RESPUESTAS MATEMÁTICAS LOMLOE

2 ESO

Realizados por:

Alba Alcalá Vidal y Antonio Pozo León

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

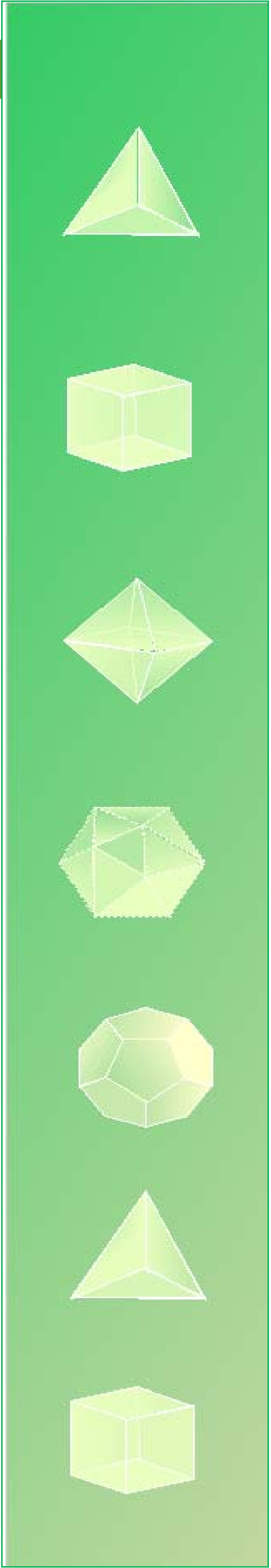
Textos Marea Verde

ÍNDICE

NÚMEROS

GEOMETRÍA

PROPORCIONALIDAD. ÁLGEBRA. ESTADÍSTICA



2º ESO
Capítulo 1: Resolución de problemas
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Marea verde

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. FASES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

1. Inventa problemas similares a: La piscina de tu pueblo tiene forma de rectángulo. Sus lados miden 25 m de largo y 15 m de ancho. El alcalde desea rodear la piscina con una valla. El metro de valla vale 12 €. ¿Cuánto costará hacer la valla?

Solución : 25·15·12 = 4500€

2. El cuentakilómetros del padre de Juan marca 74.791 km. Si las revisiones son cada 5.000 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión? La madre de María observa que el cuentakilómetros de su coche marca 24.312 km, ¿cuántos kilómetros le faltan para la próxima revisión?

Solución: Al padre de Juan le faltan 75 000 – 74 791 = 209 km y a la madre de María 25 000 – 24 312 = 688 km.

3. El aula de María mide 8 metros de largo por 5 de ancho. Se desea poner un zócalo que vale a 8 € el metro. A) ¿Cuántos euros costará ponerlo? B) Estima cuánto mide tu aula de largo y cuánto de ancho, y calcula cuánto costaría poner ese mismo zócalo.

Solución: A) (8 + 5 + 8 + 5) x 8 = 208 €. B) Solución abierta.

2. ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4. Si tu paga semanal es de diez euros, y ahorras toda la paga de un mes ¿Podrías comprarte un ordenador portátil (que estimas que vale unos 900 euros)? ¿Y con todas las pagas de un año?

Solución: Suponemos que un mes tiene 4 semanas, luego en un mes ahorras 40 €. No tienes para el ordenador. Suponemos que un año tiene 52 semanas, entonces si ahorras todas tus pagas tendrás 520 €. Tampoco tienes para un ordenador.

5. Piensa en una piscina a la que hayas ido alguna vez. Estima los litros de agua que puede contener.

Solución abierta:

6. Informan que a una manifestación han ido 500.000 personas, ¿cómo crees que las han contado?

Solución: Una forma de estimarlo es contar cuántas personas hay en un metro cuadrado y estimar los metros cuadrados que ocupa la manifestación.

7. Si toda la población mundial se diera la mano, ¿qué longitud se formaría? (Estima que la población mundial, en este momento, es mayor que siete mil millones de personas)

Solución: Puedes estimar que una persona tuviera una longitud de un metro. Si hay siete mil millones de personas, la longitud sería de 7 000 000 000 m, igual a 7 000 000 km, siete millones de kilómetros.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

8. **¿Cuántas lentejas hay en un paquete de un kilo?**

Solución abierta: Puedes pesar una cantidad pequeña de lentejas y contarlas. Y entonces calcular las que caben en un kilo.

9. **Aprende a hacer magia. Piensa un número. Súmale 10. Dobla el resultado. Réstale 6. Calcula la mitad. Quita el número del principio. ¡Tu resultado es 7! ¿Cómo lo he adivinado?**

Solución: $((x + 10)2 - 6)/2 - x = x + 10 - 3 - x = 7$.

10. **¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números enteros?**

Solución: Para obtener un 0 debemos multiplicar 2 por 5. Hay más doses que cincos así que es suficiente contar el número de cincos que aparecen en ese producto. Múltiplos de 5: 200; Múltiplos de 25: 40; Múltiplos de 125: 8; Múltiplos de 625: 1; Total: 249

11. **Cuadrado Mágico**

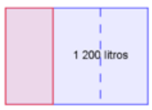
Con los números del 20 al 28 completa en tu cuaderno el cuadrado mágico de forma que obtengas la misma suma en todas direcciones, en horizontal, en vertical, e incluso en las dos diagonales.

Solución: Observa que la suma de los 9 números es 216, para que la suma de tres sea igual en todas direcciones su valor debe ser 72 y el 24 debe estar en el centro. Puedes obtener más soluciones utilizando simetrías.

27	22	23
20	24	28
25	26	21
21	28	23
26	24	22
25	20	27
27	20	25
22	24	26
23	28	21

12. ***"El depósito":*** **De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, y aún quedan 1 200 litros de agua**
¿Qué capacidad tiene el depósito? Si dibujas el depósito, enseguida sabrás la solución.

Solución: A partir del dibujo es evidente que la capacidad del depósito es 1 800 litros.



13. **Se calcula que Teano, la mujer de Pitágoras nació hacia el año 519 antes de Cristo, ¿cuántos años han pasado desde su nacimiento?**

Solución: 2535 años

14. Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está delante el lobo se come a la cabra y la cabra se come el repollo. ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?

Solución: Primero coge la cabra, la deja en la otra orilla y vuelve, después cruza con el lobo y a la vuelta coge de nuevo a la cabra; a continuación, traslada el repollo y por último vuelve a llevar a la cabra.

15. Con cuatro cuatros se puede conseguir 2: $4 : 4 + 4 : 4 = 1+1= 2$

Consigue utilizando cuatro cuatros 1, 3, 4, 7.

Solución: $1 = (4 \cdot 4) : (4 \cdot 4)$;

$3 = 4 - (4 : 4)^4$;

$4 = 4 - (4 - 4)^4$;

$7 = 4 + 4 - (4 : 4)$.

16. Cada entrada costaba 4 € y yo le entregué 10 €. No me preguntó nada, me dio dos entradas y me devolvió 2 €. ¿Cómo pudo saber el taquillero que yo quería dos entradas de cine?

Solución: Porque le entregué los 10 euros en dos billetes de 5 euros.

17. Dos personas se encuentran en el desierto donde se han perdido desde hace días. Para mejor sobrevivir, deciden compartir sus panes, uno tiene tres y el otro cinco. En ese momento aparece una tercera persona que no tiene comida. Comparten así sus ocho panes entre los tres. Finalmente les rescatan y, en agradecimiento, cuando llegan a la ciudad, la tercera persona les invita a su casa y les recompensa dando tres monedas al primero y cinco monedas al segundo. Su hija que ha presenciado la escena le indica al padre que el reparto no es justo. ¿Por qué? ¿Cómo se deben repartir las 8 monedas?

Solución: Cada persona comió 8/3 del total, es decir 2 panes más 2/3 de pan; como la primera persona sólo tenía 3 panes le cedió 1/3 de pan y la segunda 7/3, es decir, 2 panes más 1/3 de pan. Un reparto equitativo de las 8 monedas sería 1 moneda para la primera y 7 monedas para la segunda.

18. Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 11.

Solución: $x + (x + 1) = 11; x = 5$

3. EMOCIONES Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

19. Sin levantar el lápiz une con 4 trazos rectos estos nueve puntos.

o o o

o o o

o o o

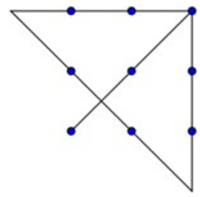
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Dibuja en tu cuaderno nueve puntos como los de la figura y intenta unirlos, con 4 trazos sin levantar el lápiz.

Solución:

Para unirlos sin levantar el lápiz hay que comenzar por uno de los dos vértices en los que concurren un número impar de segmentos.

El bloqueo en este problema es que no se contempla la posibilidad de salir del espacio marcado por los puntos.



20. **Con 3 palillos, todos iguales, puedes construir un triángulo equilátero. Con 5 palillos puedes construir 2 triángulos equiláteros, ¿cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?**

Solución: Si no te ha salido es porque con el enunciado te hemos hecho creer que no debías salir del plano. Un tetraedro tiene 6 aristas iguales y 4 caras. El bloqueo en este problema es que no se contempla la posibilidad de pasar al espacio.

4. JUEGOS Y PROBLEMAS

21. **Prepara unas cuantas monedas de un céntimo en la mano (o bolitas de papel, o fichas…). Pon la misma cantidad en cada mano, no menos de 10. Pasa 6 monedas de la mano derecha a la izquierda. Elimina de la mano izquierda tantas monedas como te queden en la derecha. ¿Qué observas? ¡Yo soy mago y puedo adivinar cuántas monedas te quedan en la mano izquierda! ¿Son 12? ¿Cómo funciona el truco? Prueba a pasar 4 o 5 objetos en lugar de 6, ¿cómo funciona ahora?**

Solución: Sea n el número de monedas que tenemos en cada mano. Al pasar 6 monedas de la derecha a la izquierda en la derecha tenemos n – 6 y en la izquierda n + 6. Al eliminar de la mano izquierda las monedas de la derecha obtenemos:

$n + 6 - (n - 6) = 12$. Por lo tanto, si pasamos 4 objetos obtenemos 8 y si pasamos 5 obtenemos 10.

22. **Otro juego: Es un juego de calculadora y puede ser un juego cooperativo; un juego en el que se ponen en común las diferentes estrategias y se discute sobre el mejor procedimiento, el más sencillo o el más original. Consta de cuatro fichas como las de la figura, donde se indican las teclas que está permitido pulsar, y el resultado, en rojo, al que hay que llegar.**

3 6	5 7	10 7	2 7
+ –	x /	+ –	+ –
/ =	+ =	x =	x =
33	147	123	95

- El juego consiste, en primer lugar, en obtener el resultado en la calculadora.
- Debes anotar todos los métodos encontrados. Piensa y anota en tu cuaderno cuál es el procedimiento que te ha resultado más eficaz.
- Escribe, utilizando paréntesis, las expresiones que ha utilizado la calculadora.
- Modifica el juego confeccionando nuevas fichas, modificando éstas con otras teclas y con otros resultados.

Solución: Simplemente juega usando la calculadora.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. **"El hotel de los líos": Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cómo están las puertas por la mañana?**

Ayuda y solución: Ve anotando las puertas que se van quedando abiertas hasta comprobar que son: 1, 4, 9, 16... ¿Cómo son esos números? ¿Cuántos divisores tienen? Son cuadrados perfectos que sólo tienen un número impar de divisores.

2. **El radio de la Tierra es de 6.240 km aproximadamente. Rodeamos la tierra con un cable. ¿Cuánto deberíamos aumentar la longitud del cable para que se separase por el ecuador una distancia de dos metros? ¿Menos de 15 m? ¿Más de 15 m y menos de 15 km? ¿Más de 15 km?**

Solución: $2 \cdot \pi \cdot 2 \approx 12$ *m, menos de 15 metros.*

3. **La invitación: Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el zumo de limón y el agua en jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer a sus invitadas toma un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, y a continuación toma un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?**

Ayuda: Para empezar, hazlo más fácil. Piensa en dos bolsas iguales una con bolas negras y la otra con bolas rojas. Solución: Hay igual cantidad de limón en la jarra de agua, que agua en la jarra de limón.

4. **"Los cachorros": Un muchacho tiene un cesto de cachorros y le regala a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que le queda le da a un amigo la mitad más medio, a su prima la mitad de lo que le queda más medio, y a su primo la mitad de lo que le queda más medio y le queda un cachorro. ¿Cuántos cachorros tenía el cesto?**

Ayuda: Haz un esquema.

Solución: Se trata de comenzar por el final. Partiendo del resultado final 1 cachorro, sumándole un medio y multiplicándolo por dos, se obtiene de forma recursiva 3, 7, 15 y 31 que es el número de cachorros que quedaba después de cada regalo.

El cesto tenía 31 cachorros, a la amiga le regala 16, al amigo 8, a su prima 4, a su primo 2 y le queda 1.

5. **Queremos poner un burlete alrededor del borde de tu mesa de trabajo. El metro de burlete vale a un euro. Estima las dimensiones de tu mesa. ¿Cuánto costaría ponerlo?**

Solución abierta:

6. **Un amigo dice a otro:**
   - **El producto de las edades de mis tres hijas es 36, y la suma es el número de la casa en la que vives. ¿Adivina qué edades tienen?**
   - **No, me falta un dato.**
   - **Tienes toda la razón, la mayor toca el piano.**

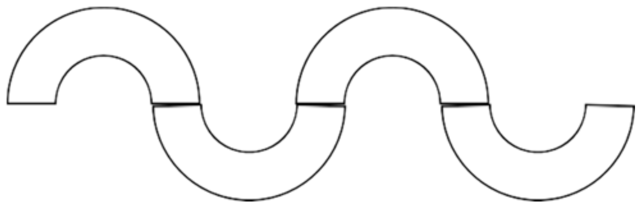
¿Qué edad tienen las hijas?

Solución: Se trata de buscar las diferentes ternas de divisores de 36 cuyo producto es 36. La suma de los números de cada una de estas ternas es diferente excepto dos de ellas que suman lo mismo: 1 + 6 + 6 = 13 y 2 + 2 + 9 = 13. En la primera no existe una mayor, luego la solución es 2, 2, 9.

7. En una trama de cuatro por cuatro, ¿cuál es el mayor número de lados que puede tener un polígono con vértices en puntos de la trama? Generaliza a otras tramas.

Solución: Para empezar, hazlo más fácil. Empieza con una trama de dos por dos, luego de 3 x 3… Experimenta. Juega con el problema.

8. Diseña figuras de cartulina que mediante un solo corte podamos dividir en cuatro trozos iguales.



Solución abierta: Hay infinitos diseños. Por ejemplo,

9. Cómo repartir equitativamente 8 litros entre dos utilizando únicamente tres jarras de 8, 5 y 3 litros.

Solución:

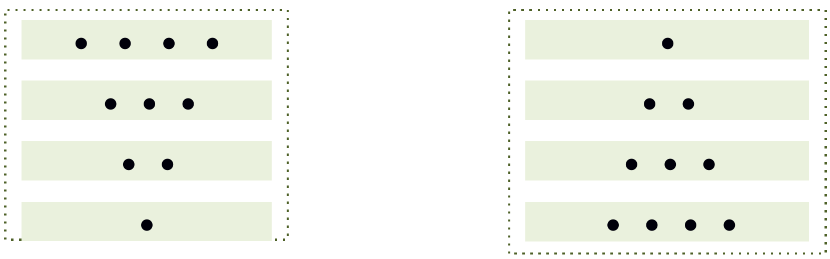
Partimos de que los 8 litros están en la jarra de 8.

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
8 litros	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5 litros	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3 litros	0	3	0	3	1	1	0	3	0

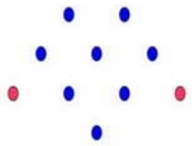
10. Estima cuánto mide tu habitación de largo, de alto y de ancho. Si quieres pintarla y el bote de pintura cuesta 5,2 €, y dice en las instrucciones que puedes pintar con él, 10 m^2, ¿cuánto costará pintarla?

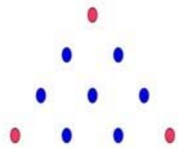
Solución abierta:

11. Monedas Ordenadas



Mueve sólo tres monedas para conseguir que el triángulo quede de esta forma:





Solución: 1º) *2º)*

12. A la base de Pluto llegan embarques de 6 latas de 100 bolas de un gramo. Un día llega el mensaje "*Urgente. Una lata se ha llenado con bolas defectuosas, cada una con un exceso de peso de un miligramo. Identifíquenla*" ¿Cómo hacerlo con una sola pesada? Un mes más tarde llega otro mensaje: "*Alguna de las seis latas, quizás todas ellas, pueden estar llenas con bolas defectuosa, con un sobrepeso de un miligramo. Identifiquen y destruyan todas las bolas defectuosas*" ¿Puedes hacerlo con una sola pesada?

Solución: Se trata de numerar las 6 latas y realizar una pesada con 1 bola de la primera lata, 2 bolas de la segunda, 3 de la tercera, 4 de la cuarta, 5 de la quinta y 6 de la sexta. La pesada será de 21 gramos y un número de miligramos que indica la lata incorrecta.

En el caso en el que no se sabe el número de latas defectuosas se coge de cada una de las latas un número de bolas diferente de modo que las sumas parciales no coincidan, por ejemplo, distintas potencias de dos: 1, 2, 4, 8, 16 y 32 el peso total será de 63 gramos y x miligramos. Expresando x en base 2 obtenemos el número de latas defectuosas.

13. Una estudiante tiene el insólito nombre palindrómico de Inés Lal Seni. Su novio, estudiante de matemáticas, aburrido una mañana por una lección un poco rollo, se entretiene intentando componer un criptograma numérico. Escribe el nombre en forma de suma:

$$\begin{array}{r} \text{INES} \\ +\ \ \text{LAL} \\ \hline \text{SENI} \end{array}$$

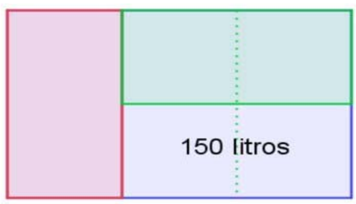
¿Será posible reemplazar cada letra por uno de los diez dígitos y obtener una suma correcta? El joven descubre con sorpresa que sí, pero la solución no es única. (Ninguno de los dos números de cuatro cifras empieza por cero).

Solución: Hay varias soluciones posibles. Dos de ellas son:

$$\begin{array}{r} 1542 \\ +\ \ 909 \\ \hline 2451 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1652 \\ +\ \ 909 \\ \hline 2561 \end{array}$$

14. La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 litros de agua. ¿Qué capacidad tiene la piscina?

Solución: A partir del dibujo es evidente que 450 litros.



2º ESO

Capítulo 2: Números

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

a) 8.216

$$8.216 = 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6$$

b) 591.274

$$591.274 = 5 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 4$$

c) 918.273

$$918.273 = 9 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3$$

d) 90.003.040.506

$$90.003.040.506 = 9 \cdot 10^{10} + 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^2 + 6$$

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 7 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

a) 708.544

El número 7 ocupa el lugar de las centenas de millar.

b) 67.339.001

El número 7 ocupa el lugar de las unidades de millón.

c) 5.092.175

El número 7 ocupa el lugar de las decenas.

d) 9.847

El número 7 ocupa el lugar de las unidades.

Para contestar a la pregunta, en cuál de los números tiene mayor valor, debemos tener en cuenta la posición que ocupa. Tendrá un mayor valor cuanto más a la izquierda este colocado dentro de nuestro número. Por tanto, tiene mayor valor en el apartado b), al encontrarse en la posición de las unidades de millón.

Por último, tendrá menor valor cuanto más a la derecha esté colocado dentro del número. En este caso será en el apartado d) al encontrarse en las unidades.

3. Razona por qué en el número natural con 77 777 con cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Aunque sea la misma cifra, cada una ocupa un lugar y por tanto tendrá valores diferentes.

4. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números romanos en nuestra numeración:

a) MDCV = 1.660 = $1 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 0$

b) MMMCCXXXIII = 3.234 = $3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4$

c) MMCDXXVI = 2.426 = $2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6$

d) **MMCCCXLIII =** 2.343 = $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3$

5. Escribe los números del 1 al 10 en el sistema binario.

Decimal	Binario
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
10	1010

6. Llamamos C_n al número cuadrado y T_n al número triangular que ocupan el lugar n. Ya sabes que C_n es igual a n^2: $C_n = n^2$. Comprueba que $\mathrm{T_n} = \frac{n(n+1)}{2}$ es una expresión para los números triangulares.

$$\mathrm{T_n} = \frac{n(n+1)}{2} \;;\quad \mathrm{T}_{10} = \frac{10(10+1)}{2} \;;\quad \mathrm{T}_{10} = \frac{10(11)}{2} \qquad \mathrm{T}_{10} = 55$$

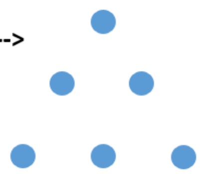
7. Observa los números cuadrados perfectos. Mira en la figura y comprueba que puedes formarlos como suma de dos números triangulares: 4 = 3 + 1, 9 = 6 + 3… Exprésalo de forma general.

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

8. Escribe tres números triangulares, tres cuadrados y tres pentagonales más de los ya indicados.

Triangulares

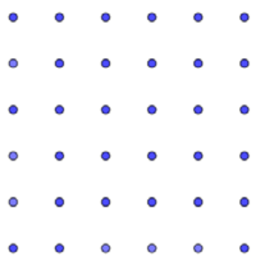
6 -->

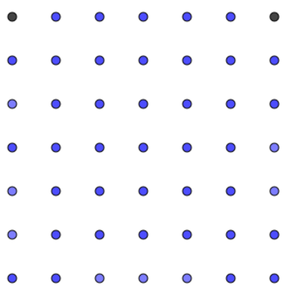


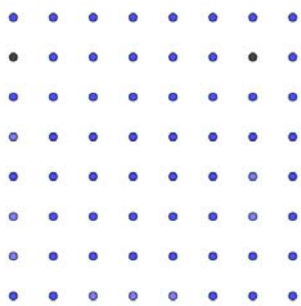
10 -->

15 -->

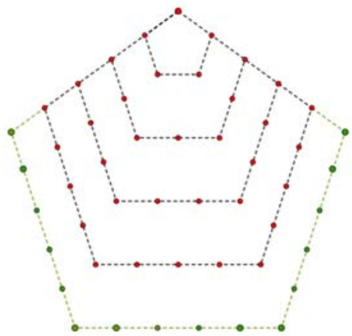
Cuadrados



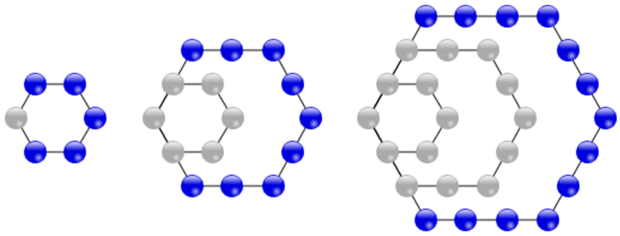




Pentagonal



9. Dibuja tres números hexagonales.



10. Escribe el número que mejor representa la situación que se plantea:

a) Un submarino navega a 345 m de profundidad: -345m.

b) Hoy el termómetro marcaba 15°C: +15°C

c) El coche estaba en el sótano 5: -5

d) Arquímedes murió en el año 212 antes de Cristo: -212

11. Expresa estos enunciados con un número positivo, negativo o cero:

a) Me he quedado sin dinero: 0

b) Miguel nació en el año dos mil: **+** 2000

c) El garaje está en el tercer sótano: -3

12. Indica el significado de los números –4, 0 y +7 en cada una de las situaciones siguientes:

a) En un garaje: (-4) Estoy en el cuarto sótano. (0) Estoy en la planta baja. (7) Estoy en la planta 7.

b) En una temperatura: (-4) Estamos a 4 grados bajo cero. (0) Estamos a 0 grados. (7) Estamos a 7 grados.

c) En una cuenta: (-4) Debo 4 euros, estoy en números rojos. (0) No tengo dinero. (7) Tengo 7€.

13. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) |+43| = 43

b) |–7.2| = 7,2

c) | 0 | = 0

d) |–81.7| = 81,7

14. Señala diferentes acciones que obliguen a repartir, o subdividir, cierto objeto, ente o actividad.

Si compramos un décimo de lotería entre varios amigos y nos toca, tenemos que repartir el premio entre todos.

Tenemos una tarta y somos seis personas.

Jugar al tenis 6 personas.

15. Encuentra situaciones de la vida cotidiana en las que aparezcan fracciones.

Compras medio kilo de plátanos: $\frac{1}{2}\ kg$.

Me como tres porciones de pizza de 8 $\frac{3}{8}$

16. Reduce las siguientes fracciones a su expresión irreducible:

Para halla la expresión irreducible, dividimos numerados y denominador por el mismo número.

a) $\mathbf{\frac{24}{18}} = \frac{24:3}{18:3} = \frac{8}{6} = \frac{8:2}{6:2} = \frac{4}{3}$

b) $\mathbf{\frac{21}{49}} = \frac{21:7}{49:7} = \frac{3}{7}$

c) $\mathbf{\frac{7}{7}}$ $= 1$. No se puede reducir más.

17. Determina si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

Para ver si son equivalentes las multiplicaremos en cruz y nos tendrá que dar el mismo resultado.

a) $\mathbf{\frac{4}{8}\ y\ \frac{3}{6}}$; $4 \bullet 6 = 8 \bullet 3$; $24 = 24$. Son equivalentes

b) $\mathbf{\frac{3}{11}\ y\ \frac{33}{9}}$; $3 \bullet 9 = 11 \bullet 33$; $27 \neq 363$. No son equivalentes

c) $\mathbf{\frac{5}{8}\ y\ \frac{105}{168}}$; $5 \bullet 168 = 8 \bullet 105$; $840 = 840$. Son equivalentes

18. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:

Para obtener fracciones equivalentes a la dada, tendremos que multiplicar numerador y denominador de la fracción dada por el mismo número.

a) $\mathbf{\frac{1}{5}}(\bullet 2) = \frac{2}{10}$; $(\bullet 3) = \frac{3}{15}$; $(\bullet 4) = \frac{4}{20}$

b) $\mathbf{\frac{9}{4}}(\bullet 2) = \frac{18}{8}$; $(\bullet 3) = \frac{27}{12}$; $(\bullet 4) = \frac{36}{16}$

19. Decide si las siguientes parejas de fracciones son o no equivalentes:

a) $\mathbf{\frac{4}{5}\ y\ \frac{12}{15}}$; $4 \bullet 15 = 5 \bullet 12$; $60 = 60$. Son equivalentes.

b) $\mathbf{\frac{2}{3}\ y\ \frac{10}{15}}$; $2 \bullet 15 = 3 \bullet 10$; $30 = 30$. Son equivalentes.

20. Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las que figuran a continuación:

a) $\mathbf{\frac{-1}{5}}(\bullet 2) = \frac{-2}{10}$; $(\bullet 3) = \frac{-3}{15}$; $(\bullet 4) = \frac{-4}{20}$

b) $\mathbf{\frac{9}{-4}}(\bullet 2) = \frac{18}{-8}$; $(\bullet 3) = \frac{27}{-12}$; $(\bullet 4) = \frac{36}{-16}$

c) $\mathbf{\frac{-3}{7}}(\bullet 2) = \frac{-6}{14}$; $(\bullet 3) = \frac{-9}{21}$; $(\bullet 4) = \frac{-12}{28}$

d) $\mathbf{\frac{2}{-15}}(\cdot 2) = \frac{4}{-30}$; $(\cdot 3) = \frac{6}{-45}$; $(\cdot 4) = \frac{8}{-60}$

21. Busca otras situaciones de la vida real donde aparezcan números decimales.

300 gramos de patatas cuestan 0,75€.

Yo mido 1,75cm.

El coche ha hecho un consumo de 5,5l/1000m.

22. Convierte en expresión decimal las fracciones siguientes:

Para convertir una fracción en un número decimal, dividiremos el numerador entre el denominador.

a) $\frac{\mathbf{97}}{\mathbf{2}}$ = 48,5

b) $\frac{\mathbf{345}}{\mathbf{4}}$ = 86,25

23. Transforma las siguientes fracciones en expresión decimal:

a) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ = 0,33333….

b) $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}}$ = 0,77777….

c) $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$ = 0,8333333….

d) $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{11}}$ = 0,363636…..

e) $\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{12}}$= 2,0833333…..

24. Aproxima por truncamiento los siguientes números decimales de forma que aparezca un desarrollo decimal hasta las milésimas:

Para aproximar por truncamiento solo se eliminarán los decimales a partir de lo pedido, en este caso, hasta la milésima.

a) 11.1234 = 11,123

b) 6. $\overline{6}$ **=** 6,666

c) 9.3 $\overline{50}$ = 9,350

d) 8. $\overline{71}$ **=** 8,717

e) 8.334$\overline{8}$ **=** 8,334

f) 2.64$\overline{08}$ = 2,640

25. Aproxima por redondeo hasta la milésima los siguientes números decimales:

Para aproximar por redondeo, miraremos el número siguiente al pedido, si es menor de 5, el número se quedará igual y si es 5 o mayor de 5, le sumaremos una unidad.

a) 11.1234 = El siguiente a la milésima es el 4. Al ser menor de 5, lo dejamos igual = 11,123

b) 6. $\overline{6}$ **=** El siguiente a la milésima es el 6. Al ser mayor de 5, le sumamos una unidad = 6,667.

c) 9.3 $\overline{50}$ = 9,351

d) 8. $\overline{71}$ **=** 8,717

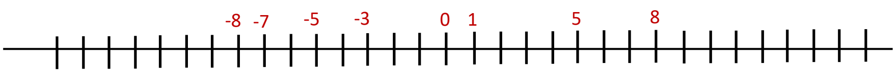
e) 8.334$\overline{8}$ **=** 8,335

f) 2.64$\overline{08}$ = 2,461

g) 3.99$\overline{96}$ = 4,000

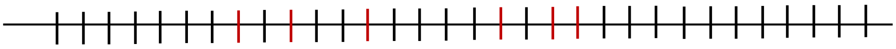
26. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números:

–8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.

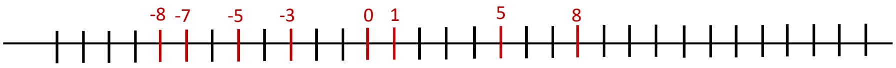


27. Sitúa en la siguiente recta los números: 8.43, 8.48, 8.51 y 8.38

8,38 8,4 8,43 8,48 8,5 8,51



28. Representa en una recta numérica en tu cuaderno los siguientes números y ordénalos de menor a mayor: –8, 5, 1, –5, 8, –3, –7 y 0.



-8 < -7 < -5 < -3 < 0 < 1 < 5 < 8

29. Completa en tu cuaderno con el signo < (menor) o > (mayor) según corresponda:

a) –13.6 > –67.1. Al ser negativos será mayor el número más pequeño ya que estará más cerca del 0.

b) –80.2 < +94.5. Positivo y negativo siempre más grande el positivo.

c) +37 < +48

d) +52 > –64

e) –21 < |–25|. El valor absoluto de |–25| es igual a 25 por tanto es mayor que -21.

30. Ordena de menor a mayor

a) +5.1, –4.9, –1.5, +18.2, 5.17

-4,9 < -1,5 < 5,1 < 5,17 < 18,2

b) +6.9, –7.2, –8.5, –5.9, –7.21

-8,5 < -7,2 < -7,21 < -5,9 < 6,9

31. Señala qué número es el mayor para cada una de las siguientes parejas:

a) –0.872 y –0.8721. -0,872 = -0,8720, por lo tanto, el mayor es -0,872

b) 3.58 y |–3.57|. |–3.57| = 3,57, por lo tanto, el mayor es 3,58.

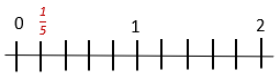
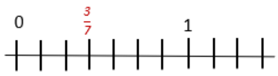
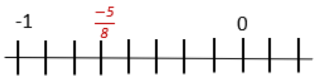
c) 7.0001 y 7.00001. El mayor es 7,0001

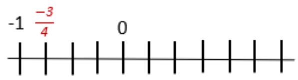
d) –4.78 y –8.92. El mayor es -4,78.

32. Escribe dos números decimales que sean, simultáneamente, mayores que 6.147 y menores que 6.2.

6,148 y 6,15.

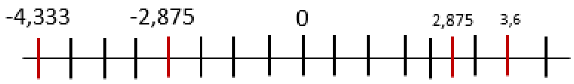
33. Representa en la recta numérica las fracciones:

$\frac{1}{5}$	
$\frac{3}{7}$	
$\frac{-5}{8}$	

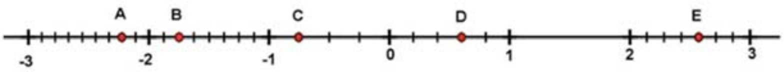
$\frac{-3}{4}$	

34. Pasa a forma mixta y representa las fracciones:

$\frac{\mathbf{23}}{\mathbf{8}} = 2{,}875;\quad \frac{\mathbf{-23}}{\mathbf{8}} = -2{,}875\ ;\quad \frac{\mathbf{180}}{\mathbf{50}} = 3{,}6\ ;\quad \frac{\mathbf{-26}}{\mathbf{6}} = -4{,}3333$



35. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos A, B, C, D y E, expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos A, B y E.



A = $\frac{-2}{9}$ = -0,222
B = $\frac{-6}{8}$ = -0,75
C = $\frac{-3}{4}$ = -0,75
D = $\frac{2}{5}$ = 0,4
E = $\frac{3}{7}$ = 0,4285

36. Halla el resultado de las siguientes sumas:

a) (+12.8) + (+57) + (–4,6)
(+12,8) + (+57) = (+69,8)
(+69,8) + (–4,6) = 65,2

b) (–83,2) – (–24,1) + (–10,5)
(–83,2) – (–24,1) = - 83,2 + 24,1 = (-59,1)
(-59,1)+ (–10.5) = (-69,6)

c) (–35) + (–48) + (+92)
(–35) + (–48) = (-83)
(-83) + (+92) = +9

37. Efectúa estas operaciones

a) (+3.8) + (+4.2) – (–52)
(+3.8) + (+4.2) = (+8,0)
(+8,0) - (-52) = (+8) + (+52) = (+60)

b) (–614) + (–77) + (–811)
(–614) + (–77) = (-691)
(-691) + (-811) = (-1502)
c) (–97) – (–12) + (+26)
(–97) – (–12) = (–97) + (+12) = (-85)

(-85) + (+26) = (-59)

d) (–45) + (+52)
(–45) + (+52) = (+7)

38. Un autobús comienza el viaje con 30 pasajeros. En la primera parada se bajan 16 y se suben 21. En la segunda se bajan 17 y se suben 24, y en la tercera se bajan 9. ¿Cuántos pasajeros hay en el autobús?

Comienza con 30 PASAJEROS (+30)
Se bajan 16 (-16)
Se suben 21 (+21)
Se bajan 17 (-17)
Se suben 24 (+24)
Se bajan 9 (-9)

Tendríamos: (+30) + (-16) + (+21) + (-17) + (+24) + (-9)
(+30) + (-16) = (+14)
(+14) + (+21) = (+35)
(+35) + (-17) = (+18)
(+18) + (+24) = (+42)
(+42) + (-9) = (+33)

Al final habrá un total de 33 pasajeros en el autobús.

39. Un avión vuela a 3 672 m y un submarino está sumergido a 213 m, ¿qué distancia en metros les separa?

Restaremos las dos distancias y tendremos la distancia que los separa:
(+3.672) - (-213) = (+3.672) + (+213) =(+3.885)

40. Arquímedes nació en el año 287 a. C. y murió el año 212 a. C. ¿Cuántos años tenía?

Restaremos las dos fechas y sabremos la edad:
287 - 212 = 75 años.

41. Expresa al número 100 de cuatro formas distintas como suma y resta de 3 números enteros.

1. 50 + 25 + 25 = 100
2. 150 - 25 - 25 = 100
3. 200 - 75 - 25 = 100
4. 25 + 25 + 50 = 100

42. Expresa al número cero como suma y resta de cuatro números enteros.

(-7) + (+7) + (-3) + (+3) = 0

43. Realiza las siguientes sumas de fracciones:

a) $\frac{1}{5} + \frac{4}{3}$

Hallamos el M.C.M = $5 \cdot 3 = 15$

15: 5 = 3
15 : 3 = 5
$3 \cdot 1 = 3$
$5 \cdot 4 = 20$
$\frac{1}{5} + \frac{4}{3} = \frac{3+20}{15} = \frac{23}{15}$

b) $\frac{7}{6} + \frac{4}{9}$

$6 = 2 \bullet 3 \qquad 9 = 3^2 \qquad$ M.C.M = $3^2 \bullet 2 = 18$
18:6 = 3 ; $3 \bullet 7 = 21$
18:9 = 2 ; $2 \cdot 4 = 8$
$\frac{7}{6} + \frac{4}{9} = \frac{21+8}{18} = \frac{29}{18}$

c) $\frac{5}{8} + \frac{5}{2}$

$8 = 2^3 \qquad 2 = 2 \qquad$ M.C.M = $2^3 = 8$
8:8 = 1 ; $1 \bullet 5 = 5$
8:2 = 4 ; $4 \bullet 5 = 20$
$\frac{5}{8} + \frac{5}{2} = \frac{5+20}{8} = \frac{25}{8}$

d) $\frac{67}{100} + \frac{13}{24}$

$100 = 2^2 \bullet 5^2 \qquad 24 = 2^3 \bullet 3$; M.C.M = $2^3 \bullet 5^2 \bullet 3 = 600$
600:100 = 6 ; $6 \bullet 67 = 402$
600:24 = 25 ; $25 \bullet 13 = 325$
$\frac{67}{100} + \frac{13}{24} = \frac{402+325}{600} = \frac{727}{600}$

44. Calcula:

a) $\frac{5}{14} - \frac{7}{6}$

$14 = 7 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$; M.C.M = $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$
42:14 = 3 ; $3 \bullet 5 = 15$
42:6 = 7 ; $7 \bullet 7 = 49$
$\frac{5}{14} - \frac{7}{6} = \frac{15-49}{42} = \frac{-34}{42}$

b) $\frac{11}{6} - \frac{13}{5}$

$5 = 5$; $6 = 2 \bullet 3$; M.C.M = $5 \bullet 6 = 30$
30:6 = 5 ; $5 \bullet 11 = 55$
30:5 = 6 ; $6 \bullet 13 = 78$
$\frac{11}{6} - \frac{13}{5} = \frac{55-78}{30} = \frac{-23}{30}$

c) $\frac{13}{100} - \frac{13}{240}$

$100 = 2^2 \cdot 5^2$; $240 = 2^4 \cdot 5 \cdot 3$; M.C.M = $5^2 \cdot 2^4 \cdot 3 = 1200$
1200:100 = 12 ; $12 \bullet 13 = 156$
1200:240 = 5 ; $56 \cdot 13 = 65$

$$\frac{13}{100} - \frac{13}{240} = \frac{156-65}{1200} = \frac{91}{1200}$$

d) $\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{21}} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$

$21 = 7 \cdot 3$; $3 = 3$; M.C.M = $7 \cdot 3 = 21$

21:21 = 1 ; $1 \bullet 50 = 50$

21:3 = 7 ; $7 \cdot 7 = 49$

$$\frac{50}{21} - \frac{7}{3} = \frac{50-49}{21} = \frac{1}{21}$$

45. Realiza los siguientes productos y divisiones de números enteros:

Recuerda que al multiplicar o dividir números enteros, cuando tengan el mismo signo el resultado será siempre positivo y cuando tengan diferente signo, el resultado será siempre negativo.

a) (+35) · (+2) = (+70)
b) (+4) · (–72) = (-288)
c) (–8) · (–45) = (+360)
d) (–5) · (+67) = (-335)
e) (+28) : (+2) = (+56)
f) (+27) : (–3) = (-9)
g) (–36) : (–2) = (+18)
h) (–54) : (+9) = (-6)

46. Calcula en tu cuaderno los siguientes productos y divisiones de números enteros:

a) (+721) · (+3) = (+2163)
b) (+562) · (–3) = (-1686)
c) (–915) · (–2) = (+1830)
d) (–6) · (+72) = (-432)
e) (+303) : (+3) = (+101)
f) (+505) : (–5) = (-101)
g) (–160) : (–4) = (+40)
h) (–704) : (+2) = (-352)

47. Efectúa mentalmente y anota los resultados en tu cuaderno:

a) (+2) · (+40) = (+80)
b) (+30) · (–2) = (-60)
c) (–60) · (–3) = (+180)
d) (–50) · (+8) = (-400)
e) (+80) : (+4) = (+20)
f) (+18) : (–3) = (-6)
g) (–15) : (–5) = (+3)
h) (–70) : (+7) = (-10)

48. Calcula:

Recuerda que, para multiplicar fracciones, multiplicaremos los numeradores y después multiplicaremos los denominadores:

a) $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{22}} \bullet \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{75}} = \frac{8\bullet 3}{22\bullet 75} = \frac{24}{1650}$

b) $\mathbf{6} \bullet \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{11}} = \frac{6\bullet 7}{1\bullet 11} = \frac{42}{11}$

c) $\mathbf{23} \bullet \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{23}} = \frac{23\bullet 1}{1\bullet 23} = \frac{23}{23} = 1$

d) $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{10}} \bullet \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}} = \frac{9\bullet 11}{10\bullet 3} = \frac{99}{30}$

49. Multiplica las siguientes fracciones y reduce, simplifica, el resultado:

a) $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} \bullet \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{8}} = \frac{24}{72} = \frac{24:24}{72:24} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{15}} \bullet \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} = \frac{45}{45} = 1$

c) $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{25}} \bullet \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{21}} = \frac{70}{525} = \frac{70:5}{525:5} = \frac{14}{105}$

d) $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{15}} \bullet \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{12}} = \frac{60}{180} = \frac{60:60}{180:60} = \frac{1}{3}$

50. Calcula:

a) 7,3 • 2,54 = 18,542

b) 2,89 • 7,21 = 20,83

c) 3,54 • 5 • 2 • 6,8 = 125,17

d) 6,9 • 7,5 • 6,1 = 315, 67

51. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) 756 · 4 – 756 · 3 = $756\ (4-3) = 756 \bullet 1 = 756$

b) 350 · 8 + 350 · 2 = $350\ (8+2) = 350 \bullet 10 = 3.500$

c) 927 · 13 – 927 · 3 = $927\ (13-3) = 927 \bullet 10 = 9.270$

d) 700 · 33 – 700 · 3 = $700\ (33-3) = 700 \bullet 30 = 21.000$

52. Efectúa:

a) $\mathbf{9} \bullet (\mathbf{4{,}01 + 3{,}4}) = 9 \bullet 7{,}41 = 66{,}69$

b) $\mathbf{7{,}3} \bullet (\mathbf{12 + 5{,}14}) = \mathbf{7{,}3} \bullet 17{,}14 = 125{,}122$

c) $\mathbf{2{,}9} \bullet (\mathbf{25{,}8 - 21{,}97}) = 2{,}9 \bullet 3{,}83 = 11{,}107$

53. Realiza los productos indicados:

a) $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} \bullet \left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} \bullet \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right) = \frac{7}{3} \bullet \frac{6}{20} = \frac{42}{60}$

b) $\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} \bullet \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right) \bullet \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{42}{15} \bullet \frac{1}{4} = \frac{42}{60}$

c) $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} \bullet \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} \bullet \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{42}{60}$

54. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} \bullet \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\right) = \frac{9}{2} + \frac{35}{24}$

$2 = 2$; $24 = 2^3 \cdot 3$; M.C.M = $2^3 \cdot 3$

24:2 = 12 ; $12 \bullet 9 = 108$

24:24 = 1 ; $1 \cdot 35 = 35$

$\frac{9}{2} + \frac{35}{24} = \frac{108 + 35}{24} = \frac{143}{24}$

b) $(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}})\bullet\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}=\frac{37}{6}\bullet\frac{7}{8}=\frac{254}{48}$

$2 = 2$; $3 = 3$; M.C.M $= 2 \cdot 3 = 6$

6:2 = 3 ; $3 \bullet 9 = 27$

6:3 = 2 ; $2 \cdot 5 = 10$

$\frac{9}{2}+\frac{5}{3}=\frac{27+10}{6}=\frac{37}{6}$

c) $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\bullet(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}})=\frac{9}{2}\bullet\frac{61}{24}=\frac{549}{48}$

$3 = 3$; $8 = 2^3$; M.C.M $= 2^3 \cdot 3 = 24$

24:3 = 8 ; $8 \bullet 5 = 40$

24:8 = 3 ; $3 \cdot 7 = 21$

$\frac{5}{3}+\frac{7}{8}=\frac{40+21}{24}=\frac{61}{24}$

55. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad D = d· c + r

a) 8.214 : 26 = 315,92

```
8.214   | 26
041       315
 154
  24
```

D = d· c + r

8.214 = 26•315+24

8.214 = 8.190+24

8.214 = 8.214

b) 271.093 : 452

```
271.093  | 452
 4509      599
  4413
   345
```

271.093 = 452•599+345

271.093 = 270.748+345

271.093 = 271.093

c) 1.112.220.000 : 385

```
1.112.220.000  | 385
   3422          28.888.883
    3422
     3420
      3400
       3200
        1200
         055
```

1.112.220.000 = 385•2.888.883+55

1.112.220.000 = 1.112.219.955+55

1.112.220.000 = 1.112.220.000

d) 274 : 25

274	25
24	10

274 = 25•10+24
274 = 250+24
274 = 274

56. Realiza las siguientes operaciones:

a) +4 – (+5) · (-3) = +4 - (-15) = +4 + 15 = +19
b) +6 + (–9) : (+2–5) = +6 + (-9) : (-3) = +6 +(+3) = +9
c) –3 + [–4 – (–26) : (+2)] = -3 +$[-4-(-13)] \; = \; -3 \; + (+9) = +6$

57. Realiza las siguientes operaciones:

a) +8 + (–1) · (+6) = +8 + (-6) = +2
b) –6 + (–7) : (+7) = -6 + (-1) = -7
c) +28 – (–36) : (–9–9) = +28 - (-36) : (-18) = + 28 - (+2) = +28 - 2 = +26
d) +11 + (+7) · (+6 – 8) = +11 + (+7) · (-2) = +11 + (-14) = -3
e) –7 – [+4 – (–6) : (+6)] = -7-$[+4-(-1)] \; = \; -7-(+5) \; = \; -12$
f) +9+ [+5 + (–8) · (–1)] = +9 +$[+5+(+8)] \; = \; +9 \; + \; (+13) = +22$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) (34 + 52) · 5 = $84 \bullet 5 = 430$

b) 89 · 2 + 12 = $178 + 12 = 190$

c) 55 + 67 · 3 + 13 = $55 + 190 + 13 = 258$

d) 280 – 110 · 2 + 90= 280 – 220 + 90 = 150

2. Di cuales de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

a) 8 · (22 – 20) = $8 \bullet 2 = 16$

b) 8 · 22 – 20 = $176 - 20 = 156$

c) 8 · 22 – 8 · 20 = $176 - 160 = 16$

d) 8 · (22 + 20) =$8 \bullet 42 = 336$

e) 8 · 22 + 20=$176 + 20 = 196$

Tendremos el mismo resultado en el apartado a y c.

3. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

Comprobar con la calculadora.

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) 23·6 + (35–13) :11–4·7 = $138 + 22:11 - 28 = 138 + 2 - 28 = 112$

b) 48:4·8:2– (3·12):6= $12 \bullet 4 - (36):6 = 48 - 6 = 42$

c) 357–23·7 +280:14 = $357 - 161 + 20 = 216$

d) 20·9–11·7+265:53= $180 - 77 + 5 = 108$

5. Efectúa en tu cuaderno:

a) 6 – (8 + 10 – 1 – 2) = $6 - (18 - 3) = 6 - 15 = -9$

b) 7 + (2 – 8 – 1) – (8 – 1 + 6)= $7 + (-7) - (-1) = 1$

c) (10 – 2 – 7) – (1 – 9 – 16) =$1 - (-24) = 25$

d) –(9 – 6 – 8) – (– 7 – 10 + 2)= $-(-11) - (-15) = +11 + 15 = 26$

6. Quita paréntesis y efectúa en tu cuaderno:

a) 15 + [2 – 8 – (10 – 3)] = $15 + 2 - 8 - (10 - 3) = 15 + 2 - 8 - 10 + 3 = 2$

b) 7 – [(5 – 8) – (6 – 12)] =$7 - 5 + 8 + 6 - 12 = 4$

c) (5 – 14) – [2 – (2 – 4 – 3)] = $5 - 14 - (2 - 2 + 4 + 3) = 5 - 14 - 2 + 2 - 4 - 3 = -16$

d) (1 – 11 + 6) – [(3 – 2) – (4 – 16)] = $1 - 1 + 6 - (3 - 2 - 4 + 16) =$
$= 1 - 1 + 6 - 3 + 2 + 4 - 16 = -7$

e) [8 – (4 – 16)] – [10 – (5 – 12)] = $8 - 4 + 16 - (10 - 5 + 12) =$
$= 8 - 4 + 16 - 10 + 5 - 12 = 3$

7. Efectúa en tu cuaderno aplicando la regla de los signos:

a) (+4) · (+8) =$+32$

b) (–11) · (–5) = $+55$

c) **(+12) · (–6) =**-72

d) **(–11) · (–10) =**$+110$

e) **(+16) : (+4)=** $+64$

f) **(–12) : (+6)=** -2

g) **(+24) : (–3)** -8

h) **(–81) : (–9)** -9

i) **(–63) : (+7)** $+9$

j) **(–30) : (–10)=** $+3$

8. Efectúa las operaciones y comprueba como varía el resultado según la posición de los paréntesis:

a) **18 – 7 · 3 =** -3

b) **(18 – 7) · 3 =** $+33$

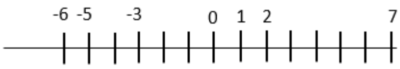
c) **(–12) – 4 · (–8)=** $(-12)-(-32)=+20$

d) **[(–12) – 4] · (–8) =** $(-16)\bullet(-8)=+128$

e) **(–5) · (+7) + (–3) =** $(-35)+(-3)\ \ =(-38)$

f) **(–5) · [(+7) + (–3)]=** $(-5)\bullet(+4)=(-20)$

9. Representa gráficamente y ordena en sentido decreciente, calcula los opuestos y los valores absolutos de los siguientes números enteros: –5, 7, –3, 0, –6, 1, 2



El orden en sentido decreciente sería:

7 > 2 > 1 > 0 > -3 > -5 > -6

Los opuestos serían:

-5 …. 5
7 …. -7
-3 …. 3
0 …… 0
-6 ….. 6
1 …. -1
2 ….. -2

El valor absoluto sería:

$|-5| = 5$
$|7| = 7$
$|-3| = 3$
$|0| = 0$
$|-6| = 6$
$|1| = 1$
$|2| = 2$

10. Antonio hace las cuentas todas las noches y en su cuaderno tiene anotado: Lunes: Papá me ha devuelto 10 euros que me debía. Martes: He vendido sellos de mi colección y me han pagado 5 euros. Miércoles: Me compro unos cromos por 3 euros. Jueves: Me he to-

mado un helado por 1 euro. Si Antonio tenía 15 euros el lunes por la mañana, ¿cuánto tiene cada noche? ¿Ha aumentado su dinero o ha disminuido? ¿En cuánto?

Tenía 15€:
Lunes: +10€ = +25€ esa noche
Martes: +5€ = +30€ esa noche
Miércoles: -3€ = 27€ esa noche
Jueves: -1€= 26€ esa noche
$15 + [(+10 + (+5) + (-3) - (-1)] = 15 + [(+15) + (-4)] = 15 + 11 = 26.$
Ha aumentado su dinero en 11€.

11. ¿De qué planta ha salido un ascensor que después de subir 7 pisos llega al piso 4?

4-7=-3 Salió del sótano 3.

12. Jaime ha comenzado un negocio, y de momento pierde 100 euros cada día. Comparando con su situación actual, ¿cuál era su situación hace 5 días?

Si cada día pierde 100€, en 5 días habrá perdido 500€, ya que:

$$5 \bullet 100 = 500$$

13. Pedro dispone en 2013 de una máquina para viajar en el tiempo. Decide avanzar 240 años, ¿en qué año se encontraría? Y si retrocede 390 años, ¿a qué año viaja?

En el año que está (2.013) hay que sumarle los años que avanza:
2.013+240 = 2.254. Se encontrará en el año 2.254.
Si retrocede 390 años:
2.013 - 390 = 1.623. Se encontrará en el año 1.623

14. ¿A qué edad se casó una persona que nació en el año 9 antes de Cristo y se casó en el año 19 después de Cristo?

9 +19 = 28. Se casó con 28 años

15. ¿En qué año nació una mujer que en el año 27 después de Cristo cumplió 33 años?

27-33 = -6. Nació en el año 6 antes de Cristo.

16. ¿En qué año se casó un hombre que nació en el año 20 antes de Cristo y se casó a los 27 años?

27-20 = 7. Se caso en el año 7 después de Cristo.

17. Hace una hora el termómetro marcaba –5°C y ahora marca 5°C. La temperatura ¿ha aumentado o ha disminuido? ¿Cuánto ha variado?

De -5°C hasta 0°C van 5°C y de 0°C hasta 5°C van 5°C. Por lo tanto, tenemos:
5°C + 5°C = 10°C.
La temperatura ha aumentado 10°C.

18. Por la mañana un termómetro marcaba 7 grados bajo cero. La temperatura baja 12°C a lo largo de la mañana. ¿Qué temperatura marca al mediodía?

Por la mañana: -7°C y baja 12°C, es decir -12°C. Por lo tanto:

(-7) + (-12) = -19. El termómetro marcaba a mediodía -19°C.

19. ¿A qué planta ha llegado un ascensor de un edifico que estaba en el sótano 2 y ha subido 7 pisos?

Sótano 2, sube 7 pisos. Tendríamos: (-2) + 7 = 5. Está en la 5ª planta.

20. Un juego:

a) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que la suma de todas las filas y columnas sea siempre 3.

- 6	3	**+6**
4	**+2**	-3
5	-2	**0**

b) Rellena con números enteros las casillas en blanco de tal manera que el producto de todas las filas y columnas sea siempre –70.

-5	2	**+7**
-2	**-7**	-5
-7	5	**+2**

21. Una persona protestaba por su mala suerte. Había perdido su trabajo y sólo le quedaban unos euros en el bolsillo. El diablo se le acercó y le hizo una extraña proposición:
–Yo puedo hacer que tu dinero se duplique cada vez que cruces el puente que atraviesa el río. La única condición es que yo te esperaré al otro lado y debes entregarme 24 €. El trato parecía ventajoso. Sin embargo, cuando cruzó por tercera vez, al dar al diablo los 24 € se quedó sin nada. Había sido engañado. ¿Cuánto dinero tenía en un principio?

Primera vez: 2x – 24

Segunda vez: 2(2x – 24) – 24 = 4x – 48 – 24 = 4x – 72

Tercera vez 2(4x – 72) – 24 = 8x – 72 – 24=8x – 168

A la tercera vez que cruza, se queda sin nada, por lo que tendría:

8x – 168 = 0 ; 8x = 168 ; $x = \frac{168}{8}$; x = 21

Al principio tenía 21€.

22. Realiza los siguientes cálculos:

a) $\frac{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}}{5} \bullet \frac{1}{8} = \frac{\frac{19}{6}}{5} \bullet \frac{1}{8} = \frac{19}{30} \bullet \frac{1}{8} = \frac{19}{240}$

$\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{15+4}{6} = \frac{19}{6}$ $\quad \frac{19}{6} : 5 = \frac{19}{30}$

M.C.M = $2 \bullet 3 = 6$; 6:2 = 3 ; 3•5 = 15 ; 6:3 = 2 ; 2•2 = 4

b) $\frac{4}{\frac{3}{5}-\frac{2}{3}} + 1 = \frac{4}{\frac{19}{15}} + 1 = \frac{60}{19} + 1 = \frac{60+19\bullet 1}{19} = \frac{79}{19}$

$\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{9+10}{15} = \frac{19}{15}$

MCM = $5 \bullet 3 = 15$; 15:5 = 3 ; 3•3= 9 ; 15:3 = 5 ; 5•2 = 10

$4 : \frac{19}{15} = \frac{4\bullet 15}{19} = \frac{60}{19}$

c) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2$

$\frac{1}{3}-\frac{4}{9}=\frac{3-4}{9}=\mathbf{\frac{-1}{9}}$

MCM = $3^2 = 9$; 9: 3 = 3 , 3•1 = 3 ; 9:9 = 1 , 1•4 = 4

$\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2=\dfrac{\frac{-1}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2$

$\frac{5}{3}-\frac{9}{2}=\frac{10-27}{6}=\mathbf{\frac{-17}{6}}$

MCMC = 3•2 = 6 ; 6:3 = 2 , 2•5 = 10 ; 6:2 = 3 , 3•9 =27

$\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{4}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2=\dfrac{\frac{-1}{9}}{\frac{5}{3}-\frac{9}{2}}-2=\dfrac{\frac{-1}{9}}{\frac{-17}{6}}-2$

$\frac{-1}{9}:\frac{-17}{6}=\frac{-6}{-153}=\frac{6}{153}$

$\frac{6}{153}-2=\frac{6\bullet 1-2\bullet 153}{153}=\frac{-300}{153}$

d) $\left(\frac{4}{3}\bullet\frac{9}{8}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{9}{8}\right)=\frac{36}{24}:\frac{47}{24}=\frac{864}{1128}=\frac{36}{47}$

$\frac{5}{6}+\frac{9}{8}$: MCM = $2^3\cdot 3 = 24$; 24: 6= 4 , 4·5 = 20 ; 24:8 = 3, 3·9=27

$\frac{5}{6}+\frac{9}{8}=\frac{20+27}{24}=\frac{47}{24}$

$\frac{36}{24}:\frac{47}{24}=\frac{36\bullet 24}{24\bullet 47}=\frac{864}{1128}$

23. A una cena asisten 8 personas. De postre hay un pastel que ya ha sido dividido en 8 porciones iguales. Tras repartir el postre llegan de repente 2 personas más. Quienes estaban desde un principio ofrecen a los recién llegados que prueben el pastel y se dan cuenta de que de las 8 porciones hay 6 que no se han tocado y 2 que han sido ingeridas. Indica qué se ha de hacer para que las personas que no han probado la tarta reciban la misma cantidad.

Se reparte entre las 8 personas y dos de ellas se han comido su parte, por lo que queda sin tocar $\frac{6}{8}$. Ahora solo quedan 6 porciones, las cuales tenemos que repartir entre 8, ya que han llegado dos personas más. No contamos las dos que ya han comido su parte.

Ahora los $\frac{6}{8}$ los divido entre las 8 personas y tenemos:

$$\frac{6}{8}:8=\frac{6}{64}=0{,}093.$$

A cada uno le toca 0,093 de tarta.

24. María es 70 cm más alta que la mitad de su altura. ¿Qué estatura tiene?

Si su altura es x, tendremos:

70cm = $\frac{x}{2}$; $70\bullet 2 = x;\ \ x = 140\text{cm}.$

María mide 140 cm.

25. Si una persona vive 80 años, y se pasa durmiendo un tercio de su vida, ¿cuánto ha dormido?

Si vive 80 años y duerme $\frac{1}{3}$, tendremos:

$$80\bullet\frac{1}{3}=\frac{80}{3}=26{,}66.$$

Esa persona se pasa durmiendo 26,66 años.

26. Indica cuáles de las siguientes fracciones en propias y cuáles son impropias:

a) $\frac{8}{3}$ = Impropia porque le numerador es mayor que el denominador.
b) $\frac{2}{5}$ = Propia porque el numerador es menor que el denominador.
c) $\frac{5}{2}$ = Impropia porque le numerador es mayor que el denominador.
d) $\frac{16}{7}$ = Impropia porque le numerador es mayor que el denominador.
e) $\frac{21}{4}$ = Impropia porque le numerador es mayor que el denominador.
f) $\frac{5}{6}$ = Propia porque el numerador es menor que el denominador.

27. Transforma en número mixto las fracciones impropias de la actividad anterior.

a) $\frac{8}{3}$ = Impropia

8	3
2	2

$\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{2}$ = Impropia

5	2
1	2

$\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

c) $\frac{16}{7}$ = Impropia

16	7
2	2

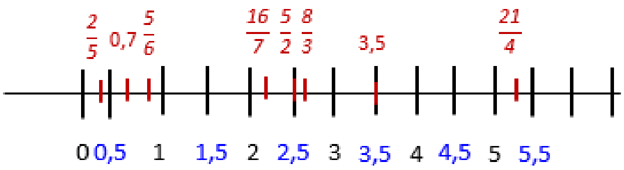
$\frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7}$

d) $\frac{21}{4}$ = Impropia

21	4
1	5

$\frac{21}{4} = 5 + \frac{1}{4}$

28. **Represента en la recta numérica:** $\frac{8}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{16}{7}$; $\frac{21}{4}$; $\frac{5}{6}$; **0,7 ; 3,5**



29. En un espectáculo dicen que se han vendido los $\frac{5}{4}$ de las entradas de un teatro que tiene capacidad para 500 espectadores. ¿Cuántas entradas se han vendido? ¿Qué opinas del resultado que se obtiene al hallar los $\frac{5}{4}$ de 500?

$$\frac{5}{4}\ de\ 500 = \frac{5 \bullet 500}{4} = 625$$

Se han vendido 625 entradas, por lo que se han vendido 125 entradas más de la capacidad del teatro.

30. En un iceberg se mantiene sumergida las nueve décimas partes de su volumen. Si emerge 318 km³, ¿cuál es el volumen sumergido? ¿Y el volumen total?

Al haber sumergidas $\frac{9}{10}$ del volumen del iceberg, sabemos que $\frac{1}{10}$, que corresponde a $318km^3$, es la parte que emerge. Por lo tanto, para calcular el volumen total haremos:

$$\frac{1}{10} : 318 = \frac{318 \bullet 10}{1} = 3.180km^3$$

Ahora haremos $\frac{9}{10}$ del total:

$$\frac{9}{10}\ de\ 3.180 = \frac{9 \bullet 3.180}{10} = 2.862km^3$$

$2.862km^3$ será la parte sumergida.

También: Al haber sumergidas $\frac{9}{10}$ del volumen del iceberg, sabemos que $\frac{1}{10}$, que corresponde a $318km^3$, es la parte que emerge. Por lo tanto, para calcular el volumen total basta con multiplicar por 9: $9 \bullet 318 = 2.862km^3$ será la parte sumergida.

31. En un bosque hay pinos, robles y encinas. Los pinos ocupan los 3/7 y los robles, 1/3. ¿Qué espacio ocupan las encinas?

Pinos = $\frac{3}{7}$; Robles = $\frac{1}{3}$; Encinas = x

$\frac{3}{7} + \frac{1}{3} = \frac{9+7}{21} = \frac{16}{21}$

M.C.M = $7 \bullet 3$; 21:7 = 3 , 3• $3 = 9$; 21:3 = 7 , 7• $1 = 7$

La totalidad de árboles sería $\frac{21}{21}$. Si pinos y robles ocupan $\frac{16}{21}$, las encinas ocuparán:

$\frac{21}{21} - \frac{16}{21} = \frac{5}{21}$

32. Nieves y José tienen igual sueldo mensual, Nieves gasta los 3/5 de su sueldo y José los 5/7, ¿quién gasta más?

Nieves = $\frac{3}{5}$ de x ; José = $\frac{5}{7}$ de x

Tenemos que convertirlas en fracciones equivalentes, es decir, que tengan el mismo denominador. para ello:

$\frac{3 \bullet 7}{5 \bullet 7} = \frac{21}{35}$; $\frac{5 \bullet 5}{7 \bullet 5} = \frac{25}{35}$

Al tener el mismo denominador, vemos que el numerado de José es mayor, por lo que podemos afirmar que José gasta más.

33. Copia en tu cuaderno y rellena los lugares vacíos:

a) $\frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{7}{6} + \frac{10}{6} = \frac{17}{6}$

M.C.M = 6 ; 6:6 = 1 , 1• $7 = 7$; 6:3 = 2 , 2• 5 =10

b) $\frac{7}{10} - \frac{5}{14} = \frac{49}{70} - \frac{25}{70} = \frac{24}{70}$

10 = 2•5 ; 14 = 2•7 ; M.C.M = $2 \bullet 5$ •7 = 70 ; 70:10 = 7 , 7• $7 = 49$; 70:14= 5 , 5• 5 =25

34. 1/3 de los ingresos de una familia se gastan en recibos (agua, teléfono, comunidad de vecinos…) , en comer gastan 3/7, ¿qué parte les queda para ahorrar y otros gastos?

$\frac{1}{3} + \frac{3}{7} = \frac{7+9}{21} = \frac{16}{21}$

M.C.M = 3 •7 = 21 ; 21:3 = 7 , 7• $1 = 7$; 21:7 = 3 , 3• $3 = 9$

La totalidad del dinero sería $\frac{21}{21}$. En comer y recibos gastan $\frac{16}{21}$, por lo que les quedará: $\frac{21}{21} - \frac{16}{21} = \frac{5}{21}$

Tienen $\frac{5}{21}$ para ahorrar y otros gastos.

35. En un país se valora que se gasta 250 litros de agua por persona y día, y de esa cantidad los hogares consumen los 3/20 del total. Si se desperdician los 1/7, ¿cuántos litros de agua se desperdicia en un día en una casa de 5 habitantes?

En una casa se gastarán: $250 \bullet 5 = 1.250$ litros.

5 habitantes consumen $\frac{3}{20}$ de 1.250 = $\frac{3 \bullet 1.250}{20} = \frac{3.750}{20} = 187{,}5\ litros$

De 187,5 litros, se desperdician $\frac{1}{7}$, que sería:

$\frac{1}{7}\ de\ 187{,}5 = \frac{1 \bullet 187{,}5}{7} = 26{,}7\ litros\ se\ desperdician$

36. Tu profesor/a ha dedicado 5 horas en corregir exámenes y todavía le quedan 1/4 sin corregir, ¿cuánto tiempo deberá dedicar todavía?

Si le queda $\frac{1}{4}$ por corregir, quiere decir que ha corregido $\frac{3}{4}$ y ha tardado 5h, por lo que:

Tarda 5 horas en corregir $\frac{3}{4}$

Tarda x horas en corregir $\frac{1}{4}$

Si dividimos 5 entre 3 sabemos lo que tarda en corregir $\frac{1}{4}$:

$\frac{5}{3} = 1{,}6\text{h tardará en corregir } \frac{1}{4} \text{ de los exámenes}$

37. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes fracciones de forma que todas ellas sean equivalentes:

a) $\frac{85}{5}$

b) $\frac{34}{2}$

c) $\frac{34}{2}$

Ponemos 2 de denominador en el b y 34 de numerado en el c y estas fracciones son equivalentes porque:

$34 \bullet 2 = 34 \bullet 2;\ 68 = 68$

Ahora hallo el numerado de la fracción a):

$\frac{x}{5} = \frac{34}{2}\ ;\ x \bullet 2 = 5 \bullet 34\ ;\ x = \frac{170}{2} = 85$

38. Realiza los siguientes cálculos y, en cada caso, reduce la fracción resultante:

a) $\frac{4}{3} \bullet \frac{9}{8} = \frac{36:2}{24:2} = \frac{18:3}{12:3} = \frac{6:2}{4:2} = \frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{5} \bullet \frac{2}{6} = \frac{8:2}{30:2} = \frac{4}{15}$

c) $\frac{5}{6} : \frac{2}{3} = \frac{5 \bullet 3}{6 \bullet 2} = \frac{15:3}{12:3} = \frac{5}{4}$

d) $\frac{3}{16} : \frac{3}{10} = \frac{3 \bullet 10}{16 \bullet 10} = \frac{30:10}{160:10} = \frac{3}{16}$

39. Tres náufragos en una isla desierta recogen gran cantidad de cocos y se van a dormir. Por la noche se levanta uno de ellos, que no se fía de los demás, reparte los cocos en tres montones iguales, esconde su parte y vuelve a dormir. Luego, se levanta otro y hace lo mismo con los cocos restantes. Lo

mismo hace el tercero. A la mañana siguiente reparten los cocos y también el reparto es exacto. ¿Cuántos cocos había en total si se sabe que eran menos de 100? ¿Cuántos tiene cada náufrago?

1ª persona: reparte en 3 partes iguales $\frac{x}{3}, \frac{x}{3}$ y $\frac{x}{3}$. Esconde la suya y quedan $\frac{2x}{3}$

2º persona: lo que queda es $\frac{2x}{3}$ y lo reparte en tres partes: $\frac{\frac{2x}{3}}{3}, \frac{\frac{2x}{3}}{3}$ y $\frac{\frac{2x}{3}}{3}$. Es decir $\frac{2x}{9}, \frac{2x}{9}$ y $\frac{2x}{9}$. Esconde su parte y quedan $\frac{4x}{9}$

3º persona: de lo que queda que es $\frac{4x}{9}$, lo reparte en tres partes $\frac{\frac{4x}{9}}{3}, \frac{\frac{4x}{9}}{3}$ y $\frac{\frac{4x}{9}}{3}$, es decir $\frac{4x}{27}, \frac{4x}{27}$ y $\frac{4x}{27}$. Esconde su parte y quedaría $\frac{8x}{27}$.

Por la mañana dividen lo que quedaba entre los tres:

$\frac{\frac{8x}{27}}{3}, \frac{\frac{8x}{27}}{3}, \frac{\frac{8x}{27}}{3}$, es decir, $\frac{8x}{81}, \frac{8x}{81}, \frac{8x}{81}$.

Como sabemos que el reparto de cocos es exacto, este reparto $\frac{8x}{81}$ tiene que ser exacto y para ello tiene que ser divisible por 81, por lo tanto, x = 81, pues hay menos de 100 cocos.

Así sabemos que habrá 81 cocos.

1ª: $\frac{x}{3} + \frac{8x}{81} = \frac{81}{3} + \frac{8\cdot 81}{81} = 27 + 8 = 35$

2ª: $\frac{2x}{9} + \frac{8x}{81} = \frac{2\cdot 81}{9} + \frac{8\cdot 81}{81} = 18 + 8 = 26$

3ª: $\frac{4x}{27} + \frac{8x}{81} = \frac{4\cdot 81}{27} + \frac{8\cdot 81}{81} = 12 + 8 = 20$

40. Un rajá regala a sus hijas unas perlas y dice que las repartan de la siguiente manera: a la primera hija le deja la sexta parte de las perlas, a la segunda, la quinta parte de las que quedan, a la tercera, la cuarta parte, y así sucesivamente. Resulta que a todas las hijas les ha tocado el mismo número de perlas. ¿Cuántas hijas tenía el rajá? ¿Cuántas perlas?

1º hija = $\frac{1}{6}$ de las perlas, quedaría por repartir $\frac{5}{6}$

2º hija = $\frac{1}{5}$ de $\frac{5}{6} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Se ha repartido $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, quedaría por repartir $\frac{2}{3}$

3º hija = $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Se ha repartido $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, quedaría por repartir $\frac{1}{2}$

4º hija = $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Se ha repartido $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, quedaría por repartir $\frac{1}{3}$

5º hija = $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Se ha repartido $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, quedaría por repartir $\frac{1}{6}$

6º hija = 1 de $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Al llegar a la 6º hija llegamos a la unidad por lo que ya no tendríamos más para repartir, por tanto, sabemos que tenía 6 hijas y si a cada una le corresponde $\frac{1}{6}$ es porque $6 \bullet 6 = 36$ eran las perlas que había.

41. Halla una fracción tal que al multiplicarla por el número 1.87 de como resultado un número natural.

1,8$\overline{7}$; lo pasamos a fracción $\frac{187-18}{90} = \frac{169}{90}$

Si el resultado anterior lo multiplicamos por 90, nos quedaría 169 que es un número natural, es decir, lo que buscábamos.

42. Aproxima por truncamiento a décimas y centésimas los siguientes números decimales:

a) 9.235. Décimas (9,2), centésimas (9,23)
b) 57.0001. Décimas (57,0), centésimas (57,00)
c) 8. 7. Décimas (8,7), centésimas (8,77)
d) 3.5287. Décimas (3,5), centésimas (3,52)
e) 5.9996. Décimas (5,9), centésimas (5,99)

43. Redondea los siguientes números decimales hasta las décimas y hasta las centésimas:

NÚMERO	DÉCIMAS	CENTÉSIMAS
8,9351	8,9	8,94
5,1990	5,2	5,20
83,74	83,7	83,75
77,992	78,0	77,99
56,01	56,0	56,01

44. En cada uno de los redondeos que has realizado en el ejercicio anterior, distingue si se trata de una aproximación al alza o a la baja.

NÚMERO	DÉCIMAS	CENTÉSIMAS
8,9351	baja: de 8,93 pasamos a 8,9	alza: de 8,93 pasamos a 8,94
5,1990	alza: de 5,19 pasamos a 5,2	alza: de 5,19 pasamos a 5,20
83,74	baja: de 83,74 pasamos a 83,7	alza: de 83,74 pasamos a 83,75
77,992	alza: de 77,992 pasamos a 78,0	baja: de 77,992 pasamos a 77,99
56,01	baja: de 56,01 pasamos a 56,0	baja: de 56,0101 pasamos a 56,01

45. Vicente compró en la papelería 15 bolígrafos y 8 lapiceros. Si cada bolígrafo costaba 0.72 euros y cada lapicero 0.57 euros, ¿cuánto se gastó Vicente?

Para calcular cuánto se gastó Vicente tendremos que multiplicar el precio de cada material por el total de materiales que ha comprado. Así:

$$15 \text{ bolígrafos} \cdot 0{,}72€ = 10{,}80€$$
$$8 \text{ lapiceros} \cdot 0{,}57€ = 4{,}56€$$
$$10{,}80€ + 4{,}56€ = 15{,}36€$$

Vicente se gastó 15,36€ en total.

46. Pilar se ha comprado tres bolígrafos iguales que, en total, le han costado 1.53 euros. También compró un cuaderno que costaba cuatro veces más que cada bolígrafo. Calcula el precio del cuaderno.

Primero debemos averiguar el precio del bolígrafo. Para ello dividiremos el total que se ha gastado entre los tres bolígrafos. Así:

$$1{,}53€ : \ 3 \ = 0{,}51€$$

Si el precio del cuaderno es cuatro veces el del bolígrafo, multiplicaremos por 4 el precio del bolígrafo: $0{,}51€ \bullet 4 = 2{,}04€$ es el precio del cuaderno.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de 20 · (15 + 3)?

a) 303 b) 360 c) 330 d) 90

$$20 \bullet 18 = 360$$

2. El resultado de la operación: (–5 + 8) · (–3 – 5) + (–7 + 1) : (+9 – 3) es:

a) –25/6 b) +24 c) –25 d) –5

$$(+3) \bullet (-8) + (-6) : (+6) = (-24) + (-1) = (-25)$$

3. Un termómetro ha subido 4°C, luego ha bajado 6°C, después ha bajado 8°C y, por último, marca menos 9°C. La temperatura inicial era:

a) –1° C b) –19° C c) +1° C d) –14° C

$$(+4) + (-6) + (-8) + (-9) = (-2) + (-17) = (-19)$$

4. Al viajar desde una latitud de 9° Norte hasta otra de 20° Sur, la variación de latitud es:

a) 11Sur b) 29Norte c) 11Norte d) 29Sur

$$9 + 20 = 29$$

5. Si estás situada en el punto –15 de la recta numérica de los números enteros, ¿qué movimientos te llevan hasta +10?

a) +13 – 3 + 4 b) – 1 + 14 c) + 18 – 5 d) +14 +12 – 1

$$(-15) + (+14) + (+12) + (-1) = (-1) + (+11) = (+10)$$

6. Señala la fracción inversa de la fracción $\frac{5}{9}$

a) $\frac{18}{9}$ b) $\frac{15}{27}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{9}{5}$

7. El resultado de la operación $(\frac{2}{5} - \frac{5}{2}) \bullet 2 + \frac{51}{10}$ es:

a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{105}{10}$ c) $\frac{30}{5}$ d) 3

$$(-\frac{21}{10}) \bullet 2 + \frac{51}{10} = \frac{-42}{10} + \frac{51}{10} = \frac{9}{10}$$

M. C.M = $5 \bullet 2 = 10$; 10:5 =2 , 2•2 = 4 ; 10:2 = 5 , 5•5 = 25

8. Elige la fracción irreducible que sea el resultado de la operación $\frac{5}{2} \bullet \frac{10}{9} + \frac{1}{3}$

a) $\frac{65}{18}$ b) $\frac{28}{9}$ c) $\frac{50}{18}$ d) $\frac{25}{9}$

$$\frac{50}{18} + \frac{1}{3} = \frac{50+6}{18} = \frac{56:2}{18:2} = \frac{28}{9}$$

M.C.M = $3^2 \bullet 2 = 18$; 18:18 = 1 , 1•50 = 50 ; 18:3 = 6 , 6•1 = 6

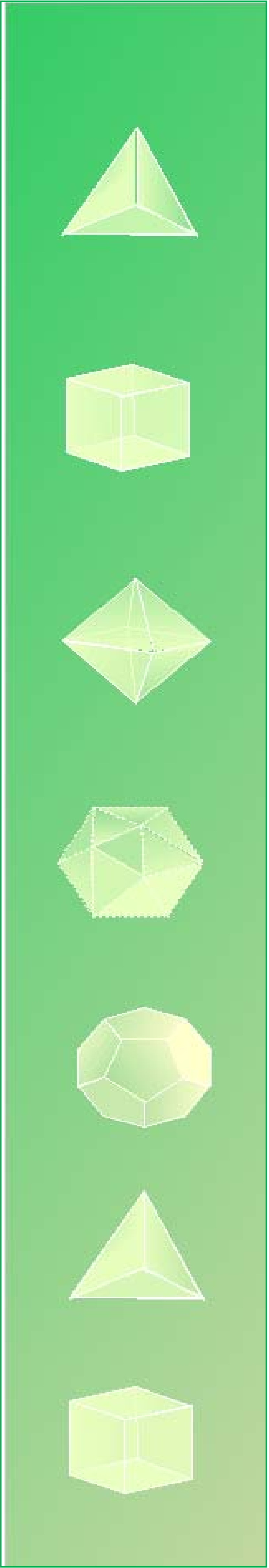
9. Indica cuál de las siguientes fracciones es menor que $\frac{1}{5}$

a) $\frac{2}{16}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{7}$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \; ; \; \frac{2}{16} = 0{,}125 \; ; \; \frac{3}{4} = 0{,}75 \; ; \; \frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \; ; \; \frac{2}{7} = 0{,}2\overline{8}$$

10. Ordena de menor a mayor los números: 5.67; 5.68; 5.6666; 5.63; 5.5; 5.8; 5.6070.

5,5 < 5,6070 < 5,63 < 5,6666 < 5,67 < 5,68 < 5,8



2º ESO

Capítulo 3: Potencias y raices

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno.

a) $\mathbf{5^2} = 5 \cdot 5 = 25$
b) $\mathbf{3^4} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
c) $\mathbf{10^6} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000$
d) $\mathbf{4^3} = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
e) $\mathbf{1^7} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
f) $\mathbf{1000^3} = 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1000000000$

2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias.

a) $\mathbf{3^7} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2187$
b) $\mathbf{7^5} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 16807$
c) $\mathbf{2^{10}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$
d) $\mathbf{9^5} = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 59049$
e) $\mathbf{25^3} = 25 \cdot 25 \cdot 25 = 15625$
f) $\mathbf{16^4} = 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 = 65536$

3. Escribe en tu cuaderno el cuadrado y el cubo de los diez primeros números naturales.

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$
$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$
$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$
$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36$$
$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$
$$8^2 = 8 \cdot 8 = 64$$
$$9^2 = 9 \cdot 9 = 81$$
$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$
$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$
$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$
$$6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$
$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$
$$8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$$
$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$$
$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

4. Indica cuales de las siguientes potencias son cuadrados y cuales cubos.

a) 7^2= Cuadrado
b) 11^2= Cuadrado
c) 5^3= Cubo
d) 5^4= ninguna
e) 8^2= Cuadrado

f) 16^3=Cubo
g) 10^2=Cuadrado

5. Lee de dos maneras distintas las siguientes potencias:

a) 8^3= ocho al cubo u ocho elevado a tres.
b) 3^2= tres al cuadrado o tres elevado a dos.
c) 16^4= dieciseis a la cuarta o dieciséis elevado a cuatro.
d) 48^2= cuarenta y ocho al cuadrado o cuarenta y ocho elevado a dos.
e) 4^5= cuatro a la quinta o cuatro elevado a cinco.
f) 6^6= seis a la sexta o seis elevado a seis.

6. Calcula mentalmente.

a) $1^{6562} = 1.$ 1 elevado a cualquier número positivo siempre será 1.
b) $0^{8526} = 0.$ 0 elevado a cualquier número siempre será 0.
c) $9327^0 = 1.$ Cualquier número elevado a 0 será 1.
d) $0^{3782} = 0.$ 0 elevado a cualquier número siempre será 0.
e) $1^{1000} = 1.$ 1 elevado a cualquier número positivo siempre será 1.
f) $9761^0 = 0.$ Cualquier número elevado a 0 será 1.

7. Completa la tabla siguiente en tu cuaderno:

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a^2}$	$\boldsymbol{a^3}$	$\boldsymbol{a^4}$	$\boldsymbol{a^5}$
2	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$
3	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$	$3^4 = 81$	$3^5 = 243$
4	$4^2 = 16$	$4^3 = 64$	$4^4 = 256$	$4^5 = 1024$
1	$1^2 = 1$	$1^3 = 1$	$1^4 = 1$	$1^5 = 1$
0	$0^2 = 0$	$0^3 = 0$	$0^4 = 0$	$0^5 = 0$

8. Busca los exponentes de las potencias siguientes:

a) $10^? = 100.000$. La potencia será igual al número de 0 que tengamos.
En este caso, $10^5 = 100.000$
b) $10^? = 100.000.000$. En este caso, $10^8 = 10.000.000$
c) $10^? = 1000$. En este caso, $10^3 = 1000$

9. Expresa en forma polinómica usando potencias de 10.

a) $\mathbf{82.345} = 8 \cdot 10.000 + 2 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 =$

$= 8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$

b) $\mathbf{3.591.825} = 3 \cdot 1.000.000 + 5 \cdot 100.000 + 9 \cdot 10.000 + 2 \cdot 1.000 + 8 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 =$

$= 3 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$

c) $\mathbf{700.098} = 7 \cdot 100.000 + 0 \cdot 10.000 + 0 \cdot 1.000 + 0 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 8 =$

$= 7 \cdot 10^5 + 0 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8$

d) $\mathbf{2.090.190} = 2 \cdot 1.000.000 + 0 \cdot 100.000 + 9 \cdot 10.000 + 0 \cdot 1.000 + 1 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 0 =$

$= 2 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 0$

10. Calcula:

a) $3 \cdot 10^6 = 3 \cdot 1000000 = 3.000.000$
b) $5 \cdot 10^8 = 5 \cdot 100000000 = 500.000.000$
c) $2 \cdot 10^4 = 2 \cdot 1.0000 = 20.000$
d) $34 \cdot 10^5 = 34 \cdot 100.000 = 3.400.000$

11. Utiliza la calculadora para obtener potencias sucesivas de un número. Si marcas un número, a continuación 2 veces seguidas de la tecla de multiplicar y después la tecla igual obtienes el cuadrado de un número.

a) Compruébalo. Marca 8**=, ¿qué obtienes?

Obtendré el cuadrado de 8, es decir $8^2 = 64$

b) Continúa pulsado la tecla igual, y obtendrás las potencias sucesivas. Marca 8***=, ¿qué obtienes?

Obtendré el cubo de 8, es decir $8^3 = 512$

c) Utiliza la calculadora para obtener las potencias sucesivas de 2.

$$2 *= 2^1 = 2$$
$$2 **= 2^2 = 4$$
$$2 ***= 2^3 = 8$$
$$2 ****= 2^4 = 16$$

d) Utiliza la calculadora para obtener las potencias sucesivas de 31.

$$31 *= 31^1 = 31$$
$$31 **= 31^2 = 961$$
$$31 ***= 31^3 = 29791$$
$$31 ****= 31^4 = 923521$$

12. Aplica las propiedades de las potencias en tu cuaderno.

Recordemos las propiedades de las potencias. Si se multiplican dos números con la misma base, el resultado será dicha base elevada a la suma de los exponentes de ambas. Si se dividen, se restarán los exponentes.

Si se eleva un número elevado a otro, el resultado será dicho número elevado a la multiplicación de ambos exponentes.

a) $8^{10} \cdot 8^2 = 8^{12}$
b) $5^{23} \cdot 5^3 = 5^{26}$
c) $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^6 = 2^{14}$
d) $10^5 \cdot 10^7 \cdot 10^9 = 10^{21}$
e) $(6^3)^2 = 6^6$
f) $(4^2)^4 = 4^8$
g) $(3^0)^6 = 3^0 = 1$
h) $(7^3)^2 = 7^6$
i) $9^{10} : 9^2 = 9^8$
j) $3^{23} : 3^3 = 3^{21}$
k) $11^8 : 11^3 = 11^5$

l) $5^{30}:5^{9}=5^{21}$
m) $14^{4}:14^{4}=14^{0}=1$
n) $1^{35}:1^{35}=1^{0}=1$
o) $7^{3}:7^{0}=7^{3}$
p) $8^{4}\cdot 8^{0}=8^{4}$

13. ¿Te has preguntado por qué un número elevado a 0 es igual a 1? Analiza la siguiente operación.

$5^{0}=1$ y $\frac{5^2}{5^2}=5^{2-2}=5^{0}$

Si nos fijamos en la fracción, al tener el mismo número y el mismo denominador, la división de ambos daría como resultado 1. Como la fracción, aplicando las propiedades de las potencias, la convertimos en $5^{2-2}=5^{0}=1$, con lo que queda demostrado.

14. Calcula:

a) $(5\cdot 2)^{7}=10^{7}=10.000.000$
b) $(64:4)^{3}=16^{3}=4.096$

15. Calcula mentalmente:

a) $2^{3}\cdot 2^{3}=2^{6}=64$
b) $3^{2}\cdot 3^{2}=3^{4}=81$
c) $5^{2}\cdot 5^{2}=5^{4}=625$
d) $10^{31}\cdot 10^{40}\cdot 10^{4}\cdot 10^{2}=10^{77}$
e) $1^{20}\cdot 1^{27}\cdot 1^{18}=1^{65}=1$
f) $0^{41}\cdot 0^{86}=0^{127}=0$

16. Escribe en forma de una única potencia:

a) $7^{5}\cdot 7^{6}\cdot 7^{4}=7^{15}$
b) $6^{4}\cdot 6^{6}\cdot 6^{7}=6^{17}$
c) $5^{20}\cdot 5^{17}=5^{37}$
d) $8^{6}\cdot 2^{5}\cdot 2^{3}=(2^{3})^{6}\cdot 2^{5}\cdot 2^{3}=2^{26}$

17. Calcula mentalmente.

a) $2^{3}\cdot 2^{2}\cdot 2=2^{6}=64$
b) $1^{4}\cdot 1^{6}\cdot 1^{7}=1^{17}=1$
c) $10^{5}\cdot 10^{5}=10^{10}=10000000000$
d) $0^{2}\cdot 0^{6}\cdot 0^{12}=0^{20}=0$

18. Calcula mentalmente.

a) $10^{5}\cdot 10^{3}\cdot 10^{2}=10^{10}=10.000.000.000$
b) $0^{3}\cdot 0^{7}\cdot 0^{8}=0^{18}=0$
c) $1^{41}\cdot 1^{200}=1^{241}=1$
d) $5^{5}\cdot 2^{5}=(5\cdot 2)^{5}=10^{5}=100000$

19. Escribe en forma de una única potencia y calcula.

a) $2^{5}\cdot 5^{5}=(2\cdot 5)^{5}=10^{5}=100000$
b) $10^{3}\cdot 3^{3}=(10\cdot 3)^{3}=30^{3}=27.000$

c) $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1.000.000$
d) $10^5 \cdot 5^5 = (10 \cdot 5)^5 = 50^5 = 312.500.000$

20. Escribe en forma de una única potencia.

a) $\frac{3^7 \cdot 3^{11} \cdot 3^0}{3^5 \cdot 3^3} = \frac{3^{18}}{3^8} = 3^{10}$

b) $\frac{(1.6)^6 \cdot (1.6)^{20} \cdot (1.6)^1}{(1.6)^{15} \cdot (1.6)^9} = \frac{(1.6)^{27}}{(1.6)^{24}} = (1.6)^3$

c) $\frac{(\frac{2}{3})^5 \cdot (\frac{2}{3})^{15} \cdot (\frac{2}{3})^2}{(\frac{2}{3})^{10} \cdot (\frac{2}{3})^6} = \frac{(\frac{2}{3})^{22}}{(\frac{2}{3})^{16}} = (\frac{2}{3})^6$

21. Escribe en forma de una única potencia.

a) $\frac{(-3)^7 \cdot (-3)^{11} \cdot (-3)^0}{(-3)^5 \cdot (-3)^3} = \frac{(-3)^{18}}{(-3)^8} = 3^{10}$

b) $\frac{(-1.6)^6 \cdot (-1.6)^{20} \cdot (-1.6)^1}{(-1.6)^{15} \cdot (-1.6)^9} = \frac{(-1.6)^{27}}{(-1.6)^{24}} = (-1.6)^3$

c) $\frac{(\frac{-2}{3})^5 \cdot (\frac{-2}{3})^{15} \cdot (\frac{-2}{3})^2}{(\frac{-2}{3})^{10} \cdot (\frac{-2}{3})^6} = \frac{(\frac{-2}{3})^{22}}{(\frac{-2}{3})^{16}} = (\frac{2}{3})^6$

22. Calcula utilizando la calculadora

a) $41^3 \cdot 41^2 \cdot 41 = 41^6 = 4.750.104.241$

b) $53^3 \cdot 53^2 = 53^5$ = 418.195.493

c) $5{,}2^2 \cdot 5{,}2 = 5{,}2^3 = 140{,}608$

d) $27^3 \cdot 27 = 27^4 = 531.441$

23. Calcula utilizando la calculadora

a) $58^2 \cdot 58^3 \cdot 58 = 58^6 = 38.068.692.544$

b) $23^4 \cdot 23^2 = 23^6 = 148.035.889$

c) $0{,}6^3 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^8 = 0{,}01679616$

d) $301^2 \cdot 301 = 301^3 = 27.270.902$

24. Calcula utilizando la calculadora.

a) $7{,}4^2 \cdot 7{,}4^3 \cdot 7{,}4 = 7{,}4^6 = 164206{,}49$

b) $0{,}82^4 \cdot 0{,}82^2 = 0{,}82^6 = 0{,}30400667$

c) $7{,}35^3 \cdot 7{,}35^5 = 7{,}35^8 = 8517236{,}62$

d) $0{,}002^2 \cdot 0{,}002 = 0{,}002^3 = 0{,}000000008$

25. Escribe la lista de los 12 primeros cuadrados perfectos.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

26. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\mathbf{49}}$ = 7

b) $\sqrt{\mathbf{25}}$= 5

c) $\sqrt{\mathbf{100}}$ = 10

d) $\sqrt{\mathbf{64}}$= 8

e) $\sqrt{\mathbf{81}}$= 9

f) $\sqrt{\mathbf{1}}$ = 1

g) $\sqrt{\mathbf{0}}$= 0

27. Calcula mentalmente en tu cuaderno las aproximaciones enteras de las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\mathbf{51}}$= 7

b) $\sqrt{\mathbf{27}}$= 5

c) $\sqrt{\mathbf{102}}$= 10

d) $\sqrt{\mathbf{63}}$= 7

e) $\sqrt{\mathbf{80}}$ = 8

f) $\sqrt{\mathbf{2}}$= 1

g) $\sqrt{\mathbf{123}}$ = 11

28. Indica qué raíces cuadradas van a ser números naturales, cuáles, números irracionales y cuáles no existen:

a) $\sqrt{\mathbf{36}}$**:** número natural

b) $\sqrt{\mathbf{-25}}$**:** no existe

c) $\sqrt{\mathbf{-100}}$**:** no existe

d) $\sqrt{\mathbf{32}}$**:** número irracional

e) $\sqrt{\mathbf{-7}}$**:** no existe

f) $\sqrt{\mathbf{10}}$**:** número irracional

g) $\sqrt{\mathbf{100}}$**:** número natural

29. Calcula mentalmente en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[4]{81}$ = 3

b) $\sqrt[4]{16}$ = 2

c) $\sqrt[3]{64}$ = 4

d) $\sqrt[3]{8}$ = 2

e) $\sqrt[3]{1000} = 10$

f) $\sqrt[5]{1} = 1$

g) $\sqrt[3]{0} = 0$

30. Introducir los siguientes factores en el radical:

Recordamos que, para introducir un factor dentro de un radical, elevaremos ese factor a la potencia del radical, y lo multiplicaremos por el factor o factores que tengamos dentro del radical.

a) $2 \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5 \cdot 2^4} = \sqrt[4]{5 \cdot 16} = \sqrt[4]{80}$

b) $10 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{3 \cdot 1000} = \sqrt[3]{3000}$

c) $2 \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{4 \cdot 8} = \sqrt[3]{32}$

d) $5 \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{4 \cdot 5^5} = \sqrt[5]{4 \cdot 3125} = \sqrt[5]{12500}$

e) $3 \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7 \cdot 3^3} = \sqrt[3]{7 \cdot 27} = \sqrt[3]{189}$

31. Extraer los factores que se pueda del radical

Para extraer factores del radical, recordamos que dividimos la potencia del factor entre el índice del radical, y el cociente de esa división será la cantidad de factores que sacaremos del radical, siendo el resto la cantidad de factores que nos quedará dentro del radical.

a) $\sqrt[3]{1000 \cdot x^9 \cdot y^3} = \sqrt[3]{10^3 \cdot x^9 \cdot y^3} = 10^{\frac{3}{3}} \cdot x^{\frac{9}{3}} \cdot y^{\frac{3}{3}} = 10 \cdot x^3 \cdot y.$

b) $\sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10^5} = 10$

c) $\sqrt[4]{81 \cdot a^8 \cdot b^6 \cdot c^4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot a^8 \cdot b^6 \cdot c^4} = 3 \cdot a \cdot b \cdot c\sqrt[4]{a^4 \cdot b}$

d) $\sqrt[3]{1000 \cdot a^7 \cdot b^4} = \sqrt[3]{10^3 \cdot a^7 \cdot b^4} = 10 \cdot a^2 \cdot b\sqrt[3]{a \cdot b}$

32. Calcula:

Recordemos que, para sumar y restar radicales, éstos tendrán que tener la misma base y potencia.

a) $\mathbf{3\sqrt{8} + 5\sqrt{32} - 6\sqrt{2}} = 3\sqrt{2^3} + 5\sqrt{2^5} - 6\sqrt{2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} + 5 \cdot 2^2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$

b) $\mathbf{4\sqrt{27} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{81}} = 4\sqrt{3^3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3^4} = 4 \cdot 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2 \cdot 3^2 = 15\sqrt{3} - 18$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe en forma de potencias de 10:

a) Un millón: 10^6

b) Un billón: 10^{12}

c) Una centena de millar: 10^5

2. Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

a) $25^0 = 1$

b) $10^6 = 1000000$

c) $5 \cdot 10^4 = 50000$

d) $2^4 = 16$

e) $4^2 = 16$

f) $10^2 = 100$

g) $10^5 = 100000$

h) $10^{12} = 1000000000000$

i) $10^6 = 1000000$

j) $6^3 = 216$

3. Escribe en tu cuaderno una aproximación de las siguientes cantidades, mediante el producto de un número por una potencia de 10.

a) 600.000.000 = $6 \cdot 10^8$

b) 250.000.000 = $25 \cdot 10^7$

c) 914.000.000.000 = $914 \cdot 10^9$

4. Escribe en tu cuaderno una aproximación abreviada de las siguientes cantidades:

a) La distancia de la Tierra al Sol – 150.000.000km: $15 \cdot 10^7$

b) El número de átomos que hay en un gramo de oxígeno –
37.643.750.000.000.000.000.000 $\approx 38 \cdot 10^{21}$

5. Halla en tu cuaderno:

a) $(2^5 : 2)^3 \cdot 2^4 = (2^4)^3 \cdot 2^4 = 2^{12} \cdot 2^4 = 2^{16}$

b) $(7^4)^2 = 7^8$

c) $6^5 : 3^5 = 2^5$

d) $(9:3)^5 = 3^5$

e) $(15:5)^3 = 3^3$

f) $(21:7)^3 = 3^3$

g) $(75:5)^4 = 15^4$

h) $(4:2)^5 = 2^5$

i) $8^2 : 2^5 = (2^3)^2 : 2^5 = 2^6 : 2^5 = 2$

6. Calcula $(4^3)^2$ y $4^{(3)^2}$. ¿Son iguales? ¿La potenciación tiene la propiedad asociativa?

En el primer caso, $(4^3)^2 = 4^6$. En el segundo caso, $4^{(3)^2} = 4^9$. Como podemos observar, en el primer caso, multiplicamos 3 por 3 y el resultado nos da 6. En el segundo caso, el 3 es el que está elevado a dos, por lo que nos da como resultado 9. Vemos, por lo tanto, que la potenciación no es asociativa.

7. Escribe en tu cuaderno el resultado en forma de potencia:

a) $36 \cdot 6^2 = 6^2 \cdot 6^2 = 6^4$
b) $3^3 \cdot 81 = 3^3 \cdot 3^4 = 3^7$
c) $36 : 6^2 = 6^2 : 6^2 = 6^0 = 1$

8. Factoriza y expresa como un producto de potencias de base 2, 3 y 5:

a) $12^7 : 6^7 = 2^7$
b) $(2^5 \cdot 2^2) : 16 = 2^7 : 2^4 = 2^3$
c) $(5^6 \cdot 36) : 10^4 = (5^6 \cdot (2 \cdot 3)^2) : (2 \cdot 5)^4 = \frac{(5^6 \cdot (2 \cdot 3)^2}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{5^2 \cdot 3^2}{2^2}$
d) $(16 \cdot 4^2) : 2^5 = \frac{2^4 \cdot 2^4}{2^5} = \frac{2^8}{2^5} = 2^3$

9. Calcula:

a) $(2+3)^2$ y $2^2 + 3^2$ ¿Son iguales?
$(2+3)^2 = 5^2 = 25$
$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
Como podemos observar, no son iguales.

b) Calcula $6^2 + 8^2$ y $(6+8)^2$¿Son iguales?
$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
$(6+8)^2 = 14^2 = 196$
Como podemos observar, no son iguales.

10. Calcula en tu cuaderno

a) $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 32$
b) $3^5 - 3^4 = 243 - 81 = 162$
c) $5^3 \cdot 5^2 = 5^5 = 3.125$
d) $10^4 \cdot 10^3 = 10^7 = 10.000.000$
e) $7^4 : 7^2 = 7^2 = 49$
f) $10^5 : 10^3 = 10^2 = 100$

11. La superficie de la cara de un cubo mide 36 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?
Para calcular el volumen, tendremos que multiplicar $6cm \cdot 6cm \cdot 6cm = 6^3 = 216cm^3$

12. Calcula en tu cuaderno:

a) $(\mathbf{2^3 \cdot 8 \cdot 2^5}) : (\mathbf{2^6 \cdot 2^3}) = (2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^5) : 2^9 = 2^{11} : 2^9 = 2^2 = 4$
b) $(\mathbf{5^2 \cdot 5^4 \cdot 5}) : (\mathbf{5 \cdot 5^2 \cdot 5}) = 5^7 : 5^4 = 5^3 = 125$

13. Calcula 5^3 y 3^5. ¿Son iguales? ¿Se pueden intercambiar la base y el exponente en una potencia? Calcula $5 \cdot 3$ y $3 \cdot 5$. ¿Son iguales?

$5^3 = 125$
$3^5 = 243$

Como vemos, el resultado no es el mismo. No tienen la propiedad conmutativa que si podemos apreciar en el producto, tal y como se demuestra a continuación:

$5 \cdot 3 = 15$
$3 \cdot 5 = 15$

14. Descompón en factores primos, utilizando potencias: 12; 36; 48; 100; 1.000; 144.

$12 = 2^2 \cdot 3$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$48 = 2^4 \cdot 3$
$100 = 2^2 \cdot 5^2$
$1000 = 2^3 \cdot 5^3$
$144 = 2^4 \cdot 3^2$

15. Efectúa las siguientes operaciones con potencias dando el resultado en forma de potencia de una sola base, la que creas más adecuada en cada caso:

a) $(5^3 \cdot 5^2)^3 = 5^{15}$

b) $(16^2 : 4^3)^3 = (2^8 : 2^6)^3 = 2^6$

c) $(9^2 : 3^3)^2 = (3^4 : 3^3)^2 = 3^2$

d) $(2^5 : 2^2)^3 = 2^9$

e) $3{,}7^5 \cdot 3{,}7^2 = 3{,}7^7$

f) $(2{,}5^5 \cdot 2{,}5^2) : 2{,}5 = 2{,}5^6$

16. Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado como una única potencia:

a) $(7^{12} \cdot 49^3)^6 = (7^{12} \cdot 7^6)^6 = (7^{18})^6 = 7^{108}$
b) $(9^4 \cdot 27^2) = (3^8 \cdot 3^6) = 3^{14}$
c) $(5^{10} \cdot 5^2)^2 = (5^{12})^6 = 5^{72}$
d) $(7^{10} : 7^2)^2 = (7^8)^2 = 7^{16}$
e) $(9^5 \cdot 81^2)^3 = (3^{10} \cdot 3^8)^3 = (3^{18})^3 = 3^{54}$
f) $(6^7 \cdot 36^5)^3 = (6^7 \cdot 6^{10})^3 = (6^{17})^3 = 6^{51}$

17. Un campo cuadrado mide 3 600 metros cuadrados. ¿Cuántos metros de valla es preciso comprar para vallarlo?

Para averiguarlo, primero calcularemos cuánto mide cada lado:

$$\sqrt{3600} = 60$$

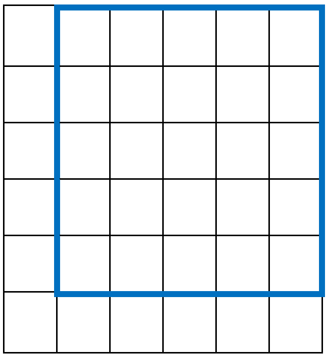
Vemos que cada lado mide 60m y como tenemos 4 lados, necesitaremos un total de 240m de valla , ya que $60m \cdot 4 = 240m$.

18. ¿A qué número hay que elevar 2^2 para obtener 4^4? ¿Y para obtener 8^8?

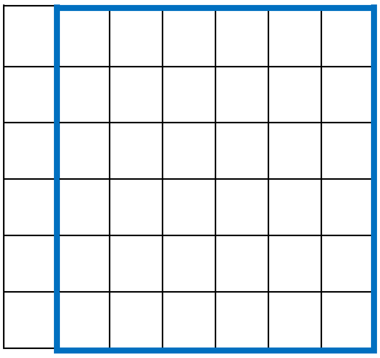
$4^4 = 256$. Tendremos que elevar 2^2 a 4 para conseguir el mismo resultado:
$(2^2)^4 = 2^8 = 256$

$8^8 = 16.777.216$. Tendremos que elevar 2^2 a 12 para conseguir el mismo resultado:
$(2^2)^{12} = 2^{24} = 16.777.216$

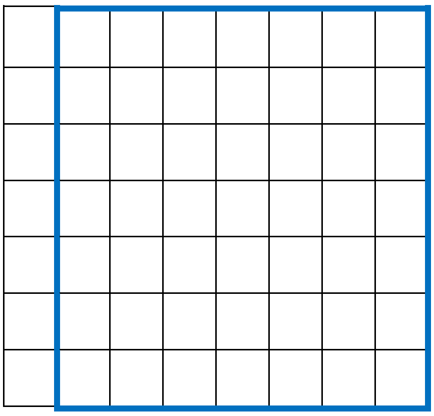
19. Dibuja cuadrados de lados 5, 6, 7 y 10 e indica cuántos cuadraditos de lado 1 contienen.



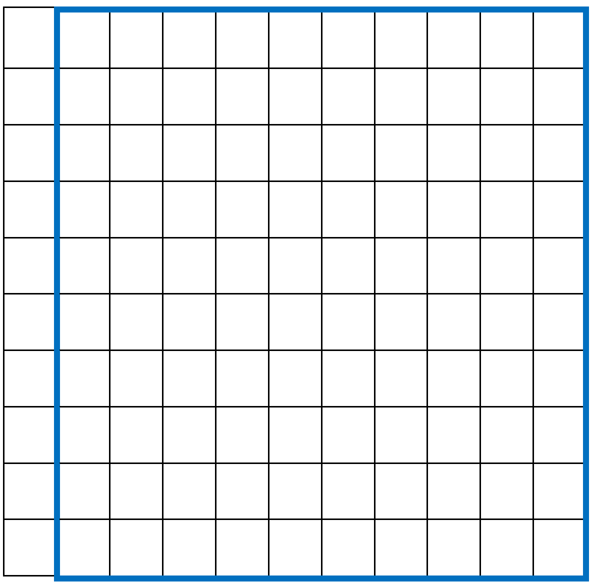
Tiene 25 cuadraditos de 1 lado.



Tiene 36 cuadraditos de 1 lado



Tiene 49 cuadraditos de 1 lado



Tiene 100 cuadraditos de 1 lado.

20. Halla en tu cuaderno:

a) $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11^{\frac{2}{2}} = 11^1 = 11$

b) $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7^{\frac{2}{2}} = 7^1 = 7$

c) $\sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1^{\frac{2}{2}} = 1^1 = 1$

d) $\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0^{\frac{2}{2}} = 0^1 = 0$

e) $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13^{\frac{2}{2}} = 13^1 = 13$

f) $\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6^{\frac{2}{2}} = 6^1 = 6$

g) $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12^{\frac{2}{2}} = 12^1 = 12$

21. La superficie de un cuadrado es de 1 000 000 metros cuadrados, ¿Cuánto mide su lado? ¿Y su perímetro?

Para calcular su lado, realizaremos la raíz cuadrada de la superficie:

$$\sqrt{1.000.000} = \sqrt{1000^2} = 1000^{\frac{2}{2}} = 1000^1 = 1000$$

Su lado mide 1.000 metros, por lo que su perímetro medirá 4.000m tal y como se demuestra a continuación:

$$1000 \cdot 4 = 4.000$$

22. Calcula en tu cuaderno las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}} = 2^1 = 2$

b) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10^3} = 10^{\frac{3}{3}} = 10^1 = 10$

c) $\sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$

d) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3^{\frac{4}{4}} = 3^1 = 3$

e) $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

f) $\sqrt{1000000} = \sqrt{1000^2} = 1000^{\frac{2}{2}} = 1000^1 = 1000$

23. Extrae en tu cuaderno factores de los radicales siguientes:

a) $\sqrt{60} = \sqrt{3 \cdot 2^2 \cdot 5} = 2^{\frac{2}{2}} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt{15}$

b) $\sqrt{250} = \sqrt{5^3 \cdot 2} = \sqrt{5^2 \cdot 5 \cdot 2} = 5^{\frac{2}{2}} \cdot \sqrt{5 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{5 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{10}$

c) $\sqrt[3]{125a^6b^5c^3} = \sqrt[3]{5^3a^6b^5c^3} = 5 \cdot 2a \cdot b \cdot c\sqrt[3]{b^2}$

d) $\sqrt[3]{8a^4b^7c^1} = \sqrt[3]{2^3a^4b^7c^1} = 2 \cdot a \cdot 2b\sqrt[3]{abc}$

e) $\sqrt{49b^5x^8} = \sqrt{7^2b^5x^8} = 7 \cdot 2b \cdot 4x\sqrt{b}$

f) $\sqrt[3]{125b^6c^5} = \sqrt[3]{5^3b^6c^5} = 5 \cdot 2b \cdot c\sqrt[3]{ac^2}$

g) $\sqrt[3]{216b^4x^7} = \sqrt[3]{6^3b^4x^7} = 6 \cdot b \cdot 2x\sqrt[3]{bx}$

h) $\sqrt[4]{81b^5m^9} = \sqrt[4]{3^4b^5m^9} = 3 \cdot b \cdot 2m\sqrt[3]{bm}$

24. Introduce los siguientes factores en el radical:

Recuerda que, para introducir un factor dentro de un radical, debemos elevar ese factor al índice que tenga dicho radical.

a) $3x\sqrt{x} = \sqrt{9x^3}$

b) $5\sqrt{100} = \sqrt{2500}$

c) $6\sqrt{32} = \sqrt{1152}$

d) $4\sqrt{20} = \sqrt{320}$

e) $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$

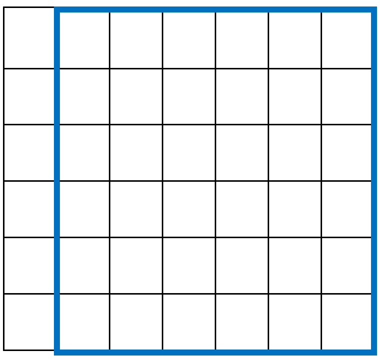
f) $7a\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{1029a^3}$

g) $5\sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{10000}$

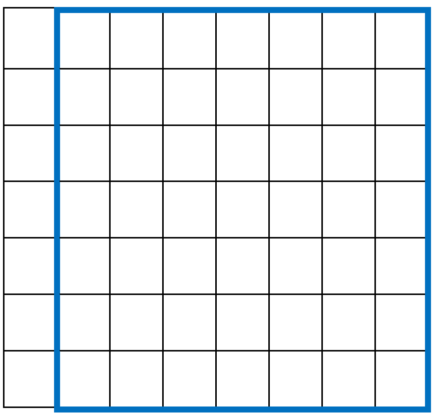
h) $a\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5a^5}$

25. Dibuja en tu cuaderno cuadrados de área 36, 49, 64 y 100 unidades.

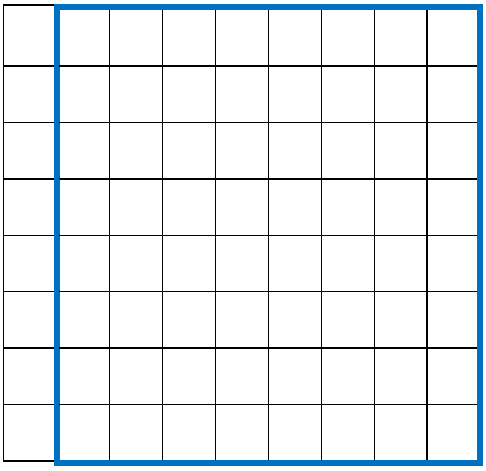
Área 36



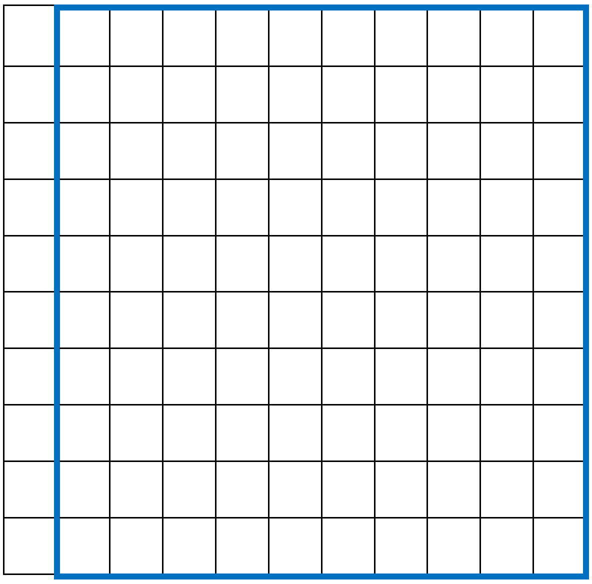
Área 49



Área 64



Área 100



26. Escribe el signo = o ≠ en el hueco:

a) $\sqrt{\mathbf{64+36}} \neq \sqrt{\mathbf{64}} + \sqrt{\mathbf{36}}$

$\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$

b) $\sqrt{\mathbf{9+16}} \neq \sqrt{\mathbf{9}} + \sqrt{\mathbf{16}}$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

27. Halla en tu cuaderno:

Para este ejercicio, tenemos que recordar que, para sumar y restar radicales, deberán tener el mismo índice y el mismo radical.

a) $\mathbf{9\sqrt{20} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{180}} = 9\sqrt{2^2 \cdot 5} + 2\sqrt{2^4 \cdot 5} - 4\sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 5} = 18\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - 24\sqrt{5} =$

$= 2\sqrt{5}$

b) $\mathbf{30\sqrt{27} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{12}} = 30\sqrt{3^3} + 9\sqrt{3} - 23\sqrt{3\cdot 2^2} = 30\cdot 3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 23\cdot 2\sqrt{3} =$

$= 53\sqrt{3}$

c) $\mathbf{5\sqrt{2} - 7\sqrt{8} + 12\sqrt{50}} = 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2^3} + 12\sqrt{5^2\cdot 2} = 5\sqrt{2} - 7\cdot 2\sqrt{2} + 12\cdot 5\sqrt{2} =$

$= 51\sqrt{2}$

d) $\mathbf{6\sqrt{28} - 2\sqrt{63} + 4\sqrt{7}} = 6\sqrt{2^2\cdot 7} - 2\sqrt{3^2\cdot 7} + 4\sqrt{7} = 6\cdot 2\sqrt{7} - 2\cdot 3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} =$

$= 10\sqrt{7}$

28. Calcula en tu cuaderno

a) $\mathbf{5\cdot\sqrt{16} - 32:2^3 + 2\sqrt{144} + \sqrt{49}} = 5\cdot\sqrt{2^4} - 2^5:2^3 + 2\sqrt{12^2} + \sqrt{7^2} =$

$= 20 - 2^2 + 24 + 7 = 47$

b) $\mathbf{3\cdot 10^2 - 5\cdot\sqrt{64} + 7^0}$ = 300 - 5 · $\sqrt{8^2} + 7^0 = 300 - 40 + 1 = 261$

c) $\mathbf{5\cdot 3^2 - 2\cdot\left(1+\sqrt{36}\right) - 2}$ = 45 - 2 · $7 - 2 = 45 - 14 - 2 = 29$

d) $\mathbf{32:2^3 - 2\cdot\sqrt{25} + 2^2} = 4 - 2\cdot 5 + 4 = -2$

PROBLEMAS

29. Un chalé está edificado sobre una parcela cuadrada de 7 225 m2 de área. ¿Cuánto mide el lado de la parcela?

Para calcular el lado de la parcela realizaremos la raíz cuadrada del área de la parcela:

$$\sqrt{7225} = \sqrt{85^2} = 85^{\frac{2}{2}} = 85^1 = 85$$

El lado de la parcela medirá 85 metros.

30. El hotel de los líos: Un hotel tenía infinitas habitaciones todas ocupadas. Un cliente gracioso se levanta por la noche y abre todas las puertas. Otro cliente se levanta también y cierra las puertas pares. Un tercer cliente se levanta y modifica las puertas que son múltiplos de 3, si están abiertas, las cierra, y si las encuentra cerradas, las abre. Un cuarto cliente lo mismo, pero con las que son múltiplo de 4. Y así toda la noche, todos los clientes. A la mañana siguiente ¿cómo están las puertas? ¿Qué puertas están abiertas?

Vamos a ver paso a paso qué pasa con cada puerta.

1. **Primera Persona**: Se levanta y abre todas las puertas. Así que al principio, todas las puertas están abiertas.
2. **Segunda Persona**: Se levanta y cierra todas las puertas que están en las posiciones pares (como la puerta 2, la 4, la 6, etc.). Así que ahora las puertas en esas posiciones están cerradas.
3. **Tercera Persona**: Se levanta y cambia el estado de las puertas que están en las posiciones múltiplos de 3 (como la puerta 3, la 6, la 9, etc.). Si una puerta está abierta, la cierra, y si está cerrada, la abre. Así que algunas puertas se cierran y otras se abren.

4. **Cuarta Persona**: Se levanta y cambia el estado de las puertas que están en las posiciones múltiplos de 4 (como la puerta 4, la 8, la 12, etc.). Lo mismo: si está abierta, la cierra, y si está cerrada, la abre.

Y así sigue, con cada persona cambiando el estado de las puertas según su número.

Para saber cuáles puertas quedan abiertas al final, piensa en esto:

• Si una puerta es cambiada (abierta o cerrada) un número par de veces, volverá a estar como al principio. Por ejemplo, si alguien la abre y luego otro la cierra, quedará cerrada al final.
• Pero si una puerta es cambiada un número impar de veces, terminará en el estado contrario al que empezó. Por ejemplo, si alguien la abre, luego otro la cierra, y un tercero la vuelve a abrir, quedará abierta.

Ahora, para que una puerta sea cambiada un número impar de veces, su número debe ser un "cuadrado perfecto". ¿Qué es un cuadrado perfecto? Es el resultado de multiplicar un número por sí mismo. Por ejemplo:

- 1×1=1
- 2×2=4
- 3×3=9
- 4×4=16

Así que las puertas que estarán abiertas al final son las que están en las posiciones 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, y así.

En resumen: Las puertas que estarán abiertas al final son las que tienen números que son cuadrados perfectos.

31. Calcula en kilómetros y notación científica la distancia que hay desde la Tierra al Sol sabiendo que la velocidad de la luz es aproximadamente de 300 000 km/s y que la luz del Sol tarda 8.25 minutos en llegar a la Tierra.

Primero, convertimos el tiempo de minutos a segundos, porque la velocidad de la luz está en kilómetros por segundo.

$$8{,}25\ minutos\ \cdot 60 = 495\ segundos$$

Ahora, calculamos la distancia multiplicando la velocidad de la luz por el tiempo que tarda en llegar a la Tierra:

$$Distancia = velocidad\ \cdot tiempo$$
$$Distancia = 30.000 km/s\ \cdot 495 s$$
$$Distancia = 148.500.000 km$$

Finalmente, convertimos esta distancia a notación científica:

$$Distancia = 148.500.000 km = 1{,}485\ \cdot\ 10^8 km$$

32. Halla el volumen de un cubo de 1.5 m de arista.

Para hallar el volumen, elevaremos al cubo su arista:

$$Volumen = 1{,}5^3 = \ 3{,}375 m^3$$

33. Una parcela es cuadrada, y la medida de su área es 8 100 m2. Halla el área de otra parcela cuyo lado sea el doble.

Primero calcularemos el lado de la primera parcela, que será la raíz cuadrada de su área:

$$\sqrt{8100} = \sqrt{90^2} = 90^{\frac{2}{2}} = 90^1 = 90$$

El lado de la primera parcela mide 90. Ahora calculamos el lado de la segunda parcela, que es el doble:

$$90 \cdot 2 = 180$$

El lado de la segunda parcela mide 180, por lo que su área medirá:

$$180^2 = 32.400m^2$$

El área de la segunda parcela medirá $32.400m^2$

34. La superficie de la cara de un cubo mide 49 cm cuadrados. ¿Cuál es su volumen?

Primero calcularemos el lado del cubo:

$$\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7^{\frac{2}{2}} = 7^1 = 7$$

Ahora, elevaremos al cubo el resultado para calcular su volumen:

$$7^3 = 343cm^2$$

35. Juan hace diseños de jardines con plantas formando cuadrados. Le sobran 4 plantas al formar un cuadrado y le faltan 9 para formar otro con una planta más por lado. ¿Cuántas plantas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

Sabemos que Juan tiene x plantas y forma un cuadrado con estas plantas, es decir: $x \cdot x$ y le sobran 4 plantas ($x^2 + 4$).

Al hacer un cuadrado más grande le añade una planta a cada lado $(x+1)^2$ y le faltan 9 plantas $(x+1)^2 - 9$.

Si igualamos ambas ecuaciones, tendremos el número de plantas que tiene Juan:

$$x^2 + 4 = (x+1)^2 - 9$$
$$x^2 + 4 = (x^2 + 1^2 + 2x) - 9$$
$$x^2 - x^2 - 2x = -9 - 4 + 1$$
$$-2x = -12$$
$$x = \frac{12}{2}$$
$$x = 6$$

Si lo comprobamos, vemos el número de plantas que tiene Juan:

$$6^2 + 4;\ \ 36 + 4 = 40$$
$$(6+1)^2 - 9;\ \ 49 - 9 = 40$$

Juan tiene 40 plantas.

36. Manuel tiene una habitación cuadrada. Con 15 baldosas cuadradas más tendría una baldosa más por lado. ¿Cuántas tiene? Te ayudará a saberlo hacer un dibujo.

Si la habitación es cuadrada, sabemos que todos los lados miden lo mismo. Si cada lado tiene x baldosas, en total tendrá: $x \cdot x$

Si añade 15 baldosas, entonces ahora cada lado tendrá x + 1 baldosas.

El número de baldosas que ha añadido es la diferencia entre las baldosas nuevas y las originales:

$$(x+1) \cdot (x+1) - x \cdot x = 15$$
$$(x^2 + 2x + 1) - x^2 = 15$$
$$(2x + 1) = 15$$
$$2x = 14$$

$$x = 7$$

Si cada lado tiene 7 baldosas, entonces la cantidad total de baldosas es: $7 \ \cdot \ 7 = 49$.
Manuel tiene 49 baldosas.

37. Arquímedes, en su tratado El arenario contaba una manera para expresar números muy grandes, como el número de granos de arena que hay en toda la Tierra. Es, efectivamente, un número muy grande, pero no infinito. Imagina que toda la Tierra está formada por granos de arena. Puedes calcular su volumen conociendo su radio que es de 6 500 km. Recuerda, el volumen de una esfera es (4/3)πr3.

a) Calcula el volumen de la Tierra en km3, y escribe ese volumen en notación exponencial.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}3{,}14 \cdot 6500^3$$

$$V = \frac{4}{3}3{,}14 \cdot 274.625.000.000 km^3$$

$$V = 1.150.865.000.000 km^3$$

En notación científica sería:

$$V = 1{,}15 \cdot \ 10^{12} km^3$$

b) Pasa el volumen a mm3, en notación exponencial.

Sabemos que $1km = 10^6 mm.$ Entonces:

$$1km^3 = (10^6 mm)^3 = 10^{18} mm^3$$

Ahora pasamos el volumen a mm^3:

$V = 1{,}15 \cdot \ 10^{12} km^3 \cdot 10^{18} mm^3/km^3$

$$V = 1{,}15 \cdot \ 10^{30} mm^3$$

c) Estima cuántos granos de arena caben en 1 mm3. Supón que, por ejemplo, caben 100 granos.

100 gramos en cada mm^3

d) Calcula cuántos caben en toda la Tierra multiplicando el volumen en mm3 por 100.

El volumen de la Tierra es $1{,}15 \cdot \ 10^{30} mm^3$. Para encontrar el número total de granos de arena en toda la Tierra, multiplicamos el número de granos por $1mm^3$ por el volumen total:

$$100 \ \cdot 1{,}15 \cdot \ 10^{30}$$

$$1{,}15 \cdot \ 10^{32}$$

En toda la Tierra cabrían aproximadamente $1{,}15 \cdot \ 10^{32}$ granos de arena.

e) ¿Has obtenido 1.15 · 10^{32} granos de arena?

Sí

AUTOEVALUACIÓN

1. **¿Cuál es el resultado de las tres potencias siguientes $(-2)^4, (-4)^3, (-5)^2$?**
   a) −16, −12, 25 b) 16, −64, 25 c) 32, −64, 10 d) −64, −32, −26
   $$(-2)^4 = 16, (-4)^3 = -64 \ y \ (-5)^2 = 25$$
   Por lo que será la opción **b).**

2. **¿Cuál es el resultado de la operación $4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2$?**
   a) 900 b) $9 \cdot 10^4$ c) $20 \cdot 10^2$ d) 500
   $$4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^2 = 400 + 500 = 900$$
   Por lo que será la opción **a)**

3. **Escribe = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda:**
   a) $3^3 = 27$
   b) $1^{35} \neq 35$
   c) $732^0 \neq 732$
   d) $10^5 \neq 50$

4. **¿Cuál de las respuestas corresponde a la multiplicación $(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5$?**
   a) $(-3)^{30}$ b) $(-9)^{10}$ c) 3^{10} d) −19683
   $$(-3)^3 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^5 = (-3)^{3+2+5} = (-3)^{10} = 3^{10}$$
   Por lo que será la opción **c)**

5. **¿Cuál de las respuestas corresponde a las división $0,7^6 : 0,7^4$?**
   a) 0.7^2 b) 0.7^3 c) 0.7^{10} d) 6/4
   $$0,7^6 : 0,7^4 = 0,7^{6-4} = 0,7^2$$
   Por lo que será la opción **a)**

6. **¿Cuál de las soluciones es la correcta para la operación $((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3$?**
   a) −1000 b) −30 c) 100 d) 60
   $$((-5) \cdot (-2) \cdot (-1))^3 = (-10)^3 = (-1000)$$
   Por lo que será la opción **a)**

7. **Elige la respuesta que corresponda al resultado de $((-0,2)^2)^4$**
   a) $(0.2)^8$ b) $(-0.2)^6$ c) 0.032 d) −0.0016
   $$((-0,2)^2)^4 = (-0,2)^8 = 0,2^8$$
   Por lo que será la opción **a)**

8. **¿La raíz cuadrada de 81 vale?**
   a) 18 b) 8.7 c) 9 d) 3
   $$\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9^{\frac{2}{2}} = 9^1 = 9$$
   Por lo que será la opción **c)**

9. Señala el número que no es cuadrado perfecto:

a) 169 **b) 441** **c) 636** **d) 1024** **e) 700**

Recordamos que un cuadrado perfecto es aquel número resultado de elevar un número entero al cuadrado.

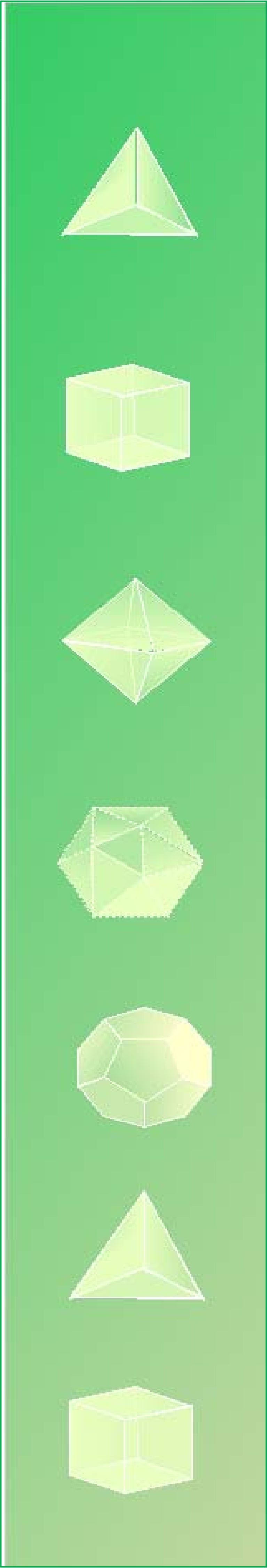
Por ello, al ser 169 cuadrado de 13, 441 cuadrado de 21, y 1024 cuadrado de 32.

Las opciones correctas serán **la c) y la e)**, ya que no hay un número entero que elevado al cuadrado de 636 y 700 respectivamente.

10. El lado de una superficie cuadrada de 1696 centímetros cuadrados mide:

a) 19 cm **b) 14 cm** **c) 13 cm** **d) 17 cm**

Como nos habla de superficie cuadrada, para calcular el lado simplemente realizamos la raíz cuadrada de la superficie, que será $\sqrt{196} = 13$, por lo que la opción correcta será la **c)**.



2º ESO
Capítulo 4: Divisibilidad
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. **Calcula los siete primeros múltiplos de 11 y de 7.**
   Los múltiplos de 11 son: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77.
   Los múltiplos de 7 son: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49.

2. **¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15?**
   15, 16, 30, 40, 45, 100, 111, 141, 135.
   Los múltiplos de 15 serán todos aquellos que al hacer la división sea exacta, como son: 15, 30, 45 y 135.

3. **Halla los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90.**
   Los múltiplos de 12 comprendidos entre 13 y 90 serán: 24, 36, 48, 60, 72 y 84. Para hallarlos multiplico 12 por 2, 3, 4 y así sucesivamente.

4. **A partir de la igualdad: 5 · 8 = 40, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.**
   5 y 8 son divisores de 40.
   40 es múltiplo de 5 y 8.
   40 es divisible por 5 y por 8.

5. **Escribe frases usando las expresiones: “ser múltiplo de”, “ser divisor de“ y “ser divisible por” y los números 27, 3 y 9.**
   3 es divisor de 27.
   9 es divisible por 3.
   27 es múltiplo de 3 y de 9.

6. **Di cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:**
   21, 24, 56, 77, 81, 90, 234, 621, 600, 4 520, 3 411, 46 095, 16 392, 385 500
   Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 3? ¿Y con los que son divisibles por 3?
   Los múltiplos de 3 son: 21, 24, 81, 90, 234 ,621, 600, 3.411, 46.095, 16.392, 385.500.
   Todos esto son múltiplos de 3 ya que la suma de sus cifras da un número múltiplo de 3.
   Los números elegidos coinciden con los números divisibles por 3.

7. **Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 7 a la vez.**
   Para ser divisible por 7 tendrá que ser la división exacta y por 10 tendrá que terminar en 0, por tanto, los números serán: 70, 140, 210 y 280.

8. **Sustituye A por un valor apropiado para que:**

   a) 15 A72 sea múltiplo de 3.
   1 + 5 + A + 7 + 2 = A + 15. A tendrá que valer 0, 3, 6 ó 9 para que el número sea múltiplo de 3. Por ejemplo: 3 + 15 = 18. 18 es múltiplo de 3.

   b) 22 05A sea múltiplo de 6.
   Para que sea múltiplo de 6 debe serlo de 2 y de 3 a la vez. Para que sea múltiplo de 2, tiene que ser un número par y para que sea múltiplo de 3, al sumar las cifras deben ser divisible por 3. Por lo tanto: 2 + 2 + 0 + 5 + A = 9 + A. A puede vales 0 ó 6.

c) 6A 438 sea múltiplo de 11.
Sumamos las cifras que ocupan la posición par A + 3.
Sumamos las cifras que ocupan la posición impar 6 + 4 + 8 = 18.
Su resta tiene que ser divisible por 11.
18 - (A + 3) = 11; 18 – A – 3 = 11; -A = 11 – 15; A = 4.

9. ¿Todos los números divisibles por 2 los son por 4? ¿Y al revés? Razona la respuesta.
No. Por ejemplo 6 es divisible por 2, pero no lo es por 4. Al revés, sí sucede, porque todos los números divisibles por 4 lo son de 2.

10. ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.
Para que sea divisible por 15 debe de ser divisible por 3 y 5, por tanto, la suma de sus cifras debe de ser múltiplo de 3, y terminar en 0 o en 5.

11. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
984 486 728	Divisible por 2	Verdadero
984 486 725	Divisible por 5	Verdadero
984 486 720	Divisible por 3	Verdadero
783 376 500	Divisible por 6	Verdadero
984 486 728	Divisible por 4	Verdadero
23 009 845	Divisible por 11	Falso

12. Intenta explicar por qué se verifica el criterio de divisibilidad por 5.
Si tenemos por ejemplo el número 3.925 sabemos que es divisible por cinco ya que su última cifra es un 5, pero también porque al descomponerlo tendríamos 3•1.000 + 9•100 + 2•10 + 5 y vemos que todos los sumandos son múltiplos de 10, excepto el último que tendrá que ser 5 ó 0.

13. Para explicar el criterio de divisibilidad por 4 observa que 10 no es divisible por 4, pero 100 si lo es. Intenta explicarlo.
Si tenemos por ejemplo el número 9.928 sabemos que es divisible por 4 porque sus dos últimas cifras son múltiplos de 4, pero al descomponerlo tenemos 3•1.000 + 9•100 + 2•10 + 8, y vemos que los dos primeros sumandos son múltiplos de 4 y los dos últimos, 28 también debe serlo.

14. Para explicar el criterio de divisibilidad por 3, observa que 10 = 9 + 1. Puedes sacar factor común 9 en todos los sumandos en que sea posible, y ver cuáles son los sumandos que nos quedan.
Para que un número sea divisible por 3 tendremos que sumar todas sus cifras y ver que el resultado es un número múltiplo de 3.
Por ejemplo: 3.927 -> 3 + 9 + 2 + 7 = 21, 21: 3= 7
También se haría: 3•1.000 + 9•100 + 2•10 + 7 = 3(999+1) + 9(99 + 1) + 2(9+1) + 7 = (3•999 + 9•99 + 2•9) + (3 + 9 + 2 + 7).
Tenemos que el primer sumando 3•999 + 9•99+ 2•9 es múltiplo de 3, así que para el número 3.927

solo nos quedaría que el segundo sumando (3 + 9 + 2 + 7) fuese múltiplo de 3, que lo es, por lo tanto, el número inicial es divisible por 3.

15. Para explicar el criterio de divisibilidad por 11, observa que 10 = 11 – 1. Puedes sacar factor común 11 en todos los sumandos en que sea posible, y analizar cuáles son los sumandos que nos quedan.
Si vemos el número 3.927 es = 3•1.000 + 9•100 + 2•10 + 7 = 3(1.001 -1) + 9(99+1) + 2(11-1) + 7 = 3(1.001 + 9•99 + 2•11 + (-3 +9 –2 + 7).
Donde vemos que el primer sumando 3(1.001 + 9•99+ 2•11) es múltiplo de 11, por lo tanto para que el número inicial también lo sea, basta con que el segundo sumando sea múltiplo de 0 u 11, es de (-3 + 9 –2 + 7) : 11.

16. Calcula los múltiplos de 75 comprendidos entre 1 y 200.
Solo tendremos dos múltiplos entre de 75 comprendidos entre 1 y 200 que son 75 y 150.

17. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) 50 es múltiplo de 10: Verdadero ya que 50:10 es exacto.
b) 2 es divisor de 30: Verdadero porque 30:2 es exacto.
c) 4 es múltiplo de 16: Falso ya que ningún número multiplicado por 16 da 4.
d) 66 es divisible por 11: Verdadero ya que 66:11 es exacto.
e) 80 es divisor de 8: Falso ya que 8:80 no es exacto.
f) 3 es divisible por 12: Falso ya que 3:12 no es exacto.

18. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: 3 72x 54y.
Y debe de valer 0 ya que para que un número no sea múltiplo de 10 debe terminar en 0.
Para que sea múltiplo de 9, la suma de sus cifras tiene que ser un número múltiplo de 9, así que tendremos:
3 + 7 + 2 + x + 5 + 4 + 0 = x + 21, y de aquí deducimos que la x valdrá 6 para que nos de 27 que es múltiplo de 9.

19. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?
Para que sea divisible por 2 tiene que terminar en 0, 2, 4, 6, 8. Para que sea divisible por 9, la suma de las cifras tiene que ser múltiplo de 9, así que, el número sería 666.

20. Calcula todos los divisores de los siguientes números:
a) 75: (1, 3, 5, 15, 25, 75)
b) 88: (1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88)
c) 30: (1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30)
d) 25: (1, 5, 25)
e) 160: (1, 2, 4, 8, 16, 32, 5, 10, 20, 40, 80, 160)
f) 300: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 25, 50, 75, 100, 150, 300)

21. Continúa la lista de números primos del ejemplo con 10 números primos más.
Los siguientes números primos serían: 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79.

22. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

Hay infinitos números primos ya que tenemos números infinitos.

23. Completa la criba de Eratóstenes hasta el 200.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

24. En este caso, ¿cuál es el último número primo del que debes tachar sus múltiplos? Observa que 13 · 13 = 169 y 17 · 17 = 289.

Sería el 13 porque 13•13 = 169, ya que el siguiente sería 17, pero 17•17 = 289 y ya sobrepasa de 200.

25. Busca los distintos significados de las palabras "criba" y "algoritmo", ¿en qué más contextos lo puedes utilizar?

Criba: es un utensilio que se emplea para limpiar el grano de la paja, el polvo y otros sólidos no deseados con los que se haya mezclado. En el contexto matemático se utiliza como sinónimo de separación. En el caso de la criba de Eratóstenes, nos ayuda a separar los números primos de los compuestos.

Algoritmo es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos. El algoritmo se usa tanto en matemáticas como en informática.

26. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 50 = $2 \bullet 5^2$

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

b) 36 = $2^2 \bullet 3^2$

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

c) 100 = $2^2 \bullet 5^2$

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

d) 110 = $2 \bullet 5 \bullet 11$

$$\begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

27. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 150 = $2 \bullet 5^2 \bullet 3$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

b) 121 = 11^2

$$\begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

c) 350 = $2 \bullet 5^2 \bullet 7$

350	2
175	5
35	5
7	7
1	

d) 750 = $2 \bullet 5^3 \bullet 3$

750	2
375	5
75	5
15	5
3	3
1	

28. Descompón en factores primos los siguientes números:

a) 1 240 = $2^3 \bullet 5 \bullet 31$

1240	2
620	2
310	2
155	55
31	31
1	

b) 2 550 = $2 \bullet 5^2 \bullet 51$

2550	2
1275	5
255	5
51	51
1	

c) 4 520 = $2^3 \bullet 5 \bullet 113$

4520	2
2260	2
1130	2
565	5
113	113
1	

d) 5 342 = $2 \bullet 2671$

5342	2
2671	2671
1	

29. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10 000 y 100 000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

Podemos observar que todos tienen como factores el 2 y el 5. La potencia de estos factores coincide con el número de ceros que tenga el número.

$10 = 2 \bullet 5$; $100 = 2^2 \bullet 5^2$

30. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? Continúa la serie con 7 números más.

Se observa que todos son potencias de 2:

$4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$ ….. , 512, 1024, 2048, 4096, 8196, …

31. Calcula el M.C.D de los siguientes pares de números:

a) 70 y 45

$$\begin{array}{r|l} 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$70 = 2 \bullet 5 \bullet 7$, $45 = 3^2 \bullet 5$

M.C.D = 5

b) 121 y 55

$$\begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$121 = 11^2$, $45 = 5 \bullet 11$

M.C.D = 11

c) 42 y 66

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$42 = 2 \bullet 3 \bullet 7$, $66 = 2 \bullet 3 \bullet 11$

M.C.D = $2 \bullet 3 = 6$

d) 224 y 80

$$\begin{array}{r|l} 224 & 2 \\ 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$224 = 2^5 \bullet 7$

$80 = 2^4 \bullet 5$

M. C. D = 2^4 =32

32. Calcula el M.C.D de los siguientes números:

a) 33, 11 y 22

33	3
11	11
1	

11	11
1	

22	2
11	11
1	

$33 = 3 \bullet 11$

$11 = 11$

$22 = 2 \bullet 11$

M.C.D = 11

b) 66, 42 y 120

66	2
33	3
11	11
1	

42	2
21	3
7	7
1	

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$66 = 2 \bullet 3 \bullet 11$

$42 = 2 \bullet 3 \bullet 7$

$120 = 2^3 \bullet 3 \bullet 5$

M.C.D = $2 \bullet 3 = 6$

c) 75, 25 y 200

75	5
15	3
5	5
1	

25	5
5	5
1	

200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$75 = 5^2 \bullet 3$

$25 = 5^2$

$200 = 2^3 \bullet 5$

M.C.D = 5^2 =25

d) 81, 44 y 16

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

44	2
22	2
11	11
1	

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$81 = 3^4$
$44 = 2^2 \bullet 11$
$16 = 2^4$

M.C.D = 1 ya que no tienen otro factor en común.

33. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:
a) 40 y 24
$40 = 2^3 \bullet 5$
$24 = 2^3 \bullet 3$
M.C.M = $2^3 \bullet 5 \bullet 3 = 120$

b) 16 y 40
$16 = 2^4$
$40 = 2^3 \bullet 5$
M.C.M = $2^4 \bullet 5 = 80$

c) 30 y 66
$30 = 3 \bullet 2 \bullet 5$
$66 = 2 \bullet 3 \bullet 11$
M.C.M = $2 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 11 = 330$

d) 24 y 80
$24 = 2^3 \bullet 3$
$80 = 2^4 \bullet 5$
M.C.M = $2^4 \bullet 5 \bullet 3 = 240$

34. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:
a) 33, 11 y 22
$33 = 3 \bullet 11$
$11 = 11$
$22 = 2 \bullet 11$
M.C.M = $2 \bullet 3 \bullet 11 = 66$

b) 66, 42 y 120
$66 = 2 \bullet 3 \bullet 11$
$42 = 2 \bullet 3 \bullet 7$
$120 = 2^3 \bullet 3 \bullet 5$
M.C.M = $2^3 \bullet 3 \bullet 5 \bullet 7 \bullet 11$

c) 75, 25 y 200
$75 = 5^2 \bullet 3$
$200 = 2^3 \bullet 5^2$
$25 = 5^2$
M.C.M = $5^2 \bullet 3 \bullet 2^3 = 600$

d) 81, 44 y 16

$81 = 3^4$

$44 = 2^2 \bullet 11$

$16 = 2^4$

M.C.M = $3^4 \bullet 2^4 \bullet 11 = 14.256$

35. Milagros y Nieves tienen 30 cuentas blancas, 10 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.

a) ¿Cuantos collares iguales pueden hacer?

$30 = 3 \bullet 2 \bullet 5$

$10 = 2 \bullet 5$

$90 = 3^2 \bullet 2 \bullet 5$

Para hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta tendremos que hacer el máximo común divisor:

M.C.D = $2 \bullet 5 = 10$

Por lo tanto, podrá hacer 10 collares.

b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?

Si cada cantidad de cuentas lo dividimos entre el M.C.D sabremos cuántas cuentas de cada color tendrá cada collar:

Blancas = 30:10 = 3 cuentas blancas

Azules = 10:10 = 1 cuenta azul

Rojas = 90:10 = 9 cuentas rojas

36. La abuela toma muchas pastillas. Nada más despertarse, a las 9 de la mañana, toma una para el colesterol que debe tomar cada 8 horas, otra para la tensión que debe tomar cada 12 horas y una tercera para la circulación que debe tomar cada 4 horas. ¿Dentro de cuántas horas volverá a tomar los 3 medicamentos a la vez? ¿A qué hora?

$8 = 2^3$

$12 = 2^2 \bullet 3$

$4 = 2^2$

Para saber cuántas horas pasarán para que coincida la toma de las tres pastillas haremos el M.C.M:

M.C.M = $2^3 \bullet 3 = 24$

Esto quiere decir que cada 24 horas coincidirá la toma de las tres pastillas, como comienza a tomárselas a las 9h de la mañana, cada día a las 9h coincidirá la toma de las 3 pastillas.

37. Juan compra en una floristería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuántos ramos iguales puede elaborar si coloca la máxima cantidad de flores de cada tipo para que no le sobre ninguna?¿Cuántas rosas y claveles debe colocar en cada ramo?

$24 = 2^3 \bullet 3$

$36 = 2^2 \bullet 3^2$

Para hacer un ramo con las máximas flores tenemos que calcular el M.C.M:

M.C.M = $2^2 \bullet 3 = 12$

Por lo tanto, habrá 12 ramos con la mayor cantidad de flores y no sobrará ninguna.

En cada ramo habrá 2 rosas y 3 claveles:

24:12 = 2 rosas

36:12 = 3 claveles

38. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 30 minutos, otro que da una señal cada 60 minutos y un tercero que da una señal cada 120 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido. a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir los tres avisos? b) ¿A qué hora ocurrirá?

$30 = 3•2•5$

$60 = 3•2^2•5$

$30 = 3•2^3•5$

Haremos el M.C.M para saber el mínimo de horas que pasan hasta que coincidan los tres avisos.

M. C.M = $3•2^3•5 = 120$.

120 minutos = 2h, por lo tanto, pasarán dos horas hasta que coincidan las tres alarmas. Como a las 10 de la mañana coinciden, volverán a coincidir a las 12 de la mañana.

39. ¿Cuál será la menor cantidad de pasteles que se deben comprar para que se puedan repartir en partes iguales entre grupos de 10, 20 y 30 niños? Determina en cada caso cuántos pasteles le toca a cada niño.

$10 = 2•5$

$20 = 2^2•5$

$30 = 3•2•5$

La menor cantidad que tenemos que comprar será hacer el M.C.M

M.C.M = $3•2^2•5 = 60$, que será la menos cantidad que debemos comprar para que le toque un pastel a cada niño.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.

Buscaremos números que sean pares y divisibles por 11, por ejemplo: 110, 550, 616 y 814.

2. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 6. ¿Cuáles son comunes a ambos?

Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40.
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60.
Los comunes serán: 12, 24 y 36.

3. Sustituye A por un valor apropiado para que:

a) 24 A75 sea múltiplo de 5.

Como dicho número termina en 5, la A podrá tener cualquier valor.

b) 11 07A sea múltiplo de 3.

Para que sea múltiplo de 3, la suma de sus cifras tiene que ser múltiplo de 3:
1 + 1 + 0 + 7 + A; 9 + A; A podría ser 0, 3, 6 o 9.

c) 5A 439 sea múltiplo de 6.

No habrá ninguno porque para que sea múltiplo de 6 tiene que terminar en número par y este termina en impar.

4. Indica cuales de los siguientes números son múltiplos de 3:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150

Para que sea múltiplo de 3, la suma de sus cifras debe ser divisible por 3, por lo que, de esos números, solo 30, 60, 75 y 150 son múltiplos de 3.

5. Busca todos los divisores de 210.

Los divisores de 210 son: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70 y 210.

6. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
30.087	Divisible por 3	3+0+0+8+7=18; 18:3=6 *Verdadero*
78.344	Divisible por 6	Es par, por lo tanto es divisible por 2. 7+8+3+4+4 =26; 26:3 no es exacto. *Falso*
87.300	Múltiplo de 11	8+7+3+0+0 = 18; 18:11 no es exacto *Falso*
2.985.644	Múltiplo de 4	Las dos últimas cifras (44) son múltiplo de 4, ya que 44:4 = 11 *Verdadero*

1	Divisor de 13	13:1 = 13 *Verdadero*
98	Divisor de 3	9+8 = 17; 17:3 no es exacto. *Falso*

7. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de m y n sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) m = 2 · 2 · 2 · 3 n = 2 · 3 · 3 · 5

m.c.m = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

M.C.D = 2 · 3 = 6

b) m = 3 · 5 n = 2 · 7

m.c.m = 3· 5· 2· 7 = 210

M.C.D = 1

c) m = 22 · 3 · 52 n = 22 · 32

m= $2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$ n=$2^6 \cdot 11$

m.c.m = $2^6 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 13 = 13.728$

M.C.D = $2^3 \cdot 11 = 88$

d) m = 3 · 5 · 72 n = 2 · 52 · 7

m= $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ n=$2^3 \cdot 13 \cdot 7$

m.c.m = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 7 = 98.280$

M.C.D = $2^3 = 8$

8. Escribe en tu cuaderno y completa las siguientes afirmaciones:

a) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es su producto.

b) Como dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es 1.

9. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

a) 4 y 8: 8 es múltiplo de 4, por tanto m.c.m = 8 y M.C.D = 4

b) 2 y 3: Al ser primos, m.c.m= 2· 3 y M.C.D =1

c) 3 y 12: 12 es múltiplo de 3, por tanto m.c.m= 12 y M.C.D =3

d) 7 y 10: No tienen factores en común, por lo tanto, m.c.m= 7· 10=70 y M.C.D =1

e) 6 y 12: 12 es múltiplo de 6, por lo tanto, m.c.m= 12 y M.C.D =6

f) 6 y 9: Los factores comunes son el 3 de mayor potencia 3^2 y el 2 es no común, por lo tanto, m.c.m= 18 y M.C.D =6

g) 10 y 15: m.c.m= 2· 3 · 5 = 30 y M.C.D =5

h) 2 y 5: como son primos, m.c.m= 10 y M.C.D = 1

i) 4 y 6: m.c.m= $2^2 \cdot 3$ = 12 y M.C.D = 2

j) 2 y 2: Al ser el mismo número, m.c.m= 2 y M.C.D = 2

k) 4 y 1: m.c.m= 2^2y M.C.D = 1

l) 3 y 7: Al ser primos, m.c.m= 3 · 7 = 21 y M.C.D = 1

m) 2, 3 y 4: m.c.m= $2^2 \cdot 3$ = 12 y M.C.D = 2

n) 3,6 y 12: Al ser múltiplos de 3, m.c.m= 12 y M.C.D = 3

o) 3, 4 y 6: m.c.m= $2^2 \cdot 3$ = 12 y M.C.D = 1

10. Calcula:

a) m.c.m. (8, 40) M.C.D. (8, 40)

$8 = 2^3$

$40 = 2^3\cdot 5$

m.c.m= $2^3\cdot 5 = 40$ y M.C.D = $2^3 = 8$

b) m.c.m. (15, 35) M.C.D. (15, 35)

$15 = 3\cdot 5$

$35 = 7\cdot 5$

m.c.m= $3\cdot 5\cdot 7 = 105$ y M.C.D = 5

c) m.c.m. (84, 360) M.C.D. (84, 360)

$84 = 2^2\cdot 3\cdot 7$

$360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$

m.c.m= $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 = 2520$ y M.C.D = $2^2\cdot 3 = 12$

11. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos. Otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes.

$12 = 2^2\cdot 3$

$18 = 3^2\cdot 2$

$60 = 2^2\cdot 3\cdot 5$

Hallaremos el m.c.m para saber cuándo vuelves a coincidir:

m.c.m = $2^2\cdot 3^2\cdot 5 = 180$.

Coincidirán cada 180 segundos, es decir, cada tres minutos. Por lo tanto, coinciden a las 18:30, después a las 18:33. En los próximos 5 minutos coinciden una vez.

12. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:

a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.

1º = 1h y 45m = 60 + 45 =105 m + 15 = 120

2º = 1h y 5m = 60 + 5 = 65m + 7 = 72

3º = 1h y 18m = 60 + 18 = 78m + 12 = 90

$120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$ $\quad$ $72 = 2^3\cdot 3^2$ $\quad$ $90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$

Hallaremos el m.c.m para saber a qué hora vuelven a salir juntos de la estación.

m.c.m = $2^3\cdot 3^2\cdot 5 = 360$

Vuelven a coincidir a los 360 minutos, es decir, a las 6 horas. Si salieron a las 6h, volverán a coincidir a las 12h.

b) El número de viajes efectuados por cada uno en ese momento.

El 1º hace un viaje cada dos horas, por lo tanto:

6:2 = 3. Hará 3 viajes.

El 2º hace un viaje cada 72 minutos, por lo tanto:

360:72 = 5. Hará 5 viajes.

El 3º hace un viaje cada 90 minutos, por lo tanto:

360:90 = 4. Hará 4 viajes.

13. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número posible de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?

$32 = 3^5$

$88 = 2^3 \cdot 11$

$56 = 2^3 \cdot 7$

$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$

M.C.D (32, 88, 56, 66) = 2

Solo haremos 2 collares iguales y las piezas de cada collar serán:

32:2 = 16. Utilizaremos 16 piezas de coral.

88:2 = 44. Utilizaremos 44 piezas de turquesa.

56:2 = 28. Utilizaremos 28 piezas de perlas.

66:2 = 33. Utilizaremos 33 piezas de azabache.

14. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos, ¿cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

$180 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 5$

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

m.c.m (180,240) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Cada 720 minutos, o 12h, hará las dos cosas al mismo tiempo.

15. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?

$10 = 2 \cdot 5$

$15 = 3 \cdot 5$

$20 = 2^2 \cdot 5$

m.c.m (10,15,20) = $2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$.

Cada 60 minutos coincidirán un teléfono, un pozo y una gasolinera.

16. Para celebrar su cumpleaños, Sonia compro 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuantos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?

$12 = 2^2 \cdot 3$

$6 = 2 \cdot 3$

$18 = 2 \cdot 3^2$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

M.C.D (12, 6, 18, 20) = $2 \cdot 3 = 6$.

Solo podremos hacer 6 bolsas y cada bolsa tendrá:

12:6 = 2. Dos gorritos

18:6 = 3. Tres anillos

6:6 = 1. Un collar

36:6 = 6. Seis caramelos.

17. Una máquina llena una caja de 256 botellas en un minuto y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en un minuto y medio. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 am. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas máquinas durante ese periodo?

1º máquina = 1 minutos = 60 segundos

2º máquina = 1 minuto y medio = 90 segundos.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$90 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$

m.c.m (60,90) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$.

A los 180 segundos de empezar terminan de llenar una caja. Por lo tanto, la terminarán a las 9:03h.

1º máquina = 256·3 = 768 botellas llena en 3 minutos.

256·2 = 512 botellas llena en 3 minutos.

18. Comprueba si 2 047 es primo usando la hoja de cálculo.

Utilizar hoja de cálculo.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
a) Si dos números son primos, su máximo común divisor es 1.
b) Si dos números son primos, su mínimo común múltiplo es 1.
c) El mínimo común múltiplo de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
d) El máximo común divisor de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
La solución correcta es la a) puesto que al ser primos no tienen ningún factor en común, solo el 1.

2. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 63?
a) D(63) = {1, 3, 7, 21, 63}
b) D(63) = {1, 2, 9, 21, 63}
c) D(63) = {1, 3, 7, 9, 21, 63}
d) D(63) = {0, 1, 3, 7, 9, 21, 63}
La solución correcta es la c)

3. La descomposición de 81000 en factores primos es:
a) $2^3·3^4·5^3$
b) $2^3·3^3·5^3$
c) $2^3·3^4·5^2$
d) $2^2·3^4·5^3$
$81.000 = 81·1.000 = 2^3·3^4·5^3$
La solución correcta es la a)

4. De los números:183, 143 y 1973,
a) Todos son primos
b) Ninguno es primo
c) 143 es primo
d) 1 973 es primo
Solo 1973 es primo, por lo que la solución correcta es la d)

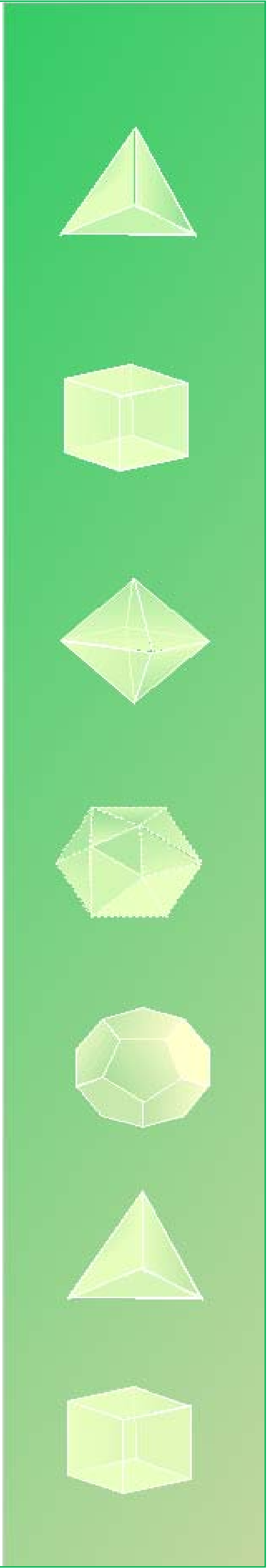
5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera ?
a) Si un número es múltiplo de 2, también lo es de 4.
b) 11 es múltiplo de 121.
c) 33 es divisor de 11.
d) Si un número es múltiplo de 2 y de 3, también lo es de 6.
La solución correcta es la d), ya que, siempre que un número sea múltiplo de 2 y 3 a la vez, lo será de 6.

6. La propiedad que se ilustra en la siguiente igualdad 2· (3 + 4) = 2 · 3 + 2 · 4 es:
a) La propiedad conmutativa.
b) La propiedad distributiva.
c) La propiedad asociativa.
d) Esa igualdad no es cierta.
La correcta es la b) ya que la propiedad distributiva nos dice que el producto de un factor por la suma de otros dos factores es igual al producto del factor por el primer sumando más el producto del factor por el segundo sumando:
$2·(3+4) = 2·3 + 2·4$

7. El M.C.D.(650, 700) es:
a) 10
b) 30
c) 20
d) 50
$650 = 5^2 \cdot 2 \cdot 13$
$700 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 7$
M.C.D = $5^2 \cdot 2 = 50$. La respuesta correcta es la d)

8. Un operario revisa la excavadora de su empresa cada 28 días y la grúa cada 35. Si revisó las dos el 1 de mayo, ¿cuándo volverán a coincidir?
a) El 17 de septiembre
b) El 1 de septiembre
c) El 17 de agosto
d) Ese año no vuelven a coincidir
$28 = 2^2 \cdot 7$
$35 = 5 \cdot 7$
m.c.m = $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$.
Coincidirá la revisión dentro de 140 días. Sumo los días que tienen los meses desde el 1 de mayo hasta llegar a 140 días.
Mayo = 31; junio = 30; julio = 31; agosto = 31
31+30+31+31 = 123.
140 -123 = 17.
Coincidirán el 17 de septiembre. La respuesta correcta es la a)

9. Queremos alicatar una pared de 615 x 225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?
a) 615
b) 15
c) 225
d) No es posible
$615 = 5 \cdot 3 \cdot 41$
$225 = 5^2 \cdot 3^2$
MC.D = $5 \cdot 3 = 15$
Para que las baldosas sean cuadradas, tendrán que ser de 15x15, estas medirán 225cm$^{2.}$
La pared mide $615 \cdot 225$ = 138.375cm$^{2.}$ Si dividimos lo que mide la pared entre lo que mide cada azulejo, tendremos el número de azulejos que necesitamos:
138.375cm^2 : 225cm^2 = 615.
Por lo tanto, necesitaremos 615 azulejos para no tener que cortar ninguno.
La respuesta correcta es la a).



2º ESO

Capítulo 5: Sistemas de medida

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Clasifica como magnitudes o unidades de medida. Indica cuáles de las unidades de medida pertenecen al SI:

Debemos tener en cuenta que una magnitud es una característica que se puede medir mediante un número, mientras que una unidad de medida es un patrón para medir una magnitud. Una misma magnitud se puede expresar con distintas unidades de medida.

- **a)** Centímetro cúbico: Es una unidad de medida. S.I
- **b)** Tiempo: Es una magnitud.
- **c)** Hora: Es una unidad de medida. S.I
- **d)** Memoria de un ordenador: Es una magnitud.
- **e)** Gramo: Es una unidad de medida. S.I
- **f)** Masa: Es una magnitud.
- **g)** Kilómetros por hora: Es una unidad de medida. S.I

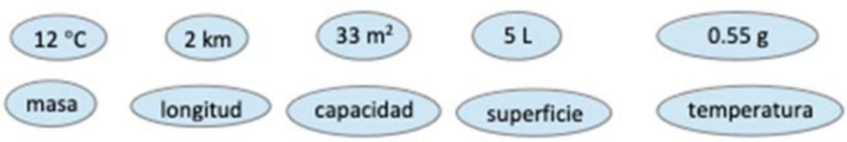
2. Investiga a qué magnitudes corresponden las siguientes unidades poco corrientes:

- **a)** Área: Superficie
- **b)** Hercio: Frecuencia
- **c)** Yuan: Dinero
- **d)** Grado Fahrenheit: Temperatura
- **e)** Año luz: Distancia

3. Indica al menos una unidad del Sistema Internacional de Unidades adecuada para expresar las siguientes magnitudes:

- **a)** La edad de la tierra: año
- **b)** El tamaño de un jardín: metro cuadrado
- **c)** La capacidad de un bidón: litro
- **d)** La distancia entre Madrid y Valencia: kilómetro
- **e)** La masa de un armario: kilogramo
- **f)** Lo que tardas en hacer un problema: minutos

4. Copia en tu cuaderno y relaciona cada magnitud con su posible medida:



Masa - 0.55 g
Longitud - 2 Km
Capacidad - 5 L
Superficie - 33 m^2
Temperatura - 12◦C

5. Si Ramón mide 1.65 metros y Jesús mide 164 centímetros: ¿Quién es más alto?

Para poder compararlos, debemos tener las dos alturas en la misma medida. Como la unidad del S.I. es el metro, pasaremos la altura de Jesús, que está en centímetros, a metros.

Para ello, como sabemos que 1 cm es igual a 0.01 m, tendremos que dividir los 164 cm entre 100 para pasarlo a metros:

$$164\ cm: 100 = 1.64\ m$$

Por tanto, Ramón mide 1.65 metros y Jesús mide 1.64 metros, por lo que Jesús es más alto.

6. Contesta con una regla graduada:

a) Mide la longitud de tu cuaderno. ¿Cuánto mide?

La longitud del cuaderno es de 28cm.

b) Mide un lápiz. ¿Cuánto mide?

Mide 10cm. .

7. Averigua cuanto mide el largo de tu habitación.

El largo de mi habitación es de 2,15 metros.

8. Expresa las siguientes longitudes en centímetros:

Para pasar de una unidad de longitud a otra, tendremos que multiplicar o dividir por 10 tantas veces como sea necesario, siguiendo el orden de km, hm, dam, m, dm, cm y mm.

a) 54 dm= 540 cm.
b) 21.08 m= 2108 cm.
c) 8,7 hm= 87000 cm.
d) 327 mm= 32,7 cm.

9. Expresa las siguientes longitudes en las unidades que se indican en cada caso:

Tendremos que pasar las longitudes a la misma unidad, sumarlas y después pasarlas a lo que nos piden, o pasar las dos a la unidad que me piden y después sumarlas.

a) 8 m 1 mm en centímetros:

8 m = 800 cm; 1 mm = 0,1 cm

$$800\ dm + 0{,}1\ cm = 800{,}1 cm$$

b) 3.5 km 27 dam en centímetros:

3.5 m = 350000 cm; 27 dam = 27000 cm

$$350000\ cm + 27000\ cm = 377000\ cm$$

c) 13 km 21 mm en milímetros:

13 m = 13000000 mm; 21 mm = 21 mm

$$13000000\ mm + 21\ mm = 13000021\ mm$$

d) 7 hm 15 cm en centímetros:

7 hm = 70.000 cm; 15 cm = 15 cm

$$70.000\ cm + 15\ cm = 70.015\ cm$$

e) 2 dam 5 dm en metros:

2 dam = 20 m; 5 dm = 0.5 m

$$20\ m + 0.5\ m = 20.5\ m$$

f) 0.6 m 340 mm en decímetros:

0.6 m = 6 dm; 340 mm = 3,4 dm

$$6\ dm + 3{,}4\ dm = 9{,}4\ dm$$

10. Observa la tabla anterior y calcula:

Recuerda que el paso de unidades se hará igual que en las longitudes, pero multiplicando o dividiendo por 100.

a) $35\ dam^2 = 3500\ m^2$
b) $67\ m^2 = 67000000\ mm^2$
c) $5\ km^2 = 5000000\ m^2$
d) $7\ m^2 = 0.0007\ hm^2$

11. Pasa $\mathbf{98\ hm^2 37\ dam^2}$ a centímetros cuadrados.

$$98\ hm^2 = 9800000000\ cm^2; \quad 37\ dam^2 = 17000000\ cm^2$$
$$9800000000\ cm^2 + 1700\ 0000 cm^2 = 9837000000\ cm^2$$

12. Expresa las siguientes superficies en áreas:

Para hacer este ejercicio, recordamos las equivalencias de las unidades agrarias, donde:
1 ha=100 a= 100 dam^2
1 a=100 m^2
1 ca=0.01 a=1 m^2

a) 1678 ha=167800 a
b) 5 ha= 500 a
c) 8 ha 20 a

8 ha=800 a; 20 a=20 a
$800\ a + 20\ a = 820\ a$

d) 28100 ca= 281 a

13. La superficie de un campo de fútbol es de 7140 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:

a) Centímetros cuadrados: $7140\ m^2\ a\ cm^2 = 71400000\ cm^2$
b) Decámetros cuadrados: $7140\ m^2\ a\ dam^2 = 71.40\ dam^2$
c) Hectáreas: $7140\ m^2\ a\ ha = 0.714\ ha$
d) Áreas: $7140\ m^2\ a\ a = 71.4\ a$

14. Expresa en metros cúbicos $\mathbf{3.2\ dam^3\ 5600\ dm^3}$

$$3.2\ dam^3 = 3200\ m^3; \quad 56800\ dm^3 = 5{,}6\ m^3;$$
$$3200\ m^3 + 5{,}6\ m^3 = 3205{,}6\ m^3$$

15. Expresa estos volúmenes en decámetros cúbicos:

a) $0.38\ m^3 = 0.00038\ dam^3$
b) $81\ dm^3 = 0.000081\ dam^3$
c) $1{,}23\ hm^3 = 1230\ dam^3$
d) $52\ m^3 = 0{,}052\ dam^3$

16. ¿Cuántos decilitros tiene un litro?

La escala de los litros es la misma que la escala de los metros, por lo que los cambios de unidades se harán de la misma manera.
Por tanto, 1 Litro tendrá 10 dl.

17. Expresa en kilolitros:

a) $34\ l = 0{,}34\ hl$
b) $1232\ cl = 0{,}1232\ hl$
c) $57\ dal = 5{,}7\ hl$
d) $107\ hl = 107\ hl$

18. Ordena de menor a mayor estas medidas:

Para ordenarlas, tendré que pasar todas a la misma medida. Como sabemos que $1\ l = 1\ dm^3$ pasamos todas las cantidades a dm^3 para compararlas.

a) $7.0001\ hm^3 = 7000100000\ dm^3$
b) $23000\ l = 23000\ dm^3$
c) $8\ ml = 0.008\ l = 0.008\ dm^3$
d) $4\ mm^3 = 0.000004\ dm^3$

Por tanto, de menor a mayor:

$$4\ mm^3 < 8\ ml < 23000\ l < 7.0001\ hm^3$$

19. Calcula el volumen (en litros y en cm^3) de una caja que mide 20 cm de ancho, 20 cm de largo y 5 cm de alto.

$$Volumen = 20\ cm \cdot 20\ cm \cdot 5\ cm = 2000\ cm^3 = 2\ dm^3 = 2l$$

20. Expresa las siguientes cantidades en hectogramos:

El cambio de unidades en la escala de los gramos será igual que en la escala de los litros y de los metros.

a) 17 g = 0,17 hg
b) 59 dag = 5,9 hg
c) 73,5 kg = 735 hg
d) 350 g = 3,5 hg

21. Expresa en gramos las siguientes masas:

a) 3.6 dag = 36 g
b) 59 kg = 59.000 g
c) 740.5 kg 8.5 dag

740.5 kg = 740500 g; 8.5 dag= 85 g; $740500 + 85 = 740585$ g

d) 3 dag 15.10 dg

3 dag = 30 g; 15.10 dg = 1.510 g; $30 + 1.510 = 31.510$ g

22. Expresa en kilogramos:

Para este ejercicio debemos recordar que:
1 tm = 1000 kg, 1 qm = 100 kg y 1 mag = 10kg

a) 5 tm 5 qm 2.5 mag

5 tm = 5000 kg
5 qm = 500 kg
2.5 mag = 25 kg

$$5000 + 500 + 25 = 5525\ kg$$

b) 9.35 tm 750 dag

9.35 tm= 9350 kg
750 dag = 7.5 kg
$$9350 + 7.5 = 9357.5\ kg$$

c) 712 qm 459 hg

712 qm = 71200 kg
459 hg = 45.9 kg
$$71200 + 45.9 = 71245.9\ kg$$

d) 22 tm 3 mag 8 kg

22 tm = 22000 kg
3 mag = 30 kg
$$22000 + 30 + 8 = 22038\ kg$$

23. Estima la masa de:

a) tu cuaderno: 75g
b) tu bolígrafo: 15gr
c) tu cartera: 530 gr
d) tu mesa: 27 kg

24. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos

a) 12500´´

12	60	
500		
05	208	60
00		
20	28	3

Solución: 12500´´= 3° 28´20´´

b) 83´

83	60
23	1

Solución 83´ = 1° 23´

c) 230´´

23	60
0	
50	3

Solución: 230´´= 3° 50´

d) 17600´´

17	60	
600		
56	293	60
0		
20	53	4
0		
20		

Solución: 17600´´= 20° 53´4´´

25. Pasa de forma incompleja a forma compleja

a) 12° 34´ 40´´

12°	·	3600´´	43.200''+
34'	·	60''	2.040''+
			40''=
			45.280''

12° 34´ 40´´ = 45.280''

b) 13° 23´ 7´´

13°	·	3600´´	46.800''+
23'	·	60''	1.380''+
			7''=
			48.187''

13° 23´ 7´´ = 48.187''

c) 49° 56´ 32´´

49°	·	3600´´	176.400''+
56'	·	60''	3.360''+
			32''=
			179.792''

49° 56´ 32´´ = 179.792''

d) 1° 25´ 27´´

1°	·	3600´´	3.600''+
25'	·	60''	1.500''+
			27''=
			5.127''

1° 25´ 27´´ = 5.127''

26. Completa la tabla

EXPRESIÓN EN SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN MINUTOS Y SEGUNDOS	EXPRESIÓN EN GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS
8.465''	141' 5''	2° 21' 5''
14.732''	245' 32''	4° 5' 32''
11.835''	1.863' 55''	31°31' 55''

8.465''

8.465	60		
246	**141**	60	
005	**21**	**2**	
05			

8.465'' = 141' 5''

8.465'' = 2° 21' 5''

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

245’ 32’’

245	60
05	**4**

245’ 32’’ = 4° 5’ 32’’

245’	·	60’’	=	14.700’’+
				32’’=
				14.732’’

245’ 32’’ = 14.732’’

31° 3’ 55’’

31°	·	3600´´	=	111.600’’+
3’	·	60’’	=	180’’+
				55’’=
				111.835’’

31° 3’ 55’’ = 111.835’’

31°	·	60´	=	1.860’’+
				3’=
				1.863 ’’

31° 60’ = 1.863’ 55’’

27. Calcula

a) 34° 45´ 30´´ + 12° 27´ 15´´

34°	45´	30´´ +
12°	27’	15’’ =
46°	72’	45’’

Como los minutos son más de 60, debemos restarlos: 72’ – 60’ = 12’.

Por lo tanto, nos quedará un 1 ° y 12’

Solución: 47° 12’ 45’’

b) 16° 30´ 1´´ + 12° 13´ 12´´ + 2° 1’

16°	30´	1´´ +
12°	13’	12’’ +
2°	1’	=
30°	44’	13’’

Solución: 30° 44’ 13’’

c) 16° 45´ + 23° 13´´ + 30° 20´ 30´´

16°	45´		+
23°		13´´	+
30°	20´	30´´	=
69°	65´	43´´	

65´ – 60´ = 5´.

Solución: 70° 5´ 43´´

d) 65° 48´ 56´´ - 12° 33´ 25´´

65°	48´	56´´	-
12°	33´	25´´	=
53°	15´	31´´	

Solución: 53° 15´ 31´´

e) 35° 54´ 23´´ - 15° 1´ 35´´

35°	54´	23´´	-
15°	1´	35´´	=

Tenemos que recordar que no se puede restar cuando el sustraendo es mayor que el minuendo (en este caso 35´´>23´´). Por ello tenemos que hacer que el minuendo sea mayor.

La forma de hacerlo es quitarle un minuto a los 54´ y se lo sumamos en forma de segundos (60´´) a los segundos. De esta forma tendremos 54´ y 83´´ y resolvemos:

35°	53´	83´´ -
15°	1´	35´´ =
20°	52´	48´´

Solución: 20° 52´ 48´´

f) 43° 32´ 1´´ - 15° 50´ 50´´

43°	32´	1´´ -
15°	50´	50´´ =

Vuelve a ocurrir lo mismo en los segundos, por lo que procedemos del mismo modo:

43°	31´	61´´ -
15°	50´	50´´ =

32´ – 1´ = 31´

60´´ + 1´´ = 61´´

De nuevo, los minutos siguen siendo más pequeños, por lo que volvemos a realizar el proceso:

42°	91´	61´´ -
15°	50´	50´´ =
27°	41´	11´´

43° - 1° = 42°

60´ + 31´´ = 91´´

Solución: 27° 41´ 11´´

28. ¿Cuántos segundos tiene una hora?

Como sabemos, una hora tiene 60 minutos y 1 minuto tiene 60 segundos, por lo que haremos:

$$60 \bullet 60 = 3.600$$

De esta forma, vemos que una hora tiene 3.600 segundos.

29. ¿Cuántas horas tiene una semana? ¿Cuántos minutos?

Como sabemos, un día tiene 24 horas y una semana tiene 7 días, por lo que:

$$24 \bullet 7 = 168$$

Una semana tendrá 168 horas.

Como cada hora tiene 60 minutos, tendremos:

$$168 \bullet 60 = 10.080$$

Una semana tendrá 10.080 minutos.

30. ¿Cuántas semanas tiene un año no bisiesto?

Todos los meses tienen 4 semanas excepto 4 meses que tienen 5 semanas. Entonces tendríamos:

$$4 \bullet 12 + 4 = 52$$

Un año no bisiesto tendrá 52 semanas.

31. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia 1 200 € a libras, bolivianos, yenes y Dirhams.

Libras: $1200€ \bullet 0{,}86£$ = 1.032 £

Soles: $1200€ \bullet 3{,}6s = 4320s$

Bolivianos: $1200€ \bullet 39Bs = 10.800Bs$

Yenes: $1200€ \bullet 131¥s = 157.200¥$

Dirhams: $1200€ \bullet 11{,}1MAD = 13.320MAD$

32. Con las equivalencias del cuadro anterior, cambia a euros las siguientes cantidades:

a) 390 $

$$390\$: 1{,}3 = 300€$$

b) 4 051.5مهدر

$$4051{,}5MAD : 11{,}1 = 365€$$

c)104 800 ¥ (yenes)

$$104.800¥ : 131 = 800€$$

d)5 103 Bs

$$5103Bs : 9 = 567€$$

33. Jessica se quiere comprar una Tablet. En España cuesta 350 €, en Estados Unidos 400 $ y 60 $ de transporte, en China 2 700 ¥ y 200 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar la Tablet?

La Tablet cuesta en España 350€.

En EEUU cuesta 460$.

En China cuesta 2.900¥.

Pasamos los dólares a euros: 460$: 1,3 = 353,84€

Pasamos los yenes a euros: 2.900¥ : 131 = 22,137€.

Podemos comprobar que, a pesar de pagar el transporte, el lugar más barato para comprar la tablet es China.

34. Ramiro se comunica regularmente con amigos por internet: John, de Escocia; Irina, de Bolivia y Taiko de Japón. Quiere comprar una bici que cuesta 200 €. Les quiere decir a cada uno de sus amigos el precio en su moneda nacional. Realiza los cálculos.

Para decirle el precio de la bicicleta a John de Escocia, pasaremos los euros a libras:
200€ • 0,86 = 172£

Para Irina de Bolivia haremos:
200€ • 9 = 1.800 Bs

Para Tayiko de Japón haremos:
200€ • 131 = 26.200¥

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Descompón en sus distintas unidades:

a) 3 945.67 cm = 3dam 9m 4dm 5 cm 67mm
b) 415.95 mm= 4dm 1cm 1,95mm
c) 5 148 m= 5km 1hm 4dam 8m
d) 67.914 km= 6mam 7km 9hm 1dam 4m
e) 0.82 dam= 8m 2dam

2. Completa con el número o unidad correspondiente:

a) 50 m = 0,5 **hm = 5 000** cm
b) 300 hm = 30 km **=** 30.000 **m**
c) 23 **dm =** 2,3 **m = 2 300 mm**
d) 40 km = 4000 dam **=** 400.000 **dm**

3. Ordena de menor a mayor: 2.7 m; 30 cm; 0.005 km; 2 600 mm; 0.024 hm; 26 dm.

30cm = 30 cm
0,024hm = 240cm
2600mm = 260cm
2,7m = 270cm
0,005km = 500cm

30cm < 0,024hm < 2600mm < 2,7m < 0,005km

4. Calcula la longitud que falta o sobra para tener a 1 m:

a) 27 cm
1m = 100cm ; 100-27 = 73. Faltan 73cm.

b) 300 mm + 25 cm
30cm + 25cm = 55cm ; 100-55 = 45. Faltan 45cm.

c) 0.00034 km + 0.22 dam
0,34m + 2,2m + 2,54m ; 2,54m – 1m = 1,54m, Sobran 1,54m.

d) 0.3 m + 27 cm + 120 mm
0,3m + 0,27m + 0,120m = 0,69m ; 1- 0,69 = 0,31m. Faltan 0,31m

5. Unos amigos están planeando hacer el Camino de Santiago andando desde Frómista (Palencia). La distancia a recorrer es de unos 400 km. Ellos calculan que a un paso cómodo pueden andar 5 km en cada hora. Si piensan andar 6 horas al día, ¿cuántos días tardarán en hacer el camino?

$5km \cdot 6h/día = 30km/h \cdot día$
$400km: 30km\ /h\ \cdot día$ = 13,233
Tardarán unos 14 días

6. Rebeca y su compañera de clase han comprobado que el grosor de un paquete de 500 folios mide 6 cm. ¿Cuál es el grosor de un folio? ¿Cuántos folios hay en una caja de 21 cm de alto?

500 folios : 6cm = 83,3 cm = 8,3mm
8,3mm será el grosos de un folio

21cm : 6 cm = 3,5
En la caja habría 3 paquetes y medios, es decir, 500 + 500 + 500 + 250 = 1.750 folios.
En una caja de 21 cm de alto habrá 1.750 folios.

7. Un parque rectangular mide 100 m de largo y 75 m de ancho. Juan quiere correr 5 km. ¿Cuántas vueltas al parque debe de dar?
El perímetro del parque será 100+100+75+75 = 350m
5km = 5.000m
5.000 : 350 = 14,2
Tendría que dar 14 vueltas completas más dos largos

8. Expresa en UA:

a) 38 000 km= 0,000254014 UA
b) 8 000 m= 0,000000053 UA
c) un millón de micras = 0,67· $10^{-11} UA$
d) dos millones de metros = 0,000013369 UA

9. Completa las siguientes igualdades:

a) 3.5 dam² = 350 m² = 35.000 dm²
b) 0.08 km² = 80.000 m² = 800.000.000 cm²
c) 32 cm² = 0,32 dm² = 0,000032 dam²
d) 6 075 m² = 607500 dm² = 0,6075 hm²

10. Expresa las siguientes superficies en las unidades que se indican en cada caso:

a) 3m² 2cm² 5mm² en decímetros cuadrados

$3m^2 = 300dm^2$
$2cm^2 = 0{,}02dm^2$
$5mm^2 = 0{,}0005dm^2$
$300dm^2 + 0{,}02dm^2 + 0{,}0005dm^2 = 300{,}0205dm^2$

b) 6dam² 2dm² en metros cuadrados

$6dam^2 = 600m^2$
$2dm^2 = 0{,}02m^2$
$600m^2 + 0{,}02m^2 = 600{,}02m^2$

c) 9.3hm² 5m² 6cm² en decámetros cuadrados

$9{,}3hm^2 = 930dam^2$
$5m^2 = 0{,}05dam^2$
$6cm^2 = 0{,}000006dam^2$
$930dam^2 + 0{,}05dam^2 + 0{,}000006dam^2 = 930{,}050006dam^2$

d) 7dm² 5dam² en milímetros cuadrados

$7dm^2 = 70.000mm^2$
$5dam^2 = 500.000.000mm^2$
$70.000mm^2 + 500.000.000mm^2 = 5.000.070.000mm^2$

11. Dibuja en tu cuaderno el contorno de tu mano.

a) Recorta después un cuadrado de 1 cm de lado y estima, en centímetros cuadrados, la superficie de tu mano.

b) Si utilizas un papel normal de 60 g/m², y dibujas tu mano como en el ejercicio anterior y lo recortas, al pesar el papel con un peso muy preciso, obtienes de nuevo la superficie de la mano. (¡Antes de los ordenadores se calculaban así, con papel y tijeras, algunas superficies!). ¿Cuánto mide en cm²?

Solución abierta

12. La superficie de China es de 9 560 000 km2. ¿Cuántas ha tiene?

$9.560.000km^2 = 956.000.000kh$ = $956.000.000ha$

13. Expresa en hectáreas:

1ha = $1hm^2$

a) 3.2 km² = $320hm^2 = 320ha$

b) 1 000 ca = 0,1ha

c) 600 000 dam² = $6.000hm^2 = 6.000ha$

d) 824 m² = $0{,}0824hm^2 = 0{,}0824ha$

e) 67 a = $0{,}67ha$

f) 200 mm² = $0{,}0000000200hm^2 = 0{,}00000002ha$

14. Expresa las siguientes superficies en áreas:

a) 800 ha = 80.000a

b) 261 ca = 2,61a

c) 3 ha 3 a 3ca = 300a + 3a + 0,3a = 303,03a

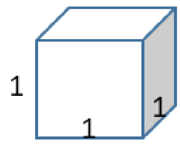
d) 37 m2 = 37a

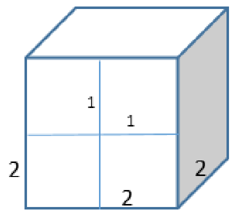
15. El padre de Juan quiere comprar un terreno de 7.3 ha a 3.2 € cada m2. ¿Cuánto le va a costar?

7,3ha = $73.000m^2$

$$73.000 \cdot 3{,}2 = 23.360€\ le\ costará\ el\ terreno$$

16. Piensa en un cubo de lado una unidad. Piensa ahora en un cubo del doble de lado. ¿Cuántos cubitos de los primeros son necesarios para obtener ese cubo?





El área del cubo nuevo será:

$$a^3 = 2^3 = 8$$

Por lo tanto, necesitaremos 8 cubitos.

17. Expresa en metros cúbicos: 28.7hm³ 5m³ 2 800dam³ 45dm³.

$$28{,}7hm^3 = 28.700.000m^3$$

$$5m^3 = 5m^3$$

$$2.800dam^3 = 2.800.000m^3$$

$$45dm^3 = 0{,}045m^3$$
$$28.700.000m^3 + 5m^3 + 2.800.000m^3 + 0{,}045m^3 = 31.500.005{,}045m^3$$

18. Expresa en litros:
- **a) 8.1 hl =** 810l
- **b) 451 ml =** 0,0451l
- **c) 2.3 kl =** 2.300l
- **d) 0.528 kl =** 528l
- **e) 6.25 cl =** 0,0625l
- **f) 7.2 Ml =** 0,0072l

19. Completa las siguientes igualdades:
- **a) 2 m³ = 2.000 l**
- **b) 33 cl = 0,33 dm³**
- **c) 500 mm³ = 500 ml**
- **d) 230 ml = 0,230 dm³**
- **e) 0.02 hm³ = 20.000.000 l**
- **f) 0.016 hl = 0,0016 m³**
- **g) 0.35 dm³ = 350 ml**
- **h) 230 cl = 2.300 cm³**
- **i) 0.25 hm³ = 250.000 kl**

20. En una urbanización se recoge cada semana 27m³ de residuos sólidos. Si viven 42 familias, ¿cuántos litros estimas que produce cada familia al día?

$$27m^3 = 27.000l$$
$$27.000 : 42 = 642{,}86l$$

Una familia produce 642,86l cada día.

Unidades de masa

21. ¿Qué tiene más masa, un kg de papel o un kg de plomo?
Tienen la misma masa porque, aunque nos parezca que el plomo pesa más, tenemos un kilogramo de ambas cosas.

22. Expresa en gramos las siguientes masas:

- **a) 2.7 dag =** $2{,}7dag \cdot 10 = 27g$
- **b) 51.3 kg =** $51{,}3kg \cdot 1000 = 51300g$
- **c) 35.7 kg 8.6 dag**

$$35{,}7kg \cdot 1000 = 35700g$$
$$8{,}6dag \cdot 10 = 86g$$
$$35.700g + 86g = 35.786g$$

- **d) 3 dag 5 g 26.29 dg**

$$3dag \cdot 10 = 30g$$
$$5g = 5g$$
$$26{,}29dg : 10 = 2{,}629g$$
$$30g + 5g + 2{,}629g = 37{,}629g$$

23. Copia en tu cuaderno y completa:

a) 1 g = 10 dg = 100 cg = 1.000 mg = 0,1 dag
b) 1 kg = 10 hg = 100 dag = 1.000 g = 100.000 cg = 1.000.000 mg
c) 1 tm = 1.000 kg = 1.000.000 g = 10.000 hg = 100.000 dag
d) 1 qm = 100 kg = 100.000 g = 0,1tm = 1.000 hg = 10.000.000 cg

24. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente y complétala:

	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
0,943hg	0,0943	0,943	9,43	94,3	943	9.430	94.300
75.282,9dg	7,52829	75,2829	752,829	7528,29	75282,9	752829	7528290
64,92kg	6492	649,2	6492	64920	649200	6492000	64920000
4.375dag	4375	437,5	4375	43750	437500	4375000	43750000
369.266cg	369266	36,9266	369,266	3692,66	36926,6	369266	3692660

25. La densidad se define como el cociente entre la masa y el volumen. El oro tiene una densidad de 19,3 y la plata de 10.5. Dos pulseras de igual masa, una de plata y otra de oro, ¿Cuál tendrá mayor volumen?

$$Densidad = \frac{masa}{volumen}$$

Oro → 19,3 = $\frac{masa}{volumen}$

$$V_{oro} = \frac{masa_{oro}}{19,3} = \frac{1}{19,3} \cdot masa_{oro}$$

$$V_{oro} = 0,051 \cdot masa_{oro}$$

Plata → 10,5 = $\frac{masa}{volumen}$

$$V_{plata} = \frac{masa_{plata}}{10,5} = \frac{1}{10,5} \cdot masa_{plata}$$

$$V_{plata} = 0,095 \cdot masa_{plata}$$

De aquí podemos observar que, para cualquier masa, siempre el volumen de la plata será siempre mayor.

26. Un ángulo mide la quinta parte de un recto. Expresa esta medida en grados, minutos y segundos.
Un ángulo recto mide 90°, por lo tanto, la quinta parte sería:
90:5 = 18.
La quita parte sería 18°

27. Calcula:

a) 36° 57´ 37´´ + 45° 18´ 54´´

36°	57´	37´´		81°	75´	91´´ -
	+					
45°	18’	54’’				60’’ =
	=					
81°	75’	91’’		81°	76’	31’’

81°	76´	31´´ -
	60’	=
82°	**16’**	**31’’**

b) 46° 37´ 35´´+ 82° 32´ 41´´ + 43° 5´´

46°	37´	35´´			69’	71’’ -
	+			171°		
82°	32’	41’’				60’’ =
	+					
43°		5’’				
	=					
171°	69’	71’’		171 °	70’	11’’

171°	70’	11’’ -
	60’	=
172°	**10’**	**11’’**

c) 26° 34' + 84° 21'' + 81° 39´ 49´´

26°	34´	+		191°	71’	70’’ -
84°		21’’ +				60’’ =
81°	39’	49’’ =				
191°	71’	70’’		191°	72’	10’’

191°	72’	10’’ -
	60’	=
192°	**12’**	**10’’**

d) 56° 54´ 56´´ – 23° 59´ 96´´

56°	54´	56´´ -		55°	114´	56´´ -
23°	59’	96’’ =		23°	59’	96’’ =

55°	113´	116´´ -
23°	59’	96’’ =
32°	**54’**	**20’’**

e) 78° 5´ 34´´ – 26° 5´ 47''

78°	5´	34´´ -		77°	65´	34´´ -
26°	5′	47′′ =		26°	5′	47′′ =

77°	64´	94´´ -
26°	5′	47′′ =
43°	**59′**	**47′′**

f) 44° 43´ 2 ´´ – 26° 47´ 31''

44°	43´	2´´ -		43°	103´	2´´ -
26°	47′	31′′ =		26°	47′	31′′ =

43°	102´	62´´ -
26°	47′	31′′ =
37°	**55′**	**31′′**

28. La suma de dos ángulos es 236° 57' 46''. Si uno de ellos mide 68° 57' 58'', ¿cuánto mide el otro?

$$236°\,57'46'' = 68°57'58'' + L(otro\ ángulo)$$
$$L = \ 236°\,57'46'' - \ 68°57'58''$$

236°	57´	46´´ -		235°	117´	46´´ -
68°	57′	58′′ =		68°	57′	58′′ =

235°	116´	106´´ -
68°	57′	58′′ =
177°	**56′**	**48′′**

El otro ángulo medirá $177°\,56'48''$

29. Joaquín va cada día a la escuela y tarda 15 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 50 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tú utilizas.

$$15' \cdot 5\ días = 75'a\ la\ semana$$
$$75' \cdot 50\ semanas = 3.750'$$

Joaquín gasta 3.750 minutos en un año en hacer el trayecto a la escuela.

30. . Si duermes 8 horas al día, ¿cuántas horas has dormido en una semana? ¿Y en un año? Esas horas, ¿cuántos días son?

$$\frac{8\ horas}{día} \cdot \frac{7\ dias}{semana} = 56\ horas\ duermes\ a\ la\ semana$$

Un año tiene 52 semanas, por lo que:

$$56h \cdot 52\ semanas = 2.912h\ en\ un\ año$$

Como un día tiene 24h, tendremos:

$$2.912 : 24 = 121\ días\ duerme\ en\ un\ año$$

31. Enrique va cada día a la escuela y tarda 20 minutos en el trayecto. Si el curso tiene 30 semanas y va de lunes a viernes, ¿cuántos segundos gasta en un año en ese trayecto? Estima el tiempo que tu utilizas en horas.

$$20' \cdot 5 \textit{días a la semana} = 100' \textit{a la semana}$$
$$100' \textit{a la semana} \ \cdot 60 \textit{ semanas} = 6.000'$$
$$6.000' \cdot 60'' = \ 360.000''$$

En total, utiliza 360.000’’ en el trayecto en un año.

32. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántos minutos has dormido en una semana?, ¿y cuántos segundos? ¿Cuántos minutos en un año? ¿Y segundos?

$$8h \textit{ al día} \ \cdot 60' = 480' \textit{ al día}$$
$$480' \cdot 7 \textit{ días} = 3.360' \textit{a la semana}$$
$$3.360' \cdot 60'' = \ 201.600'' \textit{a la semana}$$
$$480' \cdot 365 \textit{ días} = 175.200' \textit{al año}$$
$$175.200 \cdot 60'' = \ 10512000'' \textit{al año}$$

33. Siete guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos.

$$24 \ h \ \cdot 60 = 1.440 \textit{ minutos}$$
$$\textit{1.140} \textit{minutos} : 7 = 205{,}71 \textit{ minutos vigila cada guardia}$$
$$1.140 \textit{minutos} \cdot 60 = 68.400 \textit{ segundos}$$
$$68.400 : 7 = 9.771{,}43 \textit{ segundos vigila cada guardia}$$

Unidades monetarias

34. Con la siguiente tabla de equivalencias, cambia dos mil euros a dólares, libras, yuanes y soles.

Dólares: $2.000 \cdot 1{,}3 = 2.600 \textit{ dólares}$

Libras: $2.000 \ \cdot 0{,}86 = 1.720 \textit{ libras}$

Yuanes: $2.000 \cdot 8 = 16.000 \textit{ yuanes}$

Soles: $2.000 \cdot 3{,}6 = 7.200 \textit{ soles}$

35. Confecciona una hoja de cálculo con la siguiente tabla de equivalencias, para hacer los cambios de moneda.

56	Euros (€)	Libras (£)	Dólares ($)	Soles (S/)	Bolivianos (Bs)	Yenes (¥)	Yuanes (¥)	Dirhams (درهم)(MAD)
57	1	0,86	1,3	3,6	9	131	8	11,1
58	1200	1032	1560	4320	10800	157200	9600	13320
59	2000	1720	2600	7200	18000	262000	16000	22200

36. Sara tiene amigos por todas partes. Ha comprado un ordenador que cuesta 400 €. Les quiere decir a sus amigos el precio en su moneda nacional

- **a) ¿Qué diría al de Japón?** $400€ \cdot 131 \textit{ yenes} = 52.400 \textit{ yenes}$
- **b) ¿Y al de Marruecos?** $400€ \cdot 11{,}1 \textit{ Dirhams} = 4.440 \textit{ dirhams}$
- **c) ¿Y al del Reino Unido?** $400€ \cdot 0{,}86 \textit{ libras} = 344 \textit{ libras}$

37. Con las equivalencias del cuadro adjunto, cambia a euros las siguientes cantidades:

a) 4 025 Dólares $4.025\ dólaress : 1{,}3 = 3.096{,}15€$

b) 5 162 Libras $5.162\ libras : 0{,}86 = 6.002{,}33€$

c) 215.925 ¥ (yenes) $215.925 : 131 = 1{,}65€$

d) 6 214 Bs $6.214 : 9 = 690{,}44€$

38. Pedro se quiere comprar un móvil que en España cuesta 500 €, en Estados Unidos 500 $ y 50 $ por el transporte, en China 3 900 ¥ y 150 ¥ de transporte. ¿Dónde es más barato comprar ese móvil?

$$Estados\ Unidos: 500\$ + 50\$ = 550\$: 1{,}3 = 423€$$
$$China: 3.900¥ + 150\ ¥ = 4.050\ ¥ : 8 = 506{,}25€$$

Como vemos, el precio más barato es el de Estados Unidos

AUTOEVALUACIÓN

1. Un cubo de 3 cm de lado, ¿qué volumen tiene?

a) 9 cm^3

b) 0,27 dm^3

c) 0.003 m^3

d) 27 cm^3

$$3cm \cdot 3cm \cdot 3cm = 27\ cm^3$$

La opción correcta es la d)

2. De las siguientes medidas de masa, ¿cuál es la mayor?

a) 5,78 dal

b) 578 l

c) 5,78 kl

d) 00,578 hl

5,78 dal = 57,8l ; 5,78kl = 5.780l ; 0,578hl = 57,8l

La respuesta correcta es la c)

3. El resultado de sumar 0.07 kg + 0.62 dag + 9.3 hg es:

a) 1000 g

b) 1 kg 62 g

c) 10 hg 62 g

d) 1006.2 g

$$0.07\ kg + 0.62\ dag + 9.3\ hg = 70\ g + 6.2\ g + 930\ g = 1006.2\ g$$

La respuesta correcta es la d)

4. La medida más adecuada para expresar el volumen del contenido de una taza es

a) 2 l

b) 2 cl

c) 200cm^3

d) 2.000 ml

Al ser volumen se escoge la medida en cm^3, por lo que la respuesta correcta es la c)

5. Gladys ha vuelto de un viaje de Estados Unidos con 650$ en metálico. Los cambia a euros y éstos los cambiará a soles en un nuevo viaje a Perú. ¿Cuántos soles tendrá?

a) 3.042

b) 1.800

c) 235

d) 140

650$: 1,3 = 500€ ; 500€· $3{,}4 = 1.800\ soles$

La respuesta correcta es la b)

6. Una botella de 2 litros de agua pesa vacía 200 g. Si se llena las 3/5 partes de la botella, ¿cuánto pesa?

a) **1.500 g**
b) **1.7 kg**
c) **16 hg**
d) **10,7 kg**

1l = 1.000g ; 2l = 2.000g

$\frac{3}{4}\ 2.000 = 1.500g$; $1.500g + 200g = 1.700g$; 1.700g = 1,7kg

La respuesta correcta es la b)

7. El número de segundos de una semana es:

a) **25.200s**
b) **604.800s**
c) **602.520s**
d) **10.080s**

$$1semana = 7\ días\ ;\ 7\ días \cdot 24h = 168h$$
$$168h \cdot 60\min = 10.080\ minutos\ ;$$
$$10.080\ min \cdot 60s = 604.800s$$

La respuesta correcta es la b)

8. El número de segundos en un día es:

a) **1.440s**
b) **85.931s**
c) **86.400s**
d) **10.080s**

$$1\ día = 24h\ ; 24h\ \cdot 60\min = 1.440min$$
$$1.440min \cdot 60 = 86.400s$$

La respuesta correcta en la c)

9. Transformar a segundos: 2 grados, 45 minutos y 3 segundos:

a) **9.903s**
b) **2.070s**
c) **99.030s**
d) **10.303s**

$$2°\ \cdot 60' = 120' \cdot 60 = 7.200'' \quad ; \quad 45' \cdot 60'' = 270''$$
$$7.200'' + 270'' + 3'' = 7.473''$$

La respuesta correcta en la b)

10. Juan ha cambiado mil euros a dólares, estando el cambio a 1,31 dólar el euro. ¿Cuántos dólares le han dado?

a) **131$**
b) **1,310$**
c) **753$**
d) **1,257$**

$$1000 \cdot 1{,}31 = 1{,}310\$$$

La respuesta correcta es la b)

2º ESO

Capítulo 6: Longitudes y áreas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TEOREMA DE PITÁGORAS

1. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 7 y 24 *cm* y su hipotenusa 26 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 7 y 24 *cm*. Utiliza la calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para ver si esto es posible:

$a^2 = b^2 + c^2$

$26^2 = 7^2 + 24^2$; 676 = 49 + 576 ; 676 ≠ 625

Comprobamos que no se obtiene el mismo resultado, por tanto, no existirá un triángulo rectángulo con esas medidas.

$a^2 = 7^2 + 24^2$; $a = \sqrt{625} = 25$

La hipotenusa pedida medirá 25 cm.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
a) 8 *cm* y 6 *cm* b) 12 *m* y 9 *m* c) 6 *dm* y 14 *dm* d) 22,9 *km* y 36,1 *km*.

a) 8 cm y 6 cm ; $a^2 = 8^2 + 6^2$, $a = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10cm$

b) 12 m y 9 m ; $a^2 = 12^2 + 9^2$, $a = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15m$

c) 6 dm y 14 dm ; $a^2 = 6^2 + 14^2$, $a = \sqrt{36 + 196} = \sqrt{232} = 15{,}23dm$

d) 22,9 km y 35,6 km ; $a^2 = 22,9^2 + 35,6^2$, $a = \sqrt{524{,}41 + 1267{,}36} = 42{,}32km$

3. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto: a) 27 cm y 12 cm b) 32 m y 21 m c) 28 dm y 12 dm d) 79,2 km y 35,6 km

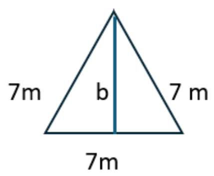
a) 27 c y 12 cm ; $27^2 = 12^2 + c^2$, $c = \sqrt{729 - 144} = 24{,}18\ cm$

b) 32 m y 21 m ; $32^2 = 21^2 + c^2$, $c = \sqrt{1024 + 411} = 38{,}27\ m$

$c)$ 28 dm y 12 dm ; $28^2 = 12^2 + c^2$, $c = \sqrt{784 + 144} = 30{,}46\ dm$

$d)$ 79,2 km y 39,6 km ; $79,2^2 = 35,6^2 + c^2$, $c = \sqrt{6272{,}64 + 1267{,}36} = 86{,}83\ km$

4. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 7 *m*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.

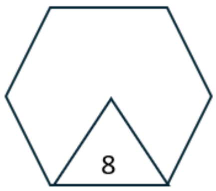


Al ser el área base por altura, necesitamos saber el valor de la altura y para ello dividimos el triángulo por la mitad y usamos el teorema de Pitágoras

$7^2 = 3,5^2 + b^2$; $49 = 12{,}25 + b^2$; $b = \sqrt{36{,}75} = 6{,}06\ cm$

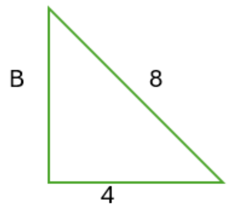
Hallamos ahora el área $17 = \frac{b \cdot h}{2}$; $17 = \frac{7 \cdot 6{,}06}{2} = 21{,}21 cm^2$

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 *cm*. *Ayuda*: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.



El hexágono es el único polígono regular en el que se cumple que el valor del lado es el mismo que el existente desde el centro a cualquier vértice de dicho polígono.

Usamos esto ya que el área del hexágono es $A = \frac{p \cdot a}{2}$ y la apotema no la sabemos.

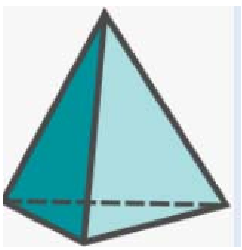


$$8^2 = 4^2 + b^2 \quad ; \quad b = \sqrt{64+16} = 8{,}9cm$$

El perímetro será la suma de todos los lados del polígono.

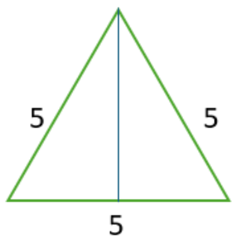
$$8 = 6 \cdot 8 = 48\ cm \qquad 17 = \frac{48\ cm \cdot 8{,}9cm}{2} = 235,2cm^2$$

6. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 5 *dm*.



Vol = área de la base · h

En el tetraedro todas sus caras son triángulos equiláteros. Por lo que hallaremos la altura de un triángulo y nos servirá para hallar el área de la base y para el volumen.



$$5^2 = 2,5^2 + h^2 \qquad A\ \ de\ la\ base = \frac{b\ .\ h}{2} = \frac{5\ .\ 4.3}{2} = 10{,}79\ dm^2$$

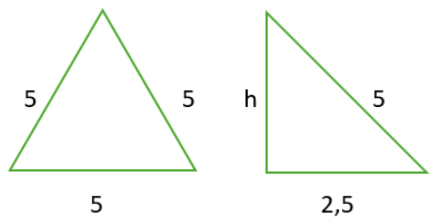
$$h = \sqrt{25 - 6{,}25 = 4{,}3dm} \quad V = \frac{Ab.\ h}{2} = \frac{5.\ 4.3}{2} = 10{,}79dm^2$$

$$h = \sqrt{25 - 6{,}25} = 4{,}3dm \quad V = \frac{Ab.\ h}{2} = \frac{10{,}75\ .\ 4{,}3}{2} = 23{,}11\ dm^2$$

7. Calcula la superficie de un icosaedro regular de arista 5 *dm*.

El icosaedro es un polígono regular formado por 20 caras que son triángulos equiláteros.

El área será = 20 · área del triángulo



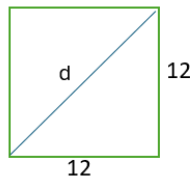
$$5^2 = 2{,}5^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{25 - 6{,}25} = 4{,}3\ dm$$

$$A_t = \frac{b.h}{2} = \frac{5.\ 4.3}{2} = 10{,}75\ dm^2$$

$$A_t = 20 \cdot 10{,}75d^2 = 215\ dm^2$$

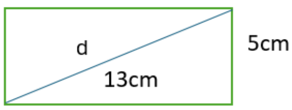
8. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 12 *m*.



$$d^2 = 12^2 + 12^2$$

$$d = \sqrt{144 + 144} = 16{,}9\ m^2$$

9. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 13 *cm* y altura 5 *cm*.



$$d^2 = 5^2 + 13^2$$

$$d = \sqrt{25 = 169} = 13{,}9cm^2$$

2. SEMEJANZA

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
a) Un ángulo de 80° y otro de 40°. Un ángulo de 80° y otro de 60°.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50°.
c) *A* = 30°, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'*= 30°, *b'* = 3,5 cm, *c'* = 4,5 cm
d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 12 cm, *b'* = 15 cm, *c'* = 35 cm

a) La suma de los ángulos de un triángulo es 180° por tanto

$$180° = 80° + 40° + x \quad ; \quad x = 180° - 120° = 60°$$
$$180° = 80° + 60° + x \quad ; \quad x = 180° - 140° = 40°$$

De donde vemos que tienen los dos triángulos los 3 ángulos iguales, por tanto los triángulos son semejantes.

b)
$$180° = 80° + x + x \quad , \quad 2x = 180° - 80° = 100° \quad , \quad x = 55°$$
$$180° = 50° + 50° + x \quad x = 180° - 100° \quad , \quad x = 80°$$

Comprobamos que los dos triángulos tienen los tres ángulos iguales por tanto son semejantes.

c) $$\frac{7}{3{,}5} = \frac{9}{4{,}5} = 2$$

Son semejantes porque tienen un ángulo igual y los lados adyacentes a dicho ángulo son proporcionales.

d) $$\frac{12}{4} = \frac{15}{5} = \frac{35}{7}$$

Sí son semejantes pues todos sus lados son proporcionales.

11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) ***a*** **= 18 cm,** ***b*** **= 12 cm,** ***c*** **= 24 cm.** ***a'*** **= 6 cm,** ***b'*** **= 4 cm, ¿*c'*?**

b) ***A*** **= 45°,** ***b*** **= 8 cm, c = 4 cm.** ***A'*** **= 45°,** ***b'*** **= 16 cm, ¿*c'*?**

a)

$$\frac{24}{c'} = \frac{12}{4} = \frac{18}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{24}{c'} = 3 \quad ; \quad c' = \frac{24}{3} \; ; \quad c' = 8$$

b) $\frac{16}{8} = \frac{c'}{4} \rightarrow c' = 8$

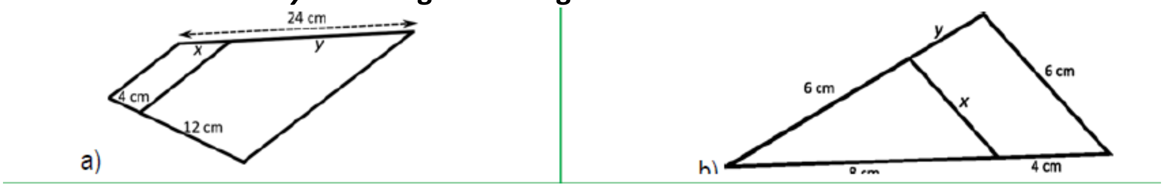
12. Un triángulo tiene las longitudes de sus lados de 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

P = 12 cm + 14 cm + 14 cm = 40 cm

P = 80 cm es decir el doble del primer triángulo, por lo tanto, sus lados serán también el doble.

24 cm , 28 cm , 28 cm

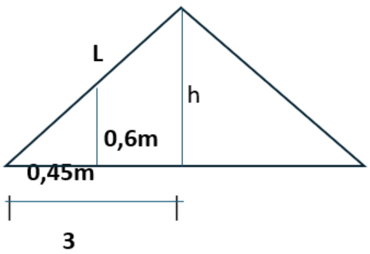
13. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.



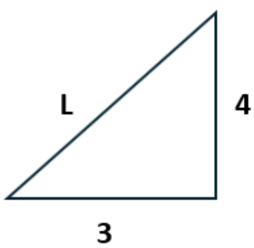
a) $\frac{24\,cm}{16\,cm} = \frac{x}{4\,cm} \rightarrow x = \frac{24 \cdot 4}{16} = 6$, $\frac{24\,cm}{16\,cm} = \frac{y}{12\,cm} \rightarrow y = \frac{24 \cdot 12}{16} = 18$, x =6 , y = 18

b) $\frac{12\,cm}{8} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{8 \cdot 6}{12} = 4\,cm$, $\frac{8}{6} = \frac{4}{y} \rightarrow y = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3\,cm$, x = 4 cm , y = 3 cm

14. Un poste se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 3 metros. Ponemos una barra de 60 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 45 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.



$$\frac{h}{0{,}6} = \frac{3}{0{,}45} \quad \rightarrow \quad h = \frac{3.0{,}6}{0.45} \quad \rightarrow \quad h = 4m$$

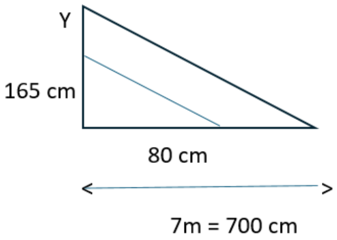


Aplicamos Pitágoras para hallar la longitud del cable

$$l^2 = 4^2 + 3^2 \quad \rightarrow \quad L = \sqrt{16 - 9} \quad L = 5$$

El cable mide 5 m

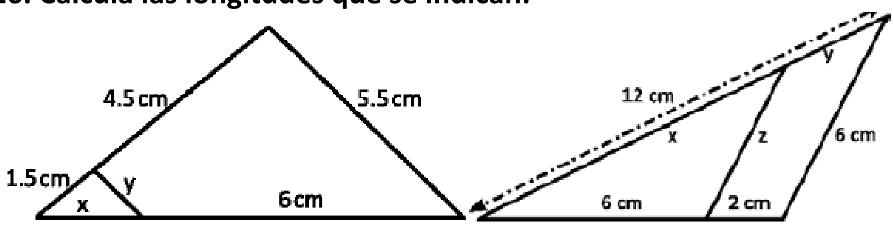
15. María mide 165 cm. Su sombra mide 80 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7 m. ¿Cuánto mide el edificio?



$\frac{700}{80} = \frac{y}{165}$, $700 \cdot 165 = 80y$, $115500 = 80\,y$

$\frac{115500}{80} = y$, $y = 1443{,}75\ cm = 14{,}44\ m$

16. Calcula las longitudes que se indican:



a) $\frac{5{,}5}{y} = \frac{6}{1{,}5} \rightarrow y = \frac{5{,}5 \cdot 1{,}5}{6} = 1{,}3$

$y =$

$\frac{1{,}5}{x} = \frac{4{,}5}{6} \rightarrow x = \frac{6 \cdot 1{,}5}{4{,}5} = 2$ $\qquad y = 1{,}3$ $\qquad x = 2$

b) $\frac{8}{6} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9$

$\frac{9}{6} = \frac{y}{2} \rightarrow y = \frac{9 \cdot 2}{6} = 3$ $\qquad x = 9$ $\qquad y = 3$

17. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 9 *cm*. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico. ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?

$\mathrm{d} = 9\mathrm{cm}$ $\qquad \mathrm{r} = 4{,}5\ \mathrm{cm}$ $\qquad \mathrm{d} = 3\mathrm{cm}$ $\qquad \mathrm{r} = 1{,}5\ \mathrm{cm}$

$\mathrm{V} = \frac{4}{3}\,\pi \cdot \mathrm{r}^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14.\,4{,}5^3 = 381\ \mathrm{cm}^3$ $\qquad \mathrm{V} = \frac{4}{3} \cdot\ \pi.\mathrm{r}^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.14 \cdot (1{,}9)^3 = 14{,}3\ \mathrm{cm}^3$

$\frac{381}{14{,}3} = 26.64$, es la razón de proporcionalidad

18. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 3 € y 4 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 *cm*, 25 *cm* y 40 *cm*, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

d = 15 cm d = 25 cm d = 40 c
r = 7,5 cm r = 12 cm r = 20 cm

$A = \pi . r^2 = 3{,}14 \cdot 7{,}5^2 = 176{,}6 \text{ cm}^2$ $A = \pi r^2 = 3.14 \cdot 12{,}5^2 = = 490{,}6 \text{cm}^2$ $A = \pi r^2 = 3.14 \cdot 20^2 = = 1256 \text{cm}^2$

$\frac{176{,}6}{1E} = 176{,}6$ $\frac{490{,}6}{3} = 163{,}6$ $\frac{1256}{4} = 314$

Al dividir el área de cada pizza por su respectivo precio podemos comprobar como la de 4€ se obtiene el mayor valor, por tanto al ser más cantidad podemos afirmar y la pizza de 4€ es la que sale más barata, seguida de la que cuesta 1€ y por último la de 3€.

19. Estamos diseñando una maqueta para un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura. Queremos que la capacidad de la maqueta sea de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?

Sabemos que en los volúmenes la relación es el cubo de la razón. El volumen es 1.000, la razón de proporcionalidad será $\sqrt[3]{1.000} = 10$

$Como\ mide\ 5m\ de\ altura, tendremos\ \frac{5}{10} = 0{,}5$ Por tanto la maqueta medirá 0,5m

20. La maqueta que ves al margen de una pirámide escalonada babilónica mide de altura medio metro, la razón de proporcionalidad es *k* = 100. ¿Cuánto mide la pirámide real?

Medida de la maqueta 0,5m, K = 100

En la realidad medirá 0,5 · 100 = 50m de altura.

21. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
26 cm	
	11 km
0,05 m	

Si cada cm del dibujo se corresponde con 1000 cm de la realidad:

Dibujo	Medida real
26 cm	*26000 cm = 260 m*
1100 cm = 11 m	11 km = *1100000 cm*
0,05 m	*5000 cm = 50 m*

26 cm · 1000 = 26.000 cm = 260m

11 km : 1000 = 0,011 km = 11m

0,05m · 1000 = 50m

22. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m	
7 cm	0,7 hm	
4 cm	20 km	

Dividimos la medida real entre la del dibujo:

Dibujo	Medida real	Escala
1,4 cm	700 m = *70000 cm*	*50000*
7 cm	0,7 hm = *70000 cm*	*10000*
4 cm	20 km = *2000000 cm*	*500000*

23. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

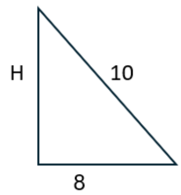
Por ejemplo en los mapas, las maquetas, los planos, cuadros.
Para realizar el plano de una casa
Un mapa cartográfico para guiarnos por el mar
Para la construcción de la maqueta de la Torre Eiffel

24. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 2,7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

350 km = 35 000 000 cm / 2,7 cm = 13 000 000
Cada cm del mapa corresponde con 13 000 000 cm de la realidad, es decir, con 130 km
Madrid – Valencia = 350 km
En el mapa = 2,7 cm
350 km = 35000000
35000000 : 2,7 = 12962962 = 13000000 cm
Por tanto 130 km

2. PERÍMETROS Y ÁREAS DE POLÍGONOS

25. La base de un triángulo rectángulo mide 8 cm. Si su hipotenusa mide 10 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

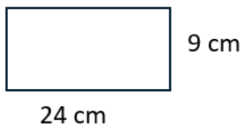


$$10^2 = 8^2 + h^2$$

$$h = \sqrt{100-64} = 6\ cm$$

17 = $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24\ cm^2$

26. Las baldosas de la figura miden 24 cm de largo y 9 cm de ancho. ¿Qué área ocupa cada una de las baldosas?



A = 24 · 9 = 126 cm^2 será el área de cada baldosa

27. Mide la base y la altura de tu mesa. ¿De qué figura se trata? ¿Cuánto mide su área?

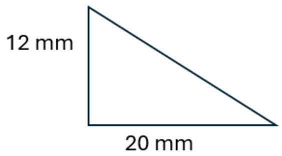
La mesa tiene 45 cm de altura y 30 cm de ancho
17 = 45 · 30 = 1650 cm^2

28. Estas molduras miden 180 cm de ancho y 293 cm de alto. ¿Cuál es el área encerrada?

17 = 293 · 180 = 52740 cm^2

29. Cada uno de los triángulos de la figura tienen una base de 20 mm y una altura de 12 mm. ¿Cuánto vale el área de cada triángulo? Si en total hay 180 triángulos, ¿qué área ocupan en total?

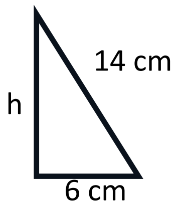
Como son triángulos rectángulos



$$Área = 20 \cdot 12 = 240\ mm^2$$

$$Área\ \ total = 240 \cdot 180 = 43200\ mm^2\ \ ocupa\ en\ total$$

30. La base de un triángulo rectángulo mide 6 cm. Si su hipotenusa mide 14 cm, ¿cuál es el área de este triángulo rectángulo? (Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto. Como los catetos son ortogonales, uno es la base y el otro, la altura)

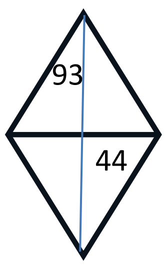


$$14^2 = h^2 + 6^2$$

$$h = \sqrt{196 - 36} = 12{,}6\ cm$$

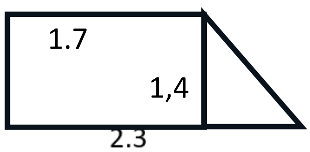
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 6}{2} = 37{,}8\ cm^2$$

31. En una cometa con forma de rombo, sus diagonales miden 93 y 44 cm. ¿Cuánto mide el área de la cometa?



$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{93 \cdot 44}{2} = 2046\ cm^2$$

32. Un trapecista está realizando acrobacias sobre un trapecio de bases 2,3 y 1,7 m y altura 1,4 m. ¿Cuánto mide el área del trapecio que usa el trapecista?

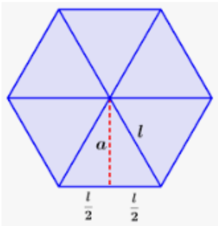


$$A = \frac{(B+b) \cdot h}{2} = \frac{(2{,}3 + 1{,}7)\ 44}{2} = 2{,}8\ m^2$$

33. Calcula el área de un romboide de 24 cm de base y 21 cm de altura. Si doblamos las medidas de la base y la altura, ¿cuál es el área del nuevo romboide?

$$A = b \cdot h = 24 \cdot 21 = 504\ cm^2$$
$$24 \cdot 2 = 48\ cm$$
$$21 \cdot 2 = 42\ cm$$
$$A = 48 \cdot 42 = 2016\ cm^2$$

34. Dado un hexágono regular de lado 4 cm, calcula la longitud de la apotema y determina su área.



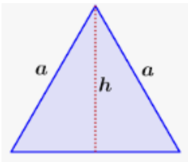
$$A = \frac{P \, . \, a}{2}$$

Sabemos que el hexágono es el único poligono en el que el lado mide igual que el radio de su circunferencia, por tanto tenemos

$$6^2 = a^2 + 3^2 \ , \ a = \sqrt{36-9} = 5{,}2 \ cm \ , \ P = 6 \cdot 6 = 36 \ cm$$

$$A = \frac{P \, . \, a}{2} = \frac{36 \, . \, 5{,}2}{2} = 93{,}6 \ cm^2$$

35. Dado un triángulo equilátero de lado 4 cm, calcula la longitud de la apotema y determina su área.

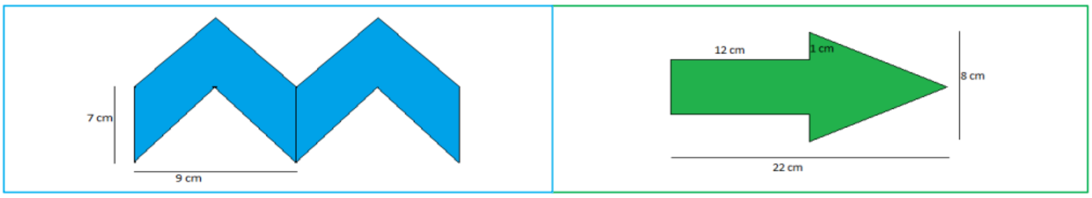


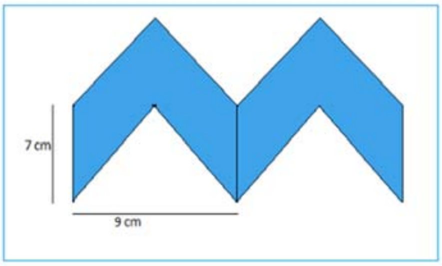
$$4^2 = h^2 + 2^2$$

$$h = \sqrt{16-4} = 3{,}5 \ cm$$

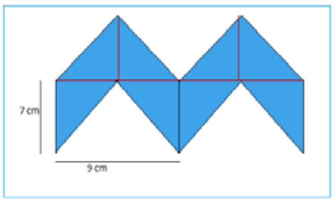
$$A = \frac{b \, . \, a}{2} = \frac{4 \, . \, 3{,}5}{2} = 7 \ cm^2$$

36. Calcula el área de los siguientes polígonos irregulares:

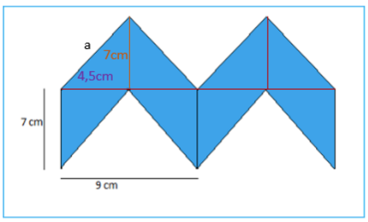




Para hallar el área de esta figura, tenemos que descomponerla en 8 triángulos iguales, tal y como se observa a continuación:

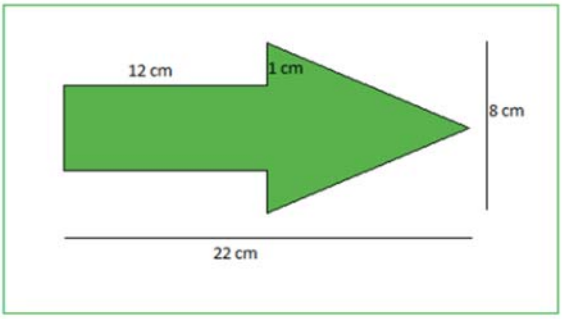


De cada triángulo conocemos dos medidas: 7cm y 4,5cm

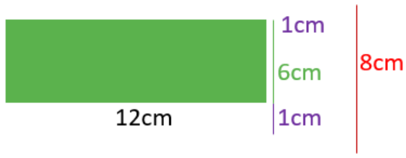


De esta forma, podemos calcular el área de un triángulo y multiplicarlo por 8:

$A = \frac{7cm \cdot 4{,}5cm}{2}$, $A = \frac{31{,}5cm^2}{2}$, $A = 15{,}75cm^2$, $A = 15{,}75cm^2 \cdot 8$, $\boldsymbol{A = 126cm^2}$



Primero realizamos el área del rectángulo que forma el cuerpo de la flecha:



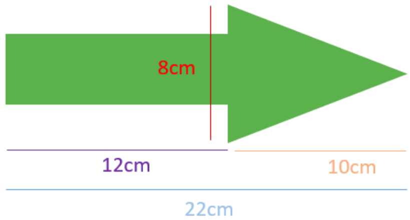
Para averiguar el lado del rectángulo, observamos que la altura total de la figura es de 8cm, como la base de la flecha mide 1cm a cada lado, podemos averiguar la altura del rectángulo:

8cm – 1cm – 1cm = 6cm

El área del rectángulo es: $A = \ base \ \cdot altura$

$A = \ 12cm \ \cdot 6cm$ $A = \ 72cm^2$

Ahora calculamos el área de la punta de la flecha:



Como vemos en la figura anterior, si el largo total de la figura es de 22cm y el del rectángulo es de 12 cm, podemos averiguar la altura del triángulo como:

22cm – 12 cm = 10 cm

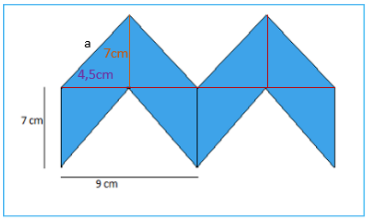
Y así calcularemos el área del triángulo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = \frac{8cm \cdot 10cm}{2}$ $A = \frac{80cm^2}{2}$ $A = 40cm^2$

Con el área del rectángulo y el área del triángulo, podemos calcular el área total sumándolas:

$72cm^2 + 40cm^2 = \boldsymbol{112cm^2}$

37. Calcula el perímetro de los polígonos anteriores.

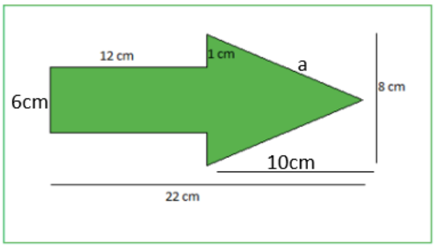


Para averiguar cuánto mide el lado que nos falta, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:

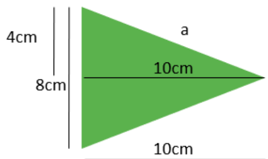
$$a^2 = b^2 + c^2 \ , \ a^2 = 7^2 + 4{,}5^2 \ , \ a^2 = 49 + 20{,}25 \ , \ a^2 = 69{,}25 \ , \ a = \sqrt{69{,}25} \quad a = 8{,}32cm$$

De tal forma, el perímetro será:

$$P = 8{,}32cm \cdot 8 + 7cm \cdot 2 \quad , \quad P = 66{,}56cm + 14cm \qquad \boldsymbol{P = 80{,}56cm}$$



Para hallar el perímetro de esta figura solo nos quedaría hallar el valor de a. Para calcularlo, aplicaremos Pitágoras:



$$a^2 = b^2 + c^2 \ , \ a^2 = 10^2 + 4^2 \ , \ a^2 = 100 + 16 \ , \ a^2 = 116 \ , \ a = \sqrt{116} \ , \ a = 10{,}8cm$$

Por lo tanto, el **perímetro** sería:

P = 12cm + 1cm + 10,8cm + 10,8cm + 1cm + 12cm + 6cm , **P = 53,6cm**

4. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FIGURAS CIRCULARES

38. Busca 3 objetos redondos, por ejemplo un vaso, una taza, un plato, una botella… y utiliza una cinta métrica para medir su longitud. Mide también su diámetro. Calcula su cociente. Anota las aproximaciones de π que hayas obtenido.

Vaso =	Longitud	6 cm ;	diámetro 4 cm
Tara =	"	5 cm ;	" 3,5 cm
Botella =	"	4 cm ;	" 2,7 cm
6 : 4 = 1,5	5 : 3,5 = 1,42		4 : 2,7 = 1,48

39. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 km. ¿Cuánto mide el Ecuador?

$r = 6.379km$

Tendremos que calcular la longitud: $L = 2 \cdot \pi \cdot 6.379km$, $L = 40.080km$

40. Antiguamente se definía un metro como: "la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París". Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

Metro = diez millonésima parte = 10^{-7}, del cuadrante del meridiano que es la cuarta parte de la longitud de la circunferencia, es decir, un cuadrante es 10^7metros. La circunferencia tiene 4 cuadrantes, por lo que la longitud será: $4 \cdot 10^7$

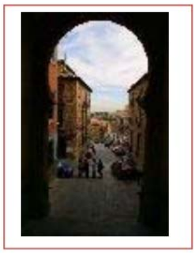
La longitud de una circunferencia tiene por fórmula:

$L = 2 \cdot \pi \cdot r$ o $L = \pi \cdot d$

$4 \cdot 10^7 = \pi \cdot d$, $d = \frac{4 \cdot 10^7}{\pi}$, $d = 12.732.365{,}67m$

El diámetro terrestre medirá $12.732.365{,}67m$

41. Hemos medido la distancia entre los pilares del arco de la figura que es de 5,3 m. ¿Cuál es la longitud del arco?



Si el arco es de medio punto

La distancia entre los pilares es 5,3m, que corresponde al diámetro de la circunferencia, por lo que su radio será:

5,3m : 2 = 2,65m.

$L = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}65m$, $L = 16{,}64m$

Como el arco es media circunferencia: 16,64:2 = 8,32m

42. Un faro gira describiendo un arco de 160°. A una distancia de 5 km, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

Para hallar la longitud aplicamos la fórmula del arco de circunferencia:

$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360°}$; $L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 160°}{360°} = 2{,}79km$

43. El radio de la circunferencia exterior del rosetón de la figura es de 4 m, y la de la siguiente figura es de 3 m.

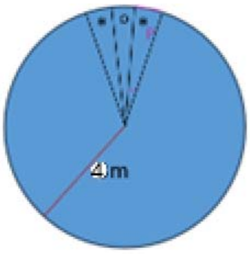
a) Calcula la longitud del arco que hay en la greca exterior entre dos figuras consecutivas.

b) Calcula la longitud de arco que hay en la siguiente greca entre dos figuras consecutivas

c) Calcula el área encerrada por la circunferencia que rodea a la figura interior sabiendo que su radio es de 2 m.

d) Dibuja un esquema en tu cuaderno de dicho rosetón y calcula áreas y longitudes.

a)



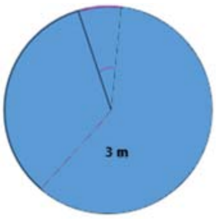
Hay 32 figuras:

$$\frac{360}{32} = 11°15' \rightarrow 11{,}25°$$

$$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 11{,}25°}{360°}$$

$$l = 0{,}785\ m \quad , \quad l = 78{,}5\ cm$$

b)



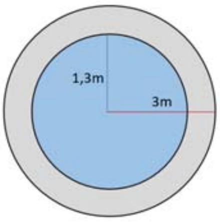
Hay 16 figuras y los ángulos serán: $2 \cdot 11{,}25° = 22{,}25°$

$$l = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 22{,}25°}{360°} \quad , \quad l = 0{,}982\ m \quad , \quad l = 98{,}2\ cm$$

c)

$$A = \pi \cdot r^2 \quad , \quad A = \pi \cdot 2^2 \quad , \quad A = 12{,}56\ m^2$$

d)



Circunferencia mayor: $L = 2 \cdot \pi \cdot r \quad , \quad L = 2 \cdot \pi \cdot 3m \quad , \quad L = 18{,}84m$

$$A = \pi \cdot r^2 \quad , \quad A = \pi \cdot 3m^2 \qquad A = 28,26m^2$$

Circunferencia menor: $L = 2 \cdot \pi \cdot r \quad , \quad L = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}3m \quad , \quad L = 8{,}164m$

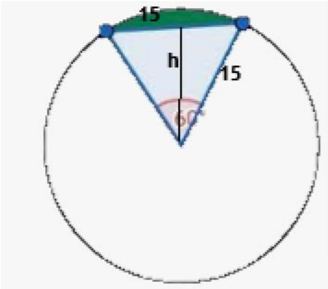
$$A = \pi \cdot r^2 \quad , \quad A = \pi \cdot 1{,}3^2 \quad , \quad A = 5{,}30m^2$$

44. Calcula el área de la corona circular de radios 15 y 7 cm.

$$radios: \ 15\ cm \ \ y \ \ 7\ cm$$

$$A = \pi \ (R^2 - r^2) = 3{,}14 \ (15^2 - 7^2) = 3{,}14\ (225 - 49) = 3{,}14 \cdot 176 = 552,64\ cm^2$$

45. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 15 cm y que forma un ángulo de 60°. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.



$$\text{Área sector circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360^o} = \frac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 60^o}{360^o} = 117{,}81\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área del segmento circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360°} - \frac{b \cdot h}{2}$$

Como tenemos un triángulo equilátero

$$15^2 = h^2 + 7{,}5^2 \quad , \quad h = \sqrt{225 - 56{,}25} = 13$$

$$\text{Área triángulo} = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{15 \cdot 13}{2} = 97{,}5\text{cm}^2$$

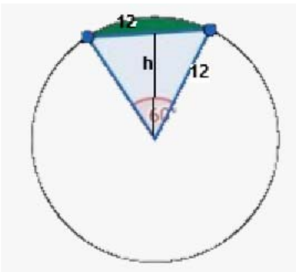
$$\text{Area segmento circular} = 117{,}81\ \text{cm}^2 - 97{,}5\ \text{cm}^2 = 20{,}3\text{cm}^2$$

46. Calcula el área del sector de corona circular de radios 10 cm y 12 cm y que forma un ángulo de 60°

$$r = 10\ cm \qquad R = 12\ cm \qquad n = 60°$$

$$A = \frac{\pi\,.\,(R^2 - r^2)\,.\,n}{360°} = \frac{3.14 \cdot (12^2 - 10^2) \cdot 60°}{360°} = 23\ cm^2$$

47. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 12 cm y que forma un ángulo de 60°. Observa que para calcular la altura del triángulo necesitas usar el Teorema de Pitágoras.



$$\text{Área sector circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360^o} = \frac{3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 60^o}{360^o} = 75{,}36\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área del segmento circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360°} - \frac{b \cdot h}{2}$$

Como tenemos un triángulo equilátero

$$12^2 = h^2 + 6^2 \quad , \quad h = \sqrt{144 - 36} = 10{,}39$$

$$\text{Área triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 10{,}39}{2} = 62{,}34\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área segmento circular} = 75{,}36\ \text{cm}^2 - 62{,}34\ \text{cm}^2 = 13{,}06\text{cm}^2$$

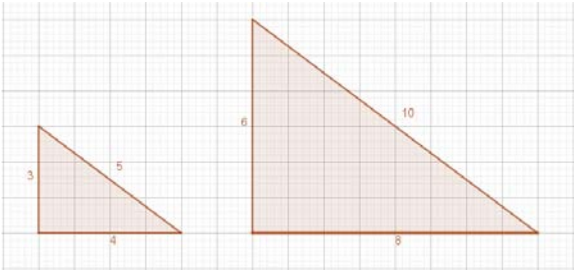
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

TEOREMA DE PITÁGORAS

1. ¿Es posible construir un triángulo rectángulo de 10 cm y 6 cm de medida de sus catetos y 15 cm de hipotenusa? Razona tu respuesta

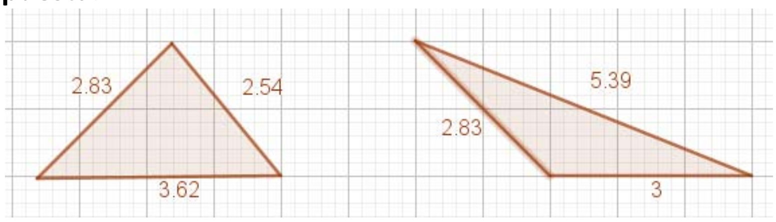
$15^2 = 10^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad 225 = 100 + 36 \quad \rightarrow \quad 225 \neq 136$ No se puede construir

2. Dibuja en papel cuadriculado en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 y 4 cuadritos. Dibuja luego otro triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 cuadritos. Mide las dos hipotenusas y anota los resultados. ¿Es la medida de la segunda hipotenusa doble que la de la primera? Razona la respuesta. Calcula las áreas formadas por los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa.



La primera mide 5 y la segunda 10, luego mide el doble. Las áreas miden 9, 16, 25 y 36, 64 y 100.

3. Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.



Considerando como catetos los lados menores:

$$3{,}62^2 \neq 2{,}83^2 + 2{,}54^2 \quad ; \quad 5{,}39^2 \neq 3^2 + 2{,}83^2$$

4. ¿Cuánto mide la diagonal de un rectángulo de dimensiones 8,2 cm y 6,9 cm?

$$a^2 = 8{,}2^2 + 6{,}9^2 \quad ; \quad a = \sqrt{67{,}24 + 47{,}61} = 10{,}71cm$$

5. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
a) 16 cm y 12 cm b) 40 m y 30 m c) 5 dm y 9,4 dm d) 2,9 km y 6,3 km.

a) $a^2 = 16^2 + 12^2 \quad ; \quad a = \sqrt{256 + 144} = 20cm$

b) $a^2 = 40^2 + 30^2 \quad ; \quad a = \sqrt{1600 + 900} = 50m$

c) $a^2 = 5^2 + 9{,}4^2 \quad ; \quad a = \sqrt{25 + 88{,}36} = 10{,}6dm$

d) $a^2 = 2{,}9^2 + 6{,}3^2 \quad ; \quad a = \sqrt{8{,}41 + 39{,}69} = 6{,}9km$

6. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto: a) 25 cm y 15 cm b) 35 m y 21 m c) 42 dm y 25 dm d) 6,1 km y 4,2 km

a) $25^2 = b^2 + 15^2 \quad ; \quad b = \sqrt{625 - 225} = 20cm$
b) $35^2 = b^2 + 21^2 \quad ; \quad b = \sqrt{1225 - 441} = 28m$
c) $42^2 = b^2 + 25^2 \quad ; \quad b = \sqrt{1764 - 625} = 33, dm$
d) $6{,}1^2 = b^2 + 4{,}2^2 \quad ; \quad b = \sqrt{37{,}21 - 17{,}64} = 4{,}4km$

7. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 8 m.

$a^2 = 8^2 + 8^2 \quad ; \quad a = \sqrt{64 + 64} = 11{,}3m$

8. Calcula la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm

$a^2 = 12^2 + 5^2 \quad ; \quad a = \sqrt{144 + 25} = 13cm$

9. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 6 cm y la hipotenusa de 10 cm. ¿Cuál es su perímetro? ¿Y su área?

$10^2 = b^2 + 6^2 \quad ; \quad b = \sqrt{100 - 36} = 8cm$
Perímetro = 10 + 8 + 6 = 24cm
Área = (6 · 8)/2 = 24 cm^2

2. SEMEJANZA

10. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:
a) Un ángulo de 30° y otro de 20°. Un ángulo de 120° y otro de 20°.
b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 80°. Triángulo isósceles con un ángulo igual de 50°.
c) A = 40°, b = 8 cm, c = 12 cm. A'= 40°, b' = 4 cm, c' = 6 cm
d) a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. a' = 12 cm, b' = 16 cm, c' = 24 cm

a) 180° - 30° - 20° = 130° ; 180° - 120°- 20° = 40° , no son semejantes
b) 180° - *80°* = 100°, 100°/2 = *50°* ; *50°* + 50° = 100° , 180° - 100° = *80°* , sí son semejantes
c) Tenemos 2 lados y el ángulo comprendido, vemos si los lados son proporcionales $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$, sí son semejantes
d) Todos los lados han de ser proporcionales $\frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{24}{6}$, sí son semejantes

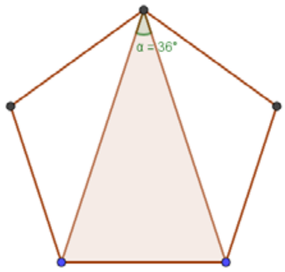
11. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:
a) a = 15 cm, b = 9 cm, c = 12 cm. a' = 10 cm, b' = 4 cm, ¿c'?
b) A = 50°, b = 3 cm, c = 7 cm. A' = 50°, b' = 18 cm, ¿c'?

a) $\frac{15}{10} = \frac{9}{4} = \frac{12}{c\prime}$, no existe ningún valor para c' que los haga semejantes, pues ya $4 \cdot 15 \neq 9 \cdot 10$
b) $\frac{18}{3} = \frac{c\prime}{7} \quad \rightarrow \quad 7 \cdot 18 = 3 \cdot c' \quad \rightarrow \quad c' = \frac{126}{3} = 42$

12. Las longitudes de los lados de un triángulo son 12 cm, 14 cm y 14 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 80 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

Como 12 + 14 + 14 = 40, la mitad del perímetro del triángulo semejante, éste debe medir 24, 28 y 28.

13. Dibuja en tu cuaderno un pentágono regular. Traza sus diagonales. El triángulo formado por un lado del pentágono y las dos diagonales del vértice opuesto se denomina triángulo áureo, pues al dividir el lado mayor entre el menor se obtiene el número de oro, ¿cuánto miden sus ángulos? Busca en la figura que has trazado otros triángulos áureos. ¿Cuál es la relación de proporcionalidad?



Al dibujar las diagonales tenemos 3 triángulos 3·180° = 540°

540°/5 = 108°

Como está dividido en 3 partes, 108°/3 = 36°

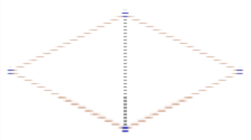
180° - 36° = 144°

Como el triángulo es isósceles, 144°/2 = 72°

Los ángulos miden: 72° , 72° y 36°

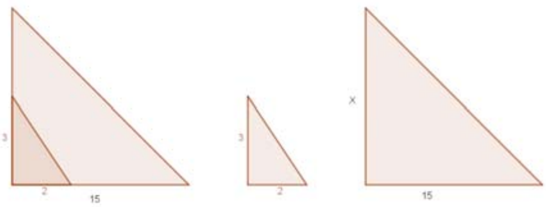
La razón de proporcionalidad, como dice el enunciado, es el número de oro: Φ = 1,618…

14. ¿Cuánto es la suma de los ángulos interiores de un rombo?



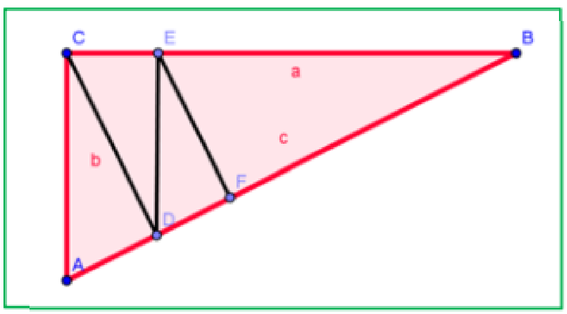
Como tenemos 2 triángulos cuya suma de los ángulos de cada triángulo es 180°, la suma de los ángulos del rombo es 2·180° = 360°

15. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?



$$\frac{3}{2}=\frac{x}{15} \rightarrow x=\frac{3\cdot 15}{2}=22{,}5m$$

16. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo ABC, de lados a = 60, b = 45 y c = 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores ACD, CDE, DEF y EFB, y el escriba calcula la longitud del lado AD como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo ABC y del triángulo ACD. Determina la longitud de los segmentos CD, DE y EF.



Sí, utiliza la semejanza de triángulos, el triángulo grande ABC es semejante al triángulo ACD, pues son triángulos rectángulos con un ángulo distinto de recto, común.
Por lo que AD/AC = AC/AB , AD = 45 · 45/75 = 27 u. AD = 27u.

Área ABC = AC · CB/2 = 1350 u^2;

$AC^2=AD^2+CD^2 \;\rightarrow\; 45^2=27^2+CD^2 \;\rightarrow\; CD=\sqrt{2025-729}=36$, CD = 36 u.

Área ACD = CD · AD/2 = 36 · 27/2 = 486 u^2.

Como AB = 75, y AD = 27, DB = 75 – 27 = 48,

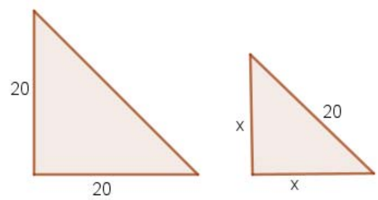
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{ED} \quad \rightarrow \quad ED = \frac{AC \cdot DB}{AB} = \frac{45 \cdot 48}{75} = 28{,}8$$

$$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB} \quad \rightarrow \quad EB = \frac{DB \cdot CB}{AB} = \frac{48 \cdot 60}{75} = 38{,}4$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EF} \quad \rightarrow \quad EF = \frac{AC \cdot EB}{AB} = \frac{45 \cdot 38{,}4}{75} = 23{,}04$$

CD = 36u; DE = 28,8u; EF = 23,04u.

17. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 20 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?



Área triángulo mayor = 20 · 20 / 2 = 200 cm^2

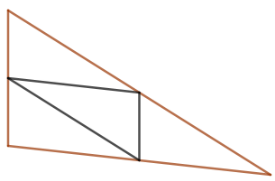
$20^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 400 = 2x^2 \rightarrow x = \sqrt{200} = 14{,}14$

Área triángulo menor = $\sqrt{200} \cdot \sqrt{200}$/ 2 = 100 cm^2

18. El mapa a escala 1:5000000 de un pueblo tiene un área de 700 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?

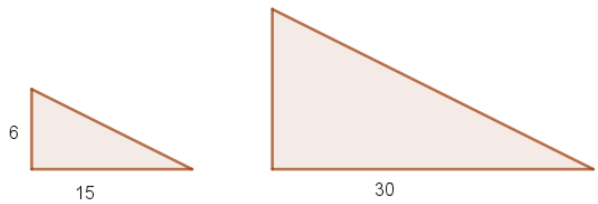
Superficie = 700 · 5 000 000 = 3 500 000 000 cm^2 = 3 500 km^2

19. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?



Son semejantes. Cada lado es la mitad del triángulo inicial, luego el perímetro es la mitad del triángulo inicial y el área mide la cuarta parte.

20. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 6 y 15 cm; y es semejante a otro de base 30 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.



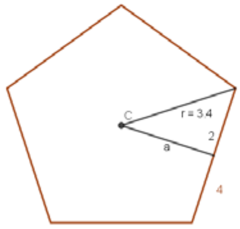
Área triángulo pequeño = 15 · 6 / 2 = 45 cm^2

Altura nuevo triángulo = 2 · 6 = 12 cm

Área triángulo nuevo = 30 · 12 / 2 = 180 cm^2

También como el lado es el doble, el área será $2^2 \cdot 45$ = 180 cm^2

21. Calcular el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 3,4 cm de radio.



$$3{,}4^2 = a^2 + 2^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{11{,}56 - 4} = 2{,}7 \text{ cm}$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2{,}7}{2} = 27{,}5 \text{ cm}^2$$

22. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
a) 4 cm y 3 cm b) 8 m y 6 m c) 3 dm y 7 dm d) 27,3 km y 35,8 km.

a) $a^2 = 4^2 + 3^2 \;;\; a = \sqrt{16 + 9} = 5cm$

b) $a^2 = 8^2 + 6^2 \;;\; a = \sqrt{64 + 36} = 10m$

c) $a^2 = 7^2 + 3^2 \;;\; a = \sqrt{49 + 9} = 7{,}62dm$

d) $a^2 = 35{,}8^2 + 27{,}3^2 \;;\; a = \sqrt{1281{,}64 + 745{,}29} = 45{,}02km$

23. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto: a) 5 cm y 3 cm b) 10 m y 6 m c) 25 dm y 10 dm d) 34,7 km y 12,5 km

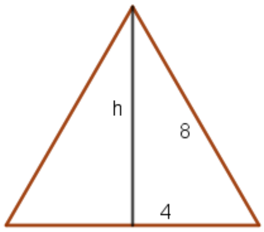
a) $5^2 = b^2 + 3^2 \;;\; b = \sqrt{25 - 9} = 4cm$

b) $10^2 = b^2 + 6^2 \;;\; b = \sqrt{100 - 36} = 8m$

c) $25^2 = b^2 + 10^2 \;;\; b = \sqrt{625 - 100} = 22{,}91dm$

d) $34{,}7^2 = b^2 + 12{,}5^2 \;;\; b = \sqrt{1204{,}09 - 156{,}25} = 32{,}37km$

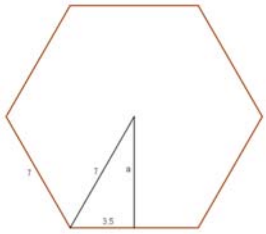
24. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 m. Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la altura.



$$8^2 = h^2 + 4^2 \;\rightarrow\; h = \sqrt{64 - 16} = 6{,}9 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6{,}9}{2} = 27{,}7 \text{ cm}^2$$

25. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm. Ayuda: Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular su apotema.

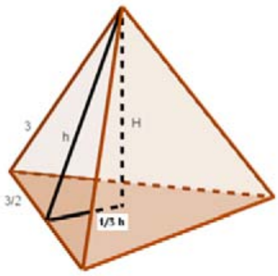


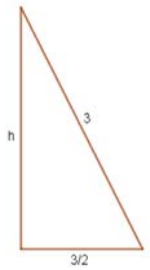
En los hexágonos el radio es igual al lado

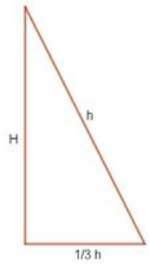
$$7^2 = a^2 + 3{,}5^2 \;\rightarrow\; a = \sqrt{49 - 12{,}25} = 6{,}06 \text{ cm}$$

$$A = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6{,}06}{2} = 127{,}26 \text{ cm}^2$$

26. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 3 dm.







El volumen del tetraedro es:

$$V = \frac{1}{3} área\ base \cdot H$$

Como la base es un triángulo

$$área\ base = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot h}{2}$$

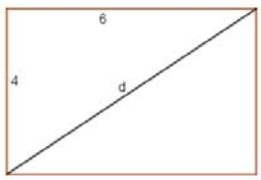
Calculamos h: $3^2 = h^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{9 - 2{,}25} = 2{,}6$

Luego $área\ base = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 3{,}9$

Calculamos H: $h^2 = H^2 + \left(\frac{1}{3}h\right)^2 \rightarrow 2{,}6^2 = H^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 2{,}6\right)^2 \rightarrow H = \sqrt{6{,}76 - 0{,}75} = 2{,}45$

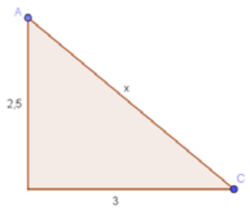
De donde $V = \frac{1}{3} área\ base \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 3{,}9 \cdot 2{,}45 = 3{,}18$ dm³

27. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 6 cm y altura 4 cm.



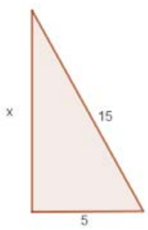
$$d^2 = 6^2 + 4^2 \rightarrow d = \sqrt{36 + 16} = 7{,}21 \quad \text{cm}^2$$

28. Para sostener un árbol atas una cuerda a una altura de 2,5 m, y la sujetas al suelo a una distancia de 3 m. ¿Qué cantidad de cuerda necesitas?



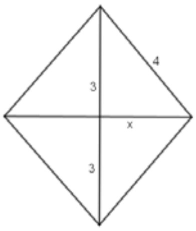
$$x^2 = 3^2 + 2{,}5^2 \rightarrow x = \sqrt{9 + 6{,}25} = 3{,}91m$$

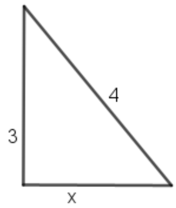
29. Si una cometa tiene una cuerda de 15 m de larga y está sobre un farol que dista 5 m de Javier, ¿a qué altura del suelo está la cometa?



$$15^2 = x^2 + 5^2 \rightarrow x = \sqrt{225 - 25} = 14{,}14\ m$$

30. Calcula el área de un rombo de 4 cm de lado y cuya diagonal mayor mide 6 cm.





$$\acute{A}rea = \frac{D \cdot d}{2}$$

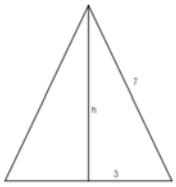
D = 6 , d = 2x

$$4^2 = x^2 + 3^2 \rightarrow x = \sqrt{16-9} = 2{,}65$$

d = 2 · 2,65 = 5,3

$$\acute{A}rea = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{6 \cdot 5{,}3}{2} = 15{,}9 \text{ cm}^2$$

31. Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 cm y su perímetro mide 20 cm

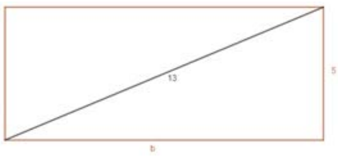


Perímetro = 20 = 7 + 7 + b , b = 6 cm

$$7^2 = h^2 + 3^2 \rightarrow h = \sqrt{49-9} = 6{,}32 \text{ cm}$$

$$\acute{A}rea = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 6{,}32}{2} = 18{,}96 \text{ cm}^2$$

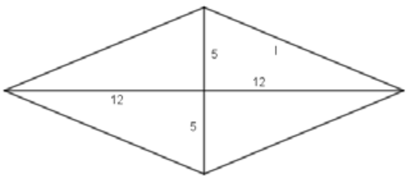
32. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuya diagonal mide 13 cm y su altura 5 cm?



$$13^2 = b^2 + 5^2 \rightarrow b = \sqrt{169-25} = 12 \text{ cm}$$

$$\acute{A}rea = b \cdot a = 12 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^2$$

33. Calcula el perímetro de un rombo cuyas diagonales miden 24 y 10 cm respectivamente.

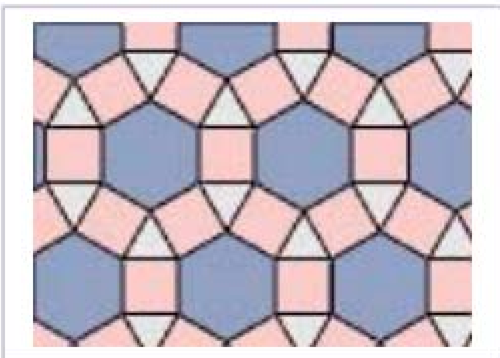


$$l^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow x = \sqrt{144+25} = 13 \text{ cm}$$

Perímetro = 4 · 13 = 52 cm

3. PROBLEMAS

34. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rosas), triángulos (blancos) y hexágonos (grises), todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 5 cm, calcula:



a) El área del cuadrado;

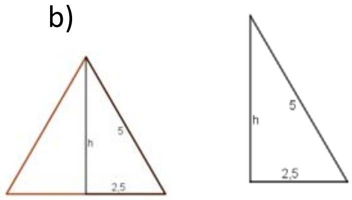
b) El área del triángulo;

c) El área del hexágono.

d) Considera la parte formada por 3 hexágonos, 13 triángulos y 13 cuadrados. Calcula el área total.

a) Área del cuadrado = 5 · 5 = 25 cm^2

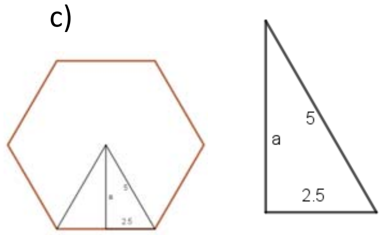
b)



$$5^2 = h^2 + 2{,}5^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{25 - 6{,}25} = 4{,}33 \text{ cm}$$

$$Área = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}8 \text{ cm}^2$$

c)



$$5^2 = a^2 + 2{,}5^2 \quad \rightarrow \quad a = \sqrt{25 - 6{,}25} = 4{,}33 \text{ cm}$$

$$Área = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2$$

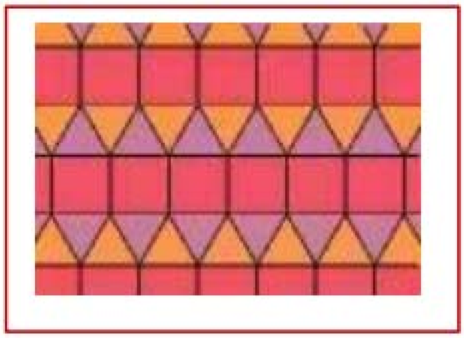
d) Hexágonos: 3 · 64,95 = 194,85
Triángulos: 13 · 10,8 = 140,4
Cuadrados: 13 · 25 = 325
Total: 660,25 cm²

35. Dibuja en tu cuaderno el diseño del mosaico del margen. Observa que está formado por cuadrados (rojos) y triángulos de dos colores, todos ellos de igual lado. Si ese lado mide 7 cm, calcula:

a) El área del cuadrado;

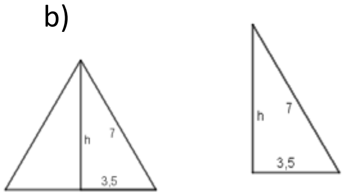
b) El área del triángulo.

c) Considera cuatro franjas del mosaico y relaciona las áreas de los cuadrados con la de los triángulos. ¿Qué proporción aparece? Calcula el área total de esas cuatro franjas.



a) Área del cuadrado = 7 · 7 = 49 cm²

b)

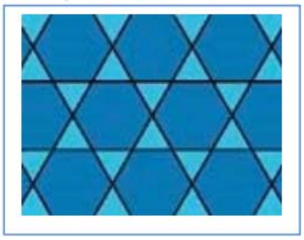


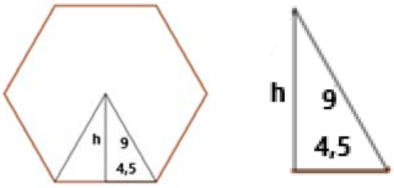
$$7^2 = h^2 + 3{,}5^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{49 - 12{,}25} = 6{,}06 \text{ cm}$$

$$Área = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7 \cdot 6{,}06}{2} = 21{,}21 \text{ cm}^2$$

c) Consideramos que cada franja tiene 6 cuadrados y 12 triángulos.
El área de cuadrados es: 6 · 49 = 294 cm², y la de triángulos: 12 · 21,21 = 254,6 cm².
La proporción es de 294/254,6 = 1,15
El área total de las 4 franjas es: 2 · 294 + 2 · 254,6 = 1097,2 cm².

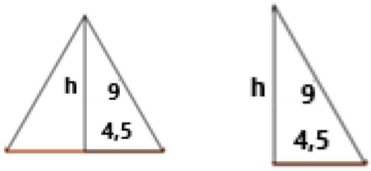
36. Calcula el área de un hexágono de la figura si su lado mide 9 cm. Calcula el área de un triángulo. ¿Qué ocupa mayor área, los hexágonos o los triángulos?





$$9^2 = h^2 + 4{,}5^2 \;\rightarrow\; h = \sqrt{81 - 20{,}25} = 7{,}8 \text{ cm}$$

$$Área = \frac{P \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 9 \cdot 7{,}8}{2} = 210{,}8 \text{ cm}^2$$

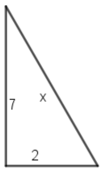


$$9^2 = h^2 + 4{,}5^2 \;\rightarrow\; h = \sqrt{81 - 20{,}25} = 7{,}8 \text{ cm}$$

$$Área = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{9 \cdot 7{,}8}{2} = 35{,}1 \text{ cm}^2$$

Por cada hexágono hay 6 triángulos por lo que ocupan igual área del mosaico.

37. Una escalera debe alcanzar una altura de 7 m, y se separa de la pared una distancia de 2 m, ¿cuál es su longitud?



$$x^2 = 7^2 + 2^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{49 + 4} = 7{,}28 \text{ m}$$

La escalera debe medir 7,28 metros

38. Tenemos dos terrenos de igual perímetro, uno cuadrado y el otro rectangular. El rectangular mide 200 m de largo y 60 m de ancho. Calcula:

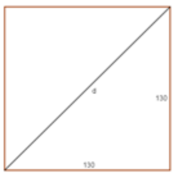
a) La diagonal del terreno cuadrado.

b) La diagonal del rectángulo

c) El área de cada terreno.

d) ¿Cuál tiene mayor superficie?

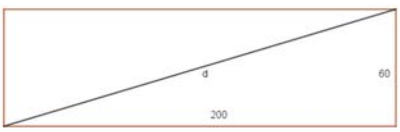
a) Calculamos el lado del cuadrado, como el perímetro del rectángulo es 2 · 200 + 2 · 60 = 520, el lado del cuadrado es 520/4 = 130 m



$$d^2 = 130^2 + 130^2 \;\rightarrow\; d = \sqrt{16900 + 16900} = 183{,}84$$

La diagonal del cuadrado mide 183,84 m

b)



$$d^2 = 200^2 + 60^2 \;\rightarrow\; d = \sqrt{40000 + 3600} = 208{,}8$$

La diagonal del rectángulo mide 208,8 m

c) Área del cuadrado: $130 \cdot 130 = 16\,900$ m^2
Área del rectángulo: $200 \cdot 60 = 12\,000$ m^2

d) Podemos observar que el cuadrado tiene mayor superficie, luego entre un cuadrado y un rectángulo de igual perímetro, con el cuadrado tenemos mayor superficie

39. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio.
a) Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde.
b) ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso?
c) ¿Cuál es menor?
d) Tenemos 50 cm de reborde, y queremos aprovecharlo todo, ¿qué cuadrado podemos diseñar y qué posavasos circular?
e) Calcula el área de cada uno

a) Área del cuadrado: $12 \cdot 12 = 144$ cm^2
Área del círculo: $3{,}14 \cdot 7^2 = 253{,}86$ cm^2

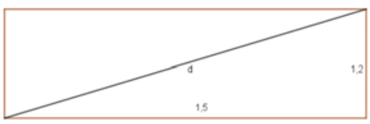
b) Nos pide el perímetro.
Perímetro cuadrado: $4 \cdot 12 = 48$ cm
Perímetro círculo: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 7 = 43{,}96$ cm

c) Es menor la del círculo, el posavasos circular tiene mayor superficie y menor reborde

d) El lado del cuadrado debe medir $50/4 = 12{,}5$ cm, y el radio del círculo, $50/2 \cdot 3{,}14 = 7{,}96$ cm

e) Área del cuadrado: $12{,}5 \cdot 12{,}5 = 156{,}25$ cm^2
Área del círculo: $3{,}14 \cdot 7{,}96^2 = 198{,}96$ cm^2

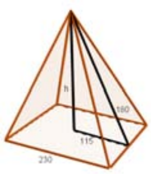
40. Un constructor está rehabilitando un edificio. Para las ventanas rectangulares que miden 1,2 m de ancho y 1,5 m de alto, corta travesaños para poner en su diagonal. ¿Cuánto deben medir?

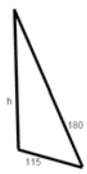


$$d^2 = 1{,}5^2 + 1{,}2^2 \;\rightarrow\; d = \sqrt{2{,}25 + 1{,}44} = 1{,}92$$

Los travesaños deben medir 1,92 m

41. La pirámide de Keops mide unos 230 metros de lado. Podemos, con dificultad, medir la altura de una cara, estimamos que mide unos 180 m, pero, ¿cómo conocer la altura de la pirámide? ¿Cuánto mide?

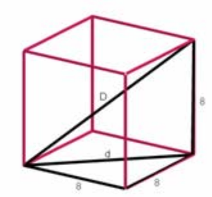


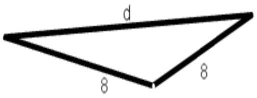


$$180^2 = h^2 + 115^2 \;\rightarrow\; h = \sqrt{32400 - 13225} = 138{,}47 \text{ m}$$

La altura de la pirámide es de unos 139 m

42. Un cubo mide de arista 8 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras la longitud de la diagonal de una cara, y la longitud de la diagonal del cubo.

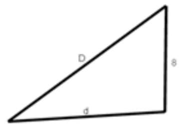




$$d^2 = 8^2 + 8^2 \ \rightarrow$$

$$d = \sqrt{64 + 64} = 11{,}3$$

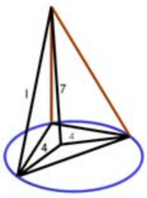
Diagonal de una cara 11,3 m



$$D^2 = 11{,}3^2 + 8^2 \rightarrow D = \sqrt{128 + 64} = 13{,}84$$

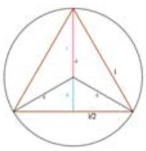
La longitud de la diagonal del cubo es 13,84 m

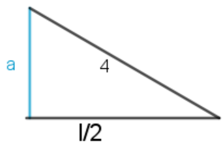
43. Una pirámide triangular regular tiene una altura de 7 cm y el radio de la circunferencia circunscrita a su base es de 4 cm. Calcula utilizando el teorema de Pitágoras:
a) Longitud de una arista.
b) Altura del triángulo de la base.
c) Perímetro de la base
d) Altura de una cara
e) Perímetro de una cara



a) $l^2 = 7^2 + 4^2 \rightarrow$

$\rightarrow l = \sqrt{49 + 16} = 8{,}06$ cm





b) $4^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$ sabemos que $r = \frac{l}{\sqrt{3}} \rightarrow 4 = \frac{l}{\sqrt{3}} \rightarrow l = 4\sqrt{3}$

de donde, $16 = a^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow 16 = a^2 + \frac{16\cdot 3}{4} \rightarrow$

$\rightarrow 16 = a^2 + 12 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

La altura del triángulo de la base mide: 4 + 2 = 6 cm

c) El perímetro = $3 \cdot l$ = $3 \cdot 4\sqrt{3}$ = $12\sqrt{3}$ = 27,78 cm

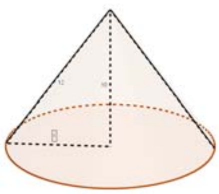
d) $b^2 = 7^2 + 2^2 \rightarrow b = \sqrt{49 + 4} = 7{,}28$

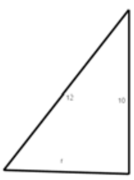
La altura de una cara mide 7,28 cm

e) Perímetro de una cara mide:

8,06 + 8,06 + $4\sqrt{3}$ = 23,05 cm

44. Un cono tiene una altura de 10 cm y la generatriz de 12 cm. ¿Cuánto mide el radio de su base?

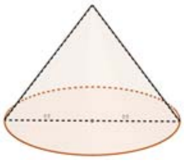




$$12^2 = r^2 + 10^2 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ r = \sqrt{144 - 100} = 6{,}63 \text{ cm}$$

45. En un museo de Berlín se encuentra este friso babilónico. Está hecho utilizando pequeños conos de arcilla. Tenemos conos claros, más rojizos y más grises. El diámetro de la base de cada cono es de 1 cm. Calcula la superficie del rombo (rojizo) exterior, del siguiente rombo claro, del rombo gris…. Haz un diseño de dicho rombo en tu cuaderno así como del mosaico resultante. Si quieres construir un mosaico de un metro de largo, ¿cuántos conos de cada color necesitas?



El área de cada círculo es: 3,14 · 0,5^2 = 0,785 cm^2

Si el cono exterior tiene unos 20 conos de lado, el siguiente 16 y el siguiente 12, entonces
A1 = 20 · 20 · 0,785 = 314 cm^2,
A2 = 16 · 16 · 0,785 = 200,96 cm^2,
A3 = 12 · 12 · 0,785 = 113,04 cm^2.
Así sucesivamente, necesitamos unos 1732 conos.

46. ¡Mira este bonito friso del museo de Berlín! Haz a escala un diseño en tu cuaderno y toma medidas. Si la longitud del friso es de un metro:

a) Calcula la superficie de cada pétalo de la flor.
b) Calcula la superficie de cada trozo de trenza.
c) Calcula la superficie de cada abanico

La longitud es de 1 m = 100 cm, si la anchura del friso de pétalos es de 25 cm, la del friso de abanicos de 30 cm y la anchura del friso de trenzas de 15 cm, entonces,

a) la superficie de un pétalo es aproximadamente de 61,4 cm^2.
b) En la trenza hay 20 trozos, luego la superficie de cada trozo de trenza es de 75 cm^2.
c) En el friso de abanicos hay 18 abanicos, la superficie de un abanico es aproximadamente de 167 cm^2.

47. Dibuja en tu cuaderno un esquema del mosaico del margen. Sabemos que mide de ancho 1,2 m.

a) Calcula el lado de la estrella de 8 puntas.
b) La superficie de dicha estrella.
c) La superficie de la cruz.

La estrella está formada por dos cuadrados cuya diagonal mide 0,6 m = 60 cm, por lo que su lado mide $60^2 = l^2 + l^2 \ \rightarrow l = \sqrt{1800} = 42{,}4$ cm.

a) El lado de la estrella mide 42,4/(2+ 2) = 12,4 cm;

b) La estrella está formada por un cuadrado de lados 42,4cm más 4 triángulos que forman dos cuadrados de lado 12,4 cm. A = 42,4^2 + 2 · 12,4^2 = 2109 cm^2;

c) La cruz está formada por dicho cuadrado menos los mismos dos cuadrados anteriores.
A = 42,4^2 - 2 · 12,4^2 = 1491 cm^2

AUTOEVALUACIÓN

1. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 6 cm mide:
a) 6,32 cm b) 7 cm c) 0,05 m d) 627 mm

$a^2 = 6^2 + 2^2 \rightarrow a = \sqrt{36+4} = 6{,}32\,\text{cm}$

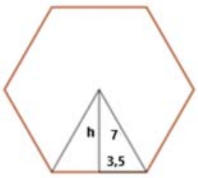
Respuesta: **a) 6,32 cm**

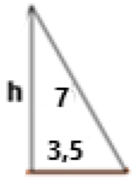
2. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 m y un cateto 7 m, el otro cateto mide:
a) 714 cm b) 7,4 m c) 8 m d) 8925,1 mm

$10^2 = 7^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{100-49} = 7{,}14$ m = 714 cm

Respuesta: **a) 714 cm**

3. El lado de un hexágono regular mide 7 m, entonces su área mide aproximadamente:
a) 4,3 dam² b) 21 m² c) 40 m² d) 1273057 cm²





$7^2 = h^2 + 3{,}5^2 \rightarrow h = \sqrt{49-12{,}25} = 6{,}06$ m

$Área = \frac{P\cdot h}{2} = \frac{6\cdot 7\cdot 6{,}06}{2} = 127{,}26\ \text{m}^2$

127,26 m² = 1272600 cm²

Respuesta**: d) 1273057 cm²**

4. El área de un rectángulo de 10 cm de diagonal y 8 cm de base es:
a) 53 cm² b) 80 cm² c) 48 cm² d) 62 cm²

Calculamos la altura: $10^2 = h^2 + 8^2 \rightarrow h = \sqrt{100-64} = 6$ cm
Área del rectángulo: 6 · 8 = 48 cm²

Respuesta: **c) 48 cm²**

5. El rombo de diagonales 54 dm y 72 dm tiene aproximadamente como perímetro:
a) 45 dm b) 181 dm c) 126 dm d) 200 m

Calculamos el lado que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 27 y 36 dm
$l^2 = 27^2 + 36^2 \rightarrow l = \sqrt{1296+729} = 45$ dm
Perímetro = 4 · 45 = 180 dm

Respuesta**: b) 181 dm**

6. El trapecio de bases 7 cm y 5 cm y lado 8 cm, tiene aproximadamente como área:
a) 49 cm² b) 48 cm² c) 50 cm² d) 48,37 cm²

$8^2 = h^2 + 1^2 \rightarrow h = \sqrt{64-1} = 7{,}94$ cm

$Área = \frac{B+b}{2}\cdot h = \frac{7+5}{2}\cdot 7{,}94 = 47{,}64$

Respuesta: **b) 48 cm²**

7. La diagonal de un cuadrado de lado 1 m mide aproximadamente:
a) 3,14 m b) 1,4 m c) 1,26 m d) 1,7 m

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow d = \sqrt{1+1} = 1{,}41$$

Respuesta**: b) 1,4 m**

8. La hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm mide:
a) 6,32 cm b) 5 cm c) 0,052 m d) 62 mm

$$a^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow a = \sqrt{9+16} = 5$$

Respuesta**: b) 5 cm**

9. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 10 m y un cateto 6 m, el otro cateto mide:
a) 87 cm b) 4 m c) 8 m d) 5,1 mm

$$10^2 = b^2 + 6^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{100-36} = 8$$

Respuesta**: b) 8 m**

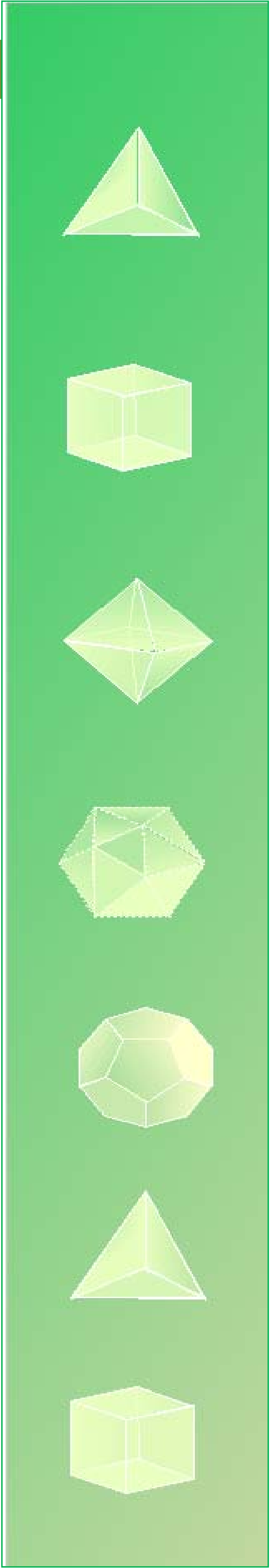
10. El perímetro de un rombo de diagonales 12 cm y 16 cm es:
a) 34 cm b) 70 cm c) 40 cm d) 62 cm

Calculamos el lado que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 dm

$l^2 = 6^2 + 8^2 \rightarrow l = \sqrt{36+64} = 10$ cm

Perímetro = 4 · 10 = 40 cm

Respuesta**: c) 40 cm**



2º ESO

Capítulo 7: Cuerpos geométricos. Volúmenes

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra) Wikipedia e Internet

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL ESPACIO

1. Busca una lata de tomate frito y el trozo de cartón que hay en el interior de un rollo de papel higiénico.

a) ¿Qué forma tienen las bases de la lata?

b) ¿Hay esquinas angulosas en alguno de los objetos?

c) Mete unas tijeras en el cartón del rollo de papel higiénico y corta. ¿Qué figura plana obtienes?

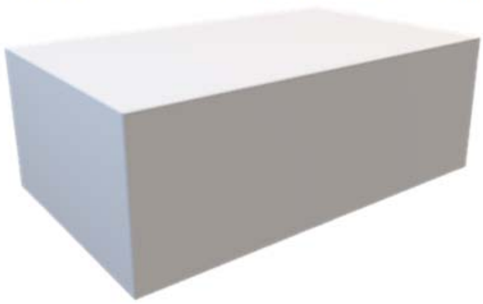
d) Imagina que quieres poner tapa y base al rollo de cartón para que tenga la misma forma que la lata de tomate frito. ¿Qué figura plana debes utilizar?

a) Círculos; b) No; c) Un rectángulo; d) Dos círculos

2. Busca una caja de galletas. Mídela y da el valor de sus tres dimensiones.

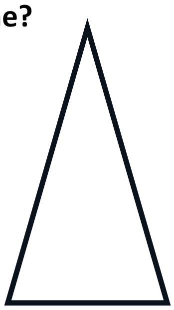
Por ejemplo: Largo: 7cm ; Ancho: 5cm ; Alto: 2cm

3. Dibuja en un papel esa caja de galletas. Es difícil, porque estás representando en algo de dimensión 2 (la hoja) un objeto tridimensional (la caja).



4. Dibuja un balón de fútbol, una lata de conservas y un donut en una hoja de papel.

5. Corta un triángulo isósceles de papel. Pega un hilo a lo largo de su eje de simetría y hazlo girar. ¿Qué figura se obtiene?

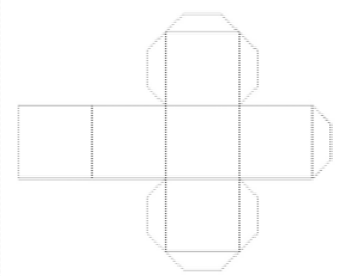


Se obtiene un cono.

6. Para cada uno de los apartados siguientes, escribe en tu cuaderno 5 objetos cotidianos que tengan la forma requerida:
a) esfera; b) cilindro; c) poliedro regular; d) prisma; e) pirámide; f) cono.

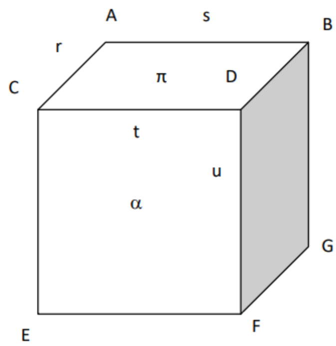
Por ejemplo: a) naranja, b) rollo de papel higiénico, tizas, latas de conserva, c) cubo de Rubik, d) edificio, goma de borrar, e) Pirámide de Egipto, f) gorro de bruja.

7. Aprende a hacer un cubo con papiroflexia



Un ejemplo

8. Indica la recta que pasa por los puntos D y F.
Respuesta: u.



9. Indica el plano que pasa por los puntos C, D y E.
Respuesta: α.

10. Indica el plano que contiene a la recta t y al punto B.
Respuesta: π

11. Indica el plano que contiene a las rectas s y t.
Respuesta: π

12. Indica un plano paralelo al plano de la pizarra.
La pared de enfrente

13. Dibuja en tu cuaderno un croquis de tu aula y señala los planos que sean secantes al plano del techo.
Si nos fijamos en el dibujo de más arriba, los planos secantes al plano del techo serían las paredes:
CDEF , BDFG , ABGH , ACEH

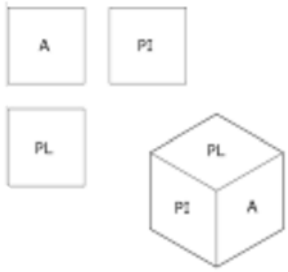
14. Dibuja en tu cuaderno un cubo. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:
a) Tres pares de rectas que sean paralelas. Indica en cada caso sobre qué plano se encuentran
b) Tres pares de rectas que se crucen.
c) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.
Con el cubo de la figura del ejercicio 8:
a) r, t y r(E, F);
b) r y r(E, F); s y R(D, F); t y r(B, G);

c) r y s, se cortan en A y se encuentran en π; t y u, se cortan en D y se encuentran en α; r y t, se cortan en C y se encuentran en π.

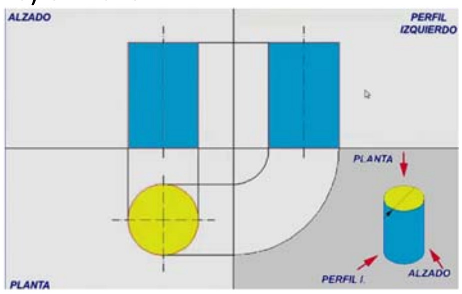
15. Indica las rectas que están contenidas en el plano α. Indica las que son paralelas a dicho plano. Indica las que son secantes señalando el punto de intersección.
Contenidas: t, u, r(C, E), r(E, F);
Paralelas: s y r(B, G);
Secantes: r en C, r(B, D) en D, r(F, G) en F

16. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de:
a) un cubo b) un cilindro c) un cono d) una esfera e) una pirámide

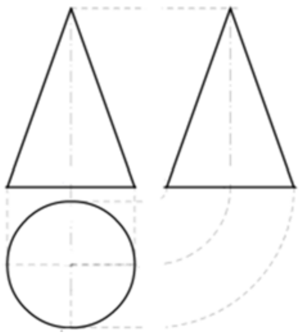
a) cubo:



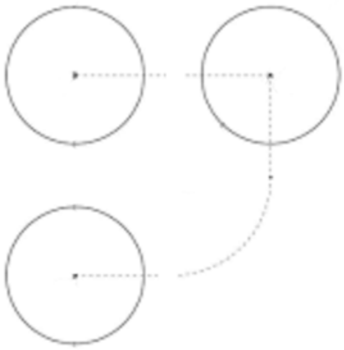
b) cilindro



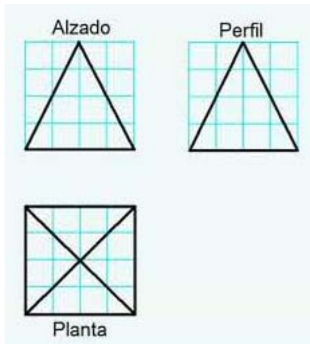
c) cono:



d) esfera

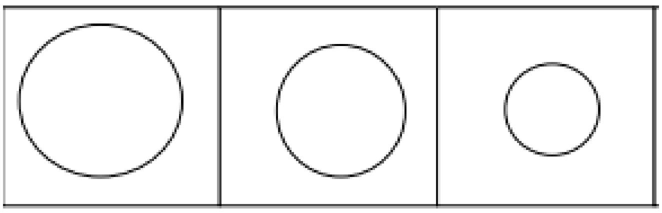


e) pirámide

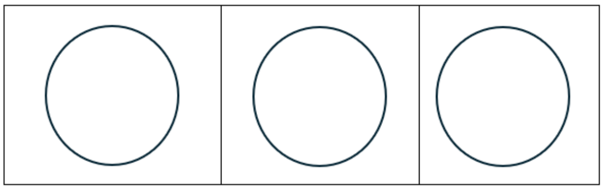


17. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador
b) Un cilindro con cortes paralelos a su base
c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista
d) Un cubo con cortes paralelos a una cara
e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.

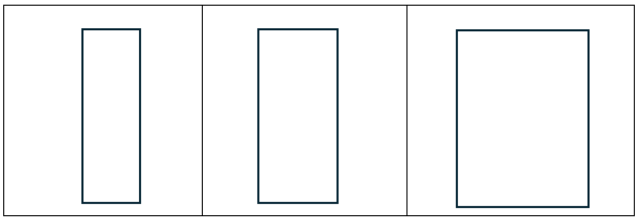
a) Una esfera con cortes paralelos a su ecuador



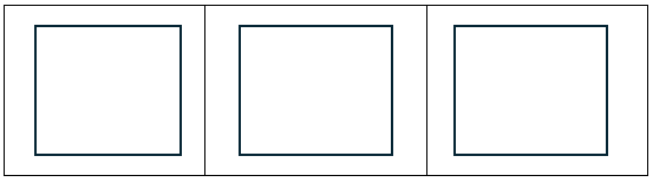
b) Un cilindro con cortes paralelos a su base



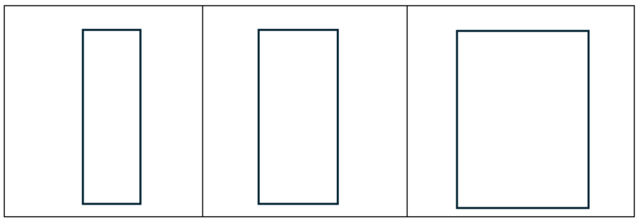
c) Un cilindro con cortes paralelos a una arista



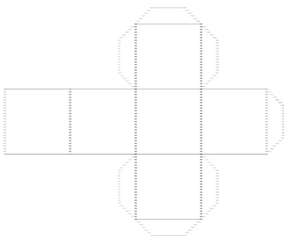
d) Un cubo con cortes paralelos a una cara



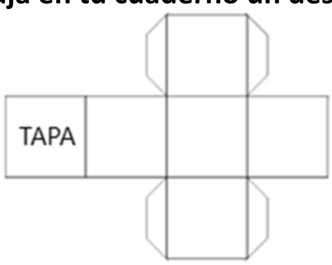
e) Un cubo con cortes paralelos a una arista.



18. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir un cubo. Dibuja las pestañas para pegarlo.

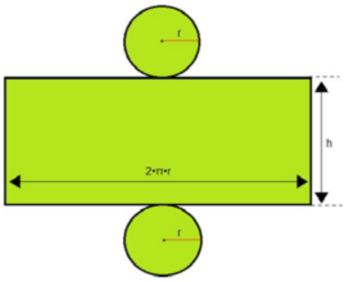


19. Dibuja en tu cuaderno un desarrollo para construir una caja con tapa.

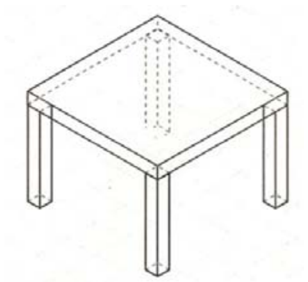


Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra, Wikipedia, Internet.

20. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo de un cilindro.



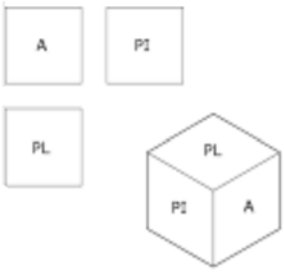
21. Dibuja en tu cuaderno una mesa en perspectiva caballera.



22. Describe un tetraedro diciendo cuántos vértices tiene, cuántas aristas y cuántas caras.

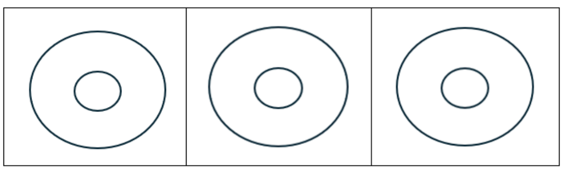
Tiene 4 vértices, 6 aristas y 4 caras.

23. Dibuja en tu cuaderno la planta, el perfil y el alzado de un cubo.



24. Dibuja en tu cuaderno una habitación en perspectiva caballera.

25. Dibuja una tomografía de una botella cortando por planos paralelos a su base.



2. POLIEDROS

26. Haz modelos en cartulina de los cinco poliedros regulares. Puedes hacerlo en equipo con tus compañeros.

Solución manipulativa:

27. Hay poliedros con todas sus caras polígonos regulares que no son poliedros regulares. Describe el poliedro del margen. ¿Por qué no es un poliedro regular?

Todas sus caras son polígonos regulares, pentágonos y hexágonos, pero no es un poliedro regular pues todas sus caras no son iguales.

28. Hay poliedros con todas sus caras iguales que no son poliedros regulares. Como el poliedro formado por 6 rombos que se llama romboedro. Descríbelo. Construye uno con el desarrollo indicado:

Todas sus caras son rombos todos ellos iguales pero el rombo no es un polígono regular, luego el romboedro no es un poliedro regular.

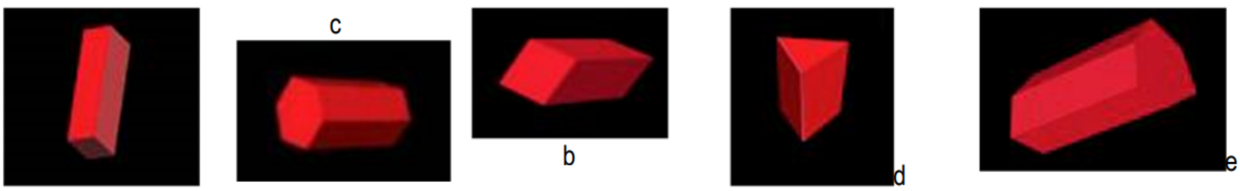
29. En una trama de triángulos dibuja el desarrollo de un poliedro que tenga 6 caras triángulos equiláteros y construye dicho poliedro. Tiene todas sus caras iguales y polígonos regulares. ¿Por qué no es un polígono regular?

Con una trama de triángulos puedes construir, con 4 triángulos un tetraedro regular, con 8 un octaedro (regular) con 20 un icosaedro (regular) pero con 6 también puedes construir un poliedro, con sus 6 caras iguales y triángulos equiláteros, pero no es un poliedro regular pues en unos vértices hay 3 caras y en otros 4. Todos los vértices no son iguales.

30. Hay unas chocolatinas que tienen forma de prisma triangular regular recto. ¿Qué otros prismas regulares puedes construir con unas cuantas de ellas? Construye también prismas que no sean regulares.

Con 2, un prisma de base un rombo, con 6 un prisma hexagonal regular.

31. Clasifica los prismas de la figura en función de que sean regulares o no, rectos u oblicuos y del número de lados de sus bases.



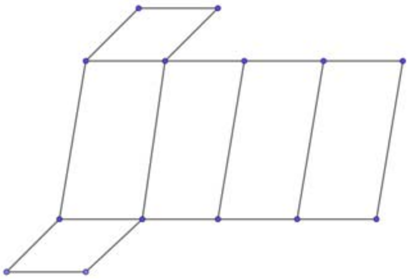
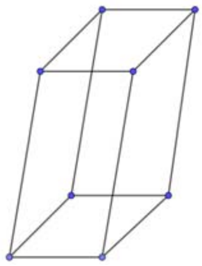
a) Prisma cuadrangular, recto y regular; b) prisma hexagonal, recto y regular;

c) prisma cuadrangular, no recto, y no regular, de base un rombo; d) prisma triangular, recto y regular;

e) prisma hexagonal no regular.

32. A partir del desarrollo de un prisma cuadrangular regular recto, piensa cómo debe ser el desarrollo de un prisma cuadrangular regular oblicuo. ¡Constrúyelo!

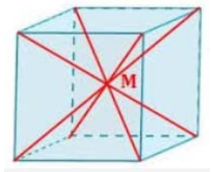
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra, Wikipedia, Internet.

33. Recuerda: Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos de un poliedro. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma regular triangular? ¿Y un prisma regular cuadrangular?

Ninguna, todas son consecutivas;

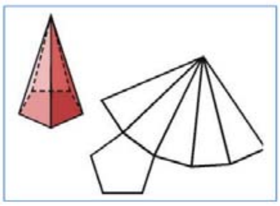
Cuatro.



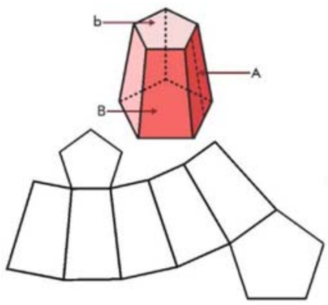
34. Describe un ortoedro, diciendo el número de aristas y vértices, y el número de caras, describiendo su forma. (A veces se le llama caja de zapatos).

Aristas, 12; Vértices, 8; Caras, 6. Todas sus caras son rectángulos.

35. Construye una pirámide pentagonal regular usando un desarrollo como el indicado.

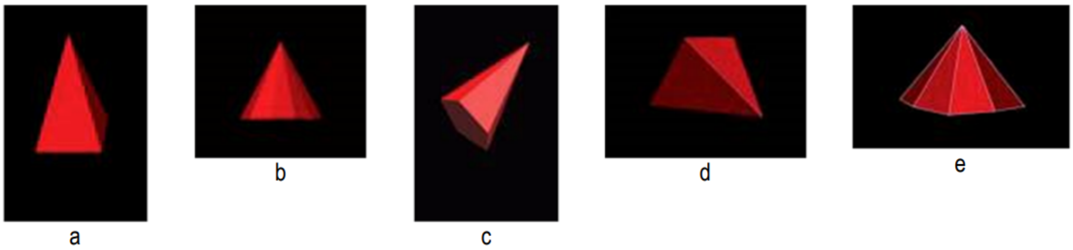


36. Sabiendo cómo es el desarrollo de una pirámide pentagonal regular, y que un tronco de pirámide se obtiene cortando ésta por un plano, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo del tronco de pirámide pentagonal regular.



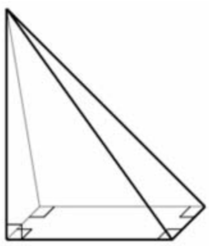
37. Clasifica las pirámides de la figura en función de que sean regulares o no, rectas u oblicuas y del número de lados de su base.

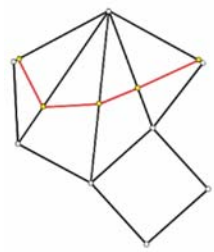
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra, Wikipedia, Internet.



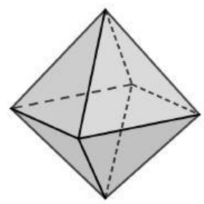
a) Regular, recta, de base cuadrada;
b) Regular, recta, de base hexagonal;
c) No regular, oblicua, de base pentagonal;
d) No regular, oblicua, de base cuadrada;
e) Regular, recta, de base octogonal.

38. A partir del desarrollo de una pirámide cuadrangular regular recta, piensa y dibuja cómo debe ser el desarrollo de una pirámide cuadrangular oblicua. ¡Constrúyela!

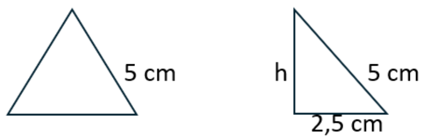




39. Halla la superficie de un octaedro regular de 5 cm de arista.



El octaedro regular está formado por 8 triángulos equiláteros iguales, hallamos el área de uno y multiplicamos por 8.

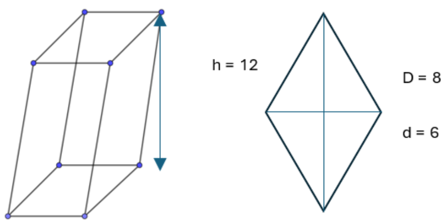


$$5^2 = h^2 + 2{,}5^2 \;\rightarrow\; h = \sqrt{25 - 6{,}25} = 4{,}3cm^2$$

$$A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4{,}3}{2} = 10{,}82$$

Superficie del octógono = 8 · 10,82 = 86,6 cm^2

40. Halla el área de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura mide 12 cm.

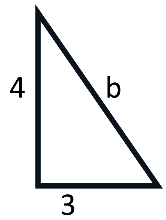


Área total = 2 Área del rombo + 4 Área del rectángulo

Área del rombo = $\frac{D \cdot d}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

Área del rectángulo = base · altura

La base del rectángulo es el lado del rombo, tomamos un triángulo del rombo de catetos 3 y 4

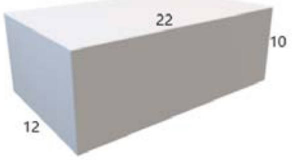


$b^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $b = 5$

Área del rectángulo = 5 · 12 = 60

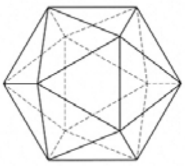
Área total = 2 ·24 + 4 · 60 = 288 cm^2

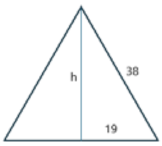
41. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?



Área del ortoedro = 2·(22·10 + 22·12 + 12·10) = 1208 cm^2 de cartón

42. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar un icosaedro regular de 38 cm de arista?





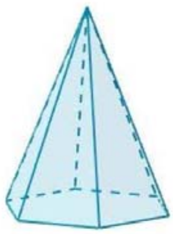
El icosaedro está formado por 20 triángulos equiláteros iguales

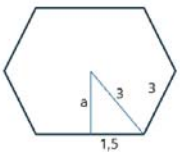
$$38^2 = h^2 + 19^2 \ , \ h = \sqrt{1444 - 361} = 32{,}9$$

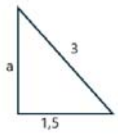
$A_t = \frac{38 \cdot 32{,}9}{2} = 625{,}27$ $A_{total} = 20 \cdot 625{,}27 = 12\,505{,}4$ cm^2

12 505,4 : 10 000 = 1,25 m^2 , 1,25 : 20 = 0,0625 litros

43. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 3 cm y la altura es de 12 cm.







$$Volumen = \frac{1}{3} \cdot área\ base \cdot altura$$

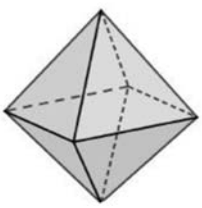
$$área\ base = \frac{1}{2} \cdot perímetro \cdot apotema$$

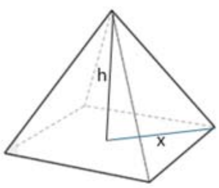
$$3^2 = a^2 + 1{,}5^2 \ , \ a = \sqrt{9 - 2{,}25} = 2{,}6$$

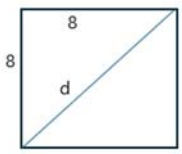
$$área\ base = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2{,}6 = 23{,}4\ cm^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3} \cdot 23{,}4 \cdot 12 = 93{,}6\ cm^3$$

44. Halla el volumen de un octaedro de 8 cm de arista. Indicación: puedes descomponer el octaedro en dos pirámides cuadradas regulares.







Volumen total = 2 · volumen pirámide

$V_p = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$

Para calcular "h" debemos calcular "x" y para ello calculamos "d"

$$d^2 = 8^2 + 8^2 \ , \quad d = \sqrt{128} = 11{,}3$$

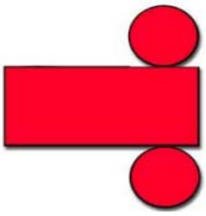
Luego, x = d/2 = 5,65 , calculamos h

$8^2 = h^2 + 5{,}65^2$, $h = \sqrt{64 - 5{,}65^2} = 5{,}71$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 5{,}71 = 121{,}88cm^3$, $V_{octaedro} = 121{,}88 \cdot 2 = 243{,}76cm^3$

3. CUERPOS REDONDOS

45. Dibuja el desarrollo correspondiente a un cilindro cuya base es un círculo de 2 cm de radio y su altura es de 10 cm. Después, utilizando cinta adhesiva, construye ese cilindro en papel.



46. Halla la superficie de un cilindro cuya altura es de 12 cm y el radio de su base es de 3 cm.

Área = 2·π·r·(h + r) ; Área = 2· 3,14·3·(12 + 3) = 282,7 cm^2

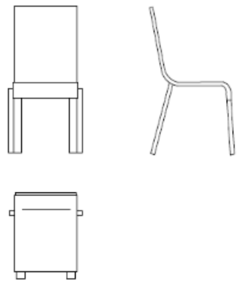
47. Busca una lata de atún en conserva (cilíndrica). Mide su altura y el diámetro de sus bases. Dibuja el desarrollo del cilindro que da lugar a esa lata. Recórtalo y forma una réplica en papel de la lata de atún.


respuesta manipulativa.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

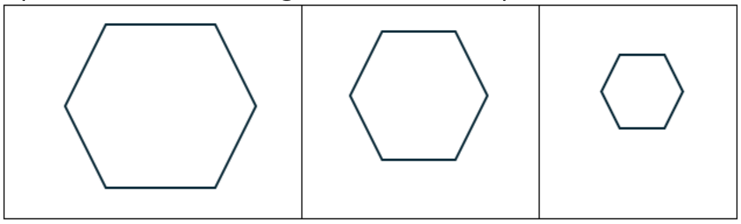
EL ESPACIO

1. Dibuja en tu cuaderno la planta, perfil y alzado de una silla.

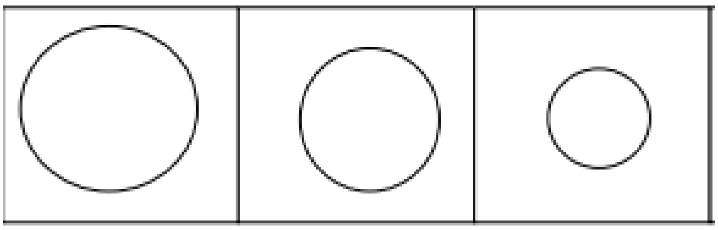


2. Dibuja en tu cuaderno una tomografía de:
a) Una pirámide recta hexagonal con cortes paralelos a su base
b) Un cono con cortes paralelos a su base
c) Un cono recto con cortes paralelos a su altura
d) Un prisma cuadrangular con cortes paralelos a una cara

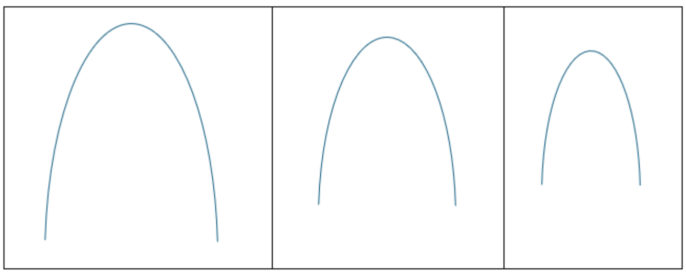
a) Una pirámide recta hexagonal con cortes paralelos a su base



b) Un cono con cortes paralelos a su base

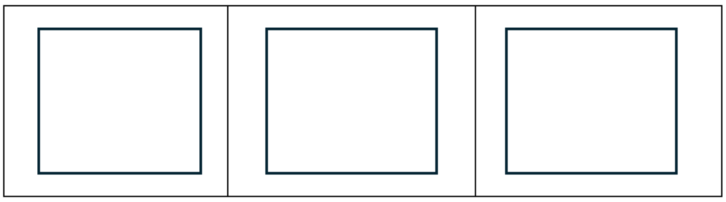


c) Un cono recto con cortes paralelos a su altura



Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra, Wikipedia, Internet.

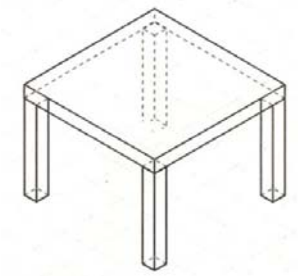
d) Un prisma cuadrangular con cortes paralelos a una cara



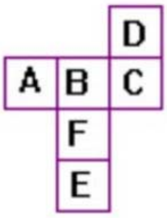
3. Mira a tu alrededor y escribe en tu cuaderno el nombre de cinco objetos indicando su descripción geométrica.

Respuesta abierta

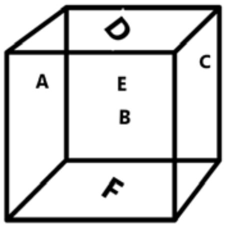
4. Dibuja una mesa en perspectiva caballera.



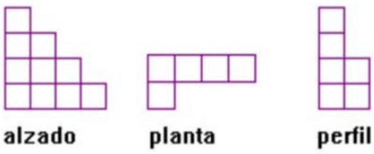
5. Si construyes un cubo con el desarrollo de la figura, la cara opuesta a la letra F sería…



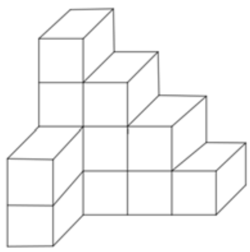
La cara opuesta a la F sería la D



6. Hemos construido un cuerpo formado por cubitos pequeños. Hemos dibujado su perfil, planta y alzado, ¿cuántos cubos hemos utilizado?



Hay 12 cubitos.

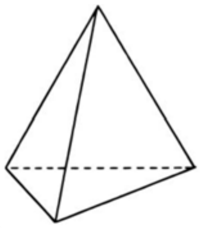


7. Dibuja en tu cuaderno un tetraedro. Nombra a todos sus puntos con letras mayúsculas, todas sus rectas con letras minúsculas, y todos sus planos con letras griegas. Indica:

a) Tres pares de rectas que se crucen. ¿Cuáles son? Descríbelas.

b) Tres pares de rectas que sean secantes. Indica en cada caso en qué punto se cortan, y en qué plano se encuentran.

c) ¿Existen rectas paralelas?



a) Se cruzan las rectas de aristas opuestas;

b) Se cortan 3 rectas en cada vértice;

c) No hay rectas paralelas.

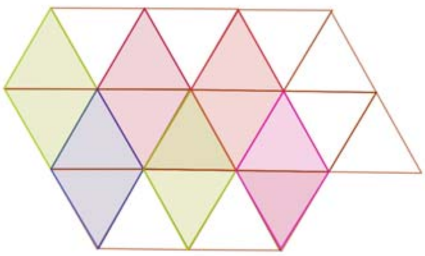
8. En el dibujo del tetraedro anterior, ¿cuántos planos hay? ¿Hay planos paralelos? Indica dos planos secantes señalando en qué recta se cortan.
Hay 4 planos, ninguno paralelo. Se cortan en las aristas, que son 6.

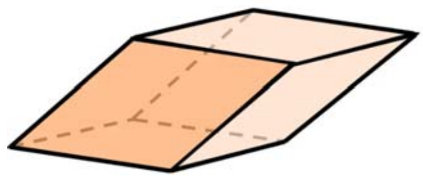
POLIEDROS

9. ¿Puede existir un poliedro regular que sus caras sean hexágonos? ¿En un vértice, cuál es el número mínimo de polígonos que debe haber? El ángulo exterior del hexágono es de 120°, ¿cuánto vale la suma de 3 ángulos?
No. En un vértice como mínimo hay 3 polígonos y la suma de 120° + 120° + 120° = 360°, un ángulo plano.

10. Utiliza una trama de triángulos y dibuja en ella 6 rombos de ángulos 60° y 120°. Haz con ellos el desarrollo de un poliedro, y constrúyelo. Es un romboedro.

Solución manipulativa:





11. En una trama triangular recorta 2 triángulos. ¿Puedes construir con ellos un poliedro? ¿Y con 4? Recorta 5 e intenta construir un poliedro. Ahora con 6. Es un trabajo difícil. El mayor que podrías construir es con 20. Sabrías dar una explicación.
Con 2 triángulos no se puede formar un poliedro.
Con 4 un tetraedro.

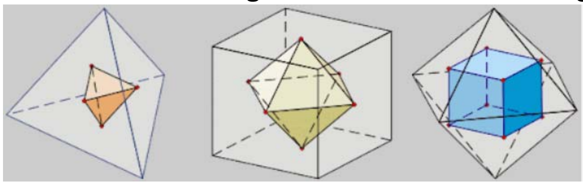
12. Piensa en un cubo. Cuenta sus caras, sus aristas y sus vértices. Anota los resultados en tu cuaderno. Comprueba si verifica la relación de Euler: Vértices más caras igual a aristas más 2. Haz lo mismo pensando en un prisma hexagonal y en una pirámide triangular.
Un cubo tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices; caras + vértices = aristas + 2;
Prisma hexagonal: 8 caras, 12 vértices y 18 aristas: 8 + 12 = 20 = 18 + 2.
Pirámide triangular: 4 caras, 4 vértices y 6 aristas: 4 + 4 = 8 = 6 + 2.

13. Un balón de futbol, ¿es un poliedro? Descríbelo.
Sí, aunque lo parezca no es una esfera. Tiene pentágonos regulares y hexágonos regulares.

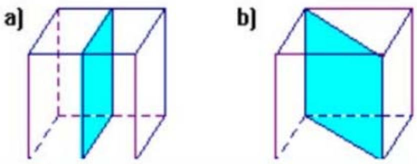
14. Construye muchos, muchísimos poliedros. Por lo menos 5. Puedes hacerlo de distintas formas: Con su desarrollo en cartulina; con pajas de refresco, hilo y pegamento; con limpiapipas y plastilina…

¡Seguro que se te ocurren otras formas!
Solución manipulativa:

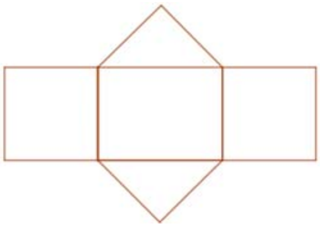
15. Comprueba que al unir los centros de las caras de un cubo se obtiene un octaedro, y viceversa, si se unen los centros de las caras de un octaedro se obtiene un cubo. Se dice que son duales. Comprueba que al unir los centros de las caras de un icosaedro se obtiene un dodecaedro, y viceversa. El icosaedro y el dodecaedro son duales. ¿Qué se obtiene si se unen los centros de las caras de un tetraedro? ¿Qué poliedro es dual al tetraedro?
El poliedro dual del tetraedro regular es otro tetraedro regular.



16. De muchas formas es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, como por ejemplo mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, o mediante un plano que pase por el punto medio de cuatro aristas, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de la sección del cubo de la figura b), y construye dos de esas secciones. Descríbelos. Piensa otros dos ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.



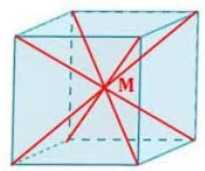
Solución manipulativa: Prisma triangular recto no regular.



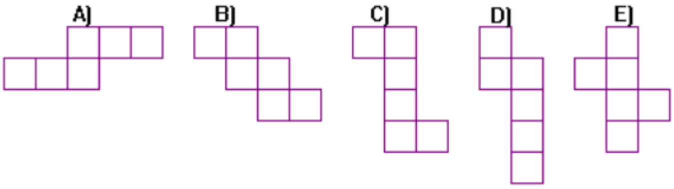
Solución abierta.

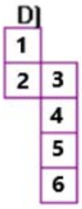
17. ¿Cuántas diagonales tiene un cubo? Una diagonal es un segmento que une dos vértices que no estén en la misma cara.

4 diagonales.



18. ¿Cuál de los siguientes desarrollos no puede ser el desarrollo de un cubo? Razona la respuesta. Sólo existen 11 posibilidades de desarrollos del cubo diferentes. Busca al menos tres más.

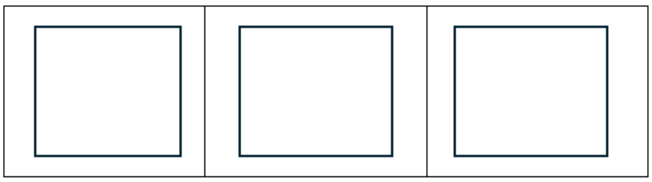


La D no es el desarrollo de un cubo,  las caras 1 y 6 se solapan.

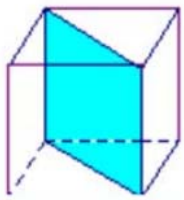
19. Piensa en un cubo. Imagina que cortas una de sus esquinas creando una sección con forma de triángulo equilátero. Imagina que sigues cortando mediante planos paralelos, ¿qué obtienes?, ¿con qué corte consigues el mayor triángulo equilátero? Y si continúas cortando, ¿qué sucede? ¿Se puede obtener un hexágono regular? (Ayuda: Si no eres capaz de imaginar tanto puedes cortar un cubo de plastilina).

Al seguir cortando por planos paralelos obtenemos triángulos equiláteros.
Cuando pasas por 3 vértices obtenemos el mayor triángulo equilátero.
Puedes obtener un hexágono regular cuando pasas por el punto medio de 6 aristas.

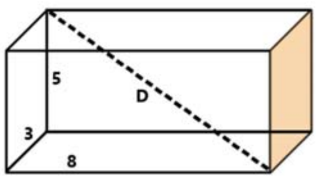
20. Dibuja en tu cuaderno tres tomografías diferentes de un cubo.



21. De qué manera puedes obtener con un único corte de un cubo, dos prismas triangulares rectos.



22. Calcula la diagonal de un ortoedro de lados 8, 3 y 5 cm



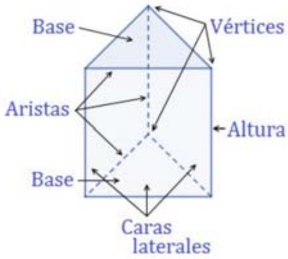
$$D = \sqrt{3^2 + 5^2 + 8^2} = 9{,}9\ cm$$

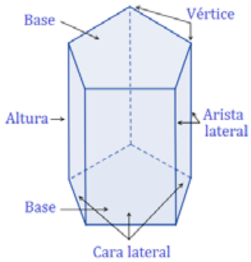
23. Escribe 3 objetos cotidianos que sean prismas cuadrangulares. Los prismas cuadrangulares se llaman también paralelepípedos, y si sus caras son rectángulos se llaman ortoedros. De los objetos que has señalado, ¿cuáles son paralelepípedos y cuáles son ortoedros?

Ortoedros: caja de zapatos, microondas, una pecera.

Paralelepípedos: los edificios llamados "puerta de Europa" en Madrid, algunos borradores.

24. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular y uno pentagonal señalando las caras laterales, bases,, aristas, vértices y altura.





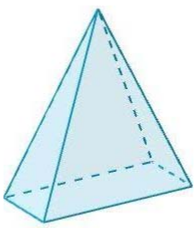
25. Observa, en un prisma, ¿cuántas caras concurren en un vértice? ¿Es siempre el mismo número?

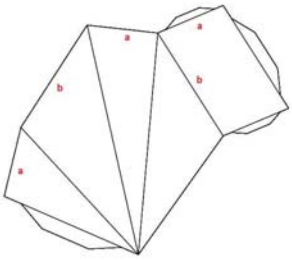
Siempre 3.

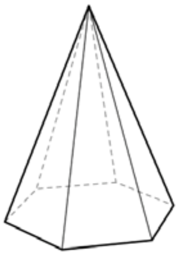
26. Un prisma puede tener muchas caras, pero ¿cuál es su número mínimo?

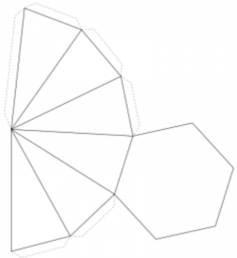
Las de un prisma triangular, 3 + 2 = 5.

27. Dibuja el desarrollo de una pirámide recta cuadrangular, y de otra hexagonal.

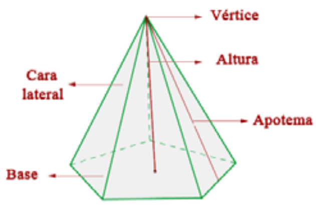








28. Dibuja una pirámide recta pentagonal y señala su vértice, sus aristas, sus caras laterales, su base y su altura.



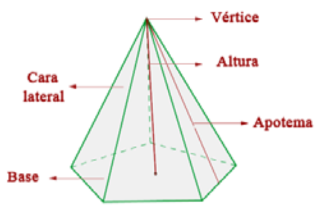
29. Piensa en un poliedro que tenga 5 caras y 5 vértices. ¿Qué tipo de poliedro es?

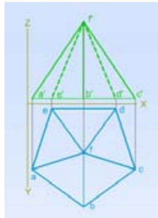
Una pirámide cuadrangular.

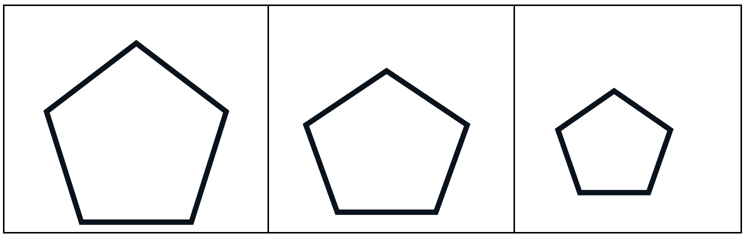
30. ¿Cuántas diagonales tiene un prisma hexagonal regular? ¿Y una pirámide hexagonal regular?

Un prisma 18, una pirámide, ninguna.

31. Dibuja en perspectiva una pirámide pentagonal regular. Dibuja su perfil, su planta y su alzado. Dibuja una tomografía cortando por un plano paralelo a la base.

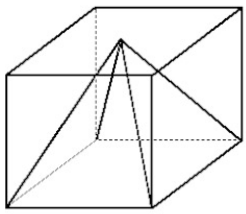




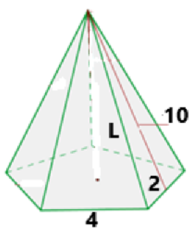


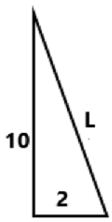
32. Construye un pirámide regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja la base sin cerrar. Construye un prisma regular cuadrangular de lado de la base 1 cm y altura 2 cm. Deja una base sin cerrar. Llena de arena (o similar) la pirámide y viértelo dentro del prisma, y cuenta cuántas veces necesitas hacerlo para llenar el prisma.

Vas a necesitar 3. Así puedes comprobar la fórmula del volumen de una pirámide, que es un tercio del de un prisma de igual base y altura.



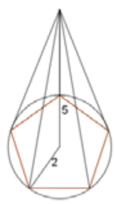
33. Si en una pirámide pentagonal regular su apotema mide 10 cm y el lado de su base 4 cm, ¿cuánto mide su arista?





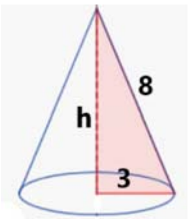
$$L^2 = 10^2 + 2^2 \ , \ \ L = \sqrt{10^2 + 2^2} = 10{,}2 \ cm$$

34. ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide pentagonal regular cuya altura mide 5 m, y cuya base está inscrita en una circunferencia de 2 m de radio?



$$L^2 = 5^2 + 2^2 \ , \ \ L = \sqrt{5^2 + 2^2} = 5{,}4 \ m$$

35. Calcula el volumen de un cono de generatriz 8 cm y radio de la base 3 cm.

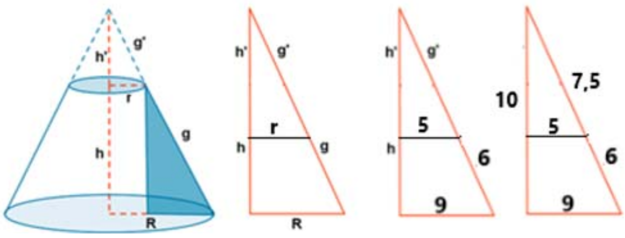


$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, tenemos que calcular h

$8^2 = h^2 + 3^2$, $h = \sqrt{8^2 - 3^2} = 7{,}4$

$V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 7{,}4 = 69{,}71\ cm^3$

36. Calcula el volumen de un tronco de cono recto si los radios de las bases miden 9 y 5 cm y la generatriz, 6 cm



Por Thales

$\frac{9}{5} = \frac{6+g'}{g'}$, $9g' = 30 + 5g'$, $4g' = 30$, $g' = \frac{30}{4} = 7{,}5$

Llamando H = h + h' , $13{,}5^2 = H^2 + 9^2$, $H = 10{,}06$

$7{,}5^2 = h'^2 + 5^2$, $h' = 5{,}6$

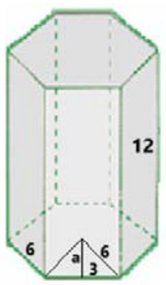
$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V_{grande} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 9^2 \cdot 10{,}06 = 852{,}89\ cm^3$

$V_{pequeño} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 5{,}6 = 146{,}53\ cm^3$

$V_{tronco} = 852{,}89 - 146{,}53 = 706{,}36\ cm^3$

37. Calcula la superficie lateral y total de un prisma regular hexagonal de altura 12 cm y lado de la base 6 cm



Calculamos la apotema del hexágono

$6^2 = a^2 + 3^2$, $a = \sqrt{27} = 5{,}2$

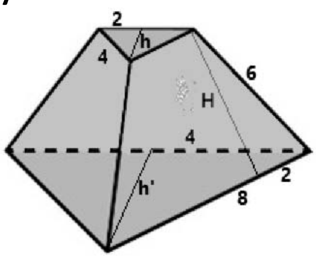
$A_{hex} = \frac{1}{2} Perímetro \cdot apotema = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5{,}2 = 93{,}6\ cm^2$

$A_{lateral} = 6 \cdot 6 \cdot 12 = 432\ cm^2$

Área total = Área lateral + 2·Área de la base

Área total = 432 + 2·93,6 = 619,2 cm^2

38. Calcula la superficie total de un tronco de pirámide regular triangular de lados de las bases 8 y 4 cm, y arista 6 cm.



Tenemos que calcular: h , h' y H

$4^2 = h^2 + 2^2$, $h = \sqrt{12} = 3{,}46$, $8^2 = h'^2 + 4^2$, $h' = \sqrt{48} = 6{,}93$

$6^2 = H^2 + 2^2$, $H = \sqrt{32} = 5{,}66$ $A_{cara} = \frac{1}{2}(8 + 4)5{,}66 = 33{,}96$

$A_{Tr} = \frac{1}{2}(8 + 6{,}93) = 27{,}72$ $A_{tr} = \frac{1}{2}(4 + 3{,}46) = 6{,}92$

Área total = $A_T + A_t + 3 \cdot A_{cara}$ = 27,72 + 6,92 + 3·33,96 = 136,52 cm^2

39. Un cilindro recto tiene una superficie lateral de 67π cm². ¿Cuánto mide su superficie total si su altura mide 10 cm?

$A_l = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 67\pi$, $2 \cdot \pi \cdot r \cdot 10 = 67\pi$, $r = \frac{67\pi}{20\pi} = 3{,}35$

$A_{total} = A_l + 2 \cdot A_{base} = 67 \cdot \pi + 2 \cdot \pi \cdot 3{,}35^2 = 89{,}45\pi\ cm^2$

CUERPOS REDONDOS

40. Dibuja en tu cuaderno los cuerpos que se generan al girar alrededor de:

a) un lado, un rectángulo

b) un cateto, un triángulo rectángulo

c) la hipotenusa, un triángulo rectángulo

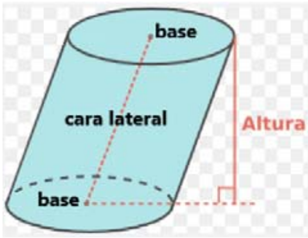
d) su diámetro, un círculo.

a) Cilindro; b) Cono; c) Dos conos unidos por la base; d) Una esfera.

41. Escribe el nombre de 5 objetos que tengan forma de cilindro.

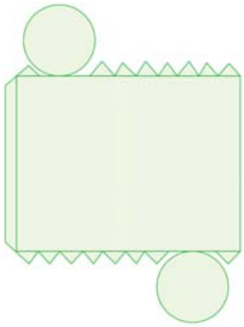
Por ejemplo, algunas latas de conserva, algunos botes de medicina, algunas tizas, las patas de algunas sillas, vasos, rollos de papel.

42. Dibuja un cilindro oblicuo y señala las bases, la cara lateral, la altura.

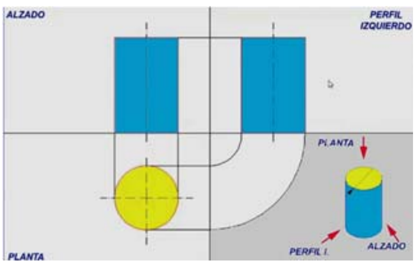


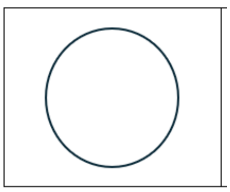
43. Construye un cilindro recto en cartulina que tenga de radio de la base 1 cm y altura 2 cm.

Solución manipulativa:



44. Dibuja en perspectiva caballera un cilindro recto. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja 2 tomografías tomando un plano paralelo a) a la base, b) a una arista.

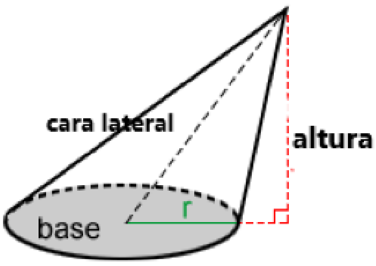


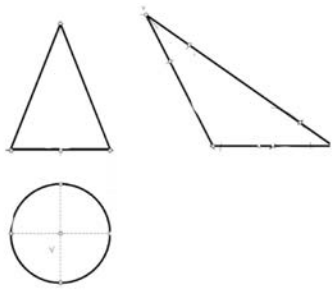
a)  b) Un cilindro no tiene aristas

45. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de cono.

Por ejemplo, un gorro de payaso, la punta de un lapicero, algún tejado de una torre, el cucurucho de los helados …

46. Dibuja en perspectiva caballera un cono oblicuo. Dibuja su planta, perfil y alzado. Señala su base, su altura y su cara lateral.

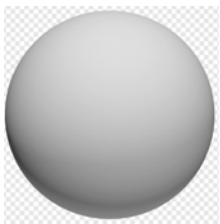


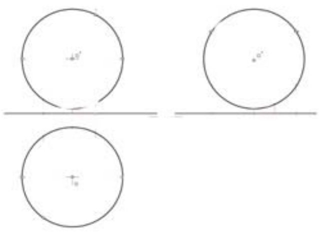


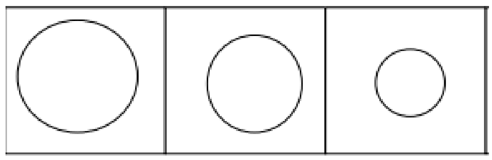
47. Escribe el nombre de 5 objetos cotidianos que tengan forma de esfera.

Por ejemplo: Una pelota, una naranja, un planeta, una cereza, una canica….

48. Dibuja una esfera en perspectiva caballera. Dibuja su perfil, planta y alzado. Dibuja una tomografía de la esfera.

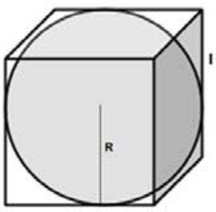






Tomografía de una esfera con cortes paralelos a su ecuador

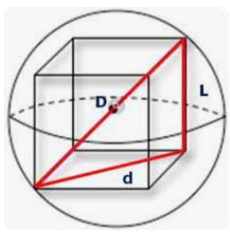
49. Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 cm.



<u>Esfera inscrita</u>

El radio es la mitad del lado:

$R = \frac{l}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm



<u>Esfera circunscrita</u>

El diámetro es la diagonal del cubo:

$D = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = \sqrt{300}$

D = 17,32 , R = 8,66 cm

50. Calcula el área total y el volumen de un cubo de 10 cm de lado.

Área = $6 \cdot 10^2 = 600$ cm^2; Volumen = $10^3 = 1000$ cm^3.

51. Calcula la superficie de cada uno de los poliedros regulares sabiendo que su arista mide 8 cm. (Ayuda: La apotema del pentágono mide 5,4 cm).

Los poliedros regulares están formados por polígonos regulares, por tanto, la superficie de cada poliedro será igual a multiplicar la superficie de una cara por el número de caras.

<u>Tetraedro</u>, 4 triángulos equiláteros, A = ½ ·base·altura, calculamos la altura

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}93$$

A = ½ · 8 · 6,93 = 27,71 ; Superficie tetraedro = 4 · 27,71 = 110,84 cm^2

<u>Cubo</u>, 6 cuadrados, superficie = 6 · 8^2 = 384 cm^2

<u>Octaedro</u>, 8 triángulos equiláteros, tenemos el área de un triángulo = 27,71

Superficie octaedro = 8 · 27,71 = 221,68 cm^2

<u>Icosaedro</u>, 20 triángulos equiláteros, Superficie icosaedro = 20 · 27,71 = 554,2 cm^2

<u>Dodecaedro</u>, 12 pentágonos regulares, A = ½ perímetro · apotema = ½ · 5 · 8 · 5,4 = 108

Superficie dodecaedro = 12 · 108 = 1296 cm^2

52. Si llenas de arena un cono recto de 7 cm de altura y de radio de la base de 4 cm, y lo vacías en un cilindro recto de 4 cm de radio de la base, ¿qué altura alcanzará la arena?

Como el volumen de un cono es 1/3 del volumen de un cilindro, la altura de la arena en el cilindro será de 1/3 de la altura en el cono, por tanto, alcanzará 7/3 cm

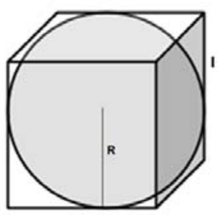
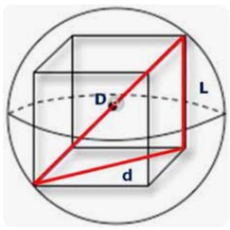
53. Calcula la superficie y el volumen de una esfera si la longitud de su circunferencia máxima es de 10π m.

$L = 2\pi r = 10\pi, \quad r = 5\,m$

$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi 5^2 = 100\pi\, m^2$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi\, m^3$

54. Calcula el volumen y la superficie de una esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 m.

	<u>a) Esfera inscrita</u> El radio es la mitad del lado: $R = \frac{l}{2} = \frac{10}{2} = 5$ m		<u>b) Esfera circunscrita</u> El diámetro es la diagonal del cubo: $D = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = \sqrt{300}$ D = 17,32 , R = 8,66 m

a) Inscrita

$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi 5^2 = 100\pi\, m^2$

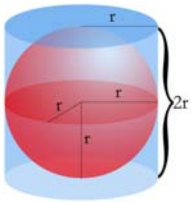
$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 5^3 = \frac{500}{3}\pi\, m^3$

b) Circunscrita

$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 8{,}66^2 = 299{,}98\pi\, m^2$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8{,}66^3 = 865{,}95\pi\, m^3$

55. Calcula la superficie lateral de un cilindro circunscrito a una esfera de radio R. Calcula la superficie de dicha esfera. Cuánto vale si R = 6 cm.



La altura del cilindro es = 2R,

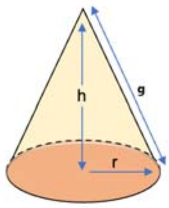
$$S_{cilindro} = 2\pi rh = 2\pi \cdot R \cdot 2R = 4\pi R^2$$

$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4\pi R^2$, las superficies son iguales

Si R = 6

$$S_{cilindro} = 4\pi R^2 = 4\pi 6^2 = 144\pi\ cm^2 = S_{esfera}$$

56. Un cono tiene de altura h = 7 cm, y radio de la base r = 2 cm. Calcula su volumen, su generatriz y su superficie lateral.



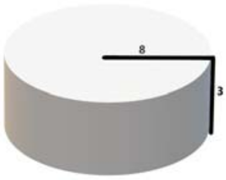
h = 7 , r = 2

$$g^2 = h^2 + r^2 \rightarrow g^2 = 7^2 + 2^2 = 53 \rightarrow g = \sqrt{53} = 7{,}3\ cm$$

$$S_{lateral\ cono} = \pi rg = \pi \cdot 2 \cdot 7{,}3 = 45{,}84\ cm^2$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 7 = 29{,}3\ cm^3$$

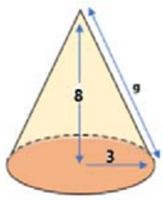
57. Calcula la superficie lateral y total de un cilindro recto generado por un rectángulo de lados 3 y 8 cm al girar alrededor de su lado mayor



$$S_{lateral} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot 3 = 150{,}72\ cm^2$$

$$S_{total} = 2\pi r(h + r) = 2 \cdot \pi \cdot 8 \cdot (3 + 8) = 552{,}64\ cm^2$$

58. Calcula la superficie lateral y total de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 3 y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.



$$g^2 = h^2 + r^2 \rightarrow g^2 = 8^2 + 3^2 = 73 \rightarrow g = \sqrt{73} = 8{,}5\ cm$$

$$S_{total\ cono} = \pi r(g + r) = \pi \cdot 3 \cdot (8{,}5 + 3) = 108{,}33\ cm^2$$

59. Duplicamos la arista de un cubo, ¿qué ocurre con la superficie de una cara?, ¿y con su volumen? Calcúlalo suponiendo que duplicas la arista de un cubo de lado 5 m

Las caras son cuadrados, si las aristas miden "x" su área es "x^2" , si doblamos su longitud "2x" su área será "$(2x)^2 = 4x^2$" es decir aumenta $2^2 = 4$

El volumen del cubo es x^3 , si doblamos la longitud de la arista su volumen es $(2x)^3 = 8x^3$, es decir, aumenta $2^3 = 8$

Si la arista mide 5 m su volumen es $5^3 = 125\ m^3$

Si doblamos la longitud será $10^3 = 1000\ m^3$ que es 8·125

60. Un depósito cilíndrico tiene una capacidad de 100 L y una altura de 100 cm, ¿cuánto mide el radio de su base?

Volumen = 100 L = 100 · 1000 cm^3 = 100 000 cm^3

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$; $100\,000 = \pi \cdot r^2 \cdot 100$, $r = \sqrt{\frac{100\,000}{\pi \cdot 100}} = 1{,}78\ cm$

61. Utiliza una hoja de cálculo (o la calculadora) para calcular el volumen de una esfera de radio 7 u, tomando para π diferentes aproximaciones.

	A	B	C	D	E
1	**VOLUMEN DE UNA ESFERA DE RADIO**				
2	Radio	Valor de PI	Volumen	(4/3)*PI*R^3	
3	7	3	1372	unidades de volumen	
4		3,14	1436,02667	unidades de volumen	
5		3,1416	1436,7584	unidades de volumen	
6		PI()	1436,75504	unidades de volumen	

Se observa como aumenta el volumen al aumentar el valor de pi, y como 3,1416 es mayor que pi.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál de los siguientes cuerpos geométricos NO tiene un desarrollo plano?

a) el cilindro   b) la esfera   c) el icosaedro   d) el dodecaedro

Respuesta: b)

2. La definición correcta de poliedro regular es:

a) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares

b) Un poliedro con todas sus caras polígonos iguales

c) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares e iguales

d) Un poliedro con todas sus caras polígonos regulares iguales y que en cada vértice concurren el mismo número de caras.

Respuesta: d)

3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a) Un prisma oblicuo puede ser regular

b) El volumen de un prisma oblicuo es área de la base por la altura

c) Las caras de un dodecaedro son hexágonos

d) El volumen de una pirámide es área de la base por la altura

Respuesta: b)

4. Una expresión de la superficie lateral de un cilindro es:

a) 2πrh   b) 2πrh + πr²   c) 2πr(h + r)   d) 2/3πrh

Respuesta: a)

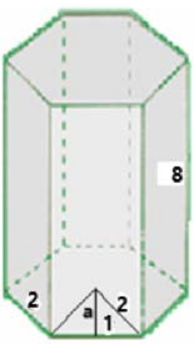
5. El número de vértices de un icosaedro es:

a) 20   b) 12   c) 30   d) 10

Respuesta: b)

6. El volumen y la superficie lateral de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm y lado de la base 2 cm, miden aproximadamente:

a) 83,1 cm³; 96 cm²   b) 35,7 cm³; 48 cm²   c) 0,1 L; 0,9 ha   d) 106 m³; 95 m²



Calculamos la apotema del hexágono

$$2^2 = a^2 + 1^2 \ , \qquad a = \sqrt{3} = 1{,}7$$

$$A_{lateral} = 6 \cdot 2 \cdot 8 = 96\ cm^2$$

Volumen = área de la base x altura

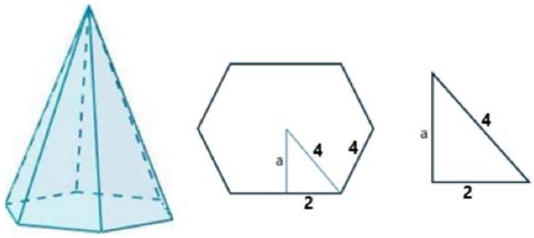
$$A_{hex} = \frac{1}{2} \cdot per \cdot apo = \frac{1}{2} 6 \cdot 2 \cdot 1{,}7 = 10{,}2\ cm^2$$

Volumen = 10,2 · 8 = 81,6 cm³

Respuesta: a)

7. El volumen y la superficie lateral de una pirámide regular hexagonal de altura 2 m y lado de la base 4 m, miden aproximadamente:

a) 62 cm³; 24 cm² **b) 7000 L; 0,48 ha** **c) 7 cm³; 8 cm²** **d) 27,6 m³; 48 m²**



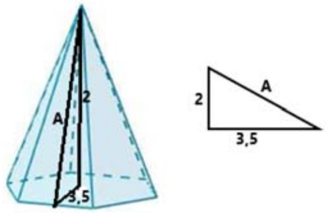
$$Volumen = \frac{1}{3} \cdot área\ base \cdot altura$$

$$área\ base = \frac{1}{2} \cdot perímetro \cdot apotema$$

$$4^2 = a^2 + 2^2 \quad , \quad a = \sqrt{16-4} = 3{,}5$$

$$área\ base = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3{,}5 = 42\ m^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3} \cdot 42 \cdot 2 = 28\ m^3$$



El área lateral es la suma de las áreas de los 6 triángulos.

La altura de cada triángulo es A.

$A^2 = 3{,}5^2 + 2^2 \quad , \quad A = \sqrt{12{,}25 + 4} = 4{,}03$

$A_{triángulo} = \frac{1}{2} base \cdot altura = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4{,}03 = 8{,}06$

Área lateral = 6 · 8,06 = 48,36 m²

Respuesta: d)

8. El volumen de un cono de altura 9 cm y radio de la base 2 cm, miden:

a) 0,12π L **b) 36π cm³;** **c) 12 π cm³;** **d) 36π cm³**

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 9 = 12\pi\ cm^3$$

Respuesta: c)

9. El volumen y la superficie lateral de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 5 cm, miden:

a) 100π m³; 40π m² **b) 100π cm³; 40π cm²** **c) 31,4 cm³; 12,56 cm²** **d) 33π cm³; 7π cm²**

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 100\pi\ cm^3$$

$$S_{lateral} = 2\pi r h = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 4 = 40\pi\ cm^2$$

Respuesta a)

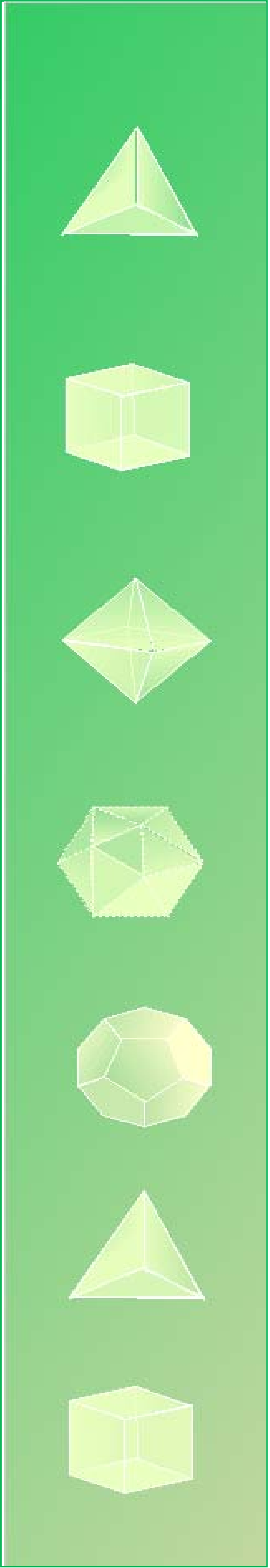
10. El volumen y la superficie de una esfera de radio 6 cm miden:

a) 288π cm³; 144π cm² **b) 144π cm³; 288π cm²** **c) 452 m³; 904 m²** **d) 96π cm³; 48π cm²**

$$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 144\pi\ cm^2$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6^3 = 288\pi\ cm^3$$

Respuesta: a)



2º ESO
Capítulo 8: Movimientos en el plano y en el espacio
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

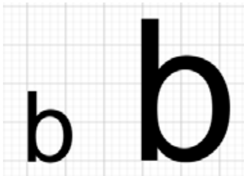
1. **En tu cuaderno dibuja un triángulo. Cálcalo y copia la figura calcada de nuevo en tu cuaderno. Mide todos los lados de las figuras homólogas. ¿Miden lo mismo? Mide todos sus ángulos. ¿Miden los mismo?**

Todos los lados y todos los ángulos miden lo mismo

2. **Dibuja en tu cuaderno una letra B y haz un diseño con ella, trasladándola, girándola o dibujando letras B simétricas**

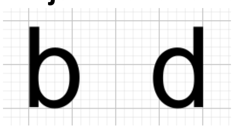
Solución abierta

3. **En tu cuaderno dibuja una letra b minúscula, y a continuación otra letra b minúscula el doble de grande. ¿Cómo son sus longitudes y sus ángulos? ¿Es una semejanza?**



Cualquier letra b el doble de grande, tendrá longitudes el doble que la original, y ángulos iguales, es decir, serán semejantes.

4. **Dibuja ahora una letra d minúscula. ¿Es semejante a la letra b anterior?**



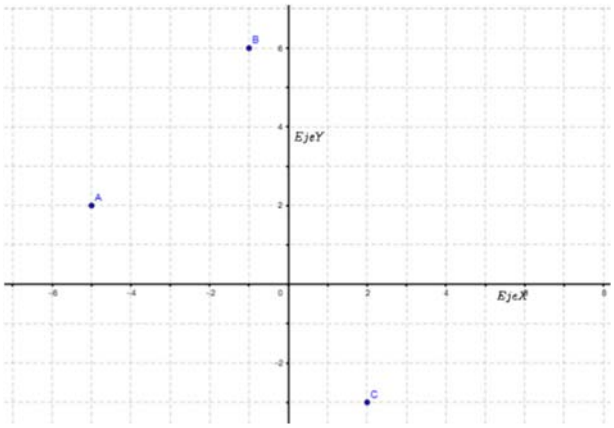
En este caso, no sería semejante, es simétrica. O semejante de razón de semejanza -1.

5. **En tu cuaderno marca una trama formada por cuadrados de dos cuadraditos de lado. En un cuadradito haz un garabato, una poligonal, una línea curva…Dibuja la simétrica tomando como eje de simetría un lado del cuadrado. Dibuja la figura obtenida. Trasládala horizontal y verticalmente**

Solución gráfica y abierta

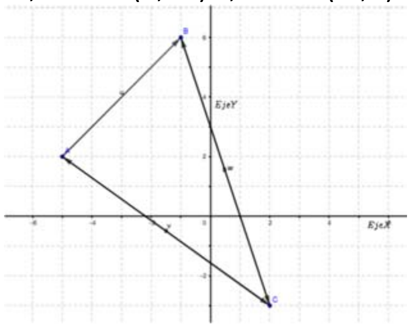
2. TRASLACIONES

6. **Dibuja en tu cuaderno los puntos de coordenadas A (-5, 2), B (-1, 6) y C (2, -3). Halla las coordenadas de los vectores fijos AB, AC, BC, CA y CB. Comprueba en tu dibujo que esas son sus coordenadas.**



Las coordenadas de los vectores **AB, AC, BC, CA y CB.** son:

AB = (4, 4) , AC = (7, -5) , BC = (3, -9) , CA = (-7,5) , CB = (-3,9)

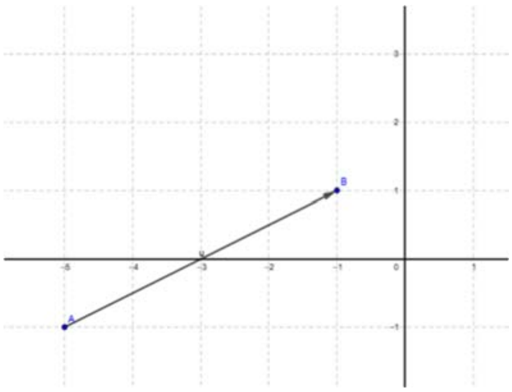


7. El vector fijo AB tiene de coordenadas (4, 2), calcula las coordenadas de su origen A sabiendo que las coordenadas de su extremo B son (-1, 1). Represéntalo gráficamente.

Si AB = (4, 2) y B = (-1, 1), entonces, siendo A = (x, y), (-1-x, 1-y) = (4, 2), es decir:

$$-1 - x = 4; x = -5$$
$$1 - y = 2; y = -1$$

Entonces A = (-5, -1)

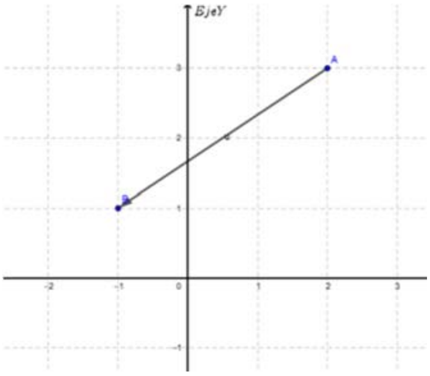


8. Las coordenadas de A son (2, 3) y las del vector fijo AB son (4, -2). Calcula las coordenadas del punto B. Represéntalo gráficamente

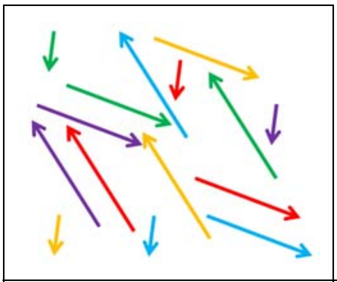
Si AB = (4, -2) y A = (2, 3), entonces, siendo B = (x, y), AB = (x-2, y-3) = (4, -2), es decir:

$$x - 2 = 4; x = 6$$
$$y - 3 = -2; y = 1$$

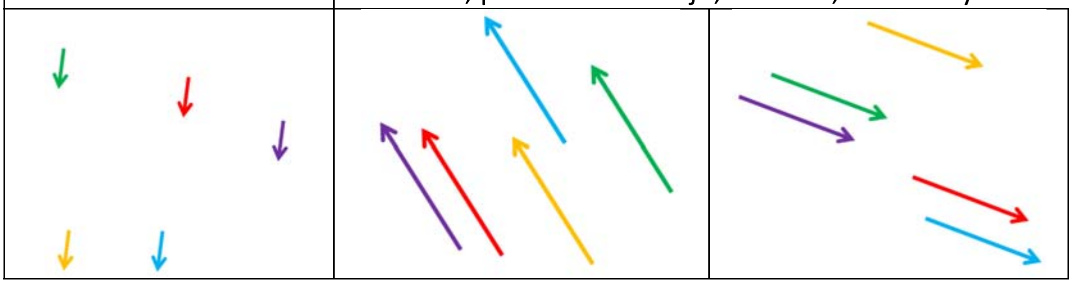
Entonces B = (6, 1)



9. Nombra a los vectores fijos de la figura e indica cuáles son representantes de un mismo vector libre

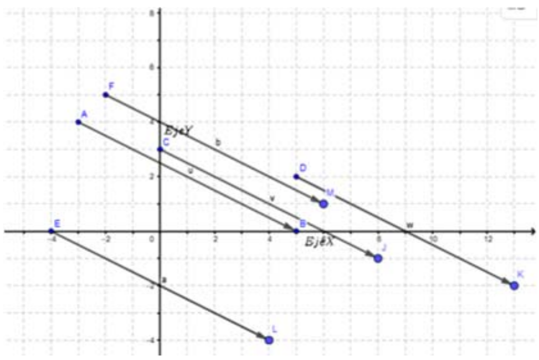


Los representantes de un mismo vector libre serán aquellos con el mismo modulo, dirección y sentido. Podemos apreciar que cada vector libre tiene un representante de otro color. Por ejemplo, el vector libre de la esquina superior izquierda de color verde tiene representantes del mismo módulo, dirección y sentido, pero en color rojo, morado, amarillo y azul

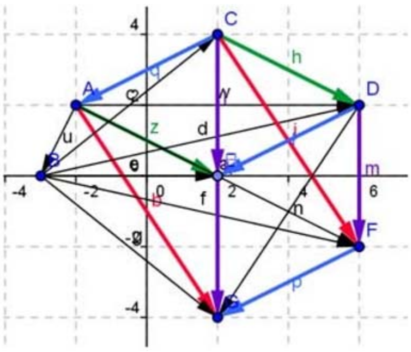


10. Dibuja en tu cuaderno cuatro vectores equipolentes al vector fijo con origen en A (-3, 4) y extremo B (5, 0), con orígenes en los puntos C (0, 3), D (5, 2), E (-4, 0) y F (-2, -5).

El vector fijo AB es (8,-4)



11. Dibuja en tu cuaderno los puntos A (-2, 2), B (-3, 0), C (2, 4), D (6, 2), E (2, 0), F (6, -2) y G (2, -4). Con los vectores fijos de origen y extremo en dichos puntos, indica cuáles de ellos son equipolentes:



Son equipolentes: AG = CF; GA = FC; CD = AE; EA = DC; CE = DF = EG; EC = FD = GE; DE = FG = CA; ED = GF = AC

12. Con los puntos del ejercicio anterior, calcula las coordenadas de los vectores fijos DE y FG. ¿Cómo son? ¿Son dos representantes de un mismo vector libre?

DE = (2-6, 0-2) = (-4, -2)

FG = (2-6, -4-(-2)) = (-4, -2)

Son equipolentes, representantes de un mismo vector libre

13. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano y señala en él los puntos de coordenadas: A (4, 5), B (-5, 6) y C (2, -5).

a) Llama u al vector fijo AB e indica sus componentes

b) Llama v al vector fijo BC e indica sus componentes

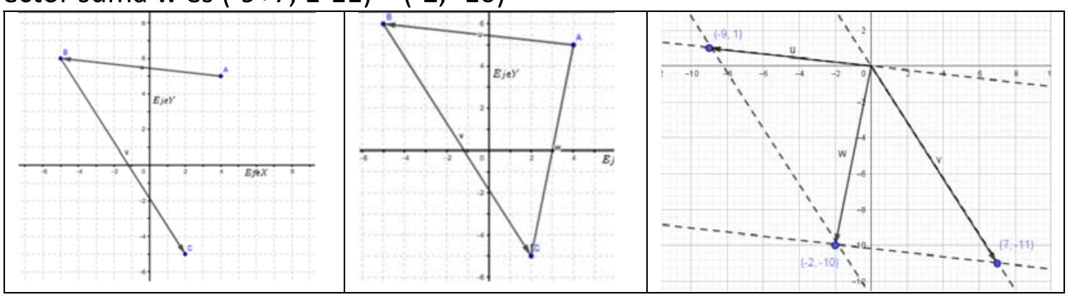
c) Calcula las componentes del vector w = u + v

d) Representa en tu cuaderno a los vectores libres u y v con origen en el origen de coordenadas y representa también al vector suma w. Observa que está sobre la diagonal del paralelogramo construido sobre u y v.

a) Las componentes del vector u = AB son (-5, 6) – (4, 5) = (-9, 1),

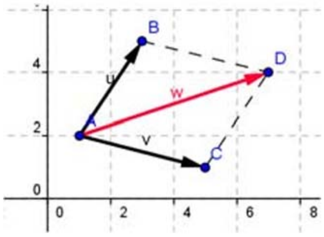
b) Y las del v = BC son (2, -5) – (-5, 6) = (7, -11)

c) El vector suma w es (-9+7, 1-11) = (-2, -10)



14. Dibuja en tu cuaderno el punto A (1, 2), dibuja ahora el vector u = (2, 3) con origen en A, y el vector v = (4, -1) también con origen en A. Calcula las coordenadas del vector suma u + v, y dibújalo con origen en A. ¿El resultado coincide con lo que has obtenido gráficamente? Observa que el vector suma es la diagonal de un paralelogramo construido sobre u y v.

w = u + v = (2, 3) + (4, -1) = (6, 2)



15. Efectúa las siguientes operaciones con vectores:

a) $\mathbf{3}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{-5}}{\mathbf{6}}\right)+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdot\ (\mathbf{4},\ \mathbf{8})=\left(1,\frac{-5}{2}\right)+(2,\ 4)=(3,\ \frac{3}{2})$

b) $(\mathbf{5},\mathbf{-9})-[(\mathbf{6},\mathbf{3})+(\mathbf{-4},\mathbf{-6})]=(5,-9)-(2,-3)=(3,-6)$

c) $\mathbf{5}\cdot[(\mathbf{-1},\mathbf{0})-(\mathbf{-2},\mathbf{3})]+(\mathbf{-3})\cdot[(\mathbf{4},\mathbf{-2})-\mathbf{6}\cdot(\mathbf{4},\mathbf{-5})]=$
$=\ 5[(1,-3)]+(-3)\cdot[(4,-2)-(24,-30)]=(5,-15)+(-3)\cdot(-20{,}28)=$
$=(5,-15)+(60,-84)=(65,-99)$

d) $\mathbf{9{,}3}\cdot(\mathbf{2},\ \mathbf{6})+(\mathbf{3{,}7}\ ,\ \ \mathbf{5{,}2})=(18{,}6\ ,\ 55{,}8)+(3{,}7\ ,\ 5{,}2)=(22{,}3\ ,\ 61)$

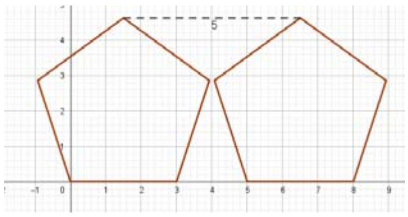
16. Efectúa las siguientes operaciones con los vectores u = (-5, 6), v = (4, -7) y w = (3, 4):

a) 2u – (v + w) = $2\cdot(-5,6)-((4,-7)+(3,4))=(-10,12)-(7,-11)=(-17,23)$

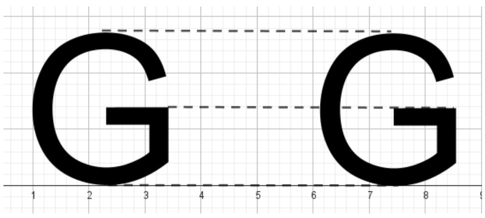
b) 3w - 2u + v = $(9,12)-(-10,12)+(4,-7)=(23,-7)$

c) 2(u+v) - 3w = $2\cdot((-5,6)+(4,-7))-(9,12)=(-2,-6)-(9,12)=(-11,-18)$

17. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha



18. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos correspondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?



Las medidas sí serán iguales entre una figura y otra. Las rectas que unen pares de puntos correspondientes serán paralelas. Han seguido un vector libre.

19. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué

se transforman? Analiza los resultados.

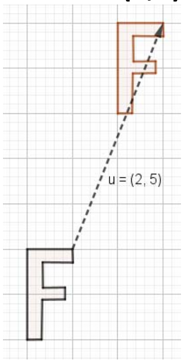
Mediante traslación la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.

20. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a donde iría?

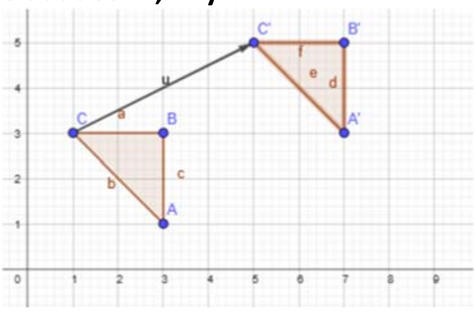
Un friso en Camboya

El vector de traslación sería un vector horizontal, desde el punto más a la izquierda de la figura a trasladar

21. Utiliza papel cuadriculado y dibuja en tu cuaderno una letra F de 2 cuadraditos de alta y 1 cuadradito de ancha y aplícale la traslación de vector (2,5)



22. Dibuja en tu cuaderno unos ejes cartesianos y el triángulo de vértices A (3, 1), B (3, 3) y C (1, 3). Aplícale la traslación de vector (4, 2): 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos trasladados A’, B’ y C’?

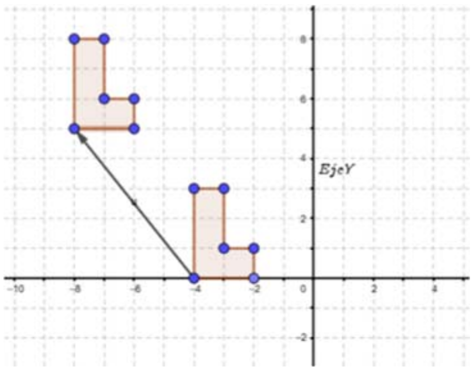


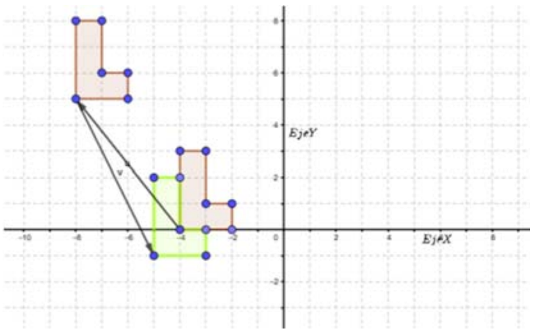
A’ = (7,3) , B’ = (7,5) y C’ = (5,5)

23. Las puntillas de la imagen se han diseñado a partir de un motivo que se ha ido trasladando a todo lo largo. Dibuja en tu cuaderno un motivo parecido a alguno de la figura, una flor, una V, un zigzag… y trasládalo componiendo varias traslaciones de un mismo vector de traslación. Has dibujado un friso.

Solución gráfica y abierta

24. Traslada una figura (por ejemplo, una letra L) mediante la traslación de vector (-4, 5) y repite el proceso con la figura trasladada empleando el vector (3, -6) ¿Qué movimiento utilizas para ir de la primera figura a la última? ¿Es una traslación? ¿Cuál es su vector?

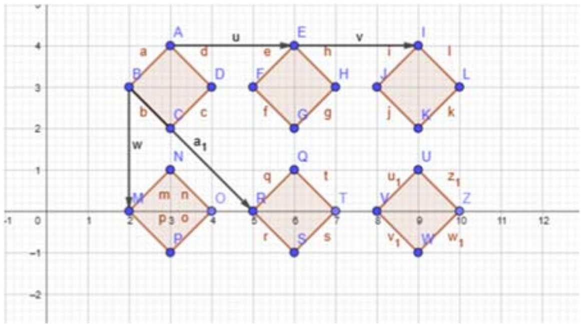




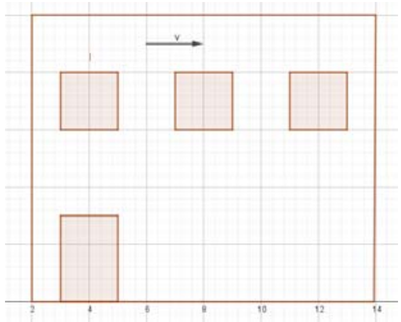
Se utiliza el movimiento de traslación (-1, -1);   (-4, 5) + (3, -6) = (-1, -1)

25. El mosaico del margen está confeccionado utilizando un motivo mínimo que se desplaza por todo el mosaico. Si utilizas como motivo mínimo la estrella de seis puntas, sin tener en cuenta los cambios de color, determina los vectores de traslación de dos traslaciones, una horizontal y otra vertical, que mediante composiciones te permitan tener el resto del mosaico. Observa que al sumar la traslación horizontal con la vertical obtienes traslaciones oblicuas. Dibuja en tu cuaderno una figura y trasládala de forma similar para tener un mosaico

Una posible traslación horizontal es (0,-3) y una traslación vertical es (3,0). Se obtiene también una traslación oblicua (3,-3)



26. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edifico y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.



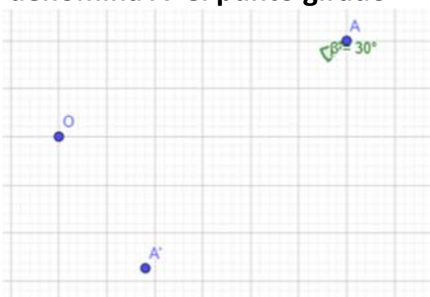
27. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

Hay una ventana con forma de arco en la parte superior, y alargada en la parte inferior, que se traslada y forma otra ventana.

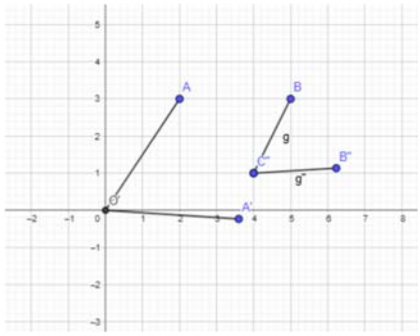
Existen numerosos arcos, que se trasladan y se transforman en muchos sucesivos justo debajo.

3. GIROS O ROTACIONES

28. Dibuja en tu cuaderno un punto O y otro punto distinto A. Gira al punto A con centro en O un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina A' el punto girado

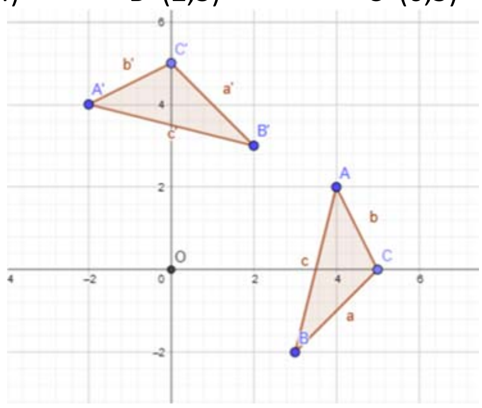


29. Dibuja en tu cuaderno un punto O y dos segmentos, uno OA que pase por O, y otro BC que no pase por O. Dibuja los segmentos girados OA’ y B’C’ del giro de centro O y ángulo 60°



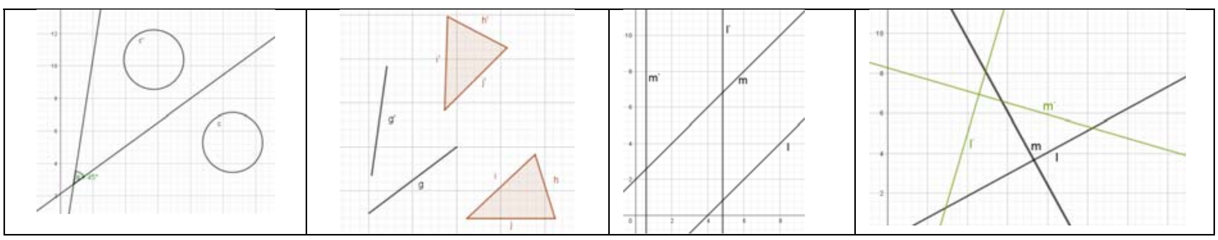
30. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (4, 2), B(3, -2) y C (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A’, B’ y C’ del triángulo girado?

A’ (-2,4) B’ (2,3) C’ (0,5)

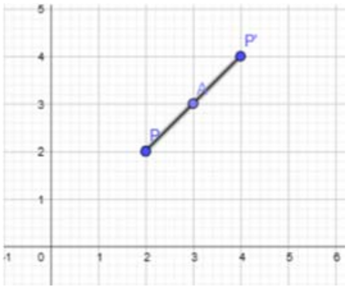


31. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados

Mediante el giro la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares.



32. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P’. Encuentra su centro de simetría.



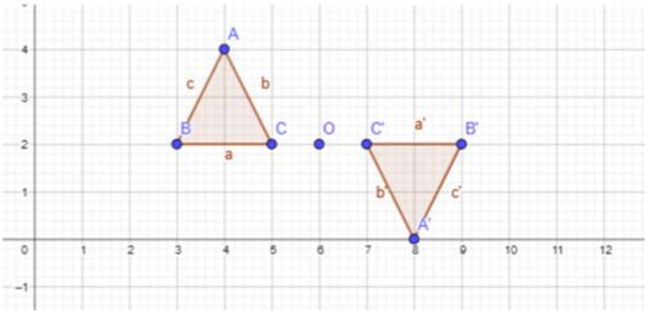
El centro de simetría es el punto A

33. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180°? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0°? ¿Y con un giro de 360°?

El único elemento invariable en un giro de 60° es el centro de giro. En un giro de 180° sí que existen rectas invariantes.

Las rectas que pasan por el centro de giro, tras el giro de 180° se convierten en su recta simétrica. Tras un giro de 0° y uno de 360°, siguen siendo ellas mismas

34. Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A'B'C' respecto un punto O. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo ABC y el ángulo A'B'C'. ¿Es un movimiento directo?



La longitud de sus lados es la misma, pero sus ángulos se invierten de sentido. El ángulo ABC es 60°, al igual que el A'B'C'.

35. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a las letras

Tienen simetría central la H, N, O, S y X. No tienen simetría central la B, P y T.

36. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren

Un ventilador, una peonza, un taladro, una ruleta de casino, el tambor de una lavadora.

37. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados

Cuando realizamos un giro (una rotación) en el espacio, las formas geométricas se transforman de diferentes maneras según su naturaleza.

Planos: El giro de un plano en el espacio no cambia su naturaleza; simplemente cambia su orientación. Es una figura infinita en el espacio, por lo que su estructura sigue siendo la misma independientemente de cómo se gire.

Esfera: Al ser una figura perfectamente simétrica, un giro no altera su forma ni tamaño. La esfera sigue siendo esférica sin importar cómo se rote.

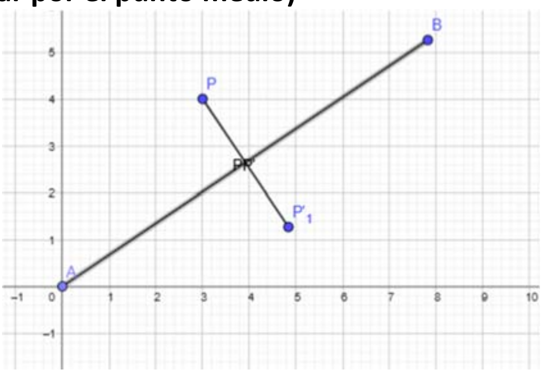
Cono: Aunque el cono puede cambiar su orientación dependiendo de cómo se gire, su forma de "cono" no cambia. Un giro alrededor de su eje principal no afecta su forma, pero otros ejes de rotación pueden cambiar su apariencia visual.

Planos paralelos: Los planos paralelos continúan siendo paralelos después de cualquier rotación. El giro simplemente cambia su orientación en el espacio sin alterar la relación de paralelismo entre ellos.

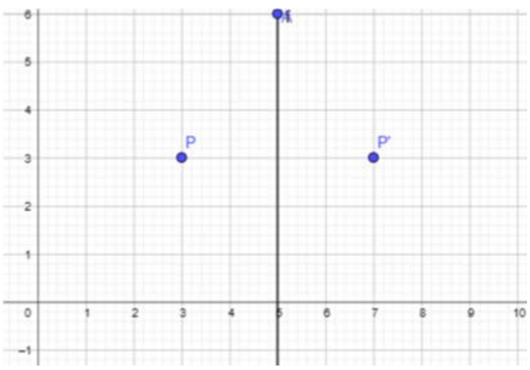
Planos ortogonales: Similar a los planos paralelos, los planos ortogonales continúan siendo ortogonales (en ángulo de 90 grados) después de cualquier rotación. Sin embargo, sus orientaciones en el espacio pueden cambiar dependiendo del eje sobre el que se realice el giro.

4. SIMETRÍAS

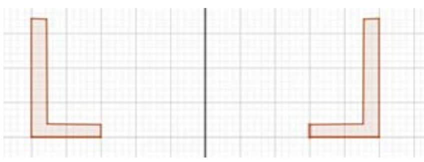
38. Dibuja en tu cuaderno un eje r de simetría oblicuo, y un punto P. Dibuja el punto P' simétrico respecto de r. Comprueba que la recta r es la mediatriz del segmento PP'. (Recuerda: La mediatriz de un segmento es la perpendicular por el punto medio)



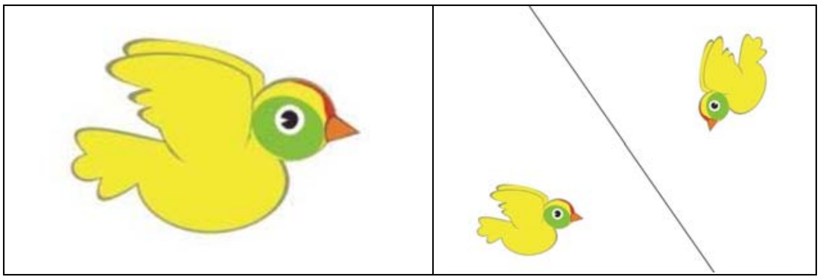
39. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P'. Dibuja el eje de simetría r respecto al que son simétricos.



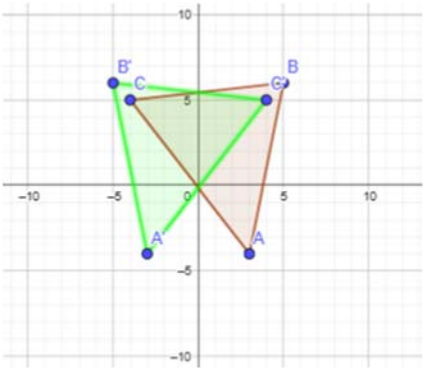
40. Dibuja en papel cuadriculado una letra L y un eje de simetría vertical. Dibuja la letra L simétrica respecto a ese eje. Calca una de ellas, y mueve el papel de calco para intentar hacerlas coincidir. Es imposible, porque la simetría es un movimiento inverso.



41. Reproduce en tu cuaderno la figura del margen. Dibuja un eje de simetría oblicuo y dibuja la figura simétrica.



42. Halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del eje de ordenadas del triángulo *A* (3, –4), *B* (5, 6), *C* (–4, 5). Lo mismo respecto del eje de abscisas.

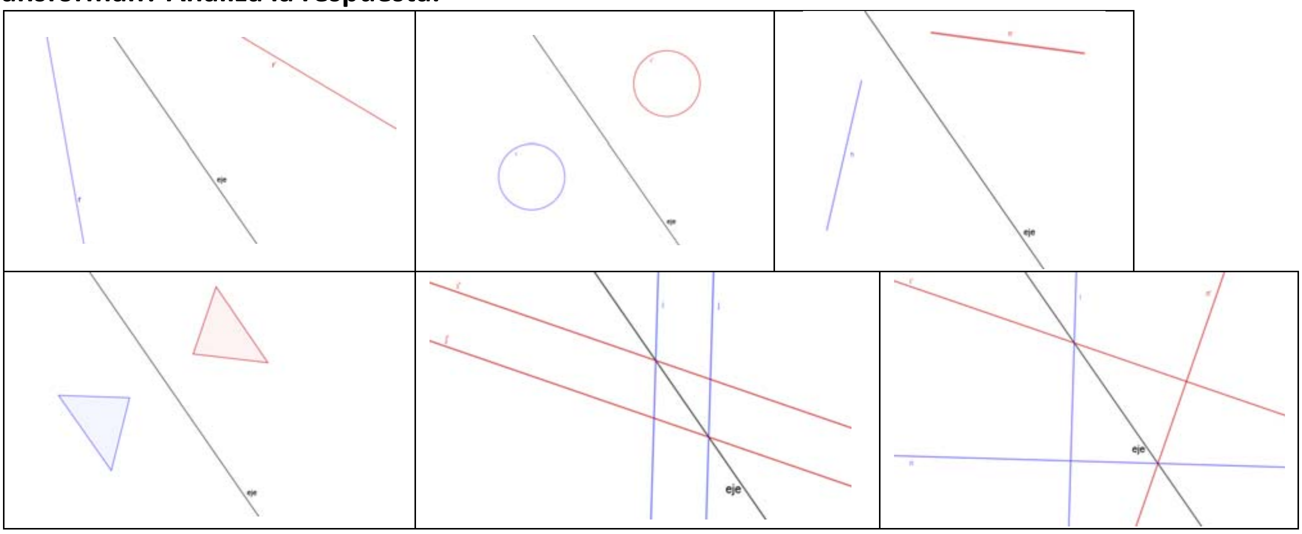


A' (-3, -4), B' (-5, 6), C' (-4, 5)

43. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

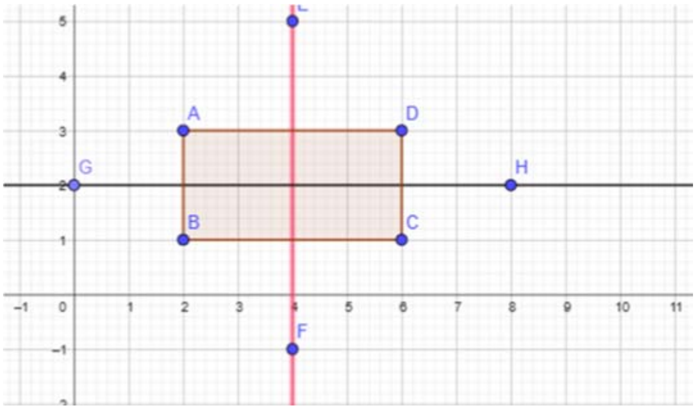
Simétricas con eje horizontal: B, D, K.
Simétricas con eje vertical: A, M, T, U, V, W, .
No simétricas: F, N, R, Z.

44. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

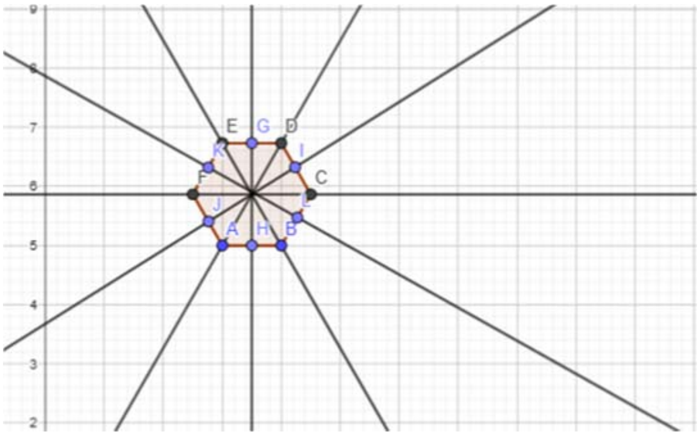


Una recta se transforma en otra recta.
Una circunferencia se transforma en otra circunferencia.
Un segmento se transforma en otro segmento.
Un triángulo se transforma en otro triángulo.
Dos rectas paralelas se transforman en dos rectas paralelas.
Dos rectas perpendiculares se transforman en dos rectas perpendiculares.

45. Dibuja un rectángulo *ABCD*. Dibuja el eje de simetría que transforma *AB* en *CD*, y el eje de simetría que transforma *AD* en *BC*.

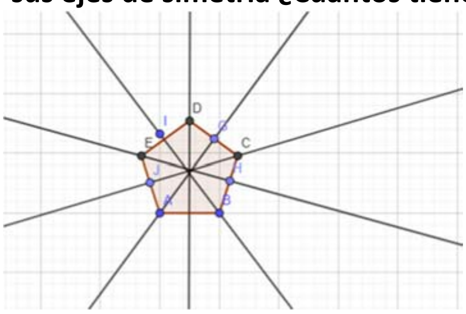


46. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.



Tiene 3. Cada eje pasa por un vértice y por el vértice opuesto.
Tiene 3. Cada eje pasa por el punto medio de uno de sus lados y por el punto medio del lado opuesto

47. **Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría ¿Cuántos tiene? Descríbelos.**



Tiene 5. Cada eje pasa por un vértice y por el punto medio de uno de sus lados.

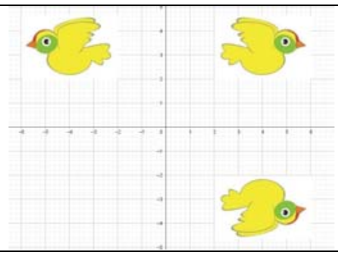
48. Reproduce en tu cuaderno la figura P del margen.

a) Dibuja el pájaro P’ simétrico respecto al eje de ordenadas.

b) Dibuja el pájaro P’’ simétrico respecto al eje de abscisas.

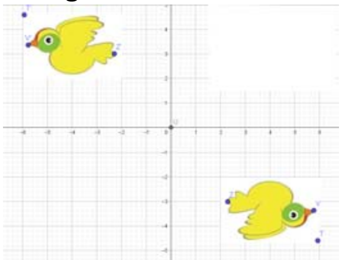
c) ¿Existe alguna simetría axial que trasforme P’ en P’’? ¿Existe alguna simetría central que transforme P’ en P’’?

d) Si el pico del pájaro P tuviera unas coordenadas (–2, 5), ¿qué coordenadas tendría el pico del pájaro P’? ¿Y el del pájaro P’’?



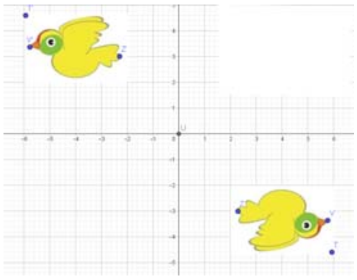
c) No hay simetría axial que transforme P`en P``

La simetría central con centro en el origen transforma P`en P``

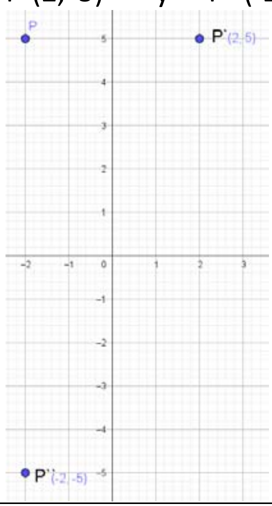


c) No hay simetría axial que transforme P`en P``

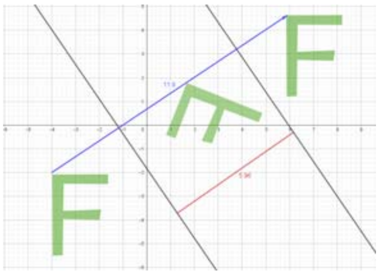
La simetría central con centro en el origen transforma P`en P``



P`(2, 5) y P``(-2, -5)

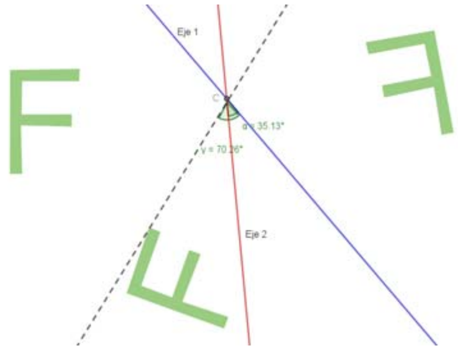


49. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría paralelos y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es una traslación y determina el vector de traslación.



El vector de traslación es perpendicular a la dirección de las rectas, de sentido de la primera recta a la segunda y de módulo, el doble de la distancia entre las rectas.

50. Dibuja en tu cuaderno dos ejes de simetría secantes y una letra F. Dibuja la composición de ambas simetrías a dicha letra, comprobando que la composición de ellas es un giro y determina el centro y el ángulo de giro.



El centro de giro es el punto de intersección de las rectas, y el ángulo de giro tiene de amplitud el doble del ángulo que forman las rectas y de sentido, de la primera recta a la segunda.

51. Si aplicamos una simetría a una figura, ¿qué transformación debemos aplicarle para obtener la figura inicial?

Para obtener la figura inicial después de haberle aplicado una simetría, debemos aplicar una simetría adicional, específicamente la simetría respecto al mismo eje o simetría inversa. Esto es, aplicar la simetría dos veces.

52. La composición de dos simetrías planas de ejes secantes es un giro. ¿Cómo deben ser los ejes para que sea un giro de 180° (o una simetría central)?

Para que el resultado sea un giro de 180°, es necesario que los ejes de simetría estén dispuestos de manera que el ángulo entre ellos sea de 90°.

53. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

Una botella de agua es simétrica, con eje vertical, un bolígrafo también lo es, con eje vertical, etc. Las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas… también suelen ser simétricas, con ejes verticales, excepto la ventana, que también tiene eje de simetría horizontal.

54. Define los planos de simetría y los ejes de rotación de las siguientes figuras:
a) Un prisma recto de base cuadrada. ¿Y si es oblicuo?
b) Una pirámide recta de base cuadrada.
c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero sus bases son rectángulos, ¿qué simetrías se mantienen?

a) Tiene 5 planos de simetría, 2 pasan por 4 vértices y 2 aristas laterales; 2 pasan por los puntos medios de 4 aristas de la base; 1 pasa por los puntos medios de las aristas laterales. Tiene un eje de rotación de 90°, 180° y 270° que va de centro de la base cuadrada a centro de la otra base. Un prisma oblicuo, ninguno.

b) Pirámide de base cuadrada tiene 4 planos de simetría, 2 pasan por 2 vértices de la base y el vértice y los otros 2, por los puntos medios de las aristas de la base y el vértice. Tiene un eje de rotación de 90°, 180° y 270° que pasa por el vértice y el centro de cuadrado de la base.

c) Se pierden los planos de simetría que pasan por dos aristas.

55. Determina los planos de simetría y los ejes de rotación de estas figuras:
a) Un prisma recto cuya base es un triángulo equilátero.
b) Una pirámide recta de base un triángulo equilátero. ¿Y si es oblicua?
c) Si el prisma y la pirámide son rectos, pero de base un triángulo isósceles, ¿qué simetrías se mantienen?

Prisma recto de base un triángulo equilátero: 3 planos de simetría verticales.1 eje de rotación (perpendicular a la base).
Pirámide recta de base un triángulo equilátero: 3 planos de simetría verticales. 1 eje de rotación (a través del vértice y el centro de la base).
Prisma oblicuo de base un triángulo equilátero: No tiene planos de simetría. No tiene ejes de rotación.
Prisma recto de base un triángulo isósceles: 1 plano de simetría vertical. 1 eje de rotación (a través del vértice superior y el centro de la base).
Pirámide recta de base un triángulo isósceles: 1 plano de simetría vertical. 1 eje de rotación (a través del vértice y el centro de la base)

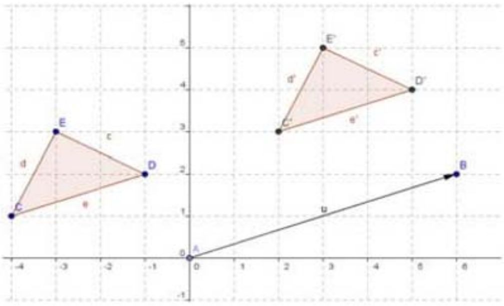
56. Mediante una simetría especular, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Plano: Se transforma en sí mismo, manteniendo la estructura.
Esfera: Se refleja en sí misma, manteniendo la forma y tamaño.
Cono: Se refleja, pero puede cambiar de orientación dependiendo del plano de simetría.
Dos planos paralelos: Se reflejan en otros dos planos paralelos, manteniendo la distancia relativa.
Dos planos ortogonales: Se reflejan en dos planos ortogonales, manteniendo la relación perpendicular.

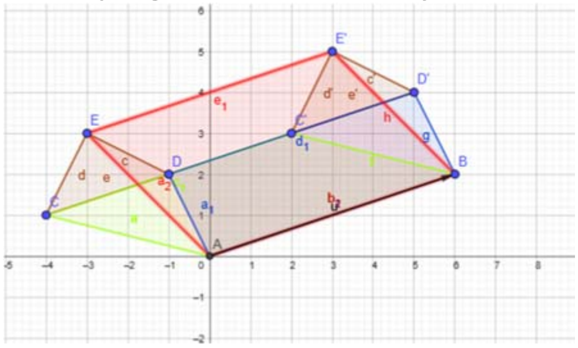
GEOGEBRA

57. Utiliza Geogebra para estudiar vectores y traslaciones.

En un archivo de Geogebra Visualiza los ejes, la cuadrícula y la ventana algebraica.
Con la herramienta Nuevo Punto define el origen de coordenadas como A y el punto de coordenadas (6, 2) como B. y con la herramienta Vector entre dos puntos determina el vector u de origen A y extremo B que tendrá coordenadas (6, 2).
Define con Nuevo Punto C (-4, 1), D (-1, 2) y E (-3, 3) y con Polígono dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos.
Observa que los puntos que has dibujado aparecen en la ventana algebraica como objetos libres y el triángulo como objeto dependiente.
Utiliza la herramienta Trasladar objeto acorde a vector para trasladar el triángulo CDE según el vector u, se obtiene el triángulo C’D’E’.



¿Qué tipo de cuadriláteros son los polígonos *ACC'B, ADD'B y AEE'B*?



Todos ellos son romboides

58. Comprueba en la ventana algebraica que:

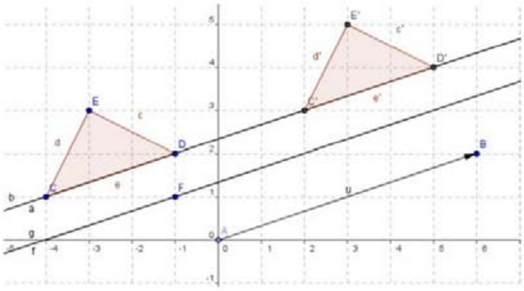
a) **Las coordenadas de los puntos *C', D' y E'* se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos *C, D, y E* las coordenadas del vector *u.***

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulos *CDE* y *C'D'E'* coinciden.

- Dibuja con **Recta que pasa por 2 puntos**, la recta *a* que pasa por los puntos por *C* y *D* y comprueba, con la ecuación de la recta, que *C'* y *D'* están en la misma recta.
- Traslada ahora la recta *a* según el vector *u*, aparece, denominada *b*, la misma recta.

¿Qué propiedad tiene la recta a para que permanezca invariante mediante la traslación? Una conjetura es que la recta a es paralela al vector u.

- Para comprobar la conjetura define un **Nuevo Punto** *F* (-1, 1) y con **Recta paralela** dibuja una recta *f* que pase por *F* y paralela al vector *u*.
- Traslada la recta *f* según el vector *u* y verás que aparece la recta *g* que coincide con ella. Dibuja otras rectas paralelas al vector u y comprueba que la traslación las deja invariantes.
- Mueve con el puntero el punto *B*, para que el vector *u* tenga distinta dirección y observa como la recta *a* ya no tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada, la recta *b*, es distinta y paralela a ella, sin embargo, la recta *f* tiene la misma dirección que el vector *u* y su trasladada *g* coincide con ella.



a) C' (2,3) = C (-4,-2) + u (6,2)
D' (5,4) = D (-1,2) + u (6,2)
E' (3,5) = E (-3,3) + u (6,2)

b) Longitud de CE = ED = CD = 2. Como los lados son iguales, las áreas serán iguales

59. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

En una traslación general, no hay ningún punto que permanezca invariante, a menos que estemos hablando de una traslación nula.

60. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

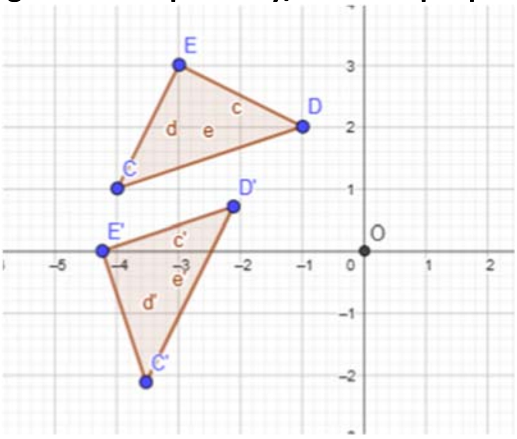
Los puntos invariantes en una simetría axial son los puntos situados sobre el eje de simetría. Es decir, cualquier punto que esté sobre la recta de simetría no cambia de posición después de la reflexión.

Rectas invariantes, además del eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, son rectas invariantes las rectas ortogonales al eje de simetría.

61. Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto *O* como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45°.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman mediante este giro.

b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.



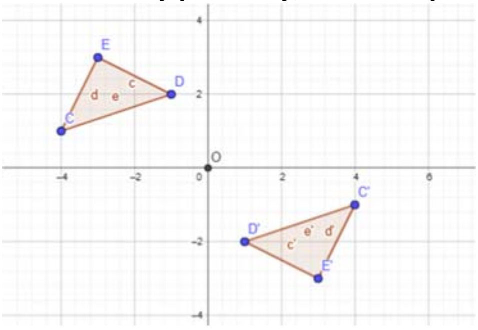
No existen puntos ni rectas invariantes (sie el giro no es de 180°)

62. Utiliza la herramienta Refleja objeto por punto para estudiar la simetría central. Define un punto *O* como centro de simetría, por ejemplo, el centro de coordenadas.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman por una simetría central.

b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180°.

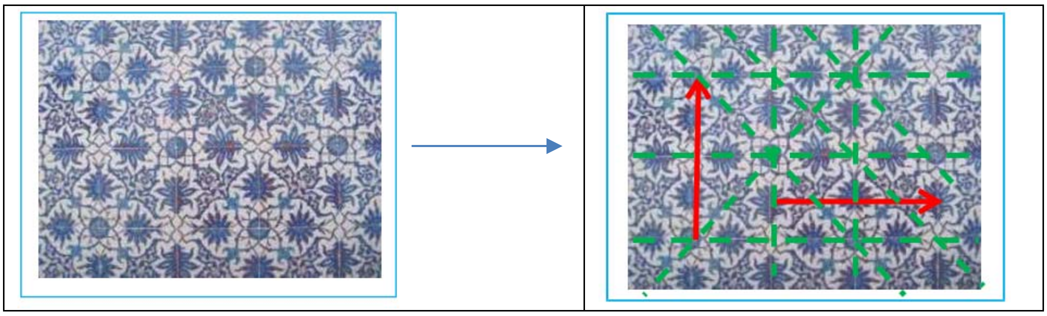
c) Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.



En la simetría central, el centro es un punto invariante, y las rectas que pasan por ese centro son rectas invariantes.

5. MOSAICOS, FRISOS Y ROSETONES

63. Mira este azulejo de un mosaico de Estambul. La celda unidad es cada uno de los azulejos con la que se construye todo el mosaico mediante traslaciones. Indica los vectores de traslación. Pero puedes reducir el motivo mínimo. ¿Utilizando giros? ¿Utilizando simetrías? Mira la ampliación: Comprueba que puedes utilizar como motivo mínimo la octava parte del azulejo.
Realiza la misma observación con los otros dos azulejos de Estambul siguientes:

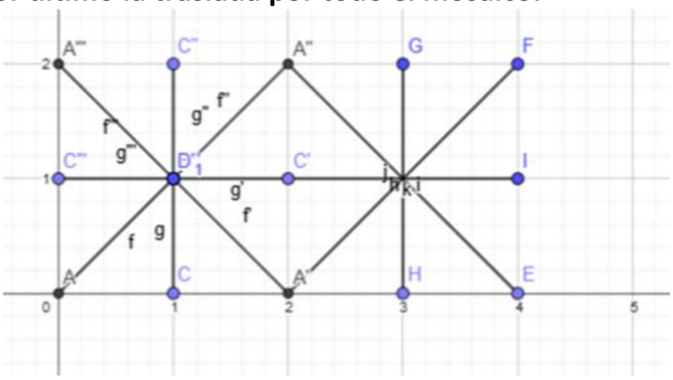


Dos vectores de traslación ortogonales indicados en rojo. Ejes de simetría horizontales, verticales y oblicuos marcados, algunos de ellos, en verde. Los puntos de intersección de los ejes de simetría son centros de giro de 90°.

64. Análisis de mosaicos de la Alhambra: Observa el mosaico del margen. Imagina que es infinito, que completa todo el plano. Puedes tomar como motivo mínimo un par de hojitas. Para pasar de un par de hojitas al otro par adyacente, ¿qué trasformación has utilizado? ¿Es una simetría? ¿Es un giro? ¿Hay centros de giro de 60°? ¿Y de 180°? ¿Y de 30°?

No hay simetrías. Hay giros de 60° y de 120°.

65. Genera un mosaico mediante giros y traslaciones:
Primero dibuja una trama de cuadrados, dibuja un motivo mínimo formado por dos segmentos, luego aplica isometrías a ese motivo: giros de 90°, con los que dibuja la estrella, que por simetría completa la celda unidad a la que por último la traslada por todo el mosaico.



66. Observa cómo se realiza un estudio del mosaico del margen, buscando la celda unidad, el motivo mínimo y estudiando sus giros (de 90° y 180°) y sus ejes de simetría

67. Hemos formado frisos utilizando las letras del alfabeto. Todos ellos se forman por traslación. Pero en ocasiones hay otras isometrías. A) ¿En cuáles hay una simetría de eje horizontal? B) ¿En cuáles hay giros de 180°. C) ¿En cuáles hay simetrías de eje vertical? D) ¿Hay simetrías con deslizamiento? E) Señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).

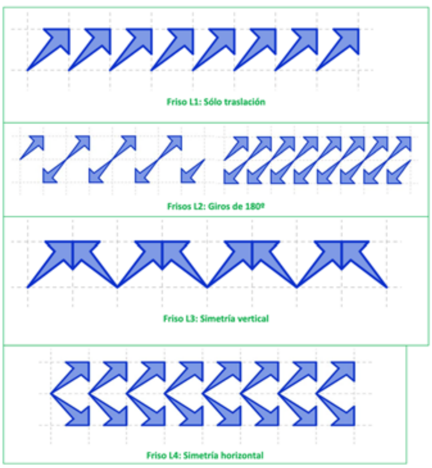
L1. LLLLL, L2. NNNNN, L3. VVVVV, L4. CCCCC, L5. HHHHH, L6. pbpbpb, L7. pqdbpqdbp

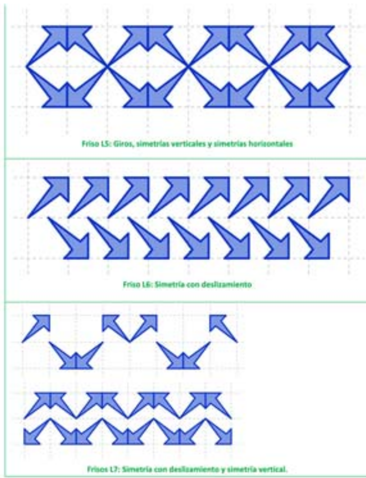
A) En L4, L5.
B) L2, L5.
C) L3, L5, L7.
D) Si, en L6 y L7.
E) Traslación, simetría horizontal, simetría vertical, giro de 180°, y simetría con deslizamiento.

68. Sal a la calle o en tu casa y busca frisos. Fotografía rejas, mira puntillas y grecas… y haz un estudio de los diferentes frisos que encuentres. Dibuja en tu cuaderno su diseño e intenta clasificarlos según el esquema de las letras del problema anterior, según las transformaciones que utilicen. Para ello hazte las siguientes preguntas: 1) ¿Tiene giros? Si la respuesta es NO, entonces: 2) ¿Tiene simetría horizontal? Si la respuesta es SI, es un L4, que como el friso formado por la letra C o la letra D, no tiene giros y si, simetría de eje horizontal. Si la respuesta es NO, entonces: 3) ¿Tiene simetría vertical? Si la respuesta es SI, es un L3, como el friso formado por la letra V o la letra A, que no tiene ni giros, ni simetría horizontal y si simetría vertical. Si la respuesta es NO, entonces: 4) ¿Tiene simetría con deslizamiento? Si lo tiene es un L6, y si no es un L1. Pero si tiene giros puede tener también simetría horizontal y es un L5, o tener simetría con deslizamiento y ser un L7, o sólo tener el giro y ser un L2, como el friso formado por la letra N o la letra S.

Solución gráfica y abierta

69. En los frisos siguientes señala todas las familias de simetrías respecto a un eje, de giros y de traslaciones por las cuales un punto del friso se transforma en otro punto del mismo (supuesto que se prolongue hasta el infinito).





En el friso L1 podemos ver que las flechas solo se copian una al lado de la otra. Por lo tanto, hay traslación, pero no giros ni simetría.
En el friso L2 algunas flechas están giradas 180 grados (boca arriba y boca abajo). Por lo tanto, tiene traslación y giros de 180°, pero no simetría.
En el friso L3, si pones un espejo en medio de dos flechas, podemos ver que una es el reflejo de la otra. Por lo tanto, tiene traslación y simetría vertical, pero no giros.
En el friso L4, las flechas de arriba son el reflejo de las de abajo, como si hubiera un espejo en el centro. Tiene traslación y simetría horizontal, pero no giros.
En el friso L5 podemos ver que tiene simetría vertical, ya que si doblamos el dibujo por la línea que pasa por el centro de las flechas, un lado coincide con el otro. Además, tiene simetría horizontal porque si reflejamos el patrón en una línea horizontal, sigue viéndose igual. Podemos observar que tiene giros de 180° ya que si giramos una de las figuras 180°, se superpone con otra figura del friso. Y, por último, también tiene traslaciones, ya que, si deslizamos todo el friso hacia la derecha o la izquierda, sigue siendo el mismo.
El friso L6 solo presenta traslación con deslizamiento porque si movemos el patrón hacia la derecha y hacia abajo se alinea con el siguiente.
Por útlimo, en el friso L7 encontramos simetría vertical, ya que, si doblamos por la línea vertical del centro de cada grupo de flechas, los lados coinciden. También presenta traslación con deslizamiento porque si movemos el patrón hacia la derecha, el siguiente es igual, pero reflejado.

70. Análisis de tapacubos: Observa los siguientes tapacubos. Indica, para cada uno de ellos, las siguientes cuestiones:

a) Tiene simetría central.
2, 3, 4, 7, 9.

b) Tiene ejes de simetría axial. ¿Cuántos?
Todos tienen ejes de simetría axial, aunque en diferente cantidad:
Tapacubos 1 - 2 ejes
Tapacubos 2 - 2 ejes
Tapacubos 3 - 4 ejes
Tapacubos 4 - 5 ejes
Tapacubos 5 - 5 ejes
Tapacubos 6 - 5 ejes
Tapacubos 7- 5 ejes
Tapacubos 8- 5 ejes
Tapacubos 9 - 6 ejes
Tapacubos 10 - 2 ejes
Tapacubos 11 - 12 ejes
Tapacubos 12 - 12 ejes

c) Tiene centro de giro, ¿cuál es el menor ángulo de giro que lo deja invariante?

Un tapacubos tiene centro de giro si podemos girarlo ciertos grados y sigue viéndose igual.El menor ángulo de giro lo obtenemos dividiendo 360° entre el número de veces que la figura se repite en una vuelta completa.

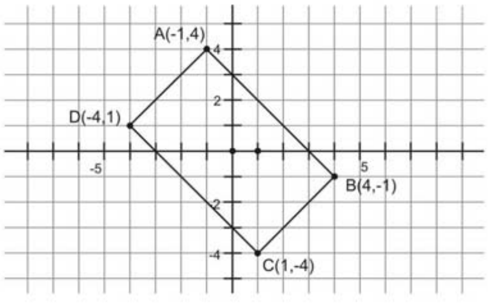
Todos tienen centro de giro y el menor ángulo de giro de cada uno es:
Tapacubos 1 - 180°
Tapacubos 2 - 180°
Tapacubos 3 - 90°
Tapacubos 4 - 72°
Tapacubos 5 - 72°
Tapacubos 6 - 72°
Tapacubos 7 - 72°
Tapacubos 8 - 72°
Tapacubos 9 - 60°
Tapacubos 10 - 180°
Tapacubos 11- 30°
Tapacubos 12 - 30°

d) Sal a la calle y fotografía o dibuja los tapacubos que veas y te parezcan interesantes. Haz un estudio de ellos.

Solución abierta

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dibuja en tu cuaderno un paralelogramo sobre un sistema de referencia y una cuadrícula. Tienes cuatro segmentos orientados. Determina las coordenadas de los vectores sobre dichos segmentos. ¿Cuáles tienen las mismas coordenadas?



AB = (4−(−1), −1−4)=(4+1, −1−4)=**(5, −5)**
BC = (1−4, −4−(−1))=(1−4, −4+1)=**(−3, −3)**
CD = (−4−1, 1−(−4))=(−4−1, 1+4)=**(−5, 5)**
DA = (−1−(−4), 4−1)=(−1+4, 4−1)=**(3, 3)**
Ningún par de vectores tiene exactamente las mismas coordenadas, pero los lados opuestos tienen coordenadas iguales y opuestas en signo, como es característico en un paralelogramo.

2. Tenemos los puntos A (0, 5), B (3, 6), C (4, -2) y D (7, 3). Calcula las coordenadas de los vectores AB; AC; AD; BC; BD; CD; DC; BA.
AB = (3−0, 6−5)=(3, 1)
AC = (4−0, −2−5)=(4, −7)
AD = (7−0, 3−5)=(7, −2)
BC = (4−3, −2−6)=(1, −8)
BD = (7−3, 3−6)=(4, −3)
CD = (7−4, 3−(−2))=(3, 5)
DC = (4−7, −2−3)=(−3, −5)
BA = (0−3, 5−6)=(−3, −1)

3. Determina el vector de traslación que traslada el punto A (3, 7) al punto A’ (1, 5).

AA’= (1−3, 5−7) = (−2, −2)

4. Por la traslación de vector u = (2, 8) se traslada el punto A (9, 4) al punto A’. ¿Cuáles son las coordenadas de A’?
Si llamamos a A(a, b) y a A’(c, d), sabemos que u=(c-a, d-b), por lo tanto:
(2, 8) = (c-9, d-4). De esta forma podemos obtener:
c−9 = 2 , d−4 = 8
Así: **A’ =** (9+2, 4+8) = (11, 12)

5. Por la traslación de vector u = (3, 1) se traslada el punto A al punto A’ (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas de A?

Al igual que en el ejercicio anterior, sabemos:

u= (3, 1) , A' = (3,3)

Por lo tanto:

$3 = a+3 \Rightarrow a = 3-3 = 0$

$3 = b+1 \Rightarrow b = 3-1 = 2$

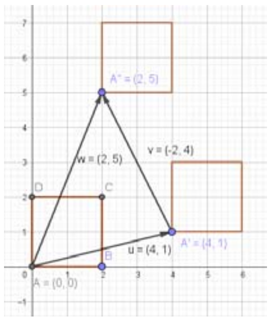
Por lo tanto, A(0, 2)

6. Trasladamos la circunferencia de centro C (5, 2) y radio 3 unidades con la traslación de vector u = (-5, -2). Determina el centro y el radio de la circunferencia trasladada.

Para encontrar el nuevo centro de la circunferencia trasladada, aplicamos la traslación sumando el vector de traslación u = (-5, -2) a las coordenadas del centro original C(5, 2):

C' = (-5+5, -2+2) = (0, 0). El radio no varía, 3 unidades.

7. Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y en ellos un cuadrado de lado 2 unidades al que llamas C, le aplicas una traslación según el vector u = (4, 1) y llamas C' a su trasladado. Ahora aplicas a C' una traslación según el vector v = (-2, 4). La isometría que transforma C en C'', ¿es una traslación? Escribe las coordenadas de su vector. Mediante esa traslación, ¿en qué punto se transforma el origen de coordenadas?



El cuadrado tiene los vértices en los siguientes puntos:

A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)

Primero vamos a aplicar la traslación u = (4,1) sumando el vector a cada vértice:

A' = (0+4, 0+1) = (4, 1)

B' = (2+4, 0+1) = (6, 1)

C' = (2+4, 2+1) = (6, 3)

D' = (0+4, 2+1) = (4, 3)

Ya tenemos los vértices de C'

Ahora aplicamos una traslación v = (2,4) sumando el vector a cada vértice:

A'' = (4−2, 1+4) = (2, 5)

B'' = (6−2, 1+4) = (4, 5)

C'' = (6−2, 3+4) = (4, 7)

D'' = (4−2, 3+4) = (2, 7)

Por último, calculamos el vector total de la transformación:

u+v = (4,1) + (-2,4) = (4-2, 1+4) = (2, 5)

Esto significa que la transformación de CC a C''C'' es una traslación de vector (6,5), por lo que sí es una traslación.

Con esto sabemos que el origen de coordenadas se transforma en el vector total, ya que:

O' = (0+2, 0+5) = (2, 5)

8. El vértice inferior izquierdo de un cuadrado es A (3, 1) y el vértice superior izquierdo es B (1, 3). Le aplicas una traslación de vector u = (-2, 4), ¿cuáles son las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrado transformado?

Aplicar una traslación de vector u significa que cada punto del cuadrado se traslada 2 unidades hacia la izquierda en el eje x y 4 unidades hacia arriba en el eje y.

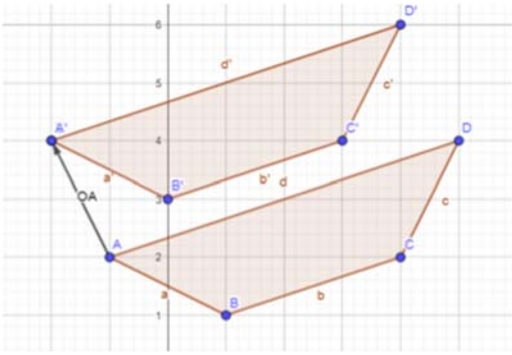
Además, teniendo los vértices A y B, y sabiendo que la distancia entre ellos es 2, podemos saber los otros dos vértices:

C (3, 3)
D (5, 1)

Por tanto, al aplicar la traslación, los vértices transformados serán:

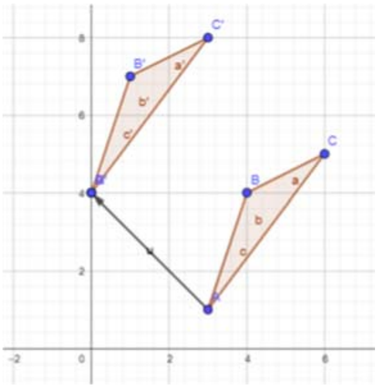
A′ (1, 5)
B′ (−1, 7)
C′ (1, 7)
D′ (3, 5)

9. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al trapecio de la figura la traslación de vector OA = (-1, 2). Determina las coordenadas de los puntos transformados de A (-1, 2), B (1, 1), C (4, 2) y D (5, 4) por dicha traslación.



A′ (-2, 4) , B′ (0, 3) , C′ (3, 4) , D′ (4, 6)

10. Aplica la traslación de vector u = (-3, 4) al triángulo ABC de vértices A (3, 1), B (4, 4), C (6, 5), y calcula las coordenadas del triángulo transformado.

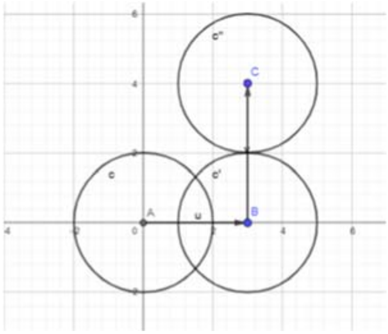


A′ (0, 4) , B′ (1, 7) , C′ (3, 8)

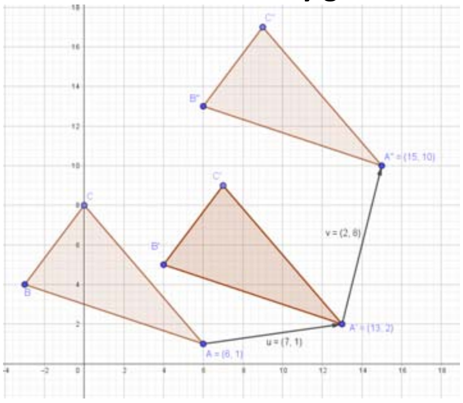
11. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro el origen y radio 2 unidades.
a) Trasládalo con la traslación de vector u = (3, 0).
b) Trasládalo después mediante la traslación de vector v = (0, 4).
c) Indica las coordenadas del centro del segundo círculo trasladado.
d) Indica las coordenadas del trasladado del punto (0, 2) al aplicarle cada una de las dos traslaciones.

Las coordenadas del centro de segundo círculo son (3, 4)

Las coordenadas del punto (0, 2) son (3, 2) tras la primera traslación y (3, 6) tras la segunda



12. Trasladamos el triángulo ABC de vértices A (6, 1), B (-3, 4) y C (0, 8), mediante la traslación de vector u = (7, 1), y luego mediante la traslación de vector v = (2, 8). Determina las coordenadas del triángulo transformado analítica y gráficamente.



A’ = (6, 1) + (7, 1) = (13, 2)
B’ = (-3, 4) + (7, 1) = (4, 5)
C’ = (0, 8) + (7, 1) = (7, 9)

A’’ = (13, 2) + (2, 8) = (15, 10)
B’’ = (4, 5) + (2, 8) = (6, 13)
C’’ = (7, 9) + (2, 8) = (9, 17)

13. La composición de dos traslaciones tiene por vector (5, 9). Si una de ellas es la traslación de vector u= (7, 3), ¿qué componentes tiene el otro vector de traslación?

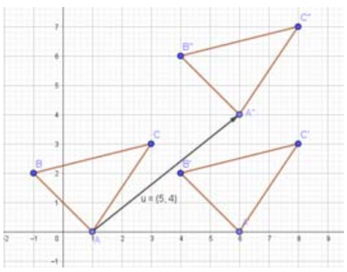
La composición de las traslaciones tiene el vector resultante (5, 9), entonces u + v = (5, 9)

Sabiendo que u = (7,3), y sustituyéndolo en la ecuación, v = (5, 9) – (7, 3) = (-2, 6)

14. a) Dibuja en tu cuaderno un triángulo ABC y trasládalo 5 cm a la derecha. Denomina A’B’C’ al triángulo obtenido.

b) Traslada A’B’C’ ahora 4 cm hacia arriba y denomina A’’B’’C’’ al nuevo triángulo.

c) Dibuja el vector que permite pasar directamente del triángulo ABC al A’’B’’C’’ y mide su longitud. ¿Cuáles son sus coordenadas?



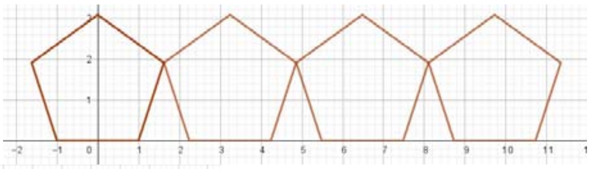
u = (5, 4).

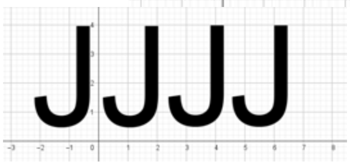
Longitud = $\sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$ =6.4 cm

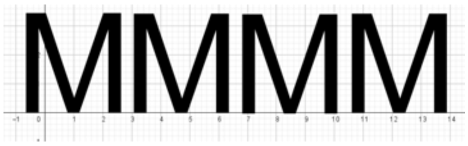
15. Determina el vector de traslación de la traslación inversa a la de vector u = (-2, 5).

Para obtener la traslación inversa, simplemente cambiamos el signo de las componentes del vector original, por lo que el vector sería u’ = (2,-5)

16. a) Dibuja en tu cuaderno una figura, y repite el dibujo trasladando la figura 4 veces con la misma traslación. Al hacerlo, dibujarás un friso.
b) Un friso confeccionado con letras L es: L L L L L. Dibuja un friso confeccionado con letras J. Otro confeccionado con letras M. Además de traslación, ¿tiene simetrías?
c) Busca un friso. Mira las rejas de tu calle, un bordado o una puntilla, las grecas de unos azulejos… y dibuja su diseño en tu cuaderno.







b) El friso con la letra M tiene simetrías verticales
c) Solución gráfica y abierta

17. Mediante una traslación en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

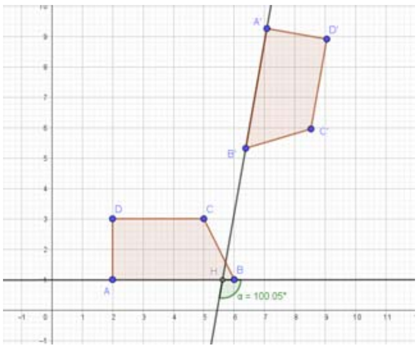
- Plano: Se mantiene como plano, pero se desplaza sin alterar su forma ni orientación.
- Esfera: Se mantiene como esfera, con el mismo tamaño, solo que trasladada a otra ubicación.
- Cono: Se mantiene como cono, con el mismo tamaño y forma, solo desplazado en el espacio.
- Dos planos paralelos: Después de la traslación, los planos siguen siendo paralelos y mantienen la misma distancia entre sí.
- Dos planos ortogonales: Los planos siguen siendo ortogonales y mantienen la relación de perpendicularidad.

La traslación mantiene las propiedades geométricas esenciales (como la forma, tamaño y relaciones angulares) de los objetos, solo cambia su posición en el espacio.

18. Dibuja en tu cuaderno el punto A (5, 4). Indica las coordenadas del punto A’ que se obtiene al girar 180° y con centro el origen el punto A. Indica las coordenadas del punto A’’ obtenido al girar A’ 90° con el mismo centro de giro.

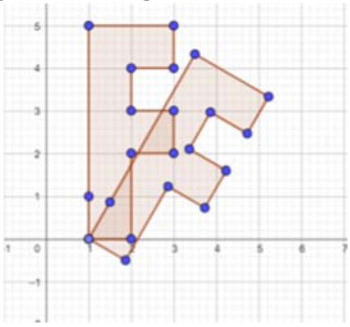
El punto A (5, 4) al girar180° con centro en el origen se transforma en A′ (−5,−4)
Luego, al girar A′ (−5, −4) 90° con centro en el origen, se obtiene el punto A′′ (−4, 5)

19. Dibuja una figura en tu cuaderno, cálcala, recórtala y pégala inclinada al lado de la inicial. Las dos figuras, ¿tienen todas las longitudes iguales?, ¿y sus ángulos? Determina, con compás y transportador, el centro y el ángulo de giro.



Las dos figuras tienen todas las longitudes y los ángulos iguales.
El centro es H y hemos aplicado un giro de unos 80°

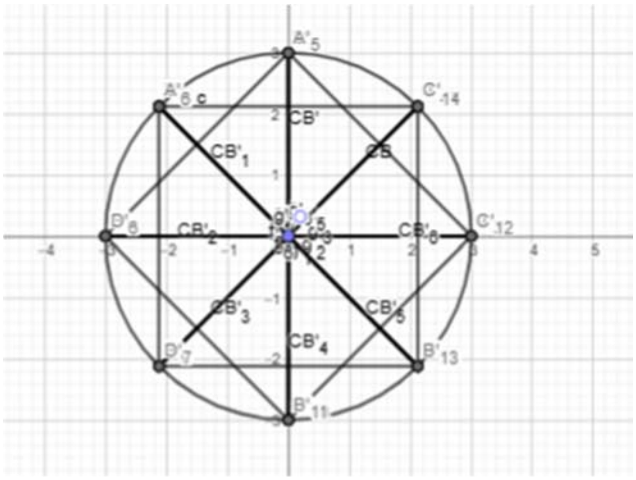
20. Dibuja en tu cuaderno una letra F y la letra F girada 30° con centro de giro su punto más inferior.



21. Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo isósceles y con centro en el vértice de uno de los ángulos agudos aplícale un giro de 45° en sentido positivo. Luego aplícale otro giro de 45°, y así sucesivamente hasta llegar al triángulo inicial. ¿Qué giros has estado haciendo?

Los giros que hacemos son giros de 45° en sentido positivo (horario) alrededor del vértice A.
Después de 8 giros de 45°, se completa un giro total de 360°, regresando al triángulo inicial.

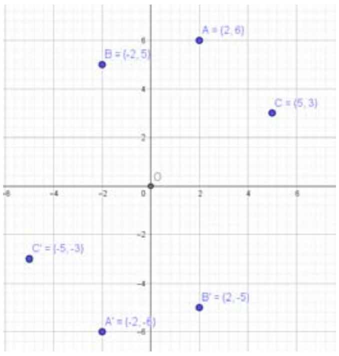
22. Dibuja en tu cuaderno un círculo de centro O, dos diámetros perpendiculares AB y CD y una cuerda CB. Sobre el mismo dibujo traza las figuras obtenidas haciendo girar la figura formada por los dos diámetros y la cuerda, con giros de centro O y ángulos 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° y 315°. Habrás hecho la composición de giros de 45° varias veces.



23. ¿La letra H tiene centro de simetría? Indica tres objetos cotidianos que tengan simetría central.

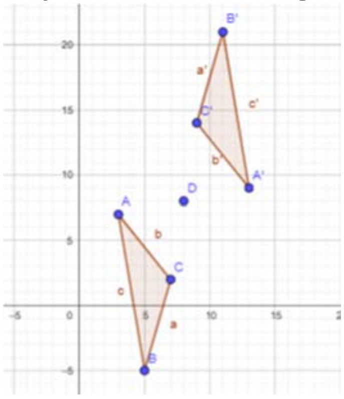
Sí, la letra H tiene centro de simetría. Esto significa que, si dibujamos un punto en el centro de la letra H y luego trazamos una línea recta desde cualquier punto de la letra hasta el centro, esa línea tendrá un punto simétrico en el lado opuesto, a la misma distancia del centro, en la misma dirección, pero en el lado opuesto.
Otros objetos simétricos de forma central pueden ser una pelota, un espejo redondo, la luna llena, un cubo, una flor de seis pétalos.

24. Sobre unos ejes cartesianos representa los puntos A (2, 6), B (-2, 5), C (5, 3) y sus simétricos respecto al origen A', B' y C'. ¿Qué coordenadas tienen A', B' y C'?



A’ (-2,-6),   B’ (2,-5),   C’ (-5,-3)

25. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (3, 7), B (5, -5) y C (7, 2). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el punto D (8, 8) un ángulo de 180°. Es una simetría central. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del nuevo triángulo?



Sí, es una simetría central.   A’ = (13, 9),   B’ = (11, 21)   y   C’ = (9, 14).

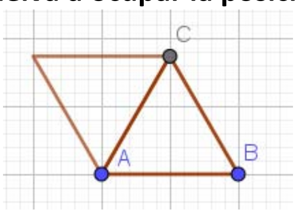
26. Dibuja en un sistema de referencia un punto P y su simétrico P’ respecto del origen. Si las coordenadas de P son (x, y), ¿cuáles son las de P’?

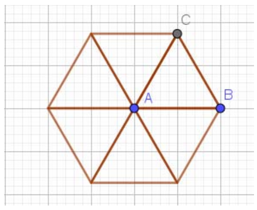
Las coordenadas de P’ serán (-x, -y)

27. Dado el triángulo A (3, -4), B (5, 6), C (-4, 5), halla las coordenadas de los vértices del triángulo simétrico respecto del origen.

A’ (-3,4),   B’ (-5,-6),   C’ (4,-5)

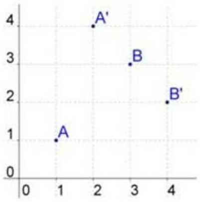
28. Dibuja un triángulo equilátero ABC y con centro en el vértice A aplícale un giro de ángulo 60°. El triángulo dado y el transformado, ¿qué figura forman? Vuelve a aplicar al triángulo trasformado el mismo giro de centro A, ¿qué giros has estado haciendo? ¿Cuántos giros debes aplicar al triángulo inicial para que vuelva a ocupar la posición inicial?

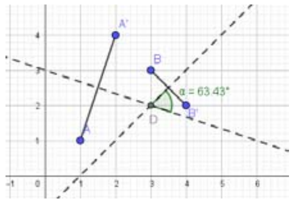




El triángulo original y el transformado forman un rombo.
Los giros realizados son de 60° en torno al vértice A.
Se deben aplicar 6 giros de 60° para que el triángulo regrese a su posición original y obtenemos un hexágono.

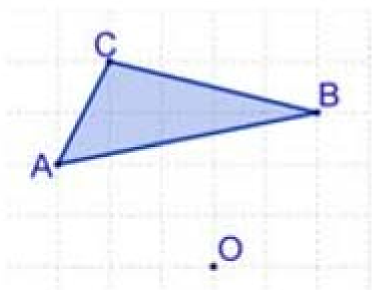
29. Dibuja en tu cuaderno los cuatro puntos de la figura. Determina, con regla, compás y transportador, el centro y el ángulo de giro sabiendo que los puntos A y B se han transformado mediante un giro en A' y B'.

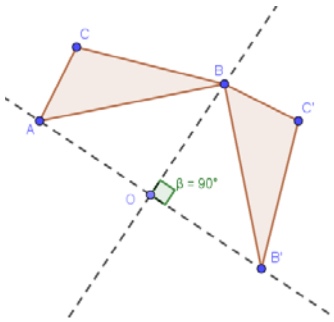




Hay que dibujar la mediatriz del segmento AA’ y la del segmento BB’ y buscar el punto donde se cortan.
El centro es el punto D(3, 2) y el ángulo 63,43°

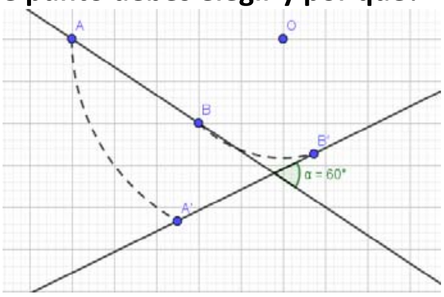
30. Dibuja la imagen que resulta de aplicar al triángulo de la figura el giro de centro O que transforma el punto A en el punto B.





Resulta otro triángulo igual

31. Utiliza un transportador de ángulos, regla y compás, para girar una recta 60° respecto a un punto O exterior a ella (es suficiente girar dos puntos de dicha recta). Mide los ángulos que forman las dos rectas, la inicial y la girada. ¿Observas alguna regularidad? Investiga un método para girar una recta transformando un solo punto. ¿Qué punto debes elegir y por qué?

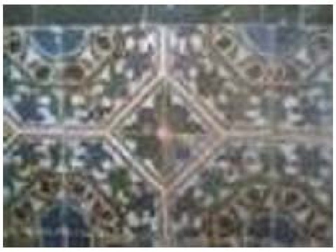


El ángulo formado por las dos rectas es de 60°
Basta girar el punto donde corta a la recta la ortogonal desde el punto O.

32. Juego para dos jugadores: Forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Alternativamente cada jugador retira o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (Ayuda: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

Juega. Con la ayuda es fácil descubrir la estrategia ganadora.

33. En el diseño de este mosaico se han utilizado giros en el plano. No lo vemos completo, pero podemos imaginar que fuera infinito. Indica los centros de giro que veas. En el centro de la figura hay un centro de giro clarísimo, ¿de qué ángulo? ¿Hay giros de 45°? ¿Cuáles son sus centros de giro? ¿Hay centros de simetría? Indícalos.

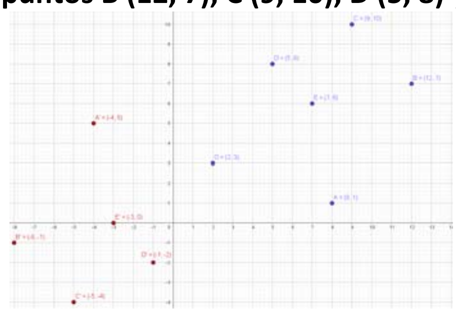


De 90°. No. Hay ejes de simetría ortogonales. Los centros de giro están en la intersección de dichos ejes.

34. Para cada uno de los siguientes polígonos indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que dejan invariantes a cada uno de ellos:
a) Pentágono regular
b) Hexágono regular
c) Decágono regular
d) Triángulo equilátero
e) Rectángulo
f) Cuadrado
g) Rombo
h) Paralelepípedo
i) Octógono regular

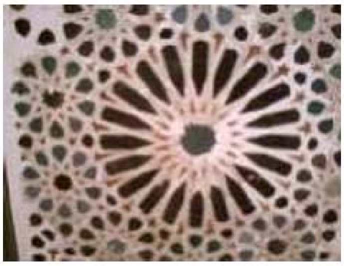
POLÍGONO	CENTRO DE GIRO	MÍNIMO ÁNGULO DE GIRO
Pentágono regular	Centro del pentágono	72°
Hexágono regular	Centro del hexágono	60°
Decágono regular	Centro del decágono	36°
Triángulo equilátero	Centro del triángulo	120°
Rectángulo	Centro del rectángulo	180°
Cuadrado	Centro del cuadrado	90°
Rombo	Centro del rombo	180°
Paralelepípedo	Centro del paralelepípedo	90°
Octógono regular	Centro del octógono	45°

35. En la simetría central de centro (2, 3) hemos visto que el simétrico del punto A (8, 1) es el punto A'(4, 5). Calcula los simétricos de los puntos B (12, 7), C (9, 10), D (5, 8) y E (7, 6).



B' (-8,-1), C' (-5,-4), D' (-1,-2), E' (-3,0)

36. Indica si el mosaico de la Alhambra del margen tiene centro de giro, y determina cuál es el menor ángulo de giro que hace que el mosaico se superponga (sin tener en cuenta los cambios de color). ¿Hay centros de simetría?

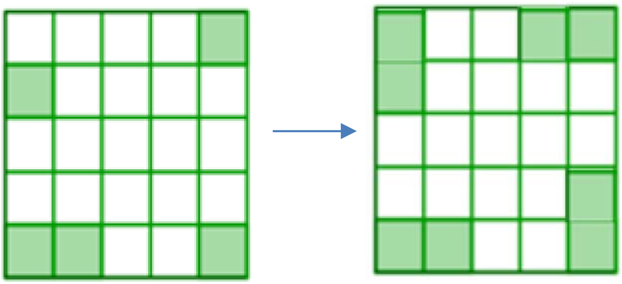


Tiene centro de giro de 18°

37. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una simetría central, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

La simetría central es un movimiento directo, conserva distancias y ángulos.

38. ¿Qué número mínimo de cuadrados es necesario pintar de verde para que el cuadrado grande tenga un centro de simetría?

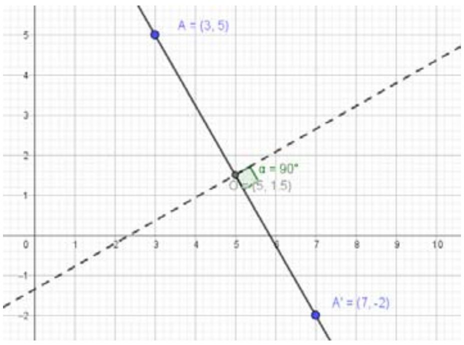


3 cuadrados

39. Hemos girado el punto A (3, 5) y hemos obtenido el punto A' (7, 2). Determina el centro de giro y el ángulo utilizando regla, compás y transportador de ángulos.

El centro de giro O se encuentra en la mediatriz de la línea AA'.

El ángulo de rotación es el ángulo entre el vector OA y OA' que puedes medir con el transportador de ángulos. (180°)



40. ¿Cuáles de los polígonos estrellados de la figura del margen tienen centro de simetría? Indica el centro de giro y el mínimo ángulo de giro que deja invariantes a cada uno de ellos.

Tienen centro de simetría el de 12 puntas y el de 8 puntas. El de 5, no. El ángulo de giro es de: 72°, 30°, 45°, respectivamente.

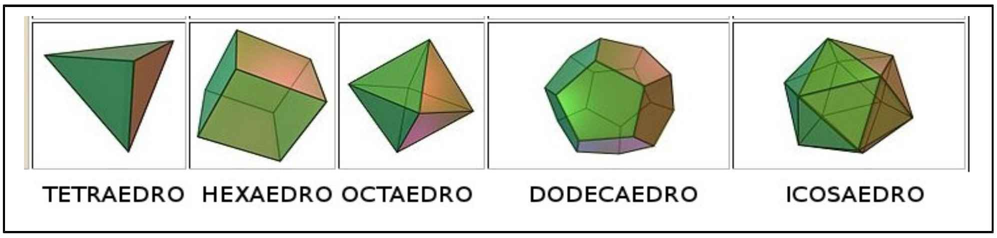
41. Determina tres objetos cotidianos que tengan algún eje de giro.

Alicates, tijeras, rueda de bici, etc.

42. Observa esta torre mudéjar de Teruel. Está diseñada utilizando giros en el espacio. ¿Cuál es su eje de giro? ¿Y el ángulo de giro?

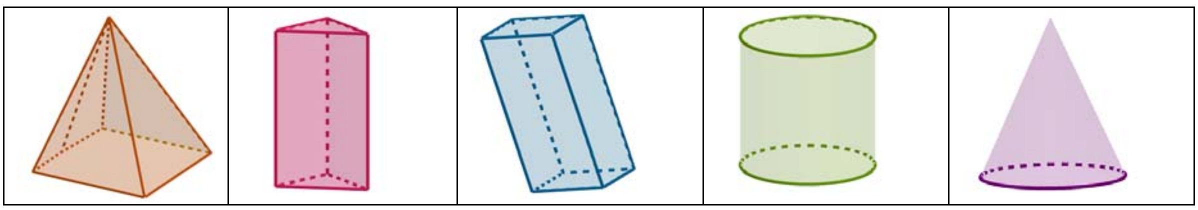
El eje de giro es la recta que pasa por el centro de la torre. 90°

43. Piensa en los cinco poliedros regulares. Unos tienen simetría central en el espacio, otros no. ¿Cuáles la tienen?



Los poliedros regulares que tienen simetría central son:
Cubo (Hexaedro regular)
Octaedro
Dodecaedro
Icosaedro
El tetraedro no tiene simetría central.

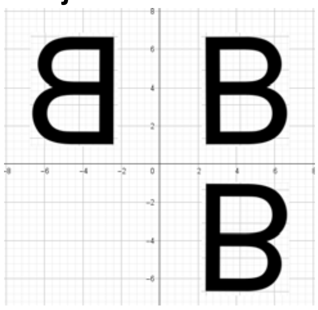
44. Piensa ahora en los siguientes cuerpos geométricos: Una pirámide cuadrangular regular, un prisma triangular regular, un prisma romboidal oblicuo, un cilindro y un cono. ¿Cuáles pueden formarse mediante giros en el espacio? ¿Cuál es su eje de giro? ¿Cuáles tienen simetría central y cuáles no?



CUERPO GEOMÉTRICO	GIRO	EJE DE GIRO	SIMETRÍA CENTRAL
Pirámide cuadrangular regular	Si	Eje perpendicular a la base cuadrada (pasando por el vértice y centro de la base)	No
Prisma triangular regular	Si	Eje perperdicular a las bases triangulares	No
Prisma romboidal oblicuo	No	No tiene un eje de giro simétrico	No
Cilindro	Si	Eje central que conecta las bases circulares	Si
Cono	Si	Eje que pasa por el vértice y el centro de la base circular	No

SIMETRÍAS

45. Dibuja en tu cuaderno un sistema de referencia y una letra B. Dibuja la letra simétrica de B respecto del eje de abscisas y respecto del eje de ordenadas.



46. Clasifica las letras mayúsculas del alfabeto, a) en las que son simétricas respecto de un eje de simetría horizontal y un eje de simetría vertical. b) en las que sólo son simétricas respecto de un eje de simetría vertical, c) en las que sólo lo son respecto del eje de simetría horizontal, y d) en las que no tienen ningún eje de simetría. e) Comprueba que las letras que tienen dos ejes de simetría tienen centro de simetría. La razón ya la sabes: La composición de dos simetrías de ejes secantes es un giro.

a) Letras con simetría respecto a ejes horizontales y verticales: H, I, O, X.

b) Letras simétricas solo respecto de un eje de simetría vertical: A, M, T, U, V, W, X, Y.

c) Letras simétricas solo respecto de un eje de simetría horizontal: B, C, D, E, K.

d) Letras que no tienen ningún eje de simetría: F, G, J, L, N, P, Q, R, S, Z.

e) Las letras que tienen dos ejes de simetría (y, por lo tanto, centro de simetría): H, I, O, X.

47. ¿Cuáles de las siguientes sucesiones de letras tienen un único eje de simetría? ¿Cuáles tienen dos ejes? ¿Cuáles ninguno? ¿Cuáles tienen centro de simetría?

a) ONO

b) NON

c) DODO

d) OIO

e) HEMO

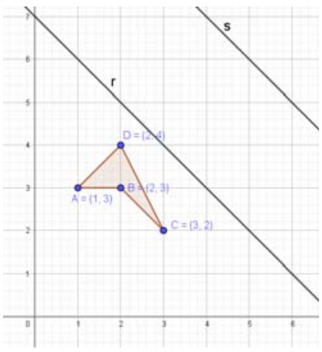
f) HOOH

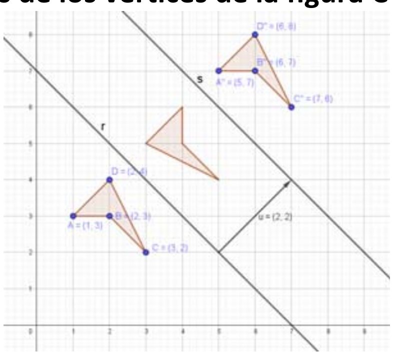
SUCESIÓN	EJE DE SIMETRÍA	CENTRO DE SIMETRÍA
ONO	Ninguno	No
NON	Ninguno	No
DODO	Dos ejes (vertical y horizontal)	Si
OIO	Dos ejes (vertical y horizontal)	Si
HEMO	Ninguno	No
HOOH	Dos ejes (vertical y horizontal)	Si

48. Indica los ejes de simetría de las siguientes figuras:
a) Cuadrado.
b) Triángulo equilátero.
c) Trapecio isósceles.
d) Hexágono.
e) Circunferencia.
f) Rectángulo.
g) Rombo.
h) Pentágono.

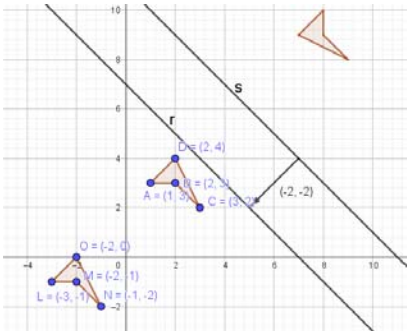
FIGURA	NUMERO DE EJES	DESCRIPCIÓN
Cuadrado	4	2 ejes verticales, 2 horizontales (en el centro de los lados y diagonales)
Triángulo equilátero	3	Desde cada vértice hacia el centro
Trapecio isósceles	1	A través del centro de la base mayor
Hexágono	6	3 ejes pasando por vértices y 3 ejes pasando por centro de los lados
Circunferencia	Infinitos	Cualquier eje que pase por el centro de la circunferencia
Rectángulo	2	1 eje vertical y 1 eje horizontal que pasan por el centro
Rombo	2	Ejes diagonales que conectan los vértices opuestos
Pentágono	5	5 ejes pasando desde los vértices hasta el centro del pentágono

49. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes paralelos, la primera respecto al eje r y la segunda respecto al eje s.
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por dicha composición de simetrías. Si llamamos C al cuadrilátero inicial, C' a su simétrico respecto al eje r y C'' al simétrico de C' respecto al eje s:
b) ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente C en C'';
c) ¿Qué elementos la definen?
d) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje s y después respecto al eje r? ¿Cuáles son ahora las coordenadas de los vértices de la figura C''' transformada?





a) (5, 7), (6, 7), (7, 6) y (6, 8);
b) y c) Una traslación de vector u = (2, 2);
d) Es otra traslación de vector -u = (-2, -2); Vértices: (-1, 1), (0, 1), (1, 0) y (0, 2).



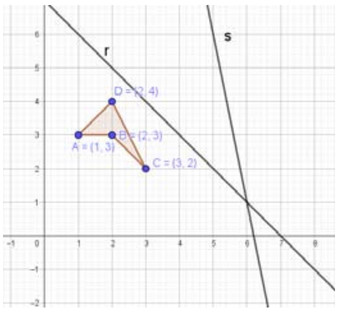
50. Considera que los vértices del cuadrilátero de la figura tienen de coordenadas: (1, 3), (2, 3), (3, 2) y (2, 4). Aplícale dos simetrías axiales de ejes secantes, la primera respecto al eje r y la segunda respecto al eje s.

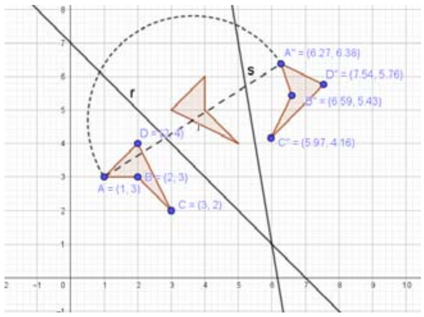
a) Indica las coordenadas de los vértices de las figuras transformadas por la composición de simetrías.

b) Si llamamos C al polígono inicial, C' al simétrico respecto al eje r y C'' al simétrico de C' respecto al eje s: ¿Qué isometría nos permite trasformar directamente C en C’’? ¿Qué elementos la definen?

c) ¿Qué ocurre si aplicamos las dos simetrías en distinto orden, primero respecto al eje s y después respecto al eje r? ¿Qué isometría tenemos ahora? ¿Qué elementos la definen?

d) Indica las coordenadas de los vértices de la figura transformada si primero aplicamos la simetría de eje s y luego la de eje r.



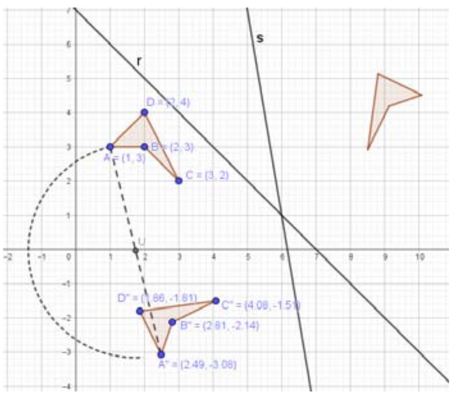


a) Las coordenadas de los vértices de C’’ después de la composición de simetrías son:
A’’(6.27, 6.38), B’’(6.59, 5.43), C’’(5.97, 4.16), D’’(7.54, 5.76)

b) La isometría que transforma directamente C en C’’ es una rotación de 180°.

c) Si aplicamos las simetrías en distinto orden (primero respecto a s, luego respecto a r), la isometría sigue siendo una rotación de 180°.

d) Las coordenadas de los vértices de C’’’ (simétrico respecto a s y luego respecto a r) son:
A’’(2.49, -3.08), B’’(2.81, -2.14), C’’(4.08, -1.51), D’’(1.86, -1.81)



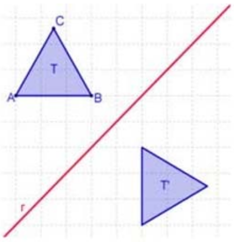
51. Dibuja en un papel el contorno de una figura irregular, en al menos cinco posiciones. (Si no se te ocurre ninguna figura, dibuja una letra G). a) ¿Son iguales estas figuras? Explica tu razonamiento. b) ¿Cómo puedes pasar de una figura a otra? c) Colorea con el mismo color todas las figuras que puedes alcanzar desde la posición inicial, desplazando la figura sin levantarla. Utiliza otro color para las restantes. ¿Se puede pasar siempre de una figura a otra del mismo color, deslizando la figura sin darle la vuelta? ¿Cambian las dimensiones de la figura?

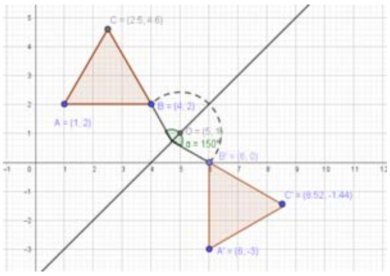
a) Son iguales;

b) Puedes pasar de una a otra mediante isometrías directas, es decir, traslaciones y giros. Si las haces coincidir dando la vuelta, es mediante simetrías.

Las dimensiones no cambian.

52. El triángulo equilátero T de la figura se ha transformado en el triángulo T' mediante una simetría axial de eje r. a) Copia el dibujo en tu cuaderno y nombra en el dibujo a A', B' y C', que son los transformados de A, B y C respectivamente. b) Encuentra un giro que trasforme T en T’, indicando el centro y el ángulo de giro, ¿cuáles son ahora los trasformados de los vértices A, B y C?





El centro del ángulo de giro es =(5, 1)

El ángulo es de 150°

A’(6, -3) B’(6, 0) C’(8.52, -1.44)

53. Libro de espejos: Utiliza un libro de espejos para obtener simetrías. Puedes construir uno con dos rectángulos de metacrilato unidos con cinta de embalar. Mira por el libro de espejos un segmento, una circunferencia, diferentes figuras…

Solución gráfica y abierta

PROBLEMAS

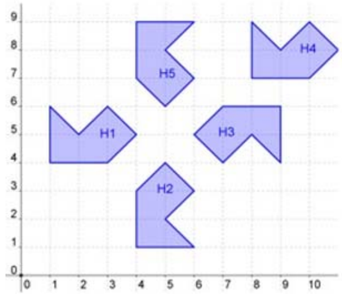
54. Indica los puntos invariantes y las rectas invariantes en cada uno de los siguientes movimientos:
a) Una traslación según el vector (1, 3);
b) Una simetría axial respecto al eje de ordenadas;
c) Una simetría central respecto al centro de coordenadas.

a) La traslación no deja ningún punto invariante, y deja invariantes las rectas paralelas al vector de traslación.

b) La simetría axial deja invariantes a los puntos del eje de simetría, en este caso, al eje de ordenadas. El eje es una recta invariante de puntos invariantes. Rectas invariantes son también las perpendiculares al eje de ordenadas, en este caso, las rectas horizontales.

c) La simetría central deja invariante al centro de simetría, en este caso, al origen de coordenadas. Deja invariantes a las rectas que pasan por el centro, en este caso a las rectas que pasan por el origen de coordenadas.

55. En la figura adjunta el hexágono 1, denominado H1, ha cambiado de posición mediante movimientos. A) Indica el tipo de movimiento: traslación, giro o simetría que trasforma H1 en cada uno de los otros hexágonos. B) Determina, en cada caso, los elementos básicos que definen cada transformación indicando las coordenadas de cada uno de los vértices de H1 qué coordenadas tiene en cada uno de los transformados, y si es posible, generaliza.



H1: (1, 4), (1, 6), (2, 5), (3, 6), (4, 5) y (3, 4);
H2: simetría; Vértices: (4, 1), (6, 1), (5, 2), (6, 3), (5, 4) y (4, 3);
H3: simetría central de centro (9, 6);
Vértices (9, 4), (8, 5), (7, 4), (6, 6), (7, 6);
H4: traslación de vector (7, 3);
Vértices (8, 7), (8, 9), (9, 8), (10, 9), (11, 8) (10, 7)
H5: giro de 90°. Vértices (4, 9), (6, 9), (5, 8), (6, 7), (4, 7) y (4, 9);

56. Sabemos que las traslaciones no dejan ningún punto invariante, pero, a) ¿deja alguna recta invariante?; b) La simetría central deja un punto invariante, el centro, pero ¿qué rectas deja invariantes una simetría central en el plano? ¿Y una simetría central en el espacio?; c) Una simetría axial deja invariantes todos los puntos de su eje, que es una recta invariante de puntos invariantes, pero ¿qué otras rectas invariantes deja una simetría axial? ¿Y qué otros puntos?; d) Una simetría especular, en el espacio, deja un plano invariante de puntos invariantes, el plano de simetría, ¿qué otros planos deja invariantes? ¿Qué otras rectas? ¿Qué otros puntos?

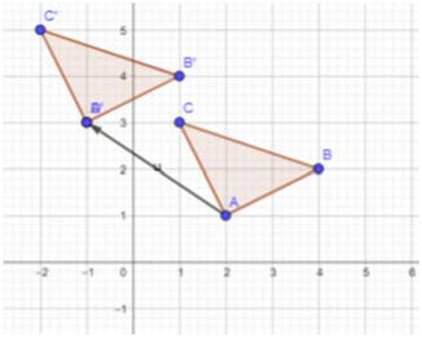
a) Las traslaciones dejan invariante a las rectas paralelas al vector de traslación.
b) La simetría central, tanto en el plano como en el espacio, deja invariante a las rectas que pasan por el centro.
c) La simetría axial deja invariante a las rectas perpendiculares al eje de simetría. Los únicos puntos invariantes son los del eje.
d) La simetría especular deja invariantes a las rectas y a los planos ortogonales al plano de simetría. Solo deja invariantes a los puntos del plano de simetría.

57. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas:

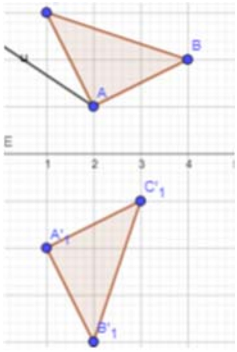
EN EL PLANO	PUNTOS INVARIANTES	RECTAS INVARIANTES	RECTAS INVARIANTES DE PUNTOS INVARIANTES
Traslación	Ninguno	Todas las rectas paralelas al vector de traslación	Ninguna
Simetría central	El centro de simetría	Todas las que pasan por el centro de simetría	Ninguna
Giro	Solo el centro de giro	Todas las que pasan por el centro de giro	Ninguna
Simetría axial	Todos los puntos de la recta de simetría	El eje de simetría y todas las perpendiculares a el.	El eje de simetría
Simetría con deslizamiento	Ninguno	Ninguna	Ninguna

EN EL ESPACIO	PUNTOS INVARIANTES	RECTAS INVARIANTES	RECTAS INVARIANTES DE PUNTOS INVARIANTES
Traslación	Ninguno	Todas las rectas paralelas al vetor de traslación	Ninguna
Simetría central	El centro de simetría	Las rectas que pasan por el centro de simetría	Los planos que pasan por el centro de simetría
Giro	Todos los puntos del eje de giro	Todas las ortogonales al eje de giro	Los planos que contienen al eje de giro
Simetría axial	El plano de simetría	Las del plano de simetría y las ortogonales al plano.	El plano de simetría y los planos ortogonales al plano de simetría
Simetría con deslizamiento	Ninguno	Ninguna	Ninguna

58. Dibuja el triángulo T de vértices A (2, 1), B (4, 2) y C (1, 3)
a) Aplica a T una traslación según el vector u = (-3, 2), llama T' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.
b) Dibuja el triángulo T'' que resulta de aplicar a T un giro de 270° respecto al origen de coordenadas e indica las coordenadas de sus vértices.

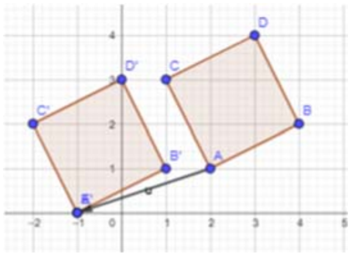


A’ (-1, 3), B’ (1, 4), C’ (-2, 5)

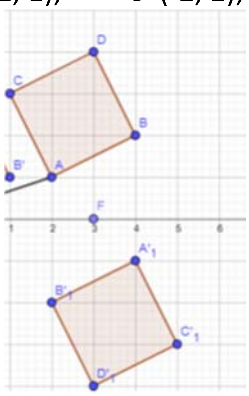


A’ (1, -2), B’ (2, -4), C’ (3, -1)

59. Dibuja el cuadrado K de vértices A (2, 1), B (4, 2) C (1, 3) y D (3, 4).
a) Aplica a K una traslación según el vector u = (-3, -1), llama K' a su transformado e indica las coordenadas de sus vértices.
b) Dibuja el cuadrado C'' que resulta de aplicar a C una simetría central respecto al punto (3, 0) e indica las coordenadas de sus vértices.



A’ (-1, 0), B’ (1, 1), C’ (-2, 2), D’ (0, 3)



A’ (4, -1), B’ (2, -2), C’ (5, -3), D’ (3, -4)

PROBLEMAS DE AMPLIACIÓN

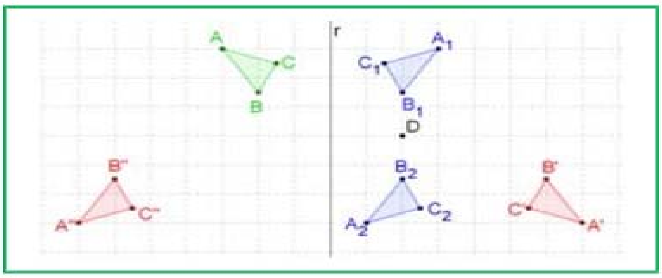
60. Transforma la letra L mediante dos isometrías consecutivas. ¿Puedes obtener el resultado final mediante una única isometría? Analiza posibles situaciones.

Sí. La composición de dos isometrías es otra isometría. La composición de dos traslaciones es otra traslación. La de dos giros, es en general, otro giro. La de dos simetrías es o bien una traslación o bien un giro. La composición de traslación y giro es, en general, un giro. La composición de una traslación y una simetría es una simetría con deslizamiento.

61. Pliega una tira de papel como un acordeón. Haz algunos cortes y despliégala. Habrás confeccionado un friso. Señala en él todas las isometrías. Ensaya otros diseños de frisos.

Solución abierta, manipulativa y gráfica.

62. La composición de isometrías no es conmutativa. Observa la figura adjunta:
a) Determina la isometría que transforma el triángulo ABC en A1 B1 C1 y la que transforma éste en A2 B2 C2
b) Indica la isometría que transforma el triángulo ABC en A’B’C’ y la que transforma éste en A’’B’’C’’.
c) ¿Qué conclusión obtienes?

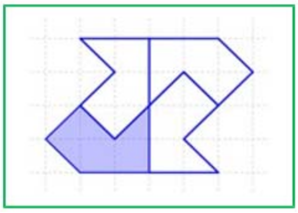


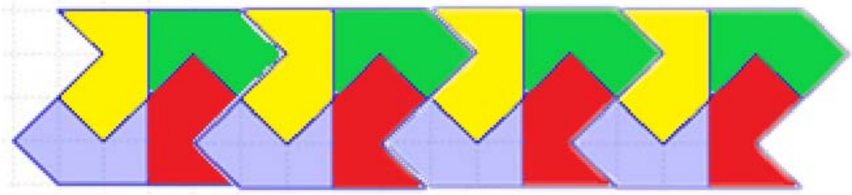
a) Simetría de eje r y giro de 180° de centro D;

b) Giro de centro D y 180°, y simetría de eje la recta r;

c) La composición de isometrías no es conmutativa, pues A’’B’’C’’ es distinto de $A_2B_2C_2$.

63. Indica las isometrías que hay que aplicar a la figura coloreada en azul para obtener la figura completa. Determina los elementos que definen cada isometría. Colorea de distinto color cada uno de los cuatro polígonos y construye un friso.



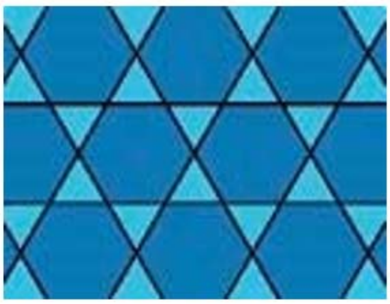


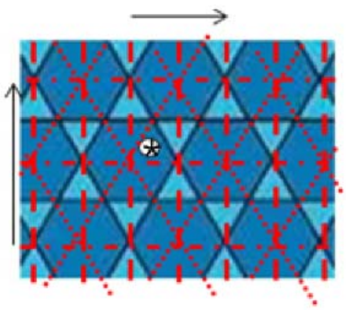
Giros de 90°, 180° y 270°.

64. 1) La letra A tiene un eje de simetría vertical. 2) La letra H tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, además de un centro de simetría. 3) La letra Z tiene centro de simetría, pero ningún eje de simetría. 4) La letra E tiene un eje de simetría horizontal. 5) La letra F no tiene centro de simetría ni ningún eje de simetría. Clasifica las letras del abecedario en estos grupos, en el primer grupo estarán las que tienen un eje de simetría vertical, como la letra A, en el segundo las que tiene dos ejes de simetría, uno vertical y el otro horizontal, como la letra H, en el tercero las que sólo tienen centro de simetría como la letra Z, y en el cuarto las que como la letra E tienen un eje de simetría horizontal. Por último, en un quinto grupo las que no tienen ningún tipo de simetría como la letra F.

Eje vertical: A, M, T, U, V, W;
Dos ejes de simetría: H, I, O, X;
Centro de simetría: N, S, Z;
Eje de simetría horizontal: B, C, D, E;
Ningún tipo de simetría: F, G, J, K, L, P, Q, R, Y.

65. Análisis de un mosaico: Dibuja en tu cuaderno una trama de triángulos, en ella un esquema del mosaico del margen y señala en tu dibujo todos los ejes de simetría, los centros de giro y los vectores de traslaciones por los cuales el transformado de un punto del mosaico (supuesto que se prolonga hasta el infinito) es también un punto del mosaico.
a) ¿Hay giros de 60°? Si los hay marca los centros de estos giros con un asterisco *.
b) ¿Hay giros de 180°? Si los hay marca los centros de estos giros con un círculo o.
c) Señala los ejes de simetría que encuentres con una línea de puntos.
d) Dibuja al margen los vectores de traslación, horizontales y verticales, que haya.
e) Diseña tu propio mosaico que mantenga los mismos movimientos haciendo algo sencillo (un arco, una poligonal) que se vaya moviendo.





Los ejes de simetría están señalados en rojo.
a) Hay giros de 60° en los centros de los hexágonos.
b) Hay giros de 180° con centro en los vértices de los triángulos.
c) Hay simetrías de ejes verticales, de ejes horizontales y de ejes oblicuos.

66. Analiza este otro mosaico. Indica las transformaciones que tenemos que aplicar al elemento mínimo del mosaico adjunto para dejarlo invariante. Indica también los elementos que las caracterizan.

Hay ejes de simetría horizontales y verticales;
y centros de giro de 36° y de 45°.

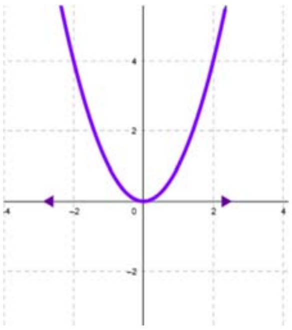
67. Diseña un mosaico en una trama de cuadrados, y analízalo. Indica que simetrías has utilizado, qué giros y qué traslaciones.

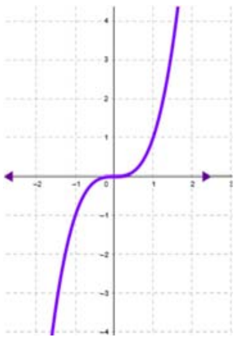
Solución abierta, manipulativa y gráfica.

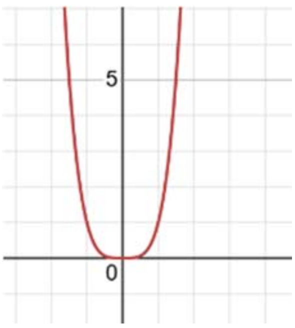
68. Determina los ejes y centros de simetría de las siguientes gráficas de funciones. Señala cuáles son pares y cuáles impares. (Dibuja previamente su gráfica).

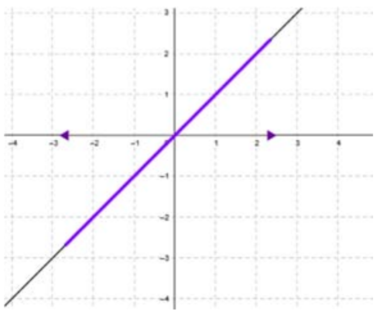
a) $y = x^2$
b) $y = x^3$
c) $y = x^4$
d) $y = x$

FUNCIÓN	EJE DE SIMETRÍA	CENTRO DE SIMETRÍA	PARIDAD
$y = x^2$	x = 0 (vertical)	Ninguno	Par
$y = x^3$	Ninguno	Origen (0,0)	Impar
$y = x^4$	x = 0 (vertical)	Ninguno	Par
$y = x$	Ninguno	Origen (0,0)	Impar

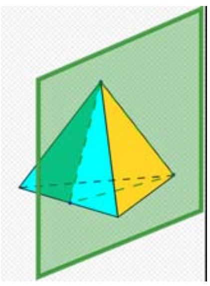






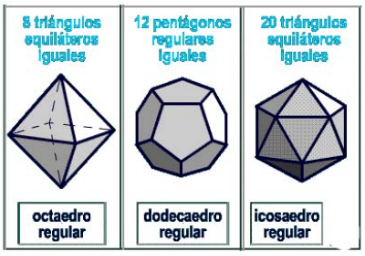


69. Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría, dibújalos en tu cuaderno e indica la forma de determinarlos.



Un tetraedro regular tiene 6 planos de simetría:
Cada plano de simetría contiene a una arista y corta dos caras por la mitad.
Cada plano divide el tetraedro en dos mitades simétricas.

70. Un octaedro tiene 9 planos de simetría, dibújalos, 6 pasan por los puntos medios de aristas opuestas, ¿sabes caracterizar los otros 3? Intenta encontrar planos de simetría en un dodecaedro, y en un icosaedro.



Solución abierta, manipulativa y gráfica.

71. Un ser humano es más o menos simétrico. Los mamíferos, pájaros y peces también lo son. Tienen un plano de simetría.
A) Y las estrellas de mar como la de la figura, ¿tienen un plano de simetría?
B) ¿Tienen más? ¿Cuántos?
C) ¿Tiene un eje de giro? ¿De qué ángulos?
D) ¿Tiene simetría central?
E) Dibuja en tu cuaderno una estrella de cinco puntas e indica sus ejes de simetría y su centro de giro. (Es un grupo de Leonardo D 5)

Sí, las estrellas de mar generalmente tienen varios planos de simetría.
En una estrella de mar típica con 5 puntas, tiene 5 planos de simetría, cada uno pasando a través de una de las puntas de la estrella y dividiendo la figura en dos mitades simétricas.
Una estrella de mar tiene ejes de giro.
La estrella de mar tiene un eje de giro central alrededor de su centro.
El ángulo de giro es 72° (es decir, una rotación de 72° alrededor del centro de la estrella de mar deja la figura invariante).
Se puede girar en ángulos múltiplos de 72° (como 144°, 216°, 288°, etc.).
Las estrellas de mar tienen simetría central.
Este centro de simetría es el punto medio de la estrella, y cualquier punto tiene un punto simétrico en el lado opuesto de este centro.

72. Un prisma recto de base un rectángulo, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Sí, el prisma recto de base rectangular tiene simetría central. Tiene un centro de simetría en el punto medio del prisma, donde todas las diagonales de las caras se intersectan. Cualquier punto de la figura tiene un simétrico opuesto respecto a este centro.
Sí, el prisma tiene 3 planos de simetría. Estos son:
2 planos verticales que pasan por el centro de las bases rectangulares, dividiendo cada base en dos mitades simétricas. Estos planos son perpendiculares entre sí.
1 plano horizontal que pasa por el centro de la altura del prisma y divide al prisma en dos mitades simétricas, cortando a través de las dos bases rectangulares.
Sí, el prisma tiene 2 ejes de giro. Estos son:
Ejes que pasan por el centro de las bases: Son dos ejes de giro perpendiculares a las bases rectangulares. El prisma puede girar 180° alrededor de cada uno de estos ejes sin que se altere su forma, ya que las bases rectangulares son simétricas.
Eje vertical: El prisma puede girar alrededor del eje vertical que pasa por el centro de las bases, pero este eje no genera más simetrías en ángulos menores a 180°.

73. Una pirámide regular de base un triángulo equilátero, ¿tiene simetría central? ¿Tiene planos de simetría? ¿Cuántos? Descríbelos. ¿Tiene ejes de giro? Descríbelos. ¿De qué ángulos?

Sí, tiene simetría central. Existe un centro de simetría en el punto medio de la altura de la pirámide, y cualquier punto tiene su simétrico en el lado opuesto de este centro.

Sí, tiene 3 planos de simetría. Son planos verticales que pasan por el vértice superior de la pirámide y dividen la base triangular en dos mitades simétricas. Cada plano corta la pirámide a lo largo de una arista de la base y pasa por el vértice superior.

Sí, tiene 1 eje de giro. Este eje es vertical, pasa por el vértice superior de la pirámide y el centro de la base triangular. La pirámide puede girar 120° y 240° alrededor de este eje sin que se altere su forma, debido a la simetría de la base triangular regular.

74. Describe las isometrías que dejan invariantes a los siguientes cuerpos geométricos, analizando sus elementos:

a) Esfera
b) Cilindro recto
c) Prisma regular de base cuadrada
d) Cono
e) Cilindro oblicuo
f) Pirámide recta de base un triángulo equilátero

a) Esfera

Isometrías: Rotaciones y reflexiones alrededor del centro. Elementos invariantes: Centro, radio, cualquier plano que pase por el centro.

b) Cilindro recto

sometrías: Rotaciones alrededor del eje, reflexiones en planos verticales y horizontales. Elementos invariantes: Eje, bases circulares, altura.

c) Prisma regular de base cuadrada

Isometrías: Rotaciones de 90°/180°/270°, reflexiones en planos verticales y horizontales. Elementos invariantes: Eje central, base cuadrada, altura.

d) Cono

Isometrías: Rotaciones alrededor del eje, reflexiones en planos que pasen por el eje. Elementos invariantes: Eje, base circular.

e) Cilindro oblicuo

Isometrías: Algunas rotaciones y reflexiones específicas. Elementos invariantes: Eje, base elíptica.

f) Pirámide recta de base triangular

Isometrías: Rotaciones de 120°/240°, reflexiones en planos verticales. Elementos invariantes: Eje vertical, base triangular, altura.

Cada figura tiene rotaciones y reflexiones que mantienen inalterados sus elementos principales, como el centro, el eje, las bases y la altura.

75. Recorta un triángulo isósceles obtusángulo. Colócalo en el libro de espejos de forma que dos lados queden apoyados en la superficie de los espejos, y el otro sobre la mesa. Mueve las páginas del libro de forma que veas distintas pirámides, en las que su base son polígonos regulares. Esto nos permite estudiar el giro de las pirámides, de qué ángulo es. (Puedes construirte un libro de espejos con dos espejos pequeños o dos hojas de metacrilato, pegados con cinta de embalar adhesiva).

Solución abierta, manipulativa y gráfica.

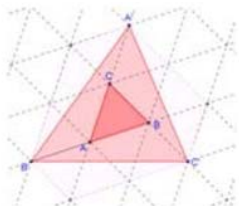
76. Piensa en los poliedros regulares. Copia la siguiente tabla en tu cuaderno y complétala:

POLIEDRO	¿Tiene centro de simetría? SI/NO	¿Tiene ejes de giro? SI/NO	¿Cuántos ejes de giro tiene? ¿De qué ángulos?	¿Tiene planos de simetría? SI/NO	¿Cuántos planos de simetría tiene?
Tetraedro	Si	Si	6. 120°, 140° y 180°	Si	4
Cubo	Si	Si	9. 90°, 120°, 180°, 240° y 270°	Si	9
Octaedro	Si	Si	6. 120°, 240°, 180°	Si	9
Dodecaedro	Si	Si	15. 72°, 144°, 120°, 240°, 180°	Si	15
Icosaedro	Si	Si	12. 72°, 144°, 120°, 240°, 180 °	Si	15

77. Contesta a las siguientes preguntas justificando las respuestas.
a) ¿Es posible que una figura tenga dos ejes de simetría paralelos?
b) La intersección de dos ejes de simetría, ¿es siempre un centro de simetría?
c) ¿Por qué un espejo cambia la derecha por la izquierda y no cambia lo de arriba por lo de abajo?
d) ¿Es cierto que dos círculos simétricos respecto a un plano son siempre cortes de una esfera?

a) Sí, es posible, como en el caso de un rectángulo o un cuadrado.
b) No siempre. Depende de la figura, como en el caso de un triángulo donde no siempre es un centro de simetría.
c) Porque un espejo refleja horizontalmente, invirtiendo las posiciones de derecha e izquierda, pero no cambia la orientación vertical.
d) Sí, es cierto. Los círculos simétricos son cortes de una esfera que pasa por el plano de simetría.

78. A partir de un triángulo cualquiera ABC construimos el triángulo A'B'C', en el que A' es el simétrico de A con respecto al centro C, B' es el simétrico de B con respecto al centro A y C' es el simétrico de C con respecto al centro B. Utiliza la trama de triángulos para calcular el área del triángulo A'B'C' sabiendo que el valor del área del triángulo ABC es 1 u^2



El área del triángulo A'B'C' es 1/4 u^2

79. Caleidoscopios diédricos: ¿Has mirado alguna vez por un caleidoscopio? Están formados por un tubo de cartón, dos espejos formando ángulo y trocitos de plástico o cristalitos que combinan sus imágenes dando lugar a preciosas composiciones llenas de simetrías. Fabrica uno, y estudia los giros y simetrías que observes.

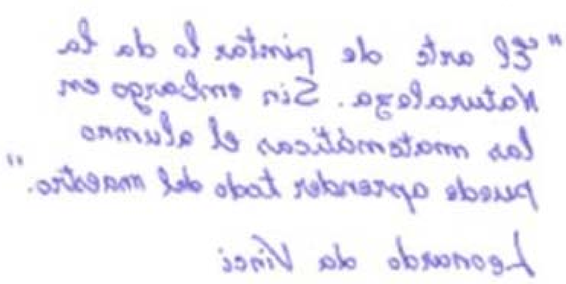
Solución abierta, manipulativa y gráfica.

80. Simetrías plegando papel: a) Dobla una hoja de papel y recorta una figura. Al desdoblar habrás obtenido la figura simétrica. b) Dobla una hoja de papel mediante dos dobleces perpendiculares. (Tendrás que hacer coincidir el doblez consigo mismo). Manteniendo el papel doblado recorta una figura. Al desdoblar, la figura obtenida tendrá una doble simetría. c) Con otra hoja de papel, vuelve a doblar mediante dos dobleces perpendiculares. Dobla de nuevo por la mitad el ángulo recto obtenido. Recorta los diseños que más te gusten. Estás construyendo modelos de copo de nieve. ¿Cuántos ejes

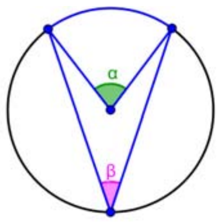
de simetría has obtenido? d) Intenta ahora doblar la hoja de papel para obtener ejes de simetría que formen ángulos de 60° y de 30°. Utiliza tu imaginación para obtener nuevos diseños de copos de nieve.

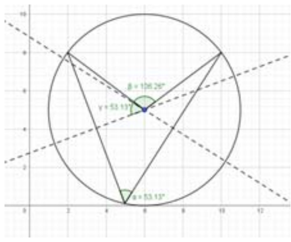
Solución abierta, manipulativa y gráfica.

81. La simetría en la escritura de Leonardo Da Vinci: ¿Sabías que, si miras lo escrito por Leonardo en un espejo puedes leerlo con facilidad? Es un buen ejemplo de simetría especular. Lee el siguiente texto del Leonardo.



82. Utiliza la propiedad de la composición de dos simetrías de ejes secantes para demostrar que un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del central que abarca el mismo arco. Ayuda: Traza la circunferencia, un ángulo inscrito y su central. Traza dos rectas perpendiculares por el centro de la circunferencia a los lados del ángulo inscrito.





Solución abierta, manipulativa y gráfica.

83. Estudia las isometrías que dejan invariante a un triángulo equilátero. Nombra sus vértices y sus ejes de simetría. a) Aplica al triángulo un giro de 120° y luego una simetría. ¿Puedes obtener el mismo resultado con una única transformación? b) Repite lo mismo con un giro de 240° y otra simetría. c) Comprueba que siempre la composición de un giro por una simetría es otra simetría. d) Haz ahora un giro de 120° y otro de 240°, ¿qué obtienes? e) ¿Y con dos giros de 240°? f) Comprueba que la composición de dos giros del mismo centro es siempre un giro (o la identidad).

a) Cada una de las isometrías del triángulo equilátero podemos representarla por $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ que indica que transforma el vértice A en B, el B en C y el C en A. En este caso es el giro de 120° Aplicamos ahora la simetría de vértice A: $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$. La composición transforma al triángulo en $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ que es la simetría de vértice B. La composición de un giro con una simetría es una simetría.

b) Hacemos ahora el giro de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$.

c) Comprobar

d) Componemos el giro de 120° con el de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$ y obtenemos la identidad.

e) Componemos dos giros de 240° : $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ y obtenemos el giro de 120°.

f) La composición de dos giros del mismo centro es otro giro (o la identidad).

84. Al pasear por la ciudad, mirar el aula, en todo lo que nos rodea podemos ver como la Geometría permite explicarlo. Mira este mosaico. Busca un motivo mínimo, es decir, un trozo de mosaico que te permite, mediante movimientos, recomponerlo. En el diseño de este mosaico, ¿se han utilizado simetrías? ¿Hay simetrías de eje vertical? ¿Hay simetrías de eje horizontal? ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuáles? ¿Hay giros de 90°? ¿Hay giros de 45°? ¿Hay traslaciones?

Hay simetrías tanto verticales, como horizontales como oblicuas. También podemos considerar giros de 90°, porque al ser figuras simétricas, se replicarían exactamente iguales, pero en otro lugar. Los giros de 45° nos daría el mismo resultado que aplicar una simetría oblicua

85. Diseña en tu cuaderno un motivo mínimo (si no se te ocurre ninguno, usa la letra L), y utiliza las mismas simetrías, giros y traslaciones que se usan en este mosaico para hacer tu propio diseño de mosaico. Observa tu diseño, y responde a las siguientes preguntas:
¿Si compones dos simetrías de ejes paralelos, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño de mosaico en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes paralelos y describe completamente el movimiento que has obtenido. ¿Si compones dos simetrías de ejes secantes, qué movimiento obtienes? ¿Es otra simetría? ¿Es un giro? ¿Es una traslación? Indica en tu diseño en qué ocasión has compuesto dos simetrías de ejes secantes y describe completamente el movimiento que has obtenido.

Cuando compones dos simetrías de ejes paralelos, lo que obtienes es una traslación. Esto sucede porque al aplicar una simetría respecto a un eje, la figura se refleja de forma simétrica a ambos lados de ese eje. Al hacer otra simetría respecto a un eje paralelo al primero, la figura también se reflejará sobre ese segundo eje, pero como ambos ejes son paralelos, la figura no cambia de orientación, sino que se desplaza de forma lineal, produciendo una traslación.
Cuando compones dos simetrías de ejes secantes, el movimiento resultante es un giro. Esto sucede porque, al reflejar una figura sobre el primer eje y luego reflejarla sobre un segundo eje que se cruza (o es secante) con el primero, la figura rota alrededor del punto de intersección de esos dos ejes.

86. Mira este otro mosaico. Es el famoso mosaico Nazarí de los huesos. No vamos a tener en cuenta el color. Para diseñar el hueso, dibuja en tu cuaderno un cuadrado. Mira la figura. Corta en los lados verticales un trapecio y colócalo sobre los lados horizontales. Ya tienes el hueso. ¿Es simétrico? Tiene un eje de simetría vertical y otro horizontal, por lo que podríamos tomar como motivo mínimo la cuarta parte del hueso. Para pasar de un hueso de color a un hueso blanco, ¿qué trasformación se ha usado? Dibuja en tu cuaderno, en color rojo, ejes de simetría verticales y en color azul, ejes de simetría horizontales. Señala, con un asterisco, (*), centros de giro de 90°, y con un círculo, (o), centros de simetría. Utilizando el hueso dibuja en tu cuaderno el mosaico completo.

El hueso es simétrico con dos ejes de simetría ortogonales. Se pasa de un hueso blanco a uno de color adyacente con un giro de 90° y centro el vértice del cuadrado inicial.

87. Dibuja en tu cuaderno una letra F mayúscula, y traza también dos rectas m y n que formen un ángulo de 30° y se corten en un punto O. Dibuja su transformado por:

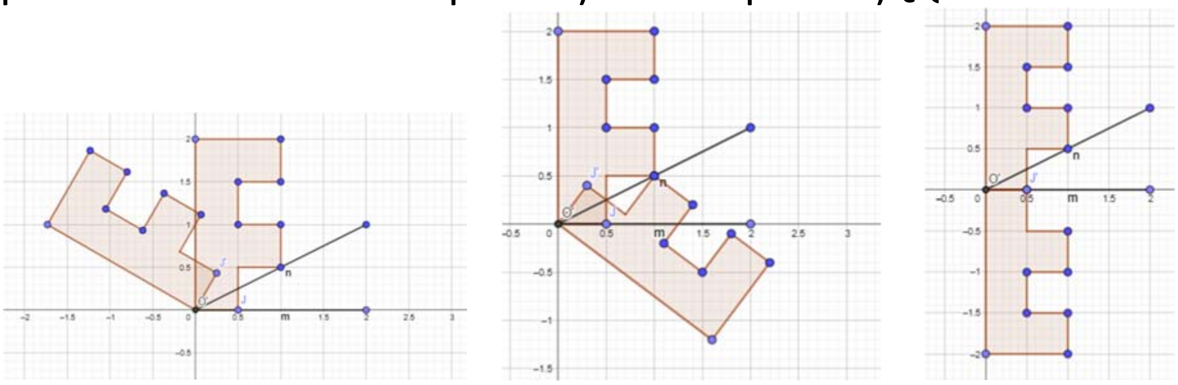
a) Un giro de centro el punto O y ángulo 60°.

b) La simetría de eje n

c) La simetría de eje m

d) La composición de la simetría de eje n con la de eje m

e) Compara el resultado obtenido en el apartado a) con el del apartado d). ¿Qué observas?



La composición de la simetría de eje n con la de eje m es un giro de centro el punto de intersección y de 60°.

AUTOEVALUACIÓN

1. Con la traslación de vector u = (-3, 8) trasladamos el punto P (5, -4) hasta el punto P’ y las coordenadas de P´ son:

a) (8, 4)
b) (2, 4)
c) (2, 12)
d) (6, 3).

Para trasladar el punto P(5,−4) por el vector u=(−3,8), simplemente sumamos las coordenadas del vector a las de P:

P’(x’,y’)= (x + u_x, y + u_y)

Si sustituimos los valores:

x’ = 5 + (-3) = 2

y’ =(-4) + 8 = 4

Por lo tanto, las coordenadas de P’ son (2,4). La respuesta correcta es la b.

2. Al trasladar A (-1, 8) hasta A’ (4, 6) se utiliza el vector u:

a) u = (3, 2)
b) u = (3, -2)
c) u = (5, -2)
d) u = (5, 14).

Para encontrar el vector de traslación u=(u_x, u_y), restamos las coordenadas del punto inicial A(−1, 8) a las del punto final A’(4, 6):

u_x = x’- x = 4 -(-1) = 4 + 1 = 5

u_y = y’ - y = 6 - 8 = -2

Por lo tanto, la respuesta correcta es la c) (5,-2)

3. La transformación que lleva el punto A (2, 0) en el punto A’ (0, 2) no puede ser:

a) Un giro de centro el origen y ángulo 90□.
b) Una traslación de vector u = (2, 2).
c) Un giro de centro el origen y ángulo 270□.
d) Una simetría de eje y = x.

La opción correcta es la b ya que, en una traslación, sumamos el vector a las coordenadas, por lo tanto: (x’, y’) = (x + u_x, y + u_y) = (2 + 2, 0 + 2) = (4, 2).

4. La transformación identidad también se llama:

a) Simetría central
b) Simetría axial
c) Giro de 180°
d) Traslación de vector nulo (0, 0)

Una traslación mueve todos los puntos en la dirección y magnitud de un vector. Si el vector es (0, 0), los puntos no se mueven, por lo que es exactamente la transformación identidad.
La respuesta correcta es la d)

5. ¿Cómo debe ser un triángulo para tener más de dos ejes de simetría?
a) rectángulo
b) isósceles
c) equilátero
d) rectángulo isósceles.

Un triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría, cada uno dividiendo el triángulo en dos partes iguales. La respuesta correcta es la c)

6. La simetría central en el plano es un giro de:
a) 360°
b) 180°
c) 90°
d) 0°

Un giro de 180° alrededor de un punto O lleva cualquier punto P a un punto P' en la dirección opuesta, cumpliendo exactamente con la definición de simetría central. Es decir, la simetría central coloca cada punto en el lado opuesto de un punto O, a la misma distancia.
La respuesta correcta es la b)

7. En el plano, la composición de dos simetrías de ejes secantes siempre es:
a) una traslación
b) un giro
c) otra simetría
d) la simetría central.

Cuando hacemos dos simetrías respecto a ejes que se cortan, el resultado es siempre un giro alrededor del punto donde se cruzan los ejes. La respuesta correcta es la b)

8. Las coordenadas del punto simétrico al punto A (3, 7) respecto del eje de ordenadas son:
a) A' (-3, 7)
b) A' (3, -7)
c) A' (-3, -7)
d) A' (7, 3)

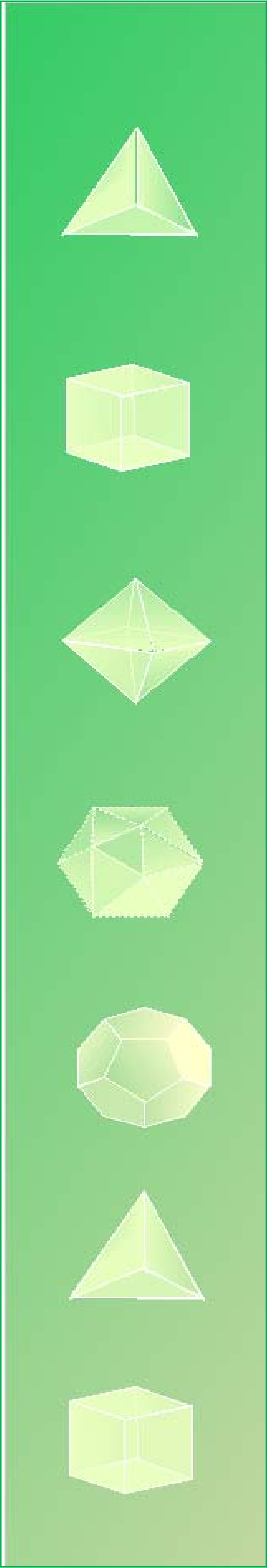
Para encontrar el punto simétrico respecto al eje de ordenadas, tenemos que cambiar el signo de la coordenada x. Es decir, si el punto original es A(3, 7), su simétrico tendrá la misma coordenada (y = 7), pero la coordenada x cambiará de signo, de 3 a -3. Por lo tanto, el punto simétrico será A'(-3, 7).
La respuesta correcta es la a) A' (-3, 7).

9. Indica cuál de las siguientes letras no tiene simetría central:
a) O
b) H
c) S
d) D

Para saber qué letra no tiene simetría central, hay que comprobar si al girar la letra 180 grados sobre un punto central, se mantiene igual.
La O tiene simetría central, porque al girarla 180 grados, se ve igual.
La H también tiene simetría central, ya que al girarla se mantiene igual.
La S, si la giramos 180 grados, no se mantiene igual.
La D tiene simetría central, porque al girarla, se ve igual.
Por lo tanto, la letra que no tiene simetría central es la c) S.

10. Siempre se obtiene un giro haciendo sucesivamente:
a) Dos giros de distinto centro.
b) Dos simetrías de ejes secantes.
c) Un giro y una simetría.
d) Dos simetrías de ejes paralelos.

Cuando realizamos dos simetrías respecto a ejes paralelos, el efecto resultante es un giro. La dirección y el ángulo de giro dependen de la distancia entre los ejes.
La respuesta correcta es d) Dos simetrías de ejes paralelos



2º ESO
Capítulo 9: Magnitudes proporcionales. Porcentajes
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Juan Salguero Salguero

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. RAZÓN Y PROPORCIÓN

1. Siete personas gastan 280 litros de agua diariamente. ¿Cuál es la razón entre los litros consumidos y el número de personas? ¿Cuál es la razón entre las personas y los litros consumidos?

La razón entre los litros consumidos y el número de personas es:

$\frac{280}{7} = 40$

La razón entre el número de personas y los litros consumidos es:

$\frac{7}{280} = \frac{1}{40}$

2. Medio kilo de cerezas costó 1.90 €. Expresa la razón entre kilos y euros.

Sabemos que 0.5 kg de cerezas cuesta 1.90€, por lo que la razón entre kilos y euros es:

$\frac{0.5}{1.90} = \frac{5}{19}$

3. La razón entre dos magnitudes es 36. Escribe un ejemplo de los valores que pueden tener estas dos magnitudes.

Sabemos que la razón debe ser: $\frac{A}{B} = 36$

Ejemplo: $\frac{72}{2} = 36$

4. Completa las siguientes proporciones:

Sabiendo que el producto de los extremos es igual al producto de los medios podemos averiguar las incógnitas:

a) $\frac{5}{22} = \frac{45}{x}$

$$5 \cdot x = 22 \cdot 45 \rightarrow 5 \cdot x = 990 \rightarrow x = \frac{990}{5} \rightarrow x = 198 \rightarrow \quad \frac{5}{22} = \frac{45}{198}$$

b) $\frac{0{,}3}{x} = \frac{7}{14}$

$$x \cdot 7 = 0,3 \cdot 14 \rightarrow x \cdot 7 = 4,2 \rightarrow x = \frac{4,2}{7} \rightarrow x = 0,6 \rightarrow \quad \frac{0,3}{0,6} = \frac{7}{14}$$

c) $\frac{x}{9{,}5} = \frac{4{,}7}{1{,}9}$

$$x \cdot 1,9 = 9,5 \cdot 4,7 \rightarrow x \cdot 1,9 = 44,65 \rightarrow x = \frac{44,65}{1,9} \rightarrow x = 23,5 \rightarrow \quad \frac{23,5}{9,5} = \frac{4,7}{1,9}$$

d) $\frac{0{,}05}{100} = \frac{x}{400}$

$$100 \cdot x = 0,05 \cdot 400 \rightarrow 100 \cdot x = 20 \rightarrow x = \frac{20}{100} \rightarrow x = 0,2 \rightarrow \quad \frac{0,05}{100} = \frac{0,2}{400}$$

5. Ordena estos datos para componer una proporción:

a) 12, 3, 40, 10

$$\frac{12}{3} = \frac{40}{10} \Rightarrow 12 \cdot 10 = 3 \cdot 40$$

b) 24, 40, 50, 30

$$\frac{30}{24}=\frac{50}{40}\Rightarrow 30\cdot 40=24\cdot 50$$

c) 0.36, 0.06, 0.3, 1.8

$$\frac{0.36}{0.06}=\frac{1.8}{0.3}\Rightarrow 0.36\cdot 0.3=0.06\cdot 1.8$$

6. Copia en tu cuaderno y completa la tabla sabiendo que la razón de proporcionalidad es 2.5:

0,5	9	6		20			2,5
			50		8	25	

0.5/2.5 = 0.2 ; 9/2.5 = 3.6 ; 6/2.5 = 2.4 ; 50 · 2.5 = 125 ; …….

0.5	9	6	125	20	20	65.5	2.5
0.2	3.6	2.4	50	8	8	25	*1*

2. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

7. Señala de estos pares de magnitudes, las que son directamente proporcionales:

> La cantidad de filetes que debo comprar y el número de personas que vienen a comer. Directamente proporcional, ya que, a mayor número de personas, mayor cantidad de filetes.

>El peso de una persona y su altura. No es directamente proporcional.

>El número de pisos que sube un ascensor y las personas que caben en él. No es directamente proporcional.

>El precio de una tela y lo que necesito para hacer un vestido. Directamente proporcional, ya que, a mayor cantidad de tela necesaria, mayor será el precio.

>Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado. Directamente proporcional, ya que, a mayor número de entradas vendidas, mayor será el dinero recaudado.

>El peso de una persona y su sueldo. No es directamente proporcional.

8. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) $\frac{25}{50}=\frac{30}{x}$

Sabemos que las magnitudes son directamente proporcionales y en este caso, sabemos el valor de los dos antecedentes, por lo que dividiremos el mayor por el menor para saber cuánto más grande es el segundo del primero:

$$30\div 25=1.2$$

Como 30 es 1.2 veces más grande que 25, x también debe ser 1.2 veces más grande que 50, por lo que:

$$x=50\cdot 1.2=60\rightarrow \qquad \frac{25}{50}=\frac{30}{60}$$

b) $\frac{300}{100}=\frac{7}{x}$

Sabemos que las magnitudes son directamente proporcionales y en este caso, sabemos el valor de los dos antecedentes, por lo que dividiremos el mayor por el menor para saber cuánto más grande es el primero del segundo:

$$300 \div 7 = 42.86$$

Como 300 es 42.86 veces más grande que 7, 100 también debe ser 42.86 veces más grande que 100, por lo que:

$$x \cdot 42.86 = 100 \rightarrow x = 100 \div 42.86 \rightarrow x = 2.33 \rightarrow \quad \mathbf{\frac{300}{100} = \frac{7}{2.33}}$$

c) $\mathbf{\frac{7.5}{56.9} = \frac{x}{2}}$

Sabemos que las magnitudes son directamente proporcionales y en este caso, sabemos el valor de los dos consecuentes, por lo que dividiremos el mayor por el menor para saber cuánto más grande es el primero del segundo:

$$56.9 \div 2 = 28.45$$

Como 56.9 es 23.45 veces más grande que 2, 7.5 también debe ser 23.45 veces más grande que x, por lo que:

$$x \cdot 28.45 = 7.5 \rightarrow x = 7.5 \div 28.45 \rightarrow x = 0.26 \rightarrow \quad \mathbf{\frac{7.5}{56.9} = \frac{0.26}{2}}$$

9. Ordena estos valores de manera que formen una proporción directa:

a) 3.9; 0.3; 1.3; 0.1

$$\mathbf{\frac{3.9}{0.3} = \frac{1.3}{0.1}}$$

b) 5, 12, 6, 10

$$\mathbf{\frac{5}{6} = \frac{10}{12}}$$

c) 0.18 4 0.4 18

$$\mathbf{\frac{18}{4} = \frac{0.18}{0.04}}$$

¿Hay más de una solución?

Si, se pueden ordenar de más formas para obtener una proporción directa.

10. El coche de Juan gasta 5.5 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 673 km?

Regla de tres directa:

100 km → 5.5 litros
673 km → x litros

Resolviendo:

$$x = \frac{673 \cdot 5.5}{100} = 36.92\ litros$$

Solución: Gastará aproximadamente 36.92 litros.

11. En una rifa se han vendido 250 papeletas y se han recaudado 625 euros. ¿A cuánto se vendía cada papeleta? ¿Cuánto habrían recaudado si hubieran vendido 900 papeletas?

Precio de una papeleta:

Precio por papeleta = $\frac{625}{250} = 2.50€$

900 papeletas · 2.50 € → 2250 €

Solución: Habrían recaudado 2250€.

12. Una fabada para 6 personas necesita 750 g de judías, ¿cuántas personas pueden comer fabada si utilizamos 6 kg de judías?

Regla de tres directa:

750 g → 6 personas
6000 g → x personas

Resolviendo:

$$x = \frac{6000 \cdot 6}{750} = 48\ personas$$

Solución: Pueden comer 48 personas.

13. Cuatro camisetas nos costaron 25.5 €, ¿cuánto pagaremos por 14 camisetas iguales?

Regla de tres directa:

4 camisetas → 25.5 €
14 camisetas → x €

Resolviendo:

$$x = \frac{14 \cdot 25.5}{4} = 89.25\ €$$

Solución: Pagaremos 89.25 € por 14 camisetas.

14. Calcula mentalmente:

a) El 50% de 240

$$El\ 50\%\ de\ 240 = \frac{50 \cdot 240}{100} = 120$$

b) El 1% de 570

$$El\ 1\%\ de\ 570 = \frac{1 \cdot 570}{100} = 5.7$$

c) El 10% de 600

$$El\ 10\%\ de\ 600 = \frac{10 \cdot 600}{100} = 60$$

d) El 300% de 9

$$El\ 300\%\ de\ 9 = \frac{300 \cdot 9}{100} = 27$$

15. Completa la tabla:

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	
720		108
60	140	
490	60	294

500·25 / 100 = 125

108 · 100 / 720 = 15

60 · 140 / 100 = 84

Cantidad inicial	%	Resultado
500	25	125
720	15	108
60	140	84
490	60	294

16. En un hotel están alojadas 400 personas. De ellas, 40 son italianas, 120 francesas, 100 son alemanas y el resto rusas. Calcula el % que representa cada grupo sobre el total.

Italianas:

$$\frac{40}{400} \cdot 100 = 10\%$$

Francesas:

$$\frac{120}{400} \cdot 100 = 30\%$$

Alemanas:

$$\frac{100}{400} \cdot 100 = 25\%$$

Rusas:

$$\frac{140}{400} \cdot 100 = 35\%$$

17. En una tienda ofrecen un 15 % de descuento al comprar una lavadora que cuesta 420 €. ¿Cuánto supone el descuento? ¿Cuál es el precio final de la lavadora?

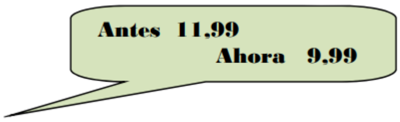
Descuento:

$$\frac{420 \cdot 15}{100} = 63€$$

Precio final:

$$420 - 63 = 357€$$

18. ¿Cuál de estas dos ofertas ofrece un mayor % de descuento?



Primera oferta:

Descuento:

$$44.99 - 31.99 = 13€$$

Porcentaje de descuento:

$$\frac{13 \cdot 100}{44.99} = 28.89\%$$

Segunda oferta:

Descuento:

$$11.99 - 9.99 = 2€$$

Porcentaje de descuento:

$$\frac{2 \cdot 100}{11.99} = 16.68\%$$

La primera oferta tiene un mayor porcentaje de descuento.

19. Completa:

a) De una factura de 540€ he pagado 459€. Me han aplicado un de descuento.

540 – 459 = 81€ de descuento, 81/ 540 = 0.15

De una factura de 540€ he pagado 459€. Me han aplicado un 15 % de descuento.

b) Me han descontado el 16 % de una factura de € y he pagado 546 €.

100 – 16 = 84 , he pagado el 84%, luego 546 · 100 / 84 = 650

Me han descontado el 16 % de una factura de 650 € y he pagado 546 €.

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 12 % y me he ahorrado 90 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

El precio inicial será 90 · 100 / 12 = 750

750€ era el precio del mueble sin descuento.

20. Calcula el precio final después de aplicar el 68 % de incremento porcentual sobre 900 €.

$$\frac{\mathbf{900 \cdot 168}}{\mathbf{100}} = \mathbf{1512€}$$

21. Una persona invierte 3 570 € en acciones, y al cabo de un año su inversión se ha convertido en 3659.25 €. Calcula el aumento porcentual aplicado a su dinero.

Incremento:

$$3659.25 - 3570 = 89.25€$$

Porcentaje:

$$\frac{89.25 \cdot 100}{3570} = 2.5\ \%$$

El aumento porcentual es del 2.5 %.

22. El precio de venta de los artículos de una tienda es el 135 % del precio al que los compró el comerciante. ¿A qué precio compró el comerciante un artículo que está a la venta por 54 €?

$$\frac{\mathbf{54 \cdot 100}}{\mathbf{135}} = \mathbf{40\ €}$$

El comerciante compró el artículo por 40 €.

23. En Estados Unidos existe la norma de dejar un mínimo del 10 % de propina en restaurantes o taxis sobre el importe de la factura. Calcula en esta tabla lo que han debido pagar estos clientes que han quedado muy satisfechos y añaden un 15 % de propina:

Importe factura	34 $	105 $	90,4 $	100,20 $	12 $
Precio final					

34 · 1,15 = 39.10 ; 105 · 1.15 =120.75 ; ………….

Importe factura	34 $	105 $	90.4 $	100.20 $	12 $
Precio final	**39.10 $**	**120.75 $**	**103.96 $**	**115.23 $**	**13.80 $**

24. El precio de un televisor es 650€ + 21% IVA. Lo pagaremos en seis meses sin recargo. Calcula la cuota mensual.

Precio total:

$$\frac{650 \cdot 121}{100} = 786.50\ €$$

Cuota mensual:

$$\frac{786.50}{6} = 131.08\ €$$

3. ESCALAS: PLANOS Y MAPAS

25. Escribe cuatro ejemplos en los que se utilicen escalas.

- Mapas de ciudades: Un mapa con escala 1:50,000, donde 1 cm en el mapa representa 50,000 cm (500 m) en la realidad.
- Maquetas de edificios: Una maqueta con escala 1:100, donde 1 cm de la maqueta equivale a 100 cm (1 m) en el edificio real.
- Planos arquitectónicos: Un plano de una casa con escala 1:200, donde 1 cm del plano equivale a 2 m en la realidad.
- Globos terráqueos: Un globo terráqueo con escala 1:40,000,000, donde 1 cm en el globo equivale a 400 km en la Tierra

26. La distancia entre Madrid y Valencia es 350 km. En el mapa, la distancia entre ambas ciudades es 3.7 cm, ¿a qué escala está dibujado el mapa?

Calculamos la escala sabiendo que 350km = 350.000.000cm

$$Escala = \frac{Medida\ representada}{Medida\ real} = \frac{3.7}{350000000} = \frac{1}{94594595}$$

27. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que la escala aplicada es 1 : 1000

Dibujo	Medida real
36 cm	
	7,7 km
0,005 m	

Dibujo	Medida real
36 cm	36 · 1000 = 36000 cm = 360 m
7,7 : 1000 = 0.0077 km · 100 000 = 770 cm	**7.7 km**
0.005 m	0,005 · 1000 = 5 m

28. Calcula la escala correspondiente en cada ejemplo de la tabla:

Dibujo	Medida real	Escala
1,5 cm	900 m	
7 cm	7,7 hm	
4 cm	12 km	

Para obtener la escala debe pasarse las dos medidas a la misma unidad:

- $900\ m\ = 90000\ cm -> \frac{90000}{1.5} = 60000 -> 1{:}\,60000$
- $7.7\ hm\ = 77000\ cm -> \frac{77000}{7} = 11000 -> 1{:}\,11000$
- $12\ km\ = 1200000\ cm -> \frac{1200000}{4} = 300000 -> 1{:}\,300000$

Dibujo	Medida real	**Escala**
1.5 cm	900 m	1:60000
7 cm	7.7 hm	1:11000
4 cm	12 km	1:300000

29. Cinco trabajadores terminan su tarea en 8 días. El número de trabajadores y el número de días que tardan, ¿son magnitudes directa o inversamente proporcionales? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad?

- Relación: Son magnitudes inversamente proporcionales, ya que, al aumentar el número de trabajadores, el tiempo necesario para completar la tarea disminuye.
- Razón de proporcionalidad:
  La razón de proporcionalidad inversa se calcula multiplicando ambas magnitudes:

$$Razón = Trabajadores \cdot Días = 5 \cdot 8 = 40$$

4. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

30. Completa la tabla de proporcionalidad inversa y señala el coeficiente de proporcionalidad.

Velocidad en km/h	100	120			75
Tiempo en horas	6		20	4	

100 · 6 = 600 600 : 120 = 5

600 : 20 = 30 600 : 4 = 150 600 : 75 = 75

Velocidad en km/h	100	120	30	150	75
Tiempo en horas	6	5	20	4	8

La razón de proporcionalidad es Velocidad · Tiempo = 100 · 6 = 600

31. Hemos cortado una pieza de tela en 24 paños de 0,80 m de largo cada uno. ¿Cuántos paños de 1,20 m de largo podremos cortar?

Regla de tres inversa:

0.80 m → 24 paños
1.20 m → x paños

Resolviendo:

$$x = \frac{0.80 \cdot 24}{1.20} = 16\ paños$$

Solución: Se podrán cortar 16 paños de 1.20 m de largo.

32. Cinco amigos quieren hacer un regalo de cumpleaños. Deben poner cada uno 5,40 €. Otros cuatro amigos se unen para contribuir al regalo, ¿cuántos euros debe poner ahora cada uno?

Regla de tres inversa:

5 Amigos → 5,40 €
9 Amigos → x €

Resolviendo:

$$x = \frac{5{,}40 \cdot 5}{9} = 3\ €$$

Solución: Cada uno deberá poner 3 €.

33. Para pintar una casa, el pintor dedica 8 horas diarias durante 6 días. Si trabajara 10 días, ¿cuántas horas diarias necesitaría?

Regla de tres inversa:

6 Días → 8 horas
10 Días → x horas

Resolviendo:

$$x = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4.8\ horas$$

Solución: Con 10 días, necesitaría trabajar 4.8 horas diarias para pintar la casa.

5. REGLA DE TRES COMPUESTA

34. Seis personas gastan 2 100 € durante 4 meses en gastos de transporte. Si el gasto durante 10 meses ha sido de 3 600 €, ¿a cuántas personas corresponde?

Regla de tres compuesta:

6 Personas – 2100 € – 4 Meses
x Personas – 3600€ – 10 Meses

Resolviendo:

$$x = \frac{3600 \cdot 6 \cdot 4}{2100 \cdot 10} = 4.11\ personas$$

Solución: Corresponde con aproximadamente 4 personas.

35. Con una jornada de 8 horas diarias, un equipo de 20 personas tarda 9 días en concluir un trabajo. ¿Cuántas personas se necesitan para realizar el mismo trabajo, trabajando 9 horas diarias para realizar el trabajo en 5 días?

Regla de tres compuesta:

8 Horas – 20 personas – 9 días
9 Horas – x personas – 5 días

Resolviendo:

$$x = \frac{8 \cdot 20 \cdot 9}{9 \cdot 5} = 32\ personas$$

Solución: Se necesitan 32 personas para realizar el mismo trabajo, trabajando 9 horas diarias durante 5 días.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. ¿Qué es una razón entre dos números? ¿Cómo se llaman sus términos? Escribe varios ejemplos.

Razón, en Matemáticas, es una comparación entre los valores de dos variables.
El primer término se llama "antecedente" y el segundo "consecuente".
Ejemplos:

- El precio de las cerezas, 2 kg de cerezas vale 3€ → 2:3
- 1 persona debe consumir 5 litros de agua al día → 1:5

2. ¿Cómo se llaman los términos de una proporción? Escribe proporciones que se pueden formar con estos números y comprueba la propiedad fundamental:

Para formar proporciones, necesitamos que el producto de los extremos sea igual al producto de los medios. Esto corresponde a la propiedad fundamental de las proporciones:
Producto de extremos = Producto de medios

a) 6, 24, 12, 3

$$\frac{6}{3}=\frac{24}{12} \rightarrow 6\cdot 12 = 24\cdot 3 = 72$$

b) 35, 0.25, 1.25, 7

$$\frac{7}{35}=\frac{0.25}{1.25} \rightarrow 7\cdot 1.25 = 35\cdot 0.25 = 8.75$$

3. Con 8 kg de harina hemos confeccionado 15 pasteles. ¿Cuántos pasteles podemos elaborar con 30 kg de harina?

$$\frac{8}{15}=\frac{30}{x} \rightarrow x=\frac{30\cdot 15}{8}=56.25\ pasteles$$

Con 30 kg de harina se pueden realizar 56 pasteles completos, y sobraría harina para hacer un cuarto de pastel.

4. Completa la tabla y calcula el coeficiente de proporcionalidad:

Litros de gasolina	8	25		4	
Euros	11.36		56.8		25.56

Coeficiente de proporcionalidad: 8 : 11.36 = 0.704

25 : 0.704 = 35.51 ; 56.8 · 0.704 = 39.99 ; 4 : 0.704 = 5.68 ; 25.56 · 0.704 = 17.99

Litros de gasolina	8	25	39.99	4	17.99
Euros	11.36	35.51	56.8	5.68	25.56

5. En España muchos productos llevan en el precio un impuesto llamado IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido), del 21 %. En los tickets de los establecimientos suelen marcar el precio final, sumando el 21 % de IVA. Calcula el precio final de una batidora que vale 110 € + IVA

$$Precio\ final = \frac{110\cdot 121}{100} = 133.1\ €$$

El precio final de la batidora es de 133.10 €

6. Con 48 € puedo comprar 20 piezas de madera. Si las piezas costaran 1.50 € cada una, ¿cuántas podría comprar con el mismo dinero?

$$\frac{48}{1.50} = 32\ piezas$$

7. ¿En cuál de estas recetas es mayor la proporción entre la harina y el azúcar?

MASA DE ROSQUILLAS **2 kg de harina** **6 huevos** **1 kg y medio de azúcar**	**MASA DE ROSQUILLAS** **Medio kilo de harina** **4 huevos** **400 g de azúcar**

Proporción en la primera receta:

$$\frac{2}{1.5} = 1.33$$

Proporción en la segunda receta::

$$\frac{0.5}{0.4} = 1.25$$

La proporción entre la harina y el azúcar es mayor en la primera receta.

8. Tenemos el pienso suficiente para dar de comer a las 45 vacas durante 30 días. Si vendemos 9 vacas, con la misma cantidad de pienso, ¿cuántos días podremos dar de comer a las restantes?

Regla de tres inversa:

45 Vacas → 30 días
36 Amigos → x días

Resolviendo:

$$x = \frac{45 \cdot 30}{36} = 37.5\ días$$

Solución: Con 36 vacas, podremos darles de comer durante 37 días y medio.

9. Calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa:

Velocidad en km/h	90	120		75	
Tiempo en horas	4,5		10		3

Razón de proporcionalidad: 90 · 4.5 = 405

405 : 120 = 3.38 ; 405 : 10 = 40.5 ; 405 : 75 = 5.4 ; 405 : 135 = 3

Velocidad en km/h	90	120	40.5	75	135
Tiempo en horas	4.5	3.38	10	5.4	3

10. Cada gominola cuesta 5 céntimos y pesa 4 g. Compramos una bolsa de 100 g de gominolas. ¿Cuántas gominolas contiene la bolsa? ¿Cuánto nos costarán?

Gominolas por bolsa:

$$\frac{100}{4} = 25\ gominolas$$

Precio por bolsa:

$$25 \cdot 5 = 125\ céntimos = 1.25\ €$$

Cada bolsa de 100 g tendrá 25 gominolas y costará 1.25 €.

11. Si abrimos dos grifos el depósito se llena en 4 horas y media. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el mismo depósito 5 grifos con el mismo caudal?

Regla de tres inversa:

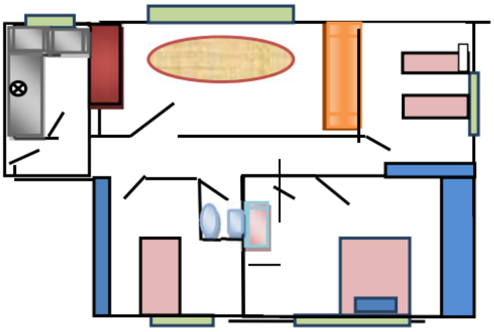
2 grifos → 4.5 horas
5 grifos → x horas

Resolviendo:

$$x = \frac{2 \cdot 4.5}{5} = 1.8\ horas$$

Solución: 5 grifos tardan 1.8 horas en llenar el mismo depósito.

12. Observa el plano de esta vivienda dibujado a una escala 1:400. ¿Cuáles son las dimensiones reales del salón? ¿Y de la cocina?



Para ello, debemos medir el plano directamente con una regla, obteniendo los siguientes resultados:
Salón: 4.5 cm por 2 cm.
Cocina: 1.5 cm por 2 cm.
Ahora podemos calcular las dimensiones reales sabiendo que:

$$Escala = \frac{Medida\ representada}{Medida\ real}$$

Salón:

$$Largo\ salón = \frac{400 \cdot 4.5}{1} = 1800\ cm\ =\ 18\ m$$

$$Ancho\ salón = \frac{400 \cdot 2}{1} = 800\ cm\ =\ 8\ m$$

El salón mide 18 metros por 8 metros.

Cocina:

$$Largo\ cocina = \frac{400 \cdot 2}{1} = 800\ cm\ =\ 8\ m$$

$$Ancho\ cocina = \frac{400 \cdot 1.5}{1} = 600\ cm\ =\ 6\ m$$

El cocina mide 8 metros por 6 metros.

13. Expresa en euros el cambio de 1 400 $, si cada euro cotiza a 1.26 $

Regla de tres directa:

1 € → 1.26 $
x € → 1400 $

Resolviendo:

$$x = \frac{1400 \cdot 1}{1.26} = 1111.11 \text{ €}$$

Solución: 1400 $ equivalen a 1111.11 €.

14. El agua al congelarse aumenta un 10 % su volumen. ¿Cuántos litros de agua necesitamos para conseguir una barra de hielo de 75 dm³?

Sabiendo que 1 dm³ = 1 L:

$$Litros\ de\ agua\ = \frac{75 \cdot 100}{110} = 68.18\ L$$

Solución: Se necesitan aproximadamente 68.18 Litros de agua para formar una barra de hielo de 75 dm³.

15. Un pantalón costaba 36 € pero en las rebajas se vende a 28 €. ¿Qué % han rebajado?

Precio ahorrado:

$$36 - 28 = 8 \text{ €}$$

% rebajado:

$$\frac{\mathbf{8 \cdot 100}}{\mathbf{36}} = \mathbf{22.22}\%$$

16. El precio de una televisión es 847 €, IVA incluido. Calcula el precio sin IVA.

Sabiendo que el IVA es el 21%, el precio sin él será:

$$Precio\ sin\ IVA = \frac{847 \cdot 100}{121} = 700 \text{ €}$$

Solución: El precio sin IVA de la televisión es de 700 €.

17. Señala en cada par de magnitudes si son directa o inversamente proporcionales:

a) La cantidad de árboles talados y los kilos de leña almacenados.

Directamente proporcional

b) La velocidad del tren y el tiempo que tarda en llegar a su destino.

Inversamente proporcional

c) El tamaño de la bolsa y la cantidad de bolsas necesarias para guardar la compra.

Inversamente proporcional

d) La distancia que recorre un automóvil y la gasolina que gasta.

Directamente proporcional

e) Las personas que asisten al cumpleaños y el tamaño del trozo de tarta que toca a cada uno.

Inversamente proporcional

f) El radio de una circunferencia y su longitud.

Directamente proporcional

g) Las bombillas que iluminan una sala y el gasto en electricidad.

Directamente proporcional

18. Para vaciar un depósito hemos empleado 17 cubos de 22 litros cada uno. Si la siguiente vez los cubos tienen una capacidad de 34 litros ¿cuántos necesitaremos?

Regla de tres inversa:

17 cubos → 22 litros
x cubos → 34 litros

Resolviendo:

$$x = \frac{17 \cdot 22}{34} = 11\ cubos$$

Solución: Necesitaremos 11 cubos de 34 litros para vaciar el depósito.

19. En esta etiqueta se ve el precio inicial y el precio rebajado. Calcula el % de rebaja que se ha aplicado.

Antes	Después
23,95	15,95

Rebaja: $23.95 - 15.95 = 8$

% de Rebaja: $\frac{8 \cdot 100}{23.95} = 33.40\%$

20. El 1 de enero de 2010 el bono de 10 viajes del metro de Madrid pasó a costar 9 €, lo que suponía un aumento de un 21.6 % sobre su anterior precio. En 2013, el bono de 10 viajes cuesta 12.20 €. ¿Qué % ha aumentado el precio del bono entre 2010 y 2013? ¿Cuánto costaba el bono antes de la subida de 2010? ¿Qué % ha aumentado su coste desde antes de la subida de 2010?

Precio antes de 2010:

$$\frac{9 \cdot 100}{121.6} = 7.40\ €$$

% de aumento desde 2010 a 2013:

$$12.20 - 7.40 = 4.80\ €\ de\ diferencia$$

$$\frac{4.80 \cdot 100}{7.40} = 64.86\%\ de\ aumento\ desde\ 2010$$

21. Un empleado público que gana 1 154 € netos al mes sufrirá un recorte de sueldo del 5 % a partir del 1 de enero de 2014. ¿Cuánto dinero dejará de ganar al cabo de un trimestre?

Sabiendo que un trimestre son 3 meses:

$$\frac{1154 \cdot 5}{100} = 57.70\ €$$

$$57.70 \cdot 3 = 173.10\ €$$

Solución: dejará de ganar 173.10 € al cabo de un trimestre.

22. En las ciudades se han instalado parquímetros, de manera que se cobra el aparcamiento mediante unas tarifas. Hay dos tipos de zonas con distintas tarifas.

Zona azul	Tarifa		Zona verde	Tarifa
Hasta veinte minutos	0,25 €		Hasta veinte minutos	0,55 €
Media hora	0,45 €		Media hora	1,05 €
Una hora	1,20 €		Una hora	2,25 €
Hora y media	1,90 €		Hora y media (máx.)	3,50 €
Dos horas	2,50 €			

A la vista de este cuadro de precios ¿Cuánto cuesta estacionar un coche en zona azul y en zona verde durante 80 minutos? ¿Y durante 45 minutos?

Ya que 80 minutos son 1 hora y 20 minutos, en ambas zonas hay que elegir la opción de 1 hora y media, es decir, 1.90€ en la zona azul y 3.50 € en la zona verde.
Para 45 minutos habrá que elegir en ambos casos la tarifa de una hora, ya que la de media hora se queda corta. En la zona azul pagaremos 1.20 € y en la zona verde 2.25 €.

23. El precio de un ordenador portátil es 899 € IVA (21%) incluido. Calcula su precio sin IVA.

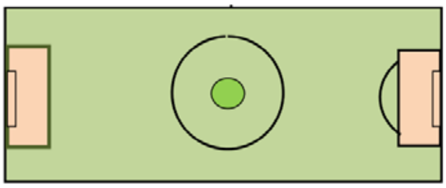
$$Precio\ sin\ IVA = \frac{899 \cdot 100}{121} = 742.98\ €$$

24. El juego de cuatro de neumáticos para un coche se oferta a 324 € + IVA (21%). Calcula el precio de cada rueda.

$$\frac{\mathbf{324 \cdot 121}}{\mathbf{100}} = \mathbf{392.04\ €}$$
$$\mathbf{392.04 \div 4 = 98.01\ €}$$

Cada rueda costará 98.01 €.

25. En un dibujo, el campo de fútbol mide 24 cm por 16 cm. El campo mide 90 m de largo ¿Cuánto mide de ancho? ¿A qué escala está dibujado?



Regla de tres directa:

24 cm → 90 m
16 cm → x m

Resolviendo:

$$x = \frac{16 \cdot 90}{24} = 60\ m$$

Solución: El campo de fútbol mide 60 metros de ancho.

Escala:

$$\frac{9000}{24} = 375$$
$$Escala = \frac{Medida\ representada}{Medida\ real} = \frac{24}{9000} = \frac{1}{375}$$

26. En un mapa dibujado a escala 1 : 250 000, la distancia entre dos puntos es de 0.15 m. Calcula la distancia real en km.

$$Distancia\ real = 0.15 \cdot 250000 = 37500\ m = 37.5\ km$$

27. La base y la altura de un rectángulo miden 14 cm y 32 cm. ¿A qué escala hemos dibujado otro rectángulo semejante al anterior, de 49 cm de base? Calcula su altura.

Escala:

$$\frac{49}{14} = 3.5$$

3.5 : 1

Altura:

$$32 \cdot 3.5 = 112\ cm\ de\ altura$$

28. Con 840 kg de pienso alimentamos a 12 animales durante 8 días. ¿Cuántos animales similares podrían alimentarse con 2130 kg durante 15 días?

Regla de tres compuesta:

840 kg – 12 animales – 8 días
2130 kg – x animales – 15 días

Resolviendo:

$$x = \frac{2130 \cdot 12 \cdot 8}{840 \cdot 15} = 16.2\ animales$$

Solución: Podrían alimentarse aproximadamente 16 animales.

29. Para almacenar 2 580 kg de mercancía en 4 días contratamos a 6 personas. Si sólo podemos contar con 5 personas y la carga es de 3 000 kg ¿Cuántos días se tardará en el almacenaje?

Regla de tres compuesta:

2580 kg – 4 días – 6 personas
3000 kg – x días– 5 personas

Resolviendo:

$$x = \frac{3000 \cdot 4 \cdot 6}{2580 \cdot 5} = 5.58\ días$$

Solución: Se tardará aproximadamente 6 días en almacenar los 3000 kg con 5 personas.

30. Teano fue una matemática griega que vivió en el siglo sexto antes de nuestra era. Se casó con Pitágoras y trabajó en su escuela difundiendo los conocimientos científicos y matemáticos por todos los pueblos del Mediterráneo, entre ellos la proporción áurea. Se sabe que Teano escribió muchas obras y tratados sobre todo tipo de temas. Se le atribuyen escritos sobre poliedros regulares, sobre temas filosóficos y sobre las propiedades del pentágono regular, símbolo de la escuela pitagórica, y su relación con el número de oro.

Solución: diagonal/lado = 1,61803…

31. Si dibujamos un pentágono regular, y trazamos sus diagonales. Se forma en su interior otro pentágono regular más pequeño, y el proceso puede realizarse de forma sucesiva. La razón entre la diagonal del pentágono y uno de sus lados es el número de oro

32. Al número de oro se le llama "La Divina Proporción" porque los objetos áureos son armoniosos a la vista. Esto sucede con las dimensiones de muchos rectángulos. Si divides el lado mayor entre el menor debes obtener el número de oro. Busca a tu alrededor alguno de esos rectángulos armoniosos.

Solución abierta:

33. El número de oro, del que conocerás más características en próximos cursos, tiene un valor aproximado de 1,62. Si quieres saber si eres áurea o áureo, puedes establecer la siguiente razón: tu altura y debe aproximarse lo más posible al número de oro. Mídete. la distancia entre el suelo y tu ombligo

Solución abierta:

AUTOEVALUACIÓN

1. La cantidad de animales de un zoológico y los excrementos diarios que se recogen es una relación.

a) Proporcional directa **b) proporcional inversa** **c) no es proporcional**

En este caso la opción correcta es la a) Proporcional directa, ya que, al tener más animales, estos producirán más excrementos.

2. Siete cajas de galletas de un kilo y medio cada una nos han costado 12.6 €. Si quiero comprar 22 kg de galletas, me costarán:

a) 22.4 € **b) 30.6 €** **c) 26.4 €** **d) 24.2 €**

Calculamos cuantos kilos hay en 7 cajas:

$$7 \cdot 1.5 = 10.5\ kg$$

Regla de tres directa:

10.5 kg → 12.6 €
22 kg → x €

Resolviendo:

$$x = \frac{22 \cdot 12.6}{10.5} = 26.4\ €$$

Solución: Si quiero 22 kg de galletas, me costarán 26,4 €. Opción c).

3. Al aplicar un 24 % de descuento sobre una factura, hemos tenido que pagar 699.20€. El importe total de la factura sin descuento era:

a) 920 € **b) 1 220 €** **c) 880 €**

Calculamos el % al que está ahora:

$100 - 24 = 76\%$ hemos pagado luego el precio inicial era:

$$\frac{699.20 \cdot 100}{76} = 920\ €$$

Respuesta a)

4. De Jaén a Cádiz se tardan 4h y 15 minutos por carretera a una media de 86 km/h. Si subimos la velocidad a 100 km/h, ¿cuánto se tardará en hacer el recorrido?

a) 3h 39 minutos **b) 3h 6 minutos** **c) 3h 56 minutos**

Regla de tres inversa: (15 minutos es 0,25 horas, 1/4 de hora, luego se tarda 4,25h)

4,25 h → 86 km/h
x h → 100 km/h

Resolviendo:

$$x = \frac{4.25 \cdot 86}{100} = 3{,}655\ h$$

Pasamos la parte decimal de las horas a minutos:

$$0{,}655 \cdot 60 = 39.3\ mins$$

Por lo que queda 3 horas y 39 minutos

Solución: Tardará 3 horas y 39 minutos en hacer el recorrido. Opción a).

5. La distancia entre dos ciudades es 108 km. En el mapa se representa con una distancia de 6 cm. La escala del mapa es:

a) 1 : 180 000 b) 1 : 18 000 c) 1 : 1 600 000 d) 1 : 1 800 000

$$Escala = \frac{Medida\ representada}{Medida\ real} = \frac{6}{10800000} = \frac{1}{1800000}$$

Solución: La opción correcta es la d) 1 : 1800000

6. Una sala de espectáculos tiene capacidad para 280 personas. El precio de cada entrada es 14 €. Hoy se han vendido el 85 % de la sala, y de ellas, 50 con un 15 % de descuento. La recaudación total ha sido:

a) 3 227 € b) 2 998 € c) 3 028 €

Primero calculamos las entradas totales vendidas:

$$\frac{280 \cdot 85}{100} = 238\ entradas$$

Ahora calcularemos cuánto recaudaron las que no tienen descuento y las que tienen descuento, para luego sumar y calcular el total:

$$238 - 50 = 188\ entradas\ sin\ descuento$$
$$188 \cdot 14 = 2632\ €$$
$$\frac{14 \cdot 85}{100} = 11.9\ €\ vale\ una\ entrada\ con\ descuento$$
$$50 \cdot 11.9 = 595\ €$$
$$2632 + 595 = 3227€$$

La recaudación total ha sido de 3227€. Opción a).

7. Los datos que completan esta tabla de proporcionalidad inversa son:

a) 12; 5; 4,5; 50 b) 75; 45; 30; 18 c) 75; 45; 50; 18

Para ello primero calculamos la razón de proporcionalidad inversa (a más personas, menos días tardarán en realizar el trabajo), con esta razón podremos completar la tabla:

$$30 \cdot 15 = 450$$

450 : 75 = 6 ; 450 : 10 = 45 ; 450 : 9 = 50 ; 450 : 25 = 18

Personas que realizan su trabajo	30	75	10	9	18
Días que tardan en realizarlo	15	6	45	50	25

La respuesta correcta es la opción c).

8. Cuatro personas han pagado 1 540 € por siete noches de hotel. ¿Cuánto pagarán 6 personas si desean pasar 12 noches en el mismo hotel?

a) 3 690 € b) 3 960 € c) 3 820 €

Regla de tres compuesta:

4 personas – 1540 € – 7 noches
6 personas – x €– 12 noches

Resolviendo:

$$x = \frac{6 \cdot 1540 \cdot 12}{4 \cdot 7} = 3960 \text{ €}$$

Solución: Les costará 3960€ la estancia en el mismo hotel. Opción b).

9. Un carpintero tarda 18 días en realizar 3 armarios trabajando 5 horas al día. ¿Cuántos días necesitará para construir 5 armarios, empleando 3 horas al día?

a) 40 días b) 30 días c) 50 días

Regla de tres compuesta:

18 días – 3 armarios – 5 horas al día
x días – 5 armarios– 3 horas al día

Resolviendo:

$$x = \frac{18 \cdot 5 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 30\ días$$

Solución: Necesitará 30 días para construir 5 armarios. Opción b).

10. 48 estudiantes necesitan 12 450 € para organizar un viaje de estudios de 10 días. ¿Cuántos días durará el viaje si disponen de un 15 % más de dinero y acuden 8 estudiantes menos?

a) 12 días b) 18 días c) 15 días

Calculamos el dinero de que disponen ahora. 12 450 · 1.15 = 14 317.5

Regla de tres compuesta:

48 estudiantes – 12450 € – 10 días
40 estudiantes – 14317.5 € – x días

Resolviendo: $\frac{40}{48} = \frac{10}{x}$ $inversa;$ $\frac{12450}{14317.5} = \frac{10}{x}$ $directa$

$$\frac{40}{48} \cdot \frac{12450}{14317.5} = \frac{10}{x}$$

$$x = \frac{14317.5 \cdot 10 \cdot 48}{12450 \cdot 40} = 13.8\ días$$

Solución: Ya que no llegan ni a 15 días ni a 18, la única opción asequible es la a) 12 días.

2º ESO
Capítulo 10: Álgebra
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Antonio Pozo León

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1. Expresa las siguientes frases en lenguaje algebraico:

a) El triple de un número más su mitad.

Solución: Sea x: $un\ número\ cualquiera\ \rightarrow\ 3x + x/2$

b) La edad de una persona dentro de 10 años.

Solución: Sea x: $edad\ de\ una\ persona\ \rightarrow\ x + 10$

c) La sexta parte de un número menos su cuadrado.

Solución: Sea x: $un\ número\ cualquiera\ \rightarrow\ x/6 - x^2$

d) La diferencia entre dos números consecutivos.

Solución: Sea x: $un\ número\ cualquiera\ \rightarrow\ x - (x - 1)$

2. Un mago le propone un juego a Adela: Piensa un número, súmale 7, multiplica el resultado por 2, réstale 10 y réstale el número. Dime qué te sale. Adela dijo 9. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 5. Adivina cómo lo supo el mago.

Solución:
Paso 1: Definir la variable: Sea "x" el número que Adela pensó.
Paso 2: Traducir las instrucciones del mago a una expresión algebraica:

Súmale 7: $x + 7$
Multiplica el resultado por 2: $2(x + 7)$
Réstale 10: $2(x + 7) - 10$
Réstale el número: $2(x + 7) - 10 - x$

Paso 3: Simplificar la expresión algebraica: $2x + 14 - 10 - x = x + 4$
Paso 4: Establecer la expresión igual al resultado de Adela: $x + 4 = 9$
Paso 5: Resolver para x: $x = 9 - 4 = 5$
Por lo tanto, el mago sabía que el número original de Adela era 5 resolviendo la ecuación que representaba los pasos del juego.

3. ¿Quieres ser tú ahora el mago? Inventa un juego y escríbelo, para poder adivinar el número pensado.

Solución, propuesta de juego:

1. Piensa en un número.
2. Multiplícalo por 3.
3. Súmale 12.
4. Divide el resultado entre 3.
5. Réstale 4.

Llamemos x al número pensado. Sigamos los pasos:

1. x
2. 3x
3. $3x + 12$
4. $(3x + 12)/3 = x + 4$
5. $x + 4 - 4 = x$

Al final, se obtiene el número original x. Por lo tanto, al preguntar el resultado final, se puede adivinar el número que la persona pensó.

4. Señala el coeficiente, la parte literal y el número de términos o monomios de los polinomios siguientes:

a) $\mathbf{3 - 14xy}$

Solución: Coeficientes: 3 y -14, Parte literal: xy, Número de términos o monomios: 2

b) $\mathbf{2a + 6b - 9c}$

Solución: Coeficientes: $2, 6, -9$, Partes literales: a, b, c, Número de términos o monomios: 3

c) $\mathbf{6xy + 8}$

Solución: Coeficiente: 6, Parte literal: xy, Número de términos o monomios: 2

d) $\mathbf{2xy + 6 - 4y}$

Solución: Coeficientes: $2, -4$, Partes literales: xy, y, Número de términos o monomios: 3

5. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios:

a) $\mathbf{6x + 4y}$ $\quad$ $\boldsymbol{para\, x = 3, y = 2}$.

Solución: $6 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 26$

b) $\mathbf{2 - 3a}$ $\quad$ $\boldsymbol{para\, a = -5}$.

Solución: $2 - 3 \cdot (-5) = 17$

c) $\mathbf{5a + 9b - 7c}$ $\quad$ $\boldsymbol{para\, b = -1, a = -1 \; y \; c = +2}$

Solución: $5 \cdot (-1) + 9\,(-1) - 7 \cdot 2 = -28$

6. Para cada uno de los siguientes polinomios destaca su grado y los monomios que lo constituyen:

a) $\mathbf{3x^6 + 7x^2 - x}$

Solución: Grado: 6, Monomios: $3x^6,\ 7x^2, -x$

b) $\mathbf{7x^3 + 8x^5 - 6x^2}$

Solución: Grado: 5, Monomios: $7x^3, 8x^5, -6x^2$

c) $\mathbf{3xy^6 + 7xy^2 - 2xy}$

Solución: Grado: 7, Monomios: $3xy^6, 7xy^2, -2x$

7. Consideremos el polinomio $\boldsymbol{p(x) = 3x^6 + 7x^2 - x}$**. Halla los siguientes valores numéricos de** $\boldsymbol{p}$**:** $\boldsymbol{p(0),\ p(1),\ p(-1),\ p(2)}$.

Soluciones:

$p(0) = 3(0)^6 + 7(0)^2 - 0 = 0.$

$p(1) = 3(1)^6 + 7(1)^2 - 1 = 9.$

$p(-1) = 3(-1)^6 + 7(-1)^2 - (-1) = 11.$

$p(2) = 3(2)^6 + 7(2)^2 - 2 = 220.$

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $\mathbf{(-x^3 + x - 5) + (2x^2 + 5x + 4) + (-4x^3 - 2x^2 + 3x)}$

Solución:

Agrupamos los términos semejantes:

$$(-x^3 - 4x^3) + (2x^2 - 2x^2) + (x + 5x + 3x) + (-5 + 4)$$

Realizamos las operaciones:

- Para x^3: $-x^3 - 4x^3 = -5x^3$
- Para x^2: $2x^2 - 2x^2 = 0$
- Para x: $x + 5x + 3x = 9x$
- Para los términos constantes: $-5 + 4 = -1$

El resultado es: $-5x^3 + 9x - 1$

b) $\boldsymbol{(x^2 + 4) + (-2x + 4) + (-6x^3 + 3x^2 + x + 1) - x^2}$

Solución:

Expandimos y agrupamos los términos semejantes:

$$(x^2 - x^2 + 3x^2) + (-6x^3) + (-2x + x) + (4 + 4 + 1)$$

Realizamos las operaciones:

- Para x^3: $-6x^3$
- Para x^2: $(x^2 - x^2 + 3x^2 = 3x^2)$
- Para x: $-2x + x = -x$
- Para los términos constantes: $4 + 4 + 1 = 9$

El resultado es: $-6x^3 + 3x^2 - x + 9$

9. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $\boldsymbol{(-2x)(3x^2 - 4)}$

Solución:

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$(-2x)(3x^2) + (-2x)(-4)$$

Realizamos las operaciones:

- $(-2x)(3x^2) = -6x^3$
- $(-2x)(-4) = 8x$

El resultado es: $(-6x^3 + 8x)$

b) $\boldsymbol{(2x^3 + 1)(-4x + 5)}$

Solución:

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$(2x^3)(-4x) + (2x^3)(5) + (1)(-4x) + (1)(5)$$

Realizamos las operaciones:

- $(2x^3)(-4x) = -8x^4$
- $(2x^3)(5) = 10x^3$
- $(1)(-4x) = -4x$
- $(1)(5) = 5$

El resultado es: $-8x^4 + 10x^3 - 4x + 5$

c) $\boldsymbol{(4x^3 - x^2 - 1)(2x + 6)}$

Solución:

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$(4x^3)(2x) + (4x^3)(6) + (-x^2)(2x) + (-x^2)(6) + (-1)(2x) + (-1)(6)$$

Realizamos las operaciones:

- $(4x^3)(2x) = 8x^4$

- $(4x^3)(6) = 24x^3$
- $(-x^2)(2x) = -2x^3$
- $(-x^2)(6) = -6x^2$
- $(-1)(2x) = -2x$
- $(-1)(6) = -6$

Agrupamos términos semejantes: $8x^4 + (24x^3 - 2x^3) - 6x^2 - 2x - 6$
El resultado es: $8x^4 + 22x^3 - 6x^2 - 2x - 6$

d) $(\mathbf{-1})(\mathbf{8x^2 + 7x - 9})$
Solución:
Aplicamos la propiedad distributiva:

$$(-1)(8x^2) + (-1)(7x) + (-1)(-9)$$

Realizamos las operaciones:
- $(-1)(8x^2) = -8x^2$
- $(-1)(7x) = -7x$
- $(-1)(-9) = 9$

El resultado es: $-8\mathrm{x}^2 - 7\mathrm{x} + 9$

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

10. Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala:

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$4x - 5 = 6x - 7$			
	$3x + 2$	$x - 9$	
$8a + 7 = 65$			
	$4x - 3y$	$2 + y$	

Ecuación	Primer miembro	Segundo miembro	Incógnitas
$\mathbf{4x - 5 = 6x - 7}$	$4x - 5$	$6x - 7$	x
$3x + 2 = x - 9$	$\mathbf{3x + 2}$	$\mathbf{x - 9}$	x
$\mathbf{8a + 7 = 65}$	$8a + 7$	65	a
$4x - 3y = 2 + y$	$\mathbf{4x - 3y}$	$\mathbf{2 + y}$	x, y

11. Indica el número de incógnitas de las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{x - 2y = 3x + 4}$
Solución: x, y (2 incógnitas)
b) $\mathbf{5x + 6y^2 = 7}$
Solución: x, y (2 incógnitas)
c) $\mathbf{8a + 9a^2 = 1}$
Solución: a (1 incógnita)
d) $\mathbf{2x + 3x^2 = 4}$
Solución: x (1 incógnita)

12. Indica el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{5x - 6 = 7x + 8}$

Solución: Grado 1

b) $\mathbf{9x + y^2 = 13}$

Solución: Grado 2

c) $\mathbf{x + 2x^2 = 3}$

Solución: Grado 2

d) $\mathbf{4x + 5xy^2 = 6}$

Solución: Grado 3

13. Averigua cuál de los números es la solución de la ecuación y escríbelo en tu cuaderno:

Ecuación	Posibles soluciones		Ecuación	Posibles soluciones
$\mathbf{3x + 5 = x - 1}$	$\mathbf{2, -1, -3}$		$\mathbf{a^2 - 6 = -2}$	$\mathbf{-2, -6, 2}$
$\mathbf{x + 6 = 4x - 3}$	$\mathbf{3, -2, -3}$		$\mathbf{b - 4 = 8 - b}$	$\mathbf{3, 4, 6}$

Soluciones:

- Ecuación 1:

$$3x + 5 = x - 1$$

Sumamos $-5 - x$ en ambos lados de la igualdad:

$$3x + 5 + (-5 - x) = x - 1 + (-5 - x)$$

Simplificamos:

$$2x = -6$$

Resultado: $x = -3$

- Ecuación 2:

$$x + 6 = 4x - 3$$

Sumamos $-4x - 6$ en ambos lados de la igualdad:

$$x + 6 + (-4x - 6) = 4x - 3 + (-4x - 6)$$

Simplificamos:

$$-3x = -9$$

Resultado: $x = 3$

- Ecuación 3:

$$a^2 - 6 = -2$$

Sumamos 6 en cada lado de la igualdad:

$$a^2 - 6 + (6) = -2 + (6)$$

Simplificamos:

$$a^2 = 4$$
$$a = \pm\sqrt{4}$$

Resultados: $a_1 = 2,\ a_2 = -2$

- Ecuación 4:

$$b - 4 = 8 - b$$

Sumamos $b + 4$ en ambos lados de la igualdad:

$$b - 4 + (b + 4) = 8 - b + (b + 4)$$

Simplificamos:

$$2b = 12$$

Resultado: $b = 6$

Ecuación	Soluciones		Ecuación	Soluciones
$3x + 5 = x - 1$	-3		$a^2 - 6 = -2$	$-2, 2$
$x + 6 = 4x - 3$	3		$b - 4 = 8 - b$	6

14. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{5x - 1 = 3x - 4}$

Solución:

Despejamos x, sumamos $-3x + 1$ en ambos lados de la igualdad:

$$5x - 1 + (-3x + 1) = 3x - 4 + (-3x + 1)$$
$$2x = -3$$

Resultado: $x = -3/2$

b) $\mathbf{7x + 9 = 5x - 6}$

Solución:

Despejamos x, sumamos $-5x - 9$ en ambos lados de la igualdad:

$$7x + 9 + (-5x - 9) = 5x - 6 + (-5x - 9)$$
$$2x = -15$$

Resultado: $x = -15/2$

c) $\mathbf{6x + 8 = 14}$

Solución:

Despejamos x, sumamos -8 en ambos lados de la igualdad:

$$6x + 8 + (-8) = 14 + (-8)$$
$$6x = 6$$

Resultado: $x = 1$

d) $\mathbf{3x - 9 = 2x - 11}$

Solución:

Despejamos x, sumamos $-2x + 9$ en ambos lados de la igualdad:

$$3x - 9 + (-2x + 9) = 2x - 11 + (-2x + 9)$$
$$x = 2$$

Resultado: $x = 2$

15. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $\mathbf{3x - 6 = x + 10}$.

a) $\mathbf{x - 10 = 5}$

b) $\mathbf{16 - x = 3x - 5x}$

c) $\mathbf{4x = 32}$

d) $\mathbf{2x = 10 + 6}$

e) $\mathbf{8 = x}$

Solución:

Para ello, desarrollamos $3x - 6 = x + 10$. Obteniendo:

$$3x - 6 + (6 - x) = x + 10 + (6 - x)$$
$$2x = 16$$
$$x = 8$$

Por tanto, desarrollando el resto de las ecuaciones, si $x = 8$, estas serán equivalentes, comprobémoslo:

a) $x - 10 = 5; x = 15 \rightarrow No\ es\ equivalente.$

b) $16 - x = 3x - 5x; x = 16 \rightarrow No\ es\ equivalente.$

c) $4x = 32; x = 8 \rightarrow Es\ equivalente.$

d) $2x = 16; x = 8 \to Es\ equivalente.$

e) $8 = x; x = 8 \to Es\ equivalente.$

Las ecuaciones correspondientes con el c), d) y e) son equivalentes a la ecuación del enunciado.

16. Escribe dos ecuaciones equivalentes a cada una de las ecuaciones siguientes:

Mientras se mantenga la equivalencia en ambas partes de la igualdad, las ecuaciones serán equivalentes, luego:

a) $\mathbf{2x - 5 = 13}$

Solución:

$a_1: 2x - 2 = 16$ (Sumamos 3 en ambas partes)

$a_2: x - 5 = 13 - x$ (Restamos x en ambas partes)

b) $\mathbf{3x = 15}$

Solución:

$b_1: x = 5$ (Multiplicamos por $1/3$ ambas partes)

$b_2: 3x - 15 = 0$ (Restamos 15 ambas partes)

c) $\mathbf{5x + 12 = 7}$

Solución:

$c_1: 5x = -5$ (Sumamos -12 a ambas partes)

$c_2: x = -1$ (Además, multiplicamos por $1/5$ ambas partes)

d) $\mathbf{x = -5}$

Solución:

$d_1: 2x = -10$ (Multiplicamos por 2 en ambas partes)

$d_2: x + 5 = 0$ (Sumamos 5 en ambas partes)

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES

17. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más 3. Calcula dichos números.

Sea x el número menor de los tres consecutivos:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 2(x + 2) + 3$$

Desarrollamos:

$$3x + 3 = 2x + 4 + 3$$
$$x = 7 - 3$$
$$x = 4$$

Los números calculados serán 4, 5 y 6.

18. La madre de Álvaro tiene el triple de la edad de su hijo, y éste tiene 32 años menos que su madre. ¿Cuántos años tienen cada uno?

Sea x la edad de Álvaro y la edad de su madre 3x

$$x = 3x - 32$$
$$2x = 32$$
$$x = 16 \to la\ madre\ 3 \cdot 16 = 48$$

Luego, Álvaro tiene 16 años y su madre tiene 48.

19. Un mago le dijo: Piensa un número, súmale 12, multiplica por 2 el resultado, resta 20 y divide por 2. Dime que te sale. Dijo 35. Y el mago le contestó de inmediato: El número que pensaste es 33. Adivina como lo supo el mago. (Sugerencia: escribe previamente la cadena de operaciones).

Solución:
Para entender cómo el mago adivinó el número, vamos a escribir la cadena de operaciones matemáticas y luego descomponer el procedimiento.

- Piensa un número: Llamemos a este número x.
- Súmale 12: Esto se convierte en $x + 12$
- Multiplica por 2 el resultado: $2(x + 12) = 2x + 24$
- Resta 20: $(2x + 24) - 20 = 2x + 4$
- Divide por 2: $(2x + 4)/2 = x + 2$

La cadena de operaciones termina en $x + 2$. Cuando la persona le dijo al mago que el resultado era 35, el mago simplemente resolvió la ecuación inversa:

$$x + 2 = 35 \rightarrow x = 35 - 2 \rightarrow x = 33$$

El mago supo el número pensado 33 porque todas las operaciones realizadas simplemente añadieron 2 al número inicial 2. Al recibir el resultado, el mago restó 2 para encontrar el número pensado.

20. Piensa un número, multiplícale por 10, réstale el número que has pensado y divide el resultado entre 9. ¡Has obtenido el número que pensaste! Busca el truco: escribe algebraicamente, llamando x al número, la expresión algebraica de las operaciones realizadas, y adivina como lo supo el mago.

Solución:
Vamos a descomponer las operaciones paso a paso y escribirlas algebraicamente para entender el truco.

- Piensa un número: Llamemos a este número x.
- Multiplícalo por 10: Esto se convierte en $10\mathrm{x}$.
- Réstale el número que has pensado $10\mathrm{x} - \mathrm{x} = 9\mathrm{x}$.
- Divide el resultado entre 9: $9\mathrm{x}/9 = \mathrm{x}$.

El resultado final es x, que es el mismo número que pensaste al inicio.
El truco funciona porque las operaciones siempre "cancelan" las modificaciones realizadas al número x. Al multiplicarlo por 10 y luego restarle x, se genera $9\mathrm{x}$, y al dividir entre 9, se recupera el valor original de x.

21. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata? (Sugerencia: ilustra la situación con una balanza equilibrada. Mantenla equilibrada hasta conseguir la ecuación equivalente que nos dé el resultado).

Solución:
Sea x el numero menor de los tres consecutivos. La suma de estos tres números es 63, entonces:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 63$$

Sumamos los términos semejantes:

$$3x + 3 = 63$$

Restamos 3 en ambos lados:

$$3x + 3 - 3 = 63 - 3$$
$$3x = 60$$

Dividimos entre 3 en ambos lados:

$$(3x)/3 = 60/3$$
$$x = 20$$

Luego, los números consecutivos son $20, 21\ y\ 22$.

22. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50€. Si nos han devuelto 10€, ¿cuánto costaba cada libro?

Solución:

- Hemos comprado 8 libros iguales. Llamemos x al precio de cada libro.
- Pagamos con un billete de 50€, y nos devolvieron 10€. Esto significa que gastamos en total $50 – 10 = 40$€.
- El costo total de los libros es igual al precio de un libro multiplicado por 8 (ya que compramos 8 libros).

Esto nos da la ecuación:

$$8x = 40$$

Dividimos ambos lados de la ecuación entre 8:

$$8x/(8) = 40/(8)$$
$$x = 5$$

Cada libro costaba 5 €.

23. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

Solución:

- Llamemos a la longitud del tercer lado (el lado desigual del triángulo isósceles).
- Cada uno de los lados iguales mide el doble del tercer lado menos 2 cm. Esto significa que cada uno de los lados iguales tiene una longitud de $2x - 2$
- El perímetro del triángulo es la suma de las longitudes de sus tres lados, y sabemos que es igual a 84 cm.

Esto nos da la ecuación:

$$x + (2x - 2) + (2x - 2) = 84$$

Simplificamos la ecuación:

$$x + 2x - 2 + 2x - 2 = 84$$
$$5x - 4 = 84$$

Sumamos 4 a ambos lados:

$$5x = 88$$

Dividimos entre 5:

$$x = 88/5 = 17.6$$

El tercer lado (el lado desigual) mide: $x = 17.6cm$

Cada uno de los lados iguales mide: $2x - 2 = 2(17.6) - 2 = 35.2 - 2 = 33.2cm$

24. Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus catetos suman 20 cm y el cateto mayor mide 4 cm más que el menor.

Solución:

- Llamemos a la longitud del cateto menor.
- El cateto mayor mide 4 cm más que el menor, es decir, $x + 4$
- La suma de los catetos es 20 cm, lo que nos da la ecuación:

$$x + (x + 4) = 20$$

Simplificamos la ecuación:

$$x + x + 4 = 20$$
$$2x + 4 = 20$$

Restamos 4 a ambos lados:

$$2x = 16$$

Dividimos entre 2:

$$x = 8$$

El cateto menor mide (i): $x = 8cm$

El cateto mayor mide (h): $x + 4 = 8 + 4 = 12cm$

El área de un triángulo rectángulo se calcula con la fórmula:

$$A = (i \times h)/2$$

Luego:

$$A = 1/2 \cdot 8 \cdot 12 = 1/2 \cdot 96 = 48cm^2$$

El área del triángulo rectángulo es $48cm^2$.

25. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6°.

Solución:

En un triángulo rectángulo, sabemos que:

- La suma de los ángulos internos es 180°.
- Uno de los ángulos es recto (90°).
- Los otros dos ángulos son agudos y su suma es 90°.

2. Llamemos x al ángulo menor (uno de los ángulos agudos).
3. El ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6°, lo que se expresa como:

$$ángulo\ mayor = 3x - 6$$

La suma de los dos ángulos agudos es 90°, por lo que planteamos la ecuación:

$$x + (3x - 6) = 90$$

Simplificamos la ecuación:

$$x + 3x - 6 = 90$$
$$4x - 6 = 90$$

Sumamos 6 a ambos lados:

$$4x = 96$$

Dividimos entre 4:

$$x = 24$$

El ángulo menor es: $x = 24°$

El ángulo mayor es: $3x - 6 = 3(24) - 6 = 72 - 6 = 66°$

26. Dos motocicletas salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 420 km, en la misma dirección, pero en sentido contrario. La primera lleva una velocidad de 60 km/h y la segunda, de 80 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse? Ayuda: Haz un diagrama para comprender el enunciado

Solución:

A -----------------→60 km/h \<--- 420 km --->/ 80 km/h←----------------- B

Las dos motocicletas se dirigen una hacia la otra desde puntos opuestos. Una tiene una velocidad de 60 km/h y la otra de 80 km/h.

Podemos calcular el tiempo que tardarán en cruzarse usando la siguiente fórmula:

$$Distancia = Velocidad\ total \times Tiempo$$

La velocidad total es la suma de las velocidades de ambas motocicletas:

$$Velocidad\ total = 60 + 80 = 140\ km/h$$

Entonces, usando la fórmula, podemos encontrar el tiempo:

$$Tiempo = \frac{Distancia}{Velocidad\ total} = \frac{420km}{140km/h} = 3\ horas$$

Así que las motocicletas se cruzarán después de 3 horas.

27. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

Solución:

Los dos coches se mueven uno hacia el otro desde puntos opuestos. Uno tiene una velocidad de 70 km/h y el otro de 90 km/h.

Podemos calcular el tiempo que tardarán en cruzarse usando la siguiente fórmula:

$$Distancia = Velocidad\ total \times Tiempo$$

La velocidad total es la suma de las velocidades de ambos coches:

$$70km/h + 90km/h = 160km/h$$

Entonces, usando la fórmula, podemos encontrar el tiempo:

$$Tiempo = \frac{Distancia}{Velocidad\ total} = \frac{560km}{160km/h} = 3.5 horas$$

Así que los coches se cruzarán después de 3.5 horas.

28. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 céntimos y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

Solución:

Supongamos que tenemos x monedas de 10 céntimos nos quedan 16 – x monedas de 20 céntimos.

- El valor total en euros es 2 €, que en céntimos es 200 céntimos:

$$10x + 20(16 - x) = 200$$
$$10x + 320 - 20x = 200$$
$$-10x = -120$$
$$x = 12$$

Por lo tanto, tienes 12 monedas de 10 céntimos; (16 – 12 = 4) y 4 monedas de 20 céntimos.

29. Si un bolígrafo vale 1.5 euros que es el triple del precio de un lápiz, he comprado un total de 7 lápices y bolígrafos, y he pagado en total 5.50 €, ¿cuántos bolígrafos y cuántos lápices he comprado?

Solución:

El precio de un bolígrafo es 1.5 euros. Dado que es el triple del precio de un lápiz, el precio de un lápiz es:

$$\frac{1.5}{3} = 0.5\ euros$$

Supongamos que has comprado x bolígrafos y por tanto 7 – x lápices. Sabemos dos cosas:

$$1.5x + 0.5(7 - x) = 5.5$$
$$1.5x + 3.5 - 0.5x = 5.5$$
$$x = 2$$

Entonces, si $x = 2$, 7 – 2 = 5

Por lo tanto, has comprado 2 bolígrafos y 5 lápices.

30. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

Solución:

Supongamos que Nieves tiene x crías de hámsteres.

- A la primera amiga le regala la mitad de las crías, por lo que le quedan $x/2$ crías.
- A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría:

$$x/2/2 + 1/2 = x/4 + 1/2$$

Después de esta segunda entrega, le quedan:

$$x/2 - (x/4 + 1/2) = x/4 - 1/2$$

- A un tercer amigo le regala la única cría que le queda:

$$x/4 - 1/2 = 1$$

Vamos a resolver esta ecuación para x:

$$x/4 - 1/2 = 1$$
$$x/4 = 1 + 1/2$$
$$x/4 = 3/2$$
$$x = 4 \cdot 3/2$$
$$x = 6$$

Por lo tanto, la camada de crías estaba formada por 6 hámsteres.

31. Dos amigas, Maite y Ana, fueron a visitar una granja en la que había gallinas y conejos. Al salir Ana le preguntó a Maite: Sabes cuántas gallinas y cuántos conejos había. No, dijo Maite, pero había en total 72 ojos y 122 patas. Averigua el número de gallinas y de conejos de la granja.

Solución:

Dividimos el número de ojos entre 2 y obtenemos 72/2 = 36, luego hay 36 animales.

Si el número de gallinas es x, el de conejos es 36 – x

- Cada gallina tiene 2 patas y cada conejo tiene 4 patas, y hay un total de 122 patas:

$$2x + 4(36 - x) = 122$$
$$2x + 144 - 4x = 122$$
$$-2x = -22$$
$$x = 11$$

Conejos 36 – 11 = 25

Por lo tanto, en la granja hay 11 gallinas y 25 conejos.

32. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

Solución:

Supongamos que la capacidad total del depósito es x litros.

- Primero se saca la mitad del contenido, por lo que queda la otra mitad:

$$x/2$$

- Luego se saca la tercera parte del resto, es decir, la tercera parte de $x/2$:

$$1/3 \cdot x/2 = x/6$$

Así que, después de sacar la tercera parte del resto, queda:

$$x/2 - x/6$$

Para simplificar esto, hacemos lo siguiente:

$$(3x)/6 - x/6 = (2x)/6 = x/3$$

- Sabemos que después de estos dos pasos, quedan 1600 litros. Así que tenemos:

$$x/3 \ = \ 1600$$

Resolvemos para x:

$$x \ = \ 1600 \cdot \ 3$$
$$x \ = \ 4800$$

Por lo tanto, la capacidad del depósito es de 4800 litros.

4. ECUACIONES DE 2º GRADO

33. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones:

a) $\boldsymbol{5x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 8 = 0}$

Solución: Sí, es una ecuación de segundo grado porque el término de mayor grado es x^2.

b) $\boldsymbol{7xy^2 - 2 = 0}$

Solución: No, no es una ecuación de segundo grado en una variable, es una ecuación bivariante que involucra x e y^2.

c) $\boldsymbol{3x^2 - 5 = 0}$

Solución: Sí, es una ecuación de segundo grado porque el término de mayor grado es x^2.

d) $\boldsymbol{6 - 8.3x = 0}$

Solución: No, no es una ecuación de segundo grado porque solo tiene un término lineal en x y una constante.

e) $\boldsymbol{2x^2 + \frac{-3}{x} = 0}$

Solución: No, no es una ecuación de segundo grado porque incluye un término de $1/x$, si desarrollamos:

$$2x^2 = \frac{3}{x} \leftrightarrow \ x \ \neq 0$$
$$2x^3 - 3 = 0$$

Tenemos una ecuación de tercer grado.

f) $\boldsymbol{2x^2 - \sqrt{x} + 4 = 0}$

Solución: No, no es una ecuación de segundo grado porque incluye un término de $\sqrt{x}$, lo cual la hace una ecuación no polinómica.

34. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica cuales son $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{c}$.

a) $\boldsymbol{7 - 8x^2 + 2x = 0}$

Solución: $a = -8, b = 2 \ y \ c = 7$

b) $\boldsymbol{-6x^2 + 9x = 0}$

Solución: $a = -6, b = 9 \ y \ c = 0$

c) $\boldsymbol{4x^2 - 5 = 0}$

Solución:$a = 4, b = 0 \ y \ c = -5$

d) $\boldsymbol{x^2 - 3x + 5 = 0}$

Solución:$a = 1, b = -3 \ y \ c = 5$

35. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $\boldsymbol{3x^2 + 9x = 0}$

Solución:
Factorizamos:

$$3x(x+3)=0$$

Entonces las soluciones son:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 3 = 0; x_2 = -3 \end{cases}$$

b) $\mathbf{2x^2 - 8 = 0}$

Solución:
Sumamos 8 a ambos lados:

$$2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x \;=\; \pm 2$$

Entonces las soluciones son:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

c) $\mathbf{x^2 - 81 = 0}$

Solución:
Sumamos 81 a ambos lados:

$$x^2 = 81 \rightarrow x \;=\; \pm 9$$

Entonces las soluciones son:

$$\begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -9 \end{cases}$$

d) $\mathbf{2x^2 + 5x = 0}$

Solución:
Factorizamos:

$$x(2x+5)=0$$

Entonces las soluciones son:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 + 5 = 0; 2x_2 = -5; x_2 = -5/2 \end{cases}$$

36. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

Usaremos la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a) $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$

Solución:
Tenemos los valores de $a, b\ y\ c$:
$a \;=\; 1\,, b \;=\; -5\, y\;\; c \;=\; 6$
Aplicamos la formula:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

b) $\mathbf{2x^2 + 5x - 7 = 0}$

Solución:

Tenemos los valores de a, b y c:

$a = 2, b = 5$ y $c = -7$

Aplicamos la formula:

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 9}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+9}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5-9}{4} = -\dfrac{14}{4} = -3.5 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 1$ y $x_2 = -3.5$

c) $\mathbf{3x^2 - 8x + 2 = 0}$

Solución:

Tenemos los valores de a, b y c:

$a = 3, b = -8$ y $c = 2$

Aplicamos la formula:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{6}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{6}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+\sqrt{10}}{3} \\ x_2 = \dfrac{4-\sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{3}$ y $x_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{3}$

d) $\mathbf{x^2 - x - 12 = 0}$

Solución:

Tenemos los valores de a, b y c:

$a = 1, b = -1$ y $c = -12$

Aplicamos la formula:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+7}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{1-7}{2} = -3 \end{cases}$$

Las soluciones son: $x_1 = 4 \ y \ x_2 = -3$

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

37. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{xy + 7y = 9} \\ \boldsymbol{8x - 5y = 10} \end{cases}$

Solución: No es un sistema lineal porque tiene términos xy.

b) $\begin{cases} \boldsymbol{2y - 3x = 4} \\ \boldsymbol{5x - 6y = -7} \end{cases}$

Solución: Es un sistema lineal.

c) $\begin{cases} \boldsymbol{8x - 9 = 5y} \\ \boldsymbol{14x + 7y = \frac{2}{3}} \end{cases}$

Solución: Es un sistema lineal.

d) $\begin{cases} \boldsymbol{2x^2 + y = 2} \\ \boldsymbol{3x + y^2 = 4} \end{cases}$

Solución: No es un sistema lineal porque tiene términos $x^2 e \ y^2$

38. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{2x + 4y = -5} \\ \boldsymbol{3x - 6y = 7} \end{cases}$

Solución:

Empezamos despejando x en la primera ecuación:

$$2x + 4y = -5$$
$$x = \frac{-5 - 4y}{2}$$

Sustituimos x en la segunda ecuación:

$$3\left(\frac{-5 - 4y}{2}\right) - 6y = 7$$
$$\frac{-15 - 12y}{2} - 6y = 7$$
$$15 - 12y - 12y = 14$$
$$-15 - 24y = 14$$
$$-24y = 29$$
$$y = -\frac{29}{24}$$

Sustituimos y en la ecuación de x:

$$x = \frac{-5 - 4\left(-\frac{29}{24}\right)}{2}$$

$$x = \frac{-5 + \frac{116}{24}}{2}$$
$$x = \frac{-5 + \frac{29}{6}}{2}$$
$$x = \frac{-30 + 29}{12}$$
$$x = -\frac{1}{12}$$

Resultados: $x = -1/12 \; e \; y = -29/24$

b) $\begin{cases} \mathbf{2x + 4y = 0} \\ \mathbf{3x + 6y = 11} \end{cases}$

Solución:
Empezamos despejando x en la primera ecuación:

$$2x + 4y = 0 \rightarrow 2x = -4y$$
$$x = -2y$$

Sustituimos x en la segunda ecuación:

$$3(-2y) + 6y = 11$$
$$-6y + 6y = 11$$
$$0 = 11$$

Esto indica que no hay solución, ya que se obtiene una inconsistencia.
Resultado: No tiene solución.

c) $\begin{cases} \mathbf{5x - 7y = 1} \\ \mathbf{8x + 7y = 10} \end{cases}$

Solución:
Empezamos despejando x en la primera ecuación:

$$5x - 7y = 1$$
$$x = \frac{1 + 7y}{5}$$

Sustituimos x en la segunda ecuación:

$$8\left(\frac{1 + 7y}{5}\right) + 7y = 10$$
$$\frac{8 + 56y}{5} + 7y = 10$$
$$\frac{8 + 56y + 35y}{5} = 10$$
$$8 + 91y = 50$$
$$91y = 42$$
$$y = \frac{42}{91}$$
$$y = \frac{6}{13}$$

Sustituimos y en la ecuación de x:

$$x = \frac{1 + 7\left(\frac{6}{13}\right)}{5}$$
$$x = \frac{1 + \frac{42}{13}}{5}$$

$$x = \frac{13 + 42}{65}$$
$$x = \frac{55}{65}$$
$$x = \frac{11}{13}$$

Resultado: $x = 11/13$ e $y = 6/13$

39. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{6x + 7y = 8} \\ \boldsymbol{-2x + 3y = -4} \end{cases}$

Solución:

Primero, despejamos x en ambas ecuaciones:

$$6x + 7y = 8 \Rightarrow x = \frac{8 - 7y}{6}$$
$$-2x + 3y = -4 \Rightarrow x = \frac{3y + 4}{2}$$

Ahora igualamos las dos expresiones para x:

$$\frac{8 - 7y}{6} = \frac{3y + 4}{2}$$

Multiplicamos ambos lados por 6 para eliminar los denominadores:

$$6 \cdot \left(\frac{8 - 7y}{6} = \frac{3y + 4}{2}\right)$$
$$8 - 7y = 3(3y + 4)$$
$$8 - 7y = 9y + 12$$
$$8 - 12 = 9y + 7y$$
$$-4 = 16y$$
$$y = -\frac{4}{16}$$
$$y = -\frac{1}{4}$$

Sustituimos y en una de las ecuaciones para encontrar x:

$$x = \frac{8 - 7\left(-\frac{1}{4}\right)}{6}$$
$$x = \frac{8 + \frac{7}{4}}{6}$$
$$x = \frac{32 + 7}{24}$$
$$x = \frac{39}{24} = \frac{13}{8}$$

Resultado: $x = 13/8$ e $y = -1/4$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{2x - 3y = -5} \\ \boldsymbol{4x + 2y = 14} \end{cases}$

Solución:

Primero, despejamos x en ambas ecuaciones:

$$2x - 3y = -5 \Rightarrow x = \frac{-5 + 3y}{2}$$

$$4x + 2y = 14 \Rightarrow x = \frac{14 - 2y}{4}$$

Ahora igualamos las dos expresiones para x:

$$\frac{-5 + 3y}{2} = \frac{14 - 2y}{4}$$

Multiplicamos ambos lados por 4 para eliminar los denominadores:

$$4 \cdot \left(\frac{-5 + 3y}{2} = \frac{14 - 2y}{4}\right)$$
$$2(-5 + 3y) = 14 - 2y$$
$$-10 + 6y = 14 - 2y$$
$$6y + 2y = 14 + 10$$
$$8y = 24$$
$$y = \frac{24}{8}$$
$$y = 3$$

Sustituimos y en una de las ecuaciones para encontrar x:

$$x = \frac{-5 + 3(3)}{2}$$
$$x = \frac{-5 + 9}{2}$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$x = 2$$

Resultados: $x = 2$ e $y = 3$

c) $\begin{cases} \mathbf{7x - 4y = 3} \\ \mathbf{3x + 2y = 5} \end{cases}$

Solución:

Primero, despejamos x en ambas ecuaciones:

$$7x - 4y = 3 \Rightarrow x = \frac{3 + 4y}{7}$$
$$3x + 2y = 5 \Rightarrow x = \frac{5 - 2y}{3}$$

Ahora igualamos las dos expresiones para x:

$$\frac{3 + 4y}{7} = \frac{5 - 2y}{3}$$

Multiplicamos ambos lados por 21 (el mínimo común múltiplo de 7 y 3) para eliminar los denominadores:

$$21 \cdot \left(\frac{3 + 4y}{7} = \frac{5 - 2y}{3}\right)$$
$$3(3 + 4y) = 7(5 - 2y)$$
$$9 + 12y = 35 - 14y$$
$$12y + 14y = 35 - 9$$
$$26y = 26$$
$$y = 1$$

Sustituimos y en una de las ecuaciones para encontrar x:

$$x = \frac{3 + 4(1)}{7}$$

$$x = \frac{3 + 4}{7}$$
$$x = \frac{7}{7}$$
$$x = 1$$

Resultados: $x = 1$ e $y = 1$

40. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x + y = 4} \\ \mathbf{2x - 5y = 14} \end{cases}$

Solución:

Multiplicamos la primera ecuación por 5 para poder eliminar y:

$$5(3x + y) = 5 \cdot 4$$
$$15x + 5y = 20$$

Sumamos las dos ecuaciones:

$$(15x + 5y) + (2x - 5y) = 20 + 14$$
$$17x = 34$$
$$x = 2$$

Sustituimos $x = 2$ en la primera ecuación:

$$3(2) + y = 4$$
$$6 + y = 4$$
$$y = 4 - 6$$
$$y = -2$$

Resultados: $x = 2, y = -2$

b) $\begin{cases} \mathbf{5x + 3y = 2} \\ \mathbf{4x + y = 7} \end{cases}$

Solución:

Multiplicamos la segunda ecuación por 3 para poder eliminar y:

$$3(4x + y) = 3 \cdot 7$$
$$12x + 3y = 21$$

Restamos las dos ecuaciones:

$$(12x + 3y) - (5x + 3y) = 21 - 2$$
$$12x + 3y - 5x - 3y = 19$$
$$7x = 19$$
$$x = \frac{19}{7}$$

Sustituimos $x = 19/7$ en la segunda ecuación:

$$4\left(\frac{19}{7}\right) + y = 7$$
$$\frac{76}{7} + y = 7$$
$$y = 7 - \frac{76}{7}$$
$$y = \frac{49}{7} - \frac{76}{7}$$
$$y = \frac{49 - 76}{7}$$
$$y = -\frac{27}{7}$$

Resultados: $x = 19/7\ y = -27/7$

c) $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 0} \\ \mathbf{3x - 2y = 13} \end{cases}$

Solución:

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 para poder eliminar y:

$$2(2x + 3y) = 2 \cdot 0$$
$$4x + 6y = 0$$
$$3(3x - 2y) = 3 \cdot 13$$
$$9x - 6y = 39$$

Sumamos las dos ecuaciones resultantes:

$$(4x + 6y) + (9x - 6y) = 0 + 39$$
$$13x = 39$$
$$x = 3$$

Sustituimos $x = 3$ en la primera ecuación:

$$2(3) + 3y = 0$$
$$6 + 3y = 0$$
$$3y = -6$$
$$y = -2$$

Resultados: $x = 3\,, y = -2$

CURIOSIDADES. REVISTA

41. Confecciona un cuadrado mágico de 3 x 3 casillas, colocando los dígitos del 1 al 9 de forma que todas las filas, todas las columnas, y todas las diagonales sumen lo mismo.

Un cuadrado mágico es una disposición de números en una cuadrícula en la que la suma de los números en cada fila, columna y diagonal es la misma. Para un cuadrado mágico de 3x3 con los números del 1 al 9, la suma de cada fila, columna y diagonal debe ser 15.

Aquí tienes un ejemplo de un cuadrado mágico de 3x3:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

En este cuadrado mágico:

- La primera fila suma $8 + 1 + 6 = 15$
- La segunda fila suma $3 + 5 + 7 = 15$
- La tercera fila suma $4 + 9 + 2 = 15$
- La primera columna suma $8 + 3 + 4 = 15$
- La segunda columna suma $1 + 5 + 9 = 15$
- La tercera columna suma $6 + 7 + 2 = 15$
- La diagonal principal suma $8 + 5 + 2 = 15$
- La diagonal secundaria suma $6 + 5 + 4 = 15$

42.

a) Escribe en lenguaje algebraico el epitafio de la tumba de Diofanto.

Supongamos que x es la cantidad de años que vivió Diofanto.

- La sexta parte de su vida fue su infancia: $x/6$

- La duodécima parte de su vida transcurrió hasta que se cubrió de vello su barba: $x/12$
- La séptima parte de su vida transcurrió en un matrimonio estéril: $x/7$
- Luego pasaron 5 años hasta el nacimiento de su hijo: 5
- Su hijo vivió la mitad de lo que vivió Diofanto: $x/2$
- Diofanto vivió 4 años más después de la muerte de su hijo: 4

La suma de todas estas partes debe ser igual a la duración total de su vida:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

b) Resuelve la ecuación. Comprueba que Diofanto vivió 84 años.

Simplificamos la ecuación sumando las fracciones:

$$\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+5+\frac{42x}{84}+4=x$$

$$\frac{14x+7x+12x+42x}{84}+9=x$$

$$\frac{75x}{84}+9=x$$

$$84\cdot\left(\frac{75x}{84}+9=x\right)$$

$$75x+756=84x$$

$$756=84x-75x$$

$$756=9x$$

$$x=\frac{756}{9}$$

$$x=84$$

Por lo tanto, Diofanto vivió 84 años.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. LENGUAJE ALGEBRAICO

1. Si llamamos x a la edad de Luis, expresa algebraicamente:

a) **Lola tiene la edad que Luis tenía hace 11 años.**

Solución: $x - 11$

b) **Jordi tiene la edad que Luis tendrá dentro de 2 años.**

Solución: $x + 2$

c) **Los años que faltan para que Luis cumpla 30 años.**

Solución: $30 - x$

d) **Carmen tiene la mitad de la edad de Luis.**

Solución: $x / 2$

2. En una granja hay un número de ovejas desconocido. Indica en lenguaje algebraico el número de patas y de orejas que hay.

Solución: Si llamamos x al número de ovejas, habrá $4x$ patas y $2x$ orejas.

3. Escribe en lenguaje algebraico

a) La edad de Cristina es doble que la que tendrá su hermano dentro de 5 años.

Solución: Si la edad del hermano es x, la edad de Cristina es $2(x + 5)$.

b) La edad de Rafa es la tercera parte que la que tenía su hermana hace 3 años.

Solución: Si la edad de la hermana es x, la edad de Rafa es $(x - 3) / 3$.

4. Escribe en tu cuaderno utilizando expresiones algebraicas:

a) Raquel tiene x cromos.

Solución: x

b) Pepe tiene 10 cromos más que Raquel.

Solución: $x + 10$

c) Teresa tiene el triple de cromos que Pepe.

Solución: $3(x + 10)$

d) Carmela tiene el mismo número de cromos que Raquel y Pepe juntos.

Solución: $x + (x + 10)$

e) Marta tiene la mitad de cromos que Teresa.

Solución: $(3(x + 10)) / 2$

5. Copia en tu cuaderno y relaciona cada enunciado verbal con su expresión algebraica:

a) Sumar 9 al triple de un cierto número.	**1) 3x + 2(x + 1)**
b) Restamos 7 a la mitad de un número	**2) $3x + 9$**
c) El triple de un número más el doble del siguiente.	**3) $8x$**
d) Lo que nos devuelven si pagamos 20 € por una cierta compra.	**4) $x/2 - 7$**
e) El perímetro de un octógono regular.	**5) $x - 3$**
f) La edad de alguien hace 3 años.	**6) $20 - x$**

a) Sumar 9 al triple de un cierto número. Solución: 2) $3x + 9$

b) Restamos 7 a la mitad de un número Solución: 4) $x/2 - 7$

c) El triple de un número más el doble del siguiente. Solución: 1) 3x + 2(x + 1)

d) Lo que nos devuelven si pagamos 20 € por una cierta compra. Solución: 6) $20 - x$

e) El perímetro de un octógono regular. Solución: 3) $8x$

f) La edad de alguien hace 3 años. Solución: 5) $x - 3$

6. Calcula el valor numérico de las siguientes igualdades para el valor indicado de x:

a) $\boldsymbol{y = 0.5 + 3x \text{ para } x = 3}$ Solución: $y = 0.5 + 3 \cdot 3 = 9.5$

b) $\boldsymbol{y = 1.6x \text{ para } x = 0.75}$ Solución: $y = 1.6 \cdot 0.75 = 1.2$

c) $\boldsymbol{y = 4 + 1.5x \text{ para } x = 2.1}$ Solución: $y = 4 + 1.5 \cdot 2.1 = 7.154$

7. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\boldsymbol{3a^2b - 2a^2b + 7a^2b}$

Solución: $(3 - 2 + 7)a^2b = 8a^2b$

b) $\boldsymbol{5xy + 7xy - 2xy}$

Solución: $(5 + 7 - 2)xy = 10xy$

c) $\boldsymbol{6x + 9x - 3x}$

Solución: $(6 + 9 - 3)x = 12x$

d) $\boldsymbol{x + 7x - 2y}$

Solución: $(1 + 7)x - 2y = 8x - 2y$

e) $\boldsymbol{3ab + 8ab - 6ab}$

Solución: $(3 + 8 - 6)ab = 5ab$

8. Realiza las operaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{3x + 5x - 2y + 9y - 4x - 3y}$

Solución: $(3x + 5x - 4x) + (-2y + 9y - 3y) = 4x + 4y$

b) $\boldsymbol{(2x - 5x^2) - (3x^2 + 5x)}$

Solución: $2x - 5x^2 - 3x^2 - 5x = 2x - 5x - 8x^2 = -3x - 8x^2$

c) $\boldsymbol{3(7x - 3) - 2(2x + 5)}$

Solución: $3(7x) - 3(3) - 2(2x) - 2(5) = 21x - 9 - 4x = (21x - 4x) + (-9 - 10) = 17x - 19$

d) $\boldsymbol{2a - 5a + 7a - 8a + b}$

Solución: $(2a - 5a + 7a - 8a) + b = (-4a) + b$

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

9. Encuentra el número que falta:

a) $\boldsymbol{O + 2 = 5}$ Solución: $O = 5 - 3 = 2$

b) $\boldsymbol{O + 3 = 1}$ Solución: $O = 1 - 3 = -2$

c) $\boldsymbol{O - 4 = 6}$ Solución: $O = 6 + 4 = 10$

d) $\boldsymbol{O - 4 = -1}$ Solución: $O = -1 + 4 = 3$

10. Si Clara tiene x años y sabemos que aún no ha cumplido los 5, indica quién de las siguientes personas puede ser la madre de Clara:

Persona	*Edad en años*
Julia	$\mathbf{3x - 9}$
María	$\mathbf{x^2 - 17}$
Federica	$\mathbf{3x + 5 + 7x + 6}$
Elisa	$\mathbf{x - 2x + 9}$

Vamos a calcular la edad de cada persona y verificar si pudieran ser la madre de Clara, que aún no ha cumplido los 5 años (es decir, $0 \leq x < 5$):

- Julia: $3x - 9$
- María: $x^2 - 17$
- Federica: $3x + 5 + 7x + 6 = 10x + 11$
- Elisa: $x - 2x + 9 = -x + 9$

Evaluamos cada expresión:

- Julia:

$$3x - 9$$

$Para\ 0 \leq x < 5$

$$Si\ x = 5, \quad 3(5) - 9 = 15 - 9 = 6$$

Edad menor que 6 para $0 \leq x < 5$. Luego, Julia NO puede ser la madre de Clara.

- María:

$$x^2 - 17$$

$Para\ 0 \leq x < 5$

$$Si\ x = 5,\ 5^2 - 17 = 25 - 17 = 8$$

Edad negativa o menor que 8 para $0 \leq x < 5$. Luego, María NO puede ser la madre de Clara.

- Federica:

$$10x + 11$$

$Para\ 0 \leq x < 5$

$$Si\ x = 5, \quad 10(5) + 11 = 50 + 11 = 61$$

Edad mayor que 11 y menor que 61 para $0 \leq x < 5$. Luego, Federica SI pudiera ser la madre de Clara.

- Elisa:

$$-x + 9$$

$Para\ 0 \leq x < 5$

$$Si\ x = 0,\ -0 + 9 = 9$$
$$x = 5,\ -5 + 9 = 4$$

Edad mayor que 4 y menor que 9 para $0 \leq x < 5$. Luego, Elisa NO puede ser la madre de Clara.

11. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones y escribe la solución en tu cuaderno:

a) $\mathbf{x + 3 = 2}$ Solución: $x = 2 - 3 = -1$

b) $\mathbf{x - 2 = 3}$ Solución: $x = 3 + 2 = 5$

c) $\mathbf{x/5 = 1}$ Solución: $x = 1 \cdot 5 = 5$

d) $\mathbf{x/3 + 2/3 = 4/3}$ Solución: $x = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right) \cdot 3 = 2$

12. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación

$\mathbf{3x - 6 = x + 9.}$

Solución:

En primer lugar, desarrollamos la ecuación del enunciado:

$$3x - 6 = x + 9$$
$$2x = 15$$
$$x = 15/2 = 7.5$$

Por tanto, desarrollando el resto de las ecuaciones, si $x = 7.5$, estas serán equivalentes, comprobémoslo:

a) $\mathbf{x + 10 = 17.5}$

$$x = 17.5 - 10$$
$$x = 7.5$$

Sí, es equivalente.

b) $\mathbf{6x + 2x = 60}$

$$\mathrm{x} = \frac{60}{8}$$
$$\mathrm{x} = \frac{15}{2}$$
$$\mathrm{x} = 7.5$$

Sí, es equivalente.

c) $\mathbf{8 - x = 3x - 5x}$

$$8 - x = -2x$$
$$8 = -x$$
$$x = -8$$

No, no es equivalente.

d) $\mathbf{5x - 6 = 3x + 9}$

$$5x - 6 = 3x + 9$$
$$5x - 3x = 9 + 6$$
$$2x = 15$$
$$x = \frac{15}{2}$$
$$x = 7.5$$

Sí, es equivalente.

e) $\mathbf{4x = 30}$

$$x = \frac{30}{4}$$
$$x = 7.5$$

Sí, es equivalente.

f) $\mathbf{6 - 9 = x - 3x}$

$$-3 = x - 3x$$
$$-3 = -2x$$
$$x = -\frac{3}{2}$$
$$x = 1.5$$

No, no es equivalente.

g) $\mathbf{2x = 9 + 6}$

$$2x = 15$$

$$x = \frac{15}{2}$$
$$x = 7.5$$

Sí, es equivalente.

h) $\mathbf{3x = 15}$

$$x = 15/3$$
$$x = 5$$

No, no es equivalente.

i) $\mathbf{10 - 2.5 = x}$

$$x = 7.5$$

Sí, es equivalente.

j) $\mathbf{x = 7.5}$

Sí, es equivalente.

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{2x - 5 = 4x - 7}$

Solución:

$$2x - 5 = 4x - 7$$
$$2x - 4x = -7 + 5$$
$$-2x = -2$$
$$x = 1$$

b) $\mathbf{x - 12 = 7x + 6}$

Solución:

$$x - 12 = 7x + 6$$
$$x - 7x = 6 + 12$$
$$-6x = 18$$
$$x = -3$$

c) $\mathbf{x - 1 = x + 5x + 9}$

Solución:

$$x - 1 = 6x + 9$$
$$x - 6x = 9 + 1$$
$$-5x = 10$$
$$x = -2$$

d) $\mathbf{x + 9 = 3x - 3}$

Solución:

$$x + 9 = 3x - 3$$
$$x - 3x = -3 - 9$$
$$-2x = -12$$
$$x = 6$$

e) $\mathbf{5x - x + 7 = 2x + 15}$

Solución:

$$5x - x + 7 = 2x + 15$$
$$4x + 7 = 2x + 15$$
$$4x - 2x = 15 - 7$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

f) $\mathbf{2x - 27 = x}$

Solución:

$$2x - 27 = x$$
$$2x - x = 27$$
$$x = 27$$

g) $4x + 2 = 14$

Solución:

$$4x + 2 = 14$$
$$4x = 14 - 2$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

h) $3x - 4 = x + 18$

Solución:

$$3x - 4 = x + 18$$
$$3x - x = 18 + 4$$
$$2x = 22$$
$$x = 11$$

i) $4x - 6 = x + 9$

Solución:

$$4x - 6 = x + 9$$
$$4x - x = 9 + 6$$
$$3x = 15$$
$$x = 5$$

j) $3x - 5 = 2x - 5$

Solución:

$$3x - 5 = 2x - 5$$
$$3x - 2x = -5 + 5$$
$$x = 0$$

k) $3x - 4 + x = 8$

Solución:

$$3x - 4 + x = 8$$
$$4x - 4 = 8$$
$$4x = 8 + 4$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

l) $3 - 10 = x + 1$

Solución:

$$3 - 10 = x + 1$$
$$-7 = x + 1$$
$$x = -7 - 1$$
$$x = -8$$

14. Escribe tres ecuaciones equivalentes a $2x – 3 = 5$.

Solución:

- Multiplicando todos los términos por 2:

$$2(2x - 3) = 2(5)$$
$$4x - 6 = 10$$

- Sumando 3 a ambos lados de la ecuación:

$$2x - 3 + 3 = 5 + 3$$
$$2x = 8$$

- Restando x de ambos lados de la ecuación:

$$2x - 3 - x = 5 - x$$
$$x - 3 = 5 - x$$

15. Escribe tres ecuaciones que tengan como solución $x = 7$.

Solución:

- $2x + 5 = 19$

$$2x + 5 = 19$$
$$2x = 19 - 5$$
$$2x = 14$$
$$x = 14/2$$
$$x = 7$$

- $4x - 10 = 18$

$$4x - 10 = 18$$
$$4x = 18 + 10$$
$$4x = 28$$
$$x = 28/4$$
$$x = 7$$

- $3x + 2 = 23$

$$3x + 2 = 23$$
$$3x = 23 - 2$$
$$3x = 21$$
$$x = 21/3 = 7$$

16. Resuelve las ecuaciones siguientes: (Sugerencia: ilustra las ecuaciones mediante balanzas).

a) $\boldsymbol{x - 5 = 9}$

Solución: $x - 5 + 5 = 9 + 5 \Rightarrow x = 14$

b) $\boldsymbol{x - 8 = 2}$

Solución: $x - 8 + 8 = 2 + 8 \Rightarrow x = 10$

c) $\boldsymbol{x - 3 = 4}$

Solución: $x - 3 + 3 = 4 + 3 \Rightarrow x = 7$

d) $\boldsymbol{x - 9 = 6}$

Solución: $x - 9 + 9 = 6 + 9 \Rightarrow x = 15$

17. Resuelve en tu cuaderno las siguientes ecuaciones:

a) $\boldsymbol{2x + 4x = 54}$

Solución: $6x = 54 \Rightarrow x = 54/6 \Rightarrow x = 9$

b) $\boldsymbol{4x - 3x = 16}$

Solución: $x = 16$

c) $\boldsymbol{5(x-2) = 70}$

Solución: $5x - 10 = 70 \Rightarrow 5x = 80 \Rightarrow x = 80/5 \Rightarrow x = 16$

d) $\boldsymbol{-5x - 2x = -49}$

Solución: $-7x = -49 \Rightarrow x = -49/-7 \Rightarrow x = 7$

18. **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{2x + 3 = 5}$

Solución:

$$2x + 3 - 3 = 5 - 3$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

b) $\mathbf{4x - 5 = x + 4}$

Solución:

$$4x - 5 - x = x + 4 - x$$
$$3x - 5 = 4$$
$$3x - 5 + 5 = 4 + 5$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

c) $\mathbf{x / 3 = -2}$

Solución:

$$\mathbf{x = -2 \cdot 3}$$
$$\mathbf{x = -6}$$

d) $\mathbf{2(3x - 4) = 2x + 5}$

Solución:

$$6x - 8 = 2x + 5$$
$$6x - 8 - 2x = 2x + 5 - 2x$$
$$4x - 8 = 5$$
$$4x - 8 + 8 = 5 + 8$$
$$4x = 13$$
$$x = \frac{13}{4}$$
$$x = 3.25$$

19. **Resuelve las ecuaciones siguientes:**

a) $\mathbf{4x - 4 = 2x}$

Solución:

$$4x - 2x = 4$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

b) $\mathbf{2(x + 7) = x}$

Solución:

$$2x + 14 = x$$
$$2x + 14 - x = x - x$$
$$x + 14 = 0$$
$$x = -14$$

c) $\mathbf{x / 3 + 2 = x}$

Solución:

$$\frac{x}{3} = x - 2$$
$$\frac{x}{3} = \frac{3x - 6}{3}$$
$$x = 3$$

d) $\mathbf{3(x + 3x) = x + 50}$

Solución:

$$3(4x) = x + 50$$
$$12x = x + 50$$
$$12x - x = 50$$
$$11x = 50$$
$$x = \frac{50}{11}$$
$$x \approx 4.545$$

20. Resuelve las ecuaciones:

a) $\mathbf{x / 2 - 2(x - 3x) = 27}$

Solución:

$$\frac{x}{2} - 2(-2x) = 27$$
$$\frac{x}{2} + 4x = 27$$
$$\frac{1}{2}x + 4x = 27$$
$$\frac{9x}{2} = 27$$
$$x = \frac{27 \cdot 2}{9}$$
$$x = 9$$

b) $\mathbf{2x - (2x - 3) + x = 4}$

Solución:

$$2x - 2x + 3 + x = 4$$
$$3 + x = 4$$
$$x = 1$$

c) $\mathbf{7 = 1 + x / 2}$

Solución:

$$7 - 1 = \frac{x}{2}$$
$$6 = \frac{x}{2}$$
$$x = 6 \cdot 2 \rightarrow x = 12$$

d) $\mathbf{4 - x = 2 + x / 2}$

Solución:

$$4 - 2 = x + \frac{x}{2}$$
$$2 = x + \frac{x}{2} \rightarrow 2 \cdot \left(2 = x + \frac{x}{2}\right)$$
$$2x + x = 4$$
$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3}$$

21. Resuelve:

a) $\mathbf{x / 3 = 7}$

Solución: $x = 21$

b) $\mathbf{3x = 9}$

Solución: $x = 3$

c) $\mathbf{x + 4 = 12}$

Solución: $x = 8$

d) $\mathbf{x - 7 = 1}$

Solución: $x = 8$

22. **Practica en tu cuaderno resolviendo las siguientes series de ecuaciones:**

1ª serie

1) $\mathbf{x + 4 = 6}$

Solución:

$$x + 4 - 4 = 6 - 4$$
$$x = 2$$

2) $\mathbf{x + 6 = 3}$

Solución:

$$x + 6 - 6 = 3 - 6$$
$$x = -3$$

3) $\mathbf{15 = 11 + x}$

Solución:

$$15 - 11 = 11 + x - 11$$
$$4 = x$$

4) $\mathbf{7 = x + 3}$

Solución:

$$7 - 3 = x + 3 - 3$$
$$4 = x$$

5) $\mathbf{x + 8 = 4}$

Solución:

$$x + 8 - 8 = 4 - 8$$
$$x = -4$$

6) $\mathbf{x + 6 = 8}$

Solución:

$$x + 6 - 6 = 8 - 6$$
$$x = 2$$

7) $\mathbf{x + 7 = 3}$

Solución:

$$x + 7 - 7 = 3 - 7$$
$$x = -4$$

8) $\mathbf{8 + x = 16}$

Solución:

$$8 + x - 8 = 16 - 8$$
$$x = 8$$

9) $\mathbf{3 = 7 + x}$

Solución:

$$3 - 7 = 7 + x - 7$$
$$-4 = x$$

10) $\mathbf{2 = x + 4}$

Solución:

$$2 - 4 = x + 4 - 4$$
$$-2 = \mathrm{x}$$

2ª serie

11) $\mathbf{x - 3 = 6}$

Solución:

$$x - 3 + 3 = 6 + 3$$
$$x = 9$$

12) $\mathbf{x - 4 = 2}$

Solución:

$$x - 4 + 4 = 2 + 4$$
$$x = 6$$

13) $\mathbf{4 = x - 1}$

Solución:

$$4 + 1 = x - 1 + 1$$
$$5 = x$$

14) $\mathbf{7 - x = 2}$

Solución:

$$7 - 2 = x + 2 - 2$$
$$5 = x$$

15) $\mathbf{6 - x = 4}$

Solución:

$$6 - 4 = x + 4 - 4$$
$$2 = x$$

16) $\mathbf{3 = 9 - x}$

Solución:

$$3 - 9 = -x$$
$$-6 = -x$$
$$x = 6$$

17) $\mathbf{x - 4 = 7}$

Solución:

$$x - 4 + 4 = 7 + 4$$
$$x = 11$$

18) $\mathbf{x - 2 = 0}$

Solución:

$$x - 2 + 2 = 0 + 2$$
$$x = 2$$

19) $\mathbf{8 - x = 3}$

Solución:

$$8 - 3 = x + 3 - 3$$
$$5 = x$$

20) $\mathbf{9 - x = 5}$

Solución:

$$9 - 5 = x + 5 - 5$$
$$4 = \mathrm{x}$$

3ª serie

21) $\mathbf{3x = 6}$

Solución:

$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

22) $\mathbf{4x = 16}$

Solución:

$$4x = 16$$
$$x = \frac{16}{4}$$
$$x = 4$$

23) $\mathbf{6x = 18}$

Solución:

$$6x = 18$$
$$x = \frac{18}{6}$$
$$x = 3$$

24) $\mathbf{8 = 2x}$

Solución:

$$8 = 2x$$
$$x = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

25) $\mathbf{-12 = 3x}$

Solución:

$$-12 = 3x$$
$$x = \frac{-12}{3}$$
$$x = -4$$

26) $\mathbf{2x = -6}$

Solución:

$$2x = -6$$
$$x = \frac{-6}{2}$$
$$x = -3$$

27) $\mathbf{4x = 11}$

Solución:

$$4x = 11$$
$$x = \frac{11}{4}$$
$$x = 2.75$$

28) $\mathbf{3x = 6}$

Solución:

$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} \rightarrow x = 2$$

29) $\mathbf{9 = 3x}$

Solución:

$$9 = 3x$$
$$x = \frac{9}{3}$$
$$x = 3$$

30) $\mathbf{18 = 6x}$

Solución:

$$18 = 6x$$
$$x = \frac{18}{6}$$
$$x = 3$$

4ª serie

31) $\boldsymbol{x / 5 = 1}$

Solución:

$$x = 1 \cdot 5$$
$$x = 5$$

32) $\boldsymbol{x / 3 = 7}$

Solución:

$$x = 7 \cdot 3$$
$$x = 21$$

33) $\boldsymbol{x / -2 = 3}$

Solución:

$$x = 3 \cdot (-2)$$
$$x = -6$$

34) $\boldsymbol{x / 5 = 2/3}$

Solución:

$$x = \frac{2}{3} \cdot 5$$
$$x = \frac{10}{3}$$

35) $\boldsymbol{x / 10 = 3/2}$

Solución:

$$x = 32 \cdot 10$$
$$x = 15$$

36) $\boldsymbol{x / 7 = 2}$

Solución:

$$x = 2 \cdot 7$$
$$x = 14$$

37) $\boldsymbol{x / 12 = 3/4}$

Solución:

$$x = \frac{3}{4} \cdot 12$$
$$x = 9$$

38) $\boldsymbol{x / 3 = -2/9}$

Solución:

$$x = -\frac{2}{9} \cdot 3$$

$$x = -\frac{6}{9}$$
$$x = -\frac{2}{3}$$

39) $\boldsymbol{x / 5 = -2}$

Solución:

$$x = -2 \cdot 5$$
$$x = -10$$

40) $\boldsymbol{x / 7 = 3/14}$

Solución:

$$x = \frac{3}{14} \cdot 7$$
$$x = \frac{3}{2}$$

5ª serie

41) $\boldsymbol{x + 3x = 16}$

Solución:

$$4x = 16$$
$$x = \frac{16}{4}$$
$$x = 4$$

42) $\boldsymbol{4x + 2x = 6}$

Solución:

$$6x = 6$$
$$x = \frac{6}{6}$$
$$x = 1$$

43) $\boldsymbol{6x = 8 + 10}$

Solución:

$$6x = 18$$
$$x = \frac{18}{6}$$
$$x = 3$$

44) $\boldsymbol{3x + 7 = 4}$

Solución:

$$3x + 7 - 7 = 4 - 7$$
$$3x = -3$$
$$x = \frac{-3}{3}$$
$$x = -1$$

45) $\boldsymbol{2x + 7 = 11 + 4x}$

Solución:

$$2x + 7 = 11 + 4x$$
$$2x + 7 - 7 = 11 + 4x - 7$$
$$2x = 4x + 4$$
$$2x - 4x = 4$$
$$-2x = 4$$
$$x = \frac{4}{-2} \to x = -2$$

46) $\boldsymbol{x + 1 = 2x - 5 + 2x}$

Solución:

$$x + 1 = 4x - 5$$
$$x + 1 - 1 = 4x - 5 - 1$$
$$0 = 3x - 6$$
$$6 = 3x$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

47) $\boldsymbol{3x - 2 + 4x = 3 - 3x + 1}$

Solución:

$$7x - 2 = 4 - 3x$$
$$7x + 3x - 2 = 4 - 2$$
$$10x = 2$$
$$x = \frac{2}{10}$$
$$x = 0.2$$

48) $\boldsymbol{4x - 3 + x = 3x + 7}$

Solución:

$$4x + x - 3 = 3x + 7$$
$$5x - 3 = 3x + 7$$
$$5x - 3x = 7 + 3$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

49) $\boldsymbol{x + 4 + 4x = 2 - 2x + 5}$

Solución:

$$5x + 4 = 2 - 2x + 5$$
$$5x + 4 = 7 - 2x$$
$$5x + 2x = 7 - 4$$
$$7x = 3$$
$$x = \frac{3}{7}$$
$$x = 0.428$$

50) $\boldsymbol{6x + 4 - 2x = 3 + 2x - 7}$

Solución:

$$4x + 4 = -4 + 2x$$
$$4x - 2x = -4 - 4$$
$$2x = -8$$
$$x = -4$$

6ª serie

51) $\boldsymbol{x / 3 - 2 = 4}$

Solución:

$$\frac{x}{3} - 2 + 2 = 4 + 2$$
$$\frac{x}{3} = 6$$
$$x = 6 \cdot 3 \rightarrow x = 18$$

52) $\mathbf{3x\ /\ 5\ +\ 4\ =\ 3}$

Solución:

$$\frac{3x}{5}+4-4=3-4$$
$$\frac{3x}{5}=-1$$
$$3x\ =\ -1\ \cdot 5$$
$$3x\ =\ -5$$
$$x=\frac{-5}{3}$$
$$x\ =\ -1.67$$

53) $\mathbf{x\ /\ 3\ +\ 2x\ /\ 3\ =\ 7}$

Solución:

$$\frac{3x}{3}=7$$
$$x\ =\ 7$$

54) $\mathbf{x\ /\ 5\ +\ 3x\ /\ 5\ =\ 9}$

Solución:

$$\frac{4x}{5}=9$$
$$4x\ =\ 9\ \cdot 5$$
$$4x\ =\ 45$$
$$x=\frac{45}{4}$$
$$x\ =\ 11.25$$

55) $\mathbf{x\ /\ 2\ +\ x\ /\ 2\ +\ 3\ =\ 5}$

Solución:

$$x\ +\ 3\ =\ 5$$
$$x\ =\ 5\ -\ 3$$
$$x\ =\ 2$$

56) $\mathbf{3x\ /\ 7\ +\ 2x\ /\ 7\ +\ 3\ =\ 6}$

Solución:

$$\frac{5x}{7}=3$$
$$5x\ =\ 3\ \cdot 7$$
$$5x\ =\ 21$$
$$x=\frac{21}{5}$$
$$x\ =\ 4.2$$

57) $\mathbf{x\ +\ x\ /\ 5\ =\ 7}$

Solución:

$$\frac{5x}{5}+\frac{x}{5}=7$$
$$\frac{6x}{5}=7$$
$$6x\ =\ 7\ \cdot 5$$
$$6x\ =\ 35$$
$$x=\frac{35}{6}\rightarrow x=5.83$$

58) $\boldsymbol{x / 2 + 5x / 2 + 3 = 5}$

Solución:

$$\frac{6x}{2} + 3 = 5$$
$$3x + 3 = 5$$
$$3x = 5 - 3$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}$$
$$x = 0.67$$

59) $\boldsymbol{5 + x / 7 = 21}$

Solución:

$$\frac{x}{7} = 21 - 5$$
$$\frac{x}{7} = 16$$
$$x = 16 \cdot 7$$
$$x = 112$$

60) $\boldsymbol{3 + x / 3 = 9}$

Solución:

$$\frac{x}{3} = 9 - 3$$
$$\frac{x}{3} = 6$$
$$x = 6 \cdot 3$$
$$x = 18$$

7ª serie

61) $\boldsymbol{3 + 4(2 - x) = 9 - 2x}$

Solución:

$$3 + 8 - 4x = 9 - 2x$$
$$11 - 4x = 9 - 2x$$
$$-4x + 2x = 9 - 11$$
$$-2x = -2$$
$$x = \frac{-2}{-2}$$
$$x = 1$$

62) $\boldsymbol{5 - 2(x + 2) = x - 5}$

Solución:

$$5 - 2x - 4 = x - 5$$
$$1 - 2x = x - 5$$
$$-2x - x = -5 - 1$$
$$-3x = -6$$
$$x = \frac{-6}{-3}$$
$$x = 2$$

63) $\boldsymbol{13 + 3(2x + 5) = 2(x + 3) - 1}$

Solución:

$$13 + 6x + 15 = 2x + 6 - 1$$
$$28 + 6x = 2x + 5$$

$$6x - 2x = 5 - 28$$
$$4x = -23$$
$$x = \frac{-23}{4}$$
$$x = -5.75$$

64) $\mathbf{7 - 2(3x - 5) = 13 - 2(4x - 7)}$

Solución:

$$7 - 6x + 10 = 13 - 8x + 14$$
$$17 - 6x = 27 - 8x$$
$$-6x + 8x = 27 - 17$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

65) $\mathbf{5x - 3(2x - 4) = 36 - 3(4x + 6)}$

Solución:

$$5x - 6x + 12 = 36 - 12x - 18$$
$$-x + 12 = 18 - 12x$$
$$-x + 12x = 18 - 12$$
$$11x = 6$$
$$x = \frac{6}{11}$$
$$x = 0.545$$

66) $\mathbf{2(3x - 5) - (2x + 1) = 17 - 3x}$

Solución:

$$6x - 10 - 2x - 1 = 17 - 3x$$
$$4x - 11 = 17 - 3x$$
$$4x + 3x = 17 + 11$$
$$7x = 28$$
$$x = \frac{28}{7}$$
$$x = 4$$

67) $\mathbf{2(x + 4) + 3x = -34 - 3(5x + 6)}$

Solución:

$$2x + 8 + 3x = -34 - 15x - 18$$
$$5x + 8 = -52 - 15x$$
$$5x + 15x = -52 - 8$$
$$20x = -60$$
$$x = \frac{-60}{20}$$
$$x = -3$$

68) $\mathbf{5 - 2(7 - 2x) = x - 6}$

Solución:

$$5 - 14 + 4x = x - 6$$
$$-9 + 4x = x - 6$$
$$4x - x = -6 + 9$$
$$3x = 3$$

$$x = \frac{3}{3} \to x = 1$$

69) $\mathbf{3x - 4(x - 1) = 8 - 5x}$

Solución:

$$3x - 4x + 4 = 8 - 5x$$
$$-x + 4 = 8 - 5x$$
$$-x + 5x = 8 - 4$$
$$4x = 4$$
$$x = \frac{4}{4}$$
$$x = 1$$

70) $\mathbf{5x - (2x + 3) = 2x - 5}$

Solución:

$$5x - 2x - 3 = 2x - 5$$
$$3x - 3 = 2x - 5$$
$$3x - 2x = -5 + 3$$
$$x = -2$$

8ª serie

71) $\mathbf{x / 3 + x / 6 = 12}$

Solución: m.c.m. (3, 6) = 6

$$\frac{2x + x}{6} = 12$$
$$\frac{3x}{6} = 12$$
$$\frac{x}{2} = 12$$
$$x = 12 \cdot 2$$
$$x = 24$$

72) $\mathbf{x / 6 + x / 3 + x / 2 = 5}$

Solución: m.c.m. (2, 3, 6) = 6

$$\frac{x + 2x + 3x}{6} = 5$$
$$\frac{6x}{6} = 5$$
$$x = 5$$

73) $\mathbf{(x - 3) / 5 = 1}$

Solución:

$$x - 3 = 1 \cdot 5$$
$$x - 3 = 5$$
$$x = 5 + 3$$
$$x = 8$$

74) $\mathbf{x / 2 - 3 = 4}$

Solución:

$$\frac{x}{2} - 3 + 3 = 4 + 3$$
$$\frac{x}{2} = 7$$
$$x = 7 \cdot 2$$
$$x = 14$$

75) $(\mathbf{2x + 9}) / \mathbf{3} = \mathbf{7}$

Solución:

$$2x + 9 = 7 \cdot 3$$
$$2x + 9 = 21$$
$$2x = 21 - 9$$
$$2x = 12$$
$$x = \frac{12}{2}$$
$$x = 6$$

76) $(\mathbf{2x + 9})/\mathbf{3} = \boldsymbol{x}$

Solución:

$$2x + 9 = 3x$$
$$9 = 3x - 2x$$
$$9 = x$$

77) $(\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) / \mathbf{5} = \boldsymbol{x}$

Solución:

$$x - 3 = 5x$$
$$x - 5x = 3$$
$$-4x = 3$$
$$x = \frac{3}{-4}$$
$$x = -0.75$$

78) $\mathbf{5} + \boldsymbol{x} / \mathbf{4} = \mathbf{6}$

Solución:

$$\frac{x}{4} = 6 - 5$$
$$\frac{x}{4} = 1$$
$$x = 1 \cdot 4$$
$$x = 4$$

79) $\mathbf{4}\boldsymbol{x} / \mathbf{3} + \mathbf{5}\boldsymbol{x} / \mathbf{6} = \boldsymbol{x} / \mathbf{3} + \mathbf{2}$

Solución: m.c.m. (3, 6) = 6

$$\frac{8x + 5x}{6} = \frac{2x + 6}{3}$$
$$\frac{13x}{6} = 2$$
$$x = \frac{6 \cdot 2}{13}$$
$$x = 0.92$$

80) $\mathbf{2}\boldsymbol{x} / \mathbf{3} + \mathbf{7}\boldsymbol{x} / \mathbf{2} + \mathbf{5}\boldsymbol{x} = \mathbf{8} + \boldsymbol{x} / \mathbf{6}$

Solución: m.c.m. (2, 3, 6) = 6

$$\frac{4x + 21x + 30x}{6} = \frac{8 \cdot 6 + x}{6}$$
$$55x = 48 + x \rightarrow 54x = 48$$

$$x = \frac{48}{54} = \frac{8}{9}$$

PROBLEMAS

23. Si un repartidor de pedidos ha dejado los 2/5 de los paquetes que llevaba en la primera casa, y aún le quedan 99 kg por repartir, ¿cuántos kilos tenía en un principio?

Solución:

Si un repartidor dejó $2/5$ de los paquetes en la primera casa, esto significa que le queda $3/5$ de los paquetes. Sabemos que estos $3/5$ de los paquetes son $99\ kg$.

Vamos a llamar x a la cantidad total de paquetes en kilogramos que el repartidor tenía al principio.

Podemos establecer la siguiente ecuación:

$$3/5\ \cdot x\ =\ 99$$

Para despejar x:

$$x\ =\ 99\ \cdot 5\ /\ 3$$
$$x\ =\ 495\ /\ 3$$
$$x\ =\ 165$$

Por lo tanto, el repartidor tenía $165\ kg$ de paquetes en un principio.

24. Resuelve mentalmente los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos cromos tengo si el doble de los que poseo es 20?

b) ¿Cuántas canicas tengo si al darme 7 tendré 37?

c) ¿Cuántos discos tengo si al regalar 5 me queda una docena?

d) Manuel, dentro de 6 años tendrá 18. ¿Cuántos años tiene ahora?

Solución:

a) Si el doble de los cromos es 20, entonces:

$$2\ \cdot x\ =\ 20$$
$$x\ =\ 20\ /\ 2$$
$$x\ =\ 10$$

Tengo 10 cromos.

b) Si al darme 7 tendré 37, entonces:

$$x\ +\ 7\ =\ 37$$
$$x\ =\ 37\ -\ 7$$
$$x\ =\ 30$$

Tengo 30 canicas.

c) Si al regalar 5 me queda una docena (12 discos), entonces:

$$x\ -\ 5\ =\ 12$$
$$x\ =\ 12\ +\ 5$$
$$x\ =\ 17$$

Tengo 17 discos.

d) Si dentro de 6 años tendrá 18, entonces:

$$x\ +\ 6\ =\ 18$$
$$x\ =\ 18\ -\ 6$$
$$x\ =\ 12$$

Manuel tiene 12 años ahora.

25. En una granja hay 70 animales entre gallinas y conejos, y entre los dos, suman 180 patas. ¿Cuántas gallinas hay en la granja?

Solución:
Sea x el número de gallinas e y el número de conejos.
Sabemos que:
1. La suma de los animales es 70: $x + y = 70$
2. La suma de las patas es 180: $2x + 4y = 180$
Vamos a resolver el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y = 70 \\ 2x + 4y = 180 \end{cases}$$
Despejamos y de la primera ecuación:
$$y = 70 - x$$
Sustituimos y en la segunda ecuación:
$$2x + 4(70 - x) = 180$$
$$2x + 280 - 4x = 180$$
$$-2x + 280 = 180$$
$$-2x = 180 - 280$$
$$-2x = -100$$
$$x = -100 / -2$$
$$x = 50$$
Por lo tanto, hay 50 gallinas en la granja.
Para encontrar el número de conejos, sustituimos x en la primera ecuación:
$$x + y = 70$$
$$50 + y = 70$$
$$y = 70 - 50$$
$$y = 20$$
Por lo tanto, hay 20 conejos en la granja.

26. Halla el número tal que su doble más tres sea igual que su triple menos dos.
Solución:
Sea x el número que estamos buscando.
La condición es que su doble más tres sea igual que su triple menos dos. Esto se puede expresar con la siguiente ecuación:
$$2x + 3 = 3x - 2$$
Para resolver la ecuación, primero restamos $2x$ de ambos lados:
$$2x + 3 - 2x = 3x - 2 - 2x$$
Esto simplifica a:
$$3 = x - 2$$
Luego, sumamos 2 a ambos lados para despejar x:
$$3 + 2 = x - 2 + 2$$
$$5 = x$$
Por lo tanto, el número que estamos buscando es 5.

27. Repartimos 150 € entre tres personas de forma que la primera recibe el doble que la segunda y ésta el triple que la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada una?
Solución:

Sea x la cantidad de dinero que recibe la tercera persona.
Sabemos que:
- La segunda persona recibe el triple que la tercera: $3x$
- La primera persona recibe el doble que la segunda: $2 \cdot 3x = 6x$

La suma total del dinero es 150 €:

$$x + 3x + 6x = 150$$

Sumamos los términos similares:

$$10x = 150$$

Despejamos x:

$$x = 150 / 10$$
$$x = 15$$

Por lo tanto:
- La tercera persona recibe 15 €
- La segunda persona recibe $3 \cdot 15 = 45$ €
- La primera persona recibe $6 \cdot 15 = 90$ €

28. El ángulo mayor de un triángulo mide el doble que el menor y éste 20 grados menos que el mediano. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo? (Recuerda que los tres ángulos de un triángulo suman 180 grados)

Solución:
Sea x el ángulo menor del triángulo.
- El ángulo mediano será 20 grados más que el menor: $x + 20$
- El ángulo mayor será el doble del menor: $2x$

Sabemos que la suma de los tres ángulos de un triángulo es 180 grados:

$$x + (x + 20) + 2x = 180$$

Sumamos los términos similares:

$$4x + 20 = 180$$

Restamos 20 de ambos lados de la ecuación:

$$4x = 180 - 20$$
$$4x = 160$$

Dividimos ambos lados entre 4:

$$x = 160 / 4$$
$$x = 40$$

Por lo tanto:
- El ángulo menor mide $40\ grados$.
- El ángulo mediano mide $40 + 20 = 60\ grados$.
- El ángulo mayor mide $2 \cdot 40 = 80\ grados$.

29. Si al quíntuplo de un número le restas dos obtienes 27. ¿Cuál es el número?

Solución:
Sea x el número que estamos buscando.
La condición es que al quíntuplo de un número le restas dos y obtienes 27. Esto se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$5x - 2 = 27$$

Para resolver la ecuación, primero sumamos 2 a ambos lados:

$$5x - 2 + 2 = 27 + 2$$

Esto simplifica a:

$$5x = 29$$

Luego, dividimos ambos lados entre 5 para despejar x:

$$x = 29 / 5$$
$$x = 5.8$$

Por lo tanto, el número que estamos buscando es 5.8.

30. Un número y su siguiente suman 87. ¿Cuáles son esos números?

Solución:

- Sea x el primer número.
- El siguiente número es $x + 1$.

La suma de estos dos números es 87:

$$x + (x + 1) = 87$$

Sumamos los términos similares:

$$2x + 1 = 87$$

Restamos 1 de ambos lados de la ecuación:

$$2x = 87 - 1$$
$$2x = 86$$

Dividimos ambos lados entre 2:

$$x = 86 / 2$$
$$x = 43$$

Por lo tanto, el primer número es 43 y el siguiente número es $43 + 1 = 44$.

31. Un bolígrafo cuesta el triple que un lápiz. He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos y me han costado 2.55 €. ¿Cuánto cuesta un lápiz? ¿Y un bolígrafo?

Solución:

- Sea x el costo de un lápiz.
- El costo de un bolígrafo es $3x$.
- He comprado cinco lápices y cuatro bolígrafos, y el costo total es 2.55 €.

Podemos establecer la siguiente ecuación:

$$5x + 4(3x) = 2.55$$

Simplificamos la ecuación:

$$5x + 12x = 2.55$$
$$17x = 2.55$$

Despejamos x:

$$x = 2.55 / 17$$
$$x = 0.15$$

Por lo tanto, el costo de un lápiz es 0.15 €.

El costo de un bolígrafo es $3x$, entonces:

$$3 \cdot 0.15 = 0.45$$

Por lo tanto, el costo de un bolígrafo es 0.45 €.

32. En mi monedero llevo diez monedas, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos. Si tengo 2,90 € en total, ¿Cuántas monedas de cada tipo tengo?

Solución:

- Sea x el número de monedas de 50 céntimos.

- Sea y el número de monedas de 20 céntimos.

Sabemos que:

- El total de monedas es 10: $x + y = 10$
- La suma total del dinero es 2,90 €: $0.50x + 0.20y = 2.90$

Vamos a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 0.50x + 0.20y = 2.90 \end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 10 - x$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$0.50x + 0.20(10 - x) = 2.90$$
$$0.50x + 2 - 0.20x = 2.90$$
$$0.30x + 2 = 2.90$$

Restamos 2 de ambos lados de la ecuación:

$$0.30x = 2.90 - 2$$
$$0.30x = 0.90$$

Dividimos ambos lados entre 0.30:

$$x = 0.90 / 0.30$$
$$x = 3$$

Para encontrar el número de monedas de 20 céntimos, sustituimos x en la primera ecuación:

$$x + y = 10$$
$$3 + y = 10$$
$$y = 10 - 3$$
$$y = 7$$

Por lo tanto, hay 7 monedas de 20 céntimos y 3 monedas de 50 céntimos.

33. El perímetro de un rectángulo es de 120 metros y la altura es 24 metros más larga que la base. ¿Cuánto miden la base y la altura del rectángulo?

Solución:

Sea x la base del rectángulo. La altura del rectángulo será $x + 24$ metros.

Sabemos que el perímetro de un rectángulo es la suma de todos sus lados: 2 veces la base más 2 veces la altura.

Por lo tanto, la fórmula del perímetro es:

$$2x + 2(x + 24) = 120$$

Simplificamos la ecuación:

$$2x + 2x + 48 = 120$$
$$4x + 48 = 120$$

Restamos 48 de ambos lados de la ecuación:

$$4x = 120 - 48$$
$$4x = 72$$

Dividimos ambos lados entre 4:

$$x = 72 / 4$$
$$x = 18$$

Por lo tanto, la base del rectángulo mide 18 metros.

La altura del rectángulo será:

$$x + 24 = 18 + 24$$
$$x = 42$$

La altura del rectángulo mide 42 metros.

34. Laura dice que si al triple de la edad que tiene le restas la mitad, el resultado es 30. ¿Qué edad tiene Laura?

Solución:
Sea x la edad de Laura.
Laura dice que al triple de su edad le restas la mitad y el resultado es 30. Esto se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$3x - (1/2)x = 30$$

Para resolver la ecuación, primero simplificamos los términos:

$$3x - 0.5x = 30$$
$$2.5x = 30$$

Dividimos ambos lados entre 2.5 para despejar x:

$$x = 30 / 2.5$$
$$x = 12$$

Por lo tanto, Laura tiene 12 años.

35. Un hijo tiene 12 años y su padre 35. ¿Cuántos años deben de pasar para que la edad del padre sea el doble que la del hijo?

Solución:
Sea x el número de años que deben pasar.
Sabemos que:

- Edad del hijo en x años: $12 + x$
- Edad del padre en x años: $35 + x$

Queremos que la edad del padre sea el doble que la del hijo:

$$35 + x = 2(12 + x)$$

Simplificamos y resolvemos la ecuación:

$$35 + x = 24 + 2x$$
$$35 - 24 = 2x - x$$
$$11 = x$$

Por lo tanto, deben pasar 11 años para que la edad del padre sea el doble que la del hijo.

36. Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero sabiendo que su perímetro es de 18 cm.

Solución:
Sabemos que un triángulo equilátero tiene tres lados iguales.
Si su perímetro es de 18 cm, la longitud de cada lado se puede encontrar dividiendo el perímetro entre 3:

$$Longitud\ del\ lado = 18 / 3$$
$$Longitud\ del\ lado = 6$$

Por lo tanto, la longitud del lado de un triángulo equilátero es de 6 cm.

37. Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que el perímetro es 18 cm y cada lado igual mide 3 cm más que el lado desigual.

Solución:
Sea x la longitud del lado desigual del triángulo isósceles.

Los otros dos lados, que son iguales, miden $x + 3\ cm$ cada uno.
Sabemos que el perímetro del triángulo es la suma de todos sus lados, y en este caso es 18 cm:
$$x + (x + 3) + (x + 3) = 18$$
Simplificamos la ecuación:
$$x + x + 3 + x + 3 = 18$$
$$3x + 6 = 18$$
Restamos 6 de ambos lados de la ecuación:
$$3x = 18 - 6$$
$$3x = 12$$
Dividimos ambos lados entre 3:
$$x = 12 / 3$$
$$x = 4$$
Por lo tanto, el lado desigual del triángulo mide 4 cm.
Los lados iguales miden:
$$x + 3 = 4 + 3$$
$$x + 3 = 7$$
Por lo tanto, los lados iguales del triángulo miden 7 cm cada uno.

38. Si a la tercera parte de un número le sumas dos, obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos.

Solución:
Sea x el número que estamos buscando.
La condición es que a la tercera parte de un número le sumas dos, y obtienes el mismo resultado que si al número le sumas uno y divides entre dos. Esto se puede expresar con la siguiente ecuación:
$$(1/3)x + 2 = (x + 1)/2$$
Para resolver la ecuación, primero eliminamos los denominadores multiplicando ambos lados por 6 (el mínimo común múltiplo de 3 y 2):
$$6((1/3)x + 2) = 6((x + 1)/2)$$
Simplificamos:
$$2x + 12 = 3(x + 1)$$
$$2x + 12 = 3x + 3$$
Restamos $2x$ de ambos lados:
$$12 = x + 3$$
Restamos 3 de ambos lados:
$$9 = x$$
Por lo tanto, el número que estamos buscando es 9.

39. El perímetro de un triángulo isósceles mide 30 centímetros. El lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales. ¿Cuánto mide cada lado?

Solución:
Sea x la longitud del lado desigual del triángulo isósceles.
Sabemos que el lado desigual mide la mitad de uno de sus lados iguales, así que llamemos y a la longitud de un lado igual. Entonces tenemos que $x = y / 2$.
El perímetro de un triángulo isósceles es la suma de todos sus lados, que en este caso es 30 cm:
$$y + y + x = 30$$
Dado que $x = y / 2$, sustituimos x en la ecuación del perímetro:
$$y + y + y / 2 = 30$$

Simplificamos la ecuación:

$$2y + y/2 = 30$$

Multiplicamos ambos lados por 2 para eliminar la fracción:

$$4y + y = 60$$
$$5y = 60$$

Dividimos ambos lados entre 5:

$$y = 60/5$$
$$y = 12$$

Por lo tanto, la longitud de cada lado igual es 12 cm.
El lado desigual mide:

$$x = y/2 = 12/2 = 6$$

Por lo tanto, los lados del triángulo miden 12 cm, 12 cm y 6 cm.

40. Hemos comprado 12 artículos entre mesas y sillas. ¿Cuántas hemos comprado de cada si cada mesa cuesta 130 € y cada silla 60 € y en total nos ha costado 860 €?

Solución:
Sea x el número de mesas. Sea y el número de sillas.
Sabemos que:

- El total de artículos es 12: $x + y = 12$
- El costo total es 860 €: $130x + 60y = 860$

Vamos a resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 130x + 60y = 860 \end{cases}$$

Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = 12 - x$$

Sustituimos y en la segunda ecuación:

$$130x + 60(12 - x) = 860$$
$$130x + 720 - 60x = 860$$
$$70x + 720 = 860$$

Restamos 720 de ambos lados de la ecuación:

$$70x = 860 - 720$$
$$70x = 140$$

Dividimos ambos lados entre 70:

$$x = 140/70$$
$$x = 2$$

Para encontrar el número de sillas, sustituimos x en la primera ecuación:

$$x + y = 12$$
$$2 + y = 12$$
$$y = 12 - 2$$
$$y = 10$$

Por lo tanto, hemos comprado 2 mesas y 10 sillas.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

41. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $\boldsymbol{x^2 + 5x - 6 = 0}$

Solución:

Esta ecuación se puede resolver factorizando:

$$(x + 6)(x - 1) = 0$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$x = -6$$
$$x = 1$$

b) $\mathbf{7x^2 + 12x = 0}$

Solución:

Para resolver esta ecuación, factorizar x:

$$x(7x + 12) = 0$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$x = 0$$
$$x = -12/7$$

c) $\mathbf{3x^2 + 75 = 0}$

Solución:

Para resolver esta ecuación, despejamos x:

$$3x^2 = -75$$
$$x^2 = -\frac{75}{3}$$
$$x^2 = -25$$

No hay soluciones reales, ya que no existe un número real cuyo cuadrado sea negativo.

d) $\mathbf{x^2 - 2x + 7 = 0}$

Solución:

Para resolver esta ecuación, utilizamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{((-2)^2 - 4 * 1 * 7)}}{(2 * 1)}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(4 - 28)}}{2}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-24)}}{2}$$

No hay soluciones reales, ya que no existe un número real cuyo cuadrado sea negativo.

e) $\mathbf{6x^2 - 5x - 7 = 0}$

Solución:

Para resolver esta ecuación, utilizamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-7)}}{(2 \cdot 6)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 168}}{12}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{193}}{12}$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$x = \frac{\left(5 + \sqrt{193}\right)}{12}$$

$$x = \frac{\left(5 - \sqrt{193}\right)}{12}$$

f) $x^2 - 9 = 0$

Solución:

Esta ecuación se puede resolver factorizando:

$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

Por lo tanto, las soluciones son:

$$x = -3$$
$$x = 3$$

SISTEMAS LINEALES

42. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 36x - 4y = -8 \end{cases}$

Solución:

Despejamos x en la primera ecuación:

$$x = -4 + 2y$$

Sustituimos x en la segunda ecuación:

$$36(-4 + 2y) - 4y = -8$$
$$-144 + 72y - 4y = -8$$
$$68y = 136$$
$$y = 2$$

Sustituimos y en la primera ecuación para encontrar x:

$$x - 2(2) = -4$$
$$x - 4 = -4$$
$$x = 0$$

Luego: $x = 0, y = 2$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 9x - 6y = 1 \end{cases}$

Solución:

Despejamos x en la primera ecuación:

$$3x = 2y - 4$$
$$x = \frac{2y - 4}{3}$$

Sustituimos x en la segunda ecuación:

$$9 \cdot \frac{2y - 4}{3} - 6y = 1$$
$$6y - 12 - 6y = 1$$
$$-12 = 1$$

No hay solución, el sistema es incompatible.

c) $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

Solución:

Despejamos x en la primera ecuación:

$$3x = 2y - 4$$

$$x = \frac{2y - 4}{3}$$

Sustituimos x en la segunda ecuación:

$$2 \cdot \frac{2y - 4}{3} + 3y = 1$$
$$\frac{4y - 8}{3} + 3y = 1$$

$$3 \cdot \left(\frac{4y - 8}{3} + 3y = 1\right)$$
$$4y - 8 + 9y = 3$$
$$13y - 8 = 3$$
$$13y = 11$$
$$y = 11 / 13$$

Sustituimos y en la primera ecuación para encontrar x:

$$3x - 2(11/13) = -4$$
$$3x = -4 + 22 / 13$$
$$3x = \frac{-52 + 22}{13}$$
$$3x = -30 / 13$$
$$x = -10 / 13$$

Luego: $x = -10 / 13, y = 11 / 13$

AUTOEVALUACIÓN

1. Los coeficientes de la expresión algebraica 8.3x – 2.5 + y, son:

a) $\mathbf{8.3,\ 2.5\ \ y\ \ 1}$ **b)** $\mathbf{+8.3, -2.5\ y\ +1}$ **c)** $\mathbf{+8.3\ y - 2.5}$ **d)** $\mathbf{8.3\ , 1,\ 2.5}$

Solución:

b) $+8.3,\ -2.5\ \ y\ \ +1$

2. El valor numérico de la expresión algebraica 4 a + 3 b, cuando a = 5 y b = – 2, es:

a) $\mathbf{14}$ **b)** $\mathbf{-14}$ **c)** $\mathbf{26}$ **d)** $\mathbf{-26}$

Solución:

$4a + 3b$, cuando $a = 5\ y\ b = -2$:

$$4a + 3b = 4(5) + 3(-2) = 20 - 6 = 14$$

a) 14

3. La solución de la ecuación 3.4 + 5.2x – 8.1x = 9.4 + 7.3x es:

a) $\mathbf{-10/17}$ **b)** $\mathbf{+6/-10.2}$ **c)** $\mathbf{-10/1.7}$ **d)** $\mathbf{0.58}$

Solución:

$$3.4 + 5.2x - 8.1x = 9.4 + 7.3x$$
$$-2.9x + 3.4 = 9.4 + 7.3x$$
$$-2.9x - 7.3x = 9.4 - 3.4$$
$$-10.2x = 6$$
$$x = \frac{6}{-10.2} = -\frac{60}{102} = -\frac{10}{17}$$

a) $-10\ /\ 17$

4. La ecuación x² = 4 tiene de soluciones:

a) $\mathbf{2}$ **b)** $\mathbf{-2}$ **c)** $\mathbf{2\ y -2}$ **d)** $\mathbf{0\ y\ 2}$

Solución:

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

c) $2\ y -2$

5. La suma de las edades de dos personas es de 50 años y su diferencia, 8 años. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\mathbf{x + x + 8 = 50}$ **b)** $\mathbf{x - 8 = 50}$ **c)** $\mathbf{50 + x = 8 - x}$ **d)** $\mathbf{x + x - 8 = 50}$

Solución:

$$x + x - 8 = 50$$
$$2x - 8 = 50$$
$$2x = 58 \rightarrow x = 29$$

d) $x + x - 8 = 50$

6. El perímetro de un rectángulo es 70 cm. Si la base es el triple de la altura menos 5 cm, las dimensiones del rectángulo son:

a) $\mathbf{30\ y\ 11}$ **b)** $\mathbf{20\ y\ 9}$ **c)** $\mathbf{25\ y\ 10}$ **d)** $\mathbf{55\ y\ 20}$

Solución:

$$2a + 2b = 70:$$
$$a = 3b - 5$$
$$2(3b - 5) + 2b = 70$$

$$6b - 10 + 2b = 70$$
$$8b - 10 = 70$$
$$8b = 80$$
$$b = 10$$
$$a = 3(10) - 5 = 30 - 5 = 25$$

c) $25\ y\ 10$

7. Tres números suman 142. El mediano es el doble del menor, y el mayor es triple del menor menos 8. ¿Cuál de estas ecuaciones nos permite hallar los números?

a) $\boldsymbol{2x + x + 3x = 142}$ **b)** $\boldsymbol{x + 3x + 2x = 142 + 8}$

c) $\boldsymbol{x + 2x + 3x = 142 - 8}$ **d)** $\boldsymbol{6x = 136}$

Solución: menor…x , mediano….2x , mayor…..3x – 8

$$x + 2x + 3x - 8 = 142 \rightarrow 6x - 8 = 142:$$
$$6x = 150$$
$$x = 25$$

b) $x + 3x + 2x = 142 + 8$

8. Tenemos 20 monedas de 2 € y 1 €. Si en total tenemos 30 €, de cada clase de monedas, tenemos:

a) $\boldsymbol{9\ y\ 12}$ **b)** $\boldsymbol{10\ y\ 10}$ **c)** $\boldsymbol{12\ y\ 6}$ **d)** $\boldsymbol{8\ y\ 12}$

Solución:

$$2x + 1(20 - x) = 30$$
$$2x + 20 - x = 30$$
$$x = 10$$

b) $10\ y\ 10$

9. Tres personas se reparten una cantidad de dinero: la primera se queda con 250 € más que la segunda y la tercera se lleva tanto como la primera y la segunda juntas menos 100 €. Si la cantidad a repartir es 2 000 €, el resultado del reparto es, respectivamente:

a) $\boldsymbol{900\ €, 400\ €\ y\ 650\ €}$ **b)** $\boldsymbol{450\ €, 650\ €\ y\ 950\ €}$

c) $\boldsymbol{600\ €, 400\ €, 1000\ €}$ **d)** $\boldsymbol{650\ €, 400\ €, 950\ €}$

Solución: segunda…x , primera…….x + 250 , tercera…….x + x + 250 – 100

$$x + x + 250 + x + x + 250 - 100 = 2000 \rightarrow 4x + 400 = 2000:$$
$$4x = 1600$$
$$x = 400$$

d) $650\ €, 400\ €, 950\ €$

10. ¿A qué distancia de sus respectivos puntos de salida se cruzarán dos coches que salen en sentido contrario desde dos ciudades que distan 540 km, si el primero va a 100 km/h y el segundo a 80 km/h?

a) $\boldsymbol{340\ km\ y\ 200\ km}$ **b)** $\boldsymbol{300\ km\ y\ 240\ km}$

c) $\boldsymbol{420\ km\ y\ 120\ km}$ **d)** $\boldsymbol{320\ km\ y\ 220\ km}$

Solución:

$$100t + 80t = 540:$$
$$180t = 540$$
$$t = 3\ horas$$

Distancia del primer coche: $100 \cdot 3 = 300\ km$

Distancia del segundo coche: $80 \cdot 3 = 240\ km$

b) $300\ km\ y\ 240\ km$

2º ESO

Capítulo 11: Tablas y gráficas. Funciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Alba Alcalá Vidal

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL PLANO CARTESIANO. COORDENADAS

1. Describe y marca en el plano adjunto cómo llegarías a:

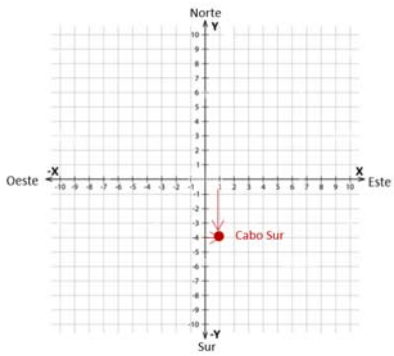
a) Cabo Sur

b) Bahía Norte

c) Playa Fea

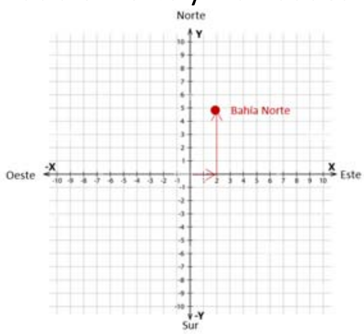
a) Cabo Sur

Para ir a cabo Sur partimos del centro de coordenadas que es (0,0) y avanzamos tres unidades hacia el sur y una unidad hacia el este.



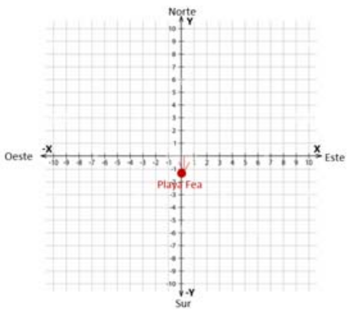
b) Bahía Norte

Para ir a Bahía Norte, avanzamos 5 unidades hacia el norte y 2 unidades hacia el este.



c) Playa Fea

Para ir a Playa Fea, avanzamos una unidad hacia el sur.



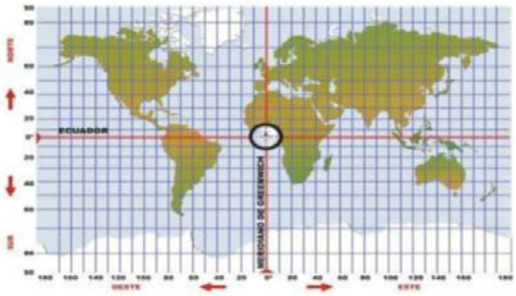
2. En el mapa indica en qué cuadrante se encuentran los siguientes países:

a) Australia

b) España

c) Argentina

d) China



Sabemos que los cuadrantes los enumeramos en el sentido contrario a las agujas del reloj.

2º cuadrante	1º cuadrante
3º cuadrante	4º cuadrante

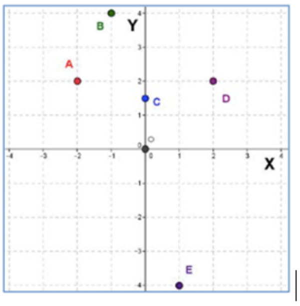
a) Australia: 4º cuadrante

b) España: 2º cuadrante

c) Argentina: 3º cuadrante

d) China: 1º cuadrante

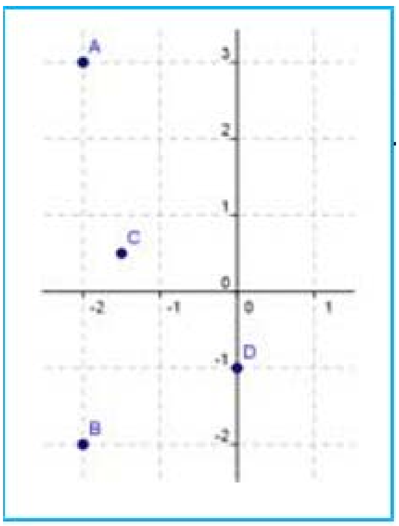
3. Indica cuáles son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto.



A = (-2,2) ; **B =** (-1, 4) ; **C =** (0, 1,5) ; **D =** (2, 2) ; **E =** (1, -4)

4. Dibuja un sistema de referencia cartesiano y en él marca los puntos siguientes:

A = (-2, 3); B = (-2, 2); C = (1,5, 0,5) y D = (0,-1)



Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

2. TABLAS Y GRÁFICAS

5. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, que relacione el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo medio es de 7 litros cada 100 kilómetros.

Para realizar la tabla solo tendremos que ir multiplicando por ejemplo por 2 los litros y los kilómetros, luego por 3, después por 4, etc.

Km	0	100	200	300	400
Litros	0	7	14	21	28

6. Construye una tabla de valores, con cinco cantidades diferentes, en que se relacione el lado de un cuadrado y su perímetro.

Lado cm	1	2	3	4	5
Perímetro	$4cm$	8cm	12cm	$16cm$	20cm

7. Construye una tabla de valores, con seis cantidades diferentes, que represente la siguiente situación: *"Una compañía de telefonía cobra 6 céntimos de euro por establecimiento de llamada y 3 céntimos por minuto hablado".*

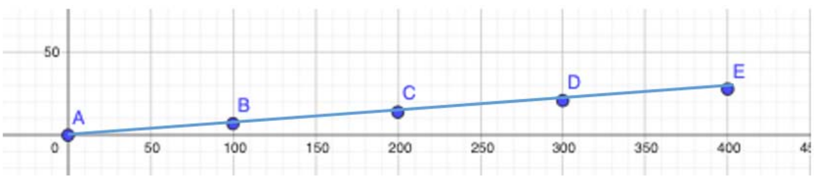
Haremos la tabla con los 6 primeros minutos. Ya sabemos que tenemos 6 céntimos fijos a los que tendremos que sumarle 3 céntimos multiplicado por cada minuto que hablemos.

Minutos hablados	1	2	3	4	5	6
Precio minuto	9	12	15	18	21	24

8. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre el consumo de un coche y los kilómetros que recorre sabiendo que su consumo es de 7 litros cada 100 kilómetros. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

Como consume 7 litros por 100 kilómetros, tendremos la función $y = \frac{7x}{100}$, a partir de aquí podemos hacer una tabla de valores y su representación.

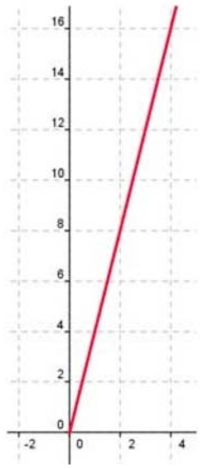
x	0	100	200	300	400
y	0	7	14	21	28



9. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

La función que relaciona el lado de un cuadrado con su perímetro será y = 4x. Hacemos la tabla de valores y los representamos.

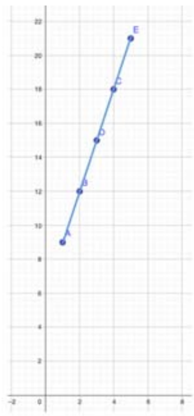
x	1	2	3	4
y	4	8	12	16



10. Construye una gráfica a partir de los datos de la tabla de valores de la Actividad propuesta sobre los costos en una compañía de telefonía. Si es posible, construye una gráfica uniendo sus puntos.

Según el ejercicio 7 tendremos la siguiente tabla

x	1	2	3	4	5
y	9	12	15	18	21



11. En un recibo del gas de la vivienda de Juan viene la siguiente distribución de gasto:

Consumo de gas: ....0.058 € por kwh
Impuesto especial:........0.002 € por kwh
Término fijo: ....4.30 € por mes
Alquiler de contador. 2.55 € por 2 meses

La factura era de dos meses, había consumido 397 kwh y el gasto ascendía a 34.97 €. Otra factura anterior el gasto era de 26.15 € con un consumo de 250 kwh. Construye una gráfica que relacione el consumo de gas y el gasto. ¿Tiene sentido unir los puntos?

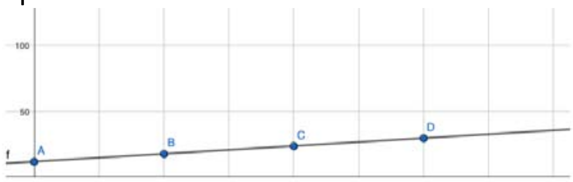
Tenemos que realizar la función con los datos dados y así ver si podemos hacer la representación gráfica. Sabemos que se paga por término fijo 4,30€ y el alquiler del contador es de 2,55€, por tanto, tendremos $(4{,}30€ + 2{,}55€) \bullet 2 = 11{,}15€.$

La potencia será 0,058kw/h de consumo y 0,002kw/h de impuesto especial, por lo que tendremos (0,058kw/h + 0,002kw/h = 0,06kw/h).

De esto obtenemos la función y = 0,06x + 11,15.

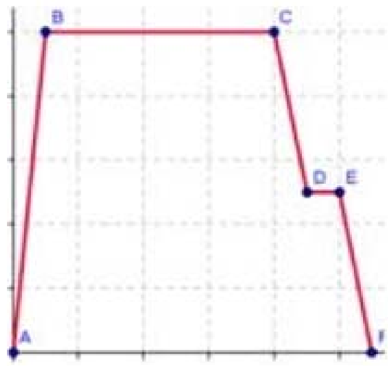
A continuación, damos valores a la x del consumo que podríamos hacer.

x	0	100	200	300
y	11,15	17,15	23,15	29,15



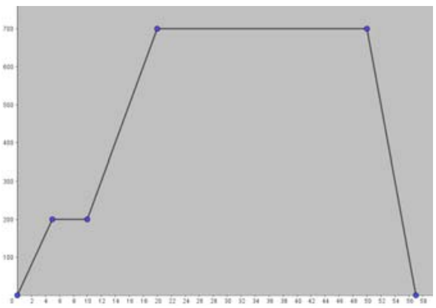
Tiene sentido unir los puntos ya que podemos consumir cualquier cantidad que se encuentre entre los puntos que hemos dibujado.

12. La familia de Pedro fue un día de excursión al campo en coche; después de pasar el día volvieron y a mitad de camino pararon durante un buen rato a echar gasolina y tomar unos refrescos. Al final llegaron a casa. Construye una gráfica de esta situación.

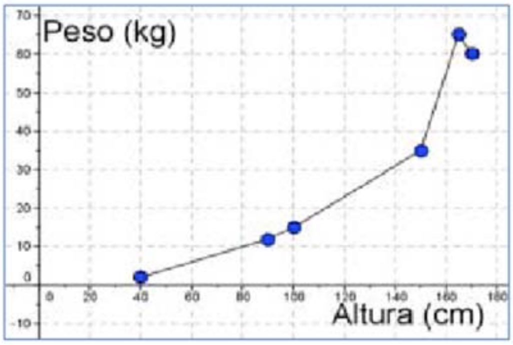


13. María salió a dar un paseo, primero fue a casa de su amiga Lucía, que vive a 200 metros, y tardó 5 minutos en llegar. La tuvo que esperar otros 5 minutos en su portal y, después, tardaron 10 minutos en llegar al parque, que estaba a 500 m, donde merendaron y charlaron durante media hora. Por último, María regresó a casa rápidamente, porque le había llamado su madre. Sólo tardó 7 minutos." Construye una gráfica de esta situación y, a partir de ella, confecciona una tabla de valores.

tiempo	0	5	10	20	50	57
metros	0	200	200	700	700	0



14. La gráfica siguiente nos muestra la variación del peso de Laura con relación a su estatura a lo largo de su vida. Analiza la gráfica, comenta la situación y responde a las siguientes preguntas:



a) ¿Cuánto pesaba cuando medía un metro? ¿Y cuándo medía 150 cm?

Pesaba 15kg cuando medía 1 metro y pesaba 35kg cuando medía 150cm.

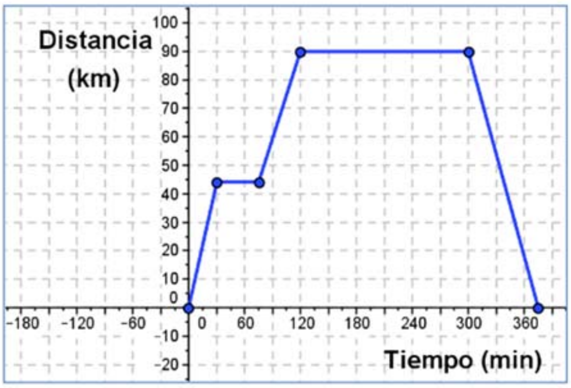
b) ¿Cuánto medía cuando pesaba 55 kg?

Medía 160 cm cuando pesaba 55kg.

c) ¿A qué altura pesaba más? ¿Laura adelgazó en algún momento?

Cuando medía 165cm pesaba 65kg, ese ha sido el peso máximo de Laura. Luego, con la misma altura (165cm), pesaba 60kg, por lo tanto, ahí adelgazó.

15. La siguiente gráfica representa una excursión en autobús de un grupo de 2º de E.S.O. a Toledo, pasando por Aranjuez. Sabiendo que Toledo está a 90 km del Instituto y Aranjuez a 45 km:



a) ¿Cuánto tiempo pararon en Aranjuez? ¿y en Toledo?

En Aranjuez pararon tres cuartos de hora. En Toledo pararon 3 horas.

b) ¿Cuánto tiempo tardaron en llegar a Toledo? ¿y en regresar al Instituto?

En llegar a Toledo tardaron 2 horas. Para regresar al instituto tardaron una hora y cuarto.

c) Si salieron a las 9 h de la mañana ¿A qué hora regresaron? ¿A las diez y media dónde se encontraban?

En todo el viaje invierte 360 minutos, es decir, 6 horas. Si salen a las 9 de la mañana, regresaron a las 3 de la tarde. A las 10 y media se encontraban de camino a Toledo.

d) Haz una descripción verbal del viaje

Salen de Toledo a las 9 de la mañana. A las 9h y media para y desayunan en Aranjuez donde tardan 45 minutos. Reanudan el viaje haca Toledo y llegan allí a las 11h. Están en Toledo hasta las 14h, momento en el que ponen rumbo de vuelta al instituto, llegando aquí a las 15h.

3. LAS FUNCIONES

16. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a) El consumo de un coche y la distancia recorrida. Sí es una función ya que el consumo de gasolina dependerá de la distancia recorrida. La variable dependiente es el consumo y la variable independiente es la distancia.

b) La velocidad a la que circula un coche y la edad del conductor. No es una función ya que no existe relación entre la edad de un conductor y la velocidad a la que circula un coche.

c) El número de habitantes de un barrio de una ciudad, o un pueblo, y el número de colegios públicos que hay allí. Se podía pensar que, sí es función, que a un determinado número de habitantes le corresponde un determinado número de colegios, pero en la práctica, no lo es.

d) La temperatura de un lugar y la hora del día. Es una función ya que la temperatura dependerá de la hora del día. La temperatura es la variable dependiente y la hora del día es la independiente.

e) El número de lados de un polígono y el número de diagonales que tiene. Es una función ya que la cantidad de diagonales dependerá del número de lados que tenga el polígono. La variable independiente es el número de lados y la variable dependiente es el número de diagonales.

17. Propón tres ejemplos, diferentes a todos los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos magnitudes en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

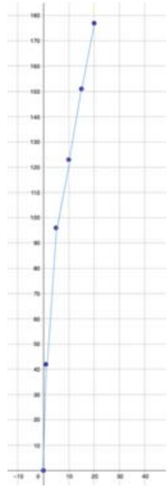
La primera función podría ser el peso de un conjunto de personas y el número de personas. La variable dependiente sería el peso y la independiente el número de personas.

La segunda función puede ser los kilos de naranjas que compramos y lo que tenemos que pagar. La variable dependiente es el dinero y la independiente los kilos.

La tercera función es la relación entre la cantidad de personas vacunadas contra una enfermedad y las personas que padezcan esa enfermedad. La variable dependiente sería la cantidad de personas que contraen esa enfermedad y la independiente el número de personas vacunadas.

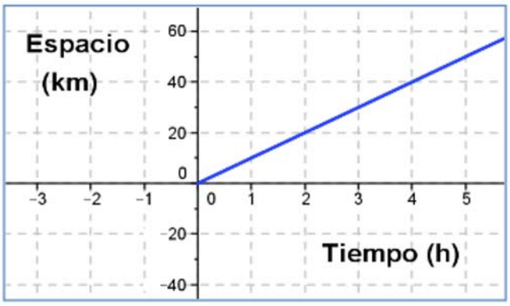
18. Expresa de forma gráfica y verbal la función definida por la siguiente tabla de valores:

Edad (años)	0	1	5	10	15	20
Altura (m)	0	42	96	123	151	177



Podemos observar que al ir cumpliendo años la estatura va aumentando. Sin embargo, no aumenta en proporción, es decir, si con un año mide 42cm, con dos años debería medir 84cm y así sucesivamente. Al ver la gráfica, comprobamos que es no sucede, sino que va creciendo, pero cada vez menos, es decir, al ir cumpliendo años el crecimiento es cada vez menor.

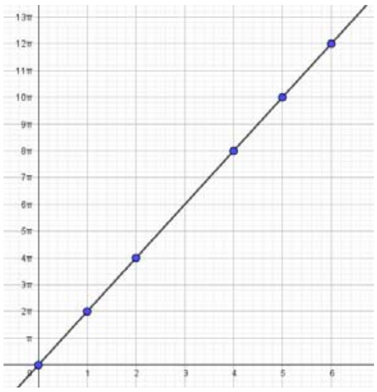
19. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica.



Tiempo (x)	0	1	2	3	4	5
Espacio (y)	0	10	20	30	40	50

Al aumentar el tiempo, aumenta el espacio recorrido: y = 10x, donde x es el tiempo, en horas, e y es el espacio recorrido en km.

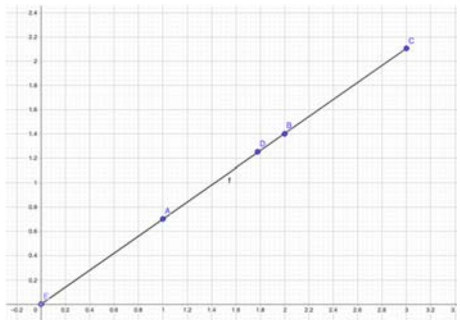
20. Expresa de forma gráfica y mediante una tabla de valores la función definida por la siguiente fórmula: l = 2·π·r.



Radio	0	1	2	4	5	6
Longitud de la circunferencia	0	2π	4π	8π	10π	12π

21. María quiere comprar una cinta que vale a 0,7 euros el metro. Representa gráficamente lo que deberá pagar según los metros de cinta que compre.

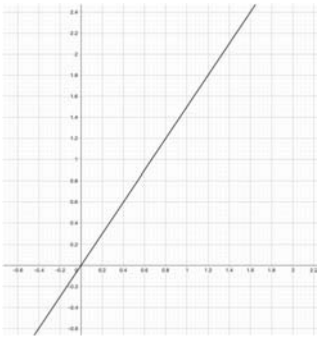
X (metros)	1	2	3	4	5
Y (euros)	0,7	1,4	2,1	2,8	3,5



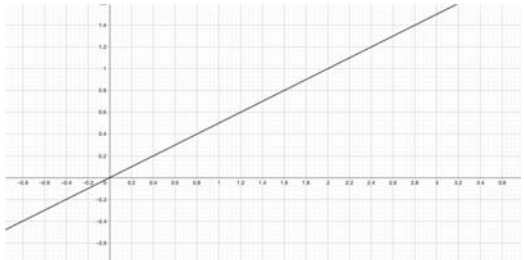
22. Representa gráficamente las funciones:

a) y = 5x

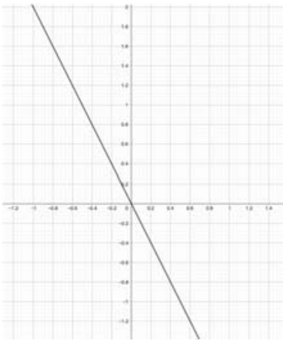
b) y = 1.5x



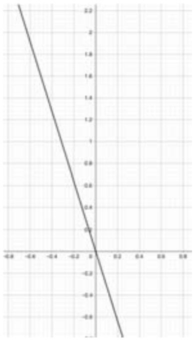
c) y = 0.5x



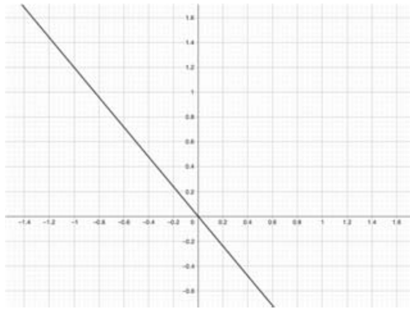
d) y = -2x



e) y = -3.2x



f) y = -1.2x



23. Indica en las funciones anteriores cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes. Razona la respuesta.

Recordemos que para saber si una función es creciente o decreciente debemos analizar el coeficiente de x en la ecuación de la recta, es decir, la **pendiente.**

- Si la pendiente es positiva ($m > 0$), la función es creciente: a medida que x aumenta, y también aumenta.

- Si la pendiente es negativa ($m < 0$), la función es decreciente: a medida que x aumenta, y disminuye. De esta forma:

a) Creciente ya que $5 > 0$

b) Creciente ya que $1.5 > 0$

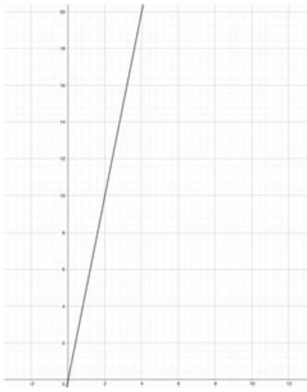
c) Creciente ya que $0.5 > 0$

d) Decreciente ya que $-2 < 0$

e) Decreciente ya que $-3.2 < 0$

f) Decreciente ya que $-1.2 < 0$

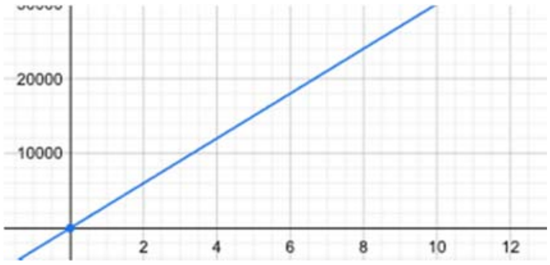
24. Juan anda muy deprisa, recorre 5 km a la hora. Representa gráficamente el paseo diario de Juan relacionando tiempo con espacio recorrido. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?



Para representar gráficamente el paseo de Juan, analizamos la relación entre el tiempo (x) y el espacio recorrido (y). Esta relación es directa ya que la velocidad se mantiene constante, por lo que podríamos representarlo como: **y = 5x**

Sí, es una recta, ya que la ecuación tiene la forma y=mx+b. En este caso, m=5 (pendiente) y b=0 (corte en el origen). También es una función lineal porque cumple con su definición: es de la forma y=mx (sin término independiente).

25. En una urbanización se consume por término medio al día tres mil litros de agua. Representa gráficamente el consumo de agua a lo largo de una semana. Escribe la fórmula de dicha función. ¿Es una recta? ¿Es una función lineal?



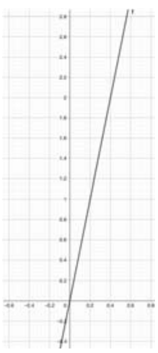
El consumo de agua se puede representar mediante la función: **y = 3000x**, siendo x el número de días e y el consumo total de agua en litros.

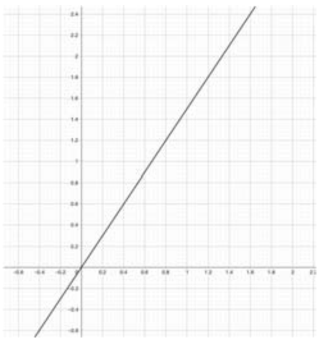
Es una recta porque la ecuación tiene la forma y=mx+b, que describe una línea recta.

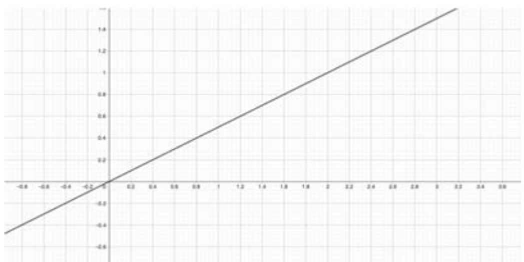
Es una función lineal ya que cumple con la forma y=mx (sin término independiente) y su gráfica es una recta que pasa por el origen.

26. Utiliza Geogebra para nuevamente representar gráficamente las funciones:

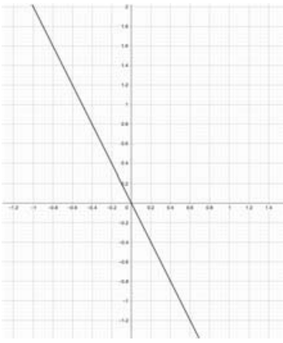
a) y = 5x **b) y = 1.5x** **c) y = 0.5x**



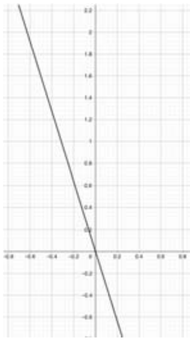




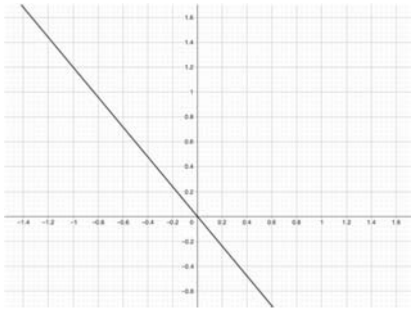
d) y = -2x



e) y = -3.2x



f) y = -1.2x



27. Indica en las funciones anteriores sus características:

a) Cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes

Funciones crecientes ($m > 0$):
$y = 5x$ ($m = 5$)
$y = 1.5x$ ($m = 1.5$)
$y = 0.5x$ ($m = 0.5$)

Funciones decrecientes ($m < 0$):
$y = -2x$ ($m = -2$)
$y = -3.2x$ ($m = -3.2$)
$y = -1.2x$ ($m = -1.2$)

b) ¿Son continuas?

Sí, todas son funciones lineales, lo que significa que no presentan saltos, interrupciones ni discontinuidades.

c) Busca los puntos de corte con los ejes coordenados.

Los puntos de corte se obtienen así:
Corte con el eje y ($x = 0$):
Para todas las funciones $y = mx$, cuando $x = 0$, entonces $y = 0$, por lo que todas pasan por el origen (0,0).

Corte con el eje x ($y=0$):
Se resuelve $0 = mx$, lo que da $x = 0$. Todas cortan también el eje x en (0,0).

d) ¿Existen máximos o mínimos? Razona las respuestas.

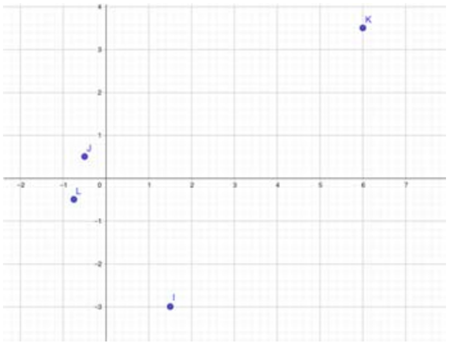
No. Las funciones lineales de la forma $y = mx$ no tienen máximos ni mínimos porque son monótonas en todo su dominio:
Si $m > 0$, la función crece indefinidamente.
Si $m < 0$, la función decrece indefinidamente.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

El plano Cartesiano. Coordenadas

1. Representa los siguientes pares ordenados en un plano cartesiano:

$$\mathbf{I} = \left(\frac{3}{2}, -3\right), \quad \boldsymbol{J} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \boldsymbol{K} = (6, 3.5), \quad \boldsymbol{L} = \left(-\frac{3}{4}, 0, 5\right)$$



2. Sin representar los siguientes puntos, di en qué cuadrante están:

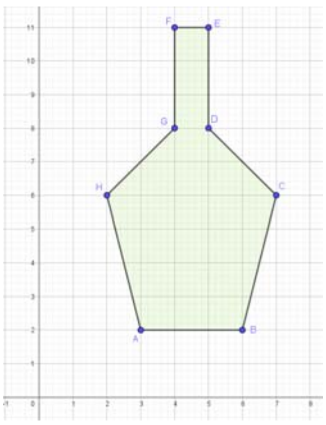
$$\mathbf{M} = \left(4, -\frac{5}{2}\right); \quad \mathbf{N} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \mathbf{P} = \left(-6, -\frac{9}{2}\right); \quad \mathbf{Q} = \left(-\frac{7}{2}, 5\right)$$

$$\mathbf{R} = (2, 0); \quad \mathbf{S} = (-7, 0); \quad \mathbf{T} = \left(0, -\frac{7}{2}\right); \quad \mathbf{U} = (0, 7); \quad \mathbf{O} = (0, 0)$$

Para determinar en qué cuadrante se encuentra cada punto, analizamos el signo de sus coordenadas:

M = $x > 0, y < 0$ → Cuadrante IV
N = $x > 0, y > 0$ → Cuadrante I
P = $x < 0, y < 0$ → Cuadrante III
Q = $x < 0, y > 0$ → Cuadrante II
R = Está sobre el eje de abscisas
S = Está sobre el eje de abscisas
T = Está sobre el eje de ordenadas
U = Está sobre el eje de ordenadas
O = Es el origen, es decir, sobre el eje de abscisas y ordenadas.

3. Observa la siguiente vasija:

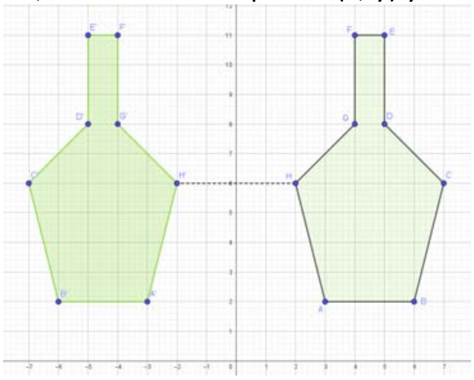


a. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto marcado de la vasija.

A= (3, 2), B = (6, 2), C = (7, 6), D = (5, 8),
E = (5, 11) , F = (4, 11), G = (4, 8), H = (2, 6)

b. Imagina que el eje Y es un espejo y el punto H' es el reflejado del punto H por este espejo. Dibuja cada punto reflejado de la vasija y dibuja la vasija reflejada.

Para reflejar la vasija respecto al eje Y, tomamos cada punto (x, y) y lo transformamos en (−x, y)



c. Nombra cada vértice de la nueva vasija. ¿Es un polígono? En caso afirmativo, ¿Qué tipo de polígono? ¿Cómo se llamaría?

La nueva vasija sigue teniendo la misma forma que la original. Ambas son simétricas respecto al eje Y. Se trata de un octágono irregular, ya que tiene 8 lados de diferente medida.

d. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?

En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de ordenadas (eje Y).

La nueva vasija está ubicada en el segundo cuadrante, ya que todas las coordenadas X son negativas y las Y siguen siendo positivas.

d. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.

A' = (-3, 2), B' = (-6, 2), C' = (-7, 6), D' = (-5, 8),
E' = (-5, 11), F' = (-4, 11), G' = (-4, 8), H' = (-2, 6)

e. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica la relación que hay entre ellos.

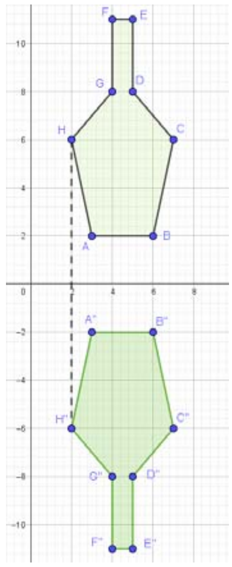
Cada punto reflejado tiene el mismo valor de Y, pero su X es el opuesto del original.
Es decir, si un punto de la vasija original es (x, y), el reflejado es (−x, y). Esto confirma que la vasija reflejada es una imagen especular respecto al eje Y.

4. Continuamos con la vasija del ejercicio anterior.

a. Imagina que el eje X es ahora otro espejo, y el punto H'' es el reflejado de H por este nuevo espejo. Ahora reflejamos la vasija respecto al eje X, lo que significa que cada punto (x, y) se transforma en (x, −y).

b. Dibuja en tu cuaderno la nueva vasija reflejada y nombra cada uno de sus vértices.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



c. ¿En qué cuadrante te ha quedado la nueva vasija?. En este caso, las dos vasijas son simétricas entre sí, respecto al eje de abscisas (eje X).

La vasija reflejada está en el cuarto cuadrante, ya que todas las coordenadas tienen valores negativos en Y, pero positivos o negativos en X.

d. Indica las coordenadas cartesianas de cada punto de la vasija reflejada.

A’’ = (3, -2), B’’ = (6, -2), C’’ = (7, -6), D’’ = (5, -8),
E’’ = (5, -11), F’’ = (4, -11), G’’ = (4, -8), H’’ = (2, -6)

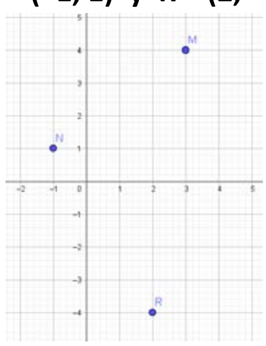
e. Observa las coordenadas de los puntos reflejados de las dos vasijas e indica qué relación hay entre ellos.

Comparando las vasijas reflejadas respecto al eje Y y al eje X, observamos:
- En la primera reflexión (eje Y), los puntos cambiaban el signo de la coordenada X.
- En la segunda reflexión (eje X), los puntos cambiaban el signo de la coordenada Y.

Si reflejáramos la vasija dos veces, primero en el eje Y y luego en el eje X, obtendríamos un reflejo total en el origen (0,0), es decir, los puntos originales se transformarían en (−x,−y).

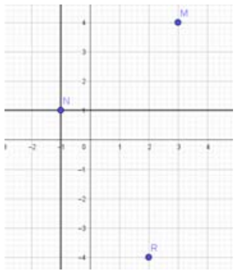
5. Ayudándote de regla, escuadra y cartabón dibuja en un folio en blanco un sistema de referencia cartesiano y los ejes con divisiones de 1 centímetro.

a. Representa los puntos M = (3, 4), N = (–1, 1) y R = (2, –4)



Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

b. Dibuja otro sistema de referencia cartesiano, con los ejes paralelos a los anteriores y que se corten en el punto (1, –1) del sistema anterior.



c. Escribe las coordenadas de los puntos M, N y R respecto al nuevo sistema cartesiano.

M = (2, 5), N = (0, 0) y R = (1, –3).

d. ¿Han cambiado los puntos? Describe con palabras lo que ha pasado

No han cambiado de posición en el espacio, lo que ha cambiado es la forma de describir su ubicación debido al nuevo sistema de referencia.

- En el sistema original, el punto (0,0) era el origen.
- En el nuevo sistema, el punto (1,−1) es el origen.

Como los ejes son paralelos, los puntos no se han movido físicamente, solo ha cambiado la manera de expresarlos numéricamente. Los puntos son los mismos, han cambiado los ejes.

6. Dibuja un sistema de referencia cartesiano en un papel milimetrado.

a. Representa un punto cuya distancia al eje de abscisas sea de 3,3 cm, y la distancia al eje de ordenadas sea de 1,9 cm.

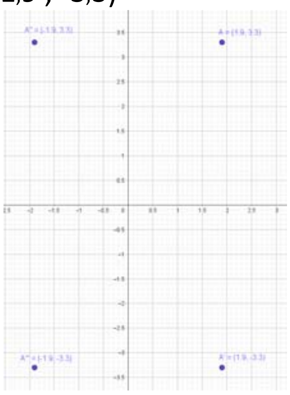
La distancia al **eje de abscisas** (eje X) es de **3,3 cm.** Esto significa que su coordenada Y es **±3,3**.

La distancia al **eje de ordenadas** (eje Y) es de **1,9 cm.** Esto significa que su coordenada X es **±1,9**.

b. ¿Existe más de una solución? En este caso, representa todos los puntos que cumplan esta condición e indica sus coordenadas cartesianas.

Sí, hay cuatro posibles puntos que cumplen la condición, ya que podemos combinar las coordenadas con signos positivos y negativos:

(1,9 , 3,3), (1,9 , -3,3), (-1,9 , 3,3), (-1,9 , -3,3)

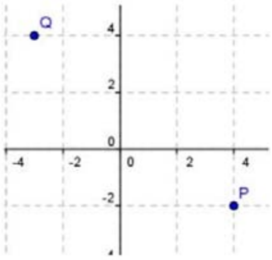


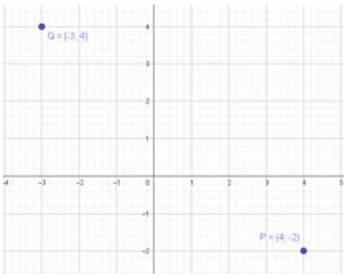
c) **¿Cómo son éstos puntos entre sí dos a dos?**

Los puntos se encuentran simétricos respecto a los ejes:

- Los que tienen la misma x pero distinta y son simétricos respecto al eje X.
- Los que tienen la misma y pero distinta x son simétricos respecto al eje Y.
- Los puntos opuestos (cambiando el signo de x e y) son simétricos respecto al origen (0,0).

7. Representa en tu cuaderno un sistema de referencia cartesiano para que los puntos P y Q tengan las coordenadas que se indican.

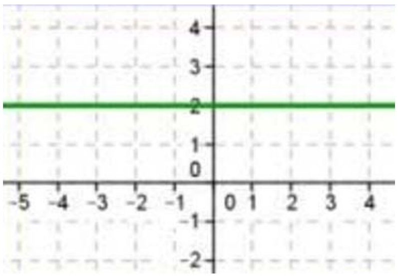




Tablas y gráficas

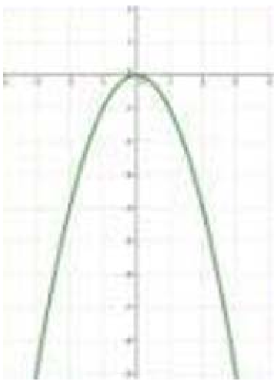
8. Construye tablas de valores, con cinco cantidades diferentes, correspondientes a las cuatro gráficas siguientes:

a)



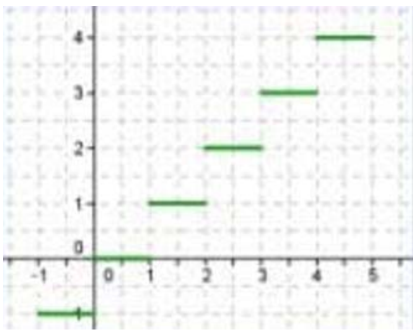
x	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y	*2*	*2*	*2*	*2*	*2*

b)



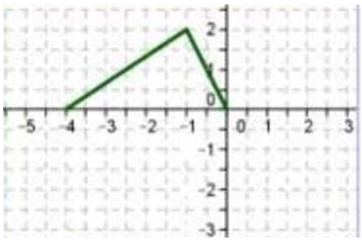
x	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
y	*-4*	*-1*	*0*	*-1*	*-4*

c)



x	*-1,2*	*-0,5*	*0*	*0,7*	*1,9*
y	*-2*	*-1*	*0*	*0*	*1*

d)



x	*-4*	*-2,5*	*-1*	*-0,5*	*0*
y	*0*	*1*	*2*	*1*	*0*

9. El Instituto Nacional de Estadística ha publicado el siguiente balance de la evolución demográfica de la población española, mediante la gráfica siguiente:

Variaciones interanuales medias de la población española entre 1857 y 2006.

a) Entre 1970 y 1991 la población ¿crece o decrece?

Crece lentamente

b) Entre 1920 y 1940 la población ¿crece o decrece?

Crece lentamente

c) ¿Y entre 1991 y 2001?

Crece

Razona sobre el significado de esta gráfica.

d) Los porcentajes del eje de ordenadas, ¿qué significan?

Representan las variaciones interanuales medias

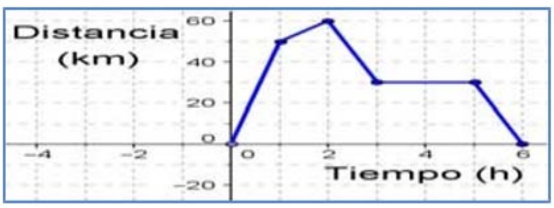
e) ¿En algún momento la población ha dejado de crecer, o simplemente crece más lentamente?

La población crece, pero cuando la curva de la gráfica es decreciente significa que disminuyen las variaciones interanuales, es decir, la población crece más lentamente.

f) Indica posibles motivos que expliquen esta gráfica

Las variaciones pueden deberse a guerras y crisis, migraciones, descenso de la natalidad o inmigración.

10. Juan sale de su casa en bicicleta y hace el recorrido que muestra la gráfica:



a. ¿A qué distancia de su casa llega?

60km

b. ¿Cuánto tiempo está parado?

2 horas

c. ¿Cuánto tarda en volver?

6 horas

d. A las dos horas ¿a qué distancia está de su casa?

60km

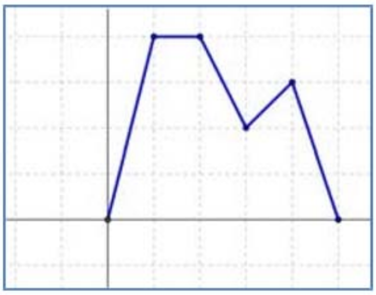
e. ¿Cuánto tiempo tardó en recorrer 50 km?

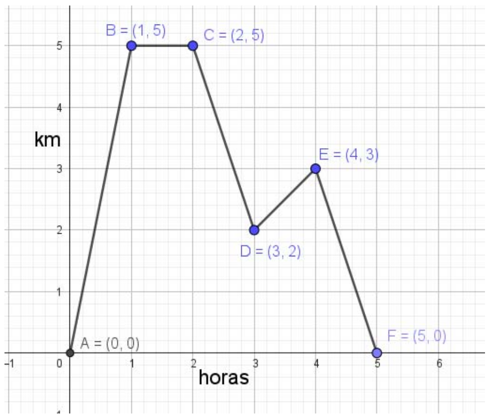
Una hora

f. ¿Cuándo va más deprisa? Y ¿Cuándo más despacio?

En la primera hora que recorre 50 km. En la segunda hora sólo recorre 10 km.

11. La gráfica nos muestra una relación entre dos magnitudes.





a. Inventa una situación que pueda ser representada por esta gráfica.

Un paseo en bicicleta de Ana.

b. Señala cuales son las magnitudes y en qué unidades se miden.

Tiempo en horas y distancia en km.

c. Indica, en los ejes, los números adecuados.

Gráfica

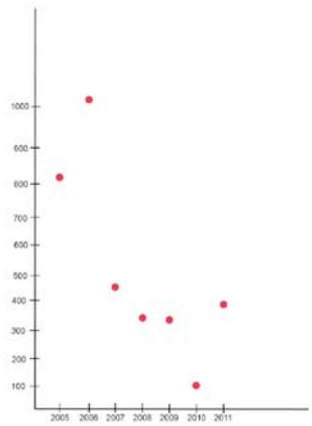
Describe, a partir de tus datos, la situación que has inventado.

Ana sale de paseo en bicicleta, la primera hora recorre 5 km, se para con una amiga durante una hora, vuelve a casa y tras recorrer 3 km recuerda que debe ir a la panadería a la que tarda una hora en llegar y regresa a casa que tarda otra hora. Solución abierta

12. El fenómeno de los incendios forestales se ha convertido en uno de los mayores problemas ecológicos que sufren nuestros montes debido a la elevada frecuencia e intensidad que ha adquirido en las últimas décadas. Los que han ocurrido en Madrid y el nº de hectáreas quemadas nos lo da la tabla siguiente:

Hectáreas quemadas (Ha)	825	1.095	450	339	325	101	385
Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

Haz una gráfica con estos resultados



13. Construye tablas de valores, con cuatro cantidades diferentes, que nos expresen las siguientes relaciones:

a. El peso y el precio de la miel de La Hiruela (Madrid), sabiendo que el kilo vale 7 €

x (peso de la miel en kg)	*0*	*1*	*2*	*3*
y (precio en euros)	*0*	*7*	*14*	*21*

b. Un número y la mitad de dicho número.

x	*-2*	*0*	*1*	*2*
y	*-1*	*0*	*0,5*	*1*

c. El perímetro de un triángulo equilátero y la medida de su lado.

x (perímetro)	*0*	*3*	*6*	*9*
y (lado)	*0*	*1*	*2*	*3*

Las funciones

14. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura del puré a lo largo del tiempo.

Sí es una función.
Variable independiente: el tiempo.
Variable dependiente: la temperatura del puré.
Explicación: En cada instante de tiempo, el puré tiene una única temperatura, por lo que cumple con la definición de función.

b. El precio de una camiseta y su color.

No es una función porque un mismo color de camiseta puede tener distintos precios según la marca, calidad o tienda, lo que impide que haya una relación única.

c. El área de un cuadrado y su lado.

Sí es una función.
Variable independiente: el lado del cuadrado.
Variable dependiente: el área del cuadrado.
Explicación: El área de un cuadrado se calcula como $A = L^2$, y para cada valor del lado L hay un único valor de área.

d. El precio de las naranjas que hemos comprado y su peso.
Sí es una función.
Variable independiente: el peso de las naranjas.
Variable dependiente: el precio de las naranjas.
Explicación: Si el precio por kilogramo es fijo, el precio total solo depende del peso de las naranjas, lo que define una función.

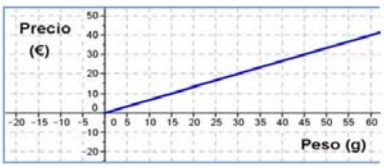
e. El volumen de una esfera y su radio.
Sí es una función.
Variable independiente: el radio de la esfera.
Variable dependiente: el volumen de la esfera.
Explicación: La fórmula del volumen de una esfera es V = $\frac{4}{3}\pi r^3$, lo que significa que para cada valor de r hay un único volumen, cumpliendo con la definición de función.

15. Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

El tiempo que tarda un coche en recorrer una distancia a velocidad constante.
Variable independiente: la distancia recorrida.
Variable dependiente: el tiempo que tarda en recorrerla.
Explicación: Si un coche viaja a velocidad constante, el tiempo de viaje depende directamente de la distancia a recorrer.

La cantidad de harina necesaria para hacer cierto número de galletas.
Variable independiente: el número de galletas.
Variable dependiente: la cantidad de harina necesaria.
Explicación: Para cada cantidad específica de galletas, hay una única cantidad de harina necesaria según la receta, por lo que es una función.

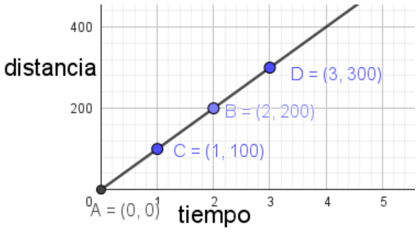
16. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente? ¿Tiene sentido prolongar la gráfica por el tercer cuadrante?



x (peso en g)	0	15	30	45
y (precio en euros)	0	10	20	30

La gráfica representa una relación lineal entre el peso de un objeto (en gramos) y su precio (en euros). La relación es directamente proporcional: conforme aumenta el peso, el precio también aumenta en la misma proporción. La recta pasa por el origen (0,0), lo que sugiere que el precio es cero cuando el peso es cero.
Variable independiente: el peso (X), ya que es el valor que podemos modificar.
Variable dependiente: el precio (Y), ya que depende del peso.
No podemos comprar una cantidad negativa de producto, luego no tiene sentido prolongarla en el tercer cuadrante

17. Expresa de forma gráfica, mediante una tabla de valores y mediante una descripción verbal, la función definida por la siguiente fórmula: d = 100·t ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la variable independiente?



t (tiempo)	0	1	2	3
d (distancia)	0	100	200	300

Esta función representa una situación en la que un objeto (por ejemplo, un vehículo) se mueve a una velocidad constante de 100 km por hora.

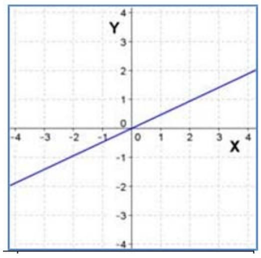
La distancia recorrida d es proporcional al tiempo transcurrido t: cuanto más tiempo pasa, mayor es la distancia recorrida.

Si el tiempo es 0, la distancia también es 0, lo cual tiene sentido porque no se ha empezado a mover.

Variable independiente: t (tiempo), porque es la que elegimos o controlamos.

Variable dependiente: d (distancia), porque depende del tiempo transcurrido.

18. Dada la función definida en la gráfica de al lado, exprésala como tabla de valores, mediante una descripción verbal y de forma algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente?, ¿y la independiente?



x	-2	0	2	4
y	-1	0	1	2

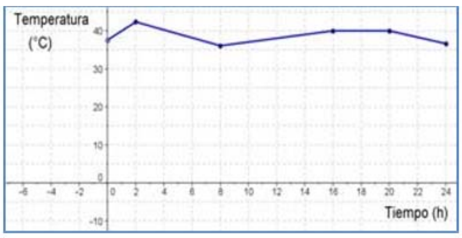
y = 0.5x

La función y = 0.5x representa una relación directamente proporcional entre X e Y.

Variable independiente: X, ya que es el valor que podemos modificar libremente.

Variable dependiente: Y, porque su valor depende de X.

19. La siguiente gráfica describe la evolución de la temperatura de un enfermo durante un día. Mirando la gráfica indica:



a) ¿Qué temperatura tenía a las cuatro de la mañana?

40°C

b) ¿y a las doce de la noche?

37°C

c) ¿A qué horas tenía cuarenta grados de fiebre?

A la 1 h, a las 4, y entre las 16 y las 20 horas

c)¿A qué hora tuvo más temperatura? ¿De cuánto era?

A las 2h con 42°C

e) ¿A qué hora tuvo menos temperatura? ¿De cuánto era?

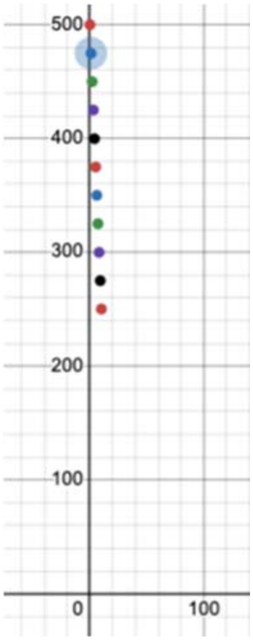
A las 8h de 36°C

e) Describe con palabras esta situación.

Al enfermo de sube la temperatura hasta los 42°C y las 2 de la noche, luego desciende hasta 36°C a las 8 de la mañana, para volver a subir hasta 40°C a las 4 de la tarde, en que se estabiliza en esa temperatura, para volver a descender a las 20 horas.

20. Una bañera de 500 litros se vacía mediante un sumidero que desagua 25 litros cada minuto. Haz una tabla de valores con los diez primeros minutos de vaciado. Representa gráficamente la función que relaciona la cantidad de agua que hay en la bañera con el tiempo transcurrido desde que empieza a vaciarse. Indica cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	500	475	450	425	400	375	350	325	300	275	250



El tiempo (en minutos) es la variable independiente, la cantidad de agua de la bañera, en litros, es la variable
dependiente; y = 500 – 25x.

21. En las siguientes relaciones señala si son o no funciones y, en caso de serlo, indica cuales son las variables dependientes e independientes.

a. La temperatura de un enfermo a largo del tiempo.
Es una función, ya que en cada instante de tiempo hay una única temperatura registrada.
Variable independiente: el tiempo.
Variable dependiente: la temperatura del enfermo.

b. El precio de un coche y su color.
No es una función, porque un mismo color puede corresponder a coches de diferentes precios. El color no determina de forma única el precio.

c. El volumen de un líquido y su peso.
Es una función, ya que para cada volumen de un líquido específico hay un único peso asociado.
Variable independiente: el volumen.
Variable dependiente: el peso.

d. La distancia al Instituto y el tiempo empleado.
Depende de la situación. Si consideramos que el tiempo empleado depende de la distancia fija a la que está el instituto (y la velocidad es constante), entonces es una función.
Variable independiente: la distancia al instituto.
Variable dependiente: el tiempo empleado.

e. La longitud de un muelle y el peso colgado en él.

Es una función, ya que, al añadir un peso determinado, el muelle se estira hasta una única longitud específica (según la ley de Hooke en elasticidad).
Variable independiente: el peso colgado.
Variable dependiente: la longitud del muelle.

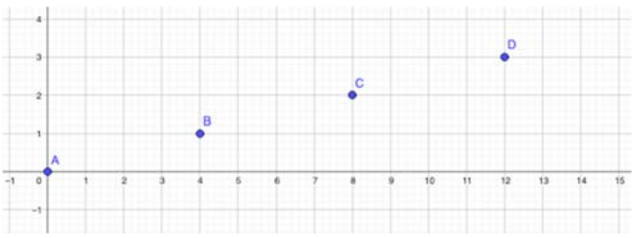
22. Propón dos situaciones diferentes a todas los que has estudiado hasta ahora, de relaciones entre dos variables en las que una sea función de la otra. Indica además en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál la independiente.

La cantidad de combustible en el depósito de un coche y la distancia recorrida
Es una función, ya que a cada distancia recorrida le corresponde una única cantidad de combustible restante (suponiendo un consumo constante).
Variable independiente: la distancia recorrida.
Variable dependiente: la cantidad de combustible en el depósito

El tiempo de cocción de un huevo y su grado de dureza
Es una función, ya que el grado de dureza del huevo depende del tiempo que haya estado en el agua hirviendo.
Variable independiente: el tiempo de cocción.
Variable dependiente: el grado de dureza del huevo.

23. En una papelería 10 lápices cuestan 2,5 €, haz una tabla de valores, dibuja su gráfica y escribe su expresión algebraica. ¿Cuál es la variable dependiente? ¿y la variable independiente?

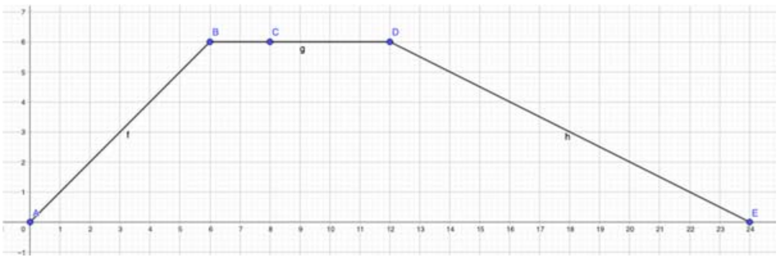
X	0	4	8	12
Y	0	1	2	3



y = 0.25x

Variable independiente: el número de lápices (x), ya que podemos elegir cuántos comprar.
Variable dependiente: el precio (y), porque depende del número de lápices adquiridos.

24. Juan, otro día, da un paseo con su amiga Luna. Salen de casa de Luna por un camino llano durante un tiempo, descansan durante un rato y, después regresan a casa de Luna por el mismo camino, pero más despacio. Haz una gráfica (tiempo, distancia) que describa esta situación.



AUTOEVALUACIÓN

1. El punto de coordenadas A = (-5, −6) está situado en el:

a) primer cuadrante b) segundo cuadrante c) tercer cuadrante d) cuarto cuadrante.

c)Tercer cuadrante

2. Indica qué afirmación es falsa:

b) El eje de abscisas es el eje OY

c) El eje de ordenadas es vertical

d) El eje de abscisas es perpendicular al eje de ordenadas

e) El eje de ordenadas es el eje OY

a) El eje de abscisas es el eje OY

3. Los puntos de coordenadas A = (0, -5), B = (0,4), C = (0, -7), D = (0, 8) están todos ellos en el:

a) eje de ordenadas b) primer cuadrante c) eje de abscisas d) segundo cuadrante

c) eje de ordenadas

4. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

Personas	1	4	8	
Kg de comida	7			21

a) 16, 32, 7 b) 10, 20, 3 c) 28, 56, 3 d) 9, 18, 4

$\frac{1}{7} = \frac{4}{x}$, x = 28 ; $\frac{4}{28} = \frac{8}{x}$, x = 56 ; $\frac{8}{56} = \frac{x}{21}$, x= 3

c) 28, 56, 3

5. La siguiente tabla de valores puede corresponder a:

a) una proporcionalidad directa. b) una proporcionalidad inversa

c) la relación entre el lado de un cuadrado y su área. d) la relación entre el radio del círculo y su área

X	4	12	20	36
Y	1	3	5	9

Ya que $\frac{4}{1} = \frac{12}{3} = \frac{20}{5} = \frac{36}{9}$

a) una proporcionalidad directa.

6. Indica en los casos siguientes aquel que NO es una función:

a) La temperatura de un enfermo a lo largo del tiempo. b) Y = 3X + 2.

c) La longitud de una circunferencia como función del radio. d) El área de un círculo y su color.

a) El área de un círculo y su color. No es una función ya que no tiene ninguna relación el área con su color.

7. Indica qué afirmación es falsa

a) El origen de coordenadas es la intersección entre el eje de abscisas y el de ordenadas

b) En una función a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente

c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente

c) En una función a cada valor de la variable dependiente le corresponde un único valor de la variable independiente.

Es falsa porque podemos tener dos valores distintos de la variable independiente y obtener el mismo valor de la variable dependiente. Por ejemplo, para la función y = x^2:

Si x = -7, y = 49 ; Si x = 7, y = 49

8. Escribe una tabla de valores de la función y = 2x - 3

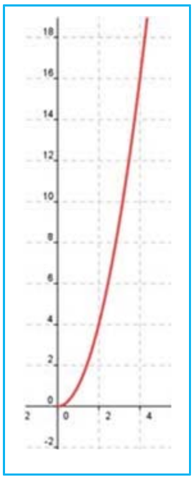
x	1	2	3	4
y				

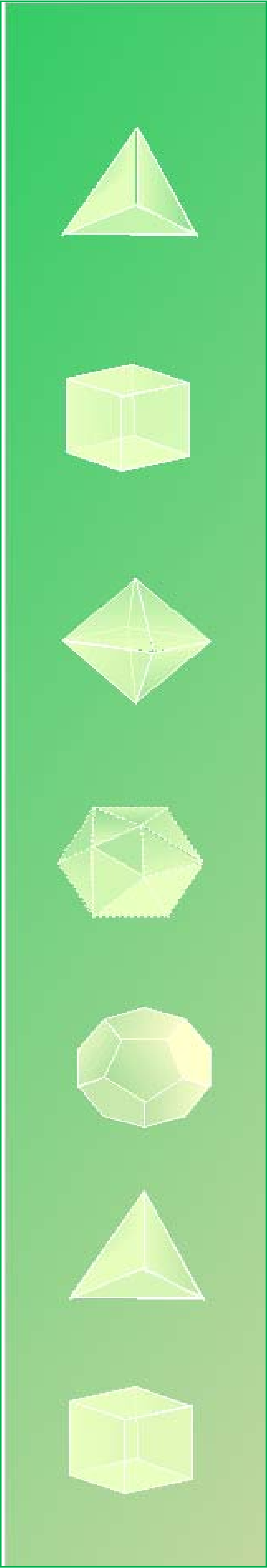
a) -1, 1, 3, 5. b) 0, 1, 4, 5. c) -1, -7, -9, -11. d) -1, 0, 3, 6.

y = 2·1 – 3 = -1 ; y = 2·2 – 3 = 1 ; y = 2·3 – 3 = 3 ; y = 2·4 – 3 = 5

a) -1,1,3,5

9. Dibuja la gráfica de la función: Área del cuadrado = Lado al cuadrado





2º ESO
Capítulo 12: Estadística y probabilidad
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Antonio Pozo León

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1.1. Fenómenos o experimentos aleatorios

1. Indica si es un fenómeno aleatorio:

a) La superficie de los países de la Comunidad Europea.

La superficie de los países es un dato fijo y conocido, no varía de manera impredecible.

Solución: No es un fenómeno aleatorio

b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada.

El sexo del próximo bebé no se puede predecir con certeza, es un evento que ocurre al azar.

Solución: Es un fenómeno aleatorio

c) El área de un círculo del que se conoce el radio.

El área de un círculo se puede calcular exactamente con la fórmula $A = \pi \cdot r^2$, no hay incertidumbre.

Solución: No es un fenómeno aleatorio

d) Tiramos una chincheta y anotamos si cae con la punta hacia arriba.

El resultado de la caída de la chincheta no se puede predecir con certeza, es un evento aleatorio.

Solución: Es un fenómeno aleatorio

e) Saber si el próximo mes es febrero.

Los meses del año siguen un orden fijo y conocido, no hay incertidumbre en cuál será el próximo mes.

Solución: No es un fenómeno aleatorio

1.2. Frecuencia absoluta y relativa. Frecuencias acumuladas

2. Completa en la siguiente tabla las frecuencias relativas del experimento aleatorio tirar un dado:

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

Las frecuencias relativas se calculan dividiendo cada frecuencia absoluta por la suma total de frecuencias absolutas.

$$Frecuencia\ relativa\ = \frac{Frecuencia\ absoluta}{Suma\ total\ de\ frecuencias\ absolutas}$$

Posibles resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas
1	15	$15 / 100 = 0.15$
2	18	$18 / 100 = 0.18$
3	16	$16 / 100 = 0.16$
4	17	$17 / 100 = 0.17$
5	19	$19 / 100 = 0.19$
6	15	$15 / 100 = 0.15$
Suma total	100	1

La suma de todas las frecuencias relativas debe ser igual a 1, ya que representan la proporción de cada resultado respecto al total.

3. Escribe la tabla de frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas del ejercicio 2. Observa que el último valor ahora es 1.

Posibles resultados	**Frecuencias absolutas**	**Frecuencias Acumuladas**
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	

Posibles resultados	Frecuencias relativas	Frecuencias relativas Acumuladas
1	0.15	0.15
2	0.18	0.33
3	0.16	0.49
4	0.17	0.66
5	0.19	0.85
6	0.15	1
Suma total	1	

1.3. Experimentos aleatorios. Sucesos

4. Para cada uno de los ejemplos anteriores: lanzar un dado, tirar dos monedas, indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.

- Lanzar un dado:
  - Suceso 1: Obtener un número par (2, 4, 6).
  - Suceso 2: Obtener un número mayor que 3 (4, 5, 6).
  - Suceso 3: Obtener un número menor o igual a 2 (1, 2).
- Tirar dos monedas:
  - Suceso 1: Obtener al menos una cara.
  - Suceso 2: Obtener dos caras o dos cruces.
  - Suceso 3: Obtener una cara y una cruz.

5. En una bolsa tenemos 5 bolas rojas numeradas del 1 al 5. Se hacen los dos experimentos siguientes:

- **EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.**
- **EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.**

¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

El experimento no aleatorio es el EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color. Ya que todas las bolas son rojas, por lo que no hay variabilidad en el resultado.

Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.

Para el EXPERIMENTO B, que es un experimento aleatorio, el espacio muestral se define como el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener al sacar una bola de la bolsa y mirar su número. Dado que las bolas están numeradas del 1 al 5, el espacio muestral es:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

6. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las pi-cas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son. Describe el espacio muestral.

Para describir el espacio muestral del experimento de coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son, consideramos las posibles combinaciones de colores de las dos cartas. Dado que las cartas pueden ser negras (picas y tréboles) o rojas (corazones y diamantes), las combinaciones posibles son:

- Ambas cartas son negras.
- Ambas cartas son rojas.
- Una carta es negra y la otra es roja.

Representamos el espacio muestral como el conjunto de todos estos posibles resultados:

$$\{(N,N),(R,R),(N,R),(R,N)\}$$

Donde:

- (N) representa una carta negra.
- (R) representa una carta roja.

7. Inventa cinco experimentos aleatorios y escribe el conjunto de posibles resultados.

- Lanzar un dado de seis caras:

Conjunto de posibles resultados: $\{1,2,3,4,5,6\}$

- Sacar una carta de una baraja francesa:

Conjunto de posibles resultados: $\{A\spadesuit, 2\spadesuit, \dots, K\spadesuit, A\heartsuit, 2\heartsuit, \dots, K\heartsuit, A\clubsuit, 2\clubsuit, \dots, K\clubsuit, A\diamondsuit, 2\diamondsuit, \dots, K\diamondsuit\}$

- Lanzar una moneda tres veces:

Conjunto de posibles resultados:

$$\{(C,C,C),(C,C,X),(C,X,C),(C,X,X),(X,C,C),(X,C,X),(X,X,C),(X,X,X)\}$$

Donde (C) representa cara y (X) representa cruz.

- Elegir un número al azar del 1 al 10:

Conjunto de posibles resultados: $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

- Tirar dos dados de seis caras y sumar los resultados:

Conjunto de posibles resultados: $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

8. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "Escribir en cinco tarjetas los números 1, 2, 3, 4 y 5 y sacar una al azar".

El espacio muestral del experimento aleatorio "Escribir en cinco tarjetas los números 1, 2, 3, 4 y 5 y sacar una al azar" es el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener al sacar una tarjeta. Dado que las tarjetas están numeradas del 1 al 5, el espacio muestral es: $\{1,2,3,4,5\}$

9. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "Tirar una tiza al suelo y anotar el número de trozos en que se rompe".

El espacio muestral del experimento aleatorio "Tirar una tiza al suelo y anotar el número de trozos en que se rompe" incluye todos los posibles números de trozos en los que la tiza puede romperse. Este espacio muestral puede variar dependiendo de la fragilidad de la tiza y la fuerza con la que se tire, pero generalmente se puede considerar como: $\{1,2,3,4,5,\dots\}$

En teoría, la tiza podría romperse en cualquier número de trozos, pero en la práctica, el número de trozos suele ser finito y razonable.

10. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio de sacar dos cartas.

- Suceso 1: Ambas cartas son del mismo palo:

Este suceso ocurre cuando las dos cartas sacadas pertenecen al mismo palo (picas, corazones, tréboles o diamantes).
Espacio muestral:
$\{(A\spadesuit,2\spadesuit),(A\spadesuit,3\spadesuit),\dots,(K\spadesuit,Q\spadesuit),(A\heartsuit,2\heartsuit),\dots,(K\heartsuit,Q\heartsuit),(A\clubsuit,2\clubsuit),\dots,(K\clubsuit,Q\clubsuit),(A\diamondsuit,2\diamondsuit),\dots,(K\diamondsuit,Q\diamondsuit)\}$

- Suceso 2: Una carta es roja y la otra es negra:

Este suceso ocurre cuando una de las cartas sacadas es roja (corazones o diamantes) y la otra es negra (picas o tréboles).

Espacio muestral:
$\{(A\spadesuit, A\heartsuit), (A\spadesuit, 2\heartsuit), \dots, (K\spadesuit, Q\heartsuit), (A\clubsuit, A\diamondsuit), \dots, (K\clubsuit, Q\diamondsuit), (A\heartsuit, A\spadesuit), \dots, (K\heartsuit, Q\spadesuit), (A\diamondsuit, A\clubsuit), \dots, (K\diamondsuit, Q\clubsuit)\}$

11. En el juego de lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las centenas del primer premio.

- Suceso 1: La cifra de las centenas es un número par:

Este suceso ocurre cuando la cifra de las centenas del primer premio es uno de los siguientes números: 0, 2, 4, 6, 8.

Espacio muestral: $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

- Suceso 2: La cifra de las centenas es mayor que 5:

Este suceso ocurre cuando la cifra de las centenas del primer premio es uno de los siguientes números: 6, 7, 8, 9.

Espacio muestral: $\{6, 7, 8, 9\}$

12. En el juego de dominó, indica tres sucesos con fichas dobles.

- Suceso 1: Sacar una ficha doble par:

Este suceso ocurre cuando se saca una ficha doble cuyos números es par.

Espacio muestral: $\{(0 \mid 0), (2 \mid 2), (4 \mid 4), (6 \mid 6)\}$

- Suceso 2: Sacar una ficha doble impar:

Este suceso ocurre cuando se saca una ficha doble cuyos números es impar.

Espacio muestral: $\{(1 \mid 1), (3 \mid 3), (5 \mid 5)\}$

- Suceso 3: Sacar una ficha doble mayor que 3:

Este suceso ocurre cuando se saca una ficha doble cuyos números es mayor que 3.

Espacio muestral: $\{(4 \mid 4), (5 \mid 5), (6 \mid 6)\}$

13. Escribe tres sucesos aleatorios de tirar tres monedas.

- Suceso 1: Obtener exactamente dos caras:

Este suceso ocurre cuando al tirar tres monedas, dos de ellas muestran cara y una muestra cruz.
Espacio muestral: $\{(C, C, X), (C, X, C), (X, C, C)\}$

Donde (C) representa cara y (X) representa cruz.

- Suceso 2: Obtener al menos una cruz:

Este suceso ocurre cuando al tirar tres monedas, al menos una de ellas muestra cruz.

Espacio muestral: $\{(C, C, X), (C, X, C), (X, C, C), (C, X, X), (X, C, X), (X, X, C), (X, X, X)\}$

- Suceso 3: Obtener todas las monedas con el mismo resultado:

Este suceso ocurre cuando al tirar tres monedas, todas muestran cara o todas muestran cruz.
Espacio muestral: $\{(C, C, C), (X, X, X)\}$

1.4. Probabilidad

14. Señala si son poco probables o muy probables los siguientes sucesos:

a) El jueves vas al colegio.

Muy probable: Si es un día lectivo y no hay circunstancias especiales (como vacaciones o enfermedad), es muy probable que vayas al colegio.

b) Cruzas la calle y te pilla un coche.

Poco probable: Aunque es un riesgo existente, si se siguen las normas de tráfico y se cruza por los lugares adecuados, la probabilidad es baja.

c) Hace una quiniela y le toca el premio máximo:

Poco probable: Ganar el premio máximo en una quiniela es un evento muy raro debido a las bajas probabilidades de acertar todos los resultados.

d) Le toca la lotería a Juan:

Poco probable: Similar a la quiniela, ganar la lotería tiene probabilidades muy bajas.

e) Le pongan una multa a una persona que conduce habiendo bebido alcohol:

Muy probable: Si una persona conduce bajo los efectos del alcohol y es detenida por la policía, es muy probable que reciba una multa.

f) Sales a la calle y te cae una cornisa encima:

Poco probable: Este es un evento muy raro y poco común.

g) ¿Amanecerá mañana?:

Muy probable: A menos que ocurra un evento catastrófico a nivel planetario, es casi seguro que amanecerá mañana.

h) Mañana haya un terremoto en Madrid:

Poco probable: Aunque los terremotos pueden ocurrir en cualquier lugar, la probabilidad de que ocurra uno en Madrid mañana es baja.

15. Calcula la probabilidad de que al tirar con esta ruleta salga el plátano.

La probabilidad de que al tirar con la ruleta salga el plátano es (1/3).

Esto significa que hay una posibilidad entre tres de que salga el plátano, lo cual se puede expresar como un valor decimal:

$$1/3 \approx 0.3333$$

16. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea: a) el as de copas, b) una copa, c) un as, d) el as de copas o bien un oro, e) un as o bien una copa.

Vamos a calcular las probabilidades para cada uno de los casos mencionados utilizando una baraja española de 48 cartas:

- Probabilidad de que al sacar una carta sea el as de copas: En una baraja de 48 cartas, hay solo un as de copas. $P(\text{as de copas}) = \frac{1}{48} = 0.0208$

- Probabilidad de que al sacar una carta sea una copa: Hay 12 copas en una baraja de 48 cartas.

$$P(\text{copa}) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} = 0.25$$

- Probabilidad de que al sacar una carta sea un as: Hay 4 ases en una baraja de 48 cartas.

$$P(\text{as}) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} = 0.0833$$

- Probabilidad de que al sacar una carta sea el as de copas o bien un oro: Hay 1 as de copas y 12 oros en la baraja.

$$P(\text{as de copas} \cup \text{oro}) = \frac{1+12}{48} = \frac{13}{48} = 0.2708$$

- Probabilidad de que al sacar una carta sea un as o bien una copa: Hay 4 ases y 12 copas en la baraja. El as de copas se cuenta dos veces, por lo que debemos restarlo una vez.

$$P(\text{as} \cup \text{copa}) = \frac{4+12-1}{48} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

17. Para saber la probabilidad de que un incendio haya sido intencionado, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Para determinar la probabilidad de que un incendio haya sido intencionado, es más adecuado basarse en el estudio de las frecuencias relativas. Esto se debe a que las frecuencias relativas se basan en datos históricos y estadísticos, proporcionando una estimación más precisa y fundamentada en la realidad de los incendios ocurridos anteriormente.

Asignar la probabilidad por simetría no sería apropiado en este caso, ya que no todos los incendios tienen la misma probabilidad de ser intencionados. La simetría implica que todos los eventos tienen igual probabilidad, lo cual no refleja la complejidad y variabilidad de las causas de los incendios

18. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

el experimento aleatorio lanzar una moneda. Copia la tabla en tu cuaderno.

- **Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero "con sentido").**
- **En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×	☺	×
☺	☺	×	×	×	☺	☺	☺	×	☺	×	×	×	☺	×	×	×	☺	×	☺	×	☺	☺	×	☺	☺	☺	☺	☺	×

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.

Predicción

- La predicción sigue un patrón alternante perfecto entre "☺" (cara) y " ✕ " (cruz).
- Este patrón es muy regular y predecible, lo cual no suele ocurrir en experimentos aleatorios reales.

Realidad

- La realidad muestra una distribución más aleatoria de "☺" y " ✕ ".
- No hay un patrón claro y predecible como en la predicción.
- Hay secuencias donde "☺" o " ✕ " se repiten varias veces consecutivas, lo cual es típico en experimentos aleatorios.

¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?

En los resultados reales de los 30 lanzamientos de la moneda, hay:

- 16 caras
- 14 cruces

¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?

Sí, en los resultados reales de los lanzamientos de la moneda, aparecen grupos seguidos de caras y de cruces.

¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

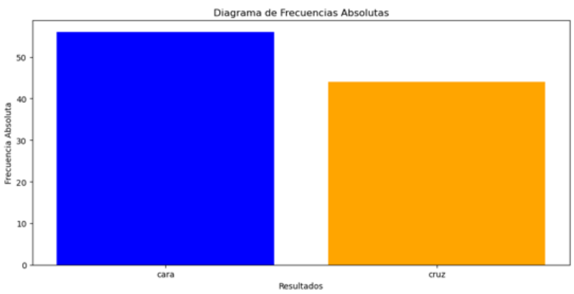
- El mayor número de caras seguidas es 5.
- El mayor número de cruces seguidas es 3.

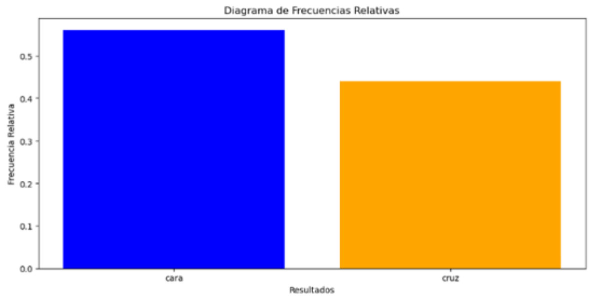
2. GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

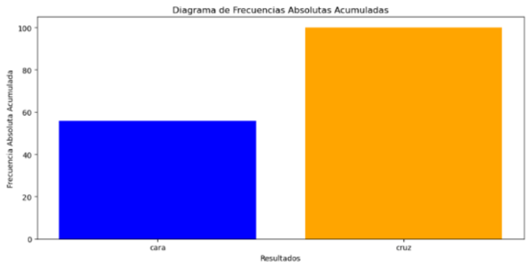
2.1. Diagrama de rectángulos o de barras

19. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias absolutas acumuladas.

Posibles resultados	Número de veces
Cara	56
Cruz	44

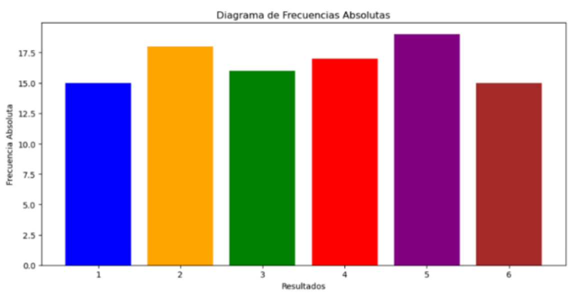


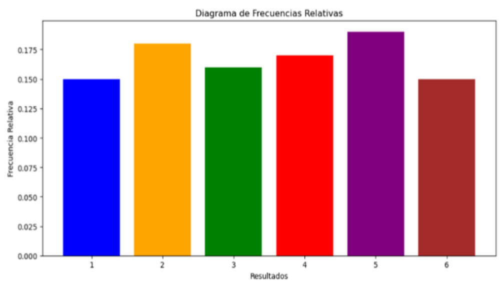


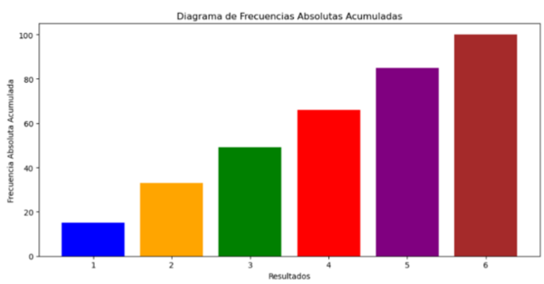


20. Dibuja el diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas de la tabla adjunta. Representa también el diagrama de rectángulos de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas.

Posibles resultados	Frecuencias absolutas
1	15
2	18
3	16
4	17
5	19
6	15

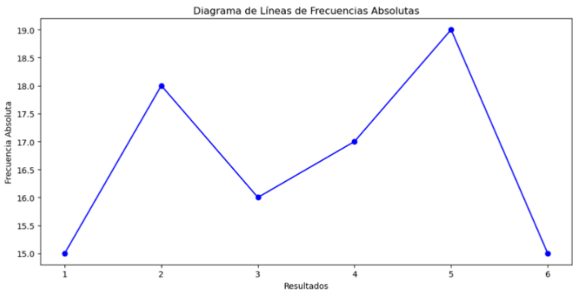


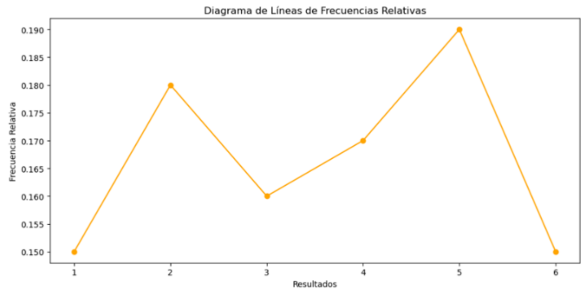


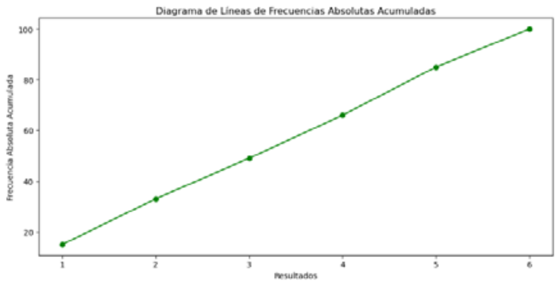


2.2. Diagrama de líneas

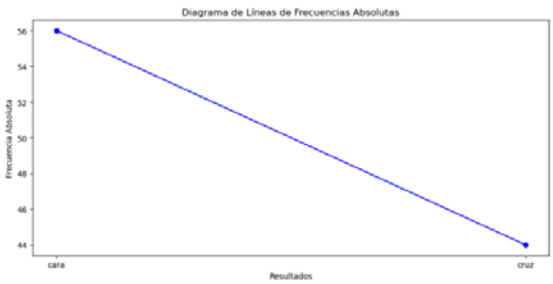
21. Dibuja los diagramas de líneas de frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas del experimento tirar un dado de la actividad 20.

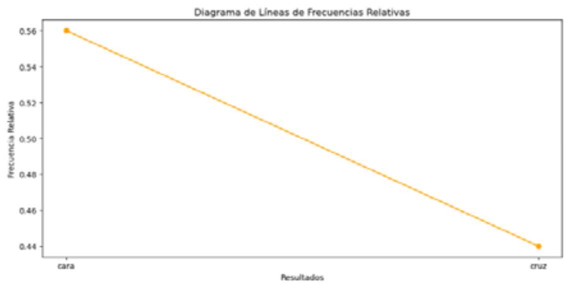


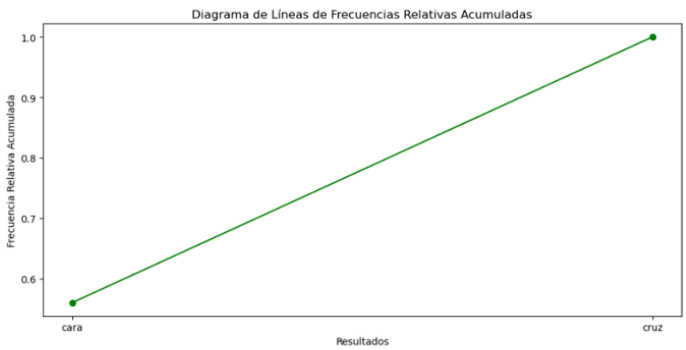




22. Dibuja los diagramas de líneas absolutas, relativas y relativas acumuladas del experimento tirar una moneda de la actividad 19.



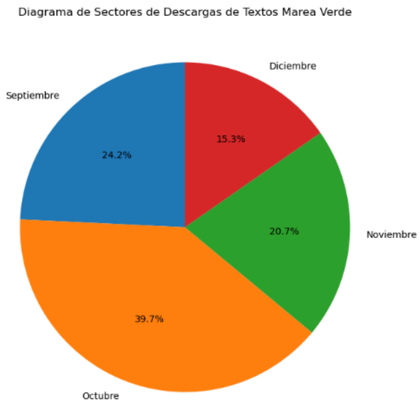




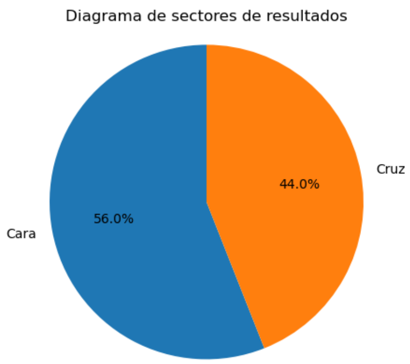
2.3. Pictograma

23. Haz un diagrama de sectores y un pictograma relativos al número de descargas de Textos Marea Verde del ejemplo visto en Pictograma.

Mes	Descargas
Septiembre	572
Octubre	937
Noviembre	489
Diciembre	361



24. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 19.



25. Dibuja un diagrama de sectores y un pictograma relativos a los datos de la actividad 20.

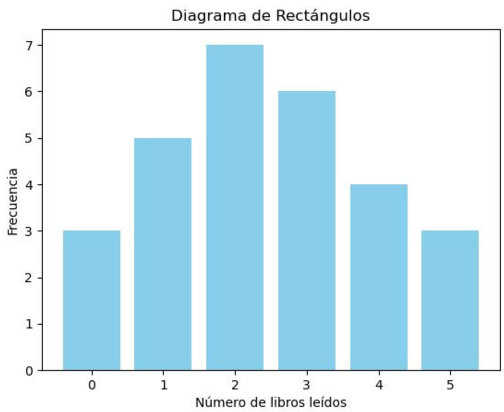
26. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de libros que leen al mes. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

Para una clase de 28 estudiantes:

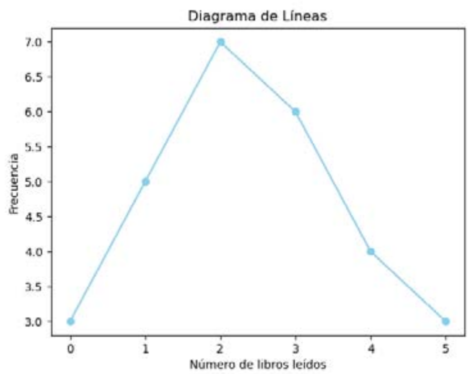
Número de libros leídos	Frecuencia
0	3
1	5
2	7
3	6
4	4
5	3

Representación de los datos:

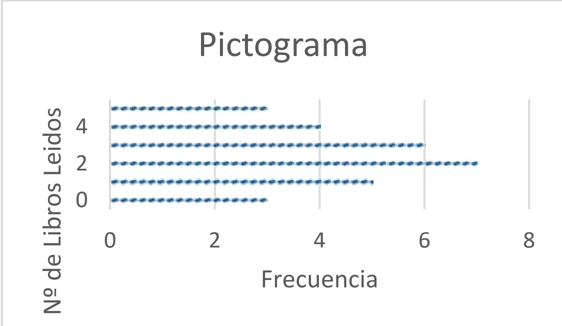
- Diagrama de Rectángulos:



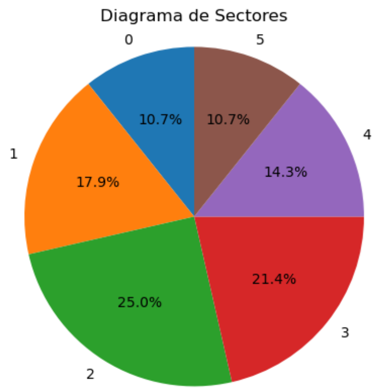
- Diagrama de Líneas:



- Pictograma:



- Diagrama de Sectores:



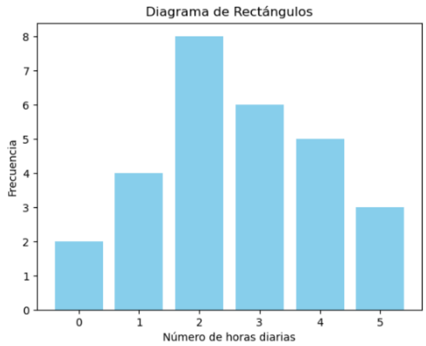
27. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase sobre el número de horas diarias que ven la televisión. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

Para una clase de 28 estudiantes:

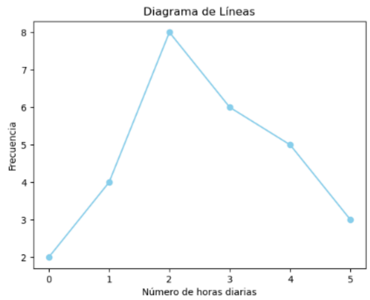
Número de horas diarias	Frecuencia
0	2
1	4
2	8
3	6
4	5
5	3

Representación de los datos:

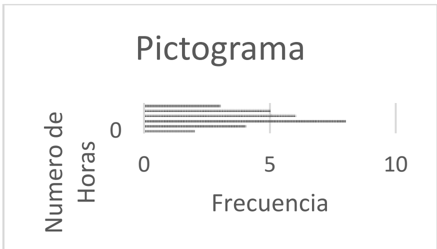
- Diagrama de Rectángulos:



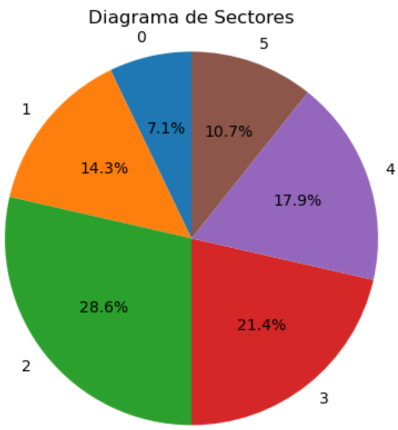
- Diagrama de Líneas:



- Pictograma:



- Diagrama de Sectores:



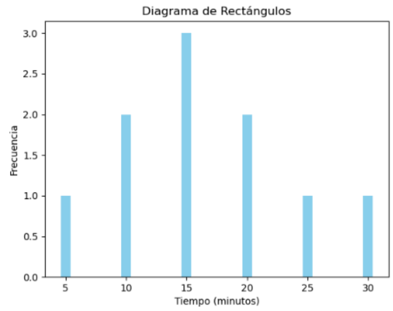
28. Haz una encuesta entre tus compañeros y compañeras de clase, pregunta al menos a 10 personas, sobre el tiempo que tardan en ir desde su casa al centro escolar. Confecciona una tabla y representa los datos en un diagrama de rectángulos, un diagrama de líneas, un pictograma y un diagrama de sectores.

Respuestas de las 10 personas:

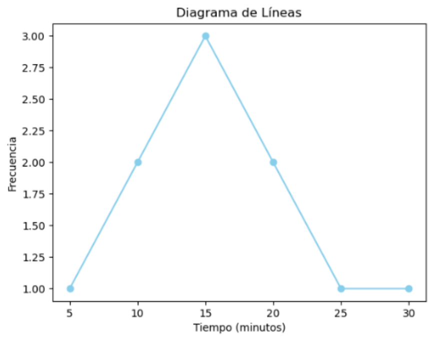
Tiempo (minutos)	Frecuencia
5	1
10	2
15	3
20	2
25	1
30	1

Representación de los datos:

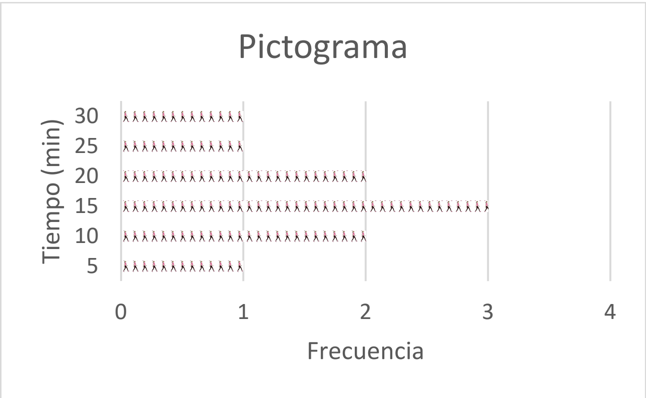
- Diagrama de Rectángulos:



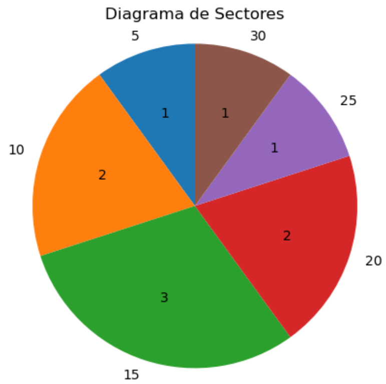
- Diagrama de Líneas:



- Pictograma:



- Diagrama de Sectores:



3. MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

3.1. Media aritmética

29. Dada la temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura media.

Para calcular la temperatura media de una serie de datos, utilizamos la fórmula de la media aritmética:

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

Donde:

$(\bar{T})$ es la temperatura media.

(n) es el número total de datos (en este caso, el número de meses).

(T_i) es la temperatura en el mes (i).

Aplicando los valores proporcionados:

$$\bar{T} = (-1+3+8+9+11+13+20+25+21+14+9+4)/12$$

$$\bar{T} = 136 / 12 \qquad \bar{T} = 11.33°$$

30. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

Calcula la media y comprueba que es 3.56.

Para calcular la media de una distribución de frecuencias absolutas, utilizamos la fórmula de la media ponderada:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Donde:

- $(\bar{x})$ es la media.
- (x_i) son los valores posibles (en este caso, los resultados del dado).
- (f_i) son las frecuencias absolutas de cada valor.
- (n) es el número total de valores distintos.

Aplicando los valores proporcionados:

$$\bar{x} = (19 + 28 + 37 + 48 + 58 + 610) / (9 + 8 + 7 + 8 + 8 + 10)$$

$$\bar{x} = (9 + 16 + 21 + 32 + 40 + 60) / 50$$

$$\bar{x} = 178 / 50 \qquad \bar{x} = 3.56$$

La media calculada es 3.56, por lo que se comprueba que es correcta.

31. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 100 veces y obtenemos la siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

a) Calcula la media.

La media se calcula utilizando la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum(xi \cdot fi)}{\sum f_i}$$

Para los datos proporcionados:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 16 + 7 \cdot 20 + 8 \cdot 15 + 9 \cdot 8 + 10 \cdot 7 + 11 \cdot 6 + 12 \cdot 4}{3 + 6 + 7 + 8 + 16 + 20 + 15 + 8 + 7 + 6 + 4} = 7.04$$

b) Repite ahora tú los lanzamientos, ahora sólo 20, y calcula de nuevo la media.

Haciendo 20 nuevos lanzamientos y calculado la nueva media:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	7	4	8	18	10	9	5	9	19	18	19

$$\bar{x'} = \frac{\sum(xi \cdot fi)}{\sum fi}$$

$$\bar{x}' = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 18 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 9 + 10 \cdot 19 + 11 \cdot 18 + 12 \cdot 19}{7 + 4 + 8 + 18 + 10 + 9 + 5 + 9 + 19 + 18 + 19} = 8$$

Para los nuevos datos, la nueva media es aproximadamente 8.

32. Calcula la media de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar, sabiendo que la tabla de frecuencias absolutas, con intervalos es:

Peso	35-41	41-47	47-53	53-59	59-65	65-71	71-77
Estudiantes	1	10	12	9	5	1	2

La media de los pesos de los 40 estudiantes utilizando la tabla de frecuencias absolutas proporcionada.

Cálculo de la media

Para calcular la media, primero necesitamos encontrar el punto medio de cada intervalo. Luego, utilizamos la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum(xi \cdot fi)}{\sum f_i}$$

Paso 1: Calcular el punto medio de cada intervalo

35-41: $\frac{35+41}{2} = 38$, 41-47: $\frac{41+47}{2} = 44$, 47-53: $\frac{47+53}{2} = 50$

53-59: $\frac{53+59}{2} = 56$, 59-65: $\frac{59+65}{2} = 62$, 65-71: $\frac{65+71}{2} = 68$, 71-77: $\frac{71+77}{2} = 74$

Paso 2: Calcular el numerador

$$\sum(xi \cdot fi) = 38 \cdot 1 + 44 \cdot 10 + 50 \cdot 12 + 56 \cdot 9 + 62 \cdot 5 + 68 \cdot 1 + 74 \cdot 2 =$$
$$= 38 + 440 + 600 + 504 + 310 + 68 + 148 = 2108$$

Paso 3: Calcular el denominador

$$\sum f_i = 1 + 10 + 12 + 9 + 5 + 1 + 2 = 40$$

Paso 4: Calcular la media

$$\bar{x} = \frac{2108}{40} = 52.7$$

Por lo tanto, la media de los pesos de los estudiantes es 52.7.

3.2. Mediana

33. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

- Media: $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+7+9+9+1000}{8} = 129.875$
- Mediana: Mediana $= \frac{5+7}{2} = 6.0$
- Moda: Moda $= 9$

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

- Media: $\bar{x} = \frac{2+3+4+5+7+9+9+10}{8} = 6.125$

- Mediana: $\text{Mediana} = \frac{5+7}{2} = 6.0$
- Moda: $\text{Moda} = 9$

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

- Media: $\bar{x} = \frac{0+0+4+5+7+9+9+1000+2000}{9} = 448.222$
- Mediana: $\text{Mediana} = 7.0$
- Moda: $\text{Moda} = 9$

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos.

- En la distribución a), el valor extremo (1000) afecta significativamente la media (129.875), pero no afecta tanto la mediana (6.0) ni la moda (9).
- En la distribución b), no hay valores extremos y la media (6.125), mediana (6.0) y moda (9) son más representativas de los datos.
- En la distribución c), los valores extremos (1000 y 2000) afectan significativamente la media (448.222), pero no afectan tanto la mediana (7.0) ni la moda (9).

3.3. Medidas de dispersión

34. Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

- **Varianza (σ^2): $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N}$**
- **Desviación Típica (σ): $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N}}$**

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

Media: $\bar{x} = 129.875$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{(2-129.875)^2+(3-129.875)^2+\cdots+(1000-129.875)^2}{8} = 121{,}036.859375$

Desviación Típica: $\sigma = \sqrt{121{,}036.859375} = 347.905$

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

Media: $\bar{x} = 6.125$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{(2-6.125)^2+(3-6.125)^2+\cdots+(10-6.125)^2}{8} = 8.984375$

Desviación Típica: $\sigma = \sqrt{8.984375} = 2.998$

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Media: $\bar{x} = 448.222$

Varianza: $\sigma^2 = \frac{(0-448.222)^2+(0-448.222)^2+\cdots+(2000-448.222)^2}{9} = 555{,}061.7283950617$

Desviación Típica: $\sigma = \sqrt{555{,}061.7283950617} = 745.02$

35. Dada la temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la media, la varianza y la desviación típica de los datos siguientes:

Calculamos la media, la varianza y la desviación típica de las temperaturas proporcionadas.

Cálculos

- Media

La media se calcula utilizando la fórmula:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Para los datos proporcionados:

$$\bar{x} = \frac{-1+3+8+9+11+13+20+25+21+14+9+4}{12} = 11.33$$

- Varianza

La varianza se calcula utilizando la fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Para los datos proporcionados:

$$\sigma^2 = 55.22$$

- Desviación Típica

La desviación típica se calcula utilizando la fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

Para los datos proporcionados:

$$\sigma = 7.43$$

Resultados

- Media: 11.33
- Varianza: 55.22
- Desviación Típica: 7.43

36. Se ha lanzado un dado 50 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	9	8	7	8	8	10

La media es 3.56. Calcula la varianza y la desviación típica.

Calculamos la varianza y la desviación típica de los lanzamientos del dado.

Cálculos

- Varianza

La varianza se calcula utilizando la fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum fi\,(xi - \bar{x})^2}{\sum f_i}$$

Para los datos proporcionados:

$$\sigma^2 = \frac{9(1-3.56)^2 + 8(2-3.56)^2 + \ldots + 8(5-3.56)^2 + 10(6-3.56)^2}{50} = 3.1664$$

- Desviación Típica

La desviación típica se calcula utilizando la fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Para los datos proporcionados:

$$\sigma = \sqrt{3.1664} = 1.779$$

Resultados

- Varianza: 3.1664
- Desviación Típica: 1.779

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EL AZAR Y LA PROBABILIDAD

1. Una urna que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, sacamos una bola, anotamos el número y devolvemos la bola a la urna. Repetimos el experimento 1 000 veces y se han obtenido los resultados indicados en la tabla:

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia absoluta	79	102			93	98	104	77		
Frecuencia relativa			0.12	0.13					0.1	
Frecuencia absoluta acumulada	79	181								
Frecuencia relativa acumulada										1

a) ¿Cuál es la frecuencia absoluta de 9?

La suma total de las frecuencias absolutas debe ser igual al número de experimentos (1000). Calculamos las frecuencias faltantes usando las frecuencias relativas dadas:

- Frecuencia absoluta de 2:

$$0.12 \cdot 1000 = 120$$

- Frecuencia absoluta de 3:

$$0.13 \cdot 1000 = 130$$

- Frecuencia absoluta de 8:

$$0.1 \cdot 1000 = 100$$

Suma de frecuencias conocidas:

$$79 + 102 + 93 + 98 + 104 + 77 = 553$$

Suma de frecuencias faltantes (2, 3, 8, 9):

$$1000 - 553 = 447$$

Frecuencia absoluta de 9:

$$447 - (120 + 130 + 100) = 97$$

b) ¿Cuál es la frecuencia absoluta acumulada de 2?

Calculamos acumulando las frecuencias absolutas hasta el resultado 2:

$$79 + 102 + 120 = 301$$

c) ¿Cuál es la frecuencia relativa acumulada de 1?

Frecuencia absoluta acumulada hasta 1:

$$79 + 102 = 181$$

Frecuencia relativa acumulada:

$$\frac{181}{1000} = 0.181$$

d) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Resultado	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia Absoluta	79	102	120	130	93	98	104	77	100	97
Frecuencia Relativa	0.079	0.102	0.12	0.13	0.093	0.098	0.104	0.077	0.1	0.097
Frecuencia Absoluta Acumulada	79	181	301	431	524	622	726	803	903	1000
Frecuencia Relativa Acumulada	0.079	0.181	0.301	0.431	0.524	0.622	0.726	0.803	0.903	1

2. Clasifica los siguientes sucesos en imposibles, poco probables, posibles, muy probables y seguros:

a) Tener un accidente de tráfico. Poco probable

Explicación: Aunque los accidentes ocurren, la probabilidad individual es baja si se siguen normas de seguridad.

b) Salir de paseo y cruzar alguna calle. Muy probable

Explicación: En zonas urbanas, es casi inevitable cruzar calles durante un paseo.

c) Salir de paseo y que te caiga un rayo. Imposible

Explicación: La probabilidad estadística es extremadamente baja (≈1 en 15 millones por an˜o≈1 en 15 millones por año).

d) Mañana nazca algún niño en París. Seguro

Explicación: París tiene una tasa de natalidad constante (≈20 nacimientos diarios).

e) Mañana no amanezca. Imposible

Explicación: El amanecer es un fenómeno astronómico garantizado por la rotación terrestre.

f) Mañana llueva. Posible

Explicación: Depende de factores climáticos, pero la lluvia es un evento meteorológico común.

3. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4.

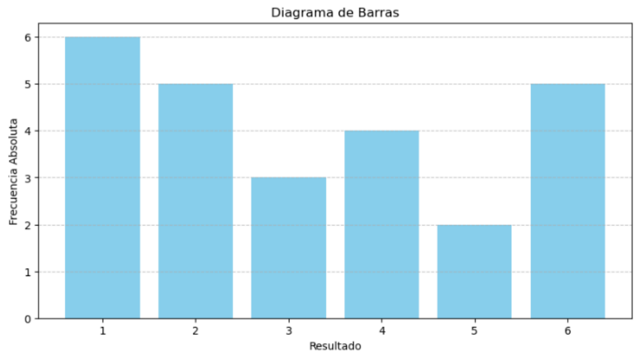
a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

Resultado	*Frecuencia Absoluta*
1	6
2	5
3	3
4	4
5	2
6	5

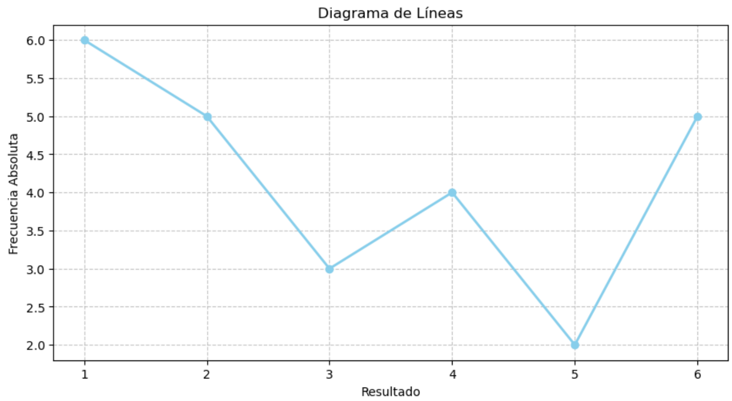
b) Escribe otra de frecuencias relativas.

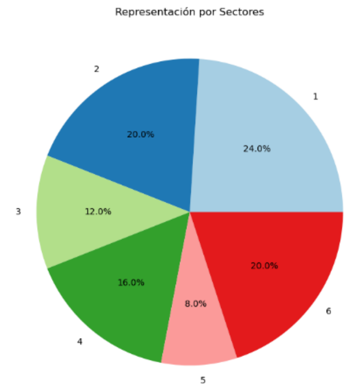
Resultado	*Frecuencia Relativa*
1	0.24
2	0.20
3	0.12
4	0.16
5	0.08
6	0.20

c) Dibuja un diagrama de rectángulos.



d) Dibuja un diagrama de líneas y una representación por sectores.





4. La duración en minutos de unas llamadas telefónicas ha sido:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2.

Elabora una tabla de frecuencias absolutas y una tabla de frecuencias relativas.

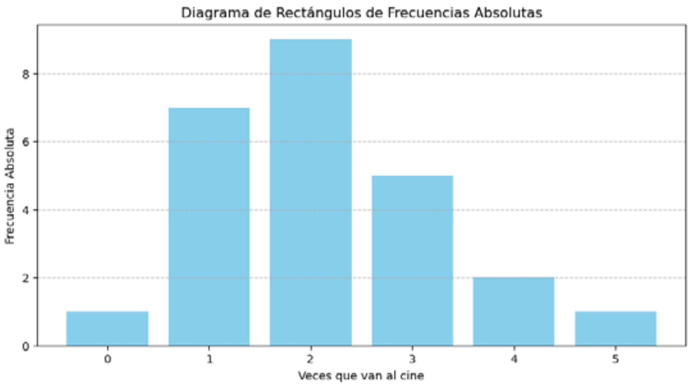
Duración (minutos)	*Frecuencia Absoluta*	*Frecuencia Relativa*
1	1	0.07
2	1	0.07
3	3	0.20
4	1	0.07
5	2	0.13
6	1	0.07
7	3	0.20
9	1	0.07
10	1	0.07
12	1	0.07

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

5. Se hace una encuesta sobre el número de veces que van unos jóvenes al mes al cine. Los datos están en la tabla:

Veces que van al cine	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	1	7	9	5	2	1

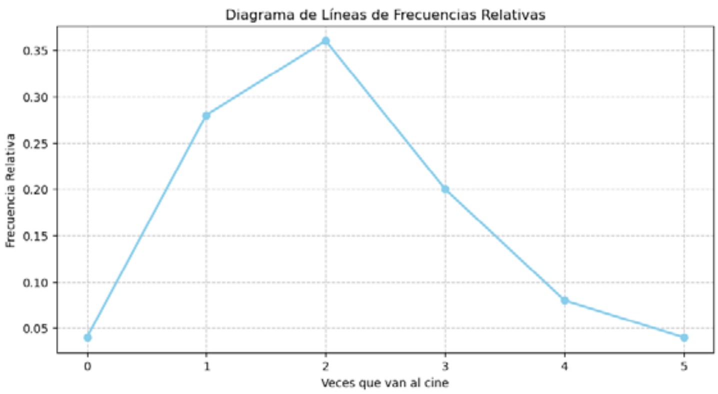
a) Representa un diagrama de rectángulos de frecuencias absolutas.



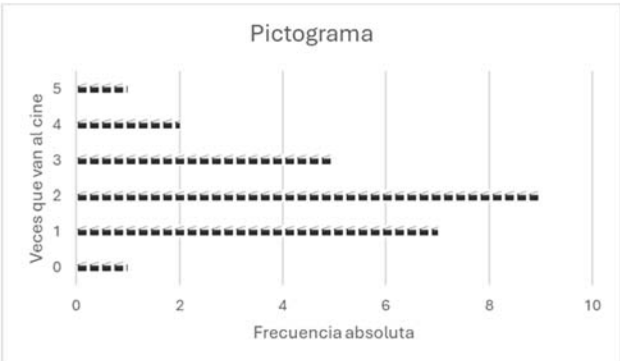
b) Representa un diagrama de líneas de frecuencias relativas.

Para ello, obtengamos las frecuencias relativas:

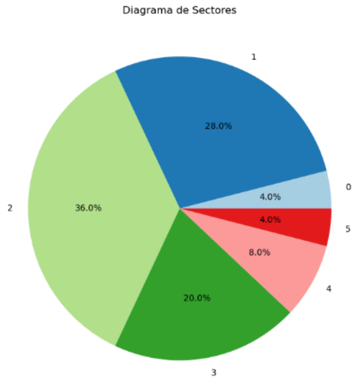
Veces que van al cine	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Frecuencia relativa	0.04	0.28	0.36	0.20	0.08	0.04



c) Haz un pictograma.



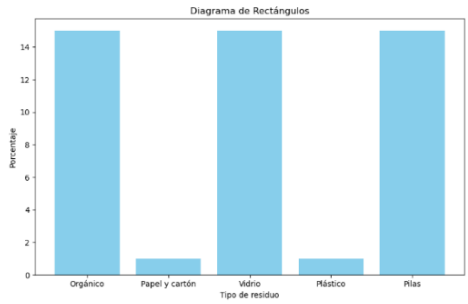
d) Representa los datos en un diagrama de sectores.



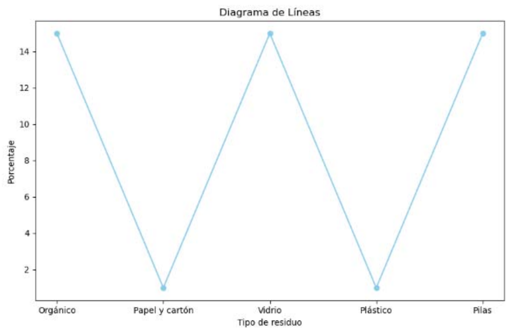
6. Se hace un estudio sobre lo que se recicla en una ciudad y se hace una tabla con el peso en porcentaje de los distintos tipos de residuos:

Tipo de residuo	Orgánico	Papel y cartón	Vidrio	Plástico	Pilas
Porcentaje	15	1	15	1	15

a) Haz un diagrama de rectángulos.

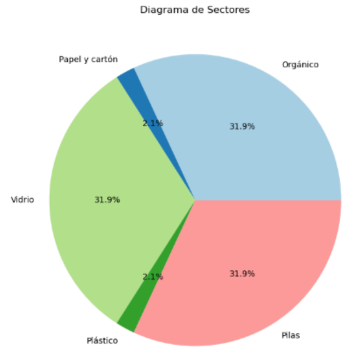


b) Representa un diagrama de líneas.



c) Haz un pictograma.

d) Representa los datos en un diagrama de sectores.



7. ¿Cuánto vale la suma de las alturas de un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas?

La suma de las alturas de un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas es igual a la suma de todas las frecuencias relativas. Dado que las frecuencias relativas son proporciones, su suma debe ser igual a 1 (o 100% si se expresa en porcentaje).

Por lo tanto, la suma de las alturas de un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas es 1.

8. Se ha medido en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

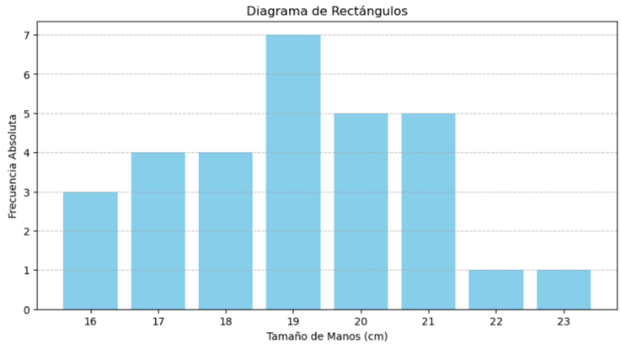
19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20, 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22,
21, 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa los datos en un diagrama de rectángulos y en un diagrama de líneas.

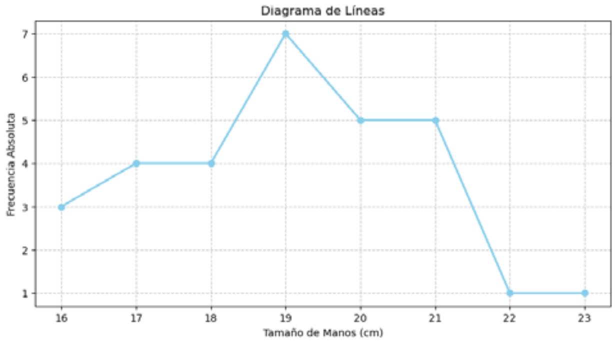
En primer lugar, realizaremos una tabla de frecuencias absolutas para ordenar los datos:

Tamaño de Manos (cm)	Frecuencia Absoluta
16	4
17	5
18	4
19	7
20	5
21	5
22	1
23	1

- Diagrama de Rectángulos



- Diagrama de Líneas



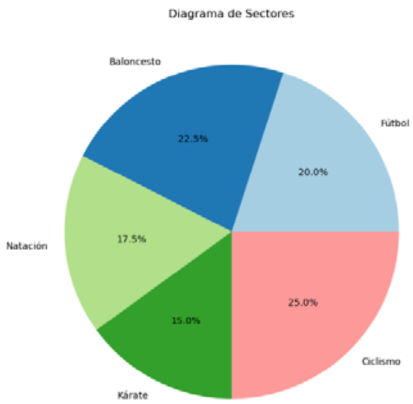
9. En una clase se ha preguntado por las preferencias deportivas y se ha obtenido:

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Natación	Kárate	Ciclismo
Frecuencia absoluta	**8**	**9**	**7**	**6**	**10**

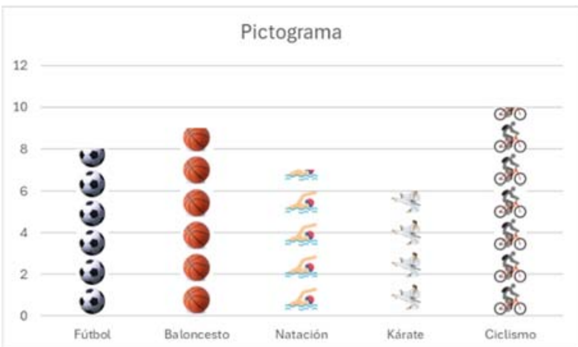
a) Copia la tabla en tu cuaderno y haz una tabla de frecuencias relativas.

Deporte	Frecuencia Relativa
Fútbol	0.20
Baloncesto	0.23
Natación	0.17
Kárate	0.15
Ciclismo	0.25

b) Representa estos datos en un diagrama de sectores.



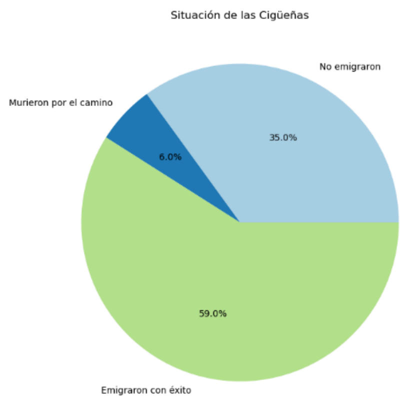
c) Haz un pictograma.



10. El 35 % de las cigüeñas no ha emigrado este año a África y el 6 % murió por el camino. Dibuja un **diagrama por sectores que describa esta situación.**

Tenemos tres categorías de cigüeñas

- Las que no emigraron (35%).
- Las que murieron por el camino (6%).
- Las que emigraron con éxito. Para calcular este porcentaje, restamos los otros dos porcentajes del 100%: $100\% - 35\% - 6\% = 59\%$



MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

11. Javier ha tirado un dado 10 veces y ha obtenido los siguientes resultados: 6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4. Calcula la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{6+3+1+4+2+2+1+4+3+4}{10} \quad , \quad \bar{x} = \frac{30}{10} \quad , \quad \bar{x} = 3.0$$

12. Raquel ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Lengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{7+5+6+4+7+10+7}{7} \quad , \quad \bar{x} = \frac{46}{7} \quad , \quad \bar{x} = 6.57$$

13. Se ha medido el tamaño de la mano de 10 alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente: 19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21. Calcula la media aritmética.

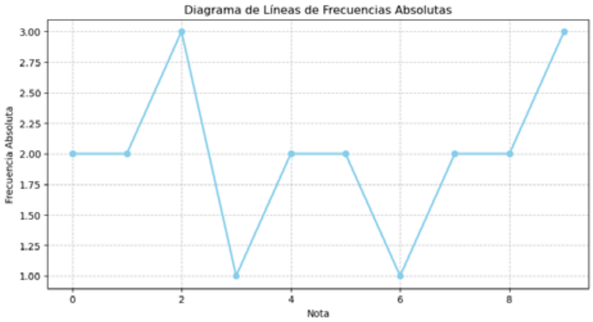
$$\bar{x} = \frac{19+18+21+21+18+17+18+17+19+21}{10} \quad , \quad \bar{x} = \frac{189}{10} \quad , \quad \bar{x} = 18.9$$

14. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 20 estudiantes. Las notas son: 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1.

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia Absoluta	2	2	3	1	2	2	1	2	2	3

b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.



c) Calcula la media.

$$\bar{x} = \frac{2+8+9+5+8+2+7+1+6+3+7+2+4+9+4+9+5+1}{20} = 4.6$$

15. Los jugadores de un equipo de baloncesto tienen las siguientes edades: 13, 12, 14, 11, 12, 12. Calcula la media.

$$\bar{x} = \frac{13+12+14+11+12+12}{6} \quad , \quad \bar{x} = \frac{74}{6} \quad , \quad \bar{x} = 12.33$$

16. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántos hijos tienen. Los resultados son: 0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1. Calcula la media.

$$\bar{x} = \frac{0+1+0+2+1+4+3+2+1+1}{10} \quad , \quad \bar{x} = \frac{15}{10} \quad , \quad \bar{x} = 1.5$$

17. Pepa ha tirado un dado 25 veces y ha obtenido los siguientes resultados: 1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4.

a) Calcula la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{1+2+5+6+3+1+4+5+6+1+3+1+2+2+1+6+2+2+4+3+4+6+6+1+4}{25} \quad , \quad \bar{x} = \frac{81}{25} \quad , \quad \bar{x} = 3.24$$

b) Calcula la mediana.

Ordenamos los valores en orden ascendente:

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6$$

Ya que tenemos 25 valores, la mediana se encontrará en la posición 13, luego:

$$Mediana = 3$$

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

La moda corresponderá con el valor que más se repita, en este caso:

$$Moda = 1$$

Es única ya que el numero 1 es el que más veces se repite, 6 veces.

18. Sara ha tenido las siguientes notas en sus exámenes de Matemáticas: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9.

a) Calcula la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{9+7+8+6+9+10+9}{7} \quad , \quad \bar{x} = \frac{58}{7} \quad , \quad \bar{x} = 8.29$$

b) Calcula la mediana

$$\text{Mediana} = 9$$

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

$$\text{Moda} = 9$$

La moda es única en este caso, ya que el número 9 es el que más se repite en las notas de Sara.

19. Se ha medido en una clase el tamaño de las manos de cada uno de los alumnos y alumnas, y el resultado en centímetros ha sido el siguiente:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20, 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21, 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19.

a) Calcula la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{19+18+20+19+18+21+19+\ldots+17+19+21+20+16+19}{30} \quad , \quad \bar{x} = \frac{571}{30} \quad , \quad \bar{x} = 19.03$$

b) Calcula la mediana

16, ………….19, 19, …………….., 23   19+19/2 = 19 $\text{Mediana} = 19.0$

c) ¿Cuál es la moda? ¿Es única?

$$\text{Moda } = 19$$

La moda es única en este caso, ya que el número 19 es el que más se repite en los tamaños de las manos.

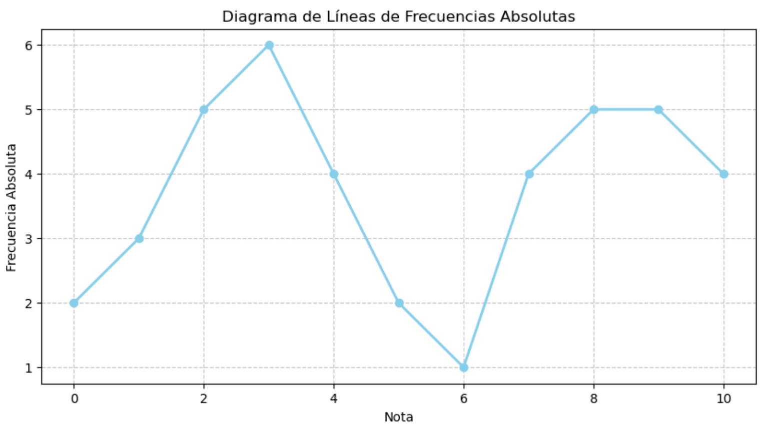
20. Nos interesa conocer la distribución de notas obtenidas por 40 estudiantes. Las notas son:

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,
3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

a) Escribe en tu cuaderno una tabla de frecuencias absolutas.

Nota	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia Absoluta	2	3	5	6	4	2	1	4	5	5	4

b) Haz un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.



c) Calcula la media.

$$\bar{x} = \frac{4+1+7+10+3+2+\ldots+3+9+7+8+10}{41} \quad , \quad \bar{x} = \frac{216}{41} \quad , \quad \bar{x} = 5.27$$

d) Calcula la mediana.

$$\text{Mediana} = 5$$

e) Calcula la moda.

$$\text{Moda} = 3$$

21. Hacemos una encuesta preguntando a 10 familias cuántas mascotas tienen. Los resultados son:

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1

a) Calcula la media.

$$\bar{x} = \frac{0+1+0+2+1+4+3+0+0+1}{10} \quad , \quad \bar{x} = \frac{12}{10} \quad , \quad \bar{x} = 1.2$$

b) Calcula la mediana.

$$\text{Mediana} = 1.0$$

c) Calcula la moda.

$$Moda = 0$$

22. Los jugadores de un equipo de balonmano tienen las siguientes edades:

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

a) Calcula la media.

$$\bar{x} = \frac{12+14+13+12+15+11+12+12+13+14+11+12+12}{13} \quad , \quad \bar{x} = \frac{163}{13} \quad , \quad \bar{x} = 12.54$$

b) Calcula la mediana.

$$\text{Mediana} = 12$$

c) Calcula la moda.

$$\text{Moda} = 12$$

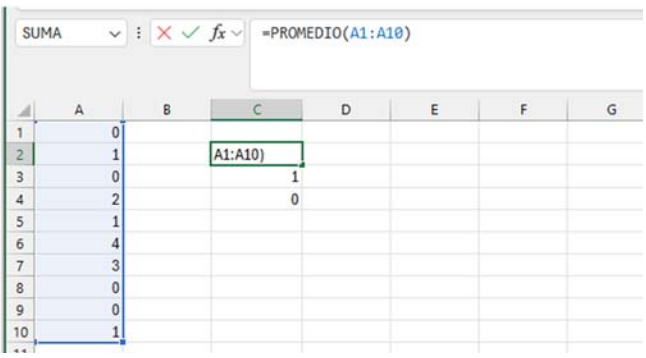
ORDENADOR

23. Introduce los datos de la encuesta sobre el número de mascotas en el ordenador. Calcula la media, la mediana y la moda de los datos.

Los resultados son:

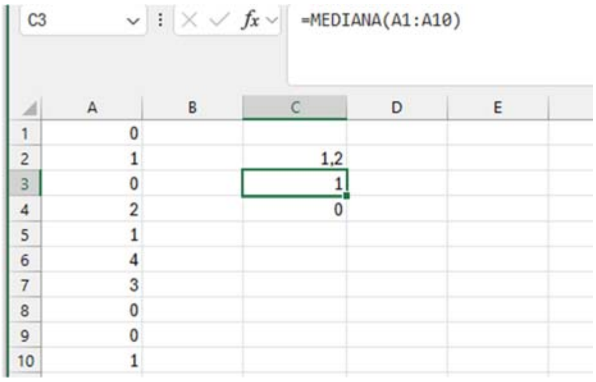
$$0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1$$

- Introducimos los datos en una hoja de Excel.
- Para la media:



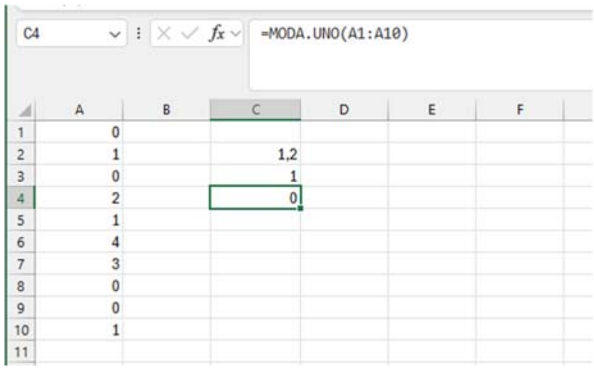
Nos da como resultado 1.2

- Para la mediana:



Nos da como resultado 1

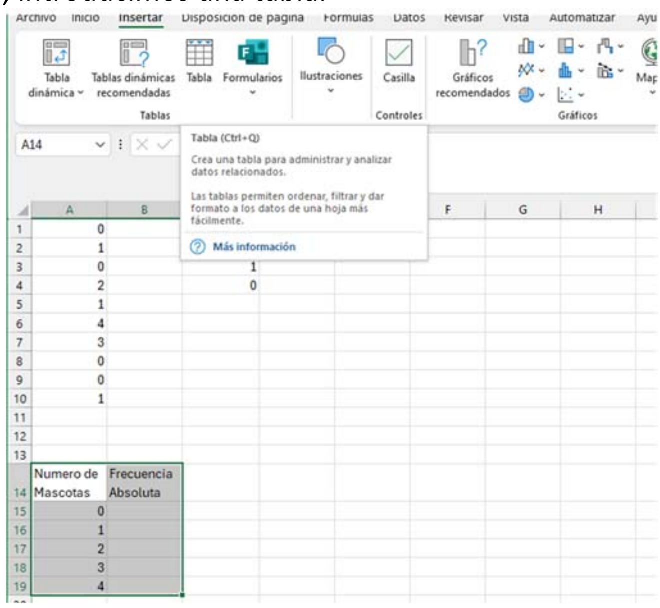
- Para la Moda:

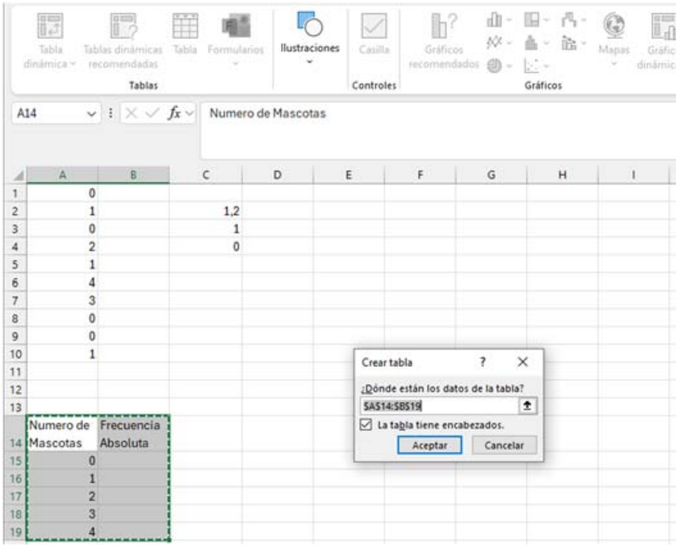


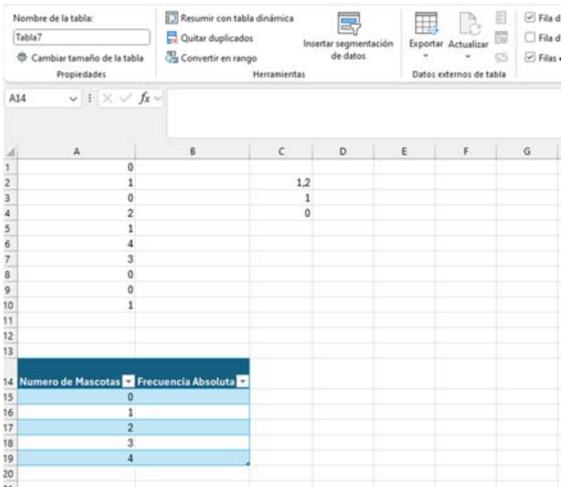
Nos da como resultado 0

24. Organiza los datos en una tabla calculando las frecuencias absolutas de 0, 1, 2, 3 y 4. Introduce esta tabla en el ordenador y haz una representación de barras, un diagrama de líneas y un diagrama de sectores.

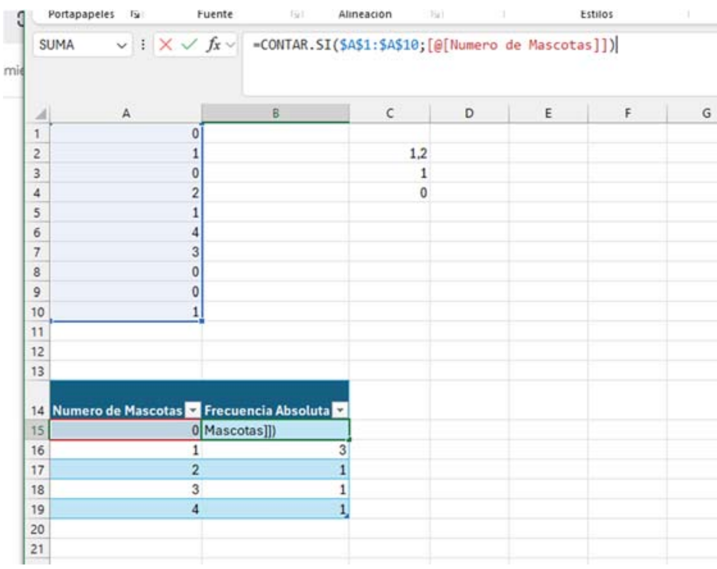
En el mismo Excel, introducimos una tabla.



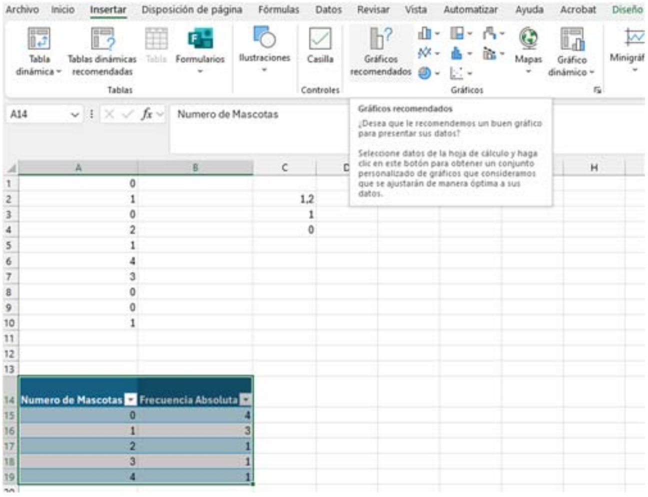


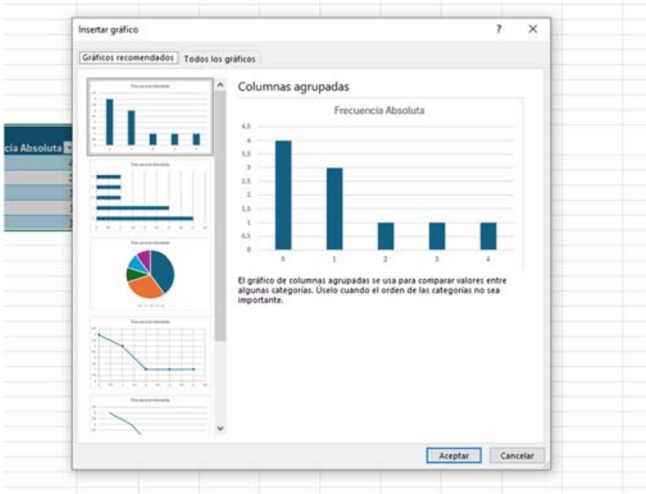


Para contar los datos automáticamente podemos introducir el comando CONTAR.SI, de esta forma seleccionando los datos anteriores, fijándolos con la tecla “F4”, y referenciando la columna como condición, la tabla se rellenará.

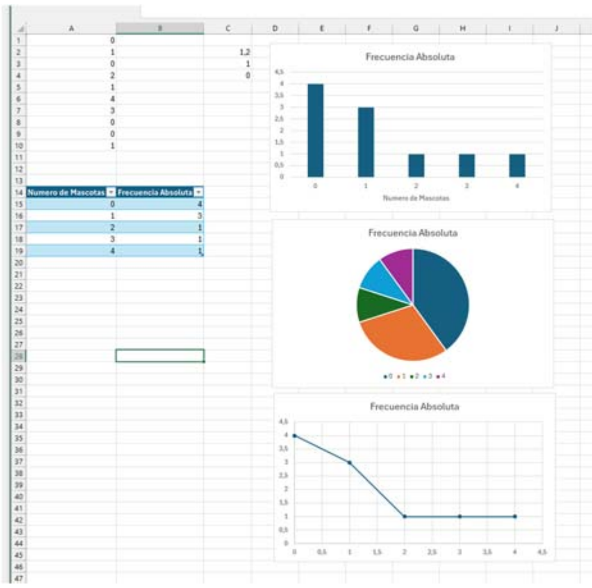


Con la tabla hecha. Podremos hacer los diagramas de forma muy sencilla:
Seleccionamos toda la tabla y nos dirigimos a la pestaña INSERTAR>GRAFICOS





Seleccionamos el grafico que queramos y lo añadimos:



25. Utiliza el ordenador para comprobar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores.

[Seguir los pasos de los ejercicios 23 y 24]

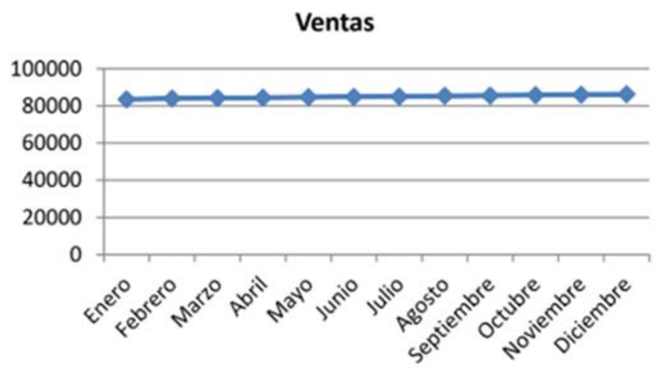
26. Realiza una encuesta en tu clase y lleva los resultados a un ordenador para hacer un informe. La encuesta podría ser, por ejemplo, si le gusta o no una determinada serie de televisión, o un programa; o el número de días de la semana que hacen algún deporte, el tipo de música que les gusta; o… Piensa sobre qué podrías preguntar.

[Respuesta libre]

PROBLEMAS

27. El Director Comercial de una empresa va a ser evaluado. Para ello debe dar cuenta de los resultados obtenidos. Quiere quedar bien, pues eso le puede suponer un aumento de sueldo. Se han vendido las siguientes cantidades:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Ventas	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316



El estadístico de la empresa le ha entregado la siguiente gráfica: No le ha gustado nada, y para la presentación él se ha confeccionado el siguiente gráfico: Ambos gráficos son correctos. Escribe un informe sobre cómo pueden los distintos gráficos dar impresiones tan diferentes.

Los dos gráficos presentados, aunque técnicamente correctos, generan percepciones opuestas sobre el desempeño de ventas debido a diferencias estratégicas en su diseño. A continuación, se detallan los factores clave:

- Escala del Eje Y:
  - Gráfico del Estadístico: Utiliza una escala amplia (0–100,000), lo que minimiza visualmente las fluctuaciones mensuales. Por ejemplo, las ventas de Enero (83,451) y Diciembre (86,316) parecen cercanas en este rango, dando la impresión de un crecimiento modesto. Además, si el dato de Noviembre (859,967) es correcto, este gráfico lo oculta por completo al superar el límite máximo del eje.
  - Gráfico del Director Comercial: Emplea una escala ajustada (83,000–86,500), amplificando las diferencias entre meses. Una variación de 3,000 unidades parece drástica en este contexto, resaltando un aparente crecimiento constante y significativo.

- Enfoque en la Tendencia vs. Detalles:
  - El primer gráfico, al incluir un rango amplio, prioriza una visión general, pero diluye la tendencia mensual.
  - El segundo gráfico enfatiza las variaciones menores, creando una narrativa de mejora continua, incluso si los cambios son marginales.

La diferencia clave radica en la manipulación de la escala del eje Y. El Director Comercial optó por una representación que maximiza la percepción de crecimiento, mientras que el gráfico original ofrece una visión más neutral. Ambos son técnicamente correctos, pero demuestran cómo la selección de parámetros visuales puede alterar la interpretación de los datos, subrayando la importancia de la transparencia en la presentación de información.

28. Tira una moneda 100 veces y anota los resultados obtenidos: C, C, X, …. Construye una nueva lista anotando, cada vez que haya salido cara, el resultado siguiente: C, X, …Confecciona luego dos tablas: una de frecuencias absolutas y otra de frecuencias relativas. Representa los resultados en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.

Tiramos una moneda 100 veces y obtenemos lo siguiente:

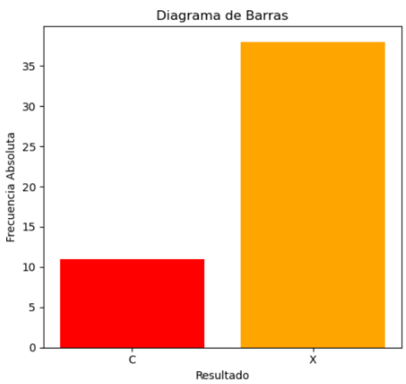
C, X, C, C, X, C, X, C, X, X, C, C, X, X, C, X, C, X, C, X, C, C, X, C, X, X, C, X, C, C, X, X, C, C, X, X, C, X, C, X, C, X, C, X, X, C, X, C, C, X, X, C, X, C, X, C, X, X, C, X, C, X, C, X, X, C, C, X, X, C, C, X, C, X, C, X, C, X, X, C, C, X, C, X, C, X, X, C, C, X, C, X, X, C, X, C, X, C, C, X, C, X.

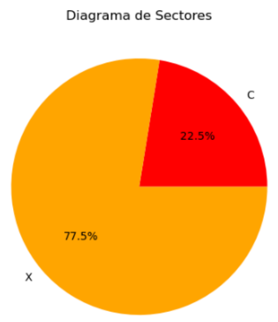
Por lo que, la nueva lista será:

X, C, X, X, X, C, X, X, X, X, C, X, X, X, C, X, C, X, X, X, X, X, X, C, X, X, X, X, X, X, X, C, X, C, X, X, X, C, X, X, X, C, X, X, X, X, C, X, X.

De esta forma:

Resultado	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Relativa
C	11	$11/49 \approx 0.2245$
X	38	$38/49 \approx 0.7755$





29. Se conoce el volumen semanal de residuos sólidos recogidos en m³ durante las 52 semanas de un año, en un municipio pequeño:

25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7, 25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2, 21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6, 26.4.

Calcula la media, la moda, la mediana, la varianza y la desviación típica.

[Errata: hay 53 datos he eliminado el último para tener las medidas de las 52 semanas que dice el enunciado]

Sean los datos,

$$25.5, 27.1, 31.8, 34.2, 38.9, 21.3, 28.7, 33.2, 36.5, 39.6, 25.2, 24.7, 23.2,$$
$$23.3, 22.2, 26.4, 26.7, 29.6, 31.3, 30.5, 28.3, 29.1, 26.7, 25.2, 24.5, 23.7,$$
$$25.4, 27.2, 31.7, 34.5, 38.4, 21.2, 28.1, 33.7, 36.8, 39.9, 31.7, 34.4, 38.2,$$
$$21.9, 28.1, 33.5, 25.2, 24.7, 23.2, 23.3, 22.2, 26.4, 25.9, 24.1, 23.2, 23.6$$

- Media:

La media se calcula como la suma de todos los valores dividida por el número de datos:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Suma de los valores:

$$\sum x = 25.5 + 27.1 + 31.8 + \cdots + 26.4 = 1483.9$$

Número de datos:

$$n = 52$$

Media:

$$\bar{x} = \frac{1483.9}{52} \approx 28.54$$

- Moda:

La moda es el valor que aparece con mayor frecuencia. En este caso:

$$23.2\ aparece\ 3\ veces.$$
$$25.2\ aparece\ 3\ veces.$$

Por lo tanto, la moda es:

$$\text{Moda} = 23.2 \quad \text{y} \quad 25.2 \qquad \text{(la distribución es bimodal)}$$

- Mediana:

La mediana es el valor central cuando los datos están ordenados. Para $(n = 52)$ (par), la mediana es el promedio de los valores en las posiciones $(26)\ y\ (27)$:

$$\text{Datos ordenados: } [21.2, 21.3, 21.9, \ldots, 39.6, 39.9]$$

Valor en la posición 26: (26.7)
Valor en la posición 27: (27.1)
Mediana:

$$\text{Mediana} = \frac{26.7 + 27.1}{2} = 26.9$$

- Varianza (σ^2):

La varianza se calcula como:

$$\sigma^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{\bar{x}}^2\right)$$

Suma de los cuadrados de los valores:

$$\sum x^2 = 25.5^2 + 27.1^2 + 31.8^2 + \cdots + 26.4^2 = 43808.93$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{43808.93}{52} - 28.54^2 \approx 28.70$$

- Desviación típica (σ):

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza:

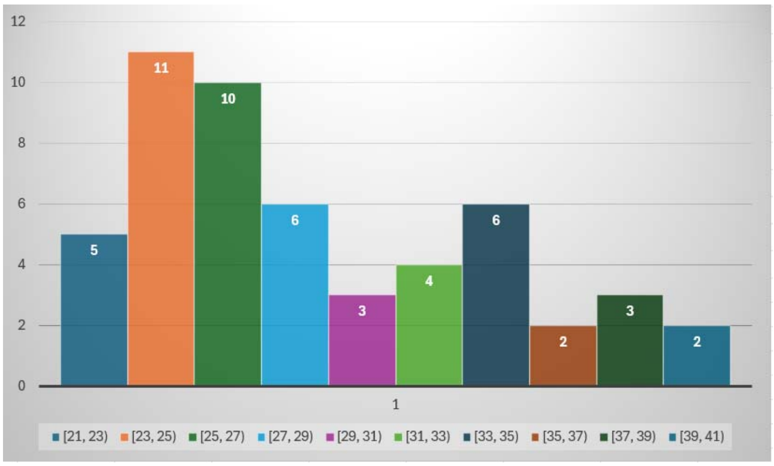
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{28.70} \approx 5.36$$

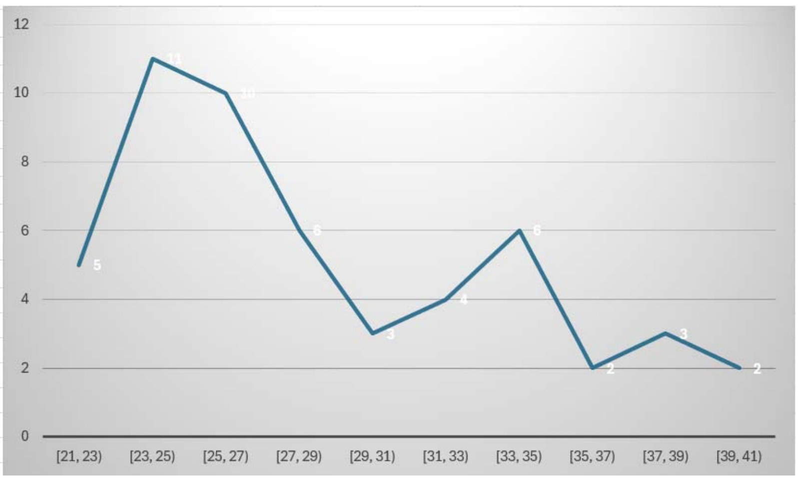
30. Con los datos del problema anterior:

a) Representa los datos en una tabla tomando intervalos de longitud dos m³: (21, 23), (23, 25), … (39, 41).

Intervalo (m³)	Frecuencia Absoluta
[21, 23)	5
[23, 25)	11
[25, 27)	10
[27, 29)	6
[29, 31)	3
[31, 33)	4
[33, 35)	6
[35, 37)	2
[37, 39)	3
[39, 41)	2

b) Dibuja un diagrama de rectángulos y un diagrama de líneas de frecuencias absolutas.





c) ¿Cuántas familias tienen un volumen de basuras mayor que 31 m³?

Suma de frecuencias desde el intervalo [31, 33) hasta [39, 41):

$$4 + 6 + 2 + 3 + 2 = 17$$

Luego, 17 familias tienen un volumen mayor de 31 m^3.

d) ¿Qué porcentaje de familias tienen un volumen de basuras menor que 35 m³?

Suma de frecuencias hasta el intervalo [33, 35):

$$5 + 11 + 10 + 6 + 3 + 4 + 6 = 45$$

Cálculo del porcentaje:

$$\frac{45}{52} \cdot 100 \approx 86.54\%$$

Luego, el 86.54% de las familias tienen un volumen menor de $35m^3$.

31. Busca en revistas o periódicos dos gráficas estadísticas, recórtalas y pégalas en tu cuaderno. En muchas ocasiones estas gráficas tienen errores. Obsérvalas detenidamente y comenta las siguientes cuestiones:

a) ¿Está clara la variable a la que se refiere? ¿Y las frecuencias?

b) ¿Son correctas las unidades? ¿Pueden mejorarse?

c) Comenta las gráficas.

[Respuesta libre]

32. La media de seis números es 5. Se añaden dos números más, pero la media sigue siendo 5. ¿Cuánto suman estos dos números?

Suma inicial de los seis números:

$$\text{Media} = \frac{\text{Suma}}{\text{Cantidad}} \Longrightarrow \text{Suma} = \text{Media} \cdot \text{Cantidad} = 5 \cdot 6 = 30$$

Suma total después de añadir dos números:

$$\text{Nueva cantidad} = 6 + 2 = 8 \Longrightarrow \text{Nueva suma} = 5 \cdot 8 = 40$$

Suma de los dos números añadidos:

$$\text{Suma de los dos números} = 40 - 30 = 10$$

AUTOEVALUACIÓN

1. **Indica la respuesta correcta:**
   a) **La frecuencia relativa se obtiene dividiendo por 100 la frecuencia absoluta.**
   b) **La frecuencia relativa se obtiene sumando todos los valores anteriores.**
   c) **La frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos.**
   d) **Frecuencia relativa es lo mismo que probabilidad.**

La frecuencia relativa se calcula dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos, no por 100.
Solución: c) La frecuencia relativa se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta por el total de experimentos.

2. **Se extrae una carta de una baraja española. La probabilidad de que sea un rey es:**
   a) **1/40**
   b) **0.25**
   c) **4/40**
   d) **10/40**

En una baraja española hay 40 cartas y 4 reyes. La probabilidad es el número de reyes dividido por el total de cartas.

$$\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

Solución: c) 4/40

3. **Indica cuál es la frase que falta en la siguiente definición: En … … …. … … …. las frecuencias se representan en un círculo que se divide en sectores circulares de amplitudes proporcionales a las frecuencias.**
   a) **Diagrama de líneas**
   b) **Diagrama de rectángulos**
   c) **Pictograma**
   d) **Diagrama de sectores**

La definición corresponde a un diagrama de sectores.
Solución: d) Diagrama de sectores

4. **Si en una tabla de frecuencias a un valor le corresponde una frecuencia relativa de 0.125, al dibujar un diagrama de sectores el ángulo correspondiente es de:**
   a) **45**
   b) **30**
   c) **60**
   d) **72**

El ángulo se calcula multiplicando la frecuencia relativa por 360°.

$$0.125 \cdot 360° = 45°$$

Solución: a) 45

5. En un diagrama de rectángulos de frecuencias relativas, la suma de sus alturas es igual a:

a) 100

b) 1

c) Total de datos

d) Suma de sus bases

La suma de las frecuencias relativas siempre es igual a 1.
Solución: b) 1

6. La media de los siguientes datos 7; 0; 9.5; 2; 4.1; 3.8; es:

a) 6.3

b) 3.8

c) 4.4

d) 5.5

La media se calcula sumando todos los datos y dividiendo por el número de datos.

$$\frac{7+0+9.5+2+4.1+3.8}{6}=\frac{26.4}{6}=4.4$$

Solución: c) 4.4

7. La mediana de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 8, es:

a) 6

b) 7

c) 4

d) 5

La mediana es el valor central de los datos ordenados.
Solución: a) 6

8. La moda de los siguientes datos 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, es:

a) 6

b) 7

c) 4

d) 5

La moda es el valor que más se repite.
Solución: b) 7

9. Se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea un 2?

a) 3/4

b) 1/6

c) 2/6

d) 5/6

La probabilidad de que no sea un 2 es 1 menos la probabilidad de que sea un 2.

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

Solución: d) 5/6

10. Queremos saber los deportes que hacen los escolares de un cierto centro. Pasamos una encuesta a 20 de 2º A. Indica en este caso quién es la población y quién es una muestra:

a) Estudiantes de España y estudiantes de ese centro

b) Estudiantes de ese centro y estudiantes de 2º A

c) Estudiantes de ese centro y los 20 estudiantes de 2º A

d) Estudiantes de 2º A y los 20 estudiantes elegidos de 2º A

La población son todos los estudiantes del centro, y la muestra son los 20 estudiantes de 2º A encuestados.

Solución: c) Estudiantes de ese centro y los 20 estudiantes de 2º A