [x] [x²] [−] [3] [x] [−] [5] [▼] [x] [+] [1]



Podríamos cambiar el intervalo a analizar, pero decidimos mantenerlo,

```
Rango tabla
 Inic.:-5
 Final:5
 Paso :1
```

de manera que nos sale la siguiente tabla:

| | $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | -5 | 55 | -15 |
| 2 | -4 | 34 | -13 |
| 3 | -3 | 17 | -11 |
| 4 | -2 | 4 | -9 |
| 5 | -1 | -5 | ERROR |
| 6 | 0 | -10 | -5 |
| 7 | 1 | -11 | -3 |
| 8 | 2 | -8 | -1 |
| 9 | 3 | -1 | 1 |
| 10 | 4 | 10 | 3 |
| 11 | 5 | 25 | 5 |
| 12 | | | |

Lógicamente el elemento 5 de la tabla da un error pues dividimos entre cero. Pero se puede apreciar perfectamente que los elementos de la columna ***f*(*x*)** constituyen una serie y que el elemento correspondiente a la posición 5 debería ser el -7.

3

## Estudiemos los resultados

Tras indicarles que el valor conseguido (-7) coincidía plenamente con el deseado, pues estudiando la derivada de la función nos indicaba que le valor de la pendiente de la recta tangente a dicha parábola para ***x* = -1** era exactamente de -7, les anime a que estudiasen nuevos casos con parábolas diferentes, y vimos que en todos los casos conseguíamos el valor exacto de la derivada.

Ante la sorpresa producida por el fruto de las "investigaciones" otro de los alumnos nos indicó que como en los valores anteriores se produce un error entre la pendiente de la secante y la derivada, y con los valores posteriores se genera un error de signo contrario, estudiando la función entre valores situados a igual "distancia" de $x_0$ los errores deberían compensarse y calcular el valor exacto de la tangente.

Como la propuesta se aceptó, vimos que lo que había que hacer era en uno de los puntos ***P*** sustituir la ***x*** por ***x-d*** y para el otro punto hacerlo con ***x+d***. De modo que para estudiar la tangente en el punto $P_x$ estudiaríamos la pendiente de la recta que pasa por $P_{x-d}$ y $P_{x+d}$, de manera que ahora la función a analizar sería:

$$\frac{(2*(x+d)^2-3(x+d)-10\,)\text{-}\,(2*(x-d)^2-3(x-d)-10\,)}{(x+d)-(x-d)}$$

y claro si elegimos ***d* = 1** para hacer los cálculos más sencillos, lo que le tenemos que indicar a la CASIO fx-82SP X es que queremos que nos calcule:

$$g(x)=\frac{(2*(x+1)^2-3(x+1)-10\,)\text{-}\,(2*(x-1)^2-3(x-1)-10\,)}{2}$$

Ya que no tenemos por qué desarrollar los cálculos, a los alumnos no les hace mucha gracia y se los podemos pasar a la calculadora tal cual los hemos escrito.

De modo que ahora, nuevamente, volvemos al modo **Tabla** MENU 3


y la escribimos ***f*(*x*)** era $2x^2-3x-10$ 2 x x² − 3 x − 1 0

```
f(x)=2x²−3x−10
```

$g(x)$ ahora es $\frac{(2*(x+1)^2-3(x+1)-10)-(2*(x-1)^2-3(x-1)-10)}{2}$

[▭] ( 2 ( $x$ + 1 ) $x^2$ − 3 ( $x$ + 1 ) − 1 0 ) −
( 2 ( $x$ − 1 ) $x^2$ − 3 ( $x$ − 1 ) − 1 0 ) ▼ 2

```
g(x)=(x+1)-10)-(2
           2
```

```
Rango tabla
 Inic.:-5
 Final:5
 Paso :1
```

Y las tablas que conseguimos serían las siguientes (tras decirle el intervalo a estudiar)

| | $x$ | f(x) | g(x) |
|---|---|---|---|
| 1 | -5 | 55 | -23 |
| 2 | -4 | 34 | -19 |
| 3 | -3 | 17 | -15 |
| 4 | -2 | 4 | -11 |
| 5 | -1 | -5 | -7 |
| 6 | 0 | -10 | -3 |
| 7 | 1 | -11 | 1 |
| 8 | 2 | -8 | 5 |
| 9 | 3 | -1 | 9 |
| 10 | 4 | 10 | 13 |
| 11 | 5 | 25 | 17 |
| 12 | | | |

Podemos observar que nos encontramos ante las tablas de la parábola y la de la derivada de la función $2x^2-3x-10$ para esos valores de la $x$, ya que si trabajamos la función utilizada con los alumnos nos queda (o les pedimos a ellos que trabajen la expresión escrita en la calculadora)

$$\frac{(2*(x+1)^2-3(x+1)-10)-(2*(x-1)^2-3(x-1)-10)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{(2x^2+4x+2-3x-3-10)-(2x^2-4x+2-3x+3-10)}{2}=\frac{8x-6}{2}=4x-3$$

Que lógicamente coincide con la derivada, igual que si lo hacemos con d como valor para la distancia de los puntos "equidistantes" del punto a estudiar. Y lo mismo ocurre, para terminar, si el estudio lo hiciésemos con la función general $ax^2+bx+c$ y la distancia d volvería a cumplirse, de manera que ya sabemos que de esta manera podemos calcular la pendiente de la recta tangente a la parábola en cualquier punto, que era lo que nos pidió el amigo Koldo

$$m=\frac{y_{p+d}-y_{p-d}}{x_{p+d}-x_{p-d}}=\frac{(a(x+d)^2+b(x+d)+c)-(a(x-d)^2+b(x-d)+c)}{(x+d)-(x-d)}=\frac{(a(x^2+2xd+d^2)+bx+bd+c)-(a(x^2-2xd+d^2)+bx-bd+c)}{x+d-x+d}=$$

$$=\frac{(ax^2+2adx+ad^2+bx+bd+c)-(ax^2-2adx+ad^2+bx-bd+c)}{2d}=\frac{4adx+2bd}{2d}=\frac{2d(2ax+b)}{2d}=2ax+b$$

De manera que lo hemos logrado sin necesidad de recurrir a las derivadas, con un poco de trabajo y la inestimable ayuda de la CASIO ClassWiz fx-82SP X Iberia.

# Uso de la calculadora gráfica para modelización


Encarnación López Fernández
IES 'El Almijar', Cómpeta (Málaga)

José Manuel Fernández Rodríguez
IES Pablo Picasso, Málaga

**El uso de la modelización, dentro del aula de matemáticas, se encuentra entre dos extremos. Por un lado se utiliza para responder a la eterna pregunta de nuestro alumnado "¿para qué sirve esto?". En este sentido se suelen utilizar ejercicios y problemas muy concretos, en los que el aparato matemático empleado suele estar predeterminado por el contexto en el que se utiliza. En el otro extremo y mucho menos frecuente, es utilizar la modelización para generar conocimiento entre nuestro alumnado a partir de una situación inicial, como por ejemplo hace Carlos Morales Socorro en el Proyecto "Clepsidra" (I.E.S. "Valsequillo", Gran Canaria).**

Nuestra propuesta de hoy es mucho más humilde y va en la línea de plantear al alumnado una situación real, en este caso una fotografía, y que sea este el que elija la técnica que más le convenga para modelizar la situación que en ella se plantea.


1

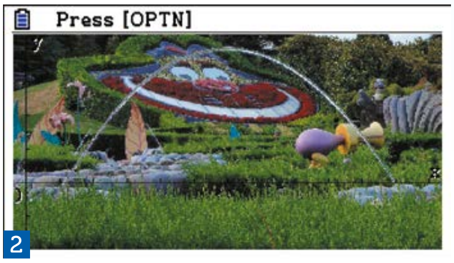
## ACTIVIDAD

Encuentra un modelo funcional que se ajuste al chorro de agua que aparece en la imagen 1.
Recuerda que la elección de un sistema de referencia adecuado facilita mucho nuestro trabajo.

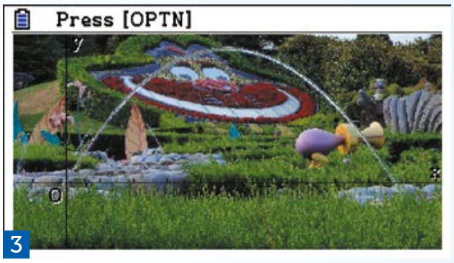
Vamos a utilizar la calculadora CASIO FX CG-20 para abordar este problema de modelización desde varias perspectivas. Comenzaremos desde un punto de vista funcional, utilizando los conocimientos que tienen nuestro alumnado sobre las funciones elementales. Seguidamente, desde un punto de vista más algebraico, utilizaremos la posibilidad que tiene esta calculadora de resolver sistemas de ecuaciones para encontrar los coeficientes de la función cuadrática. Por último utilizaremos la capacidad de la FX CG-20 para realizar regresiones no lineales para encontrar nuestro modelo funcional.

1

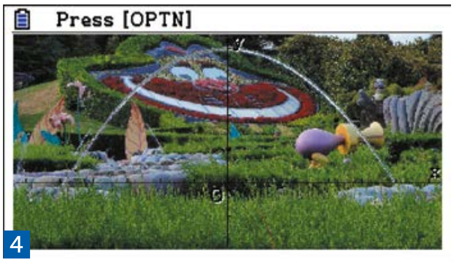
Está claro que el modelo que mejor se va a ajustar va a ser una función cuadrática, ya que, como habremos visto en clase, su gráfica va a ser una parábola. La primera elección que deberá tomar nuestro alumnado será situar los ejes de coordenadas. Esta elección, que no es baladí, podrá hacerse de varias formas: bien se buscara simetría en la expresión a obtener y trabajar con identidades notables como ocurriría en las imágenes 4 y 5 o bien intentando que los puntos de corte de la gráfica con los ejes tengan abscisas enteras, como en las imágenes 3 y 5. Vamos a situar nuestros ejes tal y como muestra la imagen 2, aunque puede haber otras elecciones igual de buenas (buscando el eje de simetría, por ejemplo).



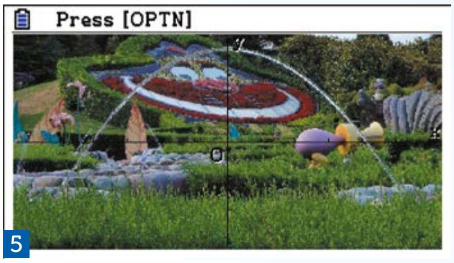
2



3

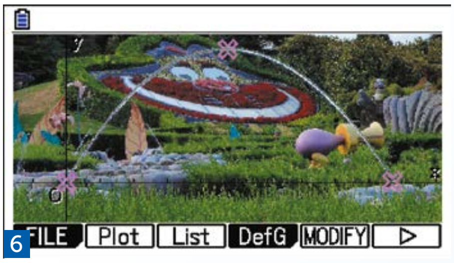


4

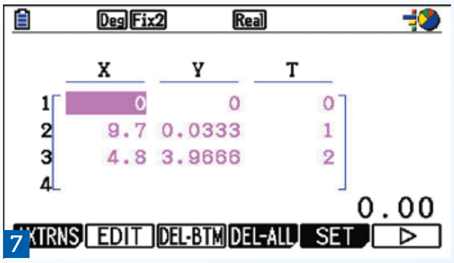


5

Si elegimos los ejes de coordenadas tal y como se propone en la imagen 3, necesitamos tres puntos sobre la gráfica para determinar nuestro modelo.

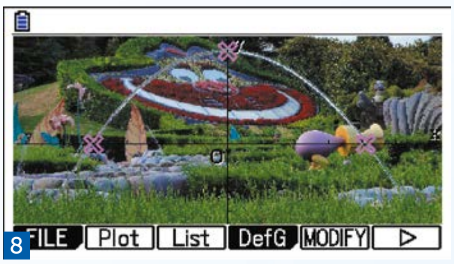


6

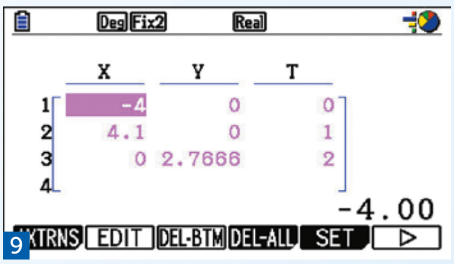


7

Si nos fijamos en los puntos de corte del chorro de agua con el eje que hemos trazado (imagen 6), las coordenadas de estos serán aproximadamente ***(0,0)*** y ***(9.7, 0)***, con lo que la función será de la forma ***f(x) = a · x · (x - 9.7)***, con ***a<0*** ya que las ramas de la parábola van hacia abajo. Para determinar el valor de ***a***, podemos utilizar cualquier punto sobre la gráfica coordenadas ***(4.8, 3.97)***. Quedando la función ***f(x) = -0.17 · x · (x - 9.7)***



8



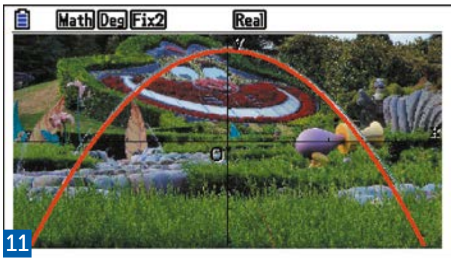
9

Si por el contrario la opción tomada es la que propone la imagen 5, al situar los puntos sobre la gráfica y obtener sus coordenadas, podemos deducir que el modelo resultante es $f(x) = -0.17 \cdot (x^2 - 16)$

Podemos hacer observar a nuestro alumnado como el coeficiente obtenido en ambos modelos es el mismo. De esta misma forma se puede proceder con cualquier elección del sistema de referencia que se haga.

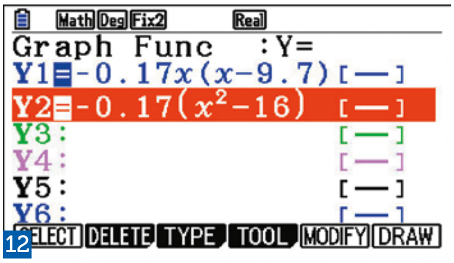
Si representamos por separado ambos modelos gráficamente, se puede observar cómo cada uno de ellos se ajusta perfectamente al chorro de agua de la imagen, de tal forma que lo único que parece que varía entre la imagen 10 y la imagen 11, es la posición de los ejes y el color de la gráfica.

10

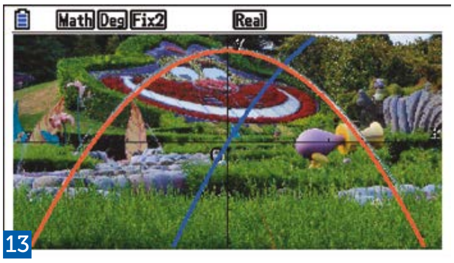


11

Si representamos ambos modelos de forma simultánea, podemos observar (como cabría esperar) que sólo un modelo se ajusta al chorro de agua (imagen 13). Pero si movemos las teclas de cursor conseguimos que sea el otro modelo el que se ajuste. Este hecho puede hacer reflexionar a nuestro alumnado sobre cómo pasar de un modelo a otro, y las transformaciones de la forma $f(x \pm k)$ o $f(x) \pm k$.

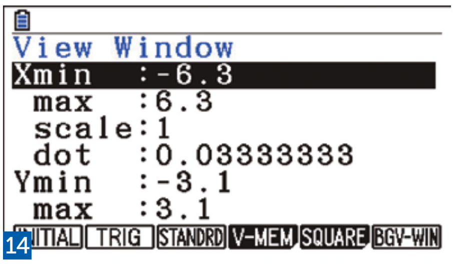


12

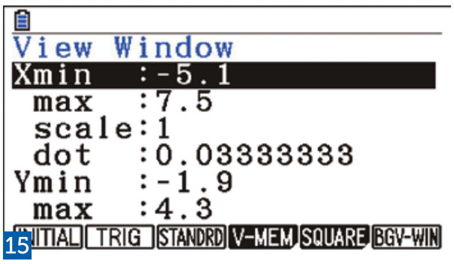


13

Para ello sólo tendríamos que tener en cuenta las veces que le damos a las teclas de cursor para ajustar el otro modelo y cuánto se desplaza la ventana gráfica en cada pulsación, que con esta escala se desplazaría 1.2 unidades por pulsación, en el eje en el que nos movamos.



14



15

En el ejemplo que nos ocupa, para pasar de la imagen 11 a la 10, son cuatro pulsaciones en el eje *X* y una en el *Y*, por lo que la transformación sería $f(x - 4.8) + 1.2$, ya que la diferencia en la ventana de visualización es de 1.2 unidades por cada pulsación de las teclas del cursor.

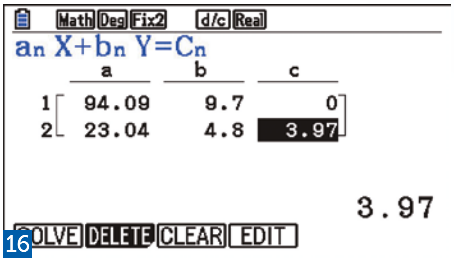
## 2

Se trata ahora de, sobre la misma elección de puntos hecha en la variante 1, plantear un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y resolverlo. Al eliminar el cálculo manual de las soluciones del sistema centramos a nuestro alumnado en el hecho de que cualquier punto de una gráfica satisface la ecuación ***f(x) = y***, de forma que conociendo puntos de la gráfica de una función y el tipo de función elemental que es, podemos saber de qué función se trata.

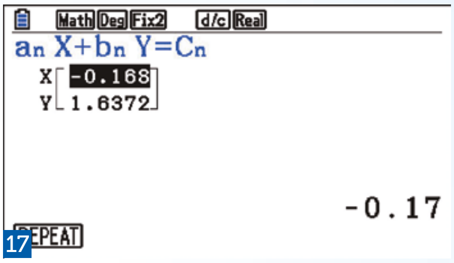
Tenemos pues que resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(9.7)=0 \\ f(4.8)=3.97 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=0 \\ a\cdot 9.7^2+b\cdot 9.7+c=0 \\ a\cdot 4.8^2+b\cdot 4.8+c=3.97 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ 9.7^2a+9.7b=0 \\ 4.8^2a+4.8b=3.97 \end{cases}$$

Utilicemos la calculadora para resolver nuestro sistema tal y como aparece en la tabla 3.

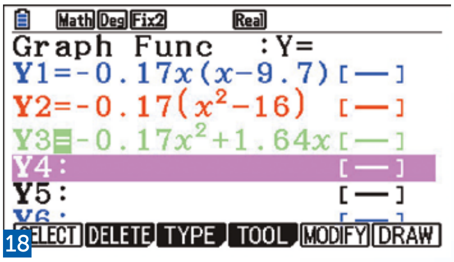


16

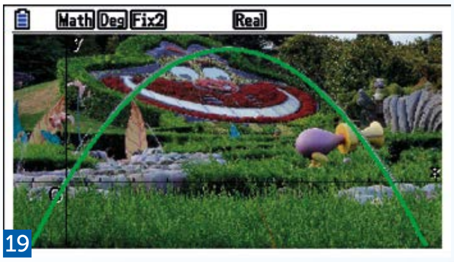


17

De la solución del sistema deducimos que nuestro modelo funcional es el que ya conocíamos *f(x)* = **-0.17**$x^2$ **+ 1.64**$x$, por lo que si lo representamos gráficamente la calculadora nos devolverá la imagen 19.



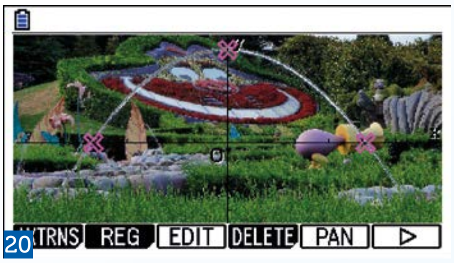
18



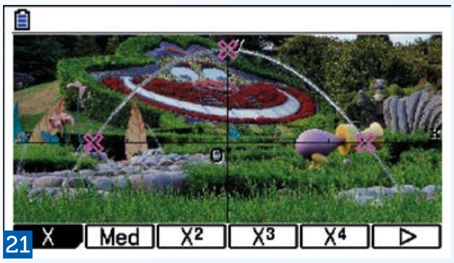
19

## 3

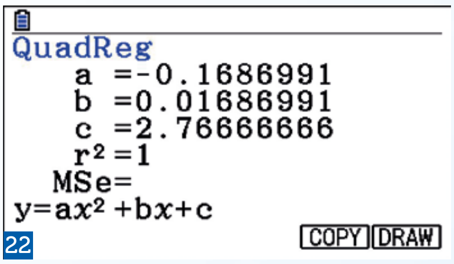
Por último, vamos a utilizar la posibilidad que tenemos de hacer regresiones no lineales para estimar los parámetros de nuestro modelo. Para ello, desde la pantalla en la que hemos situado los puntos por última vez (imagen 8), elegimos realizar una regresión cuadrática para esos puntos, obteniéndose el modelo de regresión y realizando la representación gráfica, tal y como se puede observar en las imágenes 20 a la 23.



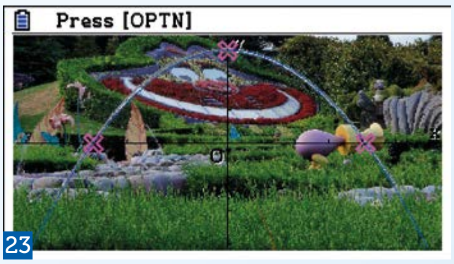
20



21

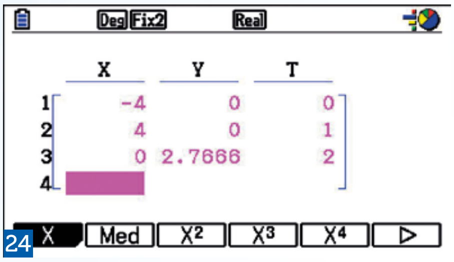


22

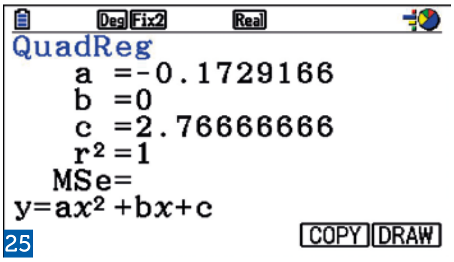


23

Puede chocarnos que en este modelo no aparezca el coeficiente ***b***=**0**; esto no es ningún error, se debe a que nosotros para escribir el modelo funcional hemos tomado ***x***=**4** en lugar de **x=4.1**, tal y como aparecía en la imagen 9. Si editamos los valores de las coordenadas de los puntos y sustituimos **4.1** por **4**, aparece un modelo funcional igual al que habíamos propuesto antes




24




25

## CONCLUSIÓN

La utilización de las herramientas TIC en el aula permite abordar los problemas desde un punto de vista más integrador que permite profundizar en los contenidos y relacionarlos entre sí. Las calculadoras, en sus distintos tipos, no son ajenas a este hecho, siendo herramientas útiles que pueden convivir y complementar a otras herramientas.

# Suscripción CASIO NEWS

Si deseas recibir gratuitamente la revista CASIO NEWS, o deseas que la reciba tu centro, fotocopia esta hoja y a continuación envíala:

**Por e-mail:** info-educativa@casio.es
**Por Fax:** 93 485 84 20
**Por correo:** Casio España S.L., C/ Josep Plà 2, Torre Diagonal Litoral B2, planta 12, 08019 Barcelona

Nombre y apellidos NIF

Dirección

Código Postal Localidad

Teléfono E-mail

Centro Educativo

Materia y nivel educativo

¿Deseas recibir la revista en formato electrónico? Sí / No

¿Deseas recibir la revista por correo postal? Sí / No

# Formación CASIO

CASIO realiza periódicamente cursos de formación (homologados), seminarios y talleres sobre el uso y aplicación de sus calculadoras gráficas y científicas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y demás áreas afines. Las convocatorias se realizaran desde las correspondientes comunidades autónomas y la inscripción es gratuita.

Deseas recibir información sobre los mismos ? Sí / No

# Área bajo una curva. Sumas de Riemann.

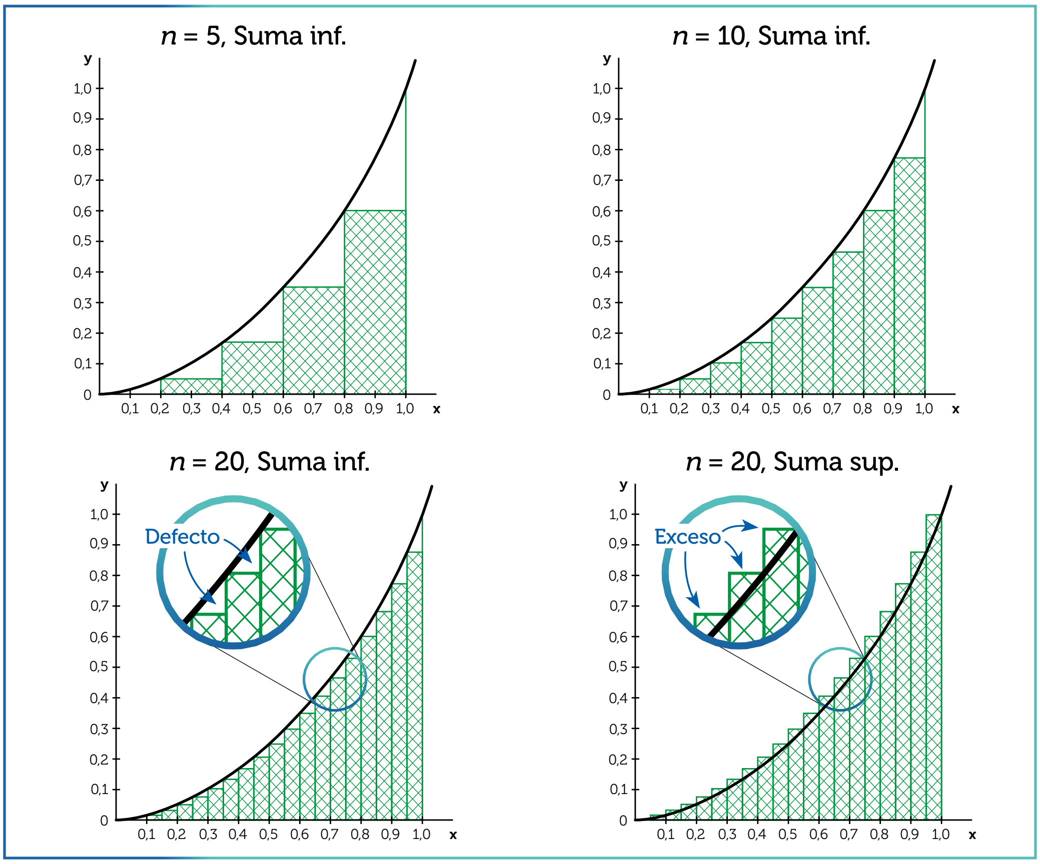
Daniel Vila

**En geometría elemental se deducen fórmulas que permiten calcular el área de cualquier figura plana limitada por segmentos rectilíneos pero, ¿cómo podemos calcular el área de una figura curva?**

Las integrales formalizan el concepto de área de una manera sencilla e intuitiva. Podemos obtener aproximaciones de esta área mediante diversos procedimientos. Hace más de 2.000 años, los griegos desarrollaron el *Método de Exhaución* para el cálculo de áreas. Este método consiste en ir inscribiendo en la región cuya área se quiere calcular, regiones poligonales que la aproximan y cuya área seamos capaces de calcular. Arquímedes usó este método para calcular el área encerrada bajo un segmento de parábola.

**Veamos un ejemplo.**
Calculemos el área del recinto plano limitado por el eje de abscisas, la gráfica de la función $y = x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Para cada número natural $n$ dividimos el segmento [0,1] en $n$ partes iguales de longitud $1/n$. Sobre cada una de esas partes construimos un rectángulo con la altura de la ordenada máxima (rectángulo superior, por exceso o circunscrito) o bien podemos proceder con la altura de la ordenada mínima (rectángulo inferior, por defecto o inscrito), a medida que aumentemos el valor de $n$, los rectángulos cubrirán de manera más fidedigna el área bajo la curva, y el valor real del área se encontrará entre los valores por defecto y por exceso de las sumas de las áreas de los rectángulos calculados (Sumas de Riemann).

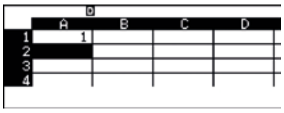



Aprovecharemos la hoja de cálculo de la ClassWiz fx-570/991SP X para aproximar la suma de Riemann a esta función.

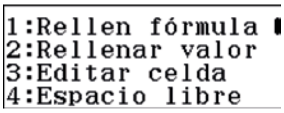
## 1

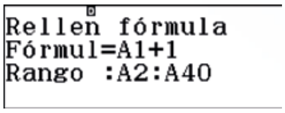
**Empezaremos con la aproximación con rectángulos superiores.**
Dividiremos el intervalo de 0 a 1 en 40 partes iguales (**$n$=40**) numeradas del 1 a 40 en la columna **A**. Cada subintervalo tendrá la misma amplitud **1/40**.

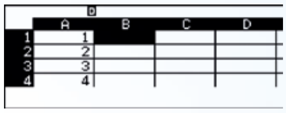
Introducimos el primer valor **A1=1** en la hoja de cálculo y a continuación rellenamos la columna **A**:



[OPTN] [1] [ALPHA] [(−)] [1] [+] [1] [=] [ALPHA] [(−)] [2] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [(−)] [4] [0] [=] [=]



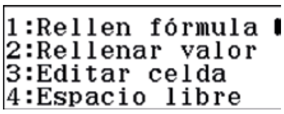


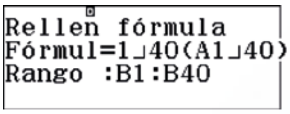


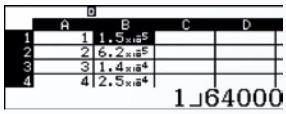
En la columna **B** calcularemos el área $S_n$ de cada uno de los rectángulos superiores que vendrá dada por la longitud de la base **1/40** por la altura, en este caso **($n$/40)²**.

$$S_n = \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{n}{40}\right)^2$$

[OPTN] [1] [1] [▭/▭] [4] [0] [(] [ALPHA] [(−)] [1] [▭/▭] [4] [0] [)] [$x^2$] [=] [ALPHA] [°’’’] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [°’’’] [4] [0] [=] [=]

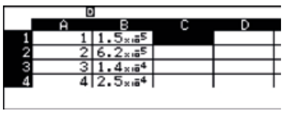
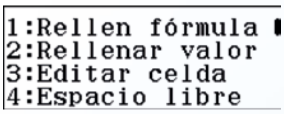


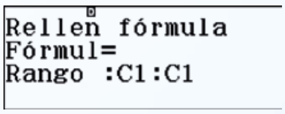


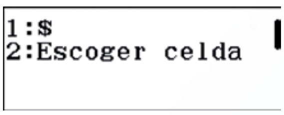


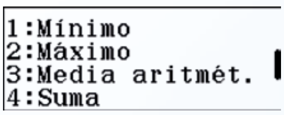

En la celda C1 podemos realizar la suma de las áreas de los rectángulos superiores:

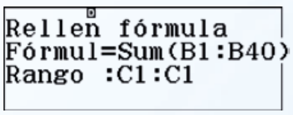
[OPTN] [1] [OPTN] [▼] [4] [ALPHA] [°’’’] [1] [ALPHA] [∫▭] [ALPHA] [°’’’] [4] [0] [)] [=] [=]

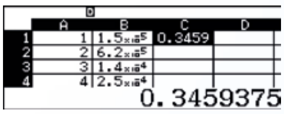










Obtenemos que la aproximación por exceso del área buscada es:

$$A \cong \sum_{n=1}^{40} \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{n}{40}\right)^2 = 0.3459375\ u^2$$

**Observación:**
Si queremos mostrar el valor una vez en situados encima de la celda es necesario configurar la calculadora de la siguiente manera: [SHIFT] [MENU] [▼] [4] [2] [2]

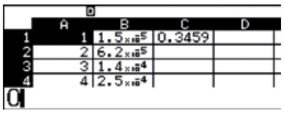
2

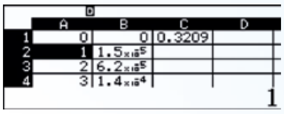
### Aproximación mediante rectángulos inferiores.

Si procedemos al cálculo a partir de los rectángulos con la altura de la ordenada mínima (rectángulos inferiores, por defecto o inscritos), empezaremos numerando la columna **A** de $n$=0 a $n$=39, de esta manera la columna **B** calcularemos el área $S_n$ de cada uno de los rectángulos inferiores, de la misma manera vendrá dada por la longitud de la base **1/40** por la altura, en este caso **($n$=40)²**

$$S_n = \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{n}{40}\right)^2$$

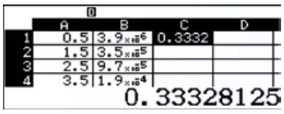
Al disponer la ClassWiz de una hoja de cálculo dinámica, con el simple cambio en la celda **A1**, de manera que ahora **A1=0**, obtenemos la hoja de cálculo actualizada y el resultado de la suma de las áreas de los rectángulos inferiores nos da la aproximación por defecto del área buscada:





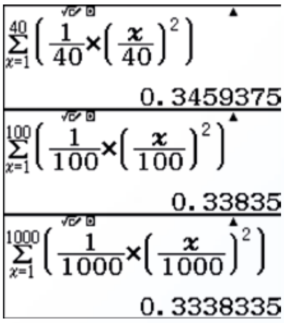

$$A \cong \sum_{n=0}^{39} \frac{1}{40} \cdot \left(\frac{n}{40}\right)^2 = 0.3209375 \ u^2$$

Otra posibilidad sería escoger los rectángulos con una altura igual a la ordenada del punto medio de cada intervalo, de esta manera cambiando **A1** por **0.5** obtenemos la siguiente aproximación:

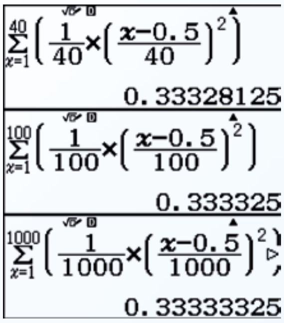



Las limitaciones de la hoja de cálculo (45 filas) no nos permiten establecer una división más pequeña de los intervalos y continuar el proceso de exhaución con la misma, ahora bien, disponemos del operador sumatorio (Σ▬) SHIFT x, desde el menú **1:Calcular**, para continuar nuestra aproximación:

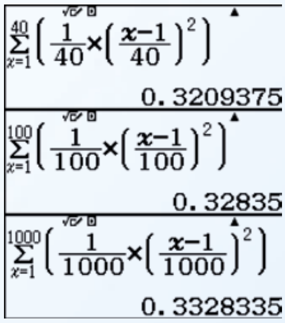
Para las sumas superiores:



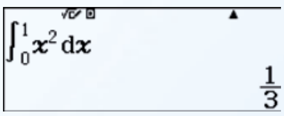

Para rectángulos intermedios:




Para las sumas inferiores:




Para finalizar, podemos aprovechar para mostrar el cálculo directo realizado con la calculadora con su tecla ∫ para realizar integrales definidas.




### Observaciónes:

1. Aunque el resultado obtenido coincide con el valor real del área, obviamente este resultado también es una aproximación numérica del área (en algunas ocasiones el cálculo de integrales numéricas con la calculadora puede demorar unos segundos).
2. Se podría realizar un estudio similar para el Método de los trapecios.

# ¿Es posible pedalear una bicicleta de ruedas cuadradas?

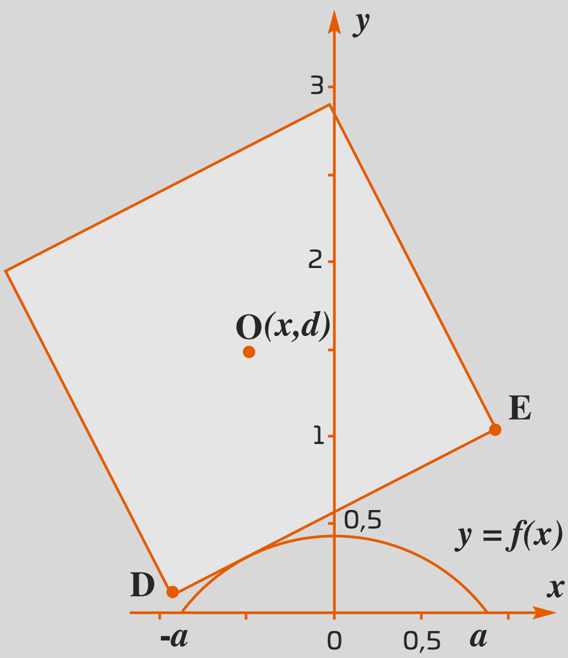
Sergio Schiavone

**En el Museo de las Matemáticas MoMath de Nueva York es posible pedalear en esta bicicleta tan especial. En el MoMath la interacción es la vía por la que los visitantes van a percibir y entender las matemáticas, un museo cuya exposición se basa en la exploración.**

1 1º - 2º ESO
2 3º - 4º ESO
3 1º - 2º BACH.

## ACTIVIDAD

La siguiente imagen muestra, en el plano cartesiano OXY, la situación de la rueda cuadrada a medida que va girando en la superficie curva. El cuadrado de lado $\overline{\mathrm{DE}} = 2$ u y con centro O, representa la rueda de la bicicleta, mientras que la función $f(x)$ describe el perfil de la curva por donde se desplaza la rueda:




**Material**
Calculadora CASIO fx-CG50

Se considera la función:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; x \in \mathrm{R} \text{ en un intervalo } [-a, a]$$

1) Comprueba que $f(x)$ es una función par.

2) Determina el intervalo $[-a, a]$ de la curva.

3) Dibuja la gráfica de la plataforma que recorre la bicicleta considerando que la función $f(x)$ es periódica y tiene período $T = 2 \cdot ln\,(\sqrt{2} + 1)$.

4) Para que la bicicleta circule sin problemas por la plataforma, es necesario que:

- A la izquierda y a la derecha de los puntos no derivables, las rectas tangentes a $f(x)$ sean ortogonales.
- La longitud del lado del cuadrado de la rueda sea igual a la longitud de arco de una de las curvas, es decir, al arco de la curva de ecuación $y = f(x)$ para $\in [-a, a]$.

Determina si se cumplen estas dos condiciones.

5) Considerando los triángulos rectángulos ACL y ALM, y recordando el significado geométrico de la derivada, comprueba que el valor de la ordenada "$d$" del centro de la rueda es constante durante el movimiento. Por este motivo, el ciclista parece moverse en una superficie plana.

6) Si se replica varias veces la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \left[-\frac{ln\,3}{2}, \frac{ln\,3}{2}\right]$$

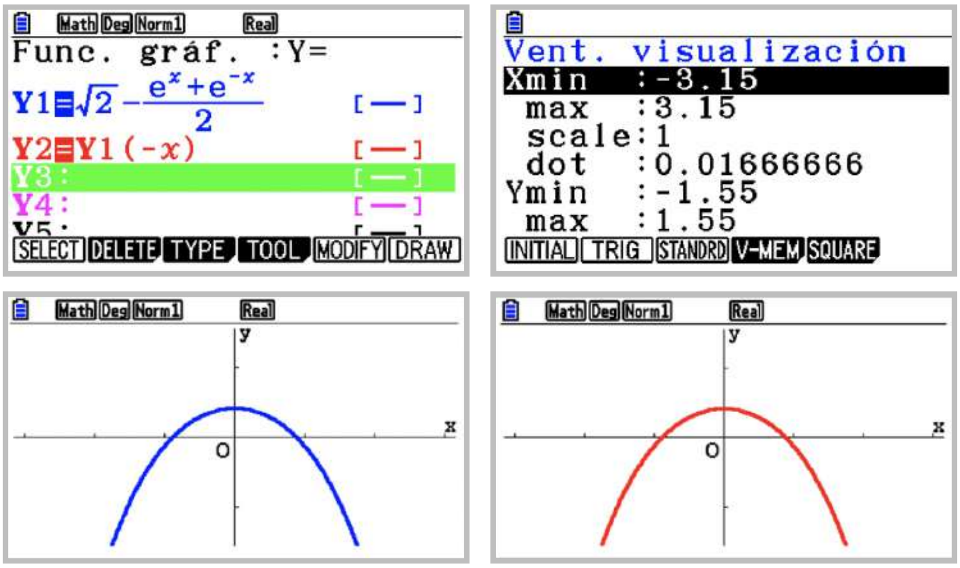
representará el perfil de una plataforma adecuada para una bicicleta con ruedas muy particulares con forma de polígono regular.

Identifica de que polígono regular se trata y justifica la respuesta.

*Museo de las Matemáticas MoMath (Nueva York )*

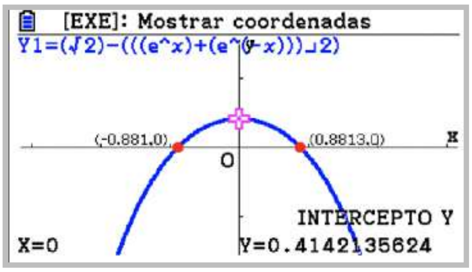
SOLUCIÓN

**1)** Se comprueba gráficamente que la función $f(x)$ es par, $f(x) = f(-x)$ :



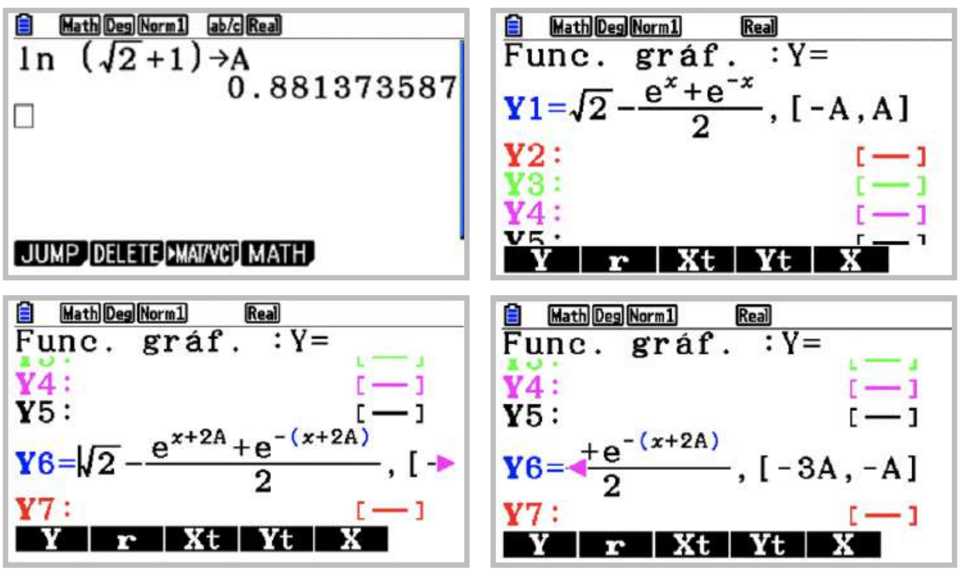

**2)** Se obtienen los puntos de corte de la función con el eje de abscisas:

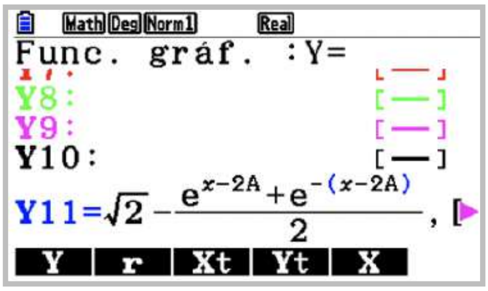
G-SOLV(F5), ROOT(F1), Y-ICEPT(F4)

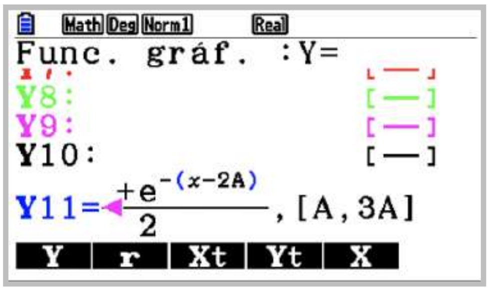


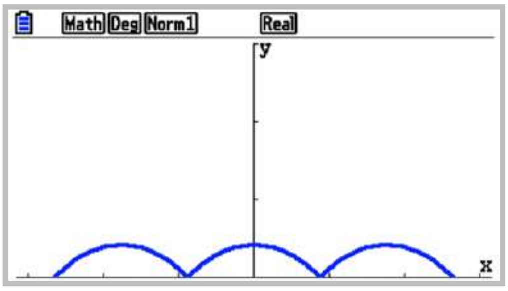

El intervalo de la plataforma es $[ln\,(\sqrt{2}-1),\ ln\,(\sqrt{2}+1)]$ = (-0,8813, 0,8813).

**3)** En el menú **Ejec-Mat** se guarda el valor $ln\,(\sqrt{2}+1)$(punto de corte de $f(x)$ con el semieje positivo de las X) en la variable A. En el menú **Gráfico** se escriben las funciones en Y1, Y6 e Y11 (todas de color azul) teniendo en cuenta el desplazamiento de 2 unidades de $f(x)$ hacia la izquierda y hacia la derecha.



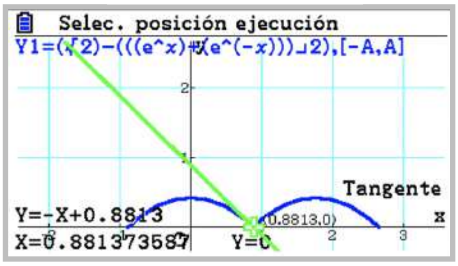


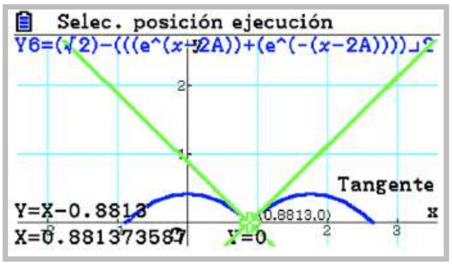



**4)** Se comprueba que las rectas tangentes a $f(x)$ en el punto no derivable $x = A$ son ortogonales:

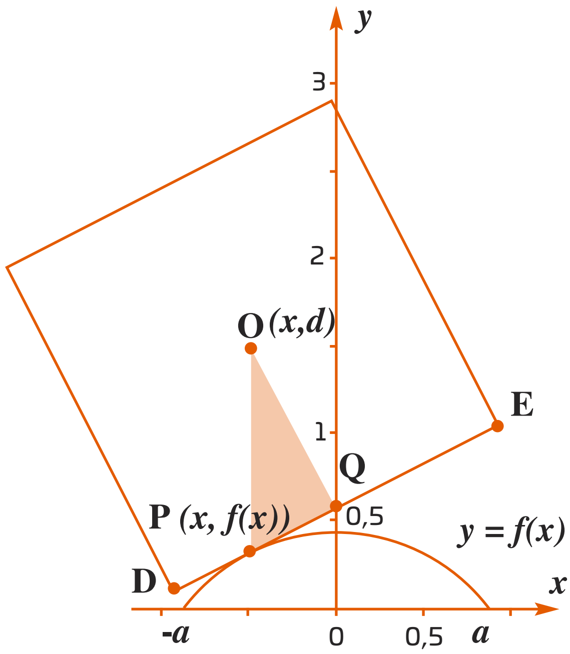
Sketch(F4), Tangent (F2), X,θ,T,
ALPHA, X,θ,T, EXE, EXE




Las rectas $y = -x + 0{,}8813$ e $y = x - 0{,}8813$ son perpendiculares.

Para determinar la longitud de arco de una de las curvas a partir de la ecuación $y = f(x)$, y comprobar que coincide con el lado de la rueda (2 u), se procede con el siguiente cálculo:




$$\overline{OQ} = 1, \overline{OP} = d - f(x)$$

$\overline{DE}$ tangente a la curva en el punto P

$$\alpha = \angle POQ$$

$$\tan\alpha = f'(x) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \overline{PQ}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$$

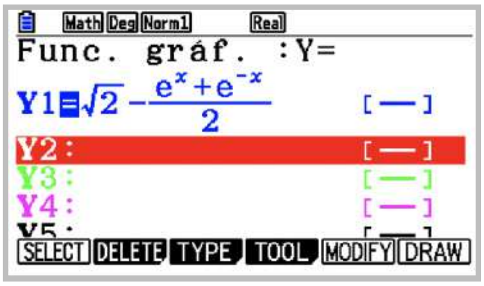
$$(d - f(x))^2 = 1^2 + f'(x)^2,\ d > f(x),\ x \in [-a, a]$$

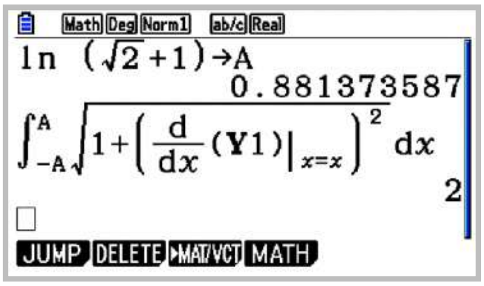
$$d - f(x) = \sqrt{1^2 + f'(x)^2}$$

La longitud del arco es:

$$\int_{-A}^{A} (d - f(x))\ dx = \int_{-A}^{A} \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

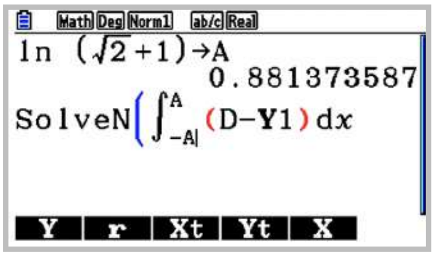
Se escribe la función $f(x)$ en el menú **Gráfico** (sin definir los intervalos) para realizar el cálculo de la integral en el menú **Ejec-Mat**. Se comprueba que el arco de la curva, al igual que el lado del cuadrado, es 2:

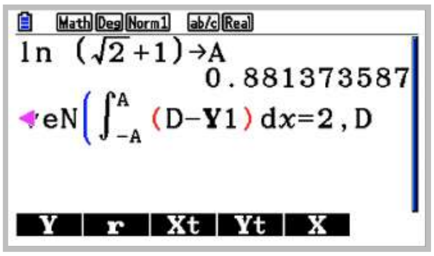


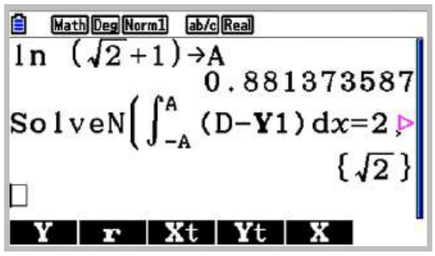




**5)** Para calcular el valor de la ordenada $d$ se resuelve la ecuación:

$$\int_{-A}^{A}(d - f(x))\ dx = 2 \quad (A = ln\,(\sqrt{2}+1))$$

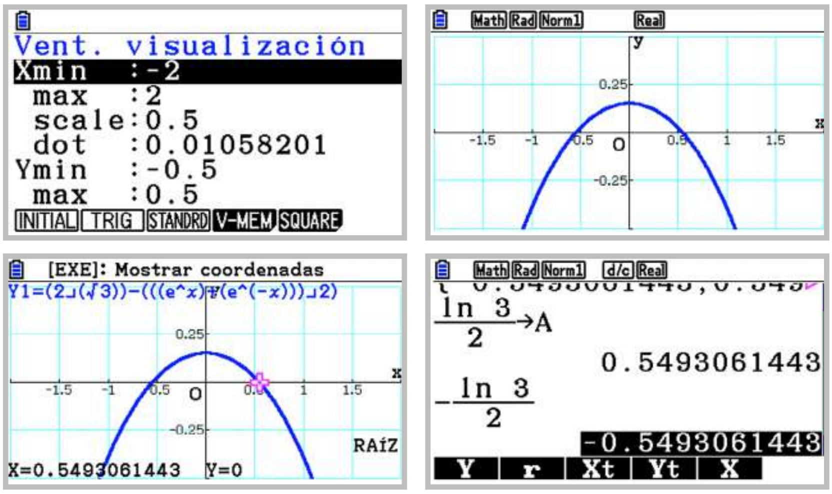


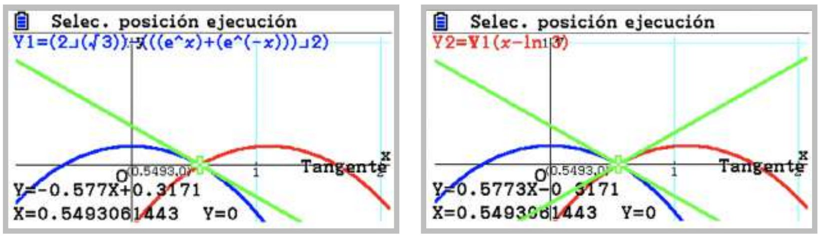




El valor de la ordenada es $d = \sqrt{2}$.

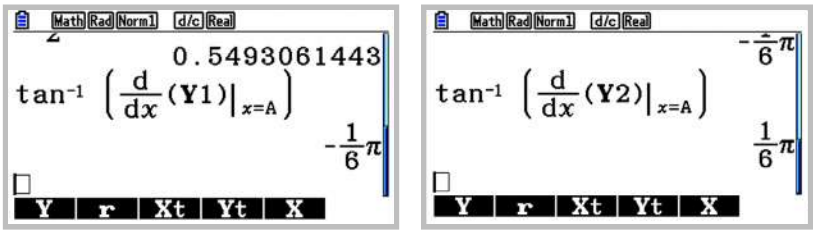
**6)** Se representa la función $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ y se calcula su punto de corte con el semieje positivo de las X. La abscisa del punto, $\frac{\ln 3}{2}$, se guarda en la variable A:



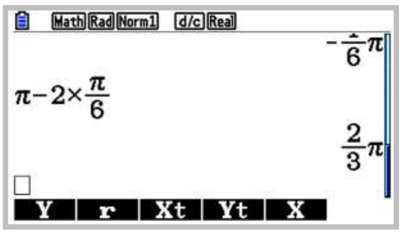

Se dibuja otra de las curvas de la plataforma, $Y2 = Y1\left(x - 2\cdot\frac{\ln 3}{2}\right)$, y se calcula la pendiente de las rectas tangentes a cada curva en el punto $\left(\frac{\ln 3}{2}, 0\right)$:



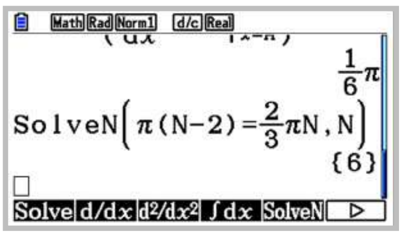

El ángulo que forma cada recta tangente con el semieje positivo de las X es respectivamente de -30° y 30° :



El ángulo que forman las dos rectas tangentes es de 120° :



La rueda, en este caso, tiene forma de hexágono regular:



# Copo de nieve de Koch.

Yolanda Mora Vila

**Mediante el siguiente ejercicio se pretende trabajar con los alumnos los conceptos de sucesión y límite, al mismo tiempo se les introduce en el mundo de los fractales.**

## Ejercicio

Dibuja un triángulo equilátero.

Repite sucesivas veces: Divide cada uno de los lados del polígono en tres segmentos iguales. En el tercio central añade un triángulo equilátero que tenga como lado dicho segmento. Adosa un triángulo en cada uno de los lados del polígono. Repite el proceso en cada uno de los lados.

Figura 1

Figura 2

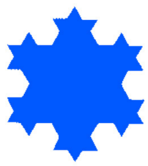


Figura 3

**a)** Si la longitud del lado de la figura de partida es 1 unidad, ¿Cuál es la longitud del lado $l_n$ de la figura 2, 3,..., n? ¿Qué ocurrirá con el lado $l_n$ cuando n sea muy grande?

**b)** ¿Cuál es el perímetro de la figura 1, 2, 3,..., n? ¿Qué ocurrirá con el perímetro $P_n$ cuando vaya aumentando?

**c)** ¿Podrías decir a qué se va aproximando el área de la figura cuando sea cada vez más grande?

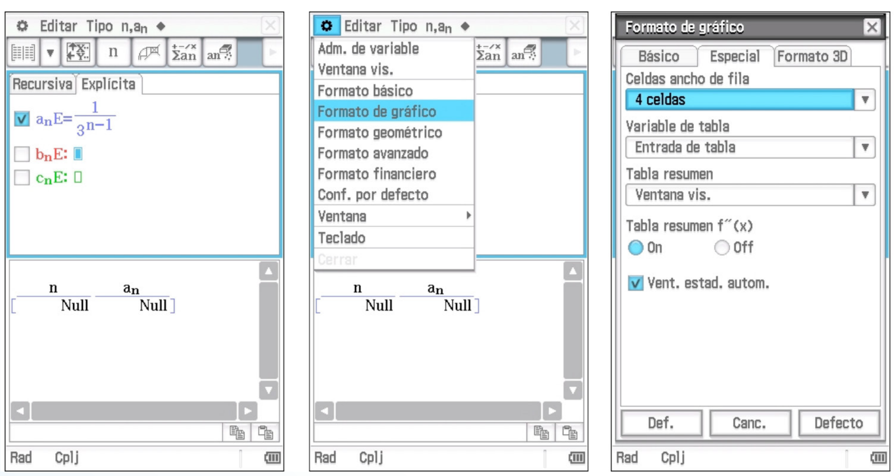
**d)** Si tienes en cuenta la tendencia de la longitud del lado, el perímetro y el área, ¿no consideras que se produce una situación "extraña?

## Solución:

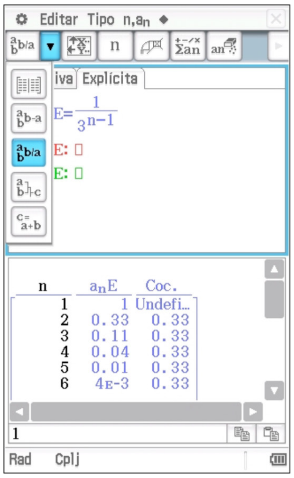
a) Los alumnos razonarán que el lado de cada figura mide un tercio del anterior y que las distintas longitudes forman una sucesión de la que obtendrán su término general.

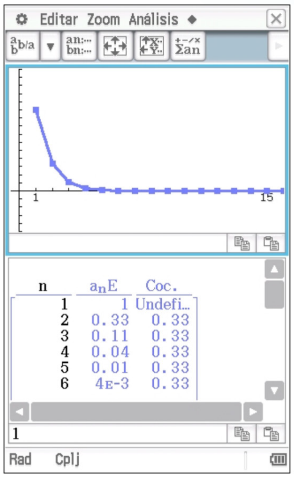
Desde el Menu de la calculadora accedemos a la aplicación Secuencia

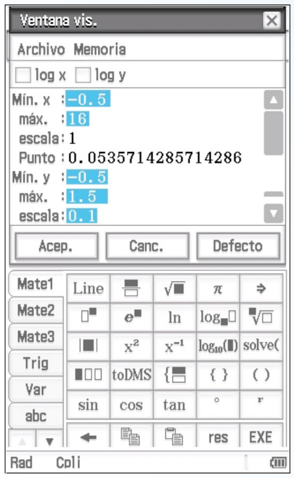
En la ventana de la aplicación, introducimos nuestra sucesión explícita. A continuación, en la rueda de ajustes accedemos a *Formato de gráfico* y en la pestaña *Especial* seleccionamos la opción *4 celdas en Celdas ancho de fila.*



Tal como se ve en la siguiente imagen, pulsamos el icono que nos proporcionará una tabla de valores de los distintos términos de la sucesión, así como el cociente entre 2 términos de la misma, mostrándonos un valor constante que demuestra que estamos trabajando con una sucesión geométrica.
Mediante el icono seleccionamos el rango de la tabla de valores, por ejemplo, desde n = 1 a n = 20
A continuación, seleccionada la ventana inferior, pulsamos el icono para obtener un gráfico continuo y ver que la longitud del lado de las sucesivas figuras tiende a cero. Ajustaremos los parámetros de la ventana de visualización mediante el icono , tal como muestra la figura.

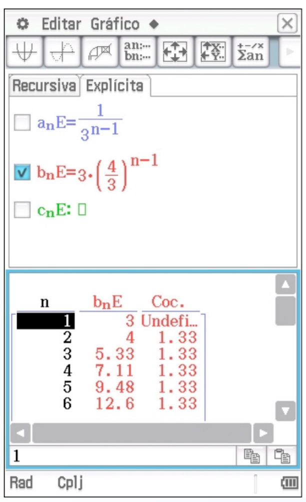


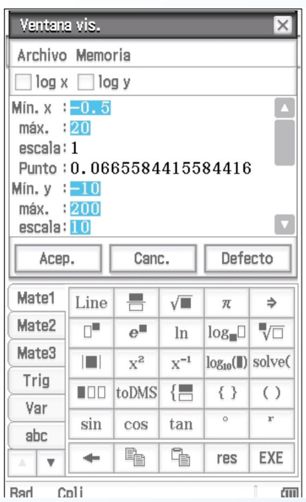



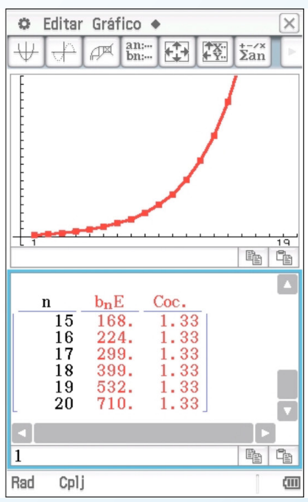




b) Los alumnos deben razonar que la figura n–ésima está formada por $3 \cdot 4^{n-1}$ trozos de longitud $1/3^{n-1}$.

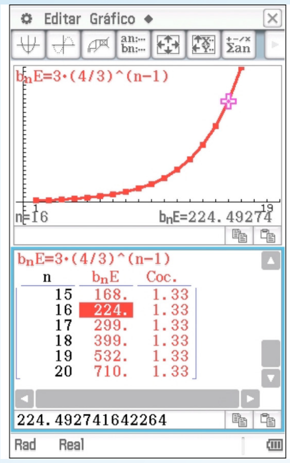
Pulsando sobre el icono , vuelve a aparecer la pantalla de edición donde introducir el término general de la sucesión de los perímetros de las sucesivas figuras. Creamos la tabla de valores a partir de tal como hemos hecho anteriormente y de nuevo con un clic en el icono obtenemos un gráfico continuo. Para visualizar correctamente el gráfico será necesario cambiar los parámetros de la ventana de visualización , los valores altos que toma la sucesión para términos más avanzados obliga a escoger un rango para las *y* adecuado. Inicialmente podemos probar con un valor de ymáx = 20, que comprobaremos que no será suficiente y lo iremos aumentando a 200 e incluso más.

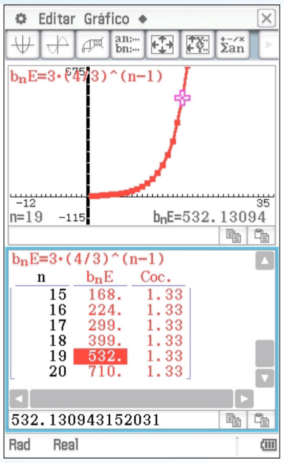



Una vez ajustados los parámetros, visualizamos que el perímetro de las figuras tiende a infinito. Con el icono ◆ de la parte superior de la ventana de la tabla, podemos explicar a los alumnos cómo crear un vínculo entre la tabla y el gráfico.

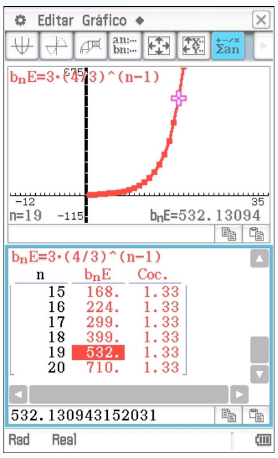


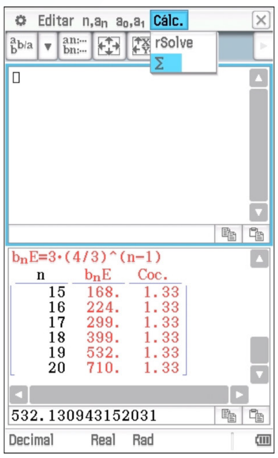



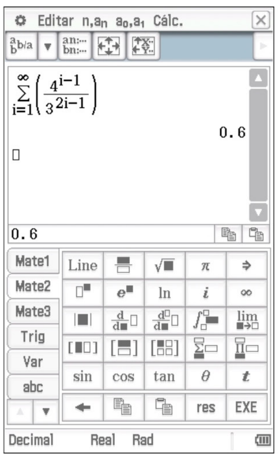

c) En la figura n-ésima aparecen $3{\cdot}4^{n-2}$ nuevos triángulos, cuya área es $1/3^{\,2(n-1)}$ del área inicial A. Así, para ver a qué se va aproximando el área de la figura necesitamos sumar al área inicial A, las sucesivas áreas de los nuevos triángulos.

$$A+\left(\sum_{n=2}^{\infty}3\cdot 4^{n-2}\cdot\frac{1}{3}^{2(n-1)}\right)\cdot A = A+\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4^{i-1}}{3^{2(i-1)}}\right)\cdot A \qquad \text{donde } i=n\text{-}1$$

Pulsando el icono Σan accedemos a una nueva ventana. En la parte superior aparecerá la opción *Cálc.* Y al desplegarla tenemos el símbolo del sumatorio.



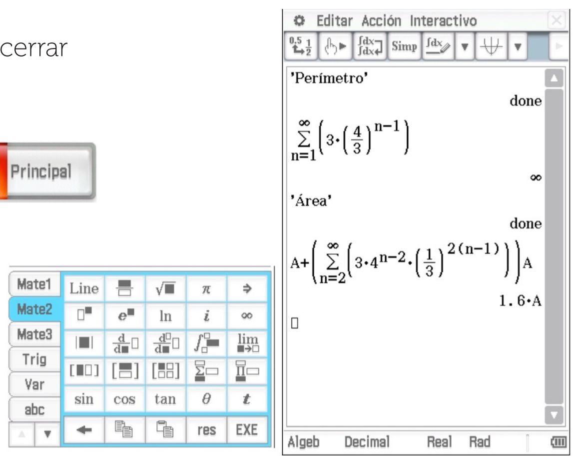




Para la figura n-ésima el área será el área inicial A, mas A por el anterior sumatorio desde i = 1 hasta i = (n–1).

Con esto tenemos que el área de las figuras tiende a: A +0.6A, es decir, un área finita.

d) El copo de nieve de Koch añade la curiosa propiedad de encerrar un área finita mediante una curva de longitud infinita, aunque perdemos la propiedad de autosemejanza.

Desde el Menu de la calculadora accedemos a la aplicación Principal

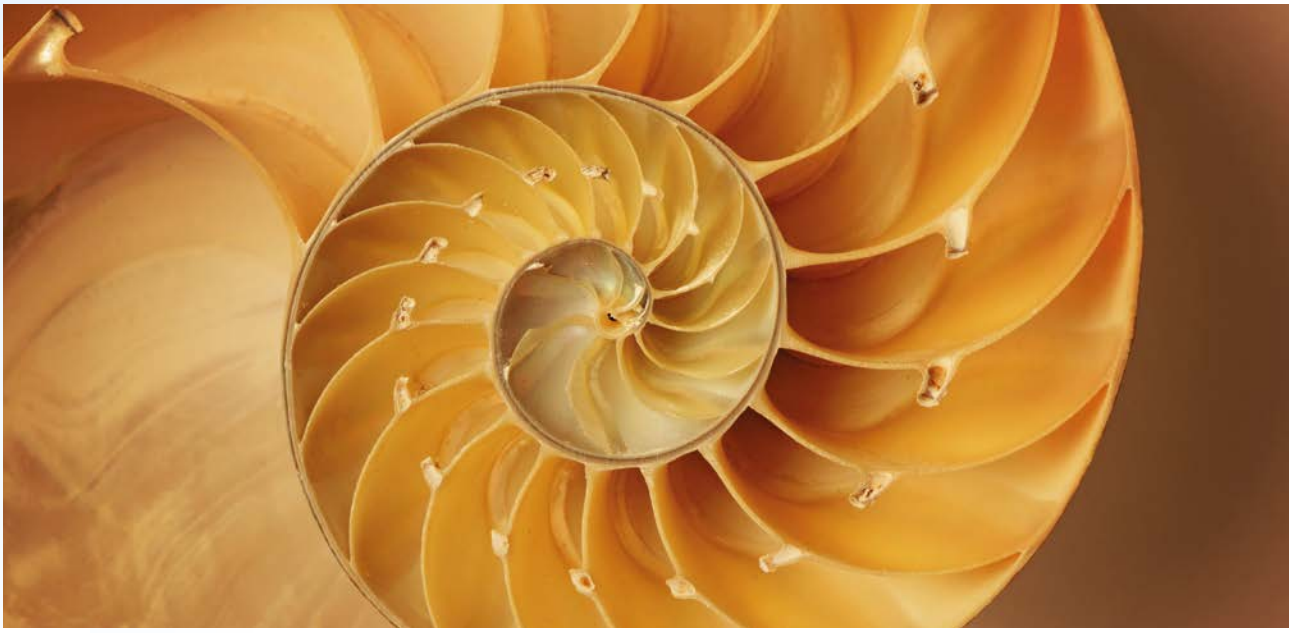


# Inflexión y número de oro

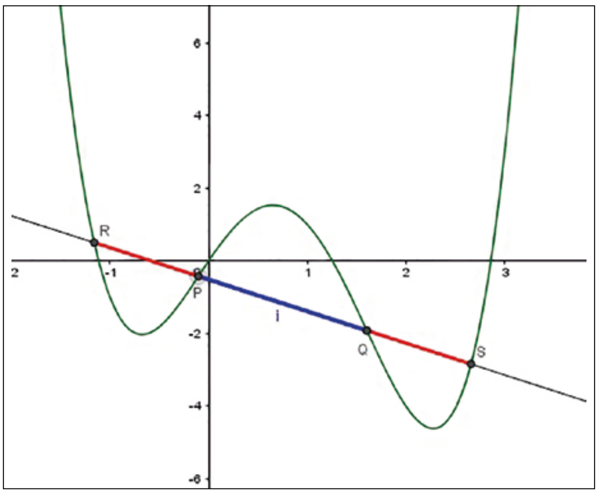
## Relaciones métricas en las funciones polinómicas de cuarto grado

José Mª Chacón Íñigo
IES LLanes, Sevilla

Con esta actividad se pretende comprobar, que no demostrar, una curiosa y sorprendente relación entre las medidas de los segmentos determinados por una función polinómica de 4º grado y la recta que pasa por sus puntos de inflexión.



Sea $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ una función polinómica de cuarto grado con dos puntos de inflexión $P$ y $Q$. Sea $r$ la recta que une $P$ y $Q$. Sean $R$ y $S$ los puntos en los que $r$ corta a $f(x)$ (además de $P$ y $Q$).




Entonces los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ son iguales y además $\frac{|\overline{PQ}|}{|\overline{PR}|} = \varphi$, siendo $\varphi$ el número de oro.

## PROBLEMA

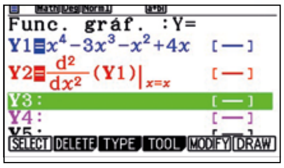
Dada la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 4x$ comprobar lo anteriormente descrito.

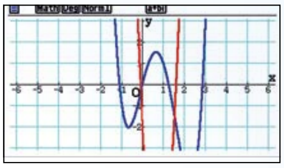
## SOLUCIÓN

Para calcular los puntos de inflexión de $f(x)$, desde el menú ***Gráfico*** se definen las funciones:

$$Y1 = x^4 - 3x^3 - x^2 + 4x \text{ e } Y2 = \frac{d^2}{dx^2}(Y1)\Big|_{x=x}$$

(para escribir la segunda derivada se pulsa OPTN, **CALC** (F2) , $d^2 / dx^2$ (F2) )

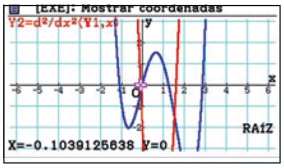


Los puntos donde se anula la segunda derivada son los puntos de inflexión de $f(x)$.

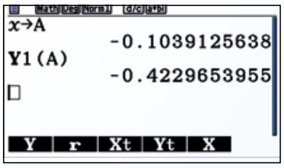
Con la función **G-Solv**(F5) calculamos los puntos de corte de $Y2$ con el eje de abscisas.

Para ello pulsamos **ROOT**(F1), seleccionamos $Y2$ (▼) y pulsamos EXE.



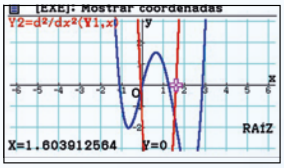

Abrimos el menú ***Ejec-Mat***, guardamos la abscisa del primer punto de inflexión en la variable $A$ (X,θ,T → ALPHA X,θ,T) y calculamos $f(A)$.

(Para escribir la función $Y$ pulsamos: VARS, **GRAPH** (F4), **Y** (F1)).

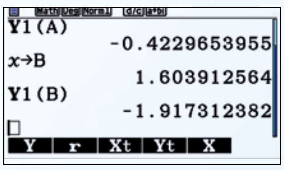



El primer punto de inflexión es $P(-0.1039, -0.4230)$

Abrimos el menú ***Gráfico*** y repetimos el procedimiento para calcular el segundo punto de inflexión, $Q$:



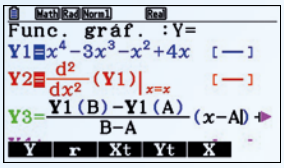

Desde el menú ***Ejec-Mat***, definimos el valor $x \rightarrow B$ y calculamos $f(B)$, la ordenada del segundo punto de inflexión:

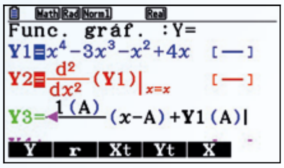


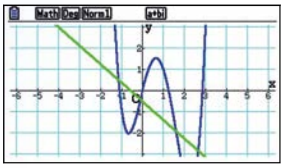

El segundo punto de inflexión es $Q(1.6039, -1.9173)$

Dibujamos la recta $Y3$ que pasa por los puntos $P$, $Q$ desde el menú ***Gráfico***:

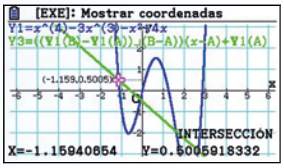
$$Y3 = \frac{Y1(B) - Y1(A)}{B - A}(x - A) + Y1(A)$$



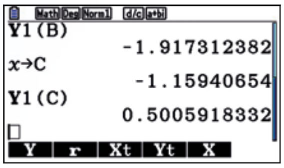




Con **G-Solv** y **INTSECT** (**F5**),calculamos el primer punto de intersección, $R$, de $f(x)$ con la recta:

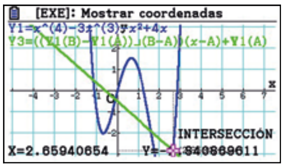


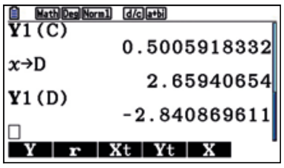

En el menú ***Ejec-Mat***, guardamos la abscisa del primer punto de intersección en la variable $C$ y calculamos $f(C)$:




El primer punto de intersección es $R(-1.1594, 0.5006)$

De la misma manera que antes, desde los menús ***Gráfico*** y ***Ejec-Mat***, calculamos el cuarto punto de intersección, $S$, de la función $f(x)$ y la recta:

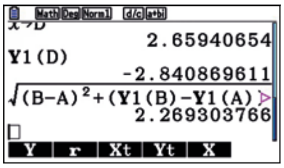




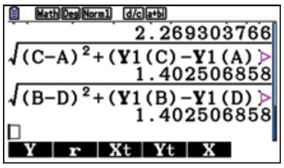

El cuarto punto de intersección es: $S(2.6594, -2.8409)$

Para terminar, calculamos las medidas de los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$:

$$K = \overline{PQ} = \sqrt{(B-A)^2 + (Y1(B) - Y1(A))^2}\ ,\ M = \overline{PR} = \sqrt{(C-A)^2 + (Y1(C) - Y1(A))^2}\ ,\ N = \overline{QS} = \sqrt{(B-D)^2 + (Y1(B) - Y1(D))^2}$$




$K = 2.2693$

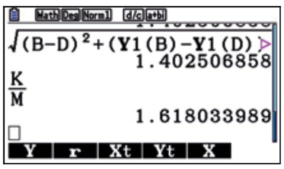


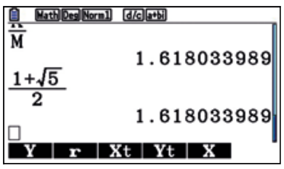

$M = 1.4025$

$N = 1.4025$

Se observa que $M = N$.

Calculamos $\frac{K}{M}$:






Y observamos que se obtiene el número de oro $\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \frac{K}{M} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.

# ¿Tienes un cazo en tu cocina?

Ricard Peiró i Estruch
IES Abastos, Valencia.

El problema que proponemos corresponde a un ejercicio de optimización clásico en el nivel de bachillerato. Para resolverlo se ha utilizado la calculadora fx- 991SP X II / fx -570SP X II ayudándonos con su función de código QR que nos permite visualizar la gráfica de una función.

PROBLEMA

¿Qué dimensiones ha de tener un cazo cilíndrico de un litro de capacidad para que la superficie total sea mínima? Calcular dicha superficie mínima.

SOLUCIÓN

1

$1\ litro = 1000\ cm^3$

Siendo $r$ el radio del cilindro y $h$ la altura, el volumen del cazo es:

$$V = \pi\ r^2 \cdot h$$

$$\pi\ r^2 \cdot h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi\ r^2} \qquad (1)$$

El área está formada por un círculo de radio $r$ y un rectángulo de base $2\pi \cdot r$ y altura $h$. Por lo tanto el área total del cilindro es:

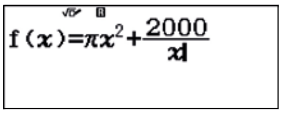
$$S(r,h) = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h \qquad (2)$$

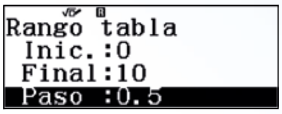
Si sustituimos la expresión (1) en la expresión (2), la función que debe ser optimizada es:

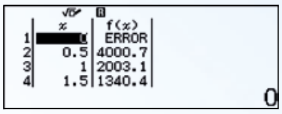
$$S(r) = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \ \frac{1000}{\pi \cdot r^2} \quad \text{con} \quad r > 0$$

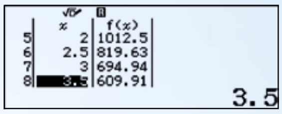
$$S(r) = \pi \cdot r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0$$

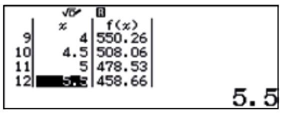
Vamos a representar graficamente esta función, entramos en el menú tabla e introducimos nuestros datos:

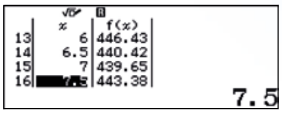








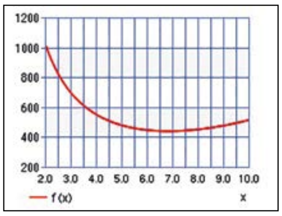




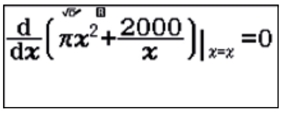

Vemos que entre 6,5 y 7,5 hay un mínimo.

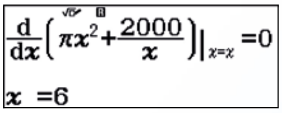
Para representar la función, utilizamos el código *QR* pulsando SHIFT OPTN.

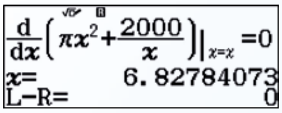
Escaneándolo:




Utilizando la calculadora podemos resolver la ecuación $S'(r) = 0$:

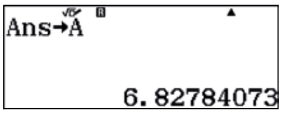


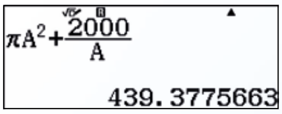





El área mínima se obtiene para $x \approx 6.83\ cm$.

Guardamos el valor del radio en la variable A para calcular el área mínima:






El área mínima es:

$S(6.82784073) \approx 439{,}38\ cm^2$.

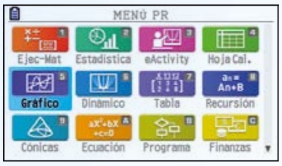
# Transformación de funciones.

Jordi Baldrich Álvarez
Profesor y ex coordinador para España en la División Educativa de Calculadoras CASIO durante 23 años.

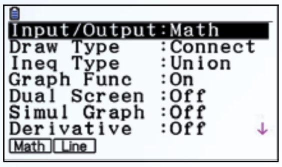
Cuando hablamos de transformaciones de funciones, nos referimos a que la gráfica de una función se puede *mover* en el plano cartesiano. Las transformaciones nos permiten dibujar de manera intuitiva las gráficas una vez que conocemos la forma general de la *función original.*

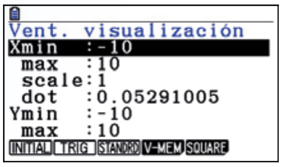
La calculadora gráfica fx-CG50 nos permite comprobar fácilmente estas transformaciones desde el menú "Gráfico" y "Dinámico". A continuación trabajaremos las traslaciones y reflexiones utilizando estas dos opciones que nos ofrece la calculadora.

Entramos en el menú Gráfico:

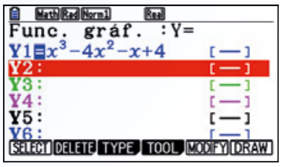


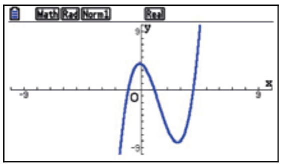

Escogemos la ventana de visualización SHIFT F3 (**V-Window**) Standard F3 (**STANDRD**) y la configuración de display SHIFT MENU (**Set Up**) Input / Output en Math.



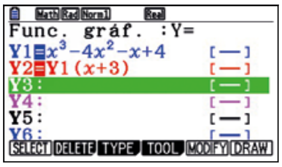



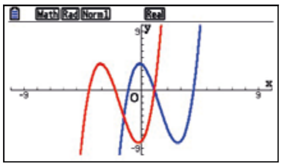

Consideramos la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ y la dibujamos:



A partir de ella estudiaremos las traslaciones. Empezaremos con las transformaciones del tipo $f(x + C)$, escojamos por ejemplo $f(x + 3)$:

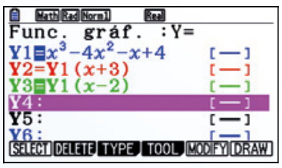


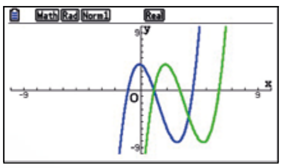



Vemos como la función $Y2$ se ha desplazado tres unidades a la izquierda en el eje de abscisas.
Gracias a la pantalla en color, cada gráfica está asociada con un color a su función y podemos distinguir fácilmente cual es cada una de ellas.

A continuación probaremos con la función $f(x - 2)$.

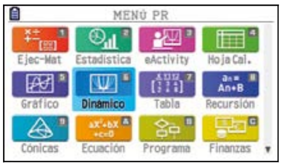
Para introducir $Y1$: VARS, GRAPH (F4), $Y$ (F1), 1



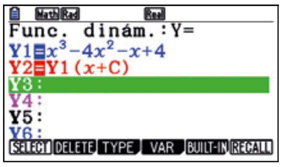



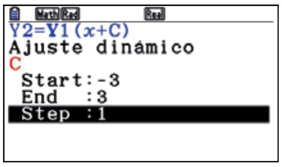
Comprobamos que la función $Y3$ se ha desplazado dos unidades a la derecha en el eje de las $X$ respecto de la original.

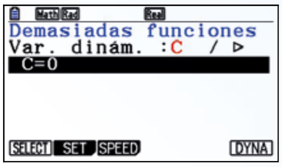
Con la ayuda del menú de gráficos dinámicos  podemos realizar un estudio más genérico sobre la transformación  de la función con respecto a $C$.



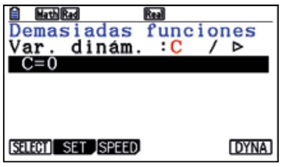

Introducimos la función $Y2$, pulsamos EXE, a continuación **VAR** (F4) y escogemos en **SET** (F2) los valores que deseamos que tome $C$.

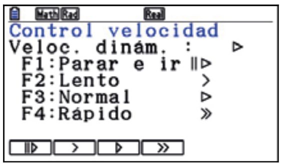


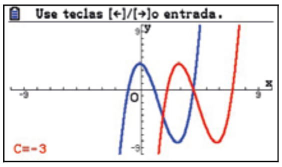

Pulsamos EXIT y a continuación definimos la velocidad de variación del gráfico con **SPEED** (F3), seleccionamos F1 (**Stop&Go**), a continuación EXIT y ejecutamos el gráfico dinámico pulsando **DYNA** (F6).

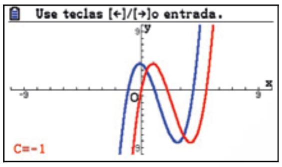


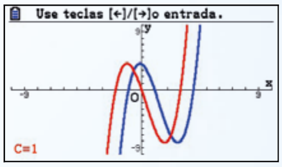


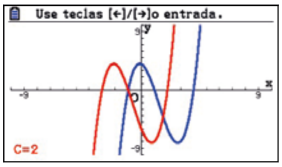

La calculadora nos mostrará la variación del gráfico para cada valor de $C$ cada vez que pulsemos la tecla EXE.

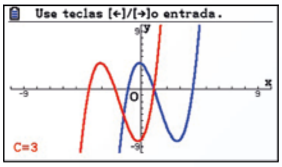


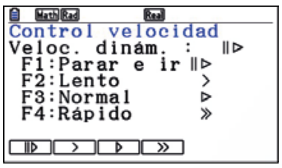




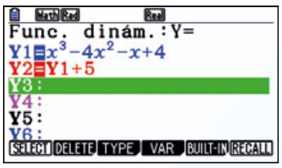



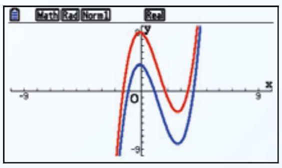

Para cambiar la velocidad a la que se muestran los gráficos, debemos pulsar AC/ON y escoger la más apropiada entre las cuatro que nos ofrece la calculadora.




Veamos ahora las traslaciones en el eje de ordenadas con la transformación $f(x) + C$.

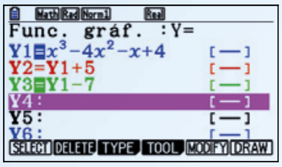
En el menú "Gráfico", escogemos por ejemplo $f(x) + 5$,

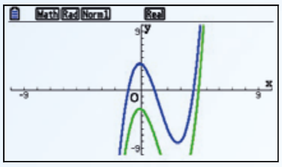


Comprobamos que la función se ha desplazado 5 unidades hacia arriba en el eje de las $y$.

Dibujamos ahora $f(x) - 7$,

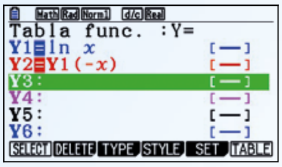


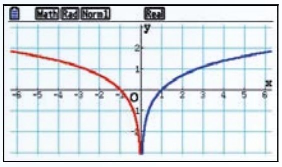



La función $Y3$ se ha desplazado 7 unidades hacia abajo en el eje de ordenadas.

Con las reflexiones veremos la simetría de las funciones con respecto a los ejes, empezamos con la transformación $f(-x)$.

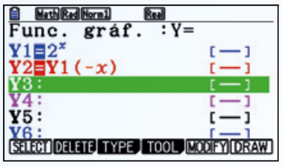
Consideramos $f(x) = ln\ x$ y dibujamos $f(-x) = ln(-x)$:

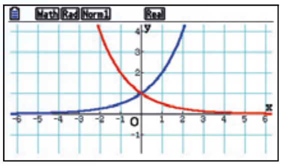


Con esta transformación podemos comprobar cómo se refleja la gráfica respecto al eje de ordenadas.

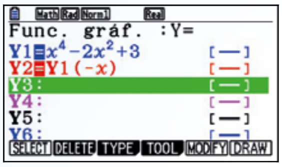
Hacemos lo mismo con $f(x) = 2^x$:

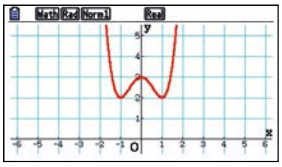


Este tipo de ejercicios nos sirve para hacernos una idea sobre la simetría par de una función.

A modo de ejemplo podemos estudiar la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ y comprobar que $f(x) = f(-x)$.

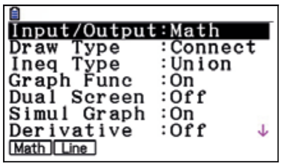


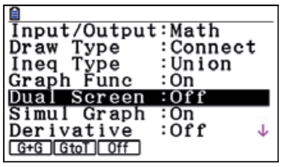



La realización de una tabla de valores para cada función también puede resultar de utilidad para comprobar que las imágenes son las mismas. Podemos hacerlo de dos formas:

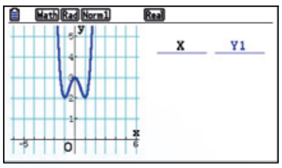
-Visualizando la tabla en la pantalla gráfica:

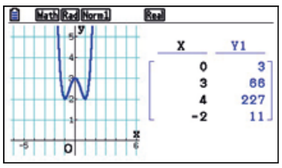
SHIFT MENU (**Set Up**), en la opción Dual Screen pulsamos **G to T** (F2) y EXE.



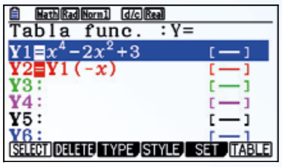



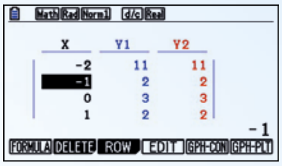

Con la opción **Trace** (F1), introducimos los valores de $x$ y pulsamos EXE, EXE.



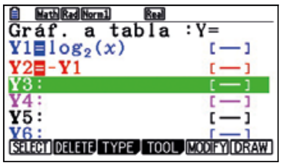
- En el menú **Tabla**, **TABLE** (F6):

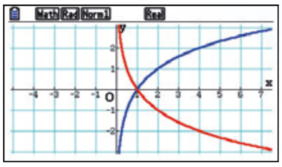




Por último, estudiamos la transformación $-f(x)$.

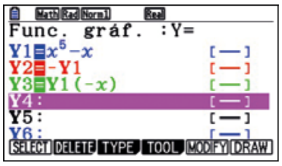
Introducimos $f(x) = \log_2 x$, para escribir "log" basta con pulsar **OPTN**, **CALC** (F2), **logab** (F4)

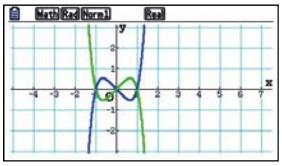


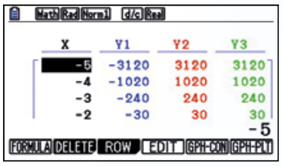



Igual que antes, podemos ver que la gráfica queda reflejada pero en este caso con respecto al eje $x$.

Para estudiar la simetría impar de $f(x) = x^5 - x$, podemos hacerlo desde el menú **Gráfico** o desde el menú **Tabla** y ver que $-f(x) = f(-x)$.






Hemos estimado de interés incluir este breve estudio de las transformaciones de funciones, posible de implementar de manera efectiva y rápida con las calculadoras gráficas CASIO.

Los ejercicios que se pueden resolver a partir de los ejemplos, permitirán avanzar en el dominio de desplazamientos, verticales y horizontales, reflexiones, también verticales y horizontales, expansiones/contracciones, etc lo cual permitirá un mayor dominio del cálculo y análisis, y más adelante en un nivel avanzado, el del cálculo en ingeniería de sistemas.


# El half pipe

**Nieves Atencia Ruiz**
IES Turgalium (Trujillo, Cáceres)

① 1º - 2º ESO
② 3º - 4º ESO
③ 1º - 2º BACH.


**Las actividades contextualizadas son las que más atraen al alumnado, con este ejercicio además de relacionar las rampas de skate con funciones matemáticas para el cálculo de áreas, les haremos ser conscientes del coste de las instalaciones que hay en la ciudad.**

## ACTIVIDAD

En un parque se quiere instalar un half pipe para que los amantes del skate puedan practicar su deporte favorito.

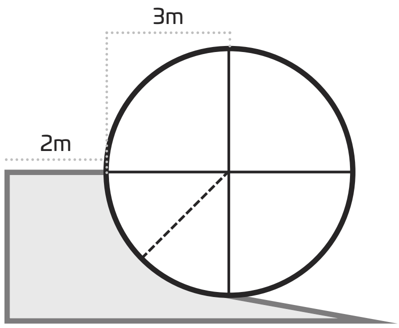
**a)** Define una función a trozos que represente el perfil del half pipe. Hay que tener en cuenta que, de lateral, la plataforma horizontal superior tiene una anchura de 2 m, la parte curva está compuesta por un cuarto de circunferencia que queda medio metro sobre la cota del suelo, y que para salvar esta cota, se ha añadido un pequeño tramo en rampa.

**b)** Está previsto que su construcción sea en hormigón en masa. Si el metro cúbico de hormigón cuesta aproximadamente 50€ y el ancho total del half pipe es de 5 m, calcula el coste en hormigón necesario para realizar esta instalación.

## SOLUCIÓN

**El enunciado de esta actividad permite múltiples soluciones, a continuación, se muestra una de ellas.**

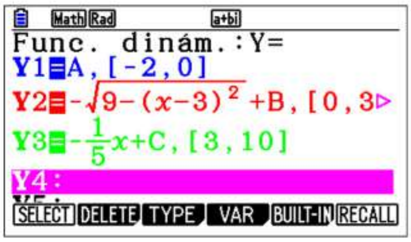
**a)** Se determina que el radio de la circunferencia que forma la rampa es de 3 m y la pendiente del tramo que salva la cota hasta el suelo es, por ejemplo, del 20%. El perfil quedaría de la siguiente forma:

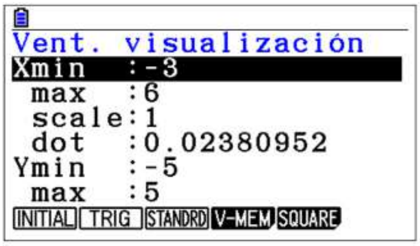



La función a trozos que forma dicho perfil está compuesta por un tramo horizontal, un tramo semicircular y por último un tramo lineal. Se fija el inicio del tramo circular en el "eje y" y la función queda así definida:

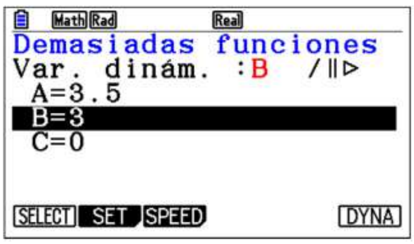
$$f(x)=\begin{cases} A & -2\le x<0 \\ -\sqrt{9-(x-3)^2}+B & 0\le x\le 3 \\ -\dfrac{1}{5}x+C & 3<x\le a \end{cases}$$

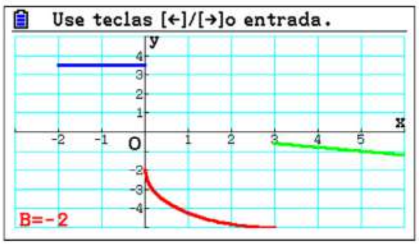
Se escriben las funciones en el menú **Dinámico** y se ajusta la escala para visualizar bien la función:



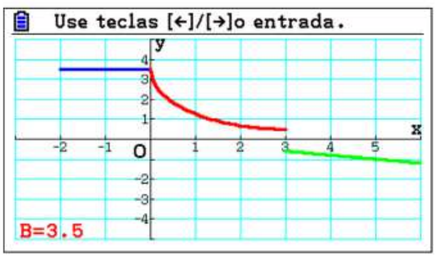




Se define para A el valor de 3,5, puesto que si el radio de la circunferencia es 3 y debe quedar 0,5 m sobre el suelo, el tramo horizontal se encontrará a una altura de 3,5 m. Para C se escoge el valor 0 y se selecciona B para que sea dinámico:

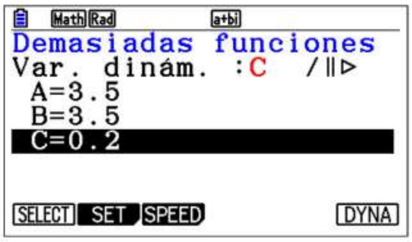



Se desplaza la gráfica Y2 con la tecla ▶ hasta que coincide con el tramo horizontal:

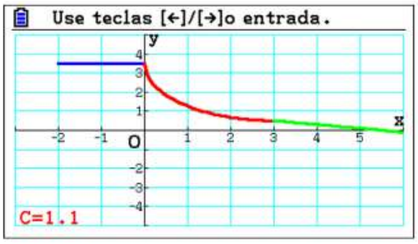


Se comprueba que el valor de B es 3,5. Para hallar el valor de C, se fija el valor de B y se hace C dinámico ajustando cada paso a 0,1:





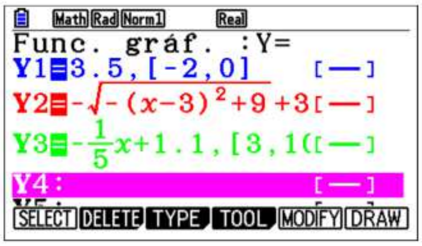
De la misma manera que antes, se pulsa ▶ para desplazar la función Y3 hasta que coincide con el tramo semicircular. El valor de C es 1,1:



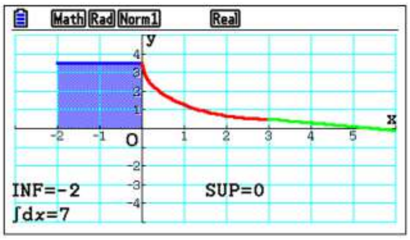

La función resultante es:

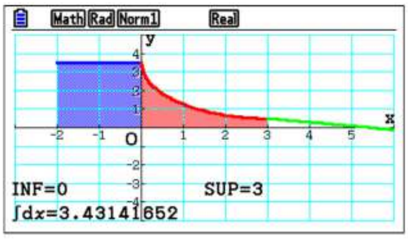
$$f(x) = \begin{cases} 3{,}5 & -2 \leq x < 0 \\ -\sqrt{9-(x-3)^2} + 3{,}5 & 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{5}x + 1{,}1 & 3 < x \leq a \end{cases}$$

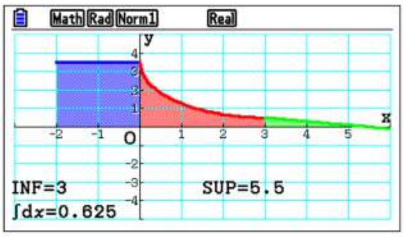
**b)** Para calcular el coste del hormigón es necesario conocer el volumen total que tiene la instalación. En el menú **Gráfico** se cambian las variables A, B y C por los valores determinados anteriormente:



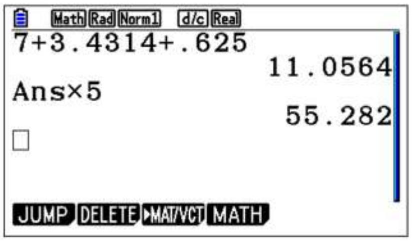

Se dibuja $f(x)$ y se utiliza la función G-solv para calcular las áreas que hay bajo cada tramo, indicando en cada uno el límite inferior y superior:



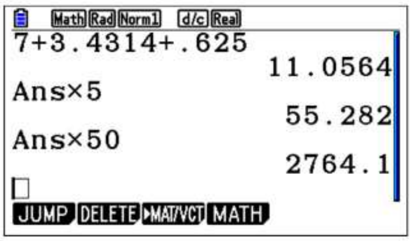




Por último, se suman todas las áreas y se multiplica este resultado por la anchura del half pipe para obtener su volumen:




El volumen del half pipe es de 55,28 m$^3$ y el coste del hormigón es de 2 764,1 €:




# PROBABILIDAD



www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16



**Realizados por: FESPM**

**Recopilados por: Luis Carlos Vidal Del Campo**

**IES ATENEA, CIUDAD REAL**

# 06 | Paradojas
## Coincidencias. La paradoja del cumpleaños


El Museo de las Matemáticas de Cataluña (MMACA) está concebido de manera que cualquier visitante pueda tocar y experimentar con las matemáticas. El siguiente módulo del museo: "Coincidencias", con 15 agujeros y 8 huevos (imagen adjunta) se ha diseñado para realizar la siguiente experiencia:

Se invita a ocho visitantes, de manera que cada uno de ellos coja un huevo (piedra) y, sin haber visto dónde han colocado el suyo los anteriores participantes, debe introducirlo en uno de los 15 agujeros del módulo. Una vez los ochos participantes han introducido el huevo, se alzan las puertas de los 15 agujeros y se comprueba si ha habido coincidencias.

https://www.mmaca.cat

**1** Halla la probabilidad de que los 8 huevos se encuentren en distintos agujeros.

**2** ¿Qué probabilidad habrá de que haya alguna coincidencia?

**3** Simula con la calculadora la experiencia 10 veces, comparte con tus compañeros los resultados, aglutínalos y contrasta los resultados totales obtenidos con el cálculo probabilístico.

**4** Simula varias veces la experiencia y comprueba si obtienes coincidencias.

**La paradoja del cumpleaños.**
Una vez realizada la experiencia anterior y constatar que la probabilidad de que al poner al azar 8 huevos, algunos huevos hayan coincidido en un mismo agujero, es muy alta, podemos afrontar el problema del cumpleaños: *¿Cuál será la probabilidad de que en una clase de 30 alumnos, haya como mínimo dos personas con la misma fecha de cumpleaños?*
Para simplificar el problema, supón que no existen los años bisiestos.

**5** Calcula la probabilidad de que en una clase de 30 alumnos haya como mínimo dos con la misma fecha de cumpleaños.

**6** Como sabes, no todas las clases tienen 30 alumnos. Realiza una tabla donde se muestre qué probabilidad habrá de encontrar una coincidencia en clases desde 15 hasta 35 alumnos.

**7** En el Mundial de futbol de 2014 participaron 32 equipos nacionales, cada uno con 23 jugadores. Usando las fechas de nacimiento de la lista oficial de equipos de la FIFA, resultó que 16 equipos tenían al menos un cumpleaños compartido, algunos de ellos con dos pares de coincidencias: Argentina (x2), Australia, Bosnia Herzegovina, Brasil, Camerún, Colombia, Corea del Sur (x2), España, Estados Unidos, Francia (x2), Holanda, Honduras, Irán (x2), Nigeria, Rusia y Suiza (x2).

En vista del estudio probabilístico realizado en las actividades anteriores, ¿qué opinas al respecto? ¿Puedes afirmar que en el próximo mundial se dará está misma situación?

**8** En cualquier reunión de más de 50 personas, la probabilidad que haya dos que celebren el cumpleaños el mismo día es prácticamente 1.

¿Puedes corroborar está afirmación?

# Coincidencias. La paradoja del cumpleaños



## MATERIALES

Calculadora CASIO fx-570/991SP X II Iberia

## NIVEL EDUCATIVO

4º de ESO

## ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y TÉCNICAS

- Con esta actividad se puede analizar cómo, en términos de probabilidad, la intuición no siempre nos lleva al resultado correcto.
- El uso de la regla de Laplace y la combinación de probabilidades nos llevará a un resultado a primera vista no compatible con la intuición, pero cierto matemática y casuísticamente.
- El uso de la calculadora favorece la simulación de la experiencia y que la atención se centre en la toma de decisiones, en la formulación de conjeturas y en su validación.

## EJEMPLO DE SOLUCIÓN

**1**

La probabilidad de que, aleatoriamente, los 8 huevos se encuentren en distintos agujeros es aproximadamente del 10%:

$$\frac{15}{15}\times\frac{14}{15}\times\frac{13}{15}\times\frac{12}{15}\times\frac{11}{15}\times\frac{10}{15}\times\frac{9}{15}\times\frac{8}{15}$$

0.1012369383

o bien:

$$\frac{15!}{(15-8)!\times 15^8}$$

0.1012369383

**2**

El resultado anterior conduce a que la probabilidad de que haya alguna coincidencia es:

1 – 0,101 = 0,899, es decir, prácticamente del 90%.

Este resultado puede sorprender, puesto que prácticamente 9 de cada diez veces que se realice la experiencia, se obtendrán coincidencias.

**3**

La función aleatoria *RanInt#* permite simular la experiencia tantas veces como se quiera:

*RanInt#*(1,15) genera aleatoriamente un número entero entre 1 y 15, que corresponde al número del agujero donde se coloca la piedra (huevo). Pulsando la tecla = sucesivamente hasta 8 veces emulando la experiencia:

ALPHA · 1 SHIFT ) 1 5 ) = = = = = = = =

```
RanInt#(1,15)
7   11   3   11   9   2   3   8
```

Para una mejor visualización de la experiencia, se cambia la configuración de la calculadora:

SHIFT MENU 1

```
1:Entrada/Salida
2:Unidad angular
3:Formato número
4:Result fracción
```

3

```
1:E Mat/S Mat
2:E Mat/S Decimal
3:E Línea/S Línea
4:E Línea/S Decim
```

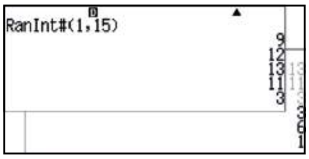
SHIFT MENU ▼ ▼ ▼ 3

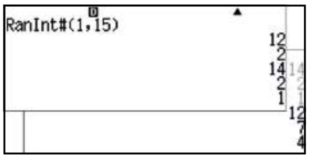
```
1:Símbolo decimal
2:Separar dígitos
3:Fuente multilín
4:Idioma
```

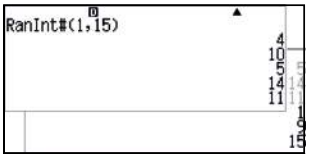
2

```
1:Fuente normal
2:Fuente pequeña
```

Se muestran como ejemplo tres simulaciones:







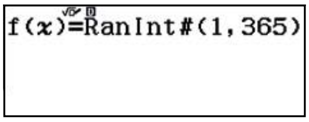

Se comprueba que en la primera experiencia existe una coincidencia, en la segunda hay dos y, en la tercera no hay coincidencia. El alumnado puede repetir tantas veces como quiera la experiencia y comprobar el cálculo de probabilidades.

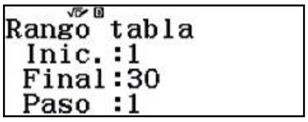
La razón de la suma de todas las simulaciones con al menos una coincidencia y el total de las simulaciones realizadas por el grupo clase debería acercarse al valor teórico (0,899) del **apartado 2**.

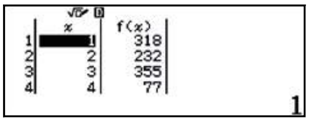
**4**

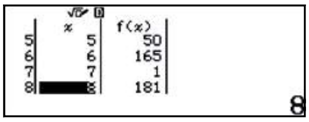
La solución a esta cuestión es análoga a la anterior, basta con cambiar los agujeros por los días del año y las piedras (huevos) por personas. Para simplificar el problema, se supondrá que no existen los años bisiestos.

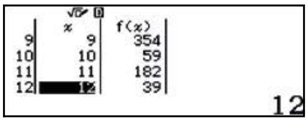
En esta ocasión se debe generar un número entero aleatorio entre 1 y 365, pulsando 30 veces consecutivas la tecla ⊟. Esta operativa no resulta demasiado cómoda, motivo por el que se aprovecha el menú *Tabla* para simular la experiencia:

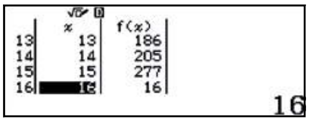


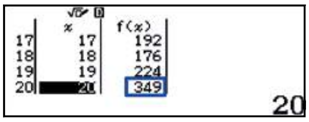


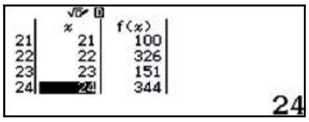



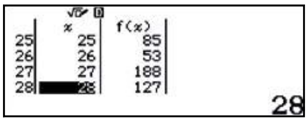


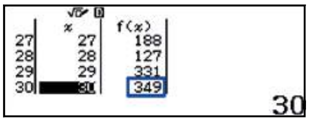













Se observa que más de la mitad de las veces se encuentra al menos una coincidencia. En concreto esa probabilidad es aproximadamente del 71%.

**5**

¿Qué ocurrirá con los cumpleaños de $n$ personas distribuidos entre los 365 días del año?

El número de $n$ cumpleaños sin que haya coincidencias viene dado por:

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$$

Esto es debido a que para el primer cumpleaños existen 365 posibles fechas, para el segundo 364 y así sucesivamente hasta $n$ cumpleaños.

El número total de $n$ cumpleaños sin tener ningún tipo de restricción es $365^n$, debido a que hay 365 posibles fechas para cada uno de los $n$ cumpleaños.

Por consiguiente, la probabilidad de que no haya dos personas con la misma fecha de cumpleaños viene dada por la expresión:

$$Q(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

La probabilidad $P(n)$ de que al menos dos personas tengan la misma fecha de cumpleaños (día y mes) viene dada por:

$$P(n) = 1 - Q(n) = 1 - \left(\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}\right) = 1 - \left(\frac{365!}{(365 - n)! \cdot 365^n}\right)$$

Para $n = 30$ alumnos, realizar el cálculo a partir de la primera expresión presenta la dificultad de introducir 30 factores, que puede llevar a cometer algún error. Tampoco es útil la segunda expresión debido a que el cálculo del factorial de 365 se encuentra fuera del rango de operatividad de la calculadora.

# Coincidencias. La paradoja del cumpleaños

Con el operador productorio (ALPHA $x$ ($\prod$)) se calcula la probabilidad $P(30)$ a partir de la primera expresión:

$$1-\prod_{x=1}^{30}\left(\frac{365-x+1}{365}\right) \qquad 0.7063162427$$

o bien:

$$1-\frac{\prod_{x=1}^{30}(365-x+1)}{365^{30}} \qquad 0.7063162427$$

$P(30) \cong 71\%$

**6**

En una tabla de valores se pueden hallar las distintas probabilidades de obtener una coincidencia en función del número de alumnos:

$$f(x)=1-\frac{\prod_{x=1}^{x}(365-x+1)}{365^{x}}$$

Rango tabla
Inic. :15
Final :35
Paso :1

| | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 0.2529 |
| 2 | 16 | 0.2836 |
| 3 | 17 | 0.315 |
| 4 | 18 | 0.3469 |

15

| | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 7 | 21 | 0.4436 |
| 8 | 22 | 0.4756 |
| 9 | 23 | 0.5072 |
| 10 | 24 | 0.5383 |

24

| | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 15 | 29 | 0.6809 |
| 16 | 30 | 0.7063 |
| 17 | 31 | 0.7304 |
| 18 | 32 | 0.7533 |

32

**7**

En un grupo de 23 personas la probabilidad de que al menos dos de ellas hayan nacido en la misma fecha (día y mes) es del 50% tal y como se muestra en el **apartado anterior**.

En este caso, en el mundial de fútbol del 2014, los datos reales concuerdan con los resultados teóricos.

En el próximo mundial de fútbol no se puede asegurar que se repetirá la situación, puesto que la teoría de la probabilidad se basa en la ley de los grandes números. No se puede considerar que 32 equipos es un número 'grande' de sucesos en términos probabilísticos.

**8**

La probabilidad de coincidencia en un grupo de 50 personas es:

$$1-\prod_{x=1}^{50}\left(\frac{365-x+1}{365}\right) \qquad 0.9703735796$$

Es decir, la afirmación es correcta.

**OBSERVACIÓN**

Si desea consultar información sobre el Museu Matemàtiques de Catalunya, lo puede hacer a través de los siguientes enlaces:

https://mmaca.cat

https://mmaca.cat/moduls/

# Distribuciones de probabilidad con la calculadora científica Classwiz FX-570/991 SP XII

José Mª Chacón Íñigo
IES Llanes, Sevilla

Te explicamos como realizar la operación de distribución de probabilidad discreta y continua en las calculadoras científicas Classwiz FX-570/991 SP XII.

## DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL.

Recordemos:

- Un experimento sigue el modelo de la distribución binomial si:

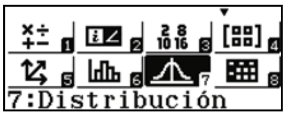
  1. En cada prueba del experimento sólo son posibles dos resultados: el suceso $A$ (éxito) y su contrario $\bar{A}$.
  2. La probabilidad del suceso $A$ es constante, es decir, que no varía de una prueba a otra. Se representa por $p$.
  3. El resultado obtenido en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos anteriormente.

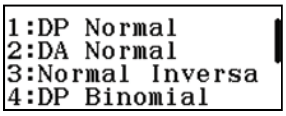
- La variable aleatoria binomial, $X$, expresa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento.

- La variable binomial es una variable aleatoria discreta, sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4,..., $n$ suponiendo que se han realizado $n$ pruebas.

- La distribución binomial se suele representar por $B(n, p)$, donde $n$ es el número de pruebas de que consta el experimento y $p$ es la probabilidad de éxito. La probabilidad de $\bar{A}$ es $1- p$, y la representamos por $q$.

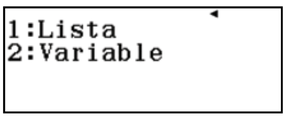
Veamos cómo utilizar la aplicación **7: Distribución** de la calculadora para realizar cálculos con distribuciones binomiales:

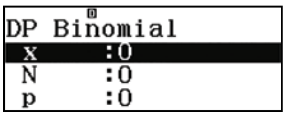



Elegimos **4: DP Binomial**. Este comando calcula la probabilidad de que una variable aleatoria que sigue una distribución binomial sea un valor $x$ dado. Determina la probabilidad de $x$ éxitos cuando se realizan $N$ intentos con probabilidad (posibilidad) de éxito $p$.

Vamos a trabajar con **2: Variable.**



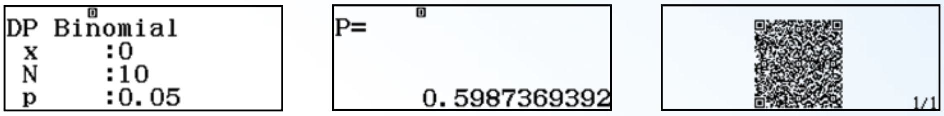
## 1

Una máquina produce determinadas piezas de las cuales se ha comprobado que el 5% son defectuosas. Tomamos 10 piezas al azar. Calcula la probabilidad de que:

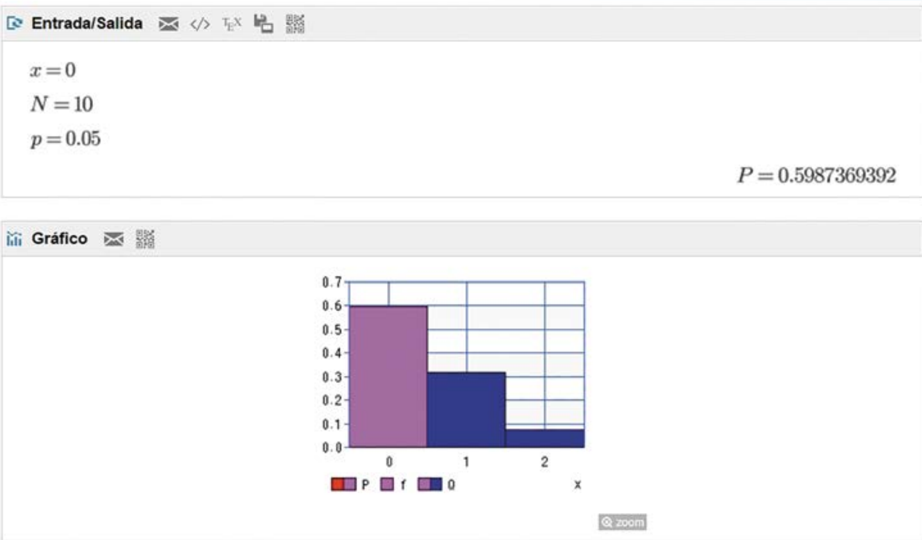
**a)** No haya ninguna defectuosa.

**b)** Haya exactamente dos piezas defectuosas entre las 10 elegidas.

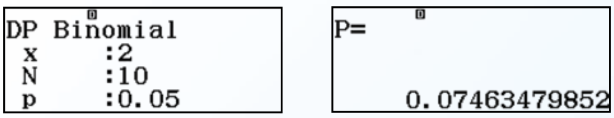
**a)** [0] [=] [1] [0] [=] [0] [·] [0] [5] [=] [=]

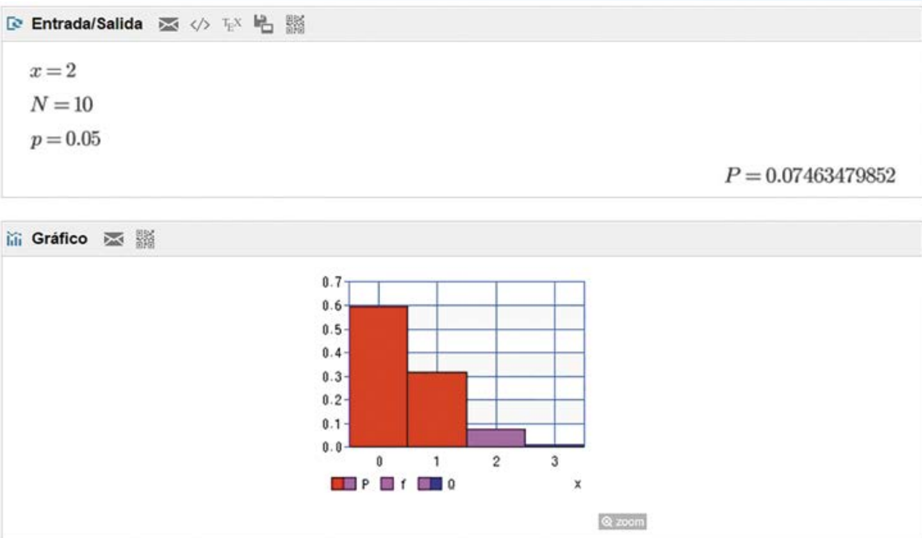



Si generamos el código QR con [SHIFT] [OPTN] y lo escaneamos con la aplicación adecuada en un dispositivo móvil obtenemos los datos y el gráfico de la distribución.




**b)** [2] [=] [1] [0] [=] [0] [·] [0] [5] [=] [=]



Para calcular la probabilidad de que una variable aleatoria que sigue una distribución binomial sea un valor $x$ dado o menor, o sea, para determinar la probabilidad de $x$ o menos éxitos cuando se realizan $n$ intentos con probabilidad de éxito $p$, se utiliza:

```
1:DP Normal
2:DA Normal
3:Normal Inversa
4:DP Binomial
```

▼

```
1:DA Binomial
2:DP Poisson
3:DA Poisson
```

**1: DA Binomial** (Distribución acumulada o acumulativa Binomial)

**2**

La probabilidad de que el equipo A gane al equipo B un partido de tenis es 2/3 . Si se juegan 6 partidos, calcula la probabilidad de que el equipo A gane más de la mitad de los partidos al equipo B.

Este ejercicio puede realizarse directamente con la calculadora teniendo en cuenta que para que A gane más de la mitad ha de ganar 4, 5 o 6 partidos; o sea, debe perder como máximo 2. Por tanto cambiamos a probabilidad (acumulativa).

Para cambiar el tipo de cálculo de distribución o volver a la pantalla de inicio de distribuciones se pulsa OPTN 1

```
1:Seleccion tipo
```

1

```
1:DP Normal
2:DA Normal
3:Normal Inversa
4:DP Binomial
```

▼

```
1:DA Binomial
2:DP Poisson
3:DA Poisson
```

1

```
1:Lista
2:Variable
```

2

y calculamos $P[x \leq 2]$ (tomando $p$ como probabilidad de perder).

```
DA Binomial
 x      :2
 N      :6
 p      :1−2÷3
```

```
P=
        0.6803840878
```

## DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTINUA: DISTRIBUCIÓN NORMAL.

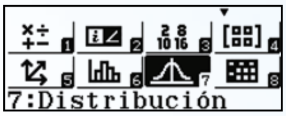
**Recordemos:**

- Una variable aleatoria continua sigue una distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma$, y se designa por $N(\mu, \sigma)$, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La variable puede tomar cualquier valor: $(-\infty, +\infty)$.
2. La función de densidad, es: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Esta distribución permite describir probabilísticamente fenómenos estadísticos donde los valores más usuales se agrupan en torno a uno central y los valores extremos son escasos.

Veamos cómo utilizar la aplicación **7: Distribución** de la calculadora para realizar cálculos con distribuciones normales. Es sumamente sencillo y proporciona resultados inmediatos sin necesidad de utilizar engorrosas tablas de distribuciones ni tipificar la variable. Además permite calcular probabilidades de cualquier tipo $P(x<a)$, $P(x>a)$, $P(a<x<b)$. También permite visualizar las gráficas correspondientes.




```
1:DP Normal
2:DA Normal
3:Normal Inversa
4:DP Binomial
```

Elegimos **2: DA Normal**.

## 3

En una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4, calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(x<23)$ b) $P(21<x<25{,}5)$ c) $P(x=23)$ d) $P(x>40)$

**a)** OPTN 1 2 (−) 1 0 0 0 = 2 3 = 4 = 2 0 =

```
DA Normal
 Inf.  :-1000
 Sup.  :23
 σ     :4
 μ     :20
```

```
P=
        0.7733726476
```

**b)**

```
DA Normal
 Inf.  :21
 Sup.  :25.5
 σ     :4
 μ     :20
```

```
P=
         0.316727952
```

Generamos el código QR y accedemos a la información que ofrece:

**Entrada/Salida**

$Lower = 21$

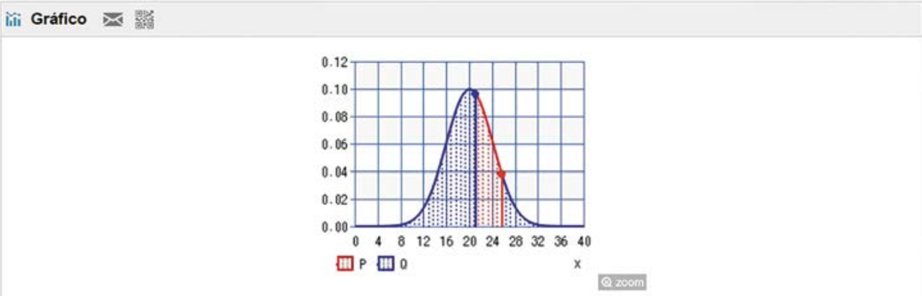
$Upper = 25.5$

$\sigma = 4$

$\mu = 20$

$P = 0.316727952$

**Gráfico**




**c)**

```
DA Normal
 Inf.  :23
 Sup.  :23
 σ     :4
 μ     :20
```

```
P=
                   0
```

**d)**

```
DA Normal
 Inf.  :40
 Sup.  :1000
 σ     :4
 μ     :20
```

```
P=
       0.00000028665
```

4

Las estaturas del alumnado de un Instituto se distribuyen normalmente con media 175 cm y desviación típica 10 cm. Calcula:

a) Probabilidad de que un alumno tenga una estatura mayor que 180 cm.

```
DA Normal
 Inf.  :180
 Sup.  :1000
 σ     :10
 μ     :175
```

```
P=
      0.3085375383
```

b) Probabilidad de que una alumna tenga una estatura menor que 170 cm.

```
DA Normal
 Inf.  :-1000
 Sup.  :170
 σ     :10
 μ     :175
```

```
P=
      0.3085375383
```

c) ¿Qué proporción del alumnado tiene una estatura comprendida entre 172 cm y 180 cm?

```
DA Normal
 Inf.  :172
 Sup.  :180
 σ     :10
 μ     :175
```

```
P=
      0.3093738839
```

d) Si el Instituto tiene 850 alumnos, ¿cuántas personas miden al menos 175?

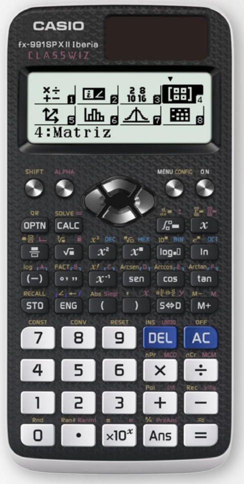
```
DA Normal
 Inf.  :175
 Sup.  :1000
 σ     :10
 μ     :175
```

```
P=
               0.5
```

```
Ans×850
               425
```

1º - 2º ESO
2º 3º - 4º ESO
3 1º - 2º BACH.

# La duración de un embarazo




**Abilio Orts Muñoz**
IES Tavernes Blanques (Valencia)

Con esta actividad se pretende introducir a los alumnos de Bachillerato en el estudio de la distribución normal.
El objetivo principal de la actividad es que los alumnos se familiaricen con la distribución de probabilidad normal y sepan obtener diferentes probabilidades ligadas a fenómenos que se pueden modelizar mediante esta distribución de probabilidad continua.
El uso de la calculadora CASIO fx-570/991 SP X II para realizar los cálculos permite centrar el interés en la interpretación de los resultados obtenidos sin necesidad de tener que aprender a manejar las tablas de la distribución normal y sin tener que tipificar la variable.

## CONTEXTO

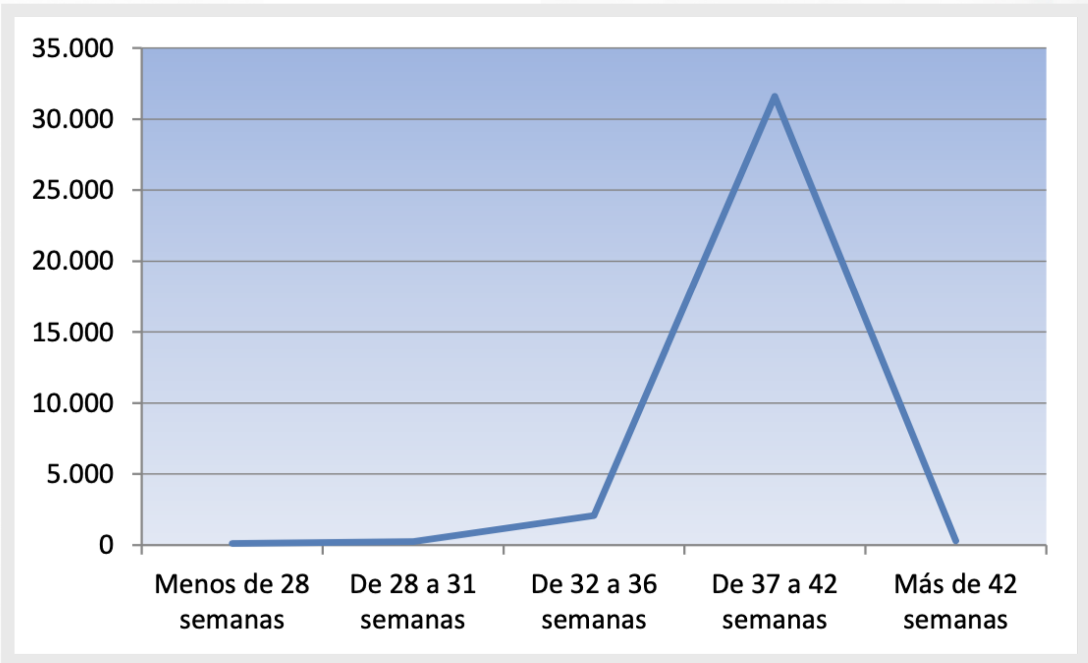
Un embarazo suele durar, por término medio, algo más de nueve meses. Para los médicos es muy importante determinar la fecha exacta en que se produjo la fecundación porque esta determinará la fecha probable del parto.

Históricamente la duración del embarazo se medía en meses lunares de 28 días (que coinciden con los periodos menstruales de 28 días de la mujer). La duración de dicho embarazo era de 10 meses lunares, es decir, 280 días o 40 semanas. Pero el embarazo no empieza justo después

de la fecha de inicio de la última regla de la mujer sino, más bien, catorce días después, cuando el óvulo está en la mitad de su ciclo menstrual y es fértil.
Por lo que, realmente, el embarazo no dura diez meses lunares sino dos semanas menos. De esta manera, el tiempo real desde la concepción hasta el parto es de 38 semanas o más exactamente: 40 x 7 – 14 = 266 días.

Como decíamos, es muy importante conocer la duración de un embarazo. En términos médicos, el embarazo puede considerarse normal o a término cuando tiene una duración de entre 37 semanas (ocho meses y medio) y 42 semanas (nueve meses y medio). Por debajo de las 37 semanas se habla de un embarazo prematuro y por encima de la semana 42 se dice que es un embarazo prolongado. Ambas variaciones pueden ser preocupantes.

Los bebés prematuros tienen más riesgos de sufrir problemas cerebrales, neurológicos o de desarrollo. Por ello, cuando se inicia un parto de un embarazo con menos de 37 semanas, los médicos pueden recomendar medidas para intentar evitarlo, y en caso de no ser posible detenerlo, se deben tomar las medidas previstas en los protocolos de actuación.
Cuando el embarazo dura más de 42 semanas, aumenta el riesgo de mortalidad tanto para la madre como para el feto, por lo que se suele inducir el parto para evitar riesgos a ambos.




Número de partos en la Comunidad Valenciana en 2018 según el tiempo de gestación.
(Elaboración propia a partir de datos del INE)

# La duración de un embarazo

## ACTIVIDAD

La duración de un embarazo en una mujer sigue una distribución normal de media 266 días y una desviación típica de 16 días. Calcula:

a) Probabilidad de que un embarazo dure entre 259 y 294 días, es decir, entre 37 y 42 semanas.

b) Probabilidad de que el niño nazca durante el séptimo mes de embarazo, es decir, entre 210 y 239 días.

c) Porcentaje de embarazos que duran menos de 239 días o más de 300 días.

d) Una ginecóloga consultada estima que si el embarazo se prolonga más de 25 días por encima de la media se debe practicar una cesárea. ¿Cuál es la probabilidad de practicar una cesárea?

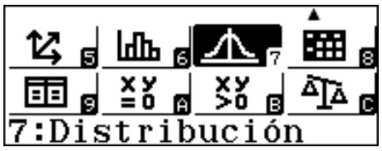
e) Los bebés prematuros requieren un cuidado especial. Si estipulamos que un bebé es prematuro cuando la duración del embarazo se encuentra en el 4% inferior, ¿cuál es la duración que separa a los bebés prematuros de aquellos que no lo son?

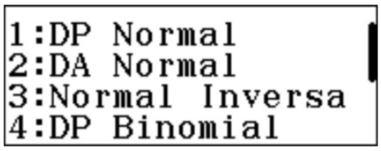
f) Los cuartiles primero (25% de la distribución) y tercero (75%) y la mediana (50%).

## SOLUCIÓN

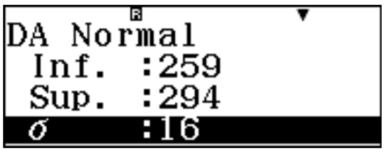
Antes de iniciar el trabajo con la calculadora hay que elegir la configuración con la que se realizarán los cálculos. En este caso, se elige el menú **Distribución**.

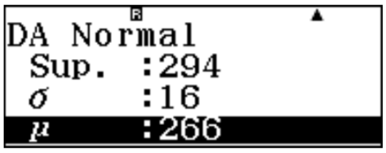
**a)** En el menú **Distribución**:

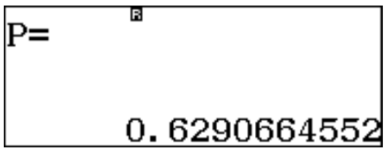



Se elige la distribución normal “2: DA Normal” y se completa con los datos del problema, es decir, una variable Normal de media 266 y desviación típica 16, de la cual se desea obtener la probabilidad del intervalo de extremos 259 y 294:

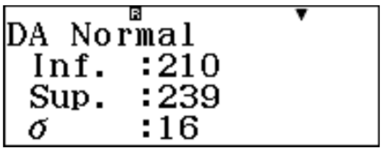


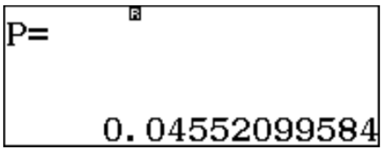




La probabilidad de que un embarazo dure entre 259 y 294 días es 0,629.

**b)** Se procede como en el apartado anterior:

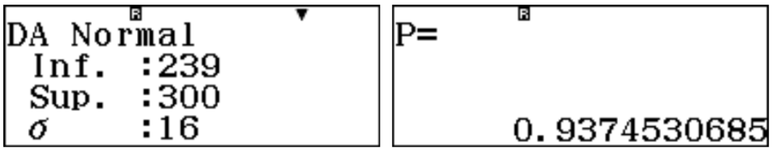


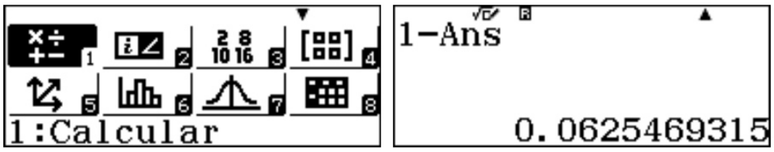

Por tanto, la probabilidad de que el niño nazca en el séptimo mes de embarazo es 0,04552.

Abilio Orts Muñoz
IES Tavernes Blanques (Valencia)

**c)** Se calcula la probabilidad de que el embarazo dure entre 239 y 300 días:

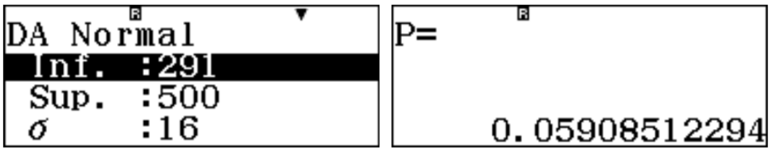



La probabilidad que se pide en el problema será 1-0,937453:

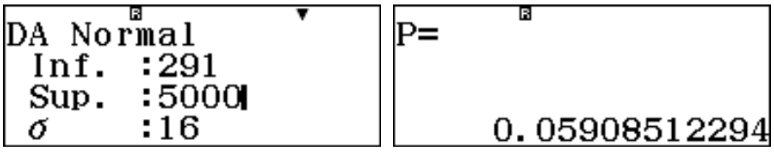



Es decir, la probabilidad que se pide es 0,062547. El porcentaje de embarazos que duran menos de 239 días o más de 300 días es 6,2547%.

**d)** Se trata de calcular la probabilidad de que nazca después de 266+25 = 291 días. En este caso, tenemos extremo inferior pero no superior. Para poder obtener esta probabilidad debemos incluir un extremo superior suficientemente grande para que no influya en el cálculo de la probabilidad. Por ejemplo, 500 días.



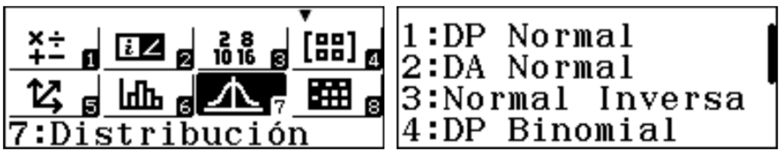

Se puede comprobar que si se cambia el extremo superior 500 por 5000, la probabilidad va a ser la misma:

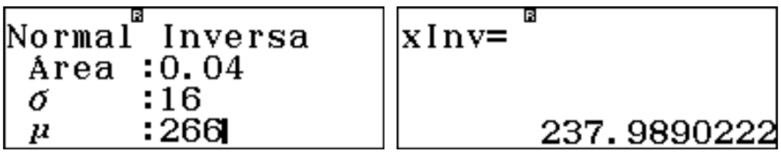



La probabilidad de practicar una cesárea es de 0,059.

**e)** Si X es la variable que nos indica la duración del embarazo, se trata de encontrar un valor de la variable A para el cual P(X<A)=0,04.

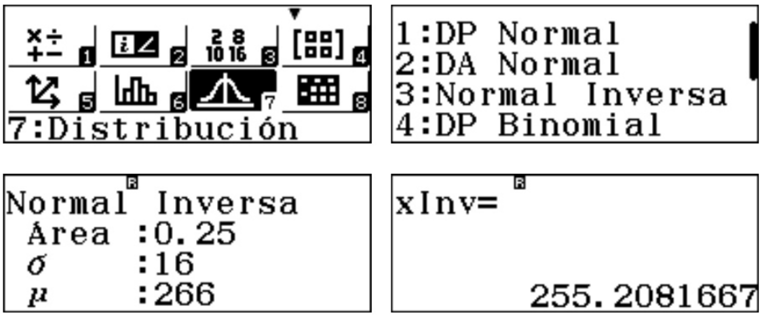
En este caso se debe configurar la calculadora en el modo "3: Normal Inversa" del menú **Distribución**. Se introducen los datos teniendo en cuenta que el área es la probabilidad y se obtiene el valor de la variable para el cual la probabilidad de que X sea menor que dicho valor es 0,04.



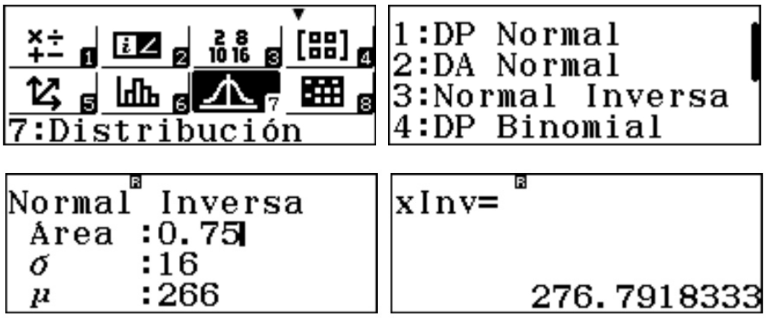




Los bebés prematuros (4%) son aquellos nacidos antes de 238 días.

**f)** Se procede como en el apartado anterior y se obtiene que el 25% de los embarazos duran menos de 255,21 días:

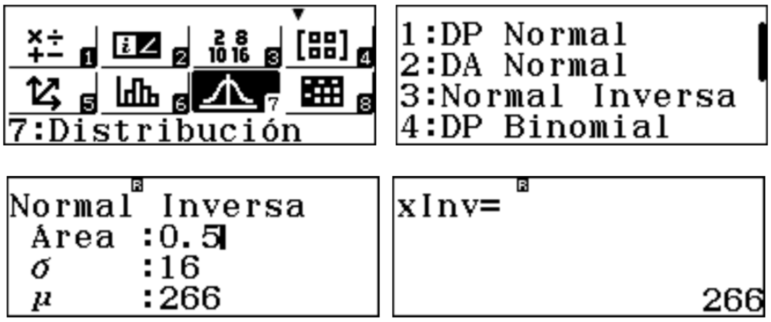



El 75% de los embarazos duran menos de 276,8 días:




Por tanto, la mitad de los embarazos se concentran en el intervalo de extremos 255,21 y 276,8.

Puesto que la distribución normal es simétrica, la mediana coincide con la media, es decir, la mitad de los embarazos duran menos de 266 días:




# Inferencia estadística

Jordi Pardeiro Gay
División Educativa CASIO España

Se muestran a continuación, en formato de tutorial, una serie de ejercicios sobre inferencia estadística resueltos con calculadora gráfica. Para su resolución se ha utilizado el nuevo modelo de calculadora fx-CG50, si bien el procedimiento para los demás modelos de calculadora gráfica CASIO (fx-9750GII, fx-9860GII y fx-CG20) es completamente idéntico.

## 1 INTERVALOS DE CONFIANZA

### PROBLEMA

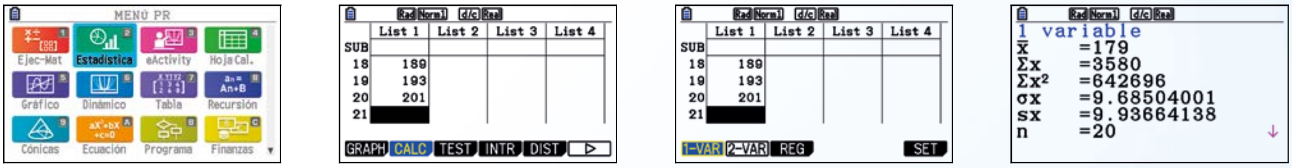
Se ha seleccionado una muestra de 20 alumnos de Bachillerato y se han medido sus estaturas, resultando:

163, 165, 166, 170, 171, 174, 175, 175, 175, 177, 178, 180, 182, 184, 185, 188, 189, 189, 193, 201

Determina los parámetros estadísticos correspondientes a esta muestra y halla el intervalo de confianza de la población total con un nivel se significación del 0,1.

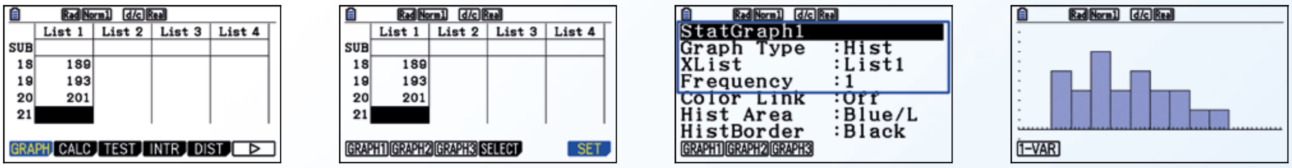
### SOLUCIÓN

En primer lugar se introducen los datos en el menú *Estadística* y, seguidamente, se calculan los parámetros estadísticos de la muestra, considerando que trabajamos con una única variable.

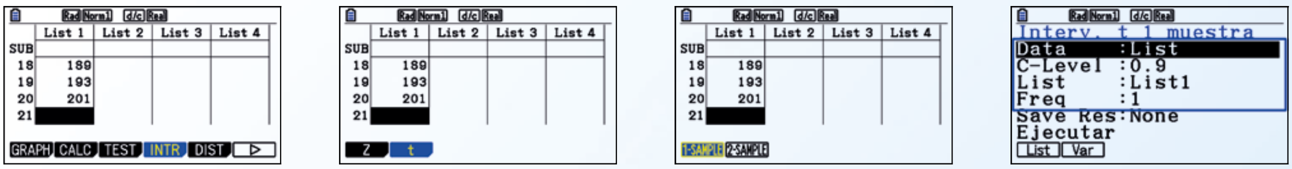


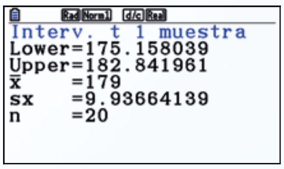

Como se observa, la media de la muestra es 179.

La realización de un histograma puede ayudar a visualizar mejor los datos:




Para calcular el **intervalo de confianza** a partir de la lista, se selecciona **INTR**, seguido de la opción t, considerando que nos hallamos ante una sola muestra (**1-SAMPLE**) y se completan los campos, como se indica a continuación. Observa que, dado que el nivel de significación es de 0,1, el nivel de confianza resulta ser de 0,9.




El intervalo de confianza con nivel de significación de 0,1 es, por tanto (175,16, 182,84).

## 2 TEST DE HIPÓTESIS

### PROBLEMA

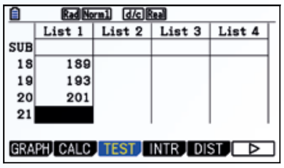
A partir de las estaturas de la muestra de los 20 alumnos del ejercicio anterior, el profesor de matemáticas ha llegado a la conclusión de que la altura media de toda la población, es decir de todos los alumnos de Bachillerato es de 1,82 cm. ¿Es razonable afirmar que esta es la media de la población?

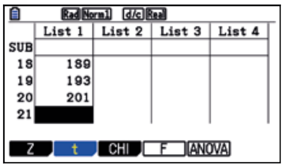
### SOLUCIÓN

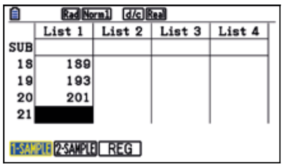
Se toma una hipótesis nula sobre la media de la población y la hipótesis alternativa y se evalúa la probabilidad de que se cumpla la **hipótesis nula**.

Hipótesis nula: $H_0$: $\mu = 182$
Hipótesis alternativa: $H_1$: $\mu \neq 182$

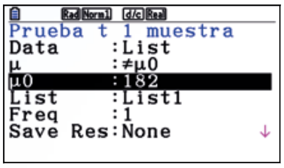
Se selecciona la opción **TEST** (F3) del menú **Estadística**. Seguidamente, se selecciona el test ***t*** (ya que no se conoce la desviación estándar de la población y se trata de una muestra pequeña) y la opción **1-SAMPLE**, ya que se estudia una sola muestra.



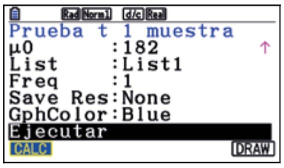



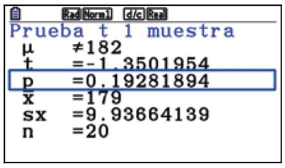




Se completan los campos de la ventana que aparece como muestra la figura inferior.



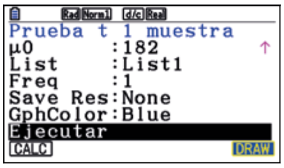

Ahora es posible mostrar los cálculos o bien una gráfica para analizar los resultados del test.

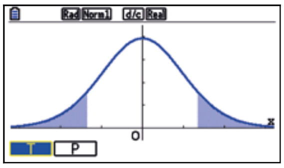


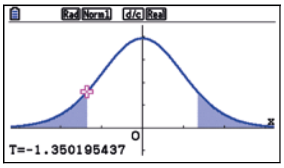



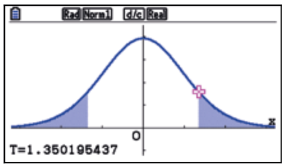

Como la probabilidad no es demasiado pequeña, es decir, no es inferior al 5 % (valor que se suele tomar para evaluar estos tests), no se puede afirmar que la hipótesis nula sea falsa. Por lo que no hay evidencias para rechazar que la media pueda ser de 182 cm.

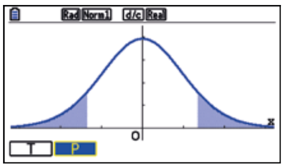
También es posible representar el gráfico correspondiente:

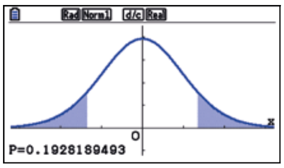



## 3 TEST CHI-CUADRADO

### PROBLEMA

Una aseguradora realiza un estudio estadístico para determinar si los positivos por alcoholemia en accidentes de tráfico depende del género del conductor y obtienene la siguiente tabla de frecuencias observadas:

| | | Positivo por alcholemia | |
|---|---|---|---|
| | | SÍ | NO |
| Género | Hombres | 50 | 25 |
| | Mujeres | 40 | 45 |

Indica si existe alguna dependencia entre las dos variables.

## SOLUCIÓN

Para realizar el test Chi-cuadrado a mano se deben seguir los siguientes pasos:

**1.** Se considera la hipótesis nula y la hipotesis alternativa:
- $H_0$: **Hipótesis nula** (las variables son independientes: Los positivos por alcoholemia no dependen del género)
- $H_1$: **Hipótesis alternativa** (las variables son dependientes: Los positivos por alcoholemia sí depende del género)

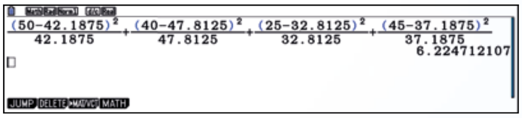
**2.** Se amplia la tabla de **frecuencias observadas ($f_o$)** con los totales:

| | | Positivo por alcholemia | | |
|---|---|---|---|---|
| | | SÍ | NO | |
| Género | Hombres | 50 | 25 | **75** |
| | Mujeres | 40 | 45 | **85** |
| | | **90** | **70** | **160** |

**3.** Se realiza la tabla de **frecuencias esperadas ($f_e$)**:

| | | Positivo por alcholemia | | |
|---|---|---|---|---|
| | | SÍ | NO | |
| Género | Hombres | 90 · 75 /160 = **42,1875** | 70 · 75/160 = **32,8125** | 75 |
| | Mujeres | 90 · 85/ 160 = **47,8125** | 70 · 85/160 = **37,1875** | 85 |
| | | 90 | 70 | 160 |

**4.** Se calcula el valor de $\chi^2_{calc}$, **un parámetro que da información sobre en qué medida se alejan los resultados** $\chi_{cal}^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ = **6,2247**




**5.** Se calculan los **grados de libertad (df)**: (nº filas – 1 ) · ( nº columnas – 1) = 1 · 1 = 1

**6.** Se considera el **nivel de significación**, que es el error que se comete al rechazar la hipótesis nula $H_0$. Suele tomarse un nivel de significación del 5%, es decir, de 0,05.

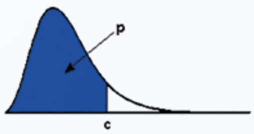
**7.** Se determina el valor del **parámetro p**, que se define como la probabilidad de que la hipótesis sea cierta. Es decir:

$$\mathbf{p} = 1 - \text{nivel de significación} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$$

**8.** Se compara el **valor calculado** con el **valor crítico**, que se halla en las tablas a partir de del parámetro *p*. Si $\chi^2_{calc} < \chi^2_{critico}$, la hipótesis es correcta y las variables son independientes.

Valores críticos de la distribución $\chi^2$

$p = P(X \leq c)$



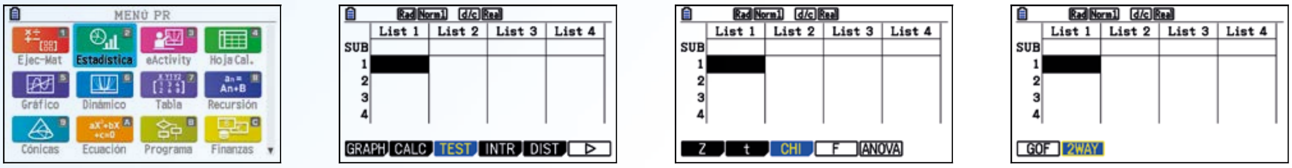

| Grados de libertad | Probabilidad | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,995 | 0,99 | 0,975 | 0,95 | 0,9 | 0,75 | 0,5 | 0,25 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 |
| 1 | 7,879 | 6,635 | 5,024 | 3,841 | 2,706 | 1,323 | 0,455 | 0,102 | 0,004 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| 2 | 10,597 | 9,210 | 7,378 | 5,991 | 4,605 | 2,773 | 1,386 | 0,575 | 0,103 | 0,051 | 0,020 | 0,010 |
| 3 | 12,838 | 11,345 | 9,348 | 7,815 | 6,251 | 4,108 | 2,366 | 1,213 | 0,352 | 0,216 | 0,115 | 0,072 |
| 4 | 14,860 | 13,277 | 11,143 | 9,488 | 7,779 | 5,385 | 3,357 | 1,923 | 0,711 | 0,484 | 0,297 | 0,207 |
| 5 | 16,750 | 15,086 | 12,833 | 11,070 | 9,236 | 6,626 | 4,351 | 2,675 | 1,145 | 0,831 | 0,554 | 0,412 |
| 6 | 18,548 | 16,812 | 14,449 | 12,592 | 10,645 | 7,841 | 5,348 | 3,455 | 1,635 | 1,237 | 0,872 | 0,676 |
| 7 | 20,278 | 18,475 | 16,013 | 14,067 | 12,017 | 9,037 | 6,346 | 4,255 | 2,167 | 1,690 | 1,239 | 0,989 |
| 8 | 21,955 | 20,090 | 17,535 | 15,507 | 13,362 | 10,219 | 7,344 | 5,071 | 2,733 | 2,180 | 1,646 | 1,344 |
| 9 | 23,589 | 21,666 | 19,023 | 16,919 | 14,684 | 11,389 | 8,343 | 5,899 | 3,325 | 2,700 | 2,088 | 1,735 |
| 10 | 25,188 | 23,209 | 20,483 | 18,307 | 15,987 | 12,549 | 9,342 | 6,737 | 3,940 | 3,247 | 2,558 | 2,156 |
| 11 | 26,757 | 24,725 | 21,290 | 19,675 | 17,275 | 13,701 | 10,341 | 7,584 | 4,575 | 3,816 | 3,053 | 2,603 |
| 12 | 28,300 | 26,217 | 23,337 | 21,026 | 18,549 | 14,845 | 11,340 | 8,438 | 5,226 | 4,404 | 3,571 | 3,074 |

$$\chi^2_{calc} = \mathbf{6{,}2247} > \chi^2_{critico} = \mathbf{3{,}841}$$

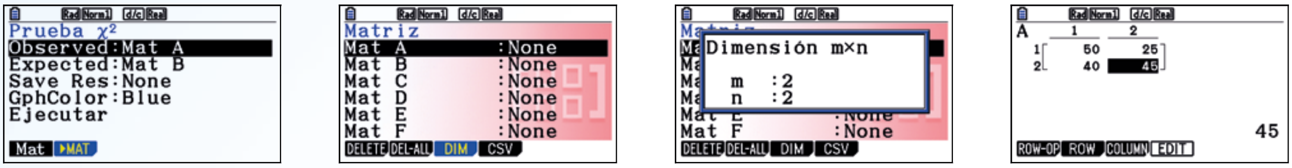
Como el valor calculado es mayor que el valor crítico, se debe desestimar la hipótesis nula, es decir, se rechaza la hipótesis de que dar positivo por alcoholemia es independiente del género del conductor, por tanto, hay una alta probabilidad de que dependa del género.

Resolución del test Chi-cuadrado con la **calculadora gráfica**:

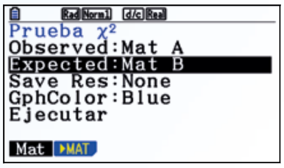
**1.** Se debe seleccionar el **test Chi-cuadrado** para dos variables:



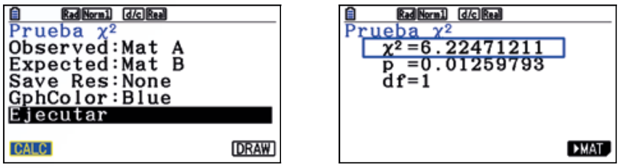

**2.** Se introduce la matriz que corresponde a la tabla de **frecuencias observadas**:



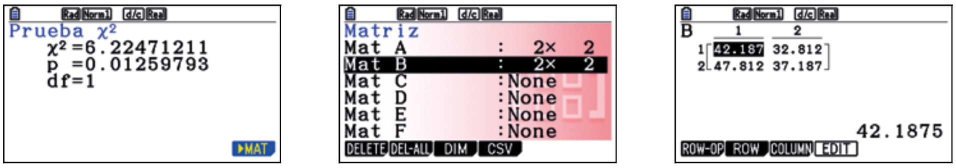

**3.** Se asigna la matriz **Mat B** como matriz correspondiente las frecuencias esperadas (no es necesario definir las dimensiones de la misma, puesto que se creará automáticamente al realizar el test):



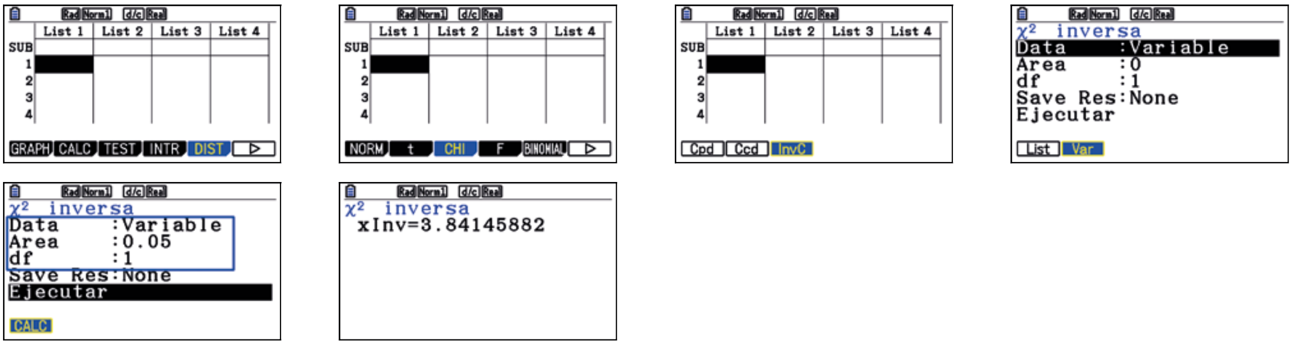

**4.** A continuación, se ejecuta el test y se obtiene el **valor calculado de chi cuadrado** ($\chi^2_{calc}$):




**5.** Ahora también puede observarse la **tabla de frecuencias esperadas**, pues se ha completado la matriz B.




**6.** Una vez se ha determinado $\chi^2_{calc}$ puede hallarse $\chi^2_{critico}$ y comparar ambos valores. Para ello, como opción alternativa a la tabla de valores críticos, se escoge la opción **DIST** del menú **Estadística** y, seguidamente se **selecciona CHI (F3) y InvC (F3)**. Se introduce el **grado de libertad (df)** y el **nivel de significación (Área)**.




$$\chi^2_{calc} = 6{,}22471211 > \chi^2_{critico} = 3{,}84145882$$

## CONCLUSIÓN

No se puede aceptar la hipótesis de que las dos variables sean independientes.

# GEOMETRÍA



www.apuntesmareaverde.org.es

https://www.edu-casio.es/recursos-didacticos/?product_cat=actividades-para-el-aula&offset=16



**Realizados por: FESPM**

**Recopilados por: Luis Carlos Vidal del Campo**

**IES ATENEA, CIUDAD REAL**

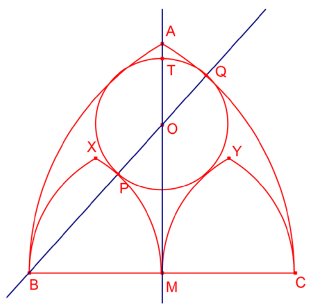
# Geometría en el billete de 20 euros

## Ricard Peiró i Estruch
## Profesor de matemáticas del IES Abastos de Valencia


Habitualmente, los problemas de construcciones geométricas ocupan poco espacio en el currículo de la ESO; generalmente se prioriza el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, en detrimento de los problemas en los que hay que usar regla y compás para construir figuras geométricas. En parte esto se debe al hecho de no disponer de herramientas adecuadas para trabajar,  y también a que la construcción con regla y compás es difícil y requiere mucho conocimiento de geometría. Sin embargo, el hecho de que una calculadora pueda hacer construcciones geométricas es muy saludable, pues acerca a los estudiantes la resolución de problemas que si se tuvieran que hacer con regla y compás serían demasiado largos y difíciles. La calculadora CG-20 favorece una disminución de la dificultades, al poner en primer plano qué construcciones hay que hacer y no cómo hacerlas, ya que para cada construcción hay disponible una herramienta o un comando que permite realizarla. Esto no quita, desde luego, que el estudiante tenga que razonar geométricamente, ya que los algoritmos siempre deben ser razonados. En este trabajo primero se razona cuáles son los algoritmos a aplicar, basándose en propiedades de las figuras geométricas y en el teorema de Pitágoras y, posteriormente, se usa la calculadora CG20 para realizar la construcción y comprobar el resultado. La belleza inherente a los arcos de la catedral de Lincoln que aparecen en el billete de 20 euros tiene un fundamento matemático, ya que la razón entre la altura de la circunferencia central y media base es el número de oro, lo que se confirma con el cuadro de medidas de la calculadora CG20

### Actividad

En la figura, se representa una de las ventanas de la Catedral de Lincoln (Reino Unido) y una parte de los billetes de 20 euros.




Está formada por dos arcos de centro B y C, respectivamente y de radio $\overline{BC}$ que se intersectan en el punto A.
Sea M el punto medio del segmento $\overline{BC}$ .
Con centro B y M se dibujan dos arcos de radio $\overline{BM}$ que se intersectan en el punto X
Con centro C y M se dibujan dos arcos de radio $\overline{BM}$ que se intersectan en el punto Y.
Se dibuja una circunferencia de centro O que es tangente a 4 arcos.
Sea T el punto donde el segmento $\overline{AM}$ corta la circunferencia anterior más cerca de A.

a) Determinar el radio $\overline{OT}$ de la circunferencia.
b) Determinar la razón entre $\overline{TM}$ y $\overline{BM}$.

### Solución:

Sea R = $\overline{BM}$ radio de los 4 arcos pequeños.
$\overline{BC}$ = 2R radio de los dos arcos grandes.
Sea P el punto de tangencia de la circunferencia de centro O y el arco MX.

Sea Q el punto de tangencia de la circunferencia de centro O y arco CA.

Sea $r = \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OT}$ radio de la circunferencia.
Determinemos el valor.

$$\overline{BO} = \overline{BP} + \overline{OP} = R + r.$$
$$\overline{BO} = \overline{BQ} - \overline{OQ} = 2R - r$$

Igualando las expresiones:
$R + r = 2R - r$ Resolviendo la ecuación con la incógnita r:

$$r = \frac{1}{2}R$$

Calculemos $\overline{MT}$.

$$\overline{BO} = R + r = \frac{3}{2}R$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{BMO}$:

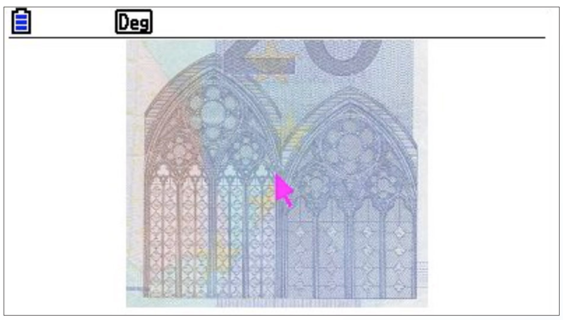
$$\overline{MO} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}R\right)^2 - R^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}R \qquad \overline{MT} = \overline{MO} + \overline{OT} = \frac{\sqrt{5}}{2}R + \frac{1}{2}R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}R \qquad \frac{\overline{MT}}{\overline{BM}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

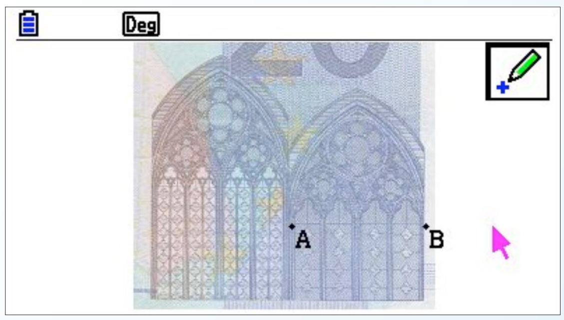
Por tanto, la razón entre la altura del círculo central y la mitad de la base del arco es el número de oro.

## Construcción con la calculadora CG-20:

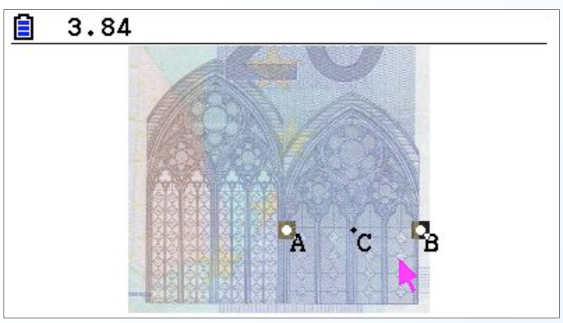
a) Abrir Menú Geometría F1 Abrir la figura g3p del billete de 20€: **BILLETE.g3p**
(es posible solicitar la descarga del mismo en info-calculadoras@casio.es)

b) F3 **Punto.** Dibujar los puntos A, B centros de los arcos grandes.



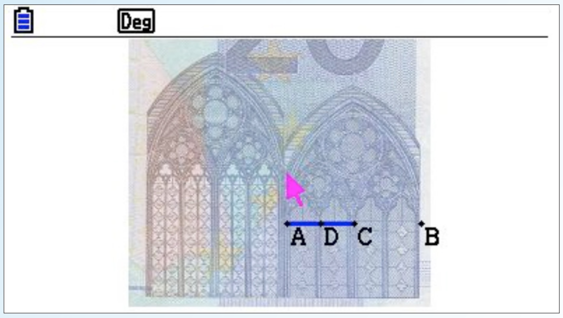



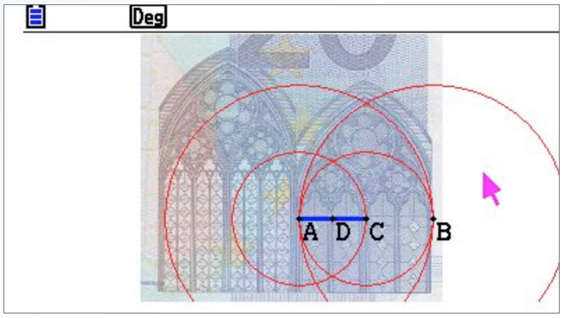

c) Seleccionar los puntos A, B.
d) F4 **Punto medio.** Dibujar el punto medio C de los puntos A, B.
e) Seleccionar los puntos A, C.
f) F4 **Punto medio.** Dibujar el punto medio D de los puntos A, C.



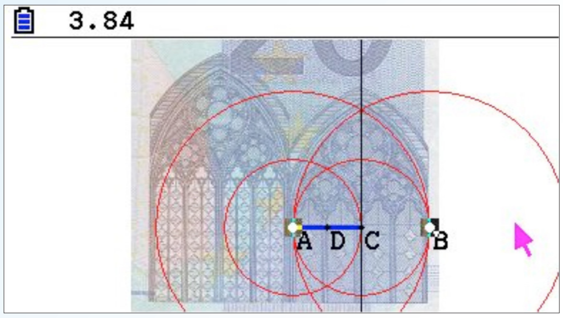


g) F3 **Segmento línea**. Dibujar el segmento $\overline{AC}$.
h) F3 **Círculo**. Dibujar el círculo de centro A que pasa por B.
i) F3 **Círculo.** Dibujar el círculo de centro B que pasa por A.
j) F3 **Círculo**. Dibujar el círculo de centro A que pasa por C.
k) F3 **Círculo**. Dibujar el círculo de centro C que pasa por A.

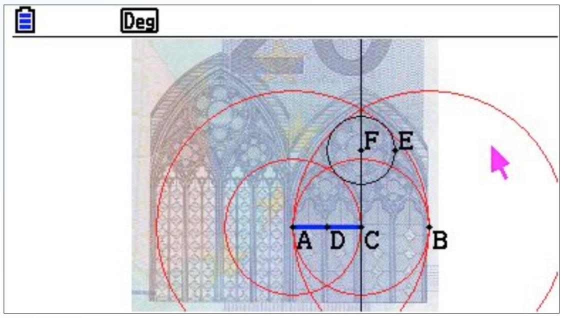


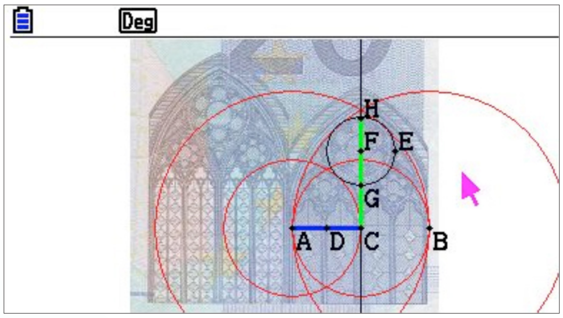

l) Seleccionar los puntos A, B.
m) F4 **Bisector perp**. Dibujar la recta mediatriz r del segmento $\overline{AB}$ .



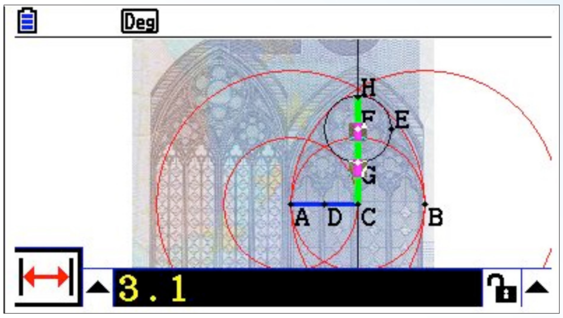

n) F3 **Punto.** Dibujar el punto E sobre la circunferencia tangente a los arcos (donde se espera que se encuentre) .
o) F3 **Punto**. Dibujar el punto F sobre la mediatriz (centro de la circunferencia tangente a los arcos).
p) F3 **Círculo**. Dibujar el círculo de centro F que pasa por E.

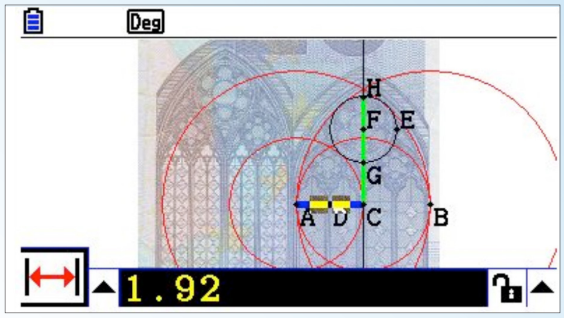



q) Seleccionar la recta r y la circunferencia de centro F.
r) F4 **Intersección.** Determinar la intersección H de la recta r y la circunferencia de centro F.
s) F3 **Segmento línea**. Dibujar el segmento $\overline{CH}$ .

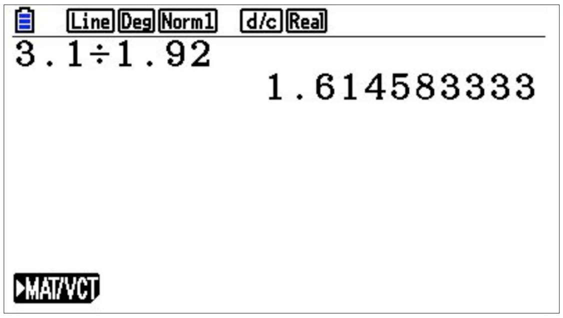


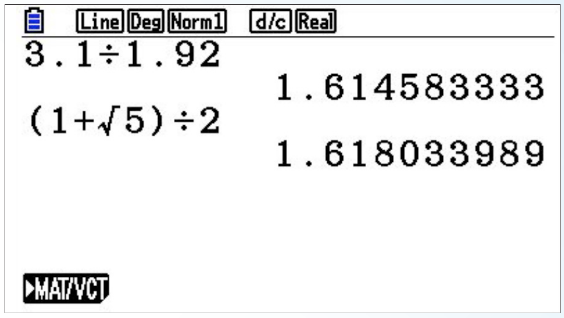

v) Seleccionar el segmento $\overline{CH}$ .
w) VARS. Calcular la medida del segmento $\overline{CH}$ = b .
v') Seleccionar el segmento $\overline{AC}$ .
w') VARS. Calcular la medida del segmento $\overline{AC}$ = c .



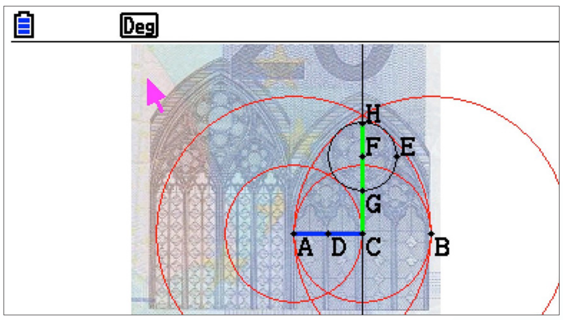




x) Calcular $\frac{b}{c} \approx 1'62$




**Nota:** Después de cada paso con F2 **Deselec. Todo**, para deseleccionar todo.




# FX-CG20 Manager

## Herramienta de apoyo para el profesor

**Software emulador, con la misma funcionalidad y características que la calculadora física. Proporciona un firme apoyo al profesor para la docencia en el aula y la preparación de materiales educativos:**

- Emulador de la calculadora en PC. Puede ser utilizado como herramienta de presentación en claseconectándolo con un proyector y/o una PDI.
- Captura de imágenes para crear documentos.
- Función *Key log*: permite registrar la secuencia de teclas utilizadas y reproducir las mismas.
  - · En clase, los estudiantes podrán seguir fácilmente los procedimientos de la operación.
  - · Mediante la reproducción, el profesor podrá crear video tutoriales
- Posibilita almacenar cada tarea realizada en un archivo independiente para su posterior uso.

Puedes descargar una versión de prueba (90 días) desde **edu.casio.com**

# Incendio en la empresa CAMPOFRÍO

Lluís Bonet
IES Mare Nostrum (Alicante)

Hacer posible que el alumnado descubra contextos que den sentido a los contenidos y que enriquezcan las matemáticas que están aprendiendo, no resulta en ocasiones una tarea sencilla. Todos nos encontramos en el aula con alguna alumna, como en mi caso, Aitana e Irene, que plantean preguntas del tipo *¿Esto se utiliza para algo?, ¿y todo esto para qué me va a servir?*

**El incendio en la empresa CAMPOFRÍO**, basado en una noticia real, propone un escenario de trabajo que da respuesta a las preguntas de nuestro alumnado y donde el uso de la calculadora se hace imprescindible para facilitar los cálculos.

La actividad, galardonada con uno de los Premios Especiales en el vídeoMAT 2019, ha sido llevada a cabo en el IES Mare Nostrum de Alicante con el grupo de 2º de Bachillerato V. Ha sido todo un proceso de trabajo en equipo de investigación, búsqueda de información y realización de los cálculos, para finalmente contrastar los resultados obtenidos con los datos reales de que disponen las administraciones públicas.

## PROBLEMA

A las 6.40 de la mañana se ha originado un incendio que está arrasando la planta de industria cárnica de Campofrío en Burgos, sin que se hayan producido heridos. Las llamas están destrozando la totalidad de la fábrica, ubicada en el Polígono de Villafría de la capital burgalesa y en la que trabajan un millar de personas. El fuego, que ha obligado a evacuar a 400 vecinos por la nube de humo tóxico, permanece activo y la principal hipótesis apunta a un cortocircuito.

Los bomberos desplazados al lugar nos explican que el incendio es muy virulento debido a la presencia de material inflamable en la planta de la industria cárnica. Tras controlar las llamas y hacer una medición ambiental van a realizar los cálculos necesarios para determinar la superficie de los terrenos que ocupa esta empresa y evaluar los daños causados.

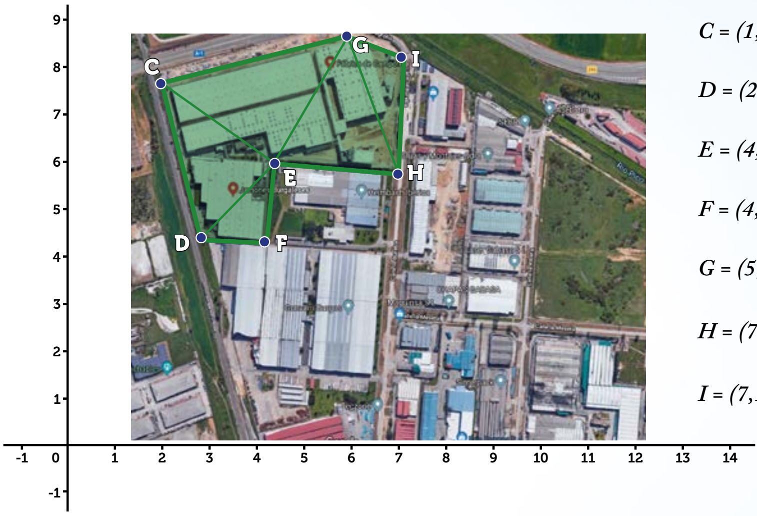

El Ejército ha aportado equipos electrógenos para que sea posible seguir trabajando durante toda la jornada. El Plan de Emergencia Municipal se mantiene activado y se realizan mediciones ambientales periódicas para detectar cualquier riesgo de toxicidad.

¿Podéis localizar la parcela que ocupa la empresa y ayudar a los bomberos a calcular la superficie para que puedan emitir el correspondiente informe de daños?

## SOLUCIÓN

**a)** Se localiza la parcela en Google Maps y se captura la imagen con la escala correspondiente:

**b)** Se ajustan los ejes a la escala de la imagen capturada y se determinan los vértices que delimitan el recinto.




$C = (1{,}98\ ,\ 7{,}71)$

$D = (2{,}84\ ,\ 4{,}42)$

$E = (4{,}4\ ,\ 6)$

$F = (4{,}2\ ,\ 4{,}32)$

$G = (5{,}91\ ,\ 8{,}71)$

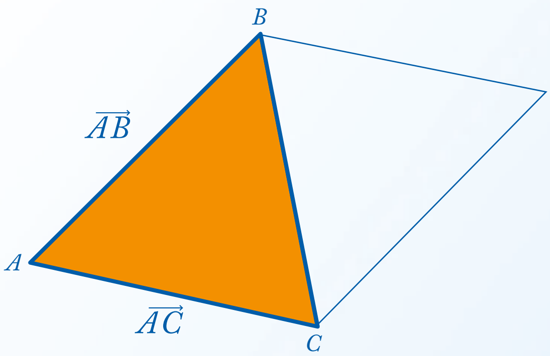
$H = (7{,}02\ ,\ 5{,}78)$

$I = (7{,}12\ ,\ 8{,}26)$

**c)** Se triangulariza la parcela de la que se desea conocer la superficie calculando el área de cada triangulo tal y como se explica a continuación.

En $\mathbb{R}^3$ se calcula el área del triángulo de vértices $A$, $B$ y $C$ con el módulo del producto vectorial de los vectores:

Área del triángulo $(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$




Sea el triángulo de vértices $A = (x_1,y_1)$, $B = (x_2,y_2)$, $C = (x_3,y_3)$.

Se consideran los puntos en $\mathbb{R}^3$ como $A = (x_1,y_1,0)$, $B = (x_2,y_2,0)$, $C = (x_3,y_3,0)$ y se calcula el área del triángulo:

$$\text{Área del triángulo } (\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |(0, 0, (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1))| =$$

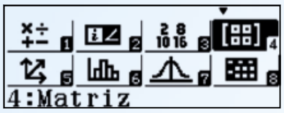
$$= \frac{1}{2} \cdot |[(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)]| =$$

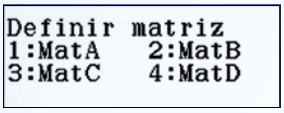
$$= \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right| \underset{*}{=} \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

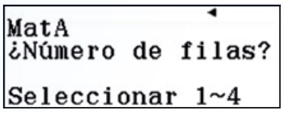
*OBSERVACIÓN: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

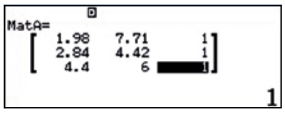
**c)** Se calcula el área de cada uno de los triángulos que cubren la superficie utilizando los determinantes como se ha indicado anteriormente.

Para calcular el área del triángulo $\widehat{CDE} \rightarrow \begin{cases} C = (1{,}98\ ,\ 7{,}71) \\ D = (2{,}84\ ,\ 4{,}42) \\ E = (4{,}4\ ,\ 6) \end{cases}$, desde el menú ***Matriz***, se define la primera matriz y se introducen sus elementos:





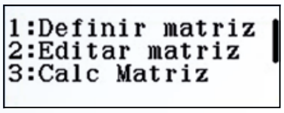


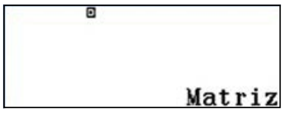


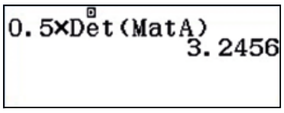

Se pulsa [OPTN] y se escoge la tercera opción ***Calc Matriz*** para realizar los cálculos con la matriz. De esta forma se obtiene el área del triángulo $\widehat{CDE}$:

$$\text{Área del triángulo } \widehat{CDE} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1{,}98 & 7{,}71 & 1 \\ 2{,}84 & 4{,}42 & 1 \\ 4{,}4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3{,}2456$$

[0] [.] [5] [×] [OPTN] [▼] [2] [OPTN] [3] [=]








Procediendo de la misma manera, se calcula el área de los cuatro triángulos restantes. Se consideran en valor absoluto los resultados negativos por tratarse de áreas:

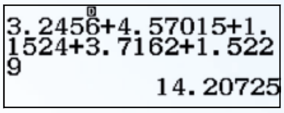
$$\text{Triángulo } \widehat{CEG} \rightarrow \begin{cases} C = (1{,}98\ ,\ 7{,}71) \\ E = (4{,}4\ ,\ 6) \\ G = (5{,}91\ ,\ 8{,}71) \end{cases} \rightarrow \text{Área del triángulo } \widehat{CEG} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1{,}98 & 7{,}71 & 1 \\ 4{,}4 & 6 & 1 \\ 5{,}91 & 8{,}71 & 1 \end{vmatrix} = 4{,}57015$$

$$\text{Triángulo } \widehat{DEF} \rightarrow \begin{cases} D = (2{,}84\ ,\ 4{,}42) \\ E = (4{,}4\ ,\ 6) \\ F = (4{,}2\ ,\ 4{,}32) \end{cases} \rightarrow \text{Área del triángulo } \widehat{DEF} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2{,}84 & 4{,}42 & 1 \\ 4{,}4 & 6 & 1 \\ 4{,}2 & 4{,}32 & 1 \end{vmatrix} = 1{,}1524$$

$$\text{Triángulo } \widehat{EGH} \rightarrow \begin{cases} E = (4{,}4\ ,\ 6) \\ G = (5{,}91\ ,\ 8{,}71) \\ H = (7{,}02\ ,\ 5{,}78) \end{cases} \rightarrow \text{Área del triángulo } \widehat{EGH} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4{,}4 & 6 & 1 \\ 5{,}91 & 8{,}71 & 1 \\ 7{,}02 & 5{,}78 & 1 \end{vmatrix} = 3{,}7162$$

$$\text{Triángulo } \widehat{GHI} \rightarrow \begin{cases} G = (5{,}91\ ,\ 8{,}71) \\ H = (7{,}02\ ,\ 5{,}78) \\ I = (7{,}12\ ,\ 8{,}26) \end{cases} \rightarrow \text{Área del triángulo } \widehat{GHI} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5{,}91 & 8{,}71 & 1 \\ 7{,}02 & 5{,}78 & 1 \\ 7{,}12 & 8{,}26 & 1 \end{vmatrix} = 1{,}5229$$

Finalmente se suman los cinco resultados para obtener el área total que hay que multiplicar por la razón al cuadrado. En este ejemplo de solución se ha utilizado una escala 1: 100 m, por lo que hay que multiplicar la suma total por $10^4$:




Área total = $(3{,}2456 + 4{,}57015 + 1{,}1524 + 3{,}7162 + 1{,}5229) \cdot 10^4 = 142\ 072{,}5\ m^2$

Desde la web del Catastro www.sedecatastro.gob.es se pueden contrastar los resultados de la superficie calculada. También se puede utilizar la aplicación SIGPAC del Ministerio de Agricultura http://sigpac.mapa.es/ para acceder a datos de superficies de terrenos agrícolas.

**En los datos oficiales de la parcela estudiada que aparecen en el Catastro con Referencia 7194004 VM4879S 00**** , los terrenos de Campofrío ocupan una superficie de 142090,62 $m^2$.**

Canal YouTube INTEGRANT MATEMÀTIQUES

VER VÍDEO

https://youtu.be/4_mxEOUQT1Y

# Geometría en el espacio


## Jordi Baldrich Álvarez

Profesor y ex coordinador para España en la División Educativa
de Calculadoras CASIO durante 23 años.


Uno de los temas del bachillerato en el que los alumnos suelen presentar más dificultades es la geometría en el espacio. El hecho de no poder visualizar las rectas, planos… descritos en los problemas, hace que no lleguen a comprender bien lo que están haciendo. La calculadora gráfica fx-CG50 gracias al menú Gráfico 3D nos permite ver estos elementos, ayudando al estudiante a entender el desarrollo del problema pudiendo además comprobar sus resultados.

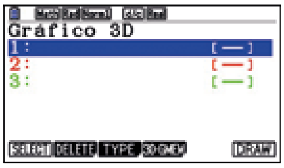
A continuación se plantea un ejercicio típico de este tema resuelto con la calculadora gráfica.

### PROBLEMA

Dados la recta $r$: $\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi$: $x - 2y + z + 1 = 0$. Hallar la ecuación de una recta $s$ contenida en el plano $\pi$ que pase por el punto $P(-1,2,4)$ y sea perpendicular a $r$.

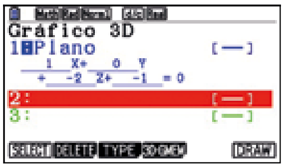
### SOLUCIÓN

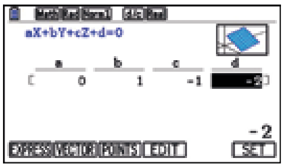
Entramos en el menú ***Gráfico 3D***.



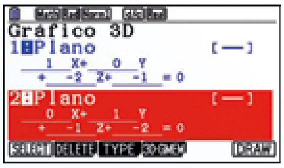

La recta $r$ es la intersección de dos planos que podemos dibujar, pulsamos **TYPE (F3)** y escogemos la opción **Plano** pulsando EXE.

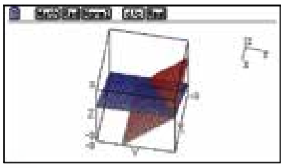

Escribimos los coeficientes de la ecuación general del plano y pulsamos EXE, nos desplazamos al número 2 y procedemos de la misma forma descrita anteriormente para introducir el segundo.



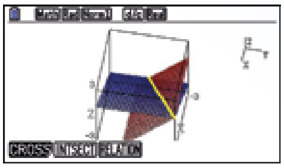



Pulsamos **DRAW (F6)** y moviéndonos con el cursor, podemos ver mejor que los planos se intersecan efectivamente en la recta $r$:





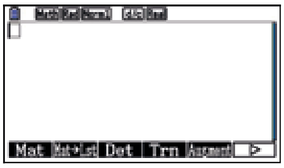
Para obtener la recta $r$ en forma paramétrica, pulsamos **G-Solve** (SHIFT F5) y **INTSECT** (F2):



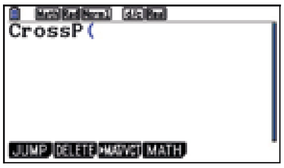

Obteniendo, $r \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

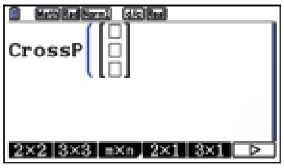
Como la recta $s$ buscada está contenida en el plano y es perpendicular a $r$, para calcular $\vec{v}_s$ hacemos el producto vectorial $\vec{n}_\pi \times \vec{v}_r$. Pulsamos MENU 1 para acceder al menú ***Ejec-Mat*** y hacer el producto vectorial de los vectores.

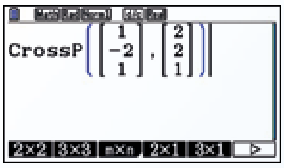

Pulsamos OPTN, **MAT/ VCT** (F2) y nos desplazamos por el menú pulsando F6 hasta encontrar **CrossP(** (F3):

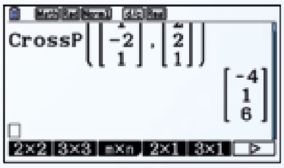



Pulsamos EXIT dos veces hasta ver en el menú la opción **MATH** (F4). Pulsamos **MATH** (F4), **MAT/VCT** (F1), elegimos la dimensión de nuestro vector **3x1** (F5), introducimos los datos y pulsamos EXE.



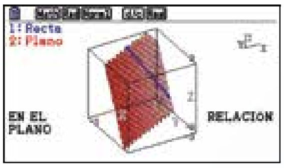




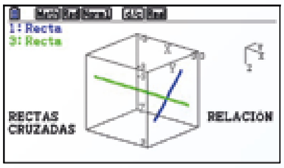



$\vec{v}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{v}_r = (-4,1,6)$ y la recta buscada es $s: \begin{cases} x = -1 -4\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 4 + 6\mu \end{cases}$

En el menú ***Gráfico 3D***, podemos ver la posición relativa de la recta $s$ con el plano $\pi$ y la recta $r$, comprobando que cumple las condiciones del ejercicio.




$s$ está contenida en el plano $\pi$




$s$ y $r$ se cruzan y son perpendiculares