Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 1: Números reales

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Genoveva Melgar Vargas, Marta Herrera Mora, Julia Selas Ramírez, Andrea Trompeta Coello, Ana Marín García
IES ATENEA, CIUDAD REAL
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tiene una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica

a) 2/3 Periódica **b) 3/5** Exacta **c) 7/30** Periódica **d) 6/25** Exacta **e) 7/8** Exacta **f) 9/11** Periódica

2. Calcula la expresión decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba si tu deducción era correcta

a) $0.\overline{6}$ **b)** 0,6 **c)** $0,2\overline{3}$ **d)** 0,24 **e)** 0,875 **f)** $0,\overline{81}$

3. Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes:

a) 1/3 $= 0,\overline{3}$ **b) 1/9** $= 0,\overline{1}$ **c) 7/80** $= 0,0875$ **d) 2/125** $= 0,016$ **e) 49/400** $= 0,1225$ **f) 36/11** $= 3.\overline{27}$

4. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, comprueba con la calculadora que está bien:

a) 7.92835 $= \frac{792835}{100000}$ **b) 291.291835** $= \frac{291291835}{1000000}$ **c) 0.23** $= \frac{23}{100}$

5. Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:

a) 2.353535….. $= \frac{2353535-2}{999999} = \frac{2353533}{999999}$ **b) 87.2365656565….** $= \frac{863642}{9900}$ **c) 0.9999…..** $=1$

d) 26.5735735735….. $= \frac{26547}{999.}$

6. Copia en tu cuaderno la tabla adjunta y señala con una X a qué conjuntos pertenecen los siguientes números:

número	N	Z	Q	I	R
-2.01			X		X
$\sqrt[3]{-4}$				X	X
0.121212…			X		X
$\sqrt[3]{-1000}$		X			X
1.223334…				X	X
$\sqrt{-4}$					
1/2			X		X

BY NC SA

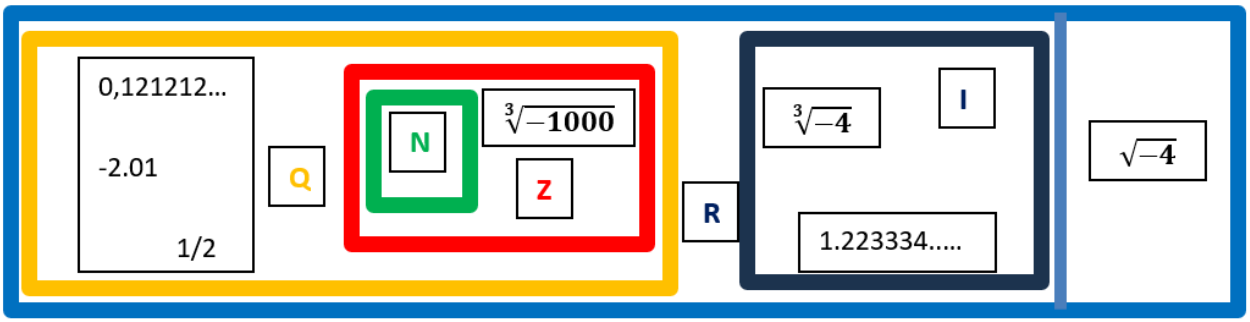
Textos Marea Verde

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

7. Copia en tu cuaderno el esquema siguiente y mete los números del ejercicio anterior en su lugar:



8. ¿Puedes demostrar que 4,99999… = 5?, ¿cuánto vale 2,5999…?

$4,\overline{9} = \frac{49-4}{9} = \frac{45}{9} = 5$

$2,5\overline{9} = \frac{259-25}{90} = \frac{234}{90} = \frac{13}{5.}$

9. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Vamos a suponer que $\sqrt[3]{7}$ es un número racional y llegar a una contradicción. Si $\sqrt[3]{7}$ es un número racional puede escribirse con una fracción p/q, que suponemos irreducible, $\sqrt[3]{7}$ = p/q. $\Rightarrow$ 7 = p^3/q^3 $\Rightarrow$ 7 q^3 = p^3, luego en la descomposición en factores primos de p^3 hay un 7, y por tanto p es múltiplo de 7 $\Rightarrow$ p = 7ª $\Rightarrow$ 7 q^3 = $7^3 \cdot a^3$
$\Rightarrow$ q^3 = $7^2 \cdot a^3$ $\Rightarrow$ q también es múltiplo de 7, que contradice que la fracción p/q sea irreducible.

10. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de 1/47?

Puede tener 47 cifras.

11. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$?, ¿te atreves a dar la razón?

$\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$=0,0000125 Tiene siete decimales porque el máximo exponente del denominador es siete

12. Haz la división 999 999:7 y después haz 1:7. ¿Será casualidad?

999 999:7= 142857 1:7=$0,\overline{142857}$

No es casualidad, ya que al redondear 999999≈ 1000000

13. Ahora divide 999 entre 37 y después 1:37, ¿es casualidad?

999:7=27 no es casualidad, ya que al redondear 999 ≈ 1000

1:37=0.027

14. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las centésimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989\ldots$ redondeo : 1,62

E.A. $|1,618033989\ldots - 1,62| = 0,00197$

E.R. = $\frac{0,00197}{1,618033989\ldots} = 0,00122$

BY NC SA

Textos Marea Verde

15.- Halla una cota del error absoluto

A) 2.1 = 0.05

B) 123= 0.5

C) 123.00= 0.005

D) 4000= 500

16.- Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 10 paquetes de azúcar de 1 Kg cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

Peso máximo= 950 g

Peso mínimo= 1050 g

Cota= 50

17.- Los números A = 5.5 y B = 12 han sido redondeados. Halla una cota del error absoluto y del error relativo

Máximo (A)= 5.549

Máximo (B)= 12.49

Mínimo (A)= 5.45

Mínimo (B)= 11.5

a) A + B= 0.65;0.03
b) A x B= 3.3; 0.05
c) B/A= 0.07; 0.03
d) A^B= EA<1.2x10^9; 0.6

18.- . ¿Cómo medir el grosor de un folio con un error inferior a 0,0001 cm con la ayuda de una regla milimetrada y la de el/la ordenanza del instituto?, hazlo.

Respuesta manipulativa.

19.- Calcula 3 números reales que estén entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y 1

Respuesta: 1.6; 1.61; 1.617

20.- . Halla 5 números racionales que estén entre √2; 1.5

Respuesta: 1.42; 1.43; 1.44; 1.45; 1.46

21.- Halla 5 números irracionales que estén entre 3.14 ; π

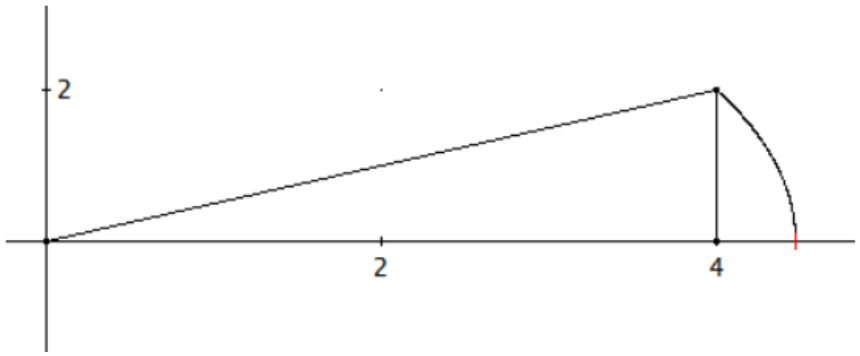
Solución abierta: $\frac{3.14+\pi}{2}=\frac{157+50\pi}{100}$, $\frac{\frac{157+50\pi}{100}+\pi}{2}=\frac{157+150\pi}{200}$, $\frac{\frac{157+150\pi}{200}+\pi}{2}=\frac{157+350\pi}{400}$,

$\frac{\frac{157+350\pi}{400}+\pi}{2}=\frac{157+750\pi}{800}$, $\frac{\frac{157+750\pi}{800}+\pi}{2}=\frac{157+1550\pi}{1600}$

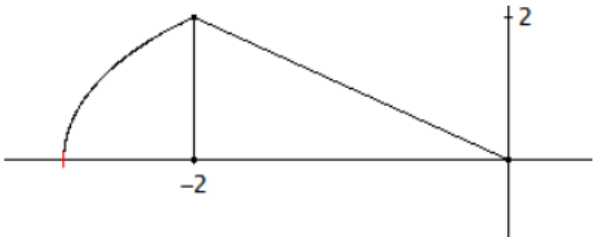
22.- Representa en la recta numérica los siguientes números: 7/6; -17/4; 2.375; -3.666666

23.- Representa en la recta numérica $\sqrt{20}$; $-\sqrt{8}$; $\sqrt{14}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

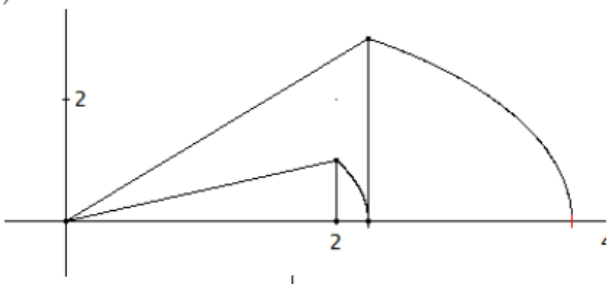
$\sqrt{20} = \sqrt{4^2 + 2^2}$



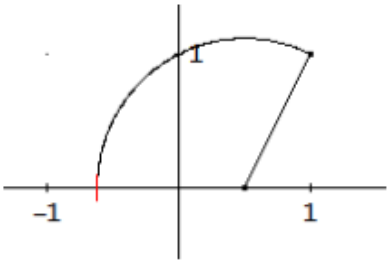
$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 + 2^2}$



$\sqrt{14} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{5})^2}$, $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$



$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$



Textos Marea Verde

24. Busca rectángulo áureo y espiral Áurea. -

25.- Ya de paso busca la relación entre el Número de Oro y la Sucesión de Fibonacci.
Si en la sucesión de Fibonacci se divide cada uno de los términos por el anterior, se obtiene una nueva sucesión cuyo límite es el número de oro; Φ=1.6180339887.

26.- . Busca en YouTube "algo pasa con phi" y me cuentas.
En el vídeo, se presenta un rectángulo regular por lo que todos sus ángulos tienen la misma longitud. Si unimos todas sus puntas de otra manera, obtenemos un pentagrama (estrella de cinco puntas), este aparece en muchos símbolos y sitios. Las líneas que unen la estrella miden Φ (phi).

27.- Comprueba que la longitud del lado del pentágono regular y la de su diagonal están en proporción áurea.
Solución gráfica: En la figura adjunta utiliza la semejanza de triángulos para comprobar qué triángulos son semejantes. Todos los ángulos miden 36º, 72º o 108º.
El triángulo DAB es semejante al BAF (tienen los 3 ángulos iguales) por lo que los lados son proporcionales:
DA/AB = AB/FA,
Cómo el lado del pentágono AB = DF, se tiene que el todo (DA) es a la parte (DF) como la parte es a lo que queda (FA), luego se tiene una proporción áurea. En la estrella pitagórica el cociente entre dos longitudes consecutivas es siempre el número de oro.

28.- Calcula con Geogebra una aproximación de la razón de semejanza entre un pentágono regular y el que se forma en su interior al dibujar sus diagonales. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos pentágonos
Solución gráfica: En un pentágono regular están en proporción áurea la diagonal y el lado del pentágono y los dos segmentos de una diagonal cortada por otra. De forma análoga se demuestra que los dos segmentos desiguales de una diagonal cortada por otras dos están también en proporción áurea. Por lo tanto, p/l=d-l/d ⇢p/l= 1- Φ ^-1 como Φ^-1= Φ -1.La razón de semejanza que transforma el mayor en el menor es 2 – Φ.
Por otra parte, l/p=d/d-l y ya que d/d-l= d/l/d-l/l= Φ/ Φ^-1= Φ^2= Φ+1. La razón de semejanza que transforma el menor en el mayor es Φ2 = Φ + 1.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.62 \quad EA=1{,}618033989-1.62=0{,}00196601125$$

$$ER=\frac{0{,}00196601125}{1{,}618033989}=0.99999\ldots$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Solución gráfica: Los triángulos ABD y ABF son semejantes, por lo tanto, las longitudes de sus lados son proporcionales: $\boldsymbol{BDAB} \backsim \boldsymbol{ABBF}$ y sea d la longitud de la diagonal y l la longitud del lado:
BD = d, AB = l y BF = d – l y sustituyendo en la proporción anterior: $\boldsymbol{dl} \backsim \boldsymbol{ld\overline{\ }l}$ lo que indica que la diagonal y el lado del pentágono están en proporción áurea y que la longitud de los dos segmentos de una diagonal cortada por otra l y d – l también están en proporción áurea.

29. Comprueba que los triángulos ABD y ABF de la figura son semejantes y calcula la aproximadamente con Geogebra su razón de semejanza.
Solución gráfica: En el triángulo isósceles que se forma con el centro de las circunferencias, O, y dos vértices consecutivos del polígono inscrito en la circunferencia de radio R, el ángulo del vértice O mide 36º, ya que es un ángulo central de un decágono, el cociente entre r y R es Φ y por tanto la razón de semejanza entre las circunferencias de radios R y r es: 1/Φ = Φ -1.
La medida del radio r coincide con L, la longitud del lado del decágono inscrito en la circunferencia de radio R, y por lo tanto el cociente entre el radio de la circunferencia R y el lado L del decágono regular es Φ.
La razón de semejanza entre los dos decágonos no estrellados es la misma que entre r y R, es decir, Φ

30. Calcula con GeoGebra el valor aproximado de la razón de semejanza entre un decágono regular y el decágono que se forma al trazar las diagonales de la figura. Determina sin utilizar Geogebra el valor real de la razón de semejanza entre estos dos polígonos.
Solución gráfica: En el triángulo isósceles que se forma con el centro de las circunferencias, O, y dos vértices consecutivos del polígono inscrito en la circunferencia de radio R, el ángulo del vértice O mide 36º, ya que es un ángulo central de un decágono, el cociente entre r y R es Φ y por tanto la razón de semejanza entre las circunferencias de radios R y r es: 1/Φ = Φ -1.
La medida del radio r coincide con L, la longitud del lado del decágono inscrito en la circunferencia de radio R, y por lo tanto el cociente entre el radio de la circunferencia R y el lado L del decágono regular es Φ.
La razón de semejanza entre los dos decágonos no estrellados es la misma que entre r y R, es decir, Φ

31. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:
a) Porcentaje superior al 26 %.
(26,100] {x $\boldsymbol{\epsilon}$ R / 26 < x ≤100}

b) Edad inferior o igual a 18 años.
[0, 18] {x $\boldsymbol{\epsilon}$ R / 0≤ x ≤ 18}

c) Números cuyo cubo sea superior a 8.
(2, +∞); {x$\boldsymbol{\epsilon}$R / 2<x ≤∞}

d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
[100, 1 000); {x$\boldsymbol{\epsilon}$R /100 ≤ x < 1000}

e) Temperatura inferior a 25° C.
(-∞, 25); {x$\boldsymbol{\epsilon}$R/x<25}

Textos Marea Verde

f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un número real).

[0, +∞); {x∈R/ 0≤x<∞}

g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4.

(1, 9); {x∈R/ 1< x < 9}

32. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos:

a) E (1, 5) = (1-5, 1+5) = (4,6)

b) E (-2, 8/3) = (-2-8/3, -2+8/3) = (-4,6, 0,6)

c) E (-10; 0.001) = (-10-0,001, -10+0,001)

33. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos:

a) (4, 7);

b) (-7, -4);

c) (-3, 2)

Solución:

a) E (5.5, 1.5);

b) E (-5.5, 1.5);

c) E (-0.5, 2.5).

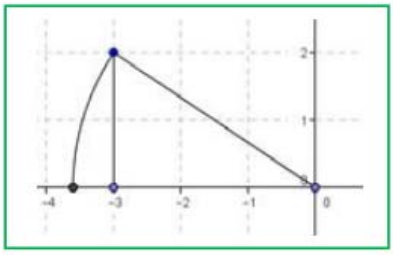
34. ¿Los sueldos superiores a 500 € pero inferiores a 1000 € se pueden poner como intervalo de números reales? *Pista: 600.222333€ ¿puede ser un sueldo?

No se pueden poner como un intervalo, ya que sería el intervalo (500 ,1000), por lo que 600.222333€ sería un sueldo, y no puede serlo al tener más de dos decimales.

Textos Marea Verde

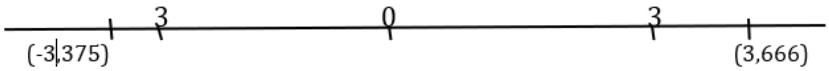
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. La imagen es la representación de un número irracional, ¿cuál?



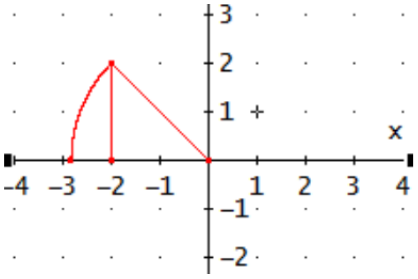
$-\sqrt{(-3)^2+2^2}=-\sqrt{13}$

2. Representa en la recta numérica: -3.375; 3.666…

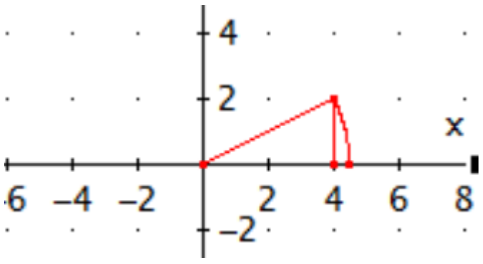


3. Representa en la recta numérica: $\sqrt{8}$, $2\sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{10}}{2}$

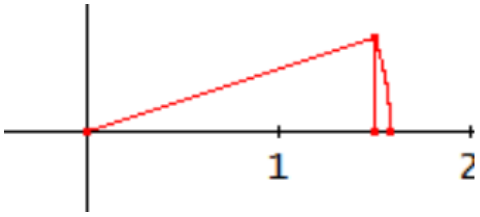
$-\sqrt{8}=-\sqrt{(-2)^2+2^2}$



$2\sqrt{5}=\sqrt{20}=\sqrt{4^2+2^2}$



$\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$



4. Halla el valor exacto de 0,4 (periódico)/0,4 , sin calculadora.

0,444444444444444444444444… /0,4 = 4,444444444444444444444444… /4 = 1,111111111…..

Textos Marea Verde

5. Di cuáles de estas fracciones tienen expresión decimales exactos y cuáles periódica:
9/ 40 = 0,225 exacto 37/250 = 0,148 exacto
30/21 = 0,428571 periódico 21/15= 1,4 exacto

6. Halla 3 fracciones a, b, c tales que 3 /4 ≨ a ≨ b ≨ c ≨ 19/25.
Solución abierta: 3/4 = 750/1000 < 752/1000 < 755/1000 < 757/1000 < 19/25 = 760/1000.

7. Haz en tu cuaderno una tabla y di a qué conjuntos pertenecen los siguientes números.

2.73535…	racional
𝜋-2	irracional
$\sqrt[5]{-32}$ = -2	entero
2/0	indeterminado
10^{100}	natural
102/34	racional
-2.5	racional
0.1223334444	irracional

8. Contesta verdadero o falso, justificando la respuesta.
a) Q∩(R-Q)=0→v. Porque el cero pertenece.
b) Z∈Q→v. Los números enteros pertenecen a los racionales.
c) La raíz cuadrada de un número natural es irracional→F. Puede ser racional o irracional.
d)$\sqrt{7} \notin$ Q→v. La raíz de siete es irracional.
e)$\frac{1}{47}$ tiene expresión decimal periódica→v. El resultado es 0.02127659574.

9. Pon ejemplos que justifiquen.
a) La suma y resta de números irracionales puede ser racional.
b) El producto o división de números irracionales puede ser racional.
a) $(1+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5}) = 2$; $(5+\sqrt{5}) - (1+\sqrt{5}) = 4$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$ $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = 2$

10. ¿Qué será la suma de número racional con otro irracional?
Será un número irracional

11. La suma de dos números con expresión decimal periódica, ¿puede ser uno entero?
Si. $\frac{1}{3}+\frac{5}{3} = 2$

12. Expresa con palabras los siguientes intervalos o semirrectas.
a) (-7,7]→ {x∈R/ -7< $x \leq 7$} "x" será mayor que -7 y menor o igual que 7.
b) $\{x \in R / -3 \leq x < 5\}$→$[-3, 5)$ "x" será mayor o igual que -3 y menor que 5 .
c) $(\infty, 5]$ (x≤ 5) "x"" será menor o igual que 5.

Textos Marea Verde

d) (-2,+∞) ($x > -2$) "x" será mayor que -2.

13. ¿Cuantos metros hay de diferencia al calcular el perímetro de la Tierra poniendo $\pi \approx 3,14$ en lugar de su valor real? ¿es mucho o es poco? Básicamente tienes que hallar el error absoluto y relativo. *Radio aproximadamente 6370km.

P=$\pi . d$
P=$2 \cdot \pi \cdot R = 40024\text{km}$
$2 \cdot 3.14 \cdot 6370 = 40004\text{km}$
EA= 20,3km
ER= 0.0005 es poco

14. Los antiguos hicieron buenas aproximaciones de Pi, entre ellas citemos a Arquímedes (siglo III a.C.) con 211875/67441 y a Ptolomeo (siglo II d. C.) con 377/120. ¿Cuál cometió menor error relativo?

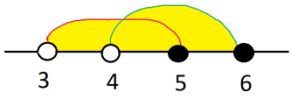
A→211875/67441
P→377/120
EA Arquímedes→ $4.225692457 \times 10^{-5}$
EA Ptolomeo→$7.401307686x10^{-5}$
ER Arquímedes=1,345079685
ER Ptolomeo=$2,355909407x10^{-5}$
SOL: Arquímedes se quedó más cerca

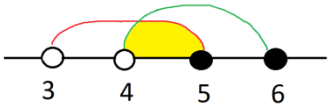
15. Lo siguiente es un Pitexto: "soy y seré a todos definible, mi nombre tengo que daros, cociente diametral siempre inmedible soy de los redondos aros". (Manuel Golmayo). Cuenta y apunta el número de letras de cada palabra y verás de donde viene su nombre. Inventa una frase con la misma propiedad, no es necesario que sea tan largo. (Al menos 10 palabras).

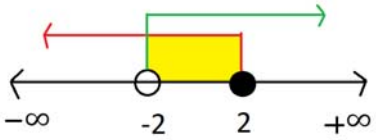
3-1-4-1-5-9-2-6-5-3-5-8-9-7-9-3-2-3-8-4
"Voy a leer y comer alcachofa, él comerá arroz con pollo"

16.Halla:

1) $(3,5] \cup (4,6] = (3,6]$
2)$(3,5] \cap (4,6] = (4,5]$
3)$(\infty,2] \cap (-2,+\infty) = (-2,2]$







17. ¿Puede expresarse como entorno una semirrecta?

Respuesta: No. No puede ser infinito.

18. Expresa como entornos abiertos los siguientes intervalos.

a) (0,7)→0+7/2,7-0/2= (3,5;3,5)
b) (-8,-2)→ (-8)+(-2)/2; (-2)-(-8)/2= (-5,3)
c) (2,+∞) No se puede.

19. Expresa como intervalos abiertos los siguientes entornos.

E(2,2/3)→(2-2/3,2+2/3)= (1,3;2,6)

E(-7,1/2)→(-7,5;-6,5)

20. Un número irracional tan importante como Pi es el número "e", que parece periódico pero no lo es. Se define como el número al que se acerca 1+1/n cuando n se hace muy grande. Coge la calculadora y dale a n los valores cada vez mayores como 10, 100, 1000… Apunta los resultados en una tabla.

n	resultado
10	2,593
100	2,704
1000	2,716

21. Otra forma de definir *e* es $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\ldots$

Que dirás tú ¡qué son esos números tan admirados!, se llama factorial y es muy sencillo:

4! = 4·3·2·1 = 24, se multiplica desde el número hasta llegar a 1. Por ejemplo: 6! = 6·5·4·3·2·1= 720. No te preocupes, que la tecla "!" está en la calculadora.

¿Puedes calcular *e* con 6 cifras decimales correctas?

*Nota: Fíjate que ahora la convergencia es mucho más rápida, sólo has tenido que llegar hasta *n* = ¿?

Numero e = 2,718281…

$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}$

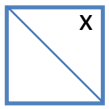
22. Ahora trabajamos con valores exactos, ni las fracciones ni los irracionales se sustituyen por su expresión decimal, ejemplos $3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$**:**

Halla el área y el perímetro de un rectángulo de lados $\sqrt{2}$ y $\sqrt{8}$

P = $2\sqrt{2}+2\sqrt{8}=6\sqrt{2}$ m

A = $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$m

23. Halla el área y el perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide 2 m.



d = 2m

$x^2+x^2=2^2$

$2x^2=4$

$x^2=2$ x = $\sqrt{2}$

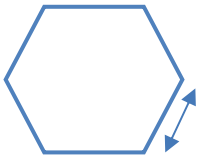
P = $4\sqrt{2}=4\sqrt{2}m$

A = $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2m$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

24. Halla el área y el perímetro de un hexágono regular de lado $\sqrt{3}$ m.



$\sqrt{3}m$

P = $6\sqrt{3}$

$(\sqrt{3})^2 = ap^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

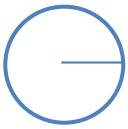
$3 = ap^2 + \frac{3}{4}$

$ap^2 = 3 - \frac{3}{4}$

$ap^2 = \frac{9}{4}$ $\quad ap = \sqrt{\frac{9}{4}}$

A = $\frac{P \cdot ap}{2}$ $\quad$ A = $\frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}}{2}$ $\quad$ A = $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ m^2

25. Halla el área y el perímetro de un círculo de radio $\sqrt{10}$ m.

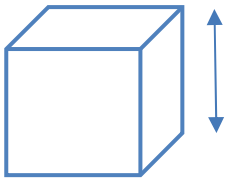


r = $\sqrt{10}$ m

P = $\pi \cdot d = \pi \cdot 2\sqrt{10}$ m

A = $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot (\sqrt{10})^2 = 10\pi$ m^2

26. Halla el área total y el volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{7}$ m.



$\sqrt[3]{7}$m

$A_{TOTAL} = 6 \cdot L^2 = 6 \cdot (\sqrt[3]{7})^2 = 21{,}9\, m^2$

V = $L^3 = (\sqrt[3]{7})^3 = 7\, m^3$

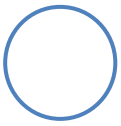
27. ¿Por qué número hemos de multiplicar los lados de un rectángulo para que su área se haga el triple?

b

A = a · b

a $\quad$ 3A = a · x · b · x $\quad$ x · x · A = 3 · A $\quad$ $x^2 = 3$ $\quad$ x = $\sqrt{3}$

28. ¿Cuánto debe valer el radio de un círculo para que su área sea 1 m^2?



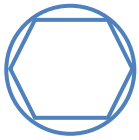
A = $1m^2$

A = $\pi \cdot r^2$

$1 = \pi \cdot r^2$ $\quad$ $r^2 = \frac{1}{\pi} = 0{,}32$ $\quad$ r = $\sqrt{0{,}32} = 0{,}56$ m

Textos Marea Verde

29. Tenemos una circunferencia y un hexágono inscrito en ella. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? (Razón es división o cociente)



$P_{CIRCUNFERENCIA} = 2\pi \cdot r$

$P_{HEXAGONO} = r \cdot 6$

$\frac{2\pi r}{r \cdot 6} = \frac{2\pi}{6}$

30. ¿Qué números al cuadrado dan 7?

$\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$

31. ¿Qué números reales al cuadrado dan menos de 7?

$(-\sqrt{7} \; ; \sqrt{7})$

32. ¿Qué números reales al cuadrado dan más de 7?

$(-\infty, \; -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$

33. Medir el tamaño de las pantallas en pulgadas (") ya no parece muy buena idea. La medida se refiere a la longitud de la diagonal del rectángulo, así, una televisión de 32" se refiere a que la diagonal mide 32". Eso no da mucha información si no sabemos la proporción entre los lados. Las más usuales en las pantallas de televisión y ordenador son 4:3 y 16:9.

Si una pulgada son 2.54 cm, ¿cuáles serán las dimensiones de una pantalla de 32" con proporción 4:3?, ¿y si la proporción es 16/9? ¿Cuál tiene mayor superficie?

4:3 = 1, 33 el lado más largo mide 1,33 veces el lado corto, si el corto es x el largo es 1,33 x

32" = 81, 28 (diagonal de la tele)

Proporción 4:3 4" = 10,16 → 3" = 7,62

$81{,}28 = \sqrt{(x)^2 + (1{,}33x)^2}$

d = 12,7

Proporción 16:9 16" = 40,64 → 9" = 22,86

$d = \sqrt{40{,}64^2 + 22{,}86^2}$

d = 46,62

Mayor superficie → proporción 16:9

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. Sabes a que conjuntos pertenecen los distintos números.
Indica en una tabla o un diagrama (como el del texto) a que conjuntos numéricos pertenecen los siguientes números: 0; -2; 3/4; 7.3; 6.252525…; π – 2; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{-16}$; 1.123124125…; 2.999…

0 -> Z
-2 -> Z, R
3/4 -> Q, R
7.3 -> R
6.252525… -> Q , R
π -2 -> R
$\sqrt[3]{4}$ -> I, R
$\sqrt[4]{-16}$ -> C
1.123124125… -> R
2.999… -> R

2. Sabes redondear con un número adecuado de cifras y calculas el error relativo para comparar aproximaciones. Sabes hallar una cota para el error absoluto y el relativo.
Los siguientes números se han redondeado, halla una cota de error absoluto y del error relativo:
a.1) 3.14
EA $|\pi - 3.14| = 0.00159265359$
ER = $\frac{0.00159265359}{\pi} = 0.00050695738$

a.2) 456000 con redondeo en las centenas.
EA = |456000 - 456000| = 0
ER = $\frac{0}{456000}$ = 0

b) Si tomamos $\sqrt{10} \approx 3.16$ y $\frac{2}{3} \approx 0.67$ ¿en cuál de las aproximaciones cometemos proporcionalmente menor error?
EA $|\sqrt{10} - 3.16| = 0.00227766016$
ER = $\frac{0.00227766016}{\sqrt{10}} = 0.00072025938$

EA $|\frac{2}{3} - 0.67| = -0{,}00333333333$
ER = $\frac{-0.00333333333}{\frac{2}{3}} = -0.00499999999$

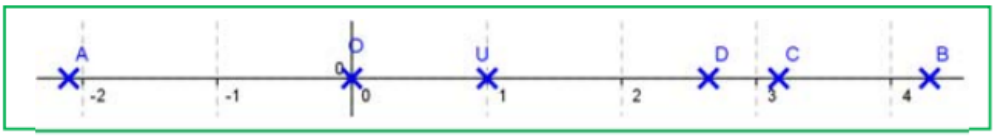
En la aproximación de la raíz cuadrada de 10 se comete proporcionalmente menor error

3. Sabes cuando una fracción tiene expresión decimal exacta o periódica sin hacer la división. Pruébalo con estas:
30/150 es exacta y da 0,2.
30/21 periódica y da 1,428571…

Textos Marea Verde

4. Sabes pasar de decimal a fracción para trabajar con valores exactos.
Halla: 0.72525…+0.27474…
725-7/990=359/495
274-2/990=136/495
359/495+136/495=1

5) Sabes representar números racionales e irracionales de forma exacta. Representa de forma exacta -21/29; 30/7; √10; √7



6) Dominas las distintas formas y notaciones de un intervalo o semirrecta (intervalo, conjunto con desigualdades y gráfica). Expresa en forma de intervalo (o semirrecta), en forma de desigualdad y representa gráficamente: a) Números reales inferiores o iguales que –1. b) Números reales comprendidos entre –4 y 2, incluido el 1º pero no el 2º.
Solución:
a) $(-\infty, -1] = \{X \epsilon R; -\infty \leqq x \leq -1\}$
b) $[-4, 2) = \{X \epsilon R; -4 \leq x < 2\}$.

7. Sabes pasar de un entorno a un intervalo y viceversa.
a) Escribe como intervalo: E(–2, 2/3).
b) Escribe como entorno el intervalo (–5/2, 7/3)
a) $(-2 - 2/3 , -2 + 2/3) = (-8/3, -4/3)$
b) radio: $(7/3 + 5/2) : 2 = 29/12$; centro: $(7/3 - 5/2) : 2 = -1/2$; E(–1/12, 29/12)

8.- Halla el área, el volumen y la diagonal principal de un ortoedro de lados: $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{5}$;
Volumen = $a \cdot b \cdot c = 30\sqrt{5} = 67.08 m^3$
Área = $2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 110 m^2$
Diagonal principal = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{70} = 8.37 m$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 2: Potencias y raíces

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Pilar Paramio Barrigas
Hugo Bastante Gómez-Limón
IES ATENEA, CIUDAD REAL
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula las siguientes potencias:

a) $-3^3 = -3 \cdot 3 \cdot 3 = -27$

b) $(2+1)^3 = 3^3 = 27$

c) $(-2x)^2 = -4x^2$

2. Efectúa las siguientes operaciones con potencias.

a) $(x+1)\cdot(x+1)^3 = (x+1)^4$

b) $(x+2)^3 : (x+2)^4 = (x+2)^{-1} = \frac{1}{x+2}$

c) $((x-1)^3)^4 = (x-1)^{12}$

d) $(x+3)\cdot(x+3)^{-3} = (x+3)^{-2} = \frac{1}{(x+3)^2}$

3. Calcula:

a) $(\sqrt[3]{a^6 \cdot b^9})^2 = \sqrt[3]{a^{12} \cdot b^{18}} = a^4 \cdot b^6$

b) $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{12}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

c) $(\sqrt[12]{(x+1)^3})^2 = \sqrt[12]{(x+1)^6} = \sqrt{x+1}$

4. Halla:

a) $\sqrt{\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}}} = \sqrt[8]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[8]{\frac{3x}{y^2}} = \sqrt[8]{\frac{xy^2}{3x\cdot 5y}} = \sqrt[8]{\frac{y}{15}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{15}{6}} = \sqrt{\frac{3\cdot 5}{3\cdot 2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$

5. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\sqrt[4]{\frac{x}{5y}} : \sqrt[4]{\frac{3x}{y^2}} = \sqrt[4]{\frac{xy^2}{5y3x}} = \sqrt[4]{\frac{y}{15}}$

b) $(\sqrt[5]{(x+3)^2})^3 = \sqrt[5]{(x+3)^6} = (x+3)\sqrt[5]{x+3}$

Textos Marea Verde

6. Escribe bajo un solo radical y simplifica.

$$\sqrt[2]{2\sqrt[2]{3\sqrt[2]{4\sqrt[2]{5\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}}} = \sqrt[4]{2^2\cdot 3\sqrt[2]{4\sqrt[2]{5\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}}} = \sqrt[8]{4^2\cdot 3^2\cdot 4\sqrt[2]{5\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}} = \sqrt[16]{2^8\cdot 3^4\cdot 2^4\cdot 5\sqrt[2]{6\sqrt[2]{8}}}$$

$$= \sqrt[32]{2^{16}\cdot 3^8\cdot 2^8\cdot 5^2\cdot 3\cdot 6\sqrt[2]{8}} = \sqrt[64]{2^{32}\cdot 3^{16}\cdot 2^{16}\cdot 5^4\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 2^3} = \sqrt[65]{2^{51}\cdot 3^{18}\cdot 5^4}$$

7. Calcula y simplifica.

$$\frac{\sqrt[4]{x^3y^3}\cdot\sqrt[3]{x^4y^5}}{\sqrt[6]{x^5y^4}} = \sqrt[12]{\frac{x^9y^9x^{16}y^{20}}{x^{10}y^8}} = \sqrt[12]{x^{15}y^{21}} = \sqrt[4\cdot 3]{x^{5\cdot 3}y^{7\cdot 3}} = \sqrt[4]{x^5y^7} = xy\sqrt[4]{xy^3}$$

8. Realiza la siguiente operación.

$$\sqrt{x^3} + \sqrt{16x^7} + \sqrt{x} = x\sqrt{x} + \sqrt{2^4x^7} + \sqrt{x} = x\sqrt{x} + 4x^3\sqrt{x} + \sqrt{x} = (4x^3 + x + 1)\sqrt{x}$$

9. Calcula y simplifica.

$$\sqrt[2]{\frac{3}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{8}}\cdot\sqrt[4]{\frac{9}{5}} = \sqrt[12]{\left(\frac{3}{x}\right)^6\cdot\left(\frac{x^2}{8}\right)^4\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^3} = \sqrt[12]{\frac{3^6x^8 9^3}{x^6 8^4 5^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^6x^8 3^6}{x^6 2^{12} 5^3}} = \sqrt[12]{\frac{3^{12}x^8}{x^6 2^{12} 5^3}} = \frac{3}{2}\sqrt[12]{\frac{x^2}{5^3}}$$

10. Racionaliza la expresión.

$$\frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}} = \frac{x+3y}{\sqrt{x}-\sqrt{2y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}} = \frac{(x+3y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2y})^2} = \frac{(x+3y)(\sqrt{x}+\sqrt{2y})}{x-2y}$$

11. Racionaliza.

$$\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(3\sqrt{3}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5-\sqrt{6}}{1} = 5-\sqrt{6}$$

12.Racionaliza.

$$\frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2} = \frac{(5\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{5\sqrt{5^2}+10\sqrt{5}-2\sqrt{10}-4\sqrt{2}}{\sqrt{5^2-2^2}} = \frac{25+10\sqrt{5}-2\sqrt{10}-4\sqrt{2}}{1} = 25+10\sqrt{5}-2\sqrt{10}-4\sqrt{2}$$

13.- Calcula.

a) $(7.83\cdot 10^{-5})(1.84\cdot 10^{13}) = \underline{1.44\cdot 10^{9}}$

b) $(5.2\cdot 10^{-4})(3.2\cdot 10^{8}) = \underline{1.625\cdot 10^{2}}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

14.- Efectúa y expresa el resultado en notación científica.

a) $3\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-4}/\ 10^{6}-5\cdot10^{5}=$ $\underline{1.46\cdot10^{-9}}$

b) $7.35\cdot10^{4}/5\cdot10^{-3}+3.2x\cdot=$ $\underline{4.97\cdot10^{7}}$

15.- Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $(4.3\cdot10^{3}-7.2x\cdot)^{2}=5.1\cdot10^{11}$

b) $(7.8\cdot10^{-7})^{3}=4.7\cdot10^{-19}$

16.- Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$2^5=32$	$\log_2 32=5$	$2^0=1$	$\log_2 1=0$
$5^1=5$	$\log_5 5=1$	$5^0=1$	$\log_5 1=0$
$2^1=2$	$\log_2 2=1$	$3^4=81$	$\log_3 81=4$
$2^4=16$	$\log_2 16=4$	$5^2=25$	$\log_5 25=2$

17.- Calcula utilizando la definición de logaritmo.

a) $\log_2 2^5=5$

b) $\log_5 5^2=2$

c) $\log_2 2^{41}=41$

d) $\log_5 5^{30}=30$

18.- Calcula utilizando la definición de logaritmo.

a) $\log_3 3^3=3$

b) $\log_{10} 10^2=2$

c) $\log_{1/2}(1/2)^2=2$

d) $\log_{10} 10^{-4}=-4$

19.- Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^6=x$ $\quad x=6$

b) $\log_{1/2} x=4$ $\quad x=1/16$

c) $\log_x 25=2$ $\quad x=5$

BY NC SA

Textos Marea Verde

20.- Calcula utilizando la definición de logaritmo

a) $Log_2 64 + log_2 1/4 - log_3 9 - log_2 \sqrt{2}$

$log_2 64 = 6$ $log_2 1/4 = -2$ $log_3 9 = 2$ $log_2 \sqrt{2} = 1/2$

$log_2 64+log_2 1/4-log_3 9-log_2 \sqrt{2} = 6 + (-2) -2 -1/2 = 1.5$

b) $log_2\ 1/32 + log_3\ 1/27 – log_2\ 1$

$log_2 1/32= -5$ $log_3\ 1/27= -3$ $log_2\ 1 = 0$

$log_2 1/32 + log_3\ 1/27 – log_2\ 1 = -5 + (-3) - 0= -8$

21.- Utiliza la calculadora para obtener

a) log 0.000142= -3.8477117

b) log 142= 2.15228834

c) log 9+ log64= 2.76042248

22.- Desarrolla las expresiones que se indican

a) ln $\sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}} = \frac{1}{5}\ln\frac{4x^2}{e^3} = \frac{1}{5}(\ln 4x^2 - \ln e^3) = \frac{1}{5}(\ln 4 + 2\ln x - 3)$

b) log $\frac{a^3b^2}{c^4d}$ = $\log a^3+\log b^2- \log c^4-\log d = 3\log a + 2\log -4\log c - \log d$

23. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de log3 = 0.4771212

a) 81 b) 27 c) 59049

a) $\log 81 = \log 3^4 = 4\log 3 = 4\,(0{,}4771212)$

b) $\log 27 = \log 3^3 = 3\log 3 = 3\,(0{,}4771212)$

c) $\log 59049 = \log 3^{10} = 10\log 3 = 10\,(0{,}4771212) = 4{,}771212$

24. Simplifica la siguiente expresión: 1 /2 log m - 2 log t - log p + 5/2 log h

$$\log a - \log b = \log\frac{a}{b}\ ; \qquad n\log a = \log(a^n)$$

$$\frac{1}{2}\log m\ -2\ \log t\ -\log p + \frac{5}{2}\log h \rightarrow \log\sqrt{m} - \log t^2 - \log p + \log h^{\frac{5}{2}} \rightarrow \log\left(\frac{\sqrt{m}\cdot h^{\frac{5}{2}}}{t^2\cdot p}\right)$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa en forma exponencial:

a) $\frac{1}{64} = 2^{-6}$

b) $\frac{t}{t^5} = t^{-4}$

c) $\left(\frac{1}{z+1}\right)^2 = (z+1)^{-2}$

d) $\frac{27^{-2}}{81^{-5}} = \frac{(3^3)^{-2}}{(3^4)^{-5}} = \frac{3^{-6}}{3^{-20}} = 3^{14}$

e) $\frac{x^{-2}y^{-7}}{x^8y^{-4}} = x^{-10}y^{-3}$

2. Calcula:

a) $4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{2}{2}} = 2$

b) $125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = (5)^{\frac{3}{3}} = 5$

c) $625^{\frac{5}{6}} = (5^4)^{\frac{5}{6}} = (5)^{\frac{20}{6}} = (5)^{\frac{10}{3}} = (5)^3(5)^{\frac{1}{3}} = 125\sqrt[3]{5}$

d) $\left(64^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}} = \left((2^6)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{6}} = (2^4)^{\frac{5}{6}} = (2)^{\frac{20}{6}} = (2)^{\frac{10}{3}} = (2)^3(2)^{\frac{1}{3}} = 8\sqrt[3]{2}$

e) $\left(8^{\frac{-4}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} = \left((2^3)^{\frac{-4}{3}}\right)^{\frac{2}{5}} = (2^{-4})^{\frac{2}{5}} = (2)^{\frac{-8}{5}} = \frac{1}{2\sqrt[5]{2^3}}$

3. Expresar en forma de radical:

a) $x^{\frac{7}{9}} = \sqrt[9]{x^7}$

b) $(m^5 \cdot n^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{m^5 \cdot n^3}$

c) $\left[(x^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{5}} = \sqrt[15]{x^2}$

d) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$

4. Expresar en forma exponencial:

a) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5 = x^{\frac{10}{3}}$

b) $\sqrt{\frac{a^{13}}{a^6}} = a^{\frac{13}{6}}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^k}} = a^{\frac{k}{nm}}$

d) $\sqrt[3]{x^{(5x+1)}} = x^{\frac{5x+1}{3}}$

e) $\sqrt[4]{(x^2)^{(3x+2)}} = x^{\frac{2(3x+2)}{4}} = x^{\frac{3x+2}{2}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{(x^2)^{\frac{1}{5}}}}} = x^{\frac{2}{120}} = x^{\frac{1}{60}}$

5. Expresa como potencia única:

a) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2} = \frac{a^{\frac{8}{3}}}{a^2} = a^{\frac{8}{3}-2} = a^{\frac{8}{3}-\frac{6}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

b) $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{9}{6}-\frac{4}{6}} = 5^{\frac{5}{6}}$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\cdot\sqrt{a}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a\cdot a} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^2} = a^{-\frac{5}{6}}$

d) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\cdot\frac{1}{4^{\frac{1}{3}}} = 2\cdot 4^{-\frac{1}{3}} = 2\cdot(2^2)^{-\frac{1}{3}} = 2\cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

e) $a\sqrt{\frac{1}{a}} = a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = a\cdot\frac{1^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a\cdot a^{-\frac{1}{2}} = a^{1-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$

f) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2} = \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{1}{4}}$

g) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^3}\cdot\frac{a^3}{\sqrt{a}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^3}\cdot\frac{a^3}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3}-3}\cdot a^{3-\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$

6. Simplifica:

a) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2}$

b) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3}$

c) $\frac{\sqrt[4]{a^3\cdot b^5\cdot c}}{\sqrt{a\cdot b^3\cdot c^3}} = \frac{(a^3\cdot b^5\cdot c)^{\frac{1}{4}}}{(a\cdot b^3\cdot c^3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot b^{\frac{5}{4}}\cdot c^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{5}{4}-\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{b^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{c^{\frac{5}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{a}{bc^5}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{5+7}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{12}}} = \sqrt[12]{x^{12}} = x$

e) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^8 = \left(\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^8 = \left(\left((\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^8 = \left(2^{\frac{1}{8}}\right)^8 = 2$

BY NC SA

Textos Marea Verde

f) $\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\sqrt[3]{x^4\cdot y^5}}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}=\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot(x^4\cdot y^5)^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}=\frac{\sqrt[4]{x^3\cdot y^3\cdot\left(x^{\frac{4}{3}}\cdot y^{\frac{5}{3}}\right)}}{\sqrt[6]{x^5\cdot y^4}}=\frac{\sqrt[4]{x^{3+\frac{4}{3}}\cdot y^{3+\frac{5}{3}}}}{(x^5\cdot y^4)^{\frac{1}{6}}}=\frac{\sqrt[4]{x^{\frac{9}{3}+\frac{4}{3}}\cdot y^{\frac{9}{3}+\frac{5}{3}}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{4}{6}}}=\frac{\sqrt[4]{x^{\frac{13}{3}}\cdot y^{\frac{14}{3}}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{4}{6}}}=$

$=\frac{\left(x^{\frac{13}{3}}\cdot y^{\frac{14}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{4}{6}}}=\frac{x^{\frac{13}{12}}\cdot y^{\frac{14}{12}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{4}{6}}}=\frac{x^{\frac{13}{12}}\cdot y^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{4}{6}}}=x^{\frac{13}{12}-\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{7}{6}-\frac{4}{6}}=x^{\frac{3}{12}}\cdot y^{\frac{3}{6}}=x^{\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{x\cdot y^2}$

g) $\sqrt[5]{x^2\cdot 3\sqrt[10]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}}=\sqrt[5]{x^2\cdot 3\sqrt[10]{x^2\cdot x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[5]{x^2\cdot 3\sqrt[10]{x^{\frac{7}{2}}}}=\sqrt[5]{x^2\cdot 3\left(x^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{10}}}=$

$=\sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot x^{\frac{7}{20}}}\sqrt[5]{x^2\cdot 3\cdot x^{\frac{7}{20}}}=\sqrt[5]{3\cdot x^2\cdot\ \cdot x^{\frac{7}{20}}}=\sqrt[5]{3\cdot x^{\frac{7}{20}+2}}=\sqrt[5]{3x^{\frac{47}{100}}}=\sqrt[5]{3\sqrt[100]{x^{47}}}=$

$\sqrt[100]{3^{20}x^{47}}$

7. Extraer factores del radical:

a) $\sqrt[3]{32x^4}=\sqrt[3]{2^5\cdot x^4}=2x\sqrt[3]{2^2x}=2x\sqrt[3]{4x}$

b) $\sqrt[3]{81a^4b^5c}=\sqrt[3]{3^4a^4b^5c}=3ab\sqrt[3]{3b^2c}$

c) $\left(\sqrt{\sqrt{2}}\right)^{10}=\left(\left((2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=\left((2)^{\frac{1}{4}}\right)^{10}=2^{\frac{10}{4}}=\sqrt[4]{2^{10}}=\sqrt{2^5}=4\sqrt{2}$

d) $\sqrt[4]{\frac{25a^2b}{c^6}}=\sqrt[4]{\frac{5^2\cdot a^2b}{c^6}}=\frac{1}{c}\sqrt[4]{\frac{25\cdot a^2b}{c^2}}$

e) $\sqrt{\frac{8a^5}{b^4}}=\sqrt{\frac{2^3\cdot a^5}{b^4}}=\frac{2a^2}{b^2}\sqrt{2a}$

f) $\sqrt{\frac{28x^5}{75y^3}}=\sqrt{\frac{2^2\cdot 7\,x^5}{5^2\cdot 3y^3}}=\frac{2x^2}{5y}\sqrt{\frac{7x}{3y}}$

g) $\sqrt{\frac{32a^3}{45b^4}}=\sqrt{\frac{2^5a^3}{3^2\cdot 5\cdot b^4}}=\frac{4a^2}{3b^2}\sqrt{\frac{2a}{5}}$

8. Introducir factores en el radical:

a) $2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{3\cdot 2^2}{2}}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$

b) $3\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{3}}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{6}$

c) $2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2^3}{2^2}}=\sqrt[3]{2}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

d) $2\sqrt[4]{\frac{5}{12}} = \sqrt[4]{\frac{5\cdot 2^4}{2^2\cdot 3}} = \sqrt[4]{\frac{5\cdot 2^2}{3}} = \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$

e) $\frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{12\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$

f) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}\cdot\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{72}{108}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

9. Efectúa:

a) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[3]{a\cdot a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4\cdot b^2} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6} = ab^2$

b) $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{5a\cdot 10ab\cdot 8a^3b\cdot a} = \sqrt{400a^6b^2} = \sqrt{2^4\cdot 5^2\cdot a^6b^2} = 20a^3b$

c) $\frac{\sqrt[6]{20}}{\sqrt[4]{10}} = \frac{20^{\frac{1}{6}}}{10^{\frac{1}{4}}} = \frac{(2^2\cdot 5)^{\frac{1}{6}}}{(2\cdot 5)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{\frac{2}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{2}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\cdot 2^{-\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{12}}\cdot 5^{-\frac{1}{12}} = \frac{2^{\frac{1}{12}}}{5^{\frac{1}{12}}} = \sqrt[12]{\frac{2}{5}}$

d) $\frac{\sqrt[4]{\frac{5}{12}}}{\sqrt[4]{\frac{20}{3}}} = \sqrt[4]{\frac{5}{\frac{12}{20}}} = \sqrt[4]{\frac{5\cdot 3}{20\cdot 12}} = \sqrt[4]{\frac{15}{240}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

f) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot 4^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2}} = \sqrt{3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-1}} = \sqrt{\frac{3}{2^{\frac{1}{3}}}}$

13. Efectúa y simplifica:

a) $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\right)\cdot(3+2\cdot\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})\cdot(3+2\sqrt{2})}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{12}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} = 1$

b) $= \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1} - 3\sqrt{5} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - 3\sqrt{5} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2\cdot(\sqrt{5}+1)}{4} - 3\sqrt{5} = \frac{(\sqrt{5}+1)^3}{4} - 3\sqrt{5} =$

$= \frac{5\sqrt{5}+15+3\sqrt{5}+1}{4} - 3\sqrt{5} = \frac{8\sqrt{5}+16}{4} - 3\sqrt{5} = \frac{4(2\sqrt{5}+4)}{4} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}+4-3\sqrt{5} = -\sqrt{5}+4$

c) $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{1^2-(\sqrt{3})^2}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{3}+3}{1-3}\right) = \left(1-\frac{\sqrt{3}+3}{-2}\right) =$

$= 1+\frac{\sqrt{3}+3}{2} = \frac{2+\sqrt{3}+3}{2} = \frac{\sqrt{3}+5}{2}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

14. Desarrolla los siguientes logaritmos:

a) ln $(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2 \cdot z^{-4}})$ = ln $\left(\sqrt{x^3}\right)$ – ln $(y^2 z^{-4})$ = ln (x^4) - $[ln(y^2) + ln(z^{-4})]$ = 4ln (x) -2ln (y) +4ln (z)

b) $log_3 \sqrt[4]{\frac{(x \cdot y)^5}{z^{1/2} \cdot e^2}} = \frac{5}{4} \cdot log_3(x) + \frac{5}{4} \cdot log_3(y) - \frac{5}{8} \cdot log_3(z) - \frac{5}{2} \cdot log_3(e)$

15. Simplifica la siguiente expresión:

$\log_2 5 - 3\log_2 a + \frac{7}{5} \log_2 9 \rightarrow \log_2 5 - 3 \log_2 a + \frac{7}{5}\log_2(3^2) \rightarrow \log_2 5 - 3 \log_2 a + \frac{7}{5} \cdot 2\log_2 3 \rightarrow$

$\rightarrow \log_2 5 - 3 \log_2 a + \frac{14}{5}\log_2 3 \rightarrow \log_2 5 - \log_2 a^3 + \log_2 \left(3^{\frac{14}{5}}\right) \rightarrow \log_2 \left(\frac{5 \cdot 3^{\frac{14}{5}}}{a^3}\right)$

16. La masa del Sol es 330000 veces la de la Tierra, aproximadamente, y esta es 5.98·1021 t. Expresa en notación científica la masa del Sol, en kilogramos.

5.98·1021 · 330000 = 2014841400

2014841400·1000 = 2014841400000 = 2,0148414x 10^{12} kg

17. El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de 10^{-18} g y el más grande es la ballena azul, que pesa, aproximadamente, 138 t. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de la ballena?

$$\frac{138.000.000\ g}{10^{-18}\ g} = 1.38 \cdot 10^{26}$$

Se necesitarían aproximadamente 1.38·10^{26} virus para alcanzar el peso de la ballena azul.

18. Los cinco países más contaminantes del mundo (Estados Unidos, China, Rusia, Japón y Alemania) emitieron 12 billones de toneladas de CO_2 en el año 1995, cantidad que representa el 53.5 % de las emisiones de todo el mundo. ¿Qué cantidad de CO_2 se emitió en el año 1995 en todo el mundo?

$\frac{12x100}{53.5} \approx 22{,}42$ **t.**

19. Expresa en notación científica:

a) Recaudación de las quinielas en una jornada de la liga de fútbol: 1628000 €.

1,628 x 10^6€

Textos Marea Verde

b) Toneladas de CO_2 que se emitieron a la atmósfera en 1995 en Estados Unidos 5228.5 miles de millones.

5.2285×10^{12}T.

c) Radio del átomo de oxígeno: 0.000000000066 m

6.6×10^{-11}m

20. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18}) = (3\cdot 8)\cdot(10^{-7}\cdot\ 10^{18}) = 24\cdot 10^{-7+18} = 24\cdot10^{11} = 2{,}4\cdot10^{12}$

b) $(4\cdot 10^{-12})\cdot(5\cdot 10^{-3}) = (4\cdot 5)\cdot(10^{-12}\cdot 10^{-3}) = 20\cdot 10^{-15} = 2\cdot 10^{-14}$

c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3}) = \frac{5\cdot10^{12}}{2\cdot10^{-3}} = 2{,}5\cdot 10^{15}$

d) $(3.1\cdot10^{12}) + (2\cdot10^{10})$

$3.1\cdot10^{12} + 2\cdot 10^{10} = (3.1\cdot 10^{2} + 2)\cdot 10^{10} = (310+2)\cdot 10^{10} = 3.12\cdot 10^{12}$

e) $(4\cdot 10^{5})^{-2} = 4^{-2}\cdot(10^{5})^{-2} = 0.0625\cdot 10^{-10} = 6.25\cdot 10^{-12}$

21. Expresa en notación científica y calcula:

a) $(75800)^4 : (12000)^4 = 3.30124\cdot 10^{19} : 2.0736\cdot\ 10^{16} \approx 1.59203\cdot 10^{35}$

b) $\frac{0.000541\cdot 103180000}{1520000\cdot 0.00302} = \frac{5.41\,x10^{-4}\cdot 1.0318\,x10^{8}}{1.52\,x10^{6}\cdot 3.02\,x10^{-3}} = \frac{5.582038\,x10^{4}}{4.5904\,x10^{3}} = 1.21602\ x10^{-12}$

c) $(0.0073)^2\cdot(0.0003)^2 = 5.329\cdot10^{-5}\cdot 9\cdot10^{-8} = 4.7961\cdot 10^{-12}$

d) $\frac{2700000-13000000}{0.00003-0.00015} = \frac{2.7\cdot10^{6}\ -1.3\cdot10^{7}}{3\cdot10^{-5}-1.5\cdot10^{-4}} = \frac{-10.3\cdot10^{6}}{-12\cdot10^{-5}} = \frac{103\cdot10^{10}}{12} = 8.58333\cdot10^{10}$

22. Efectúa y expresa el resultado en notación científica:

a) $\frac{3\cdot10^{-5}+7\cdot10^{-4}+10^{1}\cdot10^{-1}}{10^{6}-5\cdot10^{5}} = \frac{3\cdot10^{-5}+70\cdot10^{-5}}{10^{6}-5\cdot10^{5}} = \frac{3\cdot10^{-5}+70\cdot10^{-5}}{10^{5}(10-5)} = \frac{3\cdot10^{-5}+70\cdot10^{-5}}{10^{5}\cdot5} = \frac{73\cdot10^{-5}}{5\cdot10^{5}} =$

$\frac{73}{5}10^{-5-5} = 14{,}6\cdot10^{-10} = 1{,}46\cdot10^{-9}$

b) $\frac{7{,}35\cdot10^{4}}{5\cdot10^{-3}} + 3{,}2\cdot10^{7} = \frac{7{,}35}{5}10^{4+3} + 3{,}2\cdot10^{7} = 1{,}47\cdot10^{7} + 3{,}2\cdot10^{7} = 4{,}67\cdot10^{7}$

c) $(4.3\cdot10^{3} - 7.2\cdot\ 10^{5}) = 4.3\cdot10^{3}\cdot10^{2}\cdot10^{-2} = 430\cdot10^{5}\cdot10^{-2} =$

$= 0.043\cdot10^{5} + 7{,}2\cdot10^{5} = 0.043\cdot10^{5} - 7.2\cdot10^{5} = (0.043-7.2)\cdot10^{5} = -7.157\cdot10^{5}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

23. Que resultado es correcto de la siguiente operación expresada en notación científica:

$(5.24 \cdot 10^6) \cdot (8.32 \cdot 10^5)$

a) $4.35968 \cdot 10^{12}$

b) $43.5968 \cdot 10^{13}$

c) $4.35968 \cdot 10^{11}$

d) $4.35968 \cdot 10^{13}$

$$5{,}24 \cdot 10^6 \cdot 8{,}32 \cdot 10^5 = 43{,}5968 \cdot 10^{11} \rightarrow 4{,}35968 \cdot 10^{12}$$

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. **El número $8^{\frac{-4}{3}}$ vale:**

   a) un dieciseisavo

   b) Dos

   c) Un cuarto

   d) Un medio.

$$8^{\frac{-4}{3}}=\sqrt[3]{8^{-4}}=\sqrt[3]{(2^3)^{-4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2^{12}}}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

2. **Expresa como potencia de base 2 cada uno de los números que van entre paréntesis y efectúa después la operación:**

   a) $2^{-\frac{1}{3}}$

   b) $2^{-\frac{5}{4}}$

   c) $2^{-\frac{5}{3}}$

   d) 2^{-5}

$$(16^{1/4})(\sqrt[6]{4})(\frac{1}{8})=(\sqrt[4]{16})(\sqrt[6]{4})(2^{-3})=(2)^{\frac{4}{4}}\cdot(2)^{\frac{2}{6}}\cdot(2^{-3})=(2)(2^{\frac{1}{3}})(2^{-3})=2^{\frac{-5}{3}}$$

3. **El número: $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}$ es igual a:**

   a) $6^{\frac{1}{4}}$

   b) $2^{\frac{1}{3}}$

   c) $2^{\frac{5}{6}}\cdot 6^{\frac{1}{9}}$

   d) 2

$$\sqrt[3]{4\sqrt[3]{6\sqrt{8}}}=\sqrt[9]{4^3\cdot 6\cdot\sqrt{8}}=\sqrt[18]{8\cdot 4^6\cdot 6^2}=\sqrt[18]{2^3\cdot(2^2)^6\cdot(2\cdot 3)^2}=\sqrt[18]{2^{17}\cdot 3^2}=2^{\frac{17}{18}}\cdot 3^{\frac{1}{9}}$$

4. **¿Cuál es el resultado de la siguiente expresión si la expresamos como potencia única?: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}}$**

   a) $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

   b) $\frac{2}{2\sqrt[3]{2}}$

   c) $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$

   d) $\sqrt[3]{2}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{8}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{2\sqrt[3]{2}}$$

5. Simplificando y extrayendo factores la siguiente expresión tiene un valor:

a) $125\,abc^2\,\sqrt[4]{ab^2c}$

b) $5a^2bc\sqrt[4]{a^2b^3c^2}$

c) $5abc\sqrt[4]{a^3b^2c^3}$

d) $5abc\,\sqrt[4]{a^2b^3c^2}$

$$\sqrt{\sqrt{625a^6b^7c^6}} = \sqrt[4]{5^4a^6b^7c^6} = 5abc\sqrt[4]{a^2b^3c^2}$$

6. ¿Cuál de los siguientes valores es igual a $a^{\frac{3}{2}}$?

a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2$

b) $a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{-1}$

c) $(a^2)^2$

d) $a^3 \cdot a^{-2}$

a) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2 = a^{\frac{5}{2}}$ NO

b) $a^{\frac{5}{2}} \cdot a^{-1} = a^{\frac{5}{2}-1} = a^{\frac{3}{2}}$ SI

7. ¿Cuál es el resultado de esta operación con radicales?: $\sqrt{63} - \frac{5}{3}\sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3}$

a) $2 \cdot \sqrt{7}$

b) $\frac{11}{8} \cdot \sqrt{7}$

c) $\sqrt{7}$

d) $-\frac{2}{5} \cdot \sqrt{7}$

$$\sqrt{63} - \frac{5}{3}\sqrt{28} + \frac{\sqrt{112}}{3} = \sqrt{3^2 \cdot 7} - \frac{5}{3}\sqrt{2^2 \cdot 7} + \frac{\sqrt{2^4 \cdot 7}}{3} = 3\sqrt{7} - \frac{5}{3} \cdot 2\sqrt{7} + 2^2\frac{\sqrt{7}}{3} = 3\sqrt{7} - \frac{10}{3} \cdot \sqrt{7} + 4\frac{\sqrt{7}}{3} =$$

$$= 3\sqrt{7} - \frac{10}{3} \cdot \sqrt{7} + \frac{4\sqrt{7}}{3} = \frac{3}{3}\sqrt{7} = \sqrt{7}$$

8. Una expresión con un único radical de: $\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{(x+2)^3}\sqrt{(x+1)}$ **está dada por:**

a) $\sqrt[6]{x^2(x+2)(x+1)}$

b) $\sqrt[8]{x^2(x+2)^3(x+1)}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

c) $\sqrt[12]{x^8(x+2)^9(x+1)^6}$

d) $\sqrt[12]{x^2(x+2)^3(x+1)}$

$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{(x+2)^3}\sqrt{(x+1)} = \sqrt[12]{x^8}\sqrt[12]{(x+2)^9}\sqrt[12]{(x+1)^6} = \sqrt[12]{x^8(x+2)^9(x+1)^6}$

9. Para racionalizar la expresión: $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ hay que multiplicar numerador y denominador por:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

b) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$

c) $2+\sqrt{5}$

d)$\sqrt{5}+\sqrt{3}$

10. ¿Cuál es el resultado en notación científica de la siguiente operación?:

$5{,}83\cdot 10^9+6{,}932\cdot 10^{12}-7{,}5\cdot 10^{10}$

a) $6.86283 \cdot 10^{12}$

b) $6.86283 \cdot 10^{13}$

c) $6.8623 \cdot 10^{11}$

d)$6.8628 \cdot 10^{12}$

$5{,}83\cdot 10^9+6{,}932\cdot 10^{12}-7{,}5\cdot 10^{10} = (5{,}83 + 6{,}932 \cdot 10^3 - 7{,}5 \cdot 10)\cdot 10^9 =$

$=(5{,}83 + 6{,}932 \cdot 10^3 - 75)\cdot 10^9 = (-69{,}17 + 6932)\cdot 10^9 = 6862{,}83 \cdot 10^9 =$

$=6{,}86283 \cdot 10^{12}$

11. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación expresado en notación científica?: $\frac{5.24\cdot 10^{10}}{6{,}3\cdot 10^{-7}}$

a) $0.8317 \cdot 10^{17}$

b) $8.317 \cdot 10^{16}$

c) $8.317 \cdot 10^{15}$

d) $83.17 \cdot 10^{16}$

$$\frac{5.24\cdot 10^{10}}{6{,}3\cdot 10^{-7}} = \frac{\frac{131}{25}\cdot 10^{17}}{\frac{63}{10}} = \frac{262\cdot 10^{17}}{315} = 8.317\cdot 10^{16}$$

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 3: Expresiones algebraicas. Polinomios

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: Pilar Paramio Barrigas y
Hugo Bastante Gómez-Limón
IES ATENEA, CIUDAD REAL
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese es: (0,05·M) +(0,12·N) = 0,05·M + 0,12·N euros.

Multiplicamos por 0,05 los minutos de conversación, por 0, 12 el número de llamadas y el resultado lo sumamos.

2. Recuerda la expresión algebraica que nos proporciona la longitud de una circunferencia

Longitud= 2πr

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:

a) La mitad del opuesto de su suma.

$$-\frac{1}{2}(x+y)$$

b) La suma de sus cubos

$$x^3+y^3$$

c) el cubo de su suma

$$(x+y)^3$$

d) El inverso de su suma

$$\frac{1}{(x+y)}$$

e) La suma de sus inversos

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta. Precio

final= Precio original- descuento, si el precio en etiqueta es x

Precio final= x – (0,2 ·x) Precio final= x – 0,2·x Precio final= 0,8·x

5. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 20 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

El % de descuento será $20+5(n-1)$. En el caso de 10 artículos será por tanto $20+(5\cdot 9)$ =65 % de descuento.

6. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $x^2+7x-12$ para x= 0.

$0^2+7(0)-12 = -12$

b) $(a+b)^2-(a^2+b^2)$ Para a = -3 y b = 4

$$\left(((-3)+4)^2-((-3)^2+4^2)\right)=-24$$

c) a^2-5a+2 para $a=-1$

$$(-1)^2-\left(5\cdot(-1)\right)+2=8$$

7. Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: 10x + 20y + 30z

a) x=1, y=2, z=1

$$(10\cdot 1)+(20\cdot 2)+(30\cdot 1)=80$$

b) x=2, y=0, z=5

$$(10\cdot 2)+(20\cdot 0)+(30\cdot 5)=170$$

c) x=0, y=1, z=0

$$(10\cdot 0)+(20\cdot 1)+(30\cdot 0)=20$$

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$

$$x^2-2x^2+(-x-3x)`+(2x^3-2x^2+x-2)$$

$$(-x^2-4x)+(-4x^2-4x-2)$$

$$-x^2-4x-4x^2-4x-2$$

$$-5x^2-8x-2$$

b) $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

$(-x^4+x^3+2x-3-3x^2-5x+4+2x^3-x+5)$

$$\left(x^4+(x^3+2x^3)-3x^2+(2x-5x-x)+(-3+4+5)\right)$$

$$(-x^4-3x^2-4x+6)$$

9. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $3x^4+5x^3+x^2+4x-1$

$-3x^4-5x^3-x^2-4x+1$

b) $7x$

$-7x$

c) $-x^4+3x^2$

x^4-3x^2

BY NC SA
Textos Marea Verde

10. Considera los polinomios p = x^3 - 5x^2 + 2, q = 3x^2 + 3x + 1 así como el polinomio suma s = p + q . Halla los valores que adopta cada uno de ellos para x = -2, es decir, calcula p (-2), q (-2) y s (-2). Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

p (-2) = $-(-2x^3) - 5(-2) + 2 = -(-8) + 10 + 2 = 20$

q (-2) = $3(-2)^2 + 3(-2) + 1 = 3(4) - 6 + 1 = 12 - 6 + 1 = 7$

s (-2) = $p(-2) + q(-2) = 20 + 7 = 27$

Ahora, vamos a estudiar la relación entre estos valores. Parece que la relación es que el valor de $s(-2)$ es la suma de los valores de [p (-2) y q (-2)] lo cual tiene sentido, ya que s (x) es la suma de p (x) y q (x). En otras palabras, s (-2) = p (-2) + q (-2).

11. Obtén el valor del polinomio p=-x^3 -5x +2 en x=3. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en x=3?

$$p(3) = -3 \cdot 3 - 5(3) + 2$$
$$p(3) = -27 - 15 + 2$$
$$p(3) = -38$$

Ahora, para encontrar el valor del polinomio opuesto de (p) en x=3 simplemente toma el opuesto de (p (3)): -p (3) = - (-38) = 38

El polinomio opuesto de \(p\) toma el valor de 38 cuando x=3

12. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x)\ y\ (-3x^2)$

$(-4x^3) \cdot (-3x^2) = 12x^5$; $2x \cdot (-3x^2) = -6x^3$

$(-4x^3 + 2x) \cdot (-3x^2) = 12x^5 - 6x^3$

b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

$$(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4) = 2x^4 \cdot (-3x) + 2x^4 \cdot (-4) + x \cdot (-3x) + x \cdot (-4)$$

$-2x^4 \cdot (-3x) = -6x^5$; $-2x^4 \cdot (-4) = -8x^4$; $-x \cdot (-3x) = -3x^2$; $-x \cdot (-4) = -4x$

Finalmente, suma estos términos para obtener el resultado final:$-6x^5 - 8x^4 - 3x^2 - 4x$

c) $(2x^3 + x^2 - x)y(3x^2 - x)$

$(2x^3 + x^2 - x) \cdot (3x^2 - x) = 2x^3 \cdot 3x^2 + 2x^3 \cdot (-x) + x^2 \cdot 3x^2 + x^2 \cdot (-x) - x \cdot 3x^2 - x \cdot (-x)$

$-2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5$; $-2x^3 \cdot (-x) = -2x^4$; $-x^2 \cdot 3x^2 = 3x^4$; $-x^2 \cdot (-x) = -x^3$

$-x \cdot 3x^2 = 3x^3$; $-x \cdot (-x) = -x^2$

Finalmente, sumando estos términos obtenemos el resultado final: $6x^5 - 2x^4 + 3x^4 - x^3 - 3x^3 - x^2$

Textos Marea Verde

Ahora, simplificando los términos semejantes:$6x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2$

d) $1 \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

El resultado es$-7x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

13. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

La diferencia de polinomios $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$ es igual a$-4x^3 + 3x^2 + 2x$.

b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

La diferencia de polinomios $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$ es igual a $2x^4 + x + 3x + 4$ que se simplifica a $2x^4 + 4x + 4$.

c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

La diferencia de polinomios $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$ es igual a $3x^2 - x - 2x^3 - x^2 + x$. Combinando términos semejantes: $3x^2 - x - 2x^3 - x^2 + x = -2x^3 + 2x^2 - x$.

14. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $4x^3 - 3x^2 + 2x$

Para convertir el polinomio $4x^3 - 3x^2 + 2x$ en un polinomio Mónico, hay que dividir cada término por el coeficiente principal, que en este caso es 4.

$(4x^3 - 3x^2 + 2x)$ dividido entre 4, resultado $x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

b) Para convertir el polinomio $-2x^4 + x - 1$ en un polinomio Mónico, hay que dividir todos los términos por el coeficiente principal, que en este caso es -2.

$(-2x^4 + x - 1)$ Dividido entre –2 , resultado $x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c) $-x^2 + x - 7$

Para convertir el polinomio $-x^2 + x - 7$en un polinomio mónico, hay que dividir todos los términos por el coeficiente principal, que en este caso es -1.

$-x^2 + x - 7$ dividido entre -1 es $x^2 - x + 7$

15. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$

$3x \cdot 2x^2 = 6x^3$; $3x \cdot 4x = 12x^2$; $3x \cdot (-6) = -18x$

Ahora, sumamos estos términos:

$$6x^3 + 12x^2 - 18x$$

Textos Marea Verde

Eso es la forma simplificada del producto $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$.

b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

$$(3x) \cdot (4x) = 12x^2 \;\; ; \;\; (3x) \cdot (6) = 18x \;\; ; \;\; (-4) \cdot (4x) = -16x \;\; ; \;\; (-4) \cdot (6) = -24$$

Ahora sumamos estos términos: $12x^2 + 18x - 16x - 24$

Simplificando: $12x^2 + 2x - 24$

c) $(2a^2 - 5b) * (4b - 3a^3)$

$(2a^2) \cdot (4b) = 8a^2b \;\; ; \;\; (2a^2) \cdot (-3a^3) = -6a^5 \;\; ; \;\; (-5b) \cdot (4b) = -20b^2 \;\; ; \;\; (-5b) \cdot (-3a^3) = 15a^3b$

Ahora sumamos estos términos: $8a^2b - 6a^5 - 20b^2 + 15a^3b$

d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

$$(3a - 6) \cdot (8 - 2a) = (3a \cdot 8) + (3a \cdot (-2a)) + (-6 \cdot 8) + (-6 \cdot (-2a))$$

Esto se simplifica a:

$$24a - 6a^2 - 48 + 12a$$

Luego, multiplicamos el resultado anterior por el tercer paréntesis (9a -2):

$(24a - 6a^2 - 48 + 12a) \cdot (9a - 2) =$

$= (24a \cdot 9a) + (24a \cdot (-2)) + (-6a^2 \cdot 9a) + (-6a^2 \cdot (-2)) + (-48 \cdot 9a) + (-48 \cdot (-2)) + (12a \cdot 9a) + (12a \cdot (-2))$

Simplificando:

$$216a^2 - 48a - 54a^3 + 12a^2 - 432a + 96 + 108a^2 - 24a$$

Ahora, sumamos todos los términos semejantes:

$$(216a^2 + 12a^2 + 108a^2) + (-54a^3) + (-48a - 432a - 24a) + 96$$

Esto se simplifica a:

$$336a^2 - 54a^3 - 504a + 96$$

16. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$

$x^2 \cdot (-2x^2) = -2x^4 \;\; ; \;\; x^2 \cdot (-3x) = -3x^3 \;\; ; \;\; x^2 \cdot 1 = x^2$

Ahora, multiplicamos los resultados por el tercer polinomio:

$-2x^4 \cdot 2x^3 = -4x^7 \;\; ; \;\; -3x^3 \cdot 2x^3 = -6x^6 \;\; ; \;\; x^2 \cdot 2x^3 = 2x^5$

Finalmente, sumamos todos estos términos: $-4x^7 - 6x^6 + 2x^5$

Este es el producto de los tres polinomios: $-4x^7 - 6x^6 + 2x^5$

b) $(2x - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

Textos Marea Verde

$(2x-3)\cdot(-3x^2) = -6x^3+9x^2$; $(2x-3)\cdot(-5x) = -10x^2+15x$; $(2x-3)\cdot 4 = 8x-12$

Ahora, multiplicamos estos resultados por el tercer polinomio (-x):

$(-6x^3+9x^2)\cdot(-x) = 6x^4-9x^3$; $(-10x^2+15x)\cdot(-x) = 10x^3-15x^2$;

$(8x-12)\cdot(-x) = -8x^2+12x$

Finalmente, sumamos todos estos términos: $6x^4-9x^3+10x^3-15x^2-8x^2+12x$

Simplificando los términos semejantes: $6x^4+x^3-23x^2+12x$

Este es el resultado del producto de los tres polinomios: $6x^4+x^3-23x^2+12x$.

17. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-15x^3-20x^2+10x$

$$-15x^3-20x^2+10x = 5x(-3x^2-4x+2)$$

b) $24x^4-30x^2$

$$24x^4-30x^2 = 6x^2(4x^2-5)$$

18. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio p (x)= $6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio q (x) = $2x^2-x+3$.

1. Primera etapa:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \hline -6x^4+3x^3-9x^2 & 3x^2 \\ \hline 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

2. Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \hline -6x^4+3x^3-9x^2 & 3x^2+4x \\ \hline 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ -8x^3+4x^2-12x & \\ \hline -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

3. Las tres etapas:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \hline -6x^4+3x^3-9x^2 & 3x^2+4x-2 \\ \hline 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ -8x^3+4x^2-12x & \\ \hline -4x^2-9x-2 & \\ 4x^2-2x+6 & \\ \hline -11x+4 & \end{array}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

19. Divide los siguientes polinomios:

a)

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-x-7 & x^2-2x+4 \\ \hline -5x^2+7x+7 & 2x-5 \\ +5x^2-10x-20 & \\ \hline -3x-13 & \end{array}$$

$2x^3 : x^2 = 2x$

$2x(x^2-2x+4) =$
$= 2x^3-4x^2+8x$

$-5x^2 : x^2 = -5$
$-5(x^2-2x+4) =$
$= -5x^2+10x-20$

b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ ***Entre*** $5x^3-x^2-x+3$

$$\begin{array}{l|l} -10x^3-2x^2+3x+4 & 5x^3-x^2-x+3 \\ +10x^3+2x^2+2x+6 & -2 \\ \hline 5x+10 & \end{array}$$

$-10x^3 : 5x^3 = -2$
$-2(5x^3-x^2-x+3) =$
$= -10x^3+2x^2+2x-6$

20. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca q (x)= x^2+ x – 3 como el polinomio cociente y r (x) -$3x^2$ +1 como resto 21.

Usamos la división de polinomios. El dividendo, se puede obtener multiplicando el divisor por el cociente y sumándole el resto:

$(x^2+x-3)(x^2+x-3)+(-3x^2+1)=x^4+2x^3-8x^2-6x+9-3x^2+1$

Simplificando: $x^4+2x^3-11x^2-6x+10$

Luego D(x) = $x^4+2x^3-11x^2-6x+10$ y d(x) = x^2+x-3 son los dos polinomios.

21. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{2x+1}{x^2+1}+\frac{3}{x}=\frac{x\cdot(2x+1)+3(x^2+1)}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{2x^2+x+3(x^2+1)}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{2x^2+x+3x^2+3}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{2x^2+x+3x^2+3}{x^3+x}=\frac{5x^2+x+3}{x^3+x}$

b) $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+1}=\frac{x+1-2(x-2)}{(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{x+1-2x+4}{(x-2)\cdot(x+1)}=\frac{x+1-2x+4}{x^2+x-2x-2}=\frac{-x+1+4}{x^2+x-2x-2}=\frac{-x+5}{x^2-x-2}$

c) $-\frac{x}{x^2+3x}\cdot\frac{1}{1-x}=-\frac{x}{x\cdot(x+3)}\cdot\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{x\cdot+3}\cdot\frac{1}{1-x}=$

$=\frac{1}{(x+3)\cdot(1-x)}=\frac{1}{x-x^2+3-3x}=\frac{1}{-2x-x^2+3}=\frac{1}{-x-2x+3}$

d) $\frac{(x-2)}{(x^2+3x)} : \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{x-2}{x\cdot(x+3)} : \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-2}{x\cdot(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x-2} = \frac{(x+3)}{x\cdot(x+3)} = \frac{1}{x}$

22. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{3x-2}{x^2} = \frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{x(3x-2)}{x^3} = \frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{3x^2-2x}{x^3} = \frac{2x^2-x-1}{x^3}$

b) $\frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{4}{x+3} = \frac{x-2}{x(x+3)} - \frac{4x}{x(x+3)} = \frac{3x-2}{x(x+3)}$

23. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b \quad (8a^4b^2)/(2a^2b) = (8a^4b^2)/(2a^2b) = 4a^{(4-2)}b^{(2-1)} = 4a^2b$

b) $\frac{4x^2y^2-3xy^2}{2xy} = 2xy^2 - \frac{3}{2}y(4x^2y^2 - 3xy^2)/(2xy) = 2xy^2 - 3/(2y).$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12} = \frac{x^2-3x}{x+4}$

$$\frac{(3x^2-9x)}{(6x+12)} = \frac{3x\cdot(x-3)}{6(x+2)} = \frac{x\cdot(x-3)}{2\cdot(x+2)}$$

d) $\frac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b} = \frac{3ab+2a-2}{b+8a}$

$$\frac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b} = \frac{2ab(3ab+2a-2)}{2ab(b+8a)} = \frac{3ab+2a-2}{b+8a}$$

24. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x) : 3 = (x^3 - 3x^2 - 2x)$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21) : 7 = (a^3 - 10a^2 - 3)$

c) $(25x^4 - 10x^2) : 5x^2 = (5x^2 - 2)$

d) $(3x^2y^3 - 8xy^2) : xy^2 = (3x - 8)$

25. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15} = \frac{3x(x-2)}{3(3x^2+5)} = \frac{x(x-2)}{3x^2+5}$

b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2} = \frac{a^2(a-5)}{a^2(7a+4)} = \frac{a-5}{7a+4}$

Textos Marea Verde

c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy} = \frac{xy(x+3y)}{4xy} = \frac{x+3y}{4}$

d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab} = \frac{ab(2ab+3)}{ab(a^2-1)} = \frac{2ab+3}{a^2-1}$

26. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

a) $-2x^3 + 2x = -2x(2x^2 - 1)$

b) $-6x^2 + 5x + 6 = (2x - 3) \cdot (-3x - 2)$

c) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = 3x \cdot (2x^3 + x^2 - 1 + 2)$

d) $-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6$

$-6x^4 + 3x^3 - 3x + 6 = (2x^2 - x + 2) \cdot (-3x^2 - 2x - 3)$

27. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3 - x^2 + 3x - 1$

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $6x^4 - x^3 + 3x^2 - x$

28. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $x = 3\ de\ x^3 - 3x^2 + 1;\ No\ es\ raiz$

$P\ (3) = 3^3 - 3\ (3)^2 + 1 = 1$

b) $x = -2\ de\ x^3 + 3x^2 + 3x + 2;\ Sí\ es\ raiz$

$P\ (-2) = (-2)^3 + 3\ (-2)^2 + 3x\ (-2) + 2 = 0$

c) $x = 1\ de\ x^3 - 3x^2 + x + 1;\ Sí\ es\ raiz$

$P\ (1) = 1^3 - 3\ (1)^2 + 1 + 1 = 0$

d) $x = 0\ de\ x^3 - 3x^2 + 1;\ No\ es\ raiz$

$P\ (0) = 0^3 - 3\ (0)^2 + 1 = 1$

e) $x = -1\ de\ x^3 - 3x^2 - x + 3;\ Si\ es\ raiz$

$P\ (-1) = (-1)^3 - 3\ (-1)^2 - 1(-1) + 3 = 0$

29. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real $\alpha 2$

a) Si es una raíz de $p_1(x)$ ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$

No necesariamente: α =0 es una raíz de, $p_1(x) = x$, pero si $p_2(x) = 1$; $\alpha = 0$ no es una raíz de $p_1(x) + p_2(x) = x + 1$

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$ ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$

Sí, ya que $p1(\alpha) \cdot p2(\alpha) = 0 \cdot p2(\alpha) = 0$

c) Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio 4· $p_1(x)$

Textos Marea Verde

Son las mismas ya que $p1(\alpha) = 0 \leftrightarrow 4p1(\alpha) = 0$

30. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

$$P(x) = (x^2 + x - 2)\,(x-3) \rightarrow P\,(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Las raíces de este polinomio son x = 1, x = -2 y x = 3, y son todas distintas entre sí.

31. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

$$P(x) = (x-2)^2\,(x-1)$$

$$P(x) = (x^2 - 4x + 4)\,(x-1) \rightarrow P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

En este polinomio, la raíz x = 1 se repite dos veces.

32. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

$$P(x) = (x-2)^3$$

La única raíz de este polinomio es x = 2

33. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera admite al número 0 como raíz.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \ldots . + a_1 x + a_0$$

$a_0 = 0$ Debe ser nulo el término independiente.

34. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots \ldots . + a_1 x + a_0$ ***admite al número 1 como raíz.***

La suma de los coeficientes ha de ser 0 ya que

$$a_n 1^n + a_{n-1}1^{n-1} + \cdots \ldots . + a_1 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} \ldots \ldots + a_1 + a_0 = 0$$

35. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) x+7 ; (-7)

b) -x+5 ; (-5)

c) 2x-3 ; (3/2)

d) -4x-9 ; (-9/4)

e) -2x ; (0)

i) x^3 +x ; (0)

f) x^2 −3x ; (0 y 3)

g) $4x^2 - x - 3$; (1 y -3/4)

BY NC SA
Textos Marea Verde

h) $x^3 - x$; (0,1,-1)

36. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios

a) $-2x^2 + x + 1 \quad entre \quad x - 1$

	-2	1	1
1		-2	-1
	-2	-1	0

b) $x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \quad entre \quad x + 2$

	1	2	-2	1
-2		-2	0	4
	1	0	-2	5

c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x - 1$

	4	-3	0	-1
1		4	1	1
	4	1	1	0

d) $x^3 - 9x + 1$ *entre* $x - 3$

	1	0	-9	1
3		3	9	0
	1	3	0	1

37.Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha = 3$ ***de*** $x^3 - 4x^2 + 5$

Textos Marea Verde

	1	−4	0	5
3		3	−3	−9
	1	−1	−3	−4

No es raíz

b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

	−1	−2	1	2
−2		2	0	−2
	−1	0	1	0

Sí es raíz

c) $\gamma = 1 \ de \ \ -2x^4 + x + 1$

	-2	0	0	1	1
1		-2	-2	- 2	-1
	-2	- 2	-2	-1	0

Sí es raíz

d) $\sigma = -1 \ de \ \ 2x^3 + 2x^2$

	2	2
-1		-2
	2	0

Sí es raíz

38. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-x^3 + 2x^2 + x + 2$ en x=3

	−1	2	1	2
3		−3	−3	−6
	−1	−1	−2	−4

Su valor es – 4

39. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ entre $2x + 6$

Dividimos ambos polinomios entre 2: $(\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ y $(x + 3)$

Textos Marea Verde

	$\frac{1}{2}$	3	3	2
- 3		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{13}{2}$

Nos queda C(x) = $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ y resto $\frac{13}{2}$

40. Confecciona una hoja de cálculo que te permita dividir un polinomio usando la Regla de Ruffini.

41. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Candidatos: 1,-1, 2 y -2; Sólo 1 es raíz y no tiene más raíces reales

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

Candidatos 1,– 1, 3 y -3. -1 y -3 son raíces y queda $x^2 + 1$ que no tiene mas raíces reales

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

1, -1, 3, -3, 9 y -9. 3y-3 son raíces y queda 2x+1 que no tiene más raíces enteras: x=-1/2

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Las posibles raíces, además de 0, son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6 ; 0 y -2 son raíces y queda que no tiene más raíces reales.

42. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, $-\frac{1}{2}$ ***es raíz de un polinomio*** $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

	2	1	−18	−9
3		6	21	9
	2	7	3	0
−3		−6	−3	
	2	1	0	
$-\frac{1}{2}$		−1		
	2	0		

BY NC SA
Textos Marea Verde

43. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2 + 4x + 1$

los posibles candidatos a raíces racionales son: ±1 y ±1/3.

Ahora, podemos probar estos candidatos en el polinomio para determinar cuáles son realmente raíces. Para hacerlo, sustituimos cada uno de estos valores en el polinomio y verificamos si el resultado es igual a cero.

$3(1)^2 + 4(1) + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$ (no es igual a cero)

$3(-1)^2 + 4(-1) + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$ (igual a cero)

$3(1/3)^2 + 4(1/3) + 1 = 1/3 + 4/3 + 1 = 2$ (no es igual a cero)

$3(-1/3)^2 + 4(-1/3) + 1 = 1/3 - 4/3 + 1 = 0$ (igual a cero)

Por lo tanto, las raíces racionales son x = -1 y x = 1/3.

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

los posibles candidatos a raíces racionales son:

±1/1, ±2/1, ±4/1, ±1/2, ±2/2, ±4/2.

Ahora, podemos probar estos candidatos en el polinomio para determinar cuáles son realmente raíces. Para hacerlo, sustituimos cada uno de estos valores en el polinomio y verificamos si el resultado es igual a cero.

$2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 4 = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$ (no es igual a cero)

$2(-1)^3 - 9(-1)^2 + 12(-1) - 4 = -2 - 9 - 12 - 4 = -27$ (no es igual a cero)

$2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) - 4 = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$ (igual a cero)

$2(-2)^3 - 9(-2)^2 + 12(-2) - 4 = -16 - 36 - 24 - 4 = -80$ (no es igual a cero)

$2(1/2)^3 - 9(1/2)^2 + 12(1/2) - 4 = 1/4 - 9/4 + 6 - 4 = -8$ (no es igual a cero)

$2(-1/2)^3 - 9(-1/2)^2 + 12(-1/2) - 4 = -1/4 - 9/4 - 6 - 4 = -21/2$ (no es igual a cero)

Por lo tanto, las raíces racionales de $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ son x = 2 y x = 1/2. Las demás opciones no son raíces racionales de este polinomio.

44. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{x\cdot(x+4)}{(x+1)(x-2)(x+4)} = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$

b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)(x+4)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+4)}$

c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+x-6)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)(x+3)}$

Textos Marea Verde

45. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$

$\frac{5}{-3(x-4)}+\frac{x+2}{x\cdot(x-4)}=\frac{-5x+3(x+2)}{3x\cdot(x-4)}=\frac{-5x+6x+2}{3x\cdot(x-4)}=\frac{x+2}{3x\cdot(x-4)}$

b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

$\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{-x}{(x-1)(x-1)}-\frac{(3x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x(x+1)}{(x-1)(x-1)(x+1)}-\frac{(3x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{-x^2-x-(3x^2-4x+1)}{(x-1)(x-1)(x+1)}=\frac{-4x^2-5x+1}{(x-1)(x-1)(x+1)}$

46. Realiza los cálculos:

a) $(1-3a)^2=1-6a+9a^2$

b) $(-x+3)^2=x^2-6x+9$

c) $(-3x-2)^2=9x^2+12x+4$

d) $(x^2-1)^3=x^6-3x^4+3x^2-1$

e) $(4x+2)^3=64x^3+96x^2+96x+8$

47. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+ac+2bc$

b) $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

48. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

b) $\left(3x+\frac{y}{3}\right)^2=9x^2+2xy+\frac{y^2}{9}$

c) $\left(5x-\frac{5}{x}\right)^2=25x^2-50+\frac{25}{x^2}$

d) $(3a-5)^2=9a^2-30a+25$

e) $(x^2-1)^3=x^6-3x^4+3x^2-1$

f) $\left(\frac{3}{5y}-\frac{2}{y}\right)^2=\frac{9}{25}y^2-\frac{12}{5}+\frac{4}{y^2}$

49. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2+6a+9=(a+3)^2$

Textos Marea Verde

b) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

c) $b^2 - 10b + 25 = (b - 5)^2$

d) $4y^2 + 12y + 9 = (2y - 3)^2$

e) $a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)$

f) $y^4 + 6y^2 + 9 = (y^2 + 3)$

50. Efectúa estos productos:

a)$(4x + 3y) \cdot (4x - 3y) = 16x^2 - 9y^2$

b) $(2x^2 + 4) \cdot (2x^2 - 4) = 4x^4 - 16$

c) $(-x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x) = 9x^2 - x^4$

51. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 2)^2$

b) $3x^2 + 18x + 27 = 3(x^2 + 6x + 9) = 3(x + 3)^2$

c) $4x^5 - 16x^3 = 4x^3(x^2 - 4) = 4x^3(x - 2)(x + 2)$

52. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1)(3x - 1) = 9x^2 - 1$

b) $(2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$

c) $(x^2 + 5) \cdot (x^2 - 5) = x^4 - 25$

d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5) = 9a^4 - 25$

53. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$

b) $4a^4 - 81b^2 = (2a^2 + 9b)(2a^2 - 9b)$

c) $49 - 25x^2 = (7 + 5x)(7 - 5x)$

d)$100a^2 - 64 = (10a + 8)(10a - 8)$

54. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\frac{x^2}{3x+3} = \frac{(x+1)(x-1)}{2\,(x+1)} = \frac{x-1}{3}$

b) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2-9} = \frac{2\,(x^2+6+9)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2\,(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{2\,(x+3)}{X-3} = \frac{2x+6}{x-3}$

c) $\frac{6-3a}{a^2-4} = \frac{-3(a-2)}{(a+2)\,(a-2)} = -\frac{3}{a+2}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un truco mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

1. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre (x)
2. Que lo multiplique por 10 $(10 \cdot x)$
3. Que al resultado anterior le sume 100 $(10x + 100)$
4. Que multiplique por 1000 lo obtenido $1000(10x + 100) = 10000x + 10000$
5. Que divida entre 10 000 la última cantidad $\frac{10000x+100000}{10000} = x + 10$
6. Que al resultado precedente le reste el número que escribió $x + 10 - x = 10$
7. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido? 10

2. En este otro ejercicio vamos a adivinar dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

1. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99).
2. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
3. Que al resultado anterior le sume 3
4. Que multiplique por 5 lo obtenido.
5. Que a la última cantidad le reste 15
6. Que multiplique el resultado precedente por 5
7. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
8. Dile al compañero que desvele cuál es el resultado de todos esos cambios.
9. ¿Qué debemos hacer para descubrir los dos números que escogió el compañero?

1)lamamos x al número de una cifra e y al número de dos cifras;

2)4x;

3) 4x+3;

4) 5(4x+3) =20x+15;

5) 20x + 15 -15 = 20x;

6) 5(20x) = 100x;

7) 100x + y;

8) El número de una cifra va multiplicado por 100, luego es la centena del número que te dicen, y el resto es el número de 2 cifras. Imagina que te dice: 825, entonces x = 8 e y = 25

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$

Textos Marea Verde

$$(x+2)(2x-14)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \; o \; 2x-14=0 \Leftrightarrow x=-2 \quad o \quad x=7$$

b) $\frac{-x}{-x^2-4x+4}$

$$x^2-4x+4=(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$$

c) $\frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

En todo número real la expresión puede ser evaluada.

d) $\frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

$$x^2+y^2=0 \Leftrightarrow x^2=0,\ y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$$

4. Una persona tiene ahorrados 1000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 3 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá.

Al final del primer año dispone de $1000+\frac{3}{100}1000=1030$.

Al cabo de dos años dispone de $1030+\frac{3}{100}1030$

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

En el primer año recuperamos $\mathrm{X}+\frac{\mathrm{i}}{100}\mathrm{X}=\frac{100+\mathrm{i}}{100}\mathrm{X}$. En el segundo año recuperamos $\frac{100+\mathrm{i}}{100}\mathrm{x}+\frac{\mathrm{i}}{100}\frac{100+\mathrm{i}}{100}\mathrm{x}=\left(\frac{100+\mathrm{i}}{100}\right)^2\mathrm{x}$ al cabo de n años recuperamos $\left(\frac{100+\mathrm{i}}{100}\right)^{\mathrm{n}}\mathrm{X}$

6. Construye un polinomio grado 2, p(x), tal que p (3) = -7

$$P(x)=x^2-6x+2$$
$$P(3)=3^2-6(3)+2=-7$$

7. Consideremos los polinomios p(x) = -5x³ + x² -3x -2, q(x)= 3x⁴ + 2x³ -x² + 2x + 7 y r (x) = 4x² +5x – 1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p+q+r=(-5x^3+x^2-3x-2)+(3x^4+2x^3-x^2+2x+7)+(4x^2+5x-1)=$
$=3x^4-3x^3+4x^2+4x+4$

b) $p-q=(-5x^3+x^2-3x-2)-(3x^4+2x^3-x^2+2x+7)=-3x^4-7x^3+2x^2-5x-9$

c) $p\cdot r=(-5x^3+x^2-3x-2)(4x^2+5x-1)=-20x^5-21x^4-2x^3-24x^2-7x+2$

d) $p\cdot r-q=(-20x^5-21x^4-2x^3-24x^2-7x+2)-(3x^4+2x^3-x^2+2x+7)=$
$=-20x^5-24x^4-4x^3-23x^2-9x-5$

8. Calcula los productos:

Textos Marea Verde

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right)=\left(\frac{2ax-3by}{6}\right)\cdot\left(-\frac{xy}{6}\right)=-\frac{ax^2y}{18}+\frac{bxy^2}{12}=$

b) $(0{,}3x-0{,}2y+0{,}1z)\cdot(0{,}1x+0{,}2y-0{,}3z)=0{,}03x^2+0{,}06xy-0{,}09xz-0{,}02xy-0{,}04y^2=$

$=+0{,}06yz+0{,}01xz+0{,}02yz-0{,}03z^2=0{,}03x^2+0{,}04xy-0{,}08xz-0{,}04y^2+0{,}08yz-0{,}03z^2$

c) $(x-1)(x-a)(x-b)=(x^2-(a+1)x+a)(x-b)=x^3-(a+1+b)x^2+(ab+a+b)x-ab$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $2x^4-3x^3-8x^2+9x-1$ *entre* $2x^2+3x-3$

Cociente: x^2-3x+2*; Resto:* $-6x+5$

b) $4x^5-5x^4+6x^3+2x^2-10x-6$ *entre* x^3+2x+3

Cociente: $4x^2-5x-2$*; Resto:* $9x$

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4):(x^2)=5x^2$

b) $(3x^2y^4z^6):\left(\left(\frac{1}{2}\right)xy^3z^5\right)=6xyz$

c) $(x^4+2x^2y+y^2):(x^2+y)=(x^2+y)^2:(x^2+y)=x^2+y$

11. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2-3x}+\frac{2x}{x^2-6x+9}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)^2}+\frac{2x^2}{x(x-3)^2}=\frac{x^2-4x+4+2x^2}{x(x-3)^2}=\frac{3x^2-4x+3}{x^3-6x^2+9x}$

b) $\frac{x-1}{x^2-3x}-\frac{2x}{x^2-6x+9}=\frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)^2}-\frac{2x^2}{x(x-3)^2}=\frac{x^2-4x+4-2x^2}{x(x-3)^2}=\frac{-x^2-4x+3}{x^3-6x^2+9x}$

c) $\frac{x-1}{x^2-3x}\cdot\frac{2x}{x^2-6x+9}=\frac{(x-1)(2x)}{x(x-3)\,(x-3)^2}=\frac{2(x-1)}{(x-3)^3}=\frac{2x-2}{x^3-9x^2+27x-27}$

d) $\frac{x-1}{x^2-3x}:\frac{2x}{x^2-6x+9}=\frac{(x-1)(x-3)^2}{x(x-3)(2x)}=\frac{(x-1)(x-3)}{2x^2}=\frac{x^2-4x+3}{2x^2}$

12. ***Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.***

$p(x)=x^2-5x+5\quad;\quad p(-5)=(-5)^2+5(-5)=0$

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, - 3 y 0.

$$p(x)=x\cdot(x-6)\cdot(x+3)=x^3-3x^2-18x$$
$$p(6)=(6)^3-3(6)^2-18(6)=0$$
$$p(-3)=(-3)^3-3(-3)^2-18(-3)=0$$
$$p(0)=(0)^3-3(0)^2-18(0)=0$$

Textos Marea Verde

14. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

$$x(x-1)(x^2+1) = x^4 - x^3 + x^2 - x$$

15. Encuentra un polinomio q(x) tal que al dividir p(x)= $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ***entre q (x) se obtenga como polinomio resto*** $r(x) = 5x^2 + 5x + 1$

p = q·d + r, luego q = (p – r) : d d puede ser el que quieras

$$p(x) - r(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (5x^2 + 5x + 1) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x$$

Tomando d(x) = x ; q(x) = $(x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x) : x = x^3 + x^2 - 4x - 4$

16. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3;\ Raices\ -1\ y\ -3$

$$p(-3) = 3\,(-3)^3 + 11\,(-3)^2 + 5\,(-3) - 3 = 0$$

$$p\,(-1) = 3\,(-1)^3 + 11\,(-1)^2 + 5\,(-1) - 3 = 0$$

b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3;\ No\ tiene\ raíces\ enteras.$

c) $3x^3 + 5x^2 + x - 1;\ Raíz\ 1\ (doble)$

$$p(-1)3(-1)^3 + 5\,(-1)^2 - 1 - 1 = 0$$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3;\ No\ tiene\ raíces\ enteras$

17. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

a) Tiene las raíces -1 y –3 y $3x - 1 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

b) La única raíz racional es $x = \frac{1}{3}$

c) Tiene raíz 1 (doble) y $3x - 1 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

d) La única raíz racional es $x = -\frac{1}{2}$

18. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3 = (x+3)(3x-1)(x+1)$

b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1 = (3x-1)(x+1)^2$

c) $2x^3 + x^2 - 6x - 3 = (2x+1)(x^2-3)$

d) $3x^3 - 6x^2 + x - 2 = (x-2)(3x^2+1)$

19. Calcula las potencias:

BY NC SA
Textos Marea Verde

a) $(x-2y+z)^2$

$$(x-2y+z)^2 = x^2-4xy+2xz-4y^2+4yz+z^2$$

b)$(3x-y)^3$

$$((3x-y)\text{^}3 = 27x\text{^}3 - 27x\text{^}2y + 9xy\text{^}2 - y\text{^}3$$

c)$\left((1/2)a+b^2\right)^2 = \frac{1}{4}a^2+ab^2+b^4$

d) $(x^3-y^2)^2 = x^6-2x^3y^2+y^4$

$$(x^3-y^2)^2 = x^6-2x^3y^2+y^4$$

20. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) $x^2+6x+9 = (x+3)^2$

b) $x^4-8x^2+16 = (x^2+4)^2$

c) $x^2+\sqrt{20}xy+5y^2 = \left(x+\sqrt{5}y\right)^2$

d) $x^4-2x^3+x^2+2x+1;\ No\ se\ puede$

e) $x^4-2x^3+x^2+2x+1;\ No\ se\ puede$

f) $x^2-36 = (x+6)(x-6)$

g) $5x^2+1;\ No\ se\ puede$

h) $5x^2-11 = \left(\sqrt{5x}+\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{5x}-\sqrt{11}\right)$

i) $x^2-3y^2 = \left(x+\sqrt{3y}\right)\left(x-\sqrt{3y}\right)$

21. Descompón en factores:

a) $x^4-1 = (x^2+1)\,(x^2-1)$

b) $x^2-y^2 = (x+y)\,(x-y)$

c) $x^2y^2-z^2 = (xy+z)(xy-z)$

d) $x-2x^2y+y^2 = (x+y)^2$

22. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4-5x^2+6 = (x^2-2)(x^2-3)$.

$$(x^2-2)(x^2-3). = x^4-3x^2-2x^2+6 = x^4-5x^2+6$$

b) Determina todas las raíces del polinomio x^4-5x^2+6

Las raíces de este polinomio son las siguientes: $\sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ \sqrt{2};\ -\sqrt{2}$

23. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}$

b) $\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=x^2+y^2$

c) $\frac{x^3-x}{x^4-1}=\frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}=\frac{x}{x^2+1}$

24. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{2}{x(5-x)}-\frac{3}{2(5-x)}=\frac{2\,(2)}{2x(5-x)}-\frac{3x}{2x(5-x)}=\frac{4-3x}{2x(5-x)}$

b) $\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x-4y}{2a-2b}=\frac{2(2x+3y)-3x-4y}{2(a-b)}=\frac{x+2y}{2(a-b)}$

c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}=\frac{2x+1}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{1}{2x-1}$

25. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{x^4-1}{x^7}:\frac{x^2+1}{x^8}=\frac{(x^4-1)x^8}{(x^2+1)x^7}=\frac{(x^2+1)(x^2-1)x}{x^2+1}=x^3-x$

b) $\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x+4y}{2a-2b}=\frac{4x+6y-3x-4y}{2\,(a-b)}=\frac{x+2y}{2(a-b)}$

c) $-4x+(1-x^4)\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)=-4x+(1-x^2)(1+x^2)\,\frac{(x+1)^2-(1-x)^2}{1-x^2}=-4x+(1+x^2)4x=4x^3$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2}:\frac{x^3+1}{x}=\frac{x^3-1}{x}$

b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}=(x-a)^3=x^2-2ax+a^2$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)\,(-a+b)}:\frac{ab}{a+b}=\frac{4ab}{(a-b)ab}=\frac{4}{a-b}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}=\frac{\frac{x+y-a}{a(x+y)}}{\frac{x+y+a}{a\,(x+y)}}:\frac{\frac{a+y-x}{x(a+y)}}{\frac{a+y+x}{x(a+y)}}=\frac{x+y-a}{x+y+a}:\frac{a+y-x}{a+y+x}=\frac{(x+y-a)(x+y+a)}{(a+y-x)(a+y+x)}=\frac{x^2+y^2+2xy-a^2}{a^2+y^2+2ay-x^2}$

b) $\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{x^3-x^2+3x+2}{x^3}=\frac{x^3+x^2-3x-2}{x^3}=\frac{x^3-x^2+3x+2}{x^2-3x-2}$

c) $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}=\frac{\frac{3y+2x}{xy}}{\frac{y-3x}{xy}}\cdot\frac{\frac{2y-x}{xy}}{\frac{3y+5x}{xy}}=\frac{(3y+2x)(2y-x)}{(y-3x)(3y+5x)}=\frac{6y^2+xy-2x^2}{3y^2-4xy-15x^2}$

Textos Marea Verde

BY NC SA

AUTOEVALUACIÓN

1.Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2\cdot x\cdot y^2\cdot z}$

a) 3,-7,2,-3,5,6; b)-2,1,-1,5,-1; c) $5\cdot\sqrt{2}$¡

2. ***El valor numérico de la expresión*** $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ **en = 2, y = –1, z = –1 es:**

$$\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}=\frac{3(2)-7}{2-3(-1)^2}+5(2)(-1)^3-\frac{6}{-1}=\frac{6-7}{2-3}-10+6=\frac{-1}{-1}-4=-3$$

c)-3

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a dos

b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a dos

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado 4

d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a dos

4. Al dividir el polinomio p(x)= $x^5+x^4+x^3+1$ entre q (x)= x^2+x+1 el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2 b) puede ser de grado 2

c) debe ser de grado menor que grado 2 d) ninguna de las opciones precedentes

5. Considera el polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son razonables candidatos para ser una raíz suya?

a) 3 b) 2 c)-5 d) -7

6. Considera el polinomio $2x^4-7x^3+x^2-7x-3$. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son razonables candidatos para ser una de sus raíces?

a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) -3 y $\frac{1}{3}$ d) -3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres:

a) tiene tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

Sí, por ejemplo, $x^2 (x – 1) (x – 2)$ tiene 3 raíces: 0 (doble), 1 y 2

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

Falso, el divisor ha de ser de grado 1;

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

Cierto, será raíz si el resto sale un 0;

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

Falso, se puede usar para polinomios con coeficientes racionales, aunque es más lioso;

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio Falso, sólo las raíces racionales.

10.Analiza si puede haber algún polinomio de grado ocho que no tenga ninguna raíz.

Puede haber polinomios de grado ocho que no tenga ninguna raíz real (cuando estudies los números complejos verás que puede tener 4 raíces complejas y sus conjugadas. Por ejemplo $(x^2-1)^4$

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 4: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Hugo Bastante Gómez-Limón y Pilar Paramio Barrigas

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Indica si son ecuaciones de segundo grado las siguientes ecuaciones

a) $3x^2 - \sqrt{7}\,x + 5 = 0$ Sí, es ecuación de segundo grado

b) $4{,}7x^2 - 6{,}25 = 0$ Sí, es ecuación de segundo grado

c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$ No es ecuación de segundo grado

d) $2xy - 5 = 0$ No es ecuación de segundo grado

e) $33 - 2{,}35x = 0$ No es ecuación de segundo grado

f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3{,}2 = 0$ No es ecuación de segundo grado

2. En las siguientes ecuaciones de segundo grado, indica cuales son a, b y c.

a) $\mathbf{3 - 8x^2 + 10x = 0}$

a = -8 b = 10 c = 3

b) $\mathbf{-3,4x^2 + 7,8x = 0}$

a = -3,4 b = 7,8 c = 0

c) $\mathbf{6x^2 - 1 = 0}$

a = 6 b = 0 c = -1

d) $\mathbf{1,25x^2 - 3,47x + 2,75 = 0}$

a = 1,25 b = -3,47 c = 2,75

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $\mathbf{x^2 - 8x + 7 = 0} \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \rightarrow x_1 = 7\ ;\ x_2 = 1$

b) $\mathbf{2x^2 + 3x - 12 = 0}$ $2x^2 + 3x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-12)}}{2\,(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+96}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{105}}{4}$

$\rightarrow x_1 = 1.81\ ;\quad x_2 = -3.31$

c) $\mathbf{10x^2 - 9x + 50 = 0}$ $x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot (10)(50)}}{2\,(10)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 2000}}{20} = \frac{9 \pm \sqrt{-1919}}{20}$ No tiene solución real.

d) $\mathbf{x^2 - 13x + 22 = 0}$ $x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (1)(22)}}{2\,(1)} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 88}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{13 \pm 9}{2}$ $x_1 = 11\ ;\ x_2 = 2$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\mathbf{2x - \frac{3(x-1)}{5} = 6x^2 - \frac{8x-3}{5}} \rightarrow 2x - \frac{3x-3}{5} = 6x^2 - \frac{8x-3}{5} \rightarrow 10x - (3x - 3) = 30x^2 - (8x - 3)$

$10x - 3x + 3 = 30x^2 - 8x + 3 \rightarrow -30x^2\ 7x + 8x = 0 \rightarrow 15x - 30x^2 = 0 \rightarrow 15x \cdot (1 - 2x) = 0$

$x \cdot (1 - 2x) = 0 \rightarrow x = 0\ ;\ 1 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Textos Marea Verde

Solución: $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$ $\mathbf{x = 0}$

b) $\mathbf{2 \cdot \frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10}$ $\rightarrow \frac{2\cdot(x-7)}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10 \rightarrow \frac{2x-14}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$

$$\frac{x\cdot(2x-14)-5(3-2x)-50x}{5x} = 0 \rightarrow \frac{2x^2-14x-15+10x-50x}{5x} = 0 \rightarrow \frac{2x^2-54x-15}{5x} = 0 \rightarrow 2x^2-54x-15=0$$

$$x = \frac{-(-54)\pm\sqrt{(-54)^2-4\cdot2\cdot(-15)}}{2\cdot2} = \frac{54\pm\sqrt{2916+120}}{4} = \frac{54\pm\sqrt{3036}}{4}$$

Solución: $\mathbf{x = \frac{27+\sqrt{759}}{2}}$ $\mathbf{x = \frac{27-\sqrt{759}}{2}}$

c) $\mathbf{5x\cdot(x-3)+4(x^2-5)+10=-10}$

$5x^2-15x+4x^2-20+10=-10 \rightarrow 9x^2-15x-20+20=0$

$9x^2-15x=0 \rightarrow x(9x-15)=0$; $\mathbf{x=0}$; $\mathbf{x=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}}$

d) $\mathbf{5\cdot(x^2-1)+3(x^2-5)+4=16}$

$5x^2-5+3(x^2-5)+4=16 \rightarrow 5x^2-5+3x^2-15+4=168x^2-5-15+4=16 \rightarrow 8x^2-16=16 \rightarrow 8x^2=16+16 \rightarrow 8x^2=32 \rightarrow x=\pm2$

Solución: $\mathbf{x=2}$, $\mathbf{x=-2}$

e) $\mathbf{\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{4}{3} = \frac{4x-7}{6}}$ $\rightarrow \frac{2(2-5x^2)}{6x} - \frac{2x(4)}{6x} = \frac{x(4x-7)}{6x} \rightarrow \frac{4-10x^2}{6x} - \frac{8x}{6x} = \frac{4x^2-7x}{6x} \rightarrow$

$4-10x^2-8x=4x^2-7x \rightarrow -10x^2-4x^2-8x+7x+4=0 \rightarrow -14x^2-x+4=0 \rightarrow$

$-14x^2-x+4=0 \rightarrow 14x^2+x-4=0 \rightarrow$

$x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(14)(-4)}}{2\cdot14} = \frac{-1\pm\sqrt{225}}{28} = \frac{-1\pm15}{28}$ $\mathbf{x_1=\frac{1}{2}}$; $\mathbf{x_2=-\frac{4}{7}}$

f) $\mathbf{\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}}$ $\rightarrow \frac{3(2-3x^2)}{15x} - \frac{5x(4)}{15x} = \frac{x(2x-1)}{15x} \rightarrow \frac{6-9x^2}{15x} - \frac{20x}{15x} = \frac{2x^2-x}{15x} \rightarrow$

$6-9x^2-20x=2x^2-x \rightarrow 6-9x^2-20x-2x^2+x=0 \rightarrow -11x^2-19x+6=0$

$x = \frac{-(-19)\pm\sqrt{19^2-4(-11)(6)}}{2\cdot(-11)} = \frac{19\pm\sqrt{361+264}}{-22} = \frac{19\pm25}{-22}$ $\mathbf{x_1=-2}$; $\mathbf{x_2=\frac{3}{11}}$

5. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $\mathbf{9x^2+4x+7=0} \rightarrow \sqrt{4^2-4\cdot9\cdot7} = \sqrt{-236}$ Ninguna solución real

b) $\mathbf{3x^2-5x+2=0} \rightarrow \sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot2} = \sqrt{25-24} = \sqrt{1}$ Dos soluciones.

c) $\mathbf{x^2-9x-12=0} \rightarrow \sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot(-12)} = \sqrt{81+48} = \sqrt{129}$ Dos soluciones.

d) $\mathbf{2x^2-7x+9=0} \rightarrow \sqrt{(-7)^2-4\cdot2\cdot9} = \sqrt{49-72} = \sqrt{-23}$ Ninguna solución real.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $\mathbf{5x^2+75x=0} \rightarrow 5x(x+15) \rightarrow \mathbf{x_1=0}$; $x+15=0 \rightarrow \mathbf{x_2=-15}$

b) $\mathbf{4x^2-160=0} \rightarrow 4x^2=160 \rightarrow x^2=40 \rightarrow x=\sqrt{40} \rightarrow \mathbf{x=\pm2\sqrt{10}}$

c) $\mathbf{x^2-64=0} \rightarrow x^2=64 \rightarrow x=\sqrt{64} \rightarrow \mathbf{x=\pm8}$

Textos Marea Verde

d) $\mathbf{3x^2 + 2x = 0} \rightarrow x(3x + 2) = 0 \rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$; $3x + 2 = 0 \rightarrow \mathbf{x_2 = -\frac{2}{3}}$

e) $\mathbf{9x^2 - 49 = 0} \rightarrow x^2 = \frac{49}{9} \rightarrow x = \sqrt{\frac{49}{9}} \rightarrow \mathbf{x = \pm\frac{7}{3}}$

f) $\mathbf{5x^2 - 10x = 0} \rightarrow 5x(x - 2) = 0 \rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$; $x - 2 = 0 \rightarrow \mathbf{x_2 = 2}$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $\mathbf{3x^2 + 18x = 0} \rightarrow 3x(x + 6) = 0 \rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$; $x + 6 = 0 \rightarrow \mathbf{x_2 = -6}$

b) $\mathbf{5x^2 - 180 = 0} \rightarrow x^2 = \frac{180}{5} \rightarrow x = \sqrt{36} \rightarrow \mathbf{x = \pm 6}$

c) $\mathbf{x^2 - 49 = 0} \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = \sqrt{49} \rightarrow \mathbf{x = \pm 7}$

d) $\mathbf{2x^2 + x = 0} \rightarrow x(2x + 1) = 0 \rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$; $2x + 1 = 0 \rightarrow \mathbf{x_2 = -\frac{1}{2}}$

e) $\mathbf{4x^2 - 25 = 0} \rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{4}} \rightarrow \mathbf{x = \pm\frac{5}{2}}$

f) $\mathbf{5x^2 - 10x = 0} \rightarrow 5x(x - 2) = 0 \rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$; $x - 2 = 0 \rightarrow \mathbf{x_2 = 2}$

8. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $\mathbf{2x^2 + 8x = 0} \rightarrow 2x(x + 4) = 0 \rightarrow \mathbf{x_1 = 0}$; $x + 4 = 0 \rightarrow \mathbf{x_2 = -4}$

b) $\mathbf{x^2 + 6x - 27 = 0} \rightarrow \mathbf{x_1 = 3}$; $\mathbf{x_2 = -9}$; -(-9 + 3) = 6 ; 3·(-9) = -27

c) $\mathbf{x^2 - 81 = 0} \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = \sqrt{81} \rightarrow \mathbf{x = \pm 9}$

d) $\mathbf{x^2 - 13x + 22 = 0} \rightarrow \mathbf{x_1 = 11}$; $\mathbf{x_2 = 2}$; -(11 + 2) = -13 ; 2·11 = 22

e) $\mathbf{x^2 - 3x - 4 = 0} \rightarrow \mathbf{x_1 = 4}$; $\mathbf{x_2 = -1}$; -(-1 + 4) = -3 ; -1·4 = -4

f) $\mathbf{x^2 - 5x - 24 = 0} \rightarrow x_1 = 8$; $x_2 = -3$; -(8 – 3) = -5 ; -3·8 = -24

9. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 5 y 9.

$(x - 5)(x - 9) = 0 \quad x^2 - 9x - 5x + 45 = 0 \quad x^2 - 14x + 45 = 0$

10. El perímetro de un rectángulo mide 20 cm y su área 24 cm². Calcula mentalmente sus dimensiones.

Si el perímetro es 20, la suma de largo y ancho es 10, que es como la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado y 24 el producto, luego las medidas son 4cm y 6cm.

11. Si 3 es una solución de x^2 - 7x + a = 0, ¿cuánto vale a?

$$(3)^2 - 7(3) + a = 9 - 21 + a = -12 + a = 0 \qquad a = 12$$

Textos Marea Verde

12. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $(x-7)\cdot(x-2)\cdot(x+5)\cdot(x-3)\cdot(x-11)=0$

$$x-7=0 \rightarrow x=7$$
$$x-2=0 \rightarrow x=2$$
$$x+5=0 \rightarrow x=-5$$
$$x-3=0 \rightarrow x=3$$
$$x-11=0 \rightarrow x=11$$

b) $3(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)=0$

$$(x-5)\cdot(x-7)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$$
$$x-5=0 \rightarrow x=5$$
$$x-7=0 \rightarrow x=7$$
$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$
$$x-3=0 \rightarrow x=3$$
$$x-4=0 \rightarrow x=4$$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4-3x^2+2=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-3t+2=0 \rightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4(2)}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \rightarrow t_1=2\,;\ t_2=1$

$$x=\pm\sqrt{2}\ ;\ x=\sqrt{1} \rightarrow x=\pm1$$

b) $x^4+12x^2+35=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2+12t+35=0 \rightarrow t=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\,(35)}}{2}=\frac{-12\pm2}{2}$

No tiene solucion real

c) $x^4-4x^2-12=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-4t-12=0 \rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4(-12)}}{2}=\frac{4\pm8}{2}$

$$t_1=6 \rightarrow x=\pm\sqrt{6} \quad ; \quad t_2=-2\ ,\text{no es solución}$$

14. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $x^4-13x^2+36=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-13t+36=0 \rightarrow t=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4(1)(36)}}{2\,(1)}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm5}{2}$

$$t_1=9\ ;\ t_2=4 \rightarrow x_1=\sqrt{9}=\pm3\ ;\ x_2=\sqrt{4}=\pm2$$

b) $x^4-29x^2+100=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-29t+100=0 \rightarrow$

$t=\frac{29\pm\sqrt{29^2-4\,(1)(100)}}{2\,(1)}=\frac{29\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{29\pm21}{2}$

$$t_1=25\ ;\ t_2=4 \rightarrow x_1=\sqrt{25}=\pm5\ ;\ x_2=\sqrt{4}=\pm2$$

c) $x^4-10x^2+9=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-10t+9=0 \rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\,(1)(9)}}{2\,1}=\frac{10\pm8}{2}$

$$t_1=9\ ;\ t_2=1\ x_1=\sqrt{9}=\pm3\ ;\ x_2=\sqrt{1}=\pm1$$

d) $x^4-26x^2+25=0 \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-26t+25=0 \rightarrow t=\frac{26\pm\sqrt{26^2-4(1)(25)}}{2\,1}=\frac{26\pm24}{2}$

$$t_1=25\ ;\ t_2=1\ ;\ x_1=\sqrt{25}=\pm5\ ;\ x_2=\sqrt{1}=\pm1$$

Textos Marea Verde

15. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$

$\frac{1}{x\cdot(x-1)}-\frac{1}{x-1}=0\rightarrow\frac{1-x}{x\cdot(x-1)}=0\rightarrow\frac{-(x-1)}{x\cdot(x-1)}=0\rightarrow\frac{-1}{x}=0$ **no tiene solución**

b) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{4}{x^2-8x+12}$

$\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x^2-8x+12}=0\rightarrow\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}-\frac{4}{(x-2)\cdot(x-6)}=0\rightarrow\frac{x-2+x\cdot(x-6)-4}{(x-2)\cdot(x-6)}=0$

$\rightarrow\frac{x-2+x^2-6x-4}{(x-2)\cdot(x-6)}=0\rightarrow\frac{-5x-2+x^2-4}{(x-2)\cdot(x-6)}=0\rightarrow\frac{-5x-6+x^2}{(x-2)\cdot(x-6)}=0\rightarrow\frac{x^2-5x-6}{(x-2)\cdot(x-6)}=0\rightarrow\frac{(x+1)\cdot(x-6)}{(x-2)\cdot(x-6)}=0$

$\rightarrow\frac{x+1}{(x-2)}=0\rightarrow x+1=0\rightarrow \mathbf{x=-1}$

c) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$

$\frac{3}{x}-1-\frac{x-13}{6}=0\rightarrow\frac{18-6x-x\cdot(x-13)}{6x}\rightarrow\frac{18-6x-x^2+13}{6x}=0\rightarrow\frac{18+7x-x^2}{6x}=0\rightarrow 18+7x-x^2=0$

$-x^2+7x+18=0\rightarrow\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-1)\cdot18}}{2\cdot(-1)}\rightarrow\frac{-7+\sqrt{49+72}}{-2}=-2;\rightarrow\frac{-7-\sqrt{49+72}}{-2}=9$; **x = -2 , x = 9**

16. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $\sqrt{5x+4}-1=2x$

$\sqrt{5x+4}=2x+1\rightarrow\sqrt{5x+4}^2=(2x+1)^2\rightarrow 5x+4=4x^2+4x+1\rightarrow 5x+4-4x^2-4x-1=0$

$\rightarrow x+4-4x^2-4x-1=0\rightarrow x+3-4x^2=0\rightarrow -4x^2+x+3=0$

$\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-4)\cdot3}}{2\cdot(-4)}\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-8}\rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{-8}\rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{49}}{-8}=-\frac{3}{4}\rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{49}}{-8}=1$

b) $\sqrt{x+19}-1=\sqrt{2x+4}$

$(\sqrt{x+19}-1)^2=(\sqrt{2x+4})^2\rightarrow x+19-2\sqrt{x+19}+1=2x+4\rightarrow x+20-2\sqrt{x+19}=2x+4$

$-2\sqrt{x+19}=2x+4-x-20\rightarrow -2\sqrt{x+19}=x+4-20\rightarrow -2\sqrt{x+19}=x-16$

$(-2\sqrt{x+19})^2=(x-16)^2\rightarrow 4(x+19)=x^2-32x+256\rightarrow 4x+76=x^2-32x+256\rightarrow$

$4x+76-x^2+32x-256=0\rightarrow 36x+76-x^2-256=0\rightarrow 36x-180-x^2=0\rightarrow$

$-x^2+36x-180=0\rightarrow x=\frac{-36\pm\sqrt{36^2-4\cdot(-1)\cdot(-180)}}{2\cdot(-1)}\rightarrow$ **x = 6 ; x = 30**

c) $3\sqrt{x-1}+11=2x$

$3\sqrt{x-1}=2x-11\rightarrow(3\sqrt{x-1})^2=(2x-11)^2\rightarrow 9(x-1)=4x^2-44x+121\rightarrow$

$9x-9=4x^2-44x+121\rightarrow 9x-9-4x^2+44x-121=0\rightarrow 53x-9-4x^2-121=0\rightarrow$

$53x-130-4x^2=0\rightarrow -4x^2+53x-130=0\rightarrow x=\frac{-53\pm\sqrt{53^2-4\cdot(-4)\cdot(-130)}}{2\cdot(-4)}\rightarrow x=\frac{13}{4};$ **x = 10**

Textos Marea Verde

17. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\mathbf{(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0}$

$$x-9=0 \rightarrow x=9$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

$$x+24=0 \rightarrow x=-24$$

$$x-5=0 \rightarrow x=5$$

$$x--3=0 \rightarrow x=3$$

Soluciones: $x_1=9$; $x_2=1$; $x_3=-24$; $x_4=5$; $x_5=3$

b) $\mathbf{3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0}$

$$x-5=0 \rightarrow x=5$$

$$x-9=0 \rightarrow x=9$$

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

$$x-4=0 \rightarrow x=4$$

Soluciones: $x_1=5$; $x_2=9$; $x_3=-2$; $x_4=1$; $x_5=4$

18. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

a) $\mathbf{x^4+5x^2-36=0} \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2+5t-36=0 \rightarrow t=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(1)(-36)}}{2\,1}=\frac{-5\pm13}{2} \rightarrow$

$t_1=4$; $t_2=-9$ $\quad x_1=\sqrt{4}=\pm2$; $\quad x_2=\sqrt{-9}=$ No tiene solución

b) $\mathbf{x^4-21x^2+12100=0} \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-21t+12100=0 \rightarrow$

$t=\frac{21\pm\sqrt{21^2-4\,(1)(12100)}}{2\,(1)}=\frac{21\pm\sqrt{-47959}}{2}$ No tiene solucion

c) $\mathbf{x^4-45x^2+234=0} \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-45t+234=0 \rightarrow t=\frac{45\pm\sqrt{45^2-4\,(1)(234)}}{2\,1}=\frac{45\pm33}{2}$

$t_1=39$; $t_2=6 \rightarrow x_1=\pm\sqrt{39}$; $x_2=\pm\sqrt{6}$

d) $\mathbf{x^4-37x^2+36=0} \rightarrow x^2=t \rightarrow t^2-37t+36 \rightarrow t=\frac{37\pm\sqrt{37^2-4\,(1)(36)}}{2\,1}=\frac{37\pm35}{2} \rightarrow t_1=36$; $t_2=1$

$$x_1=\pm\sqrt{36}=\pm6\,;\ x_2=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

19. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes:

a) $\mathbf{\frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{3}{x}-2} \rightarrow \frac{2x-1+7x}{3x}=\frac{9-6x}{3x} \rightarrow 9x-1=9-6x \rightarrow 9x+6x=9+1 \rightarrow$

Textos Marea Verde

$15x = 10 \rightarrow \mathbf{x = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}}$

b) $\mathbf{\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}} \rightarrow \frac{3(x-2)}{3x(x-2)} + \frac{3x(x-2)}{3x(x-2)} - \frac{3x}{3x(x-2)} = \frac{x(x-2)}{3x(x-2)} \rightarrow 3(x-2) + 3x(x-2) - 3x = x(x-2) \rightarrow$

$3x - 6 + 3x^2 - 6x - 3x = x^2 - 2x \rightarrow 3x^2 - x^2 - 6x + 2x - 6 = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \rightarrow$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \rightarrow \mathbf{x_1 = 3}\ ;\ \mathbf{x_2 = -1}$

c) $\mathbf{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}} \rightarrow \frac{3(x+1)}{3(x-1)(x+1)} + \frac{3(x-1)}{3(x-1)(x+1)} = \frac{4(x^2-1)}{3(x-1)(x+1)} \rightarrow 3(x+1) + 3(x-1) = 4(x^2-1)$

$3x + 3 + 3x - 3 = 4x^2 - 4 \rightarrow 4x^2 - 6x - 4 = 0 \rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (2)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \quad \mathbf{x_1 = 2}\ ;\ \mathbf{x_2 = -\frac{1}{2}}$

d) $\mathbf{\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1} \rightarrow 2x - 3 + 1 = x \rightarrow \mathbf{x = 2}$

20. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

a) $\mathbf{5 + \sqrt{x-1} = x + 2}$

$\sqrt{x-1} = x + 2 - 5 \rightarrow \sqrt{x-1} = x - 3 \rightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 = (x-3)^2 \rightarrow$

$x - 1 = x^2 + (-3)^2 - \left(2 \cdot x \cdot (-3)\right) \rightarrow x^2 + 9 - 6x - x + 1 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow$

$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} \rightarrow \quad x = \frac{7 + \sqrt{9}}{2} = \mathbf{5};\ x = \frac{7 - \sqrt{9}}{2} = \mathbf{2}$

b) $\mathbf{\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x-2} = x + 1}$

$4\sqrt{x-2} = x + 1 \rightarrow \left(4\sqrt{x-2}\right)^2 = (x+1)^2 \rightarrow 16(x-2) = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 16x - 32 = x^2 + 2x + 1$

$16x - 32 - x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow 14x - 32 - x^2 - 1 = 0 \rightarrow 14x - 33 - x^2 = 0 \rightarrow$

$-x^2 + 14x - 33 = 0 \rightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-33)}}{2(-1)} \rightarrow x = \frac{-14 + \sqrt{64}}{-2} = \mathbf{3};\ \rightarrow \quad x = \frac{-14 - \sqrt{64}}{-2} = \mathbf{11}$

c) $\mathbf{\sqrt{x} - 4 = x - 1}$

$\sqrt{x} = x - 1 + 4 \rightarrow \sqrt{x} = x + 3 \rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2 = (x+3)^2 \rightarrow x = x^2 + 9 - 2x \cdot 3 \rightarrow x^2 + 9 + 6x - x = 0$

$x^2 + 5x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2}$ no tiene solución real.

d) $\mathbf{7 + \sqrt{x+4} = x + 9}$

$7 + \sqrt{x+4} = x + 9 \rightarrow \sqrt{x+4} = x + 9 - 7 \rightarrow \sqrt{x+4} = x + 2 \rightarrow \left(\sqrt{x+4}\right)^2 = (x+2)^2 \rightarrow$

$x + 4 = x^2 + 4x + 4 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0\ ;\quad \boldsymbol{x = 0}\ ,\ \boldsymbol{x = -3}$

21. Resuelve las ecuaciones exponenciales siguientes:

a) $\mathbf{5^{3x} = \frac{1}{625}}\ ;\ 5^{3x} = \frac{1}{5^4}\ ;\ 5^{3x} = 5^{-4}\ ;\ 3x = -4\ ;\ \mathbf{x = \frac{-4}{3}}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

b) $\mathbf{2^{2x} \cdot 4^{x} = \frac{1}{16}}$ $2^{2x} \cdot (2^2)^x = \frac{1}{2^4}$; $2^{2x}2^{2x} = 2^{-4}$; $2^{4x} = 2^{-4}$; $4x = -4$; $\boldsymbol{x = -1}$

c) $\mathbf{2^{x+5} \cdot 2^{x+4} \cdot 2^{x+3} = 8}$;

$2^{x+5} \cdot 2^{x+4} \cdot 2^{x+3} = 2^3$; $x + 5 + x + 4 + x + 3 = 3$; $3x + 9 = 0$; $\boldsymbol{x = -3}$

22. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{Bmatrix} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{Bmatrix}$ → No Lineal

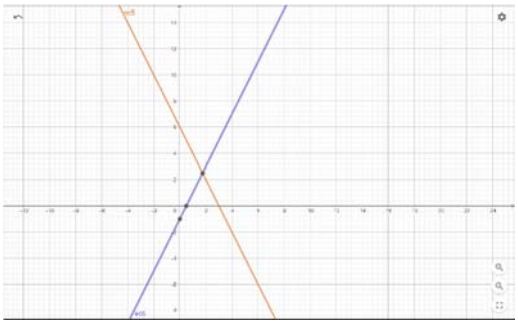
b) $\begin{Bmatrix} 2y - 4x = 3x \\ 3x - 5y = -6 \end{Bmatrix}$ → Lineal

c) $\begin{Bmatrix} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{Bmatrix}$ → Lineal

d) $\begin{Bmatrix} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{Bmatrix}$ → No Lineal

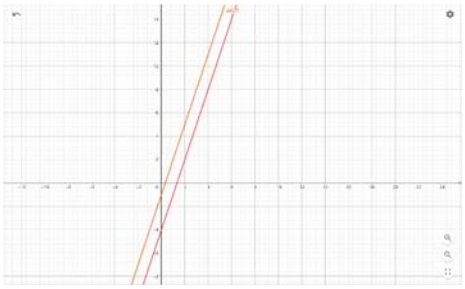
23. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{Bmatrix} 2x + y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{Bmatrix}$



Sistema compatible determinado

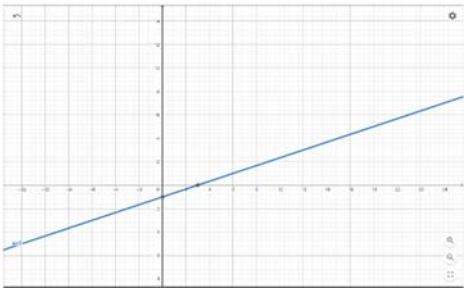
b) $\begin{Bmatrix} 3x - y = 4 \\ -y + 3x = 1 \end{Bmatrix}$



Sistema incompatible

c) $\begin{Bmatrix} 3x - 9y = 9 \\ 2x - 6y = 6 \end{Bmatrix}$

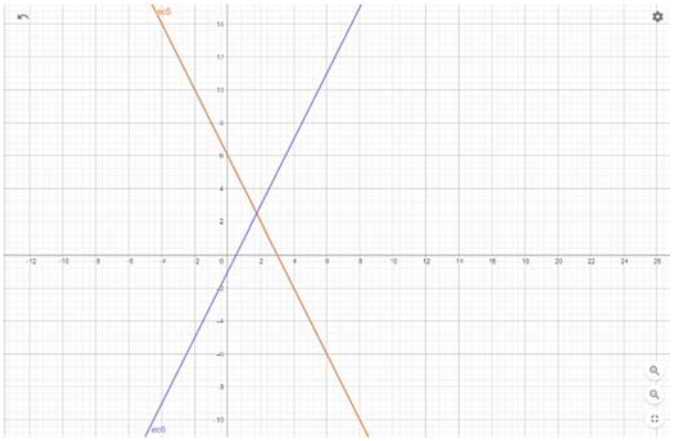
BY NC SA
Textos Marea Verde



Sistema compatible indeterminado

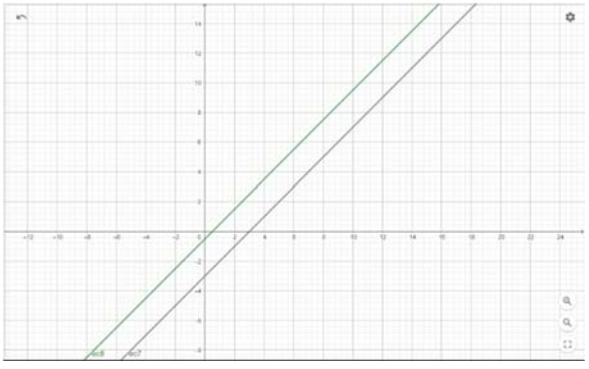
24. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left\{\begin{matrix} 2x+y=6 \\ -2x+y=-1 \end{matrix}\right\}$



Sistema compatible determinado

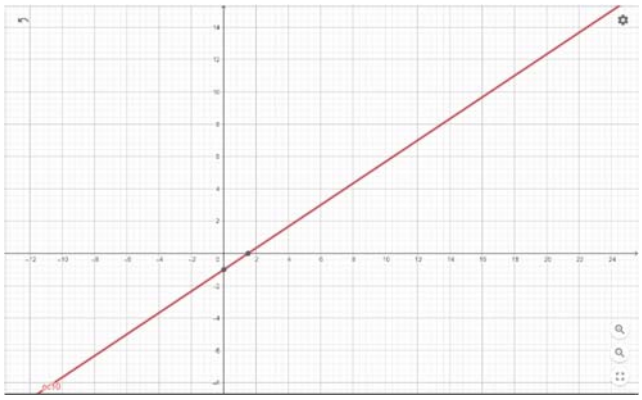
b) $\left\{\begin{matrix} x-y=3 \\ -2y+2x=1 \end{matrix}\right\}$



Sistema Incompatible

c) $\left\{\begin{matrix} 2x-3y=3 \\ 4x-6y=6 \end{matrix}\right\}$

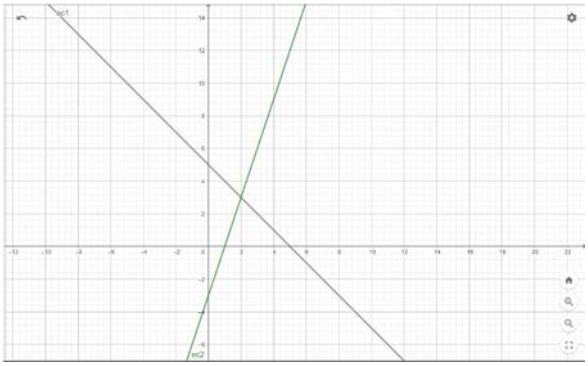
Textos Marea Verde



Sistema compatible indeterminado

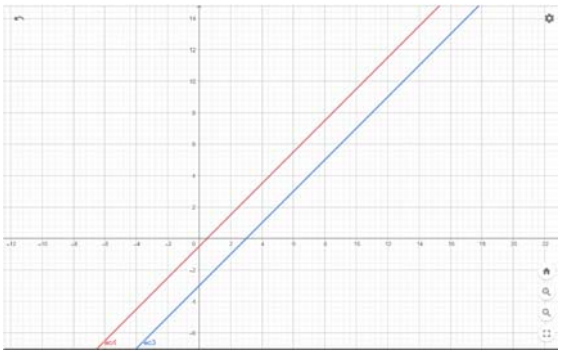
25. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\left\{\begin{matrix} x+y=5 \\ -3x+y=-3 \end{matrix}\right\}$



Sistema compatible determinado

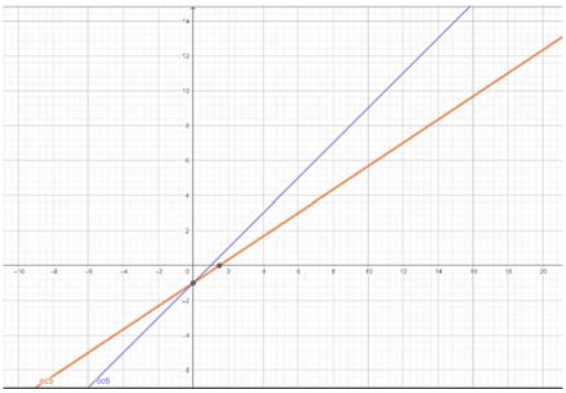
b) $\left\{\begin{matrix} x-y=3 \\ -2y+2x=1 \end{matrix}\right\}$



Sistema incompatible

c) $\left\{\begin{matrix} 2x-3y=3 \\ 4x-4y=4 \end{matrix}\right\}$

Textos Marea Verde



sistema compatible determinado

26. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{2x+5y=-6}\\ \mathbf{x+2y=1}\end{matrix}\right\}$ despejamos x en la 2ª ecuación, x = 1 – 2y

sustituimos en la 1ª $2\,(1-2y)+5y=-6 \rightarrow 2-4y+5y=-6 \rightarrow \mathbf{y=-8}$

$$x=1-2\,(-8) \rightarrow \mathbf{x=17}$$

b) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{3x+4y=5}\\ \mathbf{4x+y=8}\end{matrix}\right\}$ despejamos y en la 2ª ecuación, y = 8 – 4x

sustituimos en la 1ª $3x+4\,(8-4x)=5 \rightarrow 3x+32-16x=5 \rightarrow -13x=-27 \rightarrow \mathbf{x=\frac{27}{13}}$

$$y=8-4\left(\frac{27}{13}\right) \rightarrow \mathbf{y=-\frac{4}{13}}$$

c) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{5x-2y=3}\\ \mathbf{2x+y=10}\end{matrix}\right\}$ despejamos y en la 2ª ecuación, $y=-2x+10$

sustituimos en la 1ª $5x-2(-2x+10)=3 \rightarrow 5x+4x-20=3 \rightarrow 9x=23 \rightarrow \mathbf{x=\frac{23}{9}}$

$$y=-2\left(\frac{23}{9}\right)+10 \rightarrow \mathbf{y=\frac{44}{9}}$$

27. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{3x+4y=26}\\ \mathbf{x-2y=2}\end{matrix}\right\}$ despejamos x en la 2ª ecuación, $x=2+2y$

sustituimos en la 1ª $3\,(2+2y)+4y=26 \rightarrow 6+6y+4y=26 \rightarrow 10y=20 \rightarrow \mathbf{y=2}$

$$x=2+2(2) \rightarrow \mathbf{x=6}$$

b) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{2x+4y=26}\\ \mathbf{3x+y=24}\end{matrix}\right\}$ despejamos y en la 2ª ecuación, $y=24-3x$

sustituimos en la 1ª $2x+4\,(24-3x)=26 \rightarrow 2x+96-12x=26 \rightarrow -10x=-60 \rightarrow \mathbf{x=6}$

$$y=24-3(6) \rightarrow \mathbf{y=6}$$

c) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{3x-2y=8}\\ \mathbf{2x+3y=14}\end{matrix}\right\}$ despejamos y en la 2ª ecuación, $y=\frac{14-2x}{3}$

sustituimos en la 1ª $3x - 2\left(\frac{14-2x}{3}\right) = 8 \rightarrow 3x - \frac{28-4x}{3} = 8 \rightarrow 9x - 28 + 4x = 24 \rightarrow 13x = 52 \rightarrow$

$$\boldsymbol{x = \frac{52}{13} = 4} \quad ; \quad y = \frac{14 - 2\,(4)}{3} \quad ; \quad \boldsymbol{y = 2}$$

28. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{x + y = 11} \\ \mathbf{-x + 3y = 2} \end{matrix}\right\}$ $\quad x = 11 - y \quad ; \quad x = 3y - 2 \rightarrow$

$$11 - y = 3y - 2 \rightarrow -4y = -13 \rightarrow y = \frac{13}{4} \; ; x = 11 - \frac{13}{4} \rightarrow x = \frac{44 - 13}{4} \rightarrow x = \frac{21}{4}$$

b) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{2x - 5y = 4} \\ \mathbf{2x + 7y = -11} \end{matrix}\right\}$ $\quad x = \frac{4+5y}{2} \quad ; \quad x = \frac{-11-7y}{2}$

$$\frac{4+5y}{2} = \frac{-11-4y}{2} \rightarrow 4 + 5y = -11 - 7y \rightarrow 12y = -15 \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{-15}{12} = -\frac{5}{4}} \; ;$$

$$x = \frac{4+5\left(\frac{-5}{4}\right)}{2} \rightarrow \frac{4-\frac{25}{4}}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{9}{4}}$$

c) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{7x - 3y = 5} \\ \mathbf{3x + 4y = 11} \end{matrix}\right\}$ $\quad x = \frac{5+3y}{7} \quad ; \quad x = \frac{11-4y}{3}$

$$\frac{5+3y}{7} = \frac{11-4y}{3} \rightarrow 3\,(4 + 3y) = 7\,(11 - 4y) \rightarrow 12 + 9y = 77 - 28y \rightarrow 37y = 65 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y = \frac{65}{37}} \quad ; \quad x = \frac{5 + 3\left(\frac{62}{37}\right)}{7} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{5 + \left(\frac{186}{37}\right)}{7} = \frac{371}{259}}$$

29. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{3x + y = 2} \\ \mathbf{-2x + y = -5} \end{matrix}\right\}$ $\quad y = 2 - 3x \quad ; \quad y = -5 + 2x$

$$2 - 3x = -5 + 2x \rightarrow -5x = -7 \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{7}{5}} \; ; \quad y = 2 - 3\left(\frac{7}{5}\right) \rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{11}{5}}$$

b) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{2x - 3y = -5} \\ \mathbf{4x + 5y = 12} \end{matrix}\right\}$ $\quad x = \frac{3y-5}{2} \quad ; \quad x = \frac{12-5y}{4}$

$$\frac{3y - 5}{2} = \frac{12 - 5y}{4} \rightarrow 2(3y - 5) = 12 - 5y \rightarrow 6y - 10 = 12 - 5y \rightarrow 11y = 22 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y = 2} \quad ; \quad x = \frac{3(2) - 5}{2} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$$

c) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{9x - 2y = 7} \\ \mathbf{x + 3y = 8} \end{matrix}\right\}$ $\quad x = \frac{7+2y}{9} \quad , \quad x = 8 - 3y$

$$\frac{7 + 2y}{9} = 8 - 3y \rightarrow 7 + 2y = 9(8 - 3y) \rightarrow 7 + 2y = 72 - 27y \rightarrow 29y = 65 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{y = \frac{65}{29}} \quad ; \quad x = 8 - 3\left(\frac{65}{29}\right) \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{37}{29}}$$

Textos Marea Verde

30. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{x+2y=3}\\ \mathbf{-2x-5y=4}\end{matrix}\right\}$ 1ª ecuación por 2 $\left\{\begin{matrix}2x+4y=6\\ -2x-5y=4\\ \hline -y=10\end{matrix}\right\}$ **y=10**

$$-2x-5(10)=4 \rightarrow -2x=54 \rightarrow x=\frac{54}{2} \rightarrow \boldsymbol{x=27}$$

b) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{2x+3y=-1}\\ \mathbf{3x+y=5}\end{matrix}\right\}$ 2ª ecuación por (-3) $\left\{\begin{matrix}2x+3y=-1\\ -9x-3y=-15\\ \hline -7y=-16\end{matrix}\right\}$ $\mathbf{y=\frac{16}{7}}$

$$3x+\frac{16}{7}=5 \rightarrow 21x+16=35 \rightarrow 21x=19 \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{21}{19}}$$

c) $\left\{\begin{matrix}2x+3y=0\\ x-4y=5\end{matrix}\right\}$ 2ª ecuación por (-2) $\left\{\begin{matrix}2x+3y=0\\ -2x+8y=-10\\ \hline 11y=-10\end{matrix}\right\}$ $\mathbf{y=-\frac{10}{11}}$

$$x-4\left(-\frac{10}{11}\right)=5 \rightarrow 11x+40=55 \rightarrow 11x=35 \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{35}{11}}$$

31. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{3x+y=8}\\ \mathbf{x-5y=-9}\end{matrix}\right\}$ 2ª ecuación por (-3) $\left\{\begin{matrix}3x+y=8\\ -3x+15y=27\\ \hline 16y=35\end{matrix}\right\}$ $\mathbf{y=\frac{35}{16}}$

$$x-5\left(\frac{35}{16}\right)=-9 \rightarrow 16x-175+144=0 \rightarrow 16x=-144+175 \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{31}{16}}$$

b) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{x+3y=9}\\ \mathbf{x+2y=10}\end{matrix}\right\}$ 1ª ecuación por (-1) $\left\{\begin{matrix}-x-3y=-9\\ x+2y=10\\ \hline -y=1\end{matrix}\right\}$ $\mathbf{y=-1}$

$$x+2(-1)=10 \rightarrow x-2=10 \rightarrow x=10+2 \rightarrow \boldsymbol{x=12}$$

c) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{2x+3y=5}\\ \mathbf{x-2y=7}\end{matrix}\right\}$ 2ª ecuación por (-2) $\left\{\begin{matrix}2x+3y=5\\ -2x+4y=-14\\ \hline 7y=9\end{matrix}\right\}$ $\mathbf{y=\frac{9}{7}}$

$$x-2\left(\frac{9}{7}\right)=7 \rightarrow x-\frac{18}{7}=7 \rightarrow 7x-18=49 \rightarrow 7x=49+18 \rightarrow 7x=67 \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{67}{7}}$$

32. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{2x+y-3z=-2}\\ \mathbf{x+2y+z=0}\\ \mathbf{3x+4y-2z=-3}\end{matrix}\right\}$ *Cambiamos la Ec1 y la Ec2* $\left\{\begin{matrix}x+2y+z=0\\ 2x+y-3z=-2\\ 3x+4y-2z=-3\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}E'c_1=Ec_1\\ E'c_2=-2Ec_1+Ec_2\\ E'c_3=-3Ec_1+Ec_3\end{matrix}$

Textos Marea Verde

$\begin{Bmatrix} x+2y+z=0 \\ -3y-5z=-2 \\ -2y-5z=-3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} E''c_1 = E'c_1 \\ E''c_2 = E'c_2 \\ E''c_3 = -E'c_2 + E'c_3 \end{matrix} \begin{Bmatrix} x+2y+z=0 \\ -3y-5z=-2 \\ y=-1 \end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{y=-1}$; $-3y-5z=-2$

$-3(-1)-5z=-2$; $3-5z=-2$; $-5z=-5$; $\mathbf{z=1}$;

$x+2y+z=0$; $x+2(-1)+1=0$; $\mathbf{x=1}$

b) $\begin{Bmatrix} \mathbf{2x+y+2z=6} \\ \mathbf{x+2y+2z=4} \\ \mathbf{3x-2y-3z=3} \end{Bmatrix}$ *Cambiamos la Ec1 y la Ec2* $\begin{Bmatrix} x+2y+2z=4 \\ 2x+y+2z=6 \\ 3x-2y-3z=3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} E'c_1 = Ec_1 \\ E'c_2 = -2Ec_1 + Ec_2 \\ E'c_3 = -3Ec_1 + Ec_3 \end{matrix}$

$\begin{Bmatrix} x+2y+2z=4 \\ -3y-2z=-2 \\ -8y-9z=-9 \end{Bmatrix} \begin{matrix} E''c_1 = E'c_1 \\ E''c_2 = E'c_2 \\ E''c_3 = -8E'c_2 + 3E'c_3 \end{matrix} \begin{Bmatrix} x+2y+2z=4 \\ -3y-2z=-2 \\ -11z=-11 \end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{z=1}$

$-3y-2z=-2$; $-3y-2\cdot 1=-2$; $-3y-2=-2$; $-3y=0$; $\boldsymbol{y=0}$

$x+2y+2z=4$; $x+2\cdot 0+2\cdot 1=4$; $x+0+2=4$; $\boldsymbol{x=2}$

c) $\begin{Bmatrix} \mathbf{3x+2y-2z=5} \\ \mathbf{x-2y+2z=-1} \\ \mathbf{x-2y-3z=-6} \end{Bmatrix}$ *Pasamos la 1ª columna a la 3ª* $\begin{Bmatrix} 2y-2z+3x=5 \\ -2y+2z+x=-1 \\ -2y-3z+x=-6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} E'c_1 = Ec_1 \\ E'c_2 = Ec_1 + Ec_2 \\ E'c_3 = Ec_1 + Ec_3 \end{matrix}$

$\begin{Bmatrix} 2y-2z+3x=5 \\ 4x=4 \\ -5z+4x=-1 \end{Bmatrix}$ $\boldsymbol{x=1}$;

$-5z+4x=-1$; $-5z+4(1)=-1 \rightarrow -5z+4=-1 \rightarrow -5z=-5 \rightarrow \boldsymbol{z=1}$

$2y-2z+3x=5$; $2y-2(1)+3(1)=5 \rightarrow 2y-2+3=5 \rightarrow 2y=4 \rightarrow \boldsymbol{y=2}$

33. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{Bmatrix} xy+2y=6 \\ 2x-3y=1 \end{Bmatrix}$ Sistema no lineal porque hay una multiplicación de incógnitas

b) $\begin{Bmatrix} 5y-x=4 \\ 2x-3y=-1 \end{Bmatrix}$ Sistema lineal

c) $\begin{Bmatrix} 4x-2=y \\ 3x+5y=2 \end{Bmatrix}$ Sistema lineal

d) $\begin{Bmatrix} x^2+y=2 \\ 3x+y^2=4 \end{Bmatrix}$ Sistema no lineal porque hay dos incógnitas al cuadrado

34. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:

a) $\begin{Bmatrix} \mathbf{x\cdot y+2=4x} \\ \mathbf{y-x=1} \end{Bmatrix}$ $y=1+x$

$x(1+x)+2=4x \rightarrow x^2+x-4x+2=0 \rightarrow x^2-3x+2=0 \rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\,(2)}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$

BY NC SA Textos Marea Verde

$x_1 = 2\ ;\ x_2 = 1\ \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 2}\ ;\ y = 1 + 2\ \rightarrow \boldsymbol{y_1 = 3}\ ;\ \boldsymbol{x_2 = 1};\ y = 1 + 1\ \rightarrow \boldsymbol{y_2 = 2}$

b) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{y^2 - x^2 = 5}\\ \mathbf{5x - 3y = 1}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}y^2 - x^2 = 5\\ x = \frac{1+3y}{5}\end{matrix}\right\}$

$y^2 - \left(\frac{1+3y}{5}\right)^2 = 5 \rightarrow y^2 - \left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3y}{5}\right)^2 + 2\,\frac{1}{5}\cdot\frac{3y}{5}\right) - 5 = 0$

$25y^2 - 1 - 9y^2 - 2\,(1\cdot 3y) - 125 = 0 \rightarrow 16y^2 - 6y - 126 = 0 \rightarrow$

$y = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(16)(-126)}}{2\cdot 16}$ $\quad y_1 = 3\ ;\ y_2 = -2.625$

$\boldsymbol{y_1 = 3}\ ;\ x_1 = \frac{1+3(3)}{5} = 2 \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 1,676}\ ;\ \boldsymbol{y_2 = -2.625}\ ;\ x_2 = \frac{1+3\,(-2.625)}{5} \rightarrow \boldsymbol{x_2 = -1.375}$

c) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{x + y = 7}\\ \mathbf{xy = 12}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}x = 7 - y\\ xy = 12\end{matrix}\right\}$

$(7 - y)y = 12 \rightarrow 7y - y^2 - 12 = 0 \rightarrow y = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\,(-1)(-12)}}{2\,(-1)} = \frac{-7 \pm 1}{-2} \rightarrow y_1 = 3\ ;\ y_2 = 4$

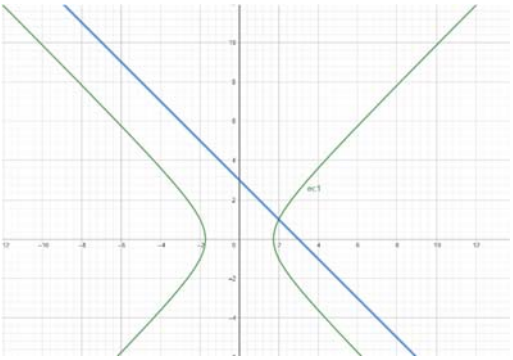
$\boldsymbol{y_1 = 3}\ ;\quad x = 7 - 3 \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 4}\ ;\ \boldsymbol{y_2 = 4}\ ;\quad x = 7 - 4 \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 3}$

35. Resuelve los siguientes sistemas y comprueba gráficamente las soluciones:

a) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{x^2 - y^2 = 3}\\ \mathbf{x + y = 3}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}x^2 - y^2 = 3\\ x = 3 - y\end{matrix}\right\}$

$(3 - y)^2 - y^2 = 3 \rightarrow y^2 + 9 - 6y - y^2 = 3 \rightarrow -6y = -9 + 3 \rightarrow -6y = -6 \rightarrow$

$\mathbf{y = 1}\quad ;\quad x = 3 - 1 \rightarrow \mathbf{x = 2}$

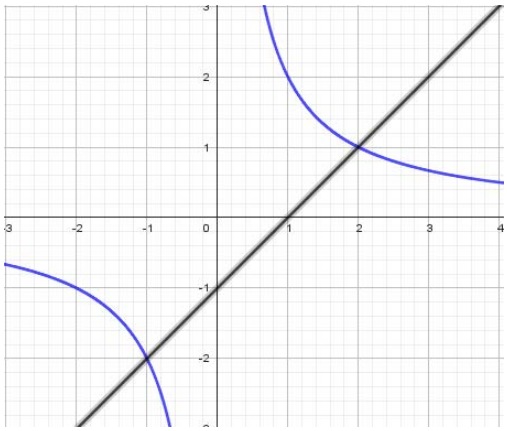


b) $\left\{\begin{matrix}\mathbf{x - y = 1}\\ \mathbf{xy = 2}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}x = 1 + y\\ xy = 2\end{matrix}\right\}$

$(1 + y)\,y = 2 \rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow y_1 = 1\ ;\ y_2 = -2$

$\boldsymbol{y_1 = 1}\ ;\quad x = 1 + 1 \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 2}\ ;\quad \boldsymbol{y_2 = -2}\ ;\quad x = 1 - 2 \rightarrow \boldsymbol{x_2 = -1}$

Textos Marea Verde



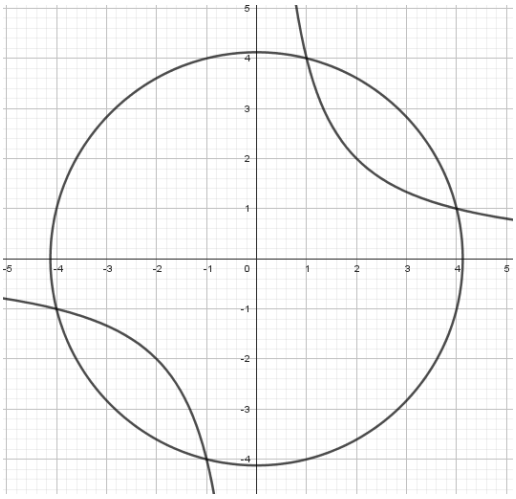
c) $\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 = 17} \\ \mathbf{xy = 4} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$

$x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = -17 \rightarrow x^2 + \frac{16}{x^2} - 17 = 0 \rightarrow x^4 + 16 - 17x^2 = 0 \rightarrow x^2 = t \rightarrow t^2 - 17t + 16 = 0$

$\rightarrow t_1 = 16\,;\ t_2 = 1$

$$x_1 = \pm\sqrt{16} = \pm 4\,;\ x_2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$y = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow y_1 = 1\ ;\ y = -\frac{4}{4} = -1 \qquad y = \frac{4}{1} = 4\ ;\ y = -\frac{4}{1} = -4$$



d) $\begin{cases} \mathbf{x^2 + 2y^2 = 17} \\ \mathbf{x + y = 5} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ x = 5 - y \end{cases}$

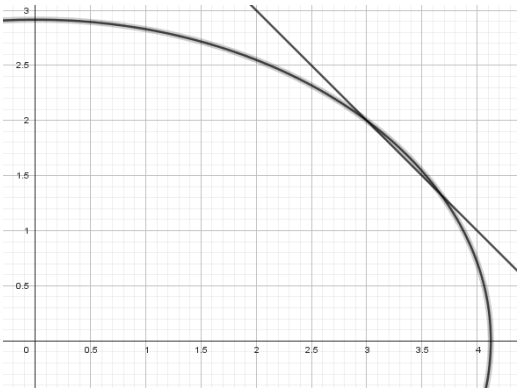
$$(5 - y)^2 + 2y^2 = 17 \rightarrow (25 + y^2 - 10y) + 2y - 17 = 0 \rightarrow 3y^2 - 10y + 8 = 0$$

$y = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\,(3)(8)}}{2\,3} = \frac{10 \pm 2}{6} \rightarrow y_1 = 2\ ;\ y_2 = \frac{4}{3}$

$\mathbf{y_1 = 2}$; $x = 5 - 3 \rightarrow \mathbf{x_1 = 2}$; $\mathbf{y_2 = \frac{4}{3}}$; $x = 5 - \frac{4}{3} \rightarrow \mathbf{x_2 = \frac{11}{3}}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

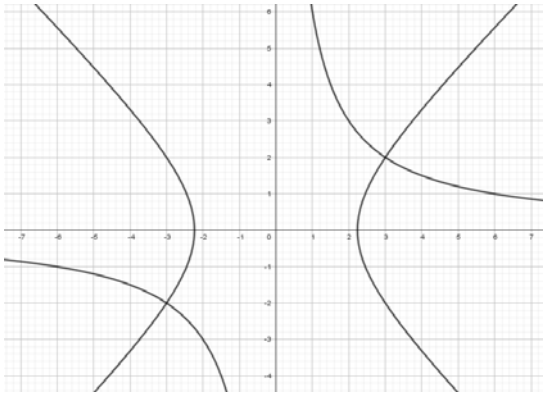


e) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{x^2 - y^2 = 5} \\ \mathbf{xy = 6} \end{matrix}\right\}$ $\quad$ $\left\{\begin{matrix} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{matrix}\right\}$

$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 - 5 = 0 \rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} - 5 = 0 \rightarrow x^4 - 36 - 5x^2 = 0 \rightarrow t^2 - 5t - 36 = 0$

$t = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-36)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{180}}{2} \rightarrow t_1 = 9 \; ; \; t_2 = -4; \; t_1 = 9 \; ; \; x^2 = 9 \; ; \quad \mathbf{x_1 = 3} \; ; \quad \mathbf{x_2 = -3}$

$y = \frac{6}{3} \rightarrow \mathbf{y_1 = 2} \; ; \; y_2 = -\frac{6}{3} \; ; \; \mathbf{y_2 = -2} \; ;$

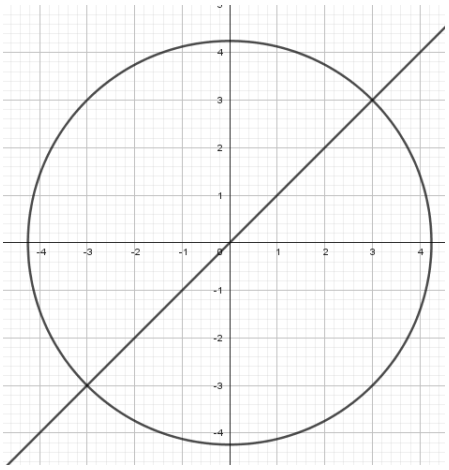


f) $\left\{\begin{matrix} \mathbf{x^2 + y^2 = 18} \\ \mathbf{y = x} \end{matrix}\right\}$

$x^2 + x^2 = 18 \rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \rightarrow$

$\mathbf{x_1 = 3} \; ; \; \mathbf{x_2 = -3} \; ; \; \mathbf{y_1 = 3} \; ; \; \mathbf{y_2 = -3}$

Textos Marea Verde

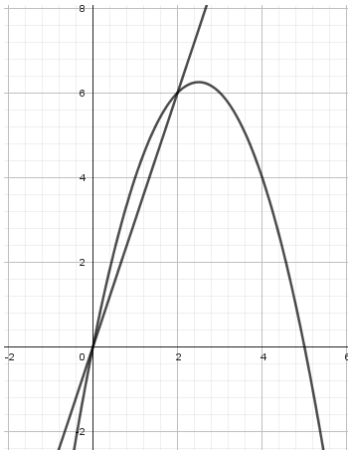


36. La trayectoria de un proyectil es una parábola de ecuación: y = –x² + 5x, y la trayectoria de un avión es una recta de ecuación: y = 3x. ¿En qué puntos coinciden ambas trayectorias? Representa gráficamente la recta y la parábola para comprobar el resultado.

$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = 3x \end{cases}$

$y = 3x$ Sustituyendo en la 1ª ecuación $-x^2 + 4x = 3x \rightarrow -x^2 + 4x - 3x = 0 \rightarrow$

$x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1)\,;\, x_1 = 0\,;\, x_2 = 1\,;\, y = 3(0) \rightarrow y_1 = 0\,;\, y = 3(1) \rightarrow y_2 = 3$



37. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \mathbf{3x^2 - 5y^2 = -2} \\ \mathbf{2x^2 - 3y^2 = -1} \end{cases}$ Multiplicamos por (2) la 1ª ecuación y por (-3) la 2ª $\begin{cases} 6x^2 - 10y^2 = -4 \\ -6x^2 + 9y^2 = 3 \end{cases}$

Sumamos las ecuaciones $-y^2 = -1\,;\; y^2 = 1\,;\; \boldsymbol{y_1 = 1\,;\, y_2 = -1}$

Sustituimos $y^2 = 1$ en la 1ª ecuación $3x^2 - 5 \cdot 1 = -2 \;\; 3x^2 = 3 \;\; x^2 = 1; \boldsymbol{x_1 = 1\,;\, x_2 = -1}$

Solución: (1, 1) (1, -1) (-1, 1) (-1, -1)

Textos Marea Verde

b) $\left.\begin{matrix}\mathbf{3x^2+y^2=3}\\ \mathbf{5x^2-2y^2=5}\end{matrix}\right\}$ Multiplicamos por (2) la 1ª ecuación $\left.\begin{matrix}6x^2+2y^2=6\\ 5x^2-2y^2=5\end{matrix}\right\}$

Sumamos las ecuaciones , $11x^2=11$; $x^2=1$; $\boldsymbol{x_1=1}$; $\boldsymbol{x_2=-1}$

Sustituimos $x^2=1$ en la 1ª ecuación $3\cdot 1+y^2=3$; $y^2=0$; $\boldsymbol{y_1=0}$; $\boldsymbol{y_2=0}$

Solución: (1, 0) (-1, 0)

c) $\left.\begin{matrix}\mathbf{xy=\frac{1}{2}}\\ \mathbf{x+y=\frac{3}{2}}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}xy=\frac{1}{2}\\ x=\frac{3}{2}-y\end{matrix}\right\}$

$\left(\frac{3}{2}-y\right)y=\frac{1}{2}\ \rightarrow\ -y^2+\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}=0\ \rightarrow\ -2y^2+3y-1=0\ \rightarrow\ y=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\,(-2)(-1)}}{2\cdot(-2)}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{-4}\ \rightarrow$

$\boldsymbol{y_1=\frac{-3+1}{-4}=\frac{1}{2}}$; $\boldsymbol{y_2=\frac{-3-1}{-4}=-1}$; $xy=\frac{1}{2}$; $x\cdot(-1)=\frac{1}{2}$; $\boldsymbol{x_1=-\frac{1}{2}}$; $x\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; $\boldsymbol{x_2=1}$

Solución: $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$; $\left(1,\frac{1}{2}\right)$

d) $\left.\begin{matrix}\mathbf{x^2-4y=-3}\\ \mathbf{xy=1}\end{matrix}\right\}$ $x^2-4y=-3$; $y=\frac{x^2+3}{4}$; sustituimos en la 2ª $xy=1$; $x\cdot\frac{x^2+3}{4}=1$

$x^3+3x^2=4$; $x=1$,*resto no reales*, sustituimos $y=\frac{x^2+3}{4}$; $y=\frac{1^2+3}{4}=1$

Solución: (1, 1)

e) $\left.\begin{matrix}\mathbf{x+y-\frac{y}{x}=1}\\ \mathbf{x+y=2}\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}x+y-\frac{y}{x}=1\\ x=2-y\end{matrix}\right\}$ $x+y-\frac{y}{x}=1\rightarrow x^2+xy-y=x$

$x=2-y$, sustituimos en la 1ª ecuación

$(2-y)^2+(2-y)y-y-(2-y)=0\ \rightarrow\ (y^2+4-4y)+2y-y^2-y-2+y=0\ \rightarrow$

$-2y+2=0$; $\mathbf{y=1}$; $x=2-y$; $x=2-1\rightarrow\mathbf{x=1}$

38. ¿Qué número multiplicado por 4 es 5 unidades menor que su cuadrado?

Sea x el número, $4x=x^2-5\ \rightarrow\ x^2-4x-5=0\ \rightarrow\ x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\,(-5)}}{2}=\frac{4\pm6}{2}\ \rightarrow$

$x_1=5$; $x_2=-1$ Solución: El número es 5 o -1 .

39. En una clase deciden que todos van a enviar una carta al resto de compañeros. Uno dice: ¡Vamos a escribir 380 cartas! Calcula el número de alumnos que hay en la clase.

Sea x el número de alumnos, (x-1) número de cartas que escribe cada alumno $x\,(x-1)=380\ \rightarrow$

$x^2-x-380=0\ \rightarrow\ x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\,(-380)}}{2}=\frac{1\pm39}{2}\ \rightarrow x_1=20$; $x_2=-19$

Textos Marea Verde

Solución: Hay 20 alumnos en la clase

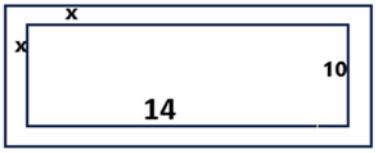
40. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 365 \rightarrow n^2 + 1 - 2n + n^2 + n^2 + 1 + 2n = 365$$

$$3n^2 = 362 \rightarrow n^2 = \frac{363}{3} \rightarrow n = \sqrt{121} \rightarrow n = 11$$

Solución: 11, 12, 13

41. Una fotografía rectangular mide 14 cm de base y 10 cm de altura. Alrededor de la foto hay un margen de igual anchura para la base que para la altura. Halla el ancho del margen, sabiendo que el área total de la foto y el margen es de 252 cm².



$$(14+2x)\cdot(10+2x) = 252\ ;\ 4x^2 + 48x + 140 - 252 = 0\ ;\ 4x^2 + 48x - 112 = 0$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0;\ x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-28)}}{2} = \frac{-12 \pm 16}{2} \rightarrow x_1 = 2\ ;\ x_2 = -14$$

Solución: El ancho del margen es de 2 cm

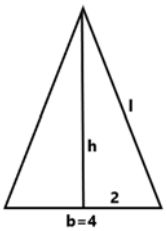
42. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

Sea x el número , $3x^2 + 2x = 85 \rightarrow 3x^2 + 2x - 85 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(3)(-85)}}{2\,3} = \frac{-2 \pm 32}{6} \rightarrow$

$$x_1 = 5\ ;\ x_2 = -\frac{17}{3}$$

Solución: El número es: 5 y $-\frac{17}{3}$

43. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 20 cm y la base mide 4 cm, calcula los lados del triángulo y su área.



Lado desigual del triángulo: $l = \frac{20-4}{2} = 8$ cm

$h = \sqrt{8^2 - 2^2} \rightarrow h = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} = 7,75$ cm

Área del triángulo: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15} = 15{,}19\ \text{cm}^2$

44. Una hoja de papel cuadrada se dobla por la mitad. El rectángulo resultante tiene un área de 8 cm². ¿Cuál es perímetro de dicho rectángulo?

Longitud de un lado de la hoja es x cm, cuando se dobla por la mitad, este tiene una longitud x y una anchura $\frac{x}{2}$.

Área = Longitud · Anchura En este caso, el área es de 8cm^2

$8 = x \cdot \frac{x}{2} \rightarrow 16 = x^2 \rightarrow x = 4$

La longitud original de un lado de la hoja es de 4cm.La longitud es de 4cm y su anchura es de $\frac{4}{2}$=2cm

El perímetro de un rectángulo se calcula sumando la longitud de todos los lados:

$\text{Perímetro} = 2(\text{longitud} + \text{Anchura}) \rightarrow \text{Longitud} = 2(4+2) = 2 \cdot 6 = 12\text{cm}$

45. Un padre dice: "El producto de la edad de mi hijo hace 5 años por el de su edad hace 3 años es mi edad actual, que son 35 años". Calcula la edad del hijo.

Edad del hijo x años. $(x-5)(x-3) = 35 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 35 \rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \rightarrow$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-20)}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}$; $x_1 = 10$; $x_2 = -2$

Solución: La edad del hijo es de 10 años

46. Halla las dimensiones de un rectángulo cuya área es 21 m², sabiendo que sus lados se diferencian en 4 metros.

$\left.\begin{matrix} xy = 21 \\ x - y = 4 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} xy = 21 \\ x = 4 + y \end{matrix}\right\}$ $(4+y)\,y = 21 \rightarrow 4y + y^2 - 21 = 0 \rightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(21)}}{2\,1} = \frac{-4 \pm 10}{2}$

$y_1 = 3$; $y_2 = -7$; $x = 4 + 3 \rightarrow x = 7$

Solución: Las dimensiones del rectángulo son 7 metros y 3 metros

47. En un triángulo rectángulo el cateto mayor mide 4 cm menos que la hipotenusa y 4 cm más que el otro cateto. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

$\left.\begin{matrix} y = z - 4 \\ y = x + 4 \\ y^2 + x^2 = z^2 \end{matrix}\right\}$ y , x catetos; z hipotenusa.

De la 1ª y 2ª ecuación, $z - 4 = x + 4 \rightarrow z = x + 8$

$(x+4)^2 + x^2 = (x+8)^2 \rightarrow x^2 + 8x + 16 + x^2 = x^2 + 16x + 64 \rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2} \rightarrow x_1 = \mathbf{12}$; $x_2 = -4$

$y = 20 - 4 \rightarrow y = \mathbf{16}$ $\rightarrow z = 12 + 8 \rightarrow \boldsymbol{z = 20}$

48. Halla dos números pares consecutivos cuyo producto sea 224.

$x(x+2) = 224 \rightarrow x^2 + 2x - 224 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-224)}}{2} = \frac{-2 \pm 30}{2} \rightarrow x_1 = 14\,;\, x_2 = 16$

Solución: Los dos números pares consecutivos son 14 y 16

BY NC SA
Textos Marea Verde

49. Halla tres números impares consecutivos tales que si al cuadrado del mayor se le restan los cuadrados de los otros dos se obtiene como resultado 15.

$(x+4)^2 - x^2 - (x+2)^2 = 15 \rightarrow x^2 + 8x + 16 - x^2 - x^2 - 4x - 4 = 15 \rightarrow -x^2 + 4x + 12 = 15$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(-3)}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} \rightarrow x_1 = 3 \; ; \; x_2 = -1$$

Solución: Los números impares consecutivos son: 3 ; 5 ; 7

50. La suma de las edades de María y Alfonso son 65 años. La edad de Alfonso menos la mitad de la edad de María es igual a 35. ¿Qué edad tienen cada uno?

$\begin{Bmatrix} x + y = 65 \\ y - \frac{x}{2} = 35 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x + y = 65 \\ y = 35 + \frac{x}{2} \end{Bmatrix}$ x edad de maría, y edad de Alfonso

Sustituyendo en la 1ª ecuación $x + \left(35 + \frac{x}{2}\right) = 65 \rightarrow 2x + (70 + x) = 130 \rightarrow 3x + 70 = 130 \rightarrow$

$3x = 60 \rightarrow x = 20$ $y = 35 + \frac{20}{2} \rightarrow y = 45$

María 20 años, Alfonso 45 años.

51. La suma de las edades de Mariló y Javier es 32 años. Dentro de 7 años, la edad de Javier será igual a la edad de Mariló más 20 años. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

$\begin{Bmatrix} x + y = 32 \\ y + 7 = x + 7 + 20 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x = 32 - y \\ y + 7 = x + 27 \end{Bmatrix}$ x edad de Mariló, y edad de Javier

$y + 7 = (32 - y) + 27 \rightarrow y + 7 = 59 - y \rightarrow 2y = 52 \rightarrow y = 26 \; ; x = 32 - 26 \rightarrow x = 6$

Solución: La edad de Mariló es 6 años y la de Javier 26

52. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 104.

$\begin{Bmatrix} x - y = 24 \\ x + y = 104 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x = 24 + y \\ x + y = 104 \end{Bmatrix}$

$(24 + y) + y = 104 \rightarrow 24 + 2y = 104 \rightarrow 2y = 60 \rightarrow y = 30 \; ; x = 24 + 30 \rightarrow x = 54$

Solución: Los números son 54 y 30

53. Un hotel tiene 42 habitaciones (individuales y dobles) y 62 camas, ¿cuántas habitaciones tiene de cada tipo?

$\begin{Bmatrix} x + y = 42 \\ x + 2y = 62 \end{Bmatrix}$ $\begin{Bmatrix} x = 42 - y \\ x + 2y = 62 \end{Bmatrix}$

$(42 - y) + 2y = 62 \rightarrow 42 + y = 62 \rightarrow y = 20 \; ; x = 42 - 20 \rightarrow x = 22$

Solución: hay 22 habitaciones individuales y 20 habitaciones dobles

54. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 10 cm y las longitudes de sus dos catetos suman 14

BY NC SA
Textos Marea Verde

cm. Calcula el área del triángulo.

$$x^2 + (14 - x)^2 = 10^2 \rightarrow x^2 + (x^2 + 196 - 28x) - 100 = 0 \rightarrow 2x^2 - 28x + 96 = 0$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0 x = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4\,(48)}}{2} = \frac{14 \pm 2}{2} \rightarrow x_1 = 8\ ;\ x_2 = 6$$

Área del triángulo: $\frac{8+6}{2} = 7\ \text{cm}^2$

55. Nieves le pregunta a Miriam por sus calificaciones en Matemáticas y en Lengua. Miriam le dice "La suma de mis calificaciones es 19 y el producto 90". Nieves le da la enhorabuena. ¿Qué calificaciones obtuvo?

$\begin{cases} x + y = 19 \\ xy = 90 \end{cases} \begin{cases} x = 19 - y \\ xy = 90 \end{cases}$ *suma y producto de las soluciones de una ecuación de 2º grado,*

$$y^2 - 19y + 90 = 0 \rightarrow y = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4\,(90)}}{2} = \frac{19 \pm 1}{2} x_1 = 10\ ;\ x_2 = 9$$

Solución: Las calificaciones que obtuvo son 10 y 9

56. De un número de tres cifras se sabe que suman 12, que la suma de sus cuadrados es 62, y que la cifra de las decenas es igual a la de las centenas más 1. ¿Qué número es?

Número es xyz $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 62 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 12 \\ y = x + 1 \\ x + x + 1 + z = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 62 \\ z = 11 - 2x \end{cases}$

$$x^2 + (x + 1)^2 + (11 - 2x)^2 = 62 \rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + 121 + 4x^2 - 44x = 62$$
$$\rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0$$
$$x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x_1 = 5\ ;\ x_2 = 2$$

$Si\ x = 5\ ;\ z = 11 - 2(5) \rightarrow z = 1\ ;\ y = 5 + 1 \rightarrow y = 6$ Número 561

$Si\ x = 2\ ;\ z = 11 - 2(2) \rightarrow z = 7\ ;\ y = 2 + 1 \rightarrow y = 3$ Número 237

57. Se tienen tres zumos compuestos del siguiente modo:

El primero de 40 dl de naranja, 50 dl de limón y 90 dl de pomelo.

El segundo de 30 dl de naranja, 30 dl de limón y 50 dl de pomelo.

El tercero de 20 dl de naranja, 40 dl de limón y 40 dl de pomelo.

Se pide qué volumen habrá de tomarse de cada uno de los zumos anteriores para formar un nuevo zumo de 34 dl de naranja, 46 dl de limón y 67 dl de pomelo.

$\begin{cases} 40x + 30y + 20z = 34 \\ 50x + 30y + 40z = 46 \\ 90x + 50y + 40z = 67 \end{cases}$ *Dividiendo entre 2 y cambiando de orden las incógnitas*

Textos Marea Verde

$\begin{cases} 10z+20x+15y=17 \\ 20z+25x+15y=23 \\ 40z+40x+50y=67 \end{cases}$ $\begin{matrix} E'c_1 = Ec_1 \\ E'c_2 = -2Ec_1 + Ec_2 \\ E'c_3 = -4Ec_1 + Ec_3 \end{matrix}$ $\begin{cases} 10z+20x+15y=17 \\ -15x-15y=-11 \\ 10x-10y=-1 \end{cases}$ $\begin{matrix} E''c_1 = E'c_1 \\ E''c_2 = E'c_2 \\ E''c_3 = 2E'c_2 + 3E'c_3 \end{matrix}$

$\begin{cases} 10z+20x+15y=17 \\ -15x-15y=-11 \\ -60y=-25 \end{cases}$ $\boldsymbol{y = \frac{5}{12}}$; $-15x-15y=-11$, $-15x-15\left(\frac{5}{12}\right)=-11 \rightarrow$

$-15x-\frac{75}{12}=-11\,; -180x-75=-132\,;\ 180x=132-75\ ;\ 180x=57\,;\ x=\frac{57}{180}\ ;\ \boldsymbol{x=\frac{19}{60}}$

$10z+20x+15y=17$; $10z+20\left(\frac{19}{60}\right)+15\left(\frac{5}{12}\right)=17 \rightarrow 10z+\frac{380}{60}+\frac{75}{12}=17 \rightarrow$

$60z+380+375=1020$; $60z+755=1020 \rightarrow 60z=1020-755 \rightarrow 60z=265 \rightarrow \boldsymbol{z=\frac{53}{12}}$

58. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo. Cada kg de trigo se vende por 2 €, el de la cebada por 1 € y el de mijo por 0,5 €. Si se vende 200 kg en total y se obtiene por la venta 300 €, ¿cuántos volúmenes de cada cereal se han vendido?

$\begin{cases} x+y+z=200 \\ 2x+y+0{,}5z=300 \end{cases}$ $\begin{cases} x=200-y-z \\ 2x+y+0{,}5z=300 \end{cases}$

$2\,(200-y-z)+y+0{,}5z=300 \rightarrow 400-2y-2z+y+0{,}5z=300 \rightarrow -y=-100+1{,}5z$

$\boldsymbol{y=100-1{,}5z}$

$x=200-(100-1{,}5z)-z \rightarrow x=200-100+1{,}5z-z \rightarrow \boldsymbol{x=100+0{,}5z}$

$\boldsymbol{z=z}$

Hay infinitas soluciones.

Por ejemplo que se haya vendido 100 kg de trigo, 100 kg de cebada y 0 kg de mijo.

59. Se desea mezclar harina de 2 €/kg con harina de 1 €/kg para obtener una mezcla de 1,2 €/kg. ¿Cuántos kg deberemos poner de cada precio para obtener 300 kg de mezcla?

x *los kg de harina de* 2€, y *los kg de harina de* 1€ $\begin{cases} x+y=300 \\ 2\cdot x+1\cdot y=300\cdot 1{,}2 \end{cases}$

$y=300-x$; $2\cdot x+300-x=300\cdot 1{,}2$; $\boldsymbol{x=60}$; $y=300-x$; $\boldsymbol{y=300-60=240}$

60 kg de harina de 2€ y 240kg de harina de 1€

60. En una tienda hay dos tipos de juguetes, los de tipo A que utilizan 2 pilas y los de tipo B que utilizan 5 pilas. Si en total en la tienda hay 30 juguetes y 120 pilas, ¿cuántos juguetes hay de cada tipo?

$\begin{cases} x+y=30 \\ 2x+5b=120 \end{cases}$ $\begin{cases} x=30-y \\ 2x+5b=120 \end{cases}$

$2(30-y)+5y=120 \rightarrow 60-2y+5y=120 \rightarrow 3y=60 \rightarrow y=20\ ;\ x=30-20 \rightarrow x=10$

Solución: hay 10 tipos del tipo A y 20 del tipo B

Textos Marea Verde

61. Un peatón sale de una ciudad A y se dirige a una ciudad B que está a 15 km de distancia a una velocidad de 4 km/h, y en el mismo momento sale un ciclista de la ciudad B a una velocidad de 16 km/h y se dirige hacia A, ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de B se cruzan?

Sumamos las velocidades: $4 + 16 = 20\text{km/h}$

Tiempo que se tarda: $\frac{15}{20} = \ 0{,}75 \text{ horas } (45\ min)$ cada uno

Distancia a la que está de B: $0{,}75 \cdot 16 = \ 12 \text{ km}$

BY NC SA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $-\mathbf{x^2 - 7x - 12 = 0} \rightarrow x^2 + 7x + 12 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\,(1)(12)}}{2\,1} = \frac{-7 \pm 1}{2}$

$$\mathbf{x_1 = -3\ ;\ x_2 = -4}$$

b) $\mathbf{x(-5 + x) = 3} \rightarrow -5x + x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)\,(-3)}}{2\,1} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

$$\mathbf{x_1 = 5,54\ ;\ x_2 = -0,54}$$

c) $\mathbf{3x^2 = 30x}$

$3x^2 = 30x \rightarrow x^2 = 10x \rightarrow x^2 - 10x = 0 \rightarrow x(x - 10) = 0 \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 0}\ ;\ x - 10 = 0\ ;\ \boldsymbol{x_2 = 10}$

d) $\mathbf{3(x + 1) - x(5x + 2) = 7}$

$3(x + 1) - x(5x + 2) = 7\ ; 3x + 3 - 5x^2 - 2x - 7 = 0\ ; -5x^2 + x - 4 = 0\ ;\ 5x^2 - x + 4 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\,(5)(4)}}{2\,(5)} = \frac{1 \pm \sqrt{-79}}{10} \rightarrow$ *No tiene solución real*

e) $\mathbf{3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1}$

$3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1 \rightarrow 21x - 6 + 3x^2 - 12x - 1 = 0 \rightarrow 3x^2 + 9x - 7 = 0$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\,(3)(-7)}}{2\,(3)} = \frac{-9 \pm \sqrt{165}}{6} \rightarrow \mathbf{x_1 = 0,64\ ;\ x_2 = -3,64}$$

f) $\mathbf{4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7}$

$4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7 \rightarrow 4x^2 - 16 - 15 - 10x + 7 = 0 \rightarrow 4x^2 - 10x - 24 = 0$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\,(4)(-24)}}{2 \cdot 4} = \frac{10 \pm \sqrt{484}}{8} \rightarrow \boldsymbol{x_1 = 4\ ;\ x_2 = -1,5}$$

g) $\mathbf{(3x + 2) \cdot (4x - 2) = -6x - 2}$

$(3x + 2) \cdot (4x - 2) = -6x - 2 \rightarrow 12x^2 - 6x + 8x - 4 + 6x + 2 = 0 \rightarrow 12x^2 + 8x - 2 = 0$

$$6x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(6)(-1)}}{2\,6} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{12} \rightarrow \mathbf{x_1 = 0,19\ ;\ x_2 = -0,86}$$

h) $\mathbf{x \cdot (x + 13) = 168}$

$x \cdot (x + 13) = 168\ ;\ x^2 + 13 - 168 = 0\ ;\ x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4(1)(-168)}}{2\,1} = \frac{-13 \pm 29}{2}\ ; \mathbf{x_1 = 8\ ;\ x_2 = -21}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

i) $\mathbf{2(3x^2-5x+2)-5x(6x-3)=-2}$

$2(3x^2-5x+2)-5x(6x-3)=-2\,;\ 6x^2-10x+4-30x^2+15x+2=0\,;-24x^2+5x+6=0$

$\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\,(-24)(6)}}{2\,(-24)}=\frac{-5\pm\sqrt{601}}{-48}\ \rightarrow\ \mathbf{x_1=0,6\ ;\ x_2=-0,4}$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-3}{2}-\frac{x+2}{4}=5\ \rightarrow\ \frac{2(x^2-3)}{4}-\frac{x+2}{4}-5=0\ \rightarrow\ 2x^2-6-x-2-20=0\ \rightarrow\ 2x^2-x-28=0$

$\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\,(2)(-28)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\sqrt{113}}{4}\ \rightarrow\ \mathbf{x_1=4\ ;\ x_2=-3,5}$

b) $\frac{x^2-5}{2}+\frac{2x^2-3x+7}{2}=5\ \rightarrow\ x^2-5+2x^2-3x+7-10=0\ \rightarrow\ 3x^2-3x-8=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\,(3)(-8)}}{2\cdot 3}=\frac{3\pm\sqrt{105}}{6}=\frac{3\pm 10{,}25}{6}\ \rightarrow\ \mathbf{x_1=2,2\ ;\ x_2=-1,2}$$

c) $\frac{2x^2+1}{5}+\frac{x+3}{10}=1\ \rightarrow\ \frac{2(2x^2+1)}{10}+\frac{x+3}{10}-1=0\ \rightarrow\ 4x^2+2+x+3-10=0$

$$4x^2+x-5=0\ \rightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\,(4)(5)}}{2\,4}=\frac{-1\pm 9}{8}\ \rightarrow\ \mathbf{x_1=1\ ;\ x_2=-\frac{5}{4}}$$

d) $\frac{2-2x^2}{3}+\frac{4x-3}{2}=\frac{5}{6}\ \rightarrow\ \frac{2(2-2x^2)}{6}+\frac{3(4x-3)}{6}-\frac{5}{6}=0\ \rightarrow\ 4-4x^2+12x-9-5=0$

$$-4x^2+12x-10=0\ \rightarrow\ 2x^2-6x+5=0\ \rightarrow\ x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4\,(2)(5)}}{2\cdot 2}=\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{4}$$

No tiene solución real

e) $\frac{x^2-1}{3}+\frac{5x-9}{6}=4x-3\ \rightarrow\ \frac{2\,(x^2-1)}{6}+\frac{5x-9}{6}=(4x-3)\ \rightarrow\ 2x^2-2+5x-9=6\cdot(4x-3)$

$2x^2+5x-11=24x-18\ \rightarrow\ 2x^2-19x+7\,;\ x=\frac{19\pm\sqrt{19^2-4\,(2)(7)}}{2\cdot 2}=\frac{19\pm\sqrt{305}}{4}\,;$

$\mathbf{x_1=9,12\ ;\ x_2=-0,38}$

f) $\frac{2x+3x^2}{7}-\frac{3x-8}{14}=1\ \rightarrow\ \frac{2\,(2x+3x^2)}{14}-\frac{3x-8}{14}=1\ \rightarrow 4x+6x^2-3x+8-14=0\ \ 6x^2+x-6=0\ \rightarrow$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\,(6)(-6)}}{2\cdot 6}=\frac{-1\pm\sqrt{145}}{12}\ \rightarrow\ \mathbf{x_1=0,92\,;\ x_2=-1,08}$

Textos Marea Verde

3. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $\mathbf{x^2 - 3x - 10 = 0} \rightarrow 5 - 2 = 3\ ;\ -2 \cdot 5 = -10 \rightarrow \mathbf{x_1 = 5\ ;\ x_2 = -2}$

b) $\mathbf{x^2 + 3x - 10 = 0} \rightarrow 2 - 5 = -3\ ;\ -5 \cdot 2 = -10 \rightarrow \mathbf{x_1 = 2\ ;\ x_2 = -5}$

c) $\mathbf{x^2 + 7x + 10 = 0} \rightarrow -2 - 5 = -7\ ;\ (-2) \cdot (-5) = 10 \rightarrow \mathbf{x_1 = -2\ ;\ x_2 = -5}$

d) $\mathbf{x^2 - 7x + 10 = 0} \rightarrow 5 + 2 = 7\ ;\ 2 \cdot 5 = 10 \rightarrow \mathbf{x_1 = 5\ ;\ x_2 = 2}$

e) $\mathbf{x(-1 + x) = 0} \rightarrow \mathbf{x_1 = 0}\ ;\ x - 1 = 0 \rightarrow \mathbf{x_2 = 1}$

f) $\mathbf{2x^2 = 50} \rightarrow x^2 = \frac{50}{2} \rightarrow x = \sqrt{25} \rightarrow \mathbf{x = \pm 5}$

g) $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0} \rightarrow 2 + 3 = 5\ ;\ 2 \cdot 3 = 6 \rightarrow \mathbf{x_1 = 3\ ;\ x_2 = 2}$

h) $\mathbf{x^2 - x - 6 = 0} \rightarrow 3 - 2 = 1\ ;\ -2 \cdot 3 = -6 \rightarrow \mathbf{x_1 = 3\ ;\ x_2 = -2}$

i) $\mathbf{x^2 + x - 6 = 0} \rightarrow -3 + 2 = -1\ ;\ -3 \cdot 2 = -6 \rightarrow \mathbf{x_1 = 2\ ;\ x_2 = -3}$

4. Factoriza las ecuaciones del problema anterior. Así, si las soluciones son 2 y 3, escribe:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$. Observa que si el coeficiente de x^2 fuese distinto de 1 los factores tienen que estar multiplicados por dicho coeficiente.

a) $\mathbf{x^2 - 3x - 10 = 0} \rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0$

b) $\mathbf{x^2 + 3x - 10 = 0} \rightarrow (x + 5)(x. -2) = 0$

c) $\mathbf{x^2 + 7x + 10 = 0} \rightarrow (x + 5)(x. +2) = 0$

d) $\mathbf{x^2 - 7x + 10 = 0} \rightarrow (x - 5)(x. -2) = 0$

e) $\mathbf{x\,(x - 1) = 0} \rightarrow x\,(x - 1) = 0$

f) $\mathbf{2x^2 = 50} \rightarrow 2(x + 5)(x - 5) = 0$

g) $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0} \rightarrow (x - 3)(x - 2)$

h) $\mathbf{x^2 - x - 6 = 0} \rightarrow (x - 3)(x + 2)$

i) $\mathbf{x^2 + x - 6 = 0} \rightarrow (x + 3)(x - 2)$

5. Cuando el coeficiente b es par (b = 2B), puedes simplificar la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 2ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Así para resolver x^2 - 8x + 12 = 0 basta decir $x = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$, luego sus soluciones son 6 y 2. Utiliza esa expresión para resolver:

a) $\mathbf{x^2 - 2x - 8 = 0} \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - (1)(-8)}}{1} = 1 \pm \sqrt{9} \rightarrow \mathbf{x_1 = 4\ ;\ x_2 = -2}$

b) $\mathbf{x^2 - 6x - 7 = 0} \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - (1)(-7)}}{1} = 3 \pm \sqrt{16} \rightarrow \mathbf{x_1 = 7\ ;\ x_2 = -1}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

6. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas:

a) $(\mathbf{x-2})\cdot(\mathbf{x-5})=\mathbf{0}\ \rightarrow\ x^2-7x+10=0\ \rightarrow\ \frac{7\pm\sqrt{7^2-4(1)(10)}}{2}=\frac{7\pm3}{2}\rightarrow\ x_1=5\ ;\ x_2=2$

b) $(\mathbf{x+1})\cdot(\mathbf{x-6})=\mathbf{0}\ \rightarrow\ x^2-5x-6=0\ \rightarrow\ x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\,(-6)}}{2}=\frac{5\pm7}{2}\ \rightarrow\ x_1=6\ ;\ x_2=-1$

c) $(\mathbf{x-3})\cdot(\mathbf{x-5})=\mathbf{0}\ \rightarrow\ x^2-8x+15=0\ \rightarrow\ x=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\,(15)}}{2}=\frac{8\pm2}{2}\ \rightarrow\ x_1=5\ ;\ x_2=3$

d) $(\mathbf{x-4})\cdot(\mathbf{x+7})=\mathbf{0}\ (x-4)\cdot(x+7)=0\ \rightarrow\ x^2+3x-28=0\ \rightarrow$

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\,(-28)}}{2}=\frac{-3\pm11}{2}\rightarrow\quad x_1=4\ ;\ x_2=7$

e) $(x+8)\cdot(x-9)=0\ \rightarrow x^2-x-72=0\ \rightarrow\ x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\,(-72)}}{2}=\frac{1\pm17}{2}\ \rightarrow\ x_1=9\,;\ x_2=-8$

f) $(\mathbf{x-2})\cdot(\mathbf{x+3})=\mathbf{0}\ \rightarrow\ x^2+x-6=0\ \rightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-6)}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\ \rightarrow\ x_1=2\ ;\ x_2=-3$

7. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discriminante, y luego resuélvelas:

a) $\mathbf{x^2+7x-3=0}\ \rightarrow$ discriminante: $7^2-4\,(1)(-3)=61\ \rightarrow\ D>0$ Tiene dos soluciones

$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\,(1)(-3)}}{2\cdot1}=\frac{-7\pm\sqrt{61}}{2}\ \rightarrow\ x_1=0{,}40\ ;\ x_2=-7{,}40$

b) $\mathbf{5x^2+7x-8=0}\ \rightarrow$Discriminante: $7^2-4(5)(-8)=189\ \rightarrow\ D>0$ Tiene dos soluciones

$x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\,(1)-(8)}}{2\,1}=\frac{-7\pm9}{2}\ \rightarrow\ x_1=1\ ;\ x_2=-8$

c) $\mathbf{2x^2+3x+9=0}\ \rightarrow$Discriminante: $3^2-4\,(2)(9)=-63\ \rightarrow\ D<0$ No tiene solución

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\,(2)(9)}}{2\,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-63}}{4}$ No tiene solución

d) $\mathbf{2x^2-2x+7=0}\ \rightarrow$Discriminante: $2^2-4\,(2)(7)=-52\ \rightarrow\ D<0$ No tiene solucion

$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(2)(7)}}{2\,2}=\frac{2\pm\sqrt{-52}}{4}$ No tiene solucion real

e) $\mathbf{3x^2-2x-7=0}\ \rightarrow$ Discriminante: $2^2-4\,(3)(-7)=88\ \rightarrow D>0$ Tiene dos soluciones

$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\,(3)\,(-7)}}{2\,3}=\frac{2\pm\sqrt{88}}{6}\ \rightarrow\ x_1=1{,}89\ ;\ x_2=-1{,}23$

f) $\mathbf{4x^2+x-5=0}\ \rightarrow$ Discriminante: $1^2-4\,(4)(-5)=81\ \rightarrow\ D>0$ Tiene dos soluciones

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\,(4)\,(-5)}}{2\,(4)}=\frac{-1\pm9}{8}\ \rightarrow\ x_1=1\ ;\ x_2=\frac{5}{4}$

8.Escribe tres ecuaciones de segundo grado que no tengan ninguna solución real. Ayuda: Utiliza el discriminante.

a) $x^2+4=0\ \rightarrow\ 0^2-4\,(1)(4)=-16$

b) $x^2+9=0\ \rightarrow\ 0^2-4\,(1)(9)=-36$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

c) $x^2 + 16 = 0 \rightarrow 0^2 - 4\,(1)(16) = -64$

9.Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan una solución doble.

a)$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow 4^2 - 4\,(1)(4) = 0$; $(x-2)^2$

b) $3x^2 - 6x + 3 = 0 \rightarrow 6^2 - 4\,(3)(3) = 0$; $3(x-1)^2$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow 6^2 - 4\,(1)(9) = 0$; $(x-3)^2$

10.Escribe tres ecuaciones de segundo grado que tengan dos soluciones reales y distintas.

a) $\mathbf{(x-3)\cdot(x-2)=0}$; $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \frac{5\pm\sqrt{5^2-4\,(1)(6)}}{2\,1} = \frac{5\pm1}{2} \rightarrow x_1 = 3\ ; x_2 = 2$

b) $\mathbf{(x+1)\cdot(x-5)=0}$; $x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow \frac{4\pm\sqrt{4^2-4\,(1)(-5)}}{2\,1} = \frac{4\pm6}{2} \rightarrow x_1 = 5\ ; x_2 = -1$

c) $\mathbf{(x+2)\cdot(x+4)=0}$; $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\,(1)(8)}}{2\,1} = \frac{-6\pm2}{2} \rightarrow x_1 = -2\ ; x_2 = -4$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $\boldsymbol{x^5 - 37x^3 + 36x = 0} \rightarrow x\cdot(x^4 - 37x^2 + 36) = 0 \rightarrow x\cdot(x^4 - x^2 - 36x^2 + 36) = 0$

$\rightarrow x\cdot(x^2\cdot(x^2-1) - 36x^2 + 36) = 0 \rightarrow x\cdot\big(x^2\cdot(x^2-1) - 36(x^2-1)\big) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-36) = 0 \rightarrow x = 0;\ x^2 - 1 = 0; x^2 - 36 = 0;$

$\mathbf{x = 0,\ x = -1,\ x = 1,\ x = -6,\ x = 6}$

b) $\boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 8x = 0}$ $x\cdot(x^2 - 2x - 8) = 0 \rightarrow x\cdot(x^2 + 2x - 4x - 8) = 0 \rightarrow$

$x\cdot(x\cdot(x+2x) - 4x - 8) = 0 \rightarrow x\cdot\big(x\cdot(x+2) - 4(x+2)\big) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x\cdot(x+2)\cdot(x-4) = 0 \rightarrow x = 0; x+2 = 0; x-4 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = -2,\ x = 0,\ x = 4}$

c) $\boldsymbol{2x^3 + 2x^2 - 12x = 0} \rightarrow 2x\cdot(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow 2x\cdot(x^2 + 3x - 2x - 6) = 0 \rightarrow$

$2x\cdot(x\cdot(x+3) - 2x - 6) = 0 \rightarrow 2x\cdot\big(x\cdot(x+3) - 2(x+3)\big) = 0$ $2x\cdot(x+3)\cdot(x-2) = 0$

$\rightarrow x\cdot(x+3)\cdot(x-2) = 0 \rightarrow x = 0; x+3 = 0; x-2 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = -3,\ x = 0,\ x = 2}$

d) $\boldsymbol{2x^4 - 5x^2 + 6 = 0}$ (cambiamos a t)$\rightarrow 2t^2 - 5t + 6 = 0 \rightarrow t = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot6}}{2\cdot2} \rightarrow$

$\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$, $\boldsymbol{x = -\sqrt{2}}$, $\boldsymbol{x = \sqrt{3}}$, $\boldsymbol{x = -\sqrt{3}}$

e) $\boldsymbol{2x^4 = 32x^2 - 96} \rightarrow 2x^4 - 32x^2 + 36 = 0 \rightarrow$(cambiamos a t)$\rightarrow 2t^2 - 32t + 96 = 0 \rightarrow$

$t = \frac{-(-36)\pm\sqrt{(-36)^2-4\cdot2\cdot96}}{2\cdot2} \rightarrow t = 4\ y\ t = 12$ sustituimos $t = x^2 \rightarrow$ $x^2 = 4$; $x^2 = 12 \rightarrow$

BY NC SA
Textos Marea Verde

$\boldsymbol{x=2,\ \ x=-2,\ \ x=-2\sqrt{3},\ \ x=2\sqrt{3}}$

f) $\boldsymbol{x(x-3)(2x+3)(3x-5)=0} \rightarrow x=0;\ \ x-3=0;\ \ 2x+3=0;\ \ 3x-5=0$ **=>**

$\boldsymbol{x=-\frac{3}{2},\ \ x=0,\ \ x=-\frac{5}{3},\ \ x=3}$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando un cambio de variable:

a) $\boldsymbol{x^8+81=82x^4} \rightarrow x^8+81-84x^4=0 \rightarrow t=x^4\,; x^8-82x^4+81=0; t^2-82t+81=0 \rightarrow$

$t=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-82)^2-4\cdot1\cdot81}}{2\cdot1} \rightarrow t=1\ y\ t=81 \rightarrow x^4=1; x^4=81 \rightarrow \boldsymbol{x=1, x=-1, x=3, x=-3}$

b) $\boldsymbol{x^4-24x^2+144=0} \rightarrow (x^2-12)^2=0 \rightarrow x^2-12=0 \rightarrow x^2-12=0 \rightarrow \boldsymbol{x=\pm2\sqrt{3}}$

c) $\boldsymbol{x^6-7x^3-8=0} \rightarrow t=x^3 \ \rightarrow\ t^2-7t-8=0 \rightarrow t=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1} \rightarrow t=-1\ y\ t=8 \rightarrow$

$x^3=-1; x^3=8 \rightarrow \boldsymbol{x=-1, x=2}$

d) $\boldsymbol{x^4+8x^2-9=0} \rightarrow t=x^2 \ \rightarrow\ t^2+8t-9 \ \rightarrow t=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2\cdot1} \rightarrow t=-9\ y\ t=1 \rightarrow$

$x^2=-9; x^2=1 \rightarrow \boldsymbol{x=1, x=-1}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\boldsymbol{3x+\frac{2}{x}=1} \rightarrow 3x+\frac{2}{x}-1=0 \rightarrow \frac{3x^2+2-x}{x}=0 \rightarrow 3x^2+2-x=0 \rightarrow$

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3} \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{-23}}{6}$ Sin solución real

b) $\boldsymbol{\frac{2}{3x}+\frac{5}{6x}=x} \ \rightarrow \frac{2}{3x}+\frac{5}{6x}-x=0 \rightarrow \ \frac{4+5-6x^2}{6x}=0 \rightarrow 4+5-6x^2=0 \rightarrow 9-6x^2=0$

$\rightarrow -6x^2=-9 \rightarrow x^2=\frac{3}{2} \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\boldsymbol{\frac{2}{x-5}+3=\frac{1}{x-2}} \rightarrow \frac{2}{x-5}+3-\frac{1}{x-2}=0 \rightarrow \ \frac{2(x-2)+3(x-5)\cdot(x-2)-(x-5)}{(x-5)\cdot(x-2)}=0$

$\rightarrow \ \frac{2x-4+(3x-15)\cdot(x-2)-x+5}{(x-5)\cdot(x-2)}=0 \rightarrow \ \frac{2x-4+3x^2-6x-15x+30-x+5}{(x-5)\cdot(x-2)}=0 \rightarrow \ \frac{-20x+31+3x^2}{(x-5)\cdot(x-2)}=0 \rightarrow$

$-20x+31+3x^2=0 \rightarrow x=\frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot3\cdot31}}{2\cdot3} \rightarrow \quad x=\frac{10-\sqrt{7}}{3};\quad x=\frac{10+\sqrt{7}}{3}$

Textos Marea Verde

d) $\frac{2}{2-x} - 4x = 2 \rightarrow \frac{2}{2-x} - 4x - 2 = 0 \rightarrow \frac{2-4x\cdot(2-x)-2(2-x)}{2-x} = 0 \rightarrow \frac{2-8x+4x^2-2(2-x)}{2-x} = 0 \rightarrow$

$\frac{2-8x+4x^2-4+2x}{2-x} = 0 \rightarrow \frac{-2-6x+4x^2}{2-x} = 0 \rightarrow -2-6x+4x^2 = 0 \rightarrow 4x^2-6x-2=0 \rightarrow$

$2x^2-3x-1=0 \rightarrow x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2} \rightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1 \rightarrow \frac{3}{x+2} = \frac{6x+2}{x-2} + 1 \rightarrow \frac{3}{x+2} - \frac{6x+2}{x-2} - 1 = 0 \rightarrow \frac{3(x-2)-(x+2)\cdot(6x+2)-(x+2)\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)} = 0 \rightarrow$

$\frac{3x-6-(6x^2+2x+12x+4)-(x^2-4)}{(x+2)\cdot(x-2)} = 0 \rightarrow \frac{3x-6-(6x^2+14x+4)-x^2+4}{(x+2)\cdot(x-2)} = 0 \rightarrow \frac{3x-6-6x^2-14x-4-x^2+4}{(x+2)\cdot(x-2)} = 0 \rightarrow$

$\frac{-11x-6-7x^2}{(x+2)\cdot(x-2)} = 0 \rightarrow -11x-6-7x^2=0 \rightarrow -7x^2-11x-6=0 \rightarrow 7x^2 11x+6=0 \rightarrow$

$x = \frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\cdot7\cdot6}}{2\cdot7} \rightarrow x = \frac{-11\pm\sqrt{-47}}{14}$

f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4 \rightarrow \frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} - 4 = 0 \rightarrow \frac{2x\cdot(3x-1)-(x+2)\cdot(5+2x)-8x\cdot(x+2)}{2x\cdot(x+2)} = 0 \rightarrow$

$\frac{6x^2-2x-(5x+2x^2+10+4x)-8x^2-16}{2x\cdot(x+2)} = 0;\ \frac{6x^2-2x-(9x+2x^2+10+)-8x^2-16}{2x\cdot(x+2)} = 0;\ \frac{6x^2-2x-9x-2x^2-10-8x^2-16}{2x\cdot(x+2)} = 0$

$\frac{-4x-27x-10}{2x\cdot(x+2)} = 0; -4x-27x-10=0; 4x^2+27x+10=0 \rightarrow \frac{-27\pm\sqrt{(-27)^2-4\cdot4\cdot10}}{2\cdot4} \rightarrow x = \frac{-27\pm\sqrt{569}}{8}$

g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2 \rightarrow \frac{(x-1)\cdot(5x-3)-(x+1)\cdot(5+3x)}{(x+1)\cdot(x-1)} = 2 \rightarrow \frac{5x^2-3x-5x+3-(8x+3x^2+5)}{(x+1)\cdot(x-1)} = 2 \rightarrow$

$\frac{5x^2-3x-5x+3-8x-3x^2-5}{(x+1)\cdot(x-1)} = 2 \rightarrow \frac{2x^2-16x-2}{(x+1)\cdot(x-1)} = 2 \rightarrow 2x^2-16x-2 = 2(x+1)\cdot(x-1) \rightarrow$

$2x^2-16x-2 = 2(x^2-1); 2x^2-16x-2 = 2x^2-2; -16x-2 = 0-2; -16x = 0 \rightarrow x = 0$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2} \rightarrow \frac{4}{1-x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x-x^2} = 0 \rightarrow \frac{4}{1-x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x\cdot(1-x)} = 0$

$\rightarrow \frac{4x-3(1-x)-1}{x\cdot(1-x)} = 0 \rightarrow \frac{4x-3+3x-1}{x\cdot(1-x)} = 0 \rightarrow \frac{7x-4}{x\cdot(1-x)} = 0 \rightarrow 7x-4=0 \rightarrow x = \frac{4}{7}$

i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3} \rightarrow \frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} - \frac{x}{3} = 0;\ \frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{(x-2)\cdot(x+2)} - \frac{x}{3} = 0;\ \frac{15x\cdot(x+2)-6x-x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{3(x-2)\cdot(x+2)} = 0$

$\frac{15x^2+30x-6x-x\cdot(x^2-4)}{3(x-2)\cdot(x+2)} = 0 \rightarrow \frac{15x^2+30x-6x-x^3+4x}{3(x-2)\cdot(x+2)} = 0 \rightarrow \frac{15x^2+28x-x^3}{3(x-2)\cdot(x+2)} = 0 \rightarrow 15x^2+28x-x^3=0 \rightarrow$

$x\cdot(15x+28-x^2) = 0 \rightarrow 15x+28-x^2=0 \rightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{15\pm\sqrt{337}}{2}\ ;\ x=0$

14. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $x - \sqrt{5+4x^2} = -2 \rightarrow -\sqrt{5+4x^2} = -2-x \rightarrow \sqrt{5+4x^2} = 2+x \rightarrow 5+4x^2 = 4+4x+x^2 \rightarrow$

Textos Marea Verde

$5+4x^2-4-4x-x^2=0 \rightarrow 1+4x^2-4x-x^2=0 \rightarrow 1+3x^2-4x=0 \rightarrow 3x^2-4x+1=0 \rightarrow$
$x\cdot(x-1)-(3x-1)=0 \rightarrow (x-1)-(3x-1)=0 \rightarrow 3x-1 \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$; $x-1=0 \rightarrow \boldsymbol{x=1}$

b) $\boldsymbol{\sqrt{16-x}=x-4}$; $16-x=x^2-8x+16$; $-x=x^2-8x$; $-x-x^2+8x=0$; $7x-x^2=0 \rightarrow$
$x\cdot(x-7)=0 \rightarrow \boldsymbol{x=0}$, $\boldsymbol{x=7}$

c) $\boldsymbol{5\sqrt{x^2-3x+2}=2x} \rightarrow 25(x^2-3x+2)=4x^2 \rightarrow 25x^2-75x+50=4x^2 \rightarrow$
$25x^2-75x+50-4x^2=0 \rightarrow 21x^2-75x+50=0 \rightarrow \frac{-(-75)\pm\sqrt{(-75)^2-4\cdot21\cdot50}}{2\cdot21} \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{75\pm\sqrt{57}}{48}}$

d) $\boldsymbol{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}=5} \rightarrow x-2\sqrt{x\cdot(x-2)}+x-2=25 \rightarrow x-2\sqrt{x^2-2x}+x-2=25 \rightarrow$
$2x-2\sqrt{x^2-2x}+x-2=25 \rightarrow -2\sqrt{x^2-2x}=25-2x+2 \rightarrow -2\sqrt{x^2-2x}=27-2x \rightarrow$
$4(x^2-2x)=729-108x+4x^2 \rightarrow 4x^2-8x=729-108x+4x^2 \rightarrow -8x=729-108x \rightarrow$
$-8x+108x=729 \rightarrow 100x=729 \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{729}{100}}$

e) $\boldsymbol{\sqrt{1-x}-\sqrt{x+1}+2=0} \rightarrow \sqrt{1-x}=\sqrt{x+1}-2 \rightarrow 1-x=x+1-4\sqrt{x+1}+4 \rightarrow$
$-x=x-4\sqrt{x+1}+4 \rightarrow 4\sqrt{x+1}=2x+4 \rightarrow 2\sqrt{x+1}=x+2 \rightarrow 4(x+1)=x^2+4x+4 \rightarrow$
$4x+4=x^2+4x+4 \rightarrow 0=x^2 \rightarrow \boldsymbol{x=0}$

f) $\boldsymbol{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=3} \rightarrow \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}-3=0 \rightarrow \frac{x-2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0 \rightarrow x-2-3\sqrt{x}=0 \rightarrow -3\sqrt{x}=-x+2 \rightarrow$
$9x=4-4x+x^2 \rightarrow 9x-4+4x-x^2=0 \rightarrow 13x-4-x^2=0 \rightarrow -x^2+13x-4 \rightarrow$
$x^2-13x+4=0 \rightarrow x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} \rightarrow \boldsymbol{x=\frac{13\pm3\sqrt{17}}{2}}$

g) $\boldsymbol{5\sqrt{x-2}+1=\frac{2}{\sqrt{x+1}}} \rightarrow 5\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}+1\sqrt{x+1}=2 \rightarrow \left(5\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}+1\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$
$25(x-2)(x+1)+(x+1)-10\sqrt{x-2}\sqrt{x+1}\sqrt{x+1}=4$; $25x^2-25-(10x+10)\sqrt{x-2}=4$
$(10x+10)\sqrt{x-2}=25x^2-29$; $(10x-10)^2(x-2)=(25x^2-29)^2$ .....

h) $\boldsymbol{\sqrt{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}=2} \rightarrow \left(\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right)=2\left(\sqrt{x-2}\right) \rightarrow x-2-1=2\sqrt{x-2} \rightarrow$
$x-3=2\sqrt{x-2} \rightarrow (x-3)^2=\left(2\sqrt{x-2}\right)^2$; $x^2-6x+9=4(x-2)$; $x^2-10x+17=0$
$\boldsymbol{x=5-2\sqrt{2}}$; $\boldsymbol{x=5+2\sqrt{2}}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

i) $\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}=3$; $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}+1=3\sqrt{x-2}$; $\left(\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}+1\right)^2=\left(3\sqrt{x-2}\right)^2$

$(x+1)(x-2)+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}=3(x-2)$; $2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}=-x^2+1+x+3x-6$

$2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}=-x^2+4x-5$; $\left(2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2}\right)^2=(-x^2+4x-5)^2$

$2(x+1)(x-2)=x^4-8x^3+26x^2-40x+25$; $x^4-8x^3+26x^2-40x+25-2x^2+4x-4=0$

$x^4-8x^3+24x^2-36x+21=0$; $\boldsymbol{x=1,3}$, $\boldsymbol{x=3,8}$

15. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{3^{2x}=\frac{1}{81}}\rightarrow 3^{2x}=3^{-4}\rightarrow 2x=-4\rightarrow x=-2$ **solución** $x=-2$

b) $\boldsymbol{2^{2x}=\frac{1}{1024}}\rightarrow 2^{2x}=2^{-10}\rightarrow 2x=-10\rightarrow x=-5$ **solución** $x=-5$

16. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\left.\begin{matrix}\mathbf{4x-3y=1}\\ \mathbf{3x-y=2}\end{matrix}\right\}$ $y=-2+3x$ Ec2 ; sustituimos en la 1ª ecuación

$4x-3(-2+3x)=1\rightarrow 4x+6-9x=1\rightarrow -5x=-5\rightarrow \boldsymbol{x=1}$; $y=-2+3\cdot 1=1\rightarrow \boldsymbol{y=1}$

b) $\left.\begin{matrix}\mathbf{x+y=5}\\ \mathbf{2x+5y=7}\end{matrix}\right\}$ $x=5-4y$ Ec1 ; sustituimos en la 2ª ecuación

$2(5-4y)+5y=7\rightarrow 10-8y+5y=7\rightarrow -3y=-3\rightarrow \boldsymbol{y=1}$; $x=5-4\cdot 1\rightarrow \boldsymbol{x=1}$

c) $\left.\begin{matrix}\mathbf{2x+3y=5}\\ \mathbf{x+y=2}\end{matrix}\right\}$ $x=2-y$ Ec2 ; sustituimos en la 1ª ecuación

$2(2-y)+3y=5\rightarrow 4-2y+3y=5\rightarrow \boldsymbol{y=1}$; $x=2-1\rightarrow \boldsymbol{x=1}$

17. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\left.\begin{matrix}\mathbf{-3x+2y=-1}\\ \mathbf{3x-y=2}\end{matrix}\right\}$ $y=\frac{-1+3x}{2}$ Ec1 ; $y=-2+3x$ Ec2

$\frac{-1+3x}{2}=-2+3x\rightarrow \frac{-1+3x}{2}=\frac{-4+6x}{2}\rightarrow -1+3x=-4+6x\rightarrow +3x-6x=-4+1\rightarrow -3x=-3\rightarrow$

$x=\frac{-3}{-3}=1\rightarrow y=-2+3\cdot 1\rightarrow y=1$; $\boldsymbol{x=1}$, $\boldsymbol{y=1}$

b) $\left.\begin{matrix}\mathbf{5x-2y=1}\\ \mathbf{4x-y=2}\end{matrix}\right\}$ $y=\frac{5x-1}{2}$ Ec1 ; $y=-2+4x$ Ec2

$\frac{5x-1}{2}=-2+4x\rightarrow 5x-1=-4+8x\rightarrow 5x-8x=-4+1\rightarrow -3x=-3\rightarrow$

Textos Marea Verde

$x = 1$; y=$-2 + 4 \cdot 1 = 2$; $\boldsymbol{x = 1,\ y = 2}$

c) $\left.\begin{matrix} \mathbf{7x - 4y = 10} \\ \mathbf{-8x + 3y = -13} \end{matrix}\right\}$ $y = \frac{7x-10}{4}$ Ec1 ; $y = \frac{8x-13}{3}$ Ec2

$$\frac{7x-10}{4} = \frac{8x-13}{3} \rightarrow 21x - 30 = 32x - 52 \rightarrow 21x - 32x = -52 + 30 \rightarrow -11x = -22 \rightarrow$$

$x = 2$; $y = \frac{8\cdot 2-13}{3} = 1$; $\boldsymbol{x = 2,\ y = 1}$

18. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\left.\begin{matrix} \mathbf{7x - 2y = 5} \\ \mathbf{3x + 2y = 5} \end{matrix}\right\}$ Sumamos las ecuaciones, 10x = 10 ; **x = 1** ; sustituimos en una ecuación

3x + 2y = 5 ; 3·1 + 2y = 5 ; 2y 0 2 ; **y = 1**.

b) $\left.\begin{matrix} \mathbf{2x + 5y = 20} \\ \mathbf{-x - 6y = -14} \end{matrix}\right\}$ 2·Ec2 : $-2x - 12y = -28$

Sumamos las ecuaciones, - 7y = - 8 , **y = 8/7** ; sustituimos en una ecuación

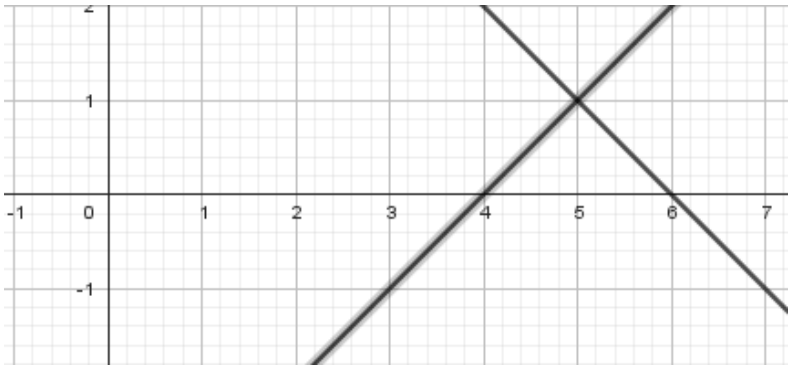
- x - 6y = -14 ; - x - 6·(8/7) = -14 ; x = (- 48 + 98)/7 , **x = 50/7**

c) $\left.\begin{matrix} \mathbf{3x - 6y = 0} \\ \mathbf{-5x + 2y = -9} \end{matrix}\right\}$ 3·Ec2 : $-15x + 6y = -27$; $\left.\begin{matrix} 3x - 6y = 0 \\ -15x + 6y = -27 \end{matrix}\right\}$ sumamos

$-12x = -27$; $\mathbf{x = \frac{27}{12}}$; sustituimos en una ecuación; $3x - 6y = 0$; $3\frac{27}{12} - 6y = 0$; $\mathbf{y = \frac{27}{24}}$

19. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas:

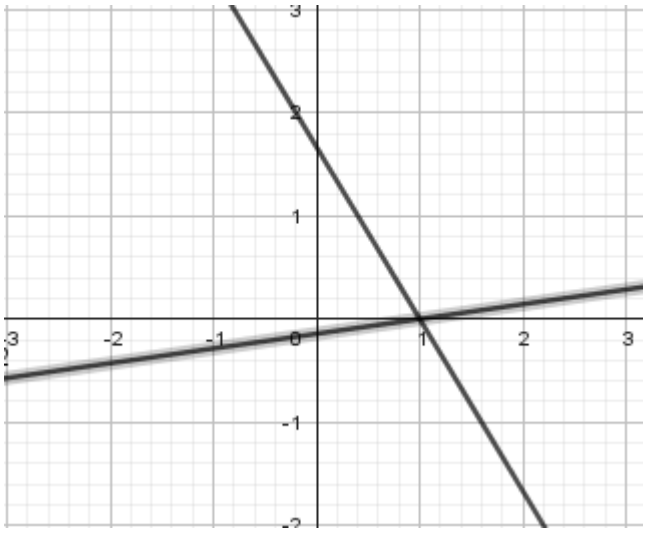
a) $\left.\begin{matrix} \mathbf{x + y = 6} \\ \mathbf{x - y = 4} \end{matrix}\right\}$



x =5, y = 1

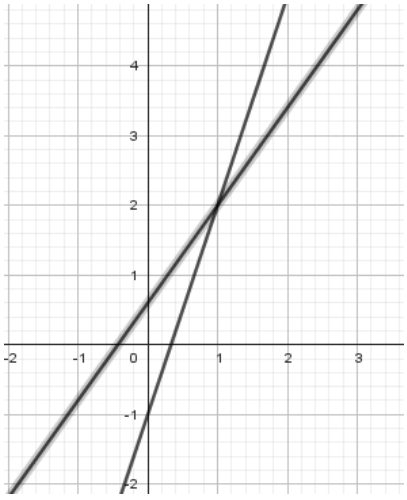
BY NC SA
Textos Marea Verde

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ x - 7y = 1 \end{cases}$



x = 1 , y = 0

c) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -7x + 5y = 3 \end{cases}$



x = 1 , y = 2

20. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{3y-1}{2} = 1 \\ \frac{3x+1}{2} + \frac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2(x-2)}{10} - \frac{5(3y-1)}{10} = 1 \\ \frac{2(3x+1)}{4} + \frac{3y-1}{4} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 4 - 15y + 5 = 10 \\ 6x + 2 + 3y - 1 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 15y = 9 \\ 6x + 3y = 7 \end{cases}$

(-3)· Ec1 $\begin{cases} -6x + 45y = -27 \\ 6x + 3y = 7 \end{cases}$ sumamos las ecuaciones $48y = -20$; $\mathbf{y = \frac{-20}{48} = \frac{-5}{12}}$

Sustituimos en Ec2 $6x + 3y = 7$; $6x + 3\left(\frac{-5}{12}\right) = 7$; $24x - 5 = 28$; $\mathbf{x = \frac{33}{24}}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{5y+7}{6} = -2 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{2(x-1)}{6} - \frac{5y+7}{6} = -2 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 2 - 5y - 7 = -12 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$

(-2)· Ec1 $\begin{cases} -4x + 10y = 6 \\ 4x + y = 5 \end{cases}$ sumamos las ecuaciones $11y = 11$; $\mathbf{y = 1}$

Sustituimos en Ec2 $4x + y = 5$; $4x + 1 = 5$; $\mathbf{x = 1}$

c) $\begin{cases} \frac{5x+1}{2} + \frac{2y-5}{3} = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3(5x+1)}{6} + \frac{2(2y-5)}{6} = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 15x + 3 + 4y - 10 = 24 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 15x + 4y = 31 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

(2)· Ec2 $\begin{cases} 15x + 4y = 31 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$ sumamos las ecuaciones $21x = 33$; $\mathbf{x = \frac{33}{21}}$

Sustituimos en Ec2 $6x - 4y = 2$; $6\left(\frac{33}{21}\right) - 4y = 2$; $66 - 28y = 14$; $\mathbf{y = \frac{52}{28} = \frac{26}{14}}$

21. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

a) Compatible indeterminado

$\begin{cases} (\ \ )x + 2y = (\ \ ) \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ (-2)· Ec2 $\begin{cases} (-6)x + 2y = (-10) \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

b) Incompatible

$\begin{cases} -3x + y = 1 \\ (\ )x + y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ (-3\ )x + y = 6 \end{cases}$

c) Solución x=2, y= 1

$\begin{cases} 2x + y = (\ ) \\ (\ \ )x + 2y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 1 = (5) \\ (\ \ ) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 \ ; \ \ (\ \ ) = 3 \end{cases}$

d) Incompatible

$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x + (\ \ )y = (\ \ ) \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 6x + (-9)y = (0) \end{cases}$

e) Solución x = − 1, y = 1

$\begin{cases} 4x + (\ \ )y = -1 \\ (\ \ )x + y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 4 \cdot (-1) + (\ \ ) \cdot 1 = -1 \\ (\ \ ) \cdot (-1) + 1 = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + (3)y = -1 \\ (-4)x + y = 5 \end{cases}$

f) Compatible indeterminado

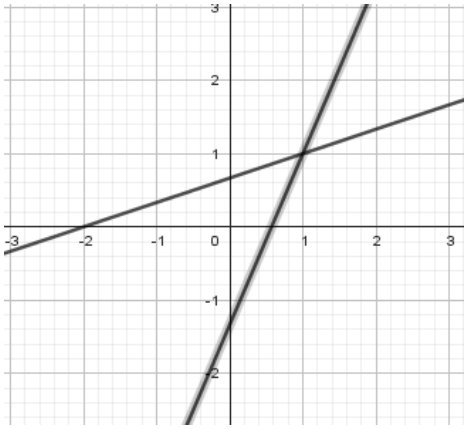
$\begin{cases} (\ \ )x + 8y = (\ \ ) \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} (4)x + 8y = (-12) \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

22. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

BY NC SA
Textos Marea Verde

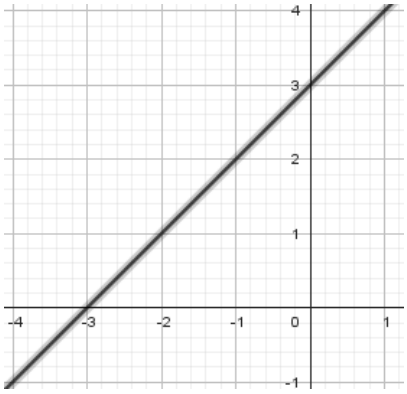
a) $\begin{cases} -2x + 6y = 4 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} y = \frac{4+2x}{6} \\ y = \frac{7x-4}{3} \end{cases}$; $\frac{4+2x}{6} = \frac{7x-4}{3}$; $4 + 2x = 2(7x - 4)$

$4 + 2x = 14x - 8$; $12x = 12$; $x = 1$; $y = \frac{4+2x}{6} = \frac{4+2\cdot 1}{6} = 1$



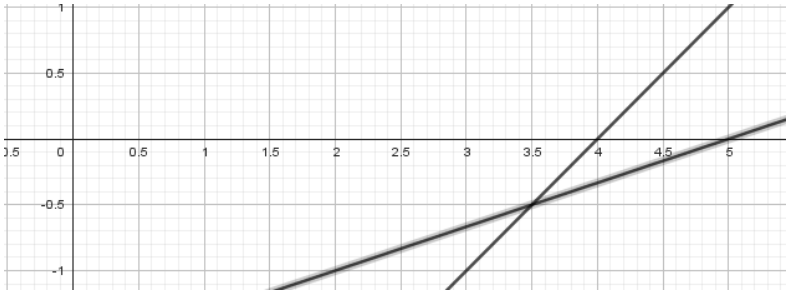
Se trata de un sistema compatible determinado

b) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 3y = -9 \end{cases}$ dividiendo la 2ª ecuación entre 3 $\begin{cases} x - y = -3 \\ x - y = -3 \end{cases}$



Sistema compatible indeterminado

c) $\begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 4 + y \\ x = 5 + 3y \end{cases}$; $4 + y = 5 + 3y$; $y = -\frac{1}{2}$; $x = 4 + y$; $x = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$



Sistema compatible determinado

23. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 30 vehículos con un total de 80 ruedas ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

Textos Marea Verde

1)ecuación → $b + t = 30$

2)ecuación→ $2b + 3t = 80$

En la primera ecuación despejamos b→ $b = 30 - t$

Sustituimos en la segunda ecuación→ $2(30 - t) + 3t = 80$

Resolvemos para t:→ $60 - 2t + 3t = 80 \rightarrow t = 80 - 60 \rightarrow t = 20$

El valor de t ya lo tenemos, ahora podemos encontrar el valor de b

$$\rightarrow b = 30 - t \rightarrow b = 30 - 20 \rightarrow b = 10$$

Solución: 10 bicis y 20 triciclos

24. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 12 le faltan 64 unidades para completar su cuadrado?

Escribimos la ecuación como: $x^2 - 12x = 64$

Resolvemos: $x^2 - 12x = 64 \rightarrow x^2 - 12x - 64 = 0$

$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64)}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{12+20}{2} = 16 \quad x = \frac{12-20}{2} = -4; \quad \boldsymbol{x = 16}$ **años**

25. Descompón 12 en dos factores cuya suma sea 7.

$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \rightarrow x = \frac{7+1}{2} = 4 \quad x = \frac{7-1}{2} = 3;$

La descomposición de 12 en dos factores cuya suma sea 7 es 3 y 4

26. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 616. ¿Qué número es?

$$3x^2 + 2x = 616 \rightarrow 3x^2 + 2x - 616 = 0$$

$\rightarrow x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-616)}}{2a} \rightarrow \quad x1 = 14, \quad x2 = -\frac{44}{3}$ **solución:** $14 \quad o \quad -\frac{44}{3}$

27. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 130. Determina dichos números.

$x^2 + (x + 2)^2 = 130 \rightarrow x^2 + (x^2 + 4x + 4) = 130 \rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 130 \rightarrow 2x^2 + 4x - 126 = 0 \rightarrow$

$x^2 + 2x - 63 = 0$ Factorizar: $(x + 9)(x - 7) = 0 \rightarrow x + 9 = 0 \rightarrow x = -9 \rightarrow x - 7 = 0 \rightarrow x = 7$

Solución: 7 y 9.

28. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

Textos Marea Verde

a= peso de un saco de asno y m= peso de un saco del mulo

1)$m+1=2(a-1)$

2) $a+1=(m-1)$

De 1) $m+1=2(a-1)$ $\quad m+1=2a-2$; $m=2a-3$

De 2) $a+1=(2a-3-1)\rightarrow a=(2a-4)-1\rightarrow a=2a-5\rightarrow \boldsymbol{a=5}$

De $m=2a-3$ $\quad m=2(5)-3\rightarrow m=10-3\rightarrow \boldsymbol{m=7}$

Solución: asno lleva 5 sacos y el mulo 7 sacos.

29. ¿Qué número multiplicado por 3 es 28 unidades menor que su cuadrado?

$3x=x^2-28\rightarrow x^2-3x-28=0\rightarrow (x-7)(x+4)=0$; 1)$x-7=0\rightarrow \boldsymbol{x=7}$; 2) $x+4=0\rightarrow \boldsymbol{x=-4}$

30. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 110.

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=110\rightarrow x^2+(x^2+2x+1)+(x^2+4x+4)=110\rightarrow 3x^2+6x+5=110\rightarrow$

$3x^2+6x-105=0\rightarrow x^2+2x-35=0\rightarrow (x+7)(x-5)=0$

1) $x+7=0\rightarrow x=-7$; **2)** $x-5=0\rightarrow x=5$

Solución: $-7,\ -6,\ -5$ o también $7,\ 6,\ 5$

$(-7)^2+(-6)^2+(-5)^2=49+36+25=110\rightarrow \quad 5^2+6^2+7^2=25+36+49=110$

31. Dentro de 2 años, la edad de Raquel será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 10 años. ¿Qué edad tiene Raquel?

Hace 10 años, su edad era $x-10$

Dentro de 2 años, su edad será $x+2$

$x+2=\frac{1}{2}(x-10)^2\rightarrow x+2=\frac{1}{2}(x^2-20x+100)\rightarrow x+2=\frac{1}{2}x^2-10x+50$

$\rightarrow 2x+4=x^2-20x+100\rightarrow 0=x^2-22x+96\rightarrow (x-6)(x-16)=0$

1)$x-6=0\rightarrow x=6$ no puede ser. (no tiene sentido hace 10 años)

2)$x-16=0\rightarrow x=16$

Actualmente x = 16 años

32. Dos números se diferencian en 3 unidades y la suma de sus cuadrados es 185. ¿Cuáles son dichos números?

$y=x+3\ \rightarrow\ x^2+y^2=185\rightarrow$

BY NC SA
Textos Marea Verde

$x^2+(x+3)^2=185; x^2+x^2+6x+9=185; 2x^2+6x+9=185; 2x^2+6x+9-185=0 \rightarrow$

$2x^2+6x-176=0 \rightarrow x^2+3x-88=0 \rightarrow (x+11)(x-8)=0$

1)$\rightarrow x+11=0 \rightarrow x=-11$ **2)**$\rightarrow x-8=0 \rightarrow x=8$

Cuando $x=-11 \rightarrow y=-11+3=-8$

Cuando $x=8 \rightarrow y=8+3=11$

Solución $-8\ y\ 11$ o $8\ y\ 11$

33. La suma de dos números es 2 y su producto es -80 , ¿de qué números se trata?

$x+y=2 \rightarrow xy=-80 \rightarrow x^2-2x-80=0 \rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-80)}}{2\cdot1} \rightarrow x=10,\ x=-8$

solución:$\rightarrow x=10,\ x=-8$

34. María quiere formar bandejas de un kilogramo con caramelos y bombones. Si los caramelos les cuestan a 3 euros el kilo y los bombones a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 5 euros, ¿qué cantidad deberá poner cada producto? Si quiere formar 100 bandejas, ¿qué cantidad de caramelos y de bombones va a necesitar?

x….kg de caramelos, y….kg de bombones , 100 bandejas pesan 100kg y valen 5·100 = 500€

1)ecuación$\{3x+7y=5\cdot100\}$

2ecuación$\{x+y=100\}$

$x=100-y \rightarrow 3(100-y)+7y=500 \rightarrow 4y=200 \rightarrow y=50$

Sustituimos este valor en la 2ec

$x+50=100 \rightarrow x=50$

Solución: tiene que poner ½ kilo de cada producto, va a necesitar 50 kilos de cada uno para las 100 bandejas

35. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 17 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 13 cm.

$a+b=17\ ;\ a^2+b^2=c^2 \rightarrow a=b-17 \rightarrow (17-b)^2+b^2=13^2 \rightarrow 289-34b+b^2+b^2=169 \rightarrow$

$2b^2-34b+120=0 \rightarrow b^2-17b+60=0 \rightarrow (b-5)(b-12)=0$

1)$\rightarrow b-5=0 \rightarrow b=5$

2)$\rightarrow b-12=0 \rightarrow b=12$

Solución: los catetos del triángulo son 5 y 12 cm

36. El producto de dos números es 6 y la suma de sus cuadrados 13. Calcula dichos números.

Textos Marea Verde

$xy = 6 \quad x^2 + y^2 = 13$

$y = \frac{6}{x} \rightarrow x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (cambiamos a t = x^2)$\rightarrow t^2 - 13t + 36 = 0$

$\rightarrow (t-9)(t-4) = 0$

1)$t - 9 = 0 \rightarrow t = 9$ cambiamos t a x $x = \pm 3$

2)$t - 4 = 0 \rightarrow t = 4$ cambiamos t a x $x = \pm 2$

Solución: 3 y 2 o -3 y -2

37. La suma de dos números es 12. El doble del primero más el triple del segundo es 31. ¿De qué números se trata?

$x + y = 12 \qquad 2x + 3y = 31$

De la primera ecuación podemos despejar x: $x = 12 - y$

Sustituimos en la segunda ecuación

$2(12 - y) + 3y = 31 \rightarrow 24 - 2y + 3y = 31 \rightarrow 24 + y = 31$ restamos 24 ambos lados

$y = 31 - 24 \rightarrow \boldsymbol{y = 7}$ Sustituimos 7 en la primera ecuación $x + 7 = 12$; $\boldsymbol{x = 5}$

Solución: x = 5 e y = 7

38. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 80 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

$c + m = 30 \qquad 4c + 2m = 80$

Tenemos un sistema de dos incógnitas

Multiplicamos por 2 la 1ª ecuación

$2c + 2m = 60 \quad 4c + 2m = 80$ restamos las ecuaciones

$(4c + 2m) - (2c + 2m) = 80 - 60 \rightarrow 4c + 2m - 2c - 2m = 20 \rightarrow 2c = 20 \rightarrow \boldsymbol{c = 10}$

Sustituimos c para encontrar m.

$c + m = 30$; $10 + m = 30 \rightarrow m = 30 - 10$; $m = 20$

Por lo tanto, hay 10 coches y 20 motos

39. La edad actual de Luis es el doble de la de Miriam. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 50. ¿Cuántos años tienen actualmente Luis y Miriam?

L= edad actual de Luis y M= edad actual de Miriam

$L = 2M \rightarrow (L + 10) + (M + 10) = 50 \rightarrow L + M + 20 = 50$

Sustituyendo $\rightarrow L = 2M \ en \ L + M + 20 = 50$

BY NC SA
Textos Marea Verde

$\rightarrow\ 2M + M + 20 = 50\ \rightarrow\ 3M + 20 = 50\quad \rightarrow\quad 3M = 30\quad \rightarrow\quad M = 10$

Ya que conocemos una edad podemos encontrar la otra

$L = 2M\quad \rightarrow\ L = 2 \cdot 10\quad \rightarrow L = 20$

Por lo tanto, Luis tiene 20 años y Miriam 10 años

40. En mi clase hay 25 personas. Nos han regalado a cada chica 3 pegatinas y a cada chico 2 chapas. Si en total había 65 regalos. ¿Cuántos chicos somos en clase?

$x + y = 25\ \ ;\ \ 3x + 2y = 65\ \ ;\quad y = 25 - x$

$3x + 2(25 - x) = 65 \rightarrow 3x + 50 - 2x = 65 \rightarrow x + 50 = 65 \rightarrow x = 65 - 50 \rightarrow\ x = 15$

$25 - x = 25 - 15 = 10$

Hay 15 chicas en clase y 10 chicos en clase

41. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 80 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

$x + (x + 50) = 80\ \ ;\ \ 2x + 50 = 80 \rightarrow 2x = 80 - 50 \rightarrow 2x = 30 \rightarrow x = 15$

El hermano tiene 15 años ; $x + 50 = 15 + 50 = 65$

El abuelo tiene 65 años

42. Tres bocadillos y un refresco cuestan 8 €. Cuatro bocadillos y dos refrescos cuestan 12 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

Tres bocadillos y un refresco cuestan 8 euros

$3b + 1r = 8$

Cuatro bocadillos y dos refrescos cuestan 12 euros

$4b + 2r = 12\ \rightarrow 2b + r = 6$

Despejamos r

$r = 6 - 2b$

Sustituimos en la 1ª $3b + 6 - 2b = 8\ \ ;\ \ b = 2$

$2(2) + r = 6 \rightarrow 4 + r = 6 \rightarrow r = 6 - 4 \rightarrow r = 2$

El precio del bocadillo son 2 euros y el refresco son 2 euros

43. En una granja hay gallinas y ovejas. Si se cuentan las cabezas, son 40. Si se cuentan las patas, son 100. ¿Cuántos gallinas y ovejas hay en la granja?

La suma de las cabezas es 40: $g + o = 40$

La suma de las patas es 100: $2g + 4o = 100$

Desde la primera ecuación, podemos despejar g $g = 40 - o$

$2(40 - o) + 4o = 100; 80 - 2o + 4o = 100; 80 + 2o = 1002o = 100 - 80 \rightarrow 2o = 20 \rightarrow o = 10$

$g = 40 - o\ g = 40 - o \rightarrow g = 40 - 10 \rightarrow g = 30$

Hay 30 gallinas y 10 ovejas en la granja

44. Un rectángulo tiene un perímetro de 180 metros. Si el largo es 10 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

El largo es a + 10 ; El perímetro del rectángulo $\rightarrow P = 2(a + 10) + 2a$ (2 largos más 2 anchos)

$180 = 2(a + 10) + 2a\ ; 180 = 2a + 20 + 2a \rightarrow 180 = 4a + 20 \rightarrow 160 = 4a \rightarrow\ a = \frac{160}{4} \rightarrow a = 40$

El ancho del rectángulo es de 40 metros, $a + 10 = 40 + 10 = 50$

Rectángulo son 40 metros de ancho y 50 metros de largo.

45. En un monedero hay billetes de 5 € y 10 €. Si en total hay 10 billetes y 75 €, ¿cuántas billetes de cada valor hay en el monedero?

$x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$

$5x + 10y = 75$

$5x + 10(10 - x) = 75 \rightarrow 5x + 100 - 10x = 75 \rightarrow -5x = 75 - 100 \rightarrow -5x = -25 \rightarrow$

$x = \frac{-25}{-5} \rightarrow x = 5 \quad ; \quad x + y = 10 \rightarrow 5 + y = 10 \rightarrow y = 10 - 5 \rightarrow y = 5$

Hay 5 billetes de 5 euros y 5 billetes de 10 euros en el monedero

46. En una pelea entre arañas y avispas, hay 13 cabezas y 90 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas avispas y arañas hay en la pelea?

1)$a + v = 13$

2)$80a + 6v = 90$

$v = 13 - a$

$8a + 6(13 - a) = 90 \rightarrow 8a + 78 - 6a = 90 \rightarrow 2a + 78 = 90 \rightarrow 2a = 90 - 78 \rightarrow 2a = 12 \rightarrow a = 6$

$a + v = 13 \rightarrow 6 + v = 13 \rightarrow v = 13 - 6 \rightarrow v = 7$

Hay 6 arañas y 7 avispas

47. Una clase tiene 30 estudiantes, y el número de alumnas es doble al de alumnos, ¿cuántos chicos hay?

$a + b = 30 \quad ; \quad b = 2a$

Textos Marea Verde

$a+b=30$; $a+2a=30$; $3a=30$; $a=10$; $b=2a$; $b=2\cdot 10=20$

Hay 10 alumnos y 20 alumnas

48. Nieves tiene 8 años más que su hermano Daniel, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿qué edades tienen?

$N=D+8$; $M=50$; $M+2=50+2=52$

$52=2(N+D)=2(D+8+\mathrm{D})$; $52=2(2D+8)$; $52=4D+16$; $4D=36$; $D=\frac{36}{4}=9$

$N=D+8=9+8\rightarrow 17$

Nieves tiene 17 y Daniel 9

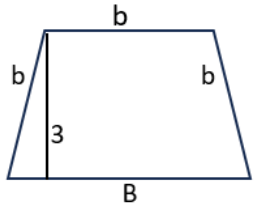
49. Se mezclan 18 kg de arroz de 1,3 € el kilogramo con 24 kg de arroz de precio desconocido, resultando el precio de la mezcla de 1,7 € el kg. ¿Qué precio tenía el segundo arroz?

$18\cdot 1.3+24\cdot x=(18+24)\cdot 1.7$

$23.4+24x=75.6$; $24x=52.2$; $x=\frac{52.2}{24}=2.17$

El precio del segundo arroz es de 2,17 euros el kilo.

50. La altura de un trapecio isósceles es de 3 cm, el perímetro, 28 cm, y los lados inclinados son iguales a la base menor. Calcula el área del trapecio.



$P=b+b+b+B=28$; $3b+B=28$; $B=28-3b$

En el triángulo rectángulo, el cateto menor es $\frac{B-b}{2}$, luego, $3^2+\left(\frac{B-b}{2}\right)^2=b^2$

$3^2+\left(\frac{28-3b-b}{2}\right)^2=b^2$; $3^2+\left(\frac{28-4b}{2}\right)^2=b^2$; $3^2+(14-2b)^2=b^2$

$9+196-56b+4b^2=b^2$ $3b^2-56b+205=0$ $b=5$; $b=\frac{41}{3}$ *no válida*

$B=28-3b$ $B=28-3\cdot 5=13$

$Área=\frac{1}{2}\cdot(base\ mayor+base\ menor)\cdot altura$

$Área=\frac{1}{2}\cdot(B+b)\cdot 3\rightarrow Área=\frac{1}{2}\cdot(13+5)\cdot 3\rightarrow Área=\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 3\rightarrow Area=27cm^2$

51. Dos autobuses salen, uno desde Madrid y el otro desde Cáceres a las 9 de la mañana. Uno va a 80 km/h y el otro a 100 km/h. ¿A qué hora se cruzan? ¿A cuántos km de Madrid estarán?

BY NC SA
Textos Marea Verde

Distancia Madrid Cáceres: 297 km $tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$

Distancia recorrida por autobús Madrid-Cáceres: x autobús Cáceres-Madrid: 297 – x

Los tiempos que están circulando es el mismo luego: $\frac{x}{80} = \frac{297-x}{100}$; $100x = 80(297 - x)$

$100x = 23760 - 80x$; $180x = 23760$; $x = \frac{23760}{180} = 132$

Están a 132 km de Madrid

132/80 = 1,65 horas (0,65·60 = 39 minutos) 1 hora y 39 minutos, se cruzan a las 10 h 39 min

52. En un concurso se ganan 40 euros por cada respuesta acertada y se pierden 80 por cada fallo. Después de 10 preguntas, Carmela lleva ganados 280 euros. ¿Cuántas preguntas ha acertado?

$40x - 80(10 - x) = 280$; $40x - 80(10 - x) = 280 \rightarrow 40x - 800 + 80x = 280 \rightarrow$

$120x - 800 = 280 \rightarrow 120x = 280 + 800 \rightarrow 120x = 1080 \rightarrow x = \frac{1080}{120} = 9$

9 preguntas acertadas

53. Paco ha comprado 5 zumos y 4 batidos por 5,7 €, luego ha comprado 7 zumos y 5 batidos y le han costado 7,8 €. Calcula los precios de ambas cosas.

$\begin{cases} 5x + 4y = 5.7 \\ 7x + 5y = 7.8 \end{cases}$; multiplicamos la 1ª por7, la 2ª por 5 y restamos $\begin{cases} 35x + 28y = 39.9 \\ 35x + 25y = 39 \end{cases}$

$35x + 28y - (35x + 25y) = 39.9 - 39$; $3y = 0.9$; $y = 0.3$

$5x + 4(0.3) = 5.7$ $5x + 1.2 = 5.7$ $5x = 5.7 - 1.2$ $5x = 4.5$ $x = 0.9$

El zumo cuesta 0.9 euros y el batido 0.3 euros

54. ¿Qué fracción es igual a 1 cuando se suma 1 al numerador y es igual a 1/2 si se suma 2 al denominador?

Fracción = $\frac{x+1}{y}$; $\frac{x+1}{y} = 1$; $\frac{x}{y+2} = \frac{1}{2}$

$\frac{x+1}{y} = 1$; $x + 1 = y$

$\frac{x}{y+2} = \frac{1}{2}$; $2x = y + 2$; $2x = x + 1 + 2$; $2x = x + 3$; $x = 3$; $3 + 1 = y$; $4 = y$

Fracción $\frac{3}{4}$

55. El cociente de una división es 2 y el resto es 1. Si el divisor disminuye en 1 unidad, el cociente aumenta en 1 y el resto nuevo es 1. Hallar el dividendo y el divisor.

Cociente 2, nuevo cociente 2+1=3 $D = c \cdot d + r$

$D = 2d + 1$

BY NC SA
Textos Marea Verde

$D = 3(d-1)+1$

$2d+1 = 3(d-1)+1 \rightarrow \quad 2d+1 = 3d-3+1 \rightarrow \quad 2d+1 = 3d-2 \quad 1 = d-2 \quad d = 3$

$D = 2d+1 \rightarrow D = 2(3)+1 \rightarrow D = 6+1 \rightarrow D = 7$

Dividendo es 7 y divisor 3

56. Dos amigas fueron a pescar. Al final del día una dijo: "Si tú me das uno de tus peces, entonces yo tendré el doble que tú". La otra le respondió: "Si tú me das uno de tus peces, yo tendré el mismo número de peces que tú". ¿Cuántos peces tenía cada una?

$x+1 = 2(y-1)$

$y+1 = x-1 \quad ; \quad x = y+2$

$(y+2)+1 = 2(y-1) \quad ; \; y+3 = 2y-2 \quad ; \quad 3 = y-2 \quad y = 5 \quad ; \quad x = 5+2 \rightarrow x = 7$

La primera amiga tiene 7 peces y la segunda 5 peces

57. Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su área es 35 cm² y cuyo perímetro, 24 cm.

$(A) = 35cm^2 \quad (P) = 24cm$ luego la suma de los lados es 12, tenemos el término en **x** y el independiente

$(x)^2 - 12\,x + 35 = 0 \quad (h-5)(h-7) = 0$

Solución: 7 cm de altura y 5cm de base

58. Un peatón sale de una ciudad "A" a una velocidad de 4 km/h, y se dirige a una ciudad "B" que está a 20 km de la ciudad "A", 30 minutos después sale un ciclista de la ciudad "B" a una velocidad de 20 km/h y se dirige hacia "A", ¿cuánto tiempo lleva el peatón caminando en el momento del encuentro? ¿A qué distancia de "B" se cruzan?

$Espacio = Velocidad \cdot Tiempo$; t = e/v; tiempo del peatón t , el ciclista t - 0,5

Espacio del peatón: e, espacio del ciclista 20 – e

$\begin{cases} t = \frac{e}{4} \\ t - 0{,}5 = \frac{20-e}{20} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4t = e \\ 20t - 10 = 20 - e \end{cases} \quad 20t - 10 = 20 - 4t \; ; \; 24t = 30 \; , \; t = \frac{30}{24} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

El peatón ha estado caminando 1,25 h y ha recorrido 4 · 1,25 = 5km

El ciclista ha estado 0.75h y ha recorrido 20·0,75 = 15km

Se cruzan a 15km de la ciudad B

59. Se desea mezclar aceite de 2,7 €/l con otro aceite de 3,6 €/l de modo que la mezcla resulte a 3 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 100 litros de la mezcla?

x = número de litros del aceite de 2,7 euros/litros

Textos Marea Verde

y = número de litros de aceite 3,6 euros/ litros

$100\ litros\ será\ 100 \cdot 3 = 300€$

$2.7x + 3.6y = 300$

$x + y = 100 \quad ; \quad y = 100 - x$

$2.7x + 3.6(100 - x) = 300 \rightarrow \quad 2.7x + 360 - 3.6x = 300 \ \rightarrow \ -0.9x = -60 \ \rightarrow x = 66.7$

$y = 100 - x = 100 - 66.7 = 33.3$

Solución: 66.7litros del primero y 33.3 litros del segundo

60. Al intercambiar las cifras de un número de dos cifras se obtiene otro que es 45 unidades mayor. Halla el número inicial.

número de dos cifras: xy = $10x + y$; número de dos dígitos intercambiadas las cifras yx = $10y + x$

$10y + x = 10x + y + 45 \ \rightarrow \qquad 10y - y = 10x - x + 45 \ \rightarrow \qquad 9y = 9x + 45$

$\rightarrow y = x + 5$, sin considerar el 0, las posibles soluciones son: 16, 27, 38 y 49.

61. La diagonal de un rectángulo mide 25 cm y el perímetro 70 cm. Halla los lados del rectángulo.

$2a + 2b = 70 \quad , \quad a + b = 35$

$a^2 + b^2 = 25^2 \rightarrow \quad a^2 + b^2 = 625$

$a = 35 - b$

$(35 - b)^2 + b^2 = 625 \rightarrow \quad 1225 - 70b + b^2 + b^2 = 625 \rightarrow \quad 2b^2 - 70b + 600 = 0$

$b^2 - 35b + 300 = 0 \quad (b - 20)(b - 15) = 0$

$$si\ b\ = 20, entonces\ a = 35 - b = 35 - 20 = 15$$

$$Si\ b\ = 15, entonces\ a\ = 35 - b\ = 35 - 15 = 20$$

Soluciones 15cm y 20cm

62. Una valla rodea un terreno rectangular de 300 m². Si la valla mide 70 metros, calcula las dimensiones del terreno.

$2l + 2w = 70 \quad ; \quad l + w = 35 \ ; \quad l \cdot w = 300 \quad ; \quad w^2 - 35w + 300 = 0 \ ; \quad (w - 20)(w - 15) = 0$

$$Si\ w\ = 20\ entonces\ l = 35 - w = 35 - 20 = 15$$

$$Si\ w\ = 15, entonces\ l\ = 35 - w = 35 - 15 = 20$$

Solución: mide 20m por 15 m

63. Varios amigos van a hacer un regalo de bodas que cuesta 800 euros, que pagarán a partes iguales. A última hora se apuntan seis amigos más, con lo que cada uno toca a 30 euros menos. ¿Cuántos

Textos Marea Verde

amigos eran inicialmente? ¿Cuánto pagará al final cada uno?

x = número de amigos ; cada amigo paga: $\frac{800}{x}$

$x+6$ cuando se une 6 amigos, ahora paga cada uno: $\frac{800}{x+6}$

$\frac{800}{x}-\frac{800}{x+6}=30$; $\frac{800(x+6)}{x(x+6)}-\frac{800x}{x(x+6)}=30$; $800x-800x+4800=30x(x+6)$

$30x^2+180x-4800=0$; $x^2+6x-160=0$ $\boldsymbol{x=10}$; $x=-16$ $\frac{800}{10+6}=50$

Inicialmente son 10 amigos. Iban a pagar 80€ y finalmente pagarán 50€

64. Las diagonales de un rombo se diferencian en 2 cm y su área es de 24 cm2. Calcula su perímetro.

$área=\frac{d1\cdot d2}{2}$; $24=\frac{d\cdot(d-2)}{2}$; $48=d^2-2d$; $d^2-2d-48=0$

$d^2-8d+6d-48=0\rightarrow$ $d(d-8)+6(d-8)=0\rightarrow$ $(d+6)(d-8)=0$

$d=8$ y $d=-6$; $d-2=8-2=6$

Miden 6 cm y 8cm

65. Un tren sale de Barcelona a Madrid a 200 km/h. Una hora después sale otro tren de Madrid a 220 km/h; la distancia entre las dos ciudades es de 618 km. ¿Por cuánto tiempo se cruzan los dos trenes? ¿A qué distancia de Barcelona?

Primer tren→ $Dist=200t$

Segundo tren→ $Dist=220(t-1)$

$200t+220(t-1)=618$

$200t+220t-220=618\rightarrow 420t-220=618\rightarrow 420t=618+220\rightarrow 420t=838\rightarrow t=\frac{419}{210}$

t = 1,91 horas, 1 hora y 54 minutos , el de Barcelona a Madrid

Distancia desde Barcelona→ $200\cdot t$ Sustituimos t $\rightarrow 200\cdot\frac{419}{210}\rightarrow 400\ km$

El de Barcelona lleva 1 hora y 54 minutos circulando y el de Madrid 54 minutos.

Se encuentran a 400 km de Barcelona

66. Un coche sale de una ciudad "A" a una velocidad de 100 km/h y 30 minutos más tarde otro coche sale de "A" en la misma dirección y sentido a una velocidad de 120 km/h, ¿cuánto tiempo tardará el segundo en alcanzar al primero y a qué distancia de "A" se produce el encuentro?

Distancia= v · t

Primer coche → $D1=v1\cdot t1$

Segundo coche→ $D2=v2\cdot t2$

$t2=t1-0.5$; $D1=D2$

BY NC SA
Textos Marea Verde

$v1 \cdot t1 = v2 \cdot (t1 - 0.5)$; $100 \cdot t1 = 120 \cdot (t1 - 0.5)$; $100 \cdot t1 = 120 \cdot t1 - 60$; $60 = 20 \cdot t1$

$t1 = 3\ horas$; $d1 = v1 \cdot t1 = 100 \cdot 3 = 300km$

Solución: A las 3 horas y una distancia de 300km

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. La solución de la ecuación $2\,(x-3)-3(x^2-4)=1$ es:

a) $x=\frac{10}{3}\,;\ x=-2$; **b)** $x=\frac{5}{3}\,;\ x=-1$; **c)** $x=1\,;\ x=-\frac{2}{3}$; **d)** $x=\frac{3}{2}\,;\ x=-\frac{7}{6}$

$\rightarrow 2x-6-3(x^2-4)=1\rightarrow 2x-6-3x^2+12=1\rightarrow 2x+6-3x^2=1\rightarrow$
$2x+6-3x^2-1=0\rightarrow 2x+5-3x^2=0\rightarrow -2x-5+3x^2=0\rightarrow +3x^2-2x-5=0\rightarrow$
$+3x^2+3x-5x-5=0\rightarrow 3x\cdot(x+1)-5x-5=0\rightarrow 3x\cdot(x+1)-5(x+1)=0$
$\rightarrow (x+1)\cdot(3x-5)=0\rightarrow x+1=0\rightarrow x=-1\,;\ 3x-5=0\rightarrow x=\frac{5}{3}$

Solución: b)

2. Las soluciones de la ecuación $80=x\,(x-2)$ son:

a) x=8; x=-2. **b) x=40; x=2.** **c) x=10; x=-8.** **d) x=10; x=8**

$80=x^2-2x\rightarrow 80-x^2+2x=0\rightarrow -80+x^2-2x=0\rightarrow x^2-2x-80=0\rightarrow$
$x^2+8x-10x-80=0\rightarrow x\cdot(x+8)-10(x+8)=0\rightarrow (x+8)\cdot(x-10)=0;\ x=-8\,;\ x=10$

Solución: c)

3. Las soluciones de la ecuación $\frac{3x-1}{2}-\frac{x+5}{6}=\frac{x^2}{3}$ son:

a) x=4; x=-2. **b) x=3; x=-2.** **c) 1/5; x=2.** **d) x=2; x=2**

$\frac{3x-1}{2}-\frac{x+5}{6}=\frac{x^2}{3}$; $3(3x-1)-(x+5)=2x^2$; $2x^2-8x+8=0$; $x^2-4x+4=0$; $(x-2)^2=0$

Solución: d)

4. Las soluciones de la ecuación $x^4-29x^2+100=0$ son:

a) 2, –2, 5, –5. **b) 3, –3, 2, –2** **c) 1, –1, 4, –4** **d) 3, –3, 5, –5**

$x^2=t$; $t^2-29t+100=0$; $t=25$, $t=4$; $x=\sqrt{25}$, $x=\sqrt{4}$

Solución a)

5. Las rectas que forman el sistema $\left\{\begin{matrix}7x+21y=14\\2x+6y=4\end{matrix}\right\}$ son:

a) Secantes **b) Paralelas** **c) Coincidentes** **d) Se cruzan**

$\left\{\begin{matrix}7x+21y=14\\2x+6y=4\end{matrix}\right\}$ (-2)·Ec1 , 7·Ec2 $\left\{\begin{matrix}-14x-42y=-28\\14x+42y=28\end{matrix}\right\}$ es la misma ecuación por tanto,

c) coincidentes

6. La solución del sistema $\left\{\begin{matrix}3x-2y=2\\-2x+3y=2\end{matrix}\right\}$ es:

a) x = 2 e y = 1 **b) x = 2 e y = 2** **c) x = 3 e y = 2** **d) No tiene solución**

$\left\{\begin{matrix}3x-2y=2\\-2x+3y=2\end{matrix}\right\}$ (2)·Ec1 , (3·)Ec2 $\left\{\begin{matrix}6x-4y=4\\-6x+9y=6\end{matrix}\right\}$ sumamos, $5y=10\,;\ y=2;\ 3x-2\cdot 2=2; x=2$

Textos Marea Verde

Solución b)

7. La solución del sistema $\left\{\begin{matrix} 3+2x=x-1+y \\ 2x-9y=-43 \end{matrix}\right\}$ **es:**

a) x = 1 e y = 5 b) x = –2 e y = –5 c) x = –43/2 e y = 0 d) x = 3 e y = 4

$\left\{\begin{matrix} 3+2x=x-1+y \\ 2x-9y=-43 \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} x-y=-4 \\ 2x-9y=-43 \end{matrix}\right\}$ (-2)·Ec1 $\left\{\begin{matrix} -2x+2y=8 \\ 2x-9y=-43 \end{matrix}\right\}$; $-7y=-35$

$y=5$; $x-(5)=-4$; $x=1$

Solución a)

8. La solución del sistema $\left\{\begin{matrix} 3x-2y+z=2 \\ -2x+3y+z=7 \\ 2x-3y+2z=2 \end{matrix}\right\}$ **es:**

a) x=3, y=2, z=1 b) x=2; y=1, z=3 c) x=-1, y=-2, z=-3 d) x=1, y=2, z=3

$\left\{\begin{matrix} 3x-2y+z=2 \\ -2x+3y+z=7 \\ 2x-3y+2z=2 \end{matrix}\right\}$ -Ec1 + Ec2 ; -2Ec1 + Ec3 $\left\{\begin{matrix} 3x-2y+z=2 \\ -5x+5y=5 \\ -4x+y=-2 \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} 3x-2y+z=2 \\ x-y=-1 \\ -4x+y=-2 \end{matrix}\right\}$ Ec2 + Ec3

$\left\{\begin{matrix} 3x-2y+z=2 \\ x-y=-1 \\ -3x=-3 \end{matrix}\right\}$; $x=1$; $y=2$; $z=3$

Solución d)

9. En una granja, entre gallinas y vacas hay 120 animales y 280 patas. ¿Cuántos gallinas y vacas hay en la granja?

a) 90 gallinas y 30 vacas. b) 100 gallinas y 20 vacas. c) 80 gallinas y 40 vacas.

$G+V=120$; $2G+4V=280$

$2(G+V)=2(120)$; $2G+2V=240$ restamos

$(2G+4V)-(2G+2V)=280-240$

$2V=40 \rightarrow \boldsymbol{V=20}$; $G+20=120 \rightarrow \boldsymbol{G=100}$

Solución b)

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 5, le faltan 234 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 18 años. b) 20 años. c) 25 años. d)28 años

$5x+234=x^2$; $x^2-5x-234=0$ $x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot(-234)}}{2\cdot1} \rightarrow x1=18\,,\ x2=-13$

Solución: a) 18 años

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 5: Inecuaciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Eduard Ionut
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

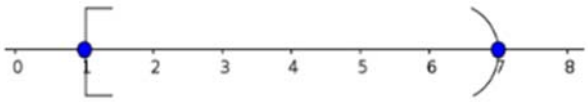
Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

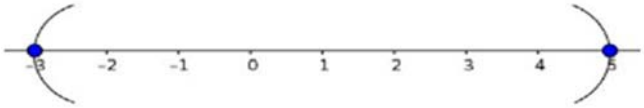
1. INTERVALOS

1. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real:

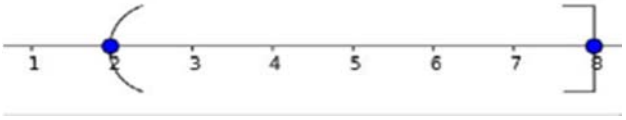
a) [1, 7) $\rightarrow \{x \in R;\ 1 \leq x < 7\}$



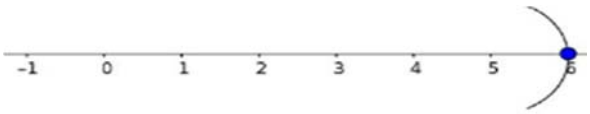
b) (-3, 5) $\rightarrow \{x \in R;\ -3 < x < 5\}$



c) (2, 8] $\rightarrow \{x \in R;\ 2 < x \leq 8\}$

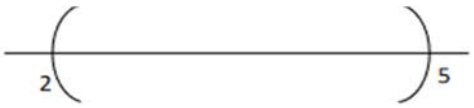


d) $(-\infty, 6) \rightarrow \{x \in R;\ x < 6\}$

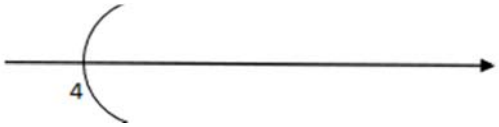


2. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) 2 < x < 5 $\rightarrow (2, 5)$



b) 4 < x $\rightarrow (4, \infty)$



c) 3 ≤ x < 6 $\rightarrow [3, 6)$

d) x ≥ 7 $\rightarrow [7, \infty)$

BY NC SA

2. INECUACIONES

3. Dada la siguiente inecuación 2 + 3x < x + 1, determina cuáles de los siguientes valores son solución de la misma: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15

Simplificamos la inecuación, aplicando a ambos lados:

Restando x: $\mathbf{2 + 3x - x < x + 1 - x \rightarrow 2 + 2x < 1}$

Restando 2: $\mathbf{2 + 2x - 2 < 1 - 2 \rightarrow 2x < -1}$

Dividiendo entre 2: $\frac{2x}{2} < \frac{-1}{2} \rightarrow \mathbf{x < -\frac{1}{2}}$

Evaluamos todos los valores dados 0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15

Los que cumplen ser menores que $-\frac{1}{2}$ son: -1, -2, -4, -7 y -15

4. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

a) Sumar 3: x - 1 > 4 $\rightarrow x - 1 + 3 > 4 + 3 \rightarrow x + 2 > 7$

b) Restar 5: x - 3 > 7 $\rightarrow x - 3 - 5 > 7 - 5 \rightarrow x - 8 > 2$

c) Multiplicar por 5: -8x ≥ 9 $\rightarrow -8x \cdot 5 \geq 9 \cdot 5 \rightarrow -40x \geq 45$

d) Multiplicar por -5: -3x ≥ 7 $\rightarrow -3x\,(-5) \geq 7(-5) \rightarrow 15x \leq -35$

e) Dividir entre 2: 4x < 10 $\rightarrow \frac{4x}{2} < \frac{10}{2} \rightarrow 2x < 5$

f) Dividir entre -2: 4x ≥ 10 $\rightarrow \frac{4x}{-2} \geq \frac{10}{-2} \rightarrow -2x \leq -5$

5. Escribe una inecuación que sea cierta para x = 3 y falsa para x = 3.5:

$$10x < 31$$

Para x = 3 $\rightarrow 10 \cdot 3 < 31 \rightarrow 30 < 31$ Cierto

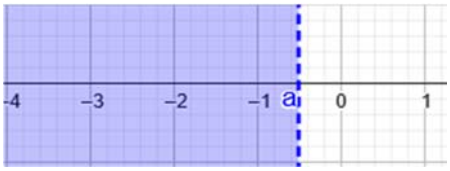
Para x = 3.5 $\rightarrow 10 \cdot 3.5 < 31 \rightarrow 35 < 31$ Falso

3. INECUACIONES CON UNA INCÓGNITA

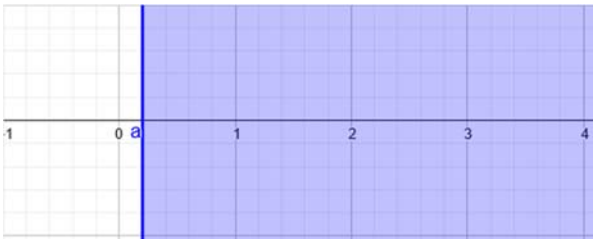
3.1 INECUACIONES DE PRIMER GRADO

6. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

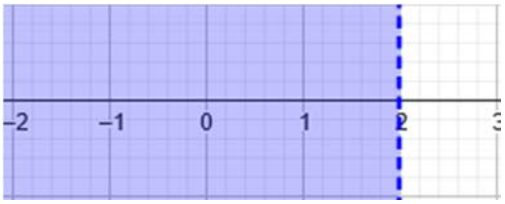
a) 2 + 3x < x + 1 $\rightarrow 3x - x < 1 - 2 \rightarrow 2x < -1 \rightarrow x < \frac{-1}{2}$



b) $\mathbf{5 + 2x \leq 7x + 4} \rightarrow 2x - 7x \leq 4 - 5 \rightarrow -5x \leq -1 \rightarrow x \geq \frac{1}{5}$



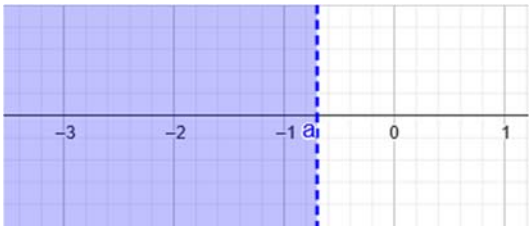
c) $\mathbf{6 + 5x > 6x + 4} \rightarrow 5x - 6x > 4 - 6 \rightarrow -x > -2 \rightarrow x < 2$



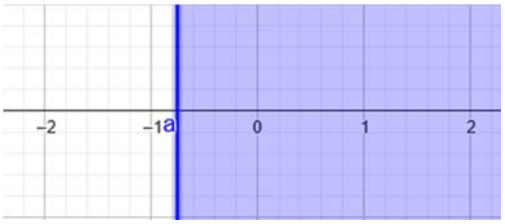
d) $\mathbf{4 + 8x \geq 2x + 9} \rightarrow 8x - 2x \geq 9 - 4 \rightarrow 6x \geq 5 \rightarrow x \geq \frac{5}{6}$

7. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $\mathbf{3(2 + 3x) < - (x + 1)} \rightarrow 6 + 9x < -x - 1 \rightarrow 9x + x < -1 - 6 \rightarrow 10x < -7 \rightarrow x < \frac{-7}{10}$



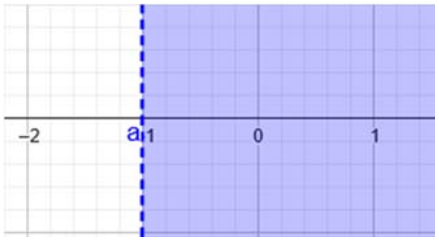
b) $\mathbf{5(1 + 2x) \leq 2(7x + 4)} \rightarrow 5 + 10x \leq 14x + 8 \rightarrow 10x - 14x \leq 8 - 5 \rightarrow -4x \leq 3 \rightarrow x \geq \frac{-3}{4}$



BY NC SA
Textos Marea Verde

c) 2(6 + 5x) + 3(x – 1) > 2(6x + 4) $\rightarrow 12 + 10x + 3x - 3 > 12x + 8 \rightarrow 9 + 13x > 12x + 8 \rightarrow$

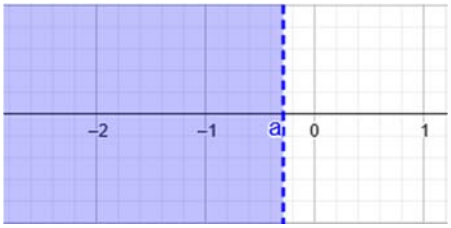
$$13x - 12x > 8 - 9 \rightarrow x > -1$$



8. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

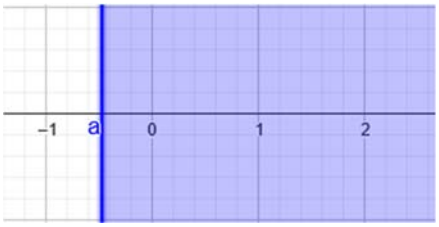
a) 3 + 4x < x/2 + 2

$$2(3 + 4x) < 2(\frac{x}{2} + 2) \rightarrow 6 + 8x < x + 4 \rightarrow 8x - x < 4 - 6 \rightarrow 7x < -2 \rightarrow x < \frac{-2}{7}$$



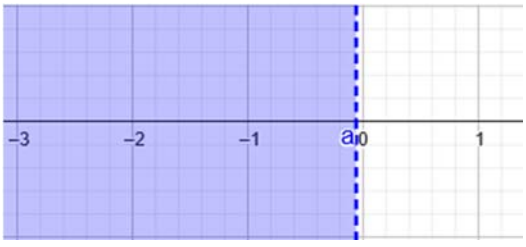
b) 4 + 4x/3≤ 7x/2 + 5 $\rightarrow 6(4 + \frac{4x}{3}) \leq 6(\frac{7x}{2} + 5) \rightarrow 24 + 8x \leq 21x + 30 \rightarrow$

$$8x - 21x \leq 30 - 24 \rightarrow -13x \leq 6 \rightarrow x \geq \frac{6}{-13}$$



c) (5 + 7x)/3 > 8x + 2 $\rightarrow 3(\frac{5+7x}{3}) > 3(8x + 2) \rightarrow 5 + 7x > 24x + 6 \rightarrow$

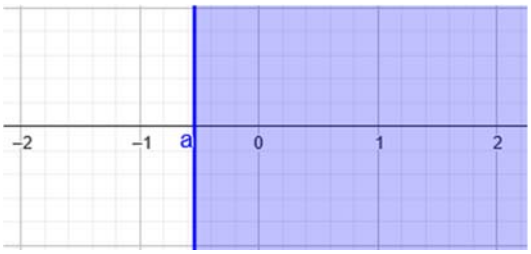
$$7x - 24x > 6 - 5 \rightarrow -17x > 1 \rightarrow x < \frac{1}{-17}$$



BY NC SA

d) (4 + 8x)5 + 3 ≥ (2x + 9)/7 $\rightarrow\ 20 + 40x + 3 \geq \frac{2x+9}{7} \rightarrow 23 + 40x \geq \frac{2x+9}{7} \rightarrow$

$7(23 + 40x) \geq 7(\frac{2x+9}{7}) \rightarrow 161 + 280x \geq 2x + 9 \rightarrow 278x \geq -152 \rightarrow x \geq \frac{-152}{278}$



9. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[\mathbf{1}, \infty) \rightarrow x \geq 1$

b) $(-\infty, \mathbf{5}) \rightarrow x < 5$

c) $(\mathbf{2}, \infty) \rightarrow x > 2$

d) $(-\infty, \mathbf{6}) \rightarrow x < 6$

10.Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\mathbf{3x - 5}}$

Para que sea posible calcular la raíz, la expresión de dentro debe ser mayor o igual que $0 \rightarrow$

$$\rightarrow 3x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

b) $\sqrt{\mathbf{-x - 12}} \rightarrow -x - 12 \geq 0 \rightarrow x \leq -12$

c) $\sqrt{\mathbf{3 - 5x}} \rightarrow 3 - 5x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{-3}{-5} \rightarrow x \leq \frac{3}{5}$

d) $\sqrt{\mathbf{-3x + 12}} \rightarrow -3x + 12 \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{-12}{-3} \rightarrow x \leq 4$

3.2 INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

11. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\mathbf{x^2 - 1 \geq 0} \rightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \rightarrow x - 1 = 0,\ x + 1 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -1$ *Los puntos* $x = 1\ y\ x = -1$ *dividen la recta en tres intervalos*:

$$(-\infty, -1], [-1,1]\ y\ [1, \infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, -1], x = -2 \rightarrow (-2)^2 - 1 \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ [-1,1], x = 0 \rightarrow (0)^2 - 1 \geq 0 \rightarrow -1 \geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ [1, \infty), x = 2 \rightarrow 2^2 - 1 \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

Textos Marea Verde

b) $\boldsymbol{x^2 - 4 \leq 0} \rightarrow (x-2)(x+2) \leq 0 \rightarrow x-2=0, x+2=0 \rightarrow x=2, x=-2$

$Los\ puntos\ x=2\ y\ x=-2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty,-2], [-2,2]\ y\ [2,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty,-2], x=-3 \rightarrow (-3)^2 - 4 \leq 0 \rightarrow 5 \leq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [-2,2], x=0 \rightarrow 0^2 - 4 \leq 0 \rightarrow -4 \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ [2,\infty), x=3 \rightarrow 3^2 - 4 \leq 0 \rightarrow 5 \leq 0\ Falso$

$Solución: x \in [-2,2]$

c) $\boldsymbol{x^2 - 9 > 0} \rightarrow (x-3)(x+3) > 0 \rightarrow x-3=0, x+3=0 \rightarrow x=3, x=-3$

$Los\ puntos\ x=3\ y\ x=-3\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty,-3), (-3,3)\ y\ (3,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty,-3), x=-4 \rightarrow (-4)^2 - 9 > 0 \rightarrow 7 > 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ (-3,3), x=0 \rightarrow 0^2 - 9 > 0 \rightarrow -9 > 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ (3,\infty), x=4 \rightarrow 4^2 - 9 > 0 \rightarrow 7 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

d) $\boldsymbol{x^2 + 4 \geq 0} \rightarrow$ *Cualquier valor de x elevado al cuadrado será positivo, haciendo que la desigualdad sea cierta para cualquier valor*

$Solución: x \in R$

e) $\boldsymbol{2x^2 - 50 < 0} \rightarrow 2(x^2 - 25) < 0 \rightarrow 2(x-25)(x+25) < 0 \rightarrow$

$x-5=0, x+5=0 \rightarrow x=0, x=-5$

$Los\ puntos\ x=3\ y\ x=-3\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty,-5), (-5,5)\ y\ (5,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty,-5), x=-6 \rightarrow (-6)^2 - 25 < 0 \rightarrow 11 < 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ (-5,5), x=0 \rightarrow 0^2 - 25 < 0 \rightarrow -25 < 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ (5,\infty), x=6 \rightarrow 6^2 - 25 < 0 \rightarrow 11 < 0\ Falso$

$Solución: x \in (-5,5)$

f) $\boldsymbol{3x^2 + 12 \leq 0} \rightarrow 3(x^2+4) \leq 0,$ *Cualquier valor de x elevado al cuadrado será positivo, haciendo que la desigualdad sea falsa para cualquier valor*

$Solución: No\ existe\ solución\ (\emptyset)$

BY NC SA

g) $\mathbf{5x^2 - 45 > 0}$

$5(x^2 - 9) > 0 \rightarrow 5(x-3)(x+3) > 0 \rightarrow x-3=0, x+3=0 \rightarrow x=3, x=-3$

$Los\ puntos\ x=3\ y\ x=-3\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty,-3), (-3,3)\ y\ (3,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty,-3), x=-4 \rightarrow (-4)^2 - 9 > 0 \rightarrow 7 > 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ (-3,3), x=0 \rightarrow 0^2 - 9 > 0 \rightarrow -9 > 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ (3,\infty), x=4 \rightarrow 4^2 - 9 > 0 \rightarrow 7 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty,-3) \cup (3,\infty)$

h) $\mathbf{x^2 + 1 \geq 0}$

$Cualquier\ valor\ de\ x\ elevado\ al\ cuadrado\ será\ positivo, haciendo\ que\ la\ desigualdad\ sea\ cierta\ para\ cualquier\ valor$

$Solución: x \in R$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\mathbf{x^2 + x \leq 0} \rightarrow Igualando\ a\ cero\ y\ factorizando\ x(x+1)=0 \rightarrow$

$x=0, x+1=0 \rightarrow x=0, x=-1$

$Los\ puntos\ x=0\ y\ x=-1\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty,-1], [-1,0]\ y\ [0,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty,-1], x=-2 \rightarrow (-2)^2 - 2 \leq 0 \rightarrow 2 \leq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [-1,0], x=-\frac{1}{2} \rightarrow (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \leq 0 \rightarrow \frac{-1}{4} \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ [0,\infty), x=1 \rightarrow (1)^2 + 1 \leq 0 \rightarrow 2 \leq 0\ Falso$

$Solución\ x \in [-1,0]$

b) $\mathbf{x^2 - 5x > 0} \rightarrow Igualando\ a\ cero\ y\ factorizando\ x(x-5)=0 \rightarrow$

$x=0, x-1=0 \rightarrow x=0, x=5$

$Los\ puntos\ x=0\ y\ x=5\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty,0), (0,5)\ y\ (5,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty,0), x=-1 \rightarrow (-1)^2 - 5(-1) > 0 \rightarrow 6 > 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ (0,5), x=2 \rightarrow 2^2 - 5(2) > 0 \rightarrow -6 > 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ (5,\infty), x=6 \rightarrow 6^2 - 5(6) > 0 \rightarrow 6 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty,0) \cup (5,\infty)$

Textos Marea Verde

c) $\boldsymbol{x^2 \leq 8x} \rightarrow$ *Reubicando e igualando* $x^2 - 8x = 0 \rightarrow$ *Factorizando* $x(x-8) = 0$

$$x = 0, x - 8 = 0 \rightarrow x = 0, x = 8$$

Los puntos $x = 0$ *y* $x = 8$ *dividen la recta en tres intervalos*:

$$(-\infty, 0], [0,8] \text{ y } [8, \infty)$$

Comprobamos: *Para* $(-\infty, 0], x = -1 \rightarrow (-1)^2 \leq 8(-1) \rightarrow 1 \leq -8$ *Falso*

Comprobamos: *Para* $[0,8], x = 1 \rightarrow 1^2 \leq 8(1) \rightarrow 1 \leq 8$ *Cierto*

Comprobamos: *Para* $[8, \infty), x = 10 \rightarrow (10)^2 \leq 8(10) \rightarrow 1 \leq -8$ *Falso*

Solución: $x \in [0,8]$

d) $\boldsymbol{x^2 \leq 3x} \rightarrow$ *Reubicando e igualando* $x^2 - 3x = 0 \rightarrow$ *Factorizando* $x(x-3) = 0$

$$x = 0, x - 3 = 0 \rightarrow x = 0, x = 3$$

Los puntos $x = 0$ *y* $x = 3$ *dividen la recta en tres intervalos*:

$$(-\infty, 0], [0,3] \text{ y } [3, \infty)$$

Comprobamos: *Para* $(-\infty, 0], x = -1 \rightarrow (-1)^2 \leq 3(-1) \rightarrow 1 \leq -3$ *Falso*

Comprobamos: *Para* $[0,3], x = 11 \rightarrow 1^2 \leq 3(1) \rightarrow 1 \leq 3$ *Cierto*

Comprobamos: *Para* $[3, \infty), x = 4 \rightarrow 4^2 \leq 3(4) \rightarrow 16 \leq 12$ *Falso*

Solución: $x \in [0,3]$

e) $\boldsymbol{2x^2 - 3x > 0} \rightarrow$ *Factorizando* $x(2x-3) = 0 \rightarrow x = 0, 2x - 3 = 0 \rightarrow$

$$x = 0, x = \frac{3}{2} \text{ Estos puntos dividen la recta en tres intervalos:}$$

$$(-\infty, 0), \left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

Comprobamos: *Para* $(-\infty, 0), x = -1 \rightarrow 2(-1)^2 - 3(-1) > 0 \rightarrow 5 > 0$ *Cierto*

Comprobamos: *Para* $\left(0, \frac{3}{2}\right), \quad x = 1 \rightarrow 2(1)^2 - 3(1) > 0 \rightarrow -1 > 0$ *Falso*

Comprobamos: *Para* $\left(\frac{3}{2}, \infty\right), x = 2 \rightarrow 2(2)^2 - 3(2) > 0 \rightarrow 2 > 0$ *Cierto*

Solución $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

f) $\boldsymbol{5x^2 - 10x} < 0 \rightarrow$ *Equivale a* $x^2 - 2x < 0 \rightarrow$ *Factorizando* $x(x-2) = 0 \rightarrow$

$$x = 0, x - 2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

Los puntos $x = 0$ *y* $x = 2$ *dividen la recta en tres intervalos*:

$$(-\infty, 0), (0,2) \text{ y } (2, \infty)$$

Textos Marea Verde

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, 0), x = -1 \rightarrow 5(-1)^2 - 10(-1) < 0 \rightarrow 15 < 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ (0,2), x = 1 \rightarrow 5(1)^2 - 10(1) < 0 \rightarrow -5 < 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ (2, \infty), x = 3 \rightarrow 5(3)^2 - 10(3) < 0 \rightarrow 15 < 0\ Falso$$

$$Solución: x \in (0,2)$$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\mathbf{3x^2 - 5x \geq 0} \rightarrow$ $Factorizando\ x(3x-5) = 0 \rightarrow x = 0, 3x - 5 = 0 \rightarrow$

$x = 0, x = \frac{5}{3} \rightarrow Los\ puntos\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos: (-\infty, 0], [0, \frac{5}{3}]\ y\ [\frac{5}{3}, \infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, 0], x = -1 \rightarrow 3(-1)^2 - 5(-1) \geq 0 \rightarrow 8$

$\geq 0\ CiertoComprobamos: Para\ [0, \frac{5}{3}], x = 1 \rightarrow 3(1)^2 - 5(1) \geq 0 \rightarrow -2 \geq 0\ Falso$

$$Comprobamos: Para\ [\frac{5}{3}, \infty), x = 2 \rightarrow 3(2)^2 - 5(2) \geq 0 \rightarrow 2\ \geq 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{5}{3}, \infty)$$

b) $\mathbf{3x^2 - 27 > 0} \rightarrow$ $Factorizando\ 3(x^2 - 9) = 0 \rightarrow 3(x-3)(x+3) = 0 \rightarrow$

$$x - 3 = 0, x + 3 = 0 \rightarrow x = 3, x = -3$$

$$Los\ puntos\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, -3), (-3, 3)\ y\ (3, \infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, -3), x = -4 \rightarrow 3(-4)^2 - 27 > 0 \rightarrow 21 > 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ (-3,3), x = 0 \rightarrow 3(0)^2 - 27 > 0 \rightarrow -24 > 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ (3, \infty), x = 4 \rightarrow 3(4)^2 - 27 > 0 \rightarrow 21 > 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

c) $\mathbf{x^2 \leq 0} \rightarrow Cualquier\ valor\ de\ x\ elevado\ al\ cuadrado\ será\ positivo, haciendo\ que\ la$

$$desigualdad\ sólo\ sea\ cierta\ para\ x = 0 \rightarrow 0^2 \leq 0\ Cierto$$

$$Solución\ x = 0$$

d) $\mathbf{2x^2 > 4x} \rightarrow Reubicando\ y\ factorizando\ 2x(x-2) = 0 \rightarrow 2x = 0, x - 2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0, x = 2\ Los\ puntos\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$$(-\infty, 0), (0, 2)\ y\ (2, \infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, 0), x = -1 \rightarrow 2(-1)^2 > 4(-1) \rightarrow 2 > -4\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ (0,2), x = 1 \rightarrow 2(1)^2 > 4(1) \rightarrow 2 > 4\ Falso$$

Textos Marea Verde

$$Comprobamos: Para\ (2,\infty), x = 3 \rightarrow 2(3)^2 > 4(3) \rightarrow 18 > 12\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

e) $\mathbf{2x^2 - 8 > 0} \rightarrow$ $Factorizando\ 2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow 2(x-2)(x+2) = 0 \rightarrow$

$x - 2 = 0, x + 2 = 0 \rightarrow\ x = 2, x = -2 Los\ puntos\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$$(-\infty, -2), (-2, 2)\ y\ (2, \infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, -2), x = -3 \rightarrow\ 2(-3)^2 - 8 > 0 \rightarrow 10 > 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ (-2,2), x = 0 \rightarrow\ 2(0)^2 - 8 > 0 \rightarrow -8 > 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ (2,\infty), x = 3 \rightarrow\ 2(3)^2 - 8 > 0 \rightarrow 10 > 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

f) $\mathbf{5x^2 + 5x \geq 0}\ \rightarrow Factorizando\ 5x(x+1) = 0 \rightarrow 5x = 0, x + 1 = 0 \rightarrow x = 0, x = -1$

$$Los\ puntos\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, -1], [-1, 0]\ y\ [0, \infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, -1], x = -2 \rightarrow\ 5(-2)^2 + 5(-2) \geq 0 \rightarrow 10 \geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ [-1,0], x = \frac{-1}{2} \rightarrow\ 5(\frac{-1}{2})^2 + 5(\frac{-1}{2}) \geq 0 \rightarrow \frac{-5}{4} \geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ [0,\infty), x = 1 \rightarrow\ 5(1)^2 + 5(1) \geq 0 \rightarrow 10 \geq 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

g) $\mathbf{5x^2 - 5 \leq 0} \rightarrow Factorizando\ 5(x^2 - 1) = 0 \rightarrow 5(x-1)(x+1) = 0 \rightarrow$

$$x - 1 = 0, x + 1 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1$$

$$Los\ puntos\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, -1], [-1, 1]\ y\ [1, \infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, -1], x = -2 \rightarrow\ 5(-2)^2 - 5 \leq 0 \rightarrow 15 \leq 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ [-1, 1], x = 0 \rightarrow\ 5(0)^2 - 5 \leq 0 \rightarrow -5 \leq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ [1,\infty), x = 2 \rightarrow\ 5(2)^2 - 5 \leq 0 \rightarrow 15 \leq 0\ Falso$$

$$Solución: x \in [-1, 1]$$

h) $\mathbf{x^2 - x > 0} \rightarrow Factorizando\ x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$

$$Los\ puntos\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos: (-\infty, 0), (0,1)\ y\ (1, \infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty, 0), x = -1 \rightarrow (-1)^2 - (-1) > 0 \rightarrow 2 > 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ (0,1), x = \frac{1}{2} \rightarrow (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} > 0 \rightarrow \frac{-1}{4} > 0\ Falso$$

Textos Marea Verde

$Comprobamos: Para\ (1,\infty), x = 2 \rightarrow (2)^2 - 2 > 0 \rightarrow 2 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, 0) \cup (1,\infty)$

14. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\boldsymbol{x^2 - 2x - 3 \leq 0}$ $\rightarrow$ *Igualando a cero y mediante la fórmula cuadrática para ecuaciones de la forma* $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \dfrac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$Obtenemos\ los\ puntos\ x = 3\ y\ x = -1\ que\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty, -1], [-1, 3]\ y\ [3,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, -1], x = -4 \rightarrow (-4)^2 - 2(-4) - 3 \leq 0 \rightarrow\ 21 \leq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [-1, 3], x = 0 \rightarrow (0)^2 - 2(0) - 3 \leq 0 \rightarrow\ -3 \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ [3,\infty), x = 4 \rightarrow (4)^2 - 2(4) - 3 \leq 0 \rightarrow\ 5 \leq 0\ Falso$

$Solución: x \in [-1, 3]$

b) $\boldsymbol{-x^2 - 2x + 8 \geq 0}$ $\rightarrow$ *Multiplicando por* (-1) *obtenemos la inecuación equiv.*

$x^2 + 2x - 8 \leq 0\ Form.\ cuadrática, obtenemos\ los\ puntos\ x = -4, x = 2$

que dividen la recta en tres intervalos:

$(-\infty, -4], [-4, 2]\ y\ [2,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, -4], x = -5\ \rightarrow\ (-5)^2 + 2(-5) - 8 \leq 0 \rightarrow 7 \leq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [-4,2], x = 0\ \rightarrow\ (0)^2 + 2(0) - 8 \leq 0 \rightarrow -8 \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ [2,\infty), x = 3 \rightarrow\ (3)^2 + 2(3) - 8 \leq 0 \rightarrow 7 \leq 0\ Falso$

$Solución: x \in [-4, 2]$

c) $\boldsymbol{x^2 + 9x + 14 > 0}$ $\rightarrow$ $Form.\ cuadrática, obtenemos\ los\ puntos\ x = -7, x = -2$

que dividen la recta en tres intervalos: $(-\infty, -7), (-7, -2)\ y\ (-2,\infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, -7), x = -10\ \rightarrow\ (-10)^2 + 9(-10) + 14 > 0 \rightarrow 24 > 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ (-7, -2), x = -5\ \rightarrow\ (-5)^2 + 9(-5) + 14 > 0 \rightarrow -6 > 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ (-2,\infty), x = 0\ \rightarrow\ (0)^2 + 9(0) + 14 > 0 \rightarrow 14 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, -7) \cup (-2,\infty)$

d) $\boldsymbol{x^2 - 6x + 9 \leq 0}$ $\rightarrow$ $Form.\ cuadrática, obtenemos\ el\ punto\ x = 3, sustituyendo$

en la desigualdad comprobamos:

$Para\ x = 3 \rightarrow 3^2 - 6(3) + 9 \leq 0 \rightarrow 0 \leq 0\ Cierto$

Para todos los demás valores no se cumple la desigualdad

Textos Marea Verde

$Solución: x = 3$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0 \rightarrow$ *Multiplicando por* (-1) *obtenemos la inecuación equiv.*

$x^2 + 4x + 5 > 0$ *Mediante la form. cuadrática llegamos a un discriminante negativo, por lo que no tiene raíces reales. La desigualdad original se cumple para cualquier valor de* x

$Solución: x \in R$

f) $x^2 + 8x + 16 > 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos el punto* $x = -4$

Sustituyendo en la desigualdad comprobamos:

$Para\ x = -4 \rightarrow (-4)^2 + 8(-4) + 15 > 0 \rightarrow -1 > 0\ Falso$

Para todos los demás valores Sí se cumple la desigualdad

$Solución: x \in (-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$

g) $x^2 + x + 3 \geq 0 \rightarrow$

Mediante la form. cuadrática llegamos a un discriminante negativo, por lo que no tiene raíces reales. La desigualdad original se cumple para cualquier valor de x

$Solución: x \in R$

h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos los puntos* $x = \frac{5}{2}$ *y* $x = -1$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, -1], [-1, \frac{5}{2}]$ *y* $[\frac{5}{2}, \infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, -1], x = -2 \rightarrow 2(-2)^2 - 3(-2) - 5 \leq 0 \rightarrow 9 \leq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [-1, \frac{5}{2}], x = 0 \rightarrow 2(0)^2 - 3(0) - 5 \leq 0 \rightarrow -5 \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para [\frac{5}{2}, \infty), x = 3 \rightarrow 2(3)^2 - 3(3) - 5 \leq 0 \rightarrow 4 \leq 0\ Falso$

$Solución: x \in [-1, \frac{5}{2}]$

15. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x - 6 > 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos los puntos* $x = 2$ *y* $x = -3$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, -3), (-3,2)$ *y* $(2, \infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, -3), x = -4 \rightarrow (-4)^2 - 4 - 6 > 0 \rightarrow 6 > 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ (-3,2), x = 0 \rightarrow (0)^2 - 0 - 6 > 0 \rightarrow -6 > 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ (2, \infty), x = 4 \rightarrow (4)^2 - 4 - 6 > 0 \rightarrow 6 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

Textos Marea Verde

b) $x^2 - x - 12 \leq 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos los puntos* $x = 4$ *y* $x = -3$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, -3], [-3,4]$ *y* $[4, \infty)$

Comprobamos: Para $(-\infty, -3], x = -4 \rightarrow (-4)^2 - (-4) - 12 \leq 0 \rightarrow 12 \leq 0$ *Falso*

Comprobamos: Para $[-3,4], x = 0 \rightarrow (0)^2 - 0 - 12 \leq 0 \rightarrow -12 \leq 0$ *Cierto*

Comprobamos: Para $[4, \infty), x = 5 \rightarrow (5)^2 - 5 - 12 \leq 0 \rightarrow 8 \leq 0$ *Falso*

Solución: $x \in [-3,4]$

c) $x^2 - x - 20 < 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos los puntos* $x = 5$ *y* $x = -4$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, -4), (-4,5)$ *y* $(5, \infty)$

Comprobamos: Para $(-\infty, -4), x = -5 \rightarrow (-5)^2 - (-5) - 20 < 0 \rightarrow 10 < 0$ *Falso*

Comprobamos: Para $(-4,5), x = 0 \rightarrow (0)^2 - 0 - 20 < 0 \rightarrow -20 < 0$ *Cierto*

Comprobamos: Para $(5, \infty), x = 6 \rightarrow (6)^2 - 6 - 20 < 0 \rightarrow 10 < 0$ *Falso*

Solución: $x \in (-4,5)$

d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos los puntos* $x = -7$ *y* $x = 2$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, -7], [-7,2]$ *y* $[2, \infty)$

Comprobamos: Para $(-\infty, -7], x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 5(-10) - 14 \geq 0 \rightarrow 36 \geq 0$ *Cierto*

Comprobamos: Para $[-7,2], x = 0 \rightarrow (0)^2 + 5(0) - 14 \geq 0 \rightarrow -14 \geq 0$ *Falso*

Comprobamos: Para $[2, \infty), x = 3 \rightarrow (3)^2 + 5(3) - 14 \geq 0 \rightarrow 10 \geq 0$ *Cierto*

Solución: $x \in (-\infty, -7] \cup [2, \infty)$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos los puntos* $x = \frac{-1}{2}$ *y* $x = 2$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, \frac{-1}{2}), (\frac{-1}{2}, 2)$ *y* $(2, \infty)$

Comprobamos: Para $(-\infty, \frac{-1}{2}), x = -1 \rightarrow -2\,(-1)^2 + 3(-1) + 2 > 0 \rightarrow -3 > 0$ *Falso*

Comprobamos: Para $(\frac{-1}{2}, 2), x = 0 \rightarrow -2\,(0)^2 + 3(0) + 2 > 0 \rightarrow 2 > 0$ *Cierto*

Comprobamos: Para $(2, \infty), x = 3 \rightarrow -2\,(3)^2 + 3(3) + 2 > 0 \rightarrow -7 > 0$ *Falso*

Solución: $x \in (\frac{-1}{2}, 2)$

f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0 \rightarrow$ *Form. cuadrática, obtenemos los puntos* $x = \frac{1}{3}$ *y* $x = -1$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, -1], [-1, \frac{1}{3}]$ *y* $[\frac{1}{3}, \infty)$

Textos Marea Verde

$$Comprobamos: Para\ (-\infty,-1], x=-2\ \rightarrow 3\,(-2)^2+2(-2)-1\leq 0\rightarrow 7\leq 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ [-1,\frac{1}{3}], x=0\ \rightarrow 3\,(0)^2+2(0)-1\leq 0\rightarrow -1\leq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ [\frac{1}{3},\infty), x=1\ \rightarrow 3\,(1)^2+2(1)-1\leq 0\rightarrow 4\leq 0\ Falso$$

$$Solución: x\in[-1,\frac{1}{3}]$$

g) $\mathbf{5x^2-7x-6\geq 0}\rightarrow Form.\,cuadrática, obtenemos\ los\ puntos\ x=-\frac{3}{5}\ y\ x=2$

$$que\ dividen\ la\ recta\ en\ los\ intervalos\ (-\infty,-\frac{3}{5}],[-\frac{3}{5},2]\ y\ [2,\infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty,-\frac{3}{5}], x=-1\ \rightarrow 5\,(-1)^2-7(-1)-6\geq 0\rightarrow 6\geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ [-\frac{3}{5},2], x=0\ \rightarrow 5\,(0)^2-7(0)-6\geq 0\rightarrow -6\geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ [2,\infty), x=3\ \rightarrow 5\,(3)^2-7(3)-6\geq 0\rightarrow 18\geq 0\ Cierto$$

$$Solución: x\in(-\infty,-\frac{3}{5}]\cup[2,\infty)$$

h) $\mathbf{2x^2+x-15<0}\rightarrow\ Form.\,cuadrática, obtenemos\ los\ puntos\ x=\frac{5}{2}\ y\ x=-3$

$$que\ dividen\ la\ recta\ en\ los\ intervalos\ (-\infty,-3),(-3,\frac{5}{2})\ y\ (\frac{5}{2},\infty)$$

$$Comprobamos: Para\ (-\infty,-3), x=-4\ \rightarrow 2\,(-4)^2-4-15<0\rightarrow 13<0\ Falso$$

$$Comprobamos: Para\ (-3,\frac{5}{2}), x=0\rightarrow 2\,(0)^2-0-15<0\rightarrow -15<0\ Cierto$$

$$Comprobamos: Para\ (\frac{5}{2},\infty), x=3\ \rightarrow 2\,(3)^2+3-15<0\rightarrow\ 6<0\ Falso$$

$$Solución: x\in(-3,\frac{5}{2})$$

16. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\mathbf{x^2-1}}\rightarrow\ Para\ que\ la\ raíz\ esté\ definida\ en\ los\ números\ reales: x^2-1\geq 0\ \rightarrow$

$$x^2\ \geq 1\rightarrow\ Raíz\ a\ ambos\ lados, obtenemos: x\geq 1,\qquad x\leq -1$$

$$Solución: x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

b) $\sqrt{\mathbf{-x^2+4}}\rightarrow Para\ que\ la\ raíz\ esté\ definida\ en\ los\ num.\,reales: -x^2+4\geq 0\rightarrow$

$$-x^2\geq -4\ \rightarrow x^2\leq 4\rightarrow\ Raíz\ a\ ambos\ lados, obtenemos:\ -2\leq x\leq 2$$

Textos Marea Verde

$Solución: x \in [-2, 2]$

c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6} \rightarrow Para\ que\ la\ raíz\ esté\ definida\ en\ los\ num. reales:$

$x^2 + 5x + 6 \geq 0 \rightarrow\ Form. cuadrática, obtenemos\ los\ puntos\ x = -2\ y\ x = -3$

$que\ dividen\ la\ recta\ en\ los\ intervalos\ (-\infty, -3], [-3, -2]\ y\ [-2, \infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, -3], x = -5\ \rightarrow\ (-5)^2 + 5(-5) + 6 \geq 0 \rightarrow 6 \geq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ [-3, -2], x = \frac{-5}{2} \rightarrow\ (\frac{-5}{2})^2 + 5(\frac{-5}{2}) + 6 \geq 0 \rightarrow \frac{-1}{4} \geq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [-2, \infty), x = 0\ \rightarrow\ (0)^2 + 5(0) + 6 \geq 0 \rightarrow 6 \geq 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, -3] \cup [-2, \infty)$

d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \rightarrow Para\ que\ la\ raíz\ esté\ definida\ en\ los\ num. reales:$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \rightarrow Form. cuadrática, obtenemos\ los\ puntos\ x = 3\ y\ x = 2$

$que\ dividen\ la\ recta\ en\ los\ intervalos\ (-\infty, 2], [2,3]\ y\ [3, \infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, 2], x = -3\ \rightarrow\ (-3)^2 - 5(-3) + 6 \geq 0 \rightarrow 30 \geq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ [2,3], x = \frac{5}{2}\ \rightarrow\ (\frac{5}{2})^2 - 5(\frac{5}{2}) + 6 \geq 0 \rightarrow \frac{-1}{4} \geq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [3, \infty), x = 4 \rightarrow\ (4)^2 - 5(4) + 6 \geq 0 \rightarrow 2 \geq 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

17. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11\ \rightarrow\ 4x^2 - 25 \leq 11 \rightarrow 4x^2 - 36 \leq 0\ \rightarrow 4(x^2 - 9) \leq 0\ \rightarrow$

$x^2 - 9 \leq 0 \rightarrow Factorizando\ (x - 3)(x + 3) = 0 \rightarrow x - 3 = 0, x + 3 = 0$

$Obtenemos\ los\ puntos\ x = 3, x = -3\ que\ dividen\ la\ recta\ en\ 3\ intervalos:$

$(-\infty, -3], [-3,3]\ y\ [3, \infty)$

$Comprobamos: Para\ (-\infty, -3], x = -4\ \rightarrow\ (-4)^2 - 9 \leq 0 \rightarrow 7 \leq 0\ Falso$

$Comprobamos: Para\ [-3,3], x = 0\ \rightarrow\ (0)^2 - 9 \leq 0 \rightarrow -9 \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos: Para\ [3, \infty), x = 4\ \rightarrow\ (4)^2 - 9 \leq 0 \rightarrow 7 \leq 0\ Falso$

$Solución: x \in [-3,3]$

b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 51\ \rightarrow\ Al\ resolver\ ambos\ productos:$

$(8x^2 - 26x + 15) - (x^2 + 8x - 20) \geq 51 \rightarrow\ Al\ agrupar\ términos:$

$7x^2 - 34x + 35\ \geq\ 51 \rightarrow 7x^2 - 34x - 16\ \geq\ 0\ \rightarrow\ Form. cuadrática, obtenemos\ los\ puntos$

Textos Marea Verde

$x_1 = \frac{34+\sqrt{1604}}{14}, x_2 = \frac{34-\sqrt{1604}}{14}$ *Valores aprox*: $x_1 = 5.2983, x_2 = -0.4321$

Los puntos dividen la recta en 3 intervalos: $(-\infty, x_2], [x_2, x_1]$ *y* $[x_1, \infty)$

Comprobamos: *Para* $(-\infty, x_2], x = -1 \rightarrow 7(-1)^2 - 34(-1) - 16 \geq 0 \rightarrow 25 \geq 0$ *Cierto*

Comprobamos: *Para* $[x_2, x_1], x = 0 \rightarrow 7(0)^2 - 34(0) - 16 \geq 0 \rightarrow -16 \geq 0$ *Falso*

Comprobamos: *Para* $[x_1, \infty), x = 6 \rightarrow 7(6)^2 - 34(6) - 16 \geq 0 \rightarrow 32 \geq 0$ *Cierto*

$$Solución: x \in (-\infty, \frac{34-\sqrt{1604}}{14}] \cup [\frac{34+\sqrt{1604}}{14}, \infty)$$

c) $\frac{3x-2}{x} < \frac{5-2x}{x+6} \rightarrow$ *Multiplicando a ambos lados por* $x(x+6)$: $3x^2 + 16x - 12 < 5x - 2x^2$

Agrupando términos: $5x^2 + 11x - 12 < 0$

Form. cuadrática, obtenemos los puntos $x = \frac{4}{5}$ *y* $x = -3$

que dividen la recta en los intervalos $(-\infty, -3), (-3, \frac{4}{5})$ *y* $(\frac{4}{5}, \infty)$

Comprobamos: *Para* $(-\infty, -3), x = -4 \rightarrow 5(-4)^2 + 11(-4) - 12 \gtrless 0 \rightarrow 24 < 0$ *Falso*

Comprobamos: *Para* $(-3, \frac{4}{5}), x = 0 \rightarrow 5(0)^2 + 11(0) - 12 < 0 \rightarrow -12 < 0$ *Cierto*

Comprobamos: *Para* $(\frac{4}{5}, \infty), x = 1 \rightarrow 5(1)^2 + 11(1) - 12 \gtrless 0 \rightarrow 4 < 0$ *Falso*

$$Solución: x \in (-3, \frac{4}{5})$$

18. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

$I1: 4x - 3 < 1 \rightarrow 4x < 4 \rightarrow x < 1$

$I2: \quad x + 6 > 2 \rightarrow x > -4$

$I1 \cap I2 \rightarrow -4 < x < 1$

$Solución: x \in (-4,1)$

b) $\begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ x - 4 < -5 \end{cases}$

$I1: 2x - 6 \leq 0 \rightarrow 2x \leq 6 \rightarrow x \leq 3$

$I2: \quad x - 4 < -5 \rightarrow x < -1$

$I1 \cap I2 \rightarrow x < -1$

$Solución: x \in (-\infty, -1)$

Textos Marea Verde

c) $\begin{cases} 3x+1 \geq x+9 \\ x+5 \leq 2-3x \end{cases}$

$$I1: 3x+1 \geq x+9 \rightarrow 2x \geq 8 \rightarrow x \geq 4$$

$$I2: x+5 \leq 2-3x \rightarrow 4x \leq -3 \rightarrow x \leq \frac{-3}{4}$$

$$I1 \cap I2 \rightarrow No\ hay\ intersección$$

$$Solución: No\ tiene$$

d) $\begin{cases} 2x-1 \leq 3x+7 \\ \frac{2x}{5}-\frac{x}{4} \geq \frac{2}{3} \end{cases}$

$$I1:\ 2x-1 \leq 3x+7 \rightarrow -x \leq 8 \rightarrow x \geq -8$$

$$I2:\ \frac{2x}{5}-\frac{x}{4} \geq \frac{2}{3} \rightarrow\ Multiplicando\ por\ 60\ \rightarrow 24x-15x \geq 40 \rightarrow 9x \geq 40 \rightarrow x \geq \frac{40}{9}$$

$$I1 \cap I2 \rightarrow\ x \geq \frac{40}{9}$$

$$Solución: x \in [\frac{40}{9}, \infty)$$

19. Indica un número positivo que al sumarle 5 sea menor que 7

$$x+5<7\ \rightarrow\ x<2$$

$$Todos\ los\ valores\ de\ x\ que\ sean\ menores\ que\ 2\ cumplen\ la\ desigualdad, sin\ contar\ los\ números\ negativos, la\ solución\ es\ cualquier\ valor\ del\ intervalo\ [0,2)$$

$$Por\ ejemplo\ x=\ 1 \rightarrow 1+5<7 \rightarrow 6<7\ Cierto$$

20. Expresa mediante una inecuación el área de un cuadrado sabiendo que su perímetro es mayor que el de un rectángulo de lados 3 y 7 cm.

$$El\ perímetro\ del\ rectángulo\ P\ =2(largo+ancho) \rightarrow P=2(3+7) \rightarrow P=20\ cm$$

$$El\ perímetro\ del\ cuadrado\ es\ P=4 \cdot lado$$

$$Deducimos: 4 \cdot lado > 20 \rightarrow lado > 5$$

$$El\ lado\ del\ cuadrado\ tiene\ que\ ser\ mayor\ que\ 5$$

$$El\ área\ del\ cuadrado\ es\ A\ =\ lado^2$$

$$Deducimos: A\ =\ lado^2 > 5^2 \rightarrow A > 25cm^2$$

$$Solución: El\ área\ del\ cuadrado\ es\ de\ más\ de\ 25cm^2$$

21. Determina las posibles edades de Pepita y de su hija Charo sabiendo que difieren en más de 20 años y que dentro de 2 años, la cuarta parte de la edad de la madre es menor que la edad de la hija.

Textos Marea Verde

Diseñamos un sistema de inecuaciones: p: Pepita, c: Charo

$I1$: $p - c > 20$

$I2$: $\frac{1}{4}(p+2) < c + 2$, multiplicamos por 4, p+2 < 4c + 8

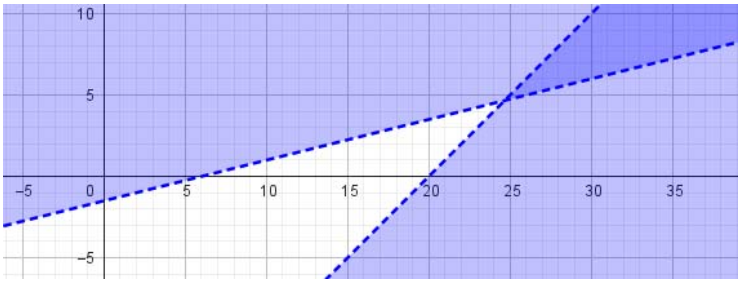
p - c > 20 - p + c < -20

p - 4c < 6 sumamos - 3c < -14 c > 14/3 = 4,67

p - 4,67 > 20 , p > 24,67

La madre debe tener más de 24,67 años, o sea, 25 años o más y la hija más de 4,67 años, 5 años o más.

Con GeoGebra



22. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|x+3| < 2 \rightarrow x + 3 = 2 \rightarrow x = -1$

$I1$: $x + 3 < 2$ *si* $x > -1$

$I2$: $-x - 3 < 2$ *si* $x < -1$

$x + 3 < 2 \rightarrow x < -1$

$-x - 3 < 2 \rightarrow -x < 5 \rightarrow x > -5$

La intersección es $-5 < x < -1$

Solución: $x \in (-5, -1)$

b) $|2x+5| > 1 \rightarrow 2x + 5 = 1 \rightarrow x = -2$

$I1$: $2x + 5 > 1$ *si* $x > -2$

$I2$: $-2x - 5 > 1$ *si* $x < -2$

$2x + 5 > 1 \rightarrow x > -2$

$-2x - 5 > 1 \rightarrow -2x > 6 \rightarrow x < -3$

Solución: $x \in (-2, \infty) U (-\infty, -3)$

c) $|x-6| \leq 2 \rightarrow x - 6 = 2 \rightarrow x = 8$

$I1$: $x - 6 \leq 2$ *si* $x \leq 8$

$I2$: $-x + 6 \leq 2$ *si* $4 \leq x$

$$x - 6 \leq 2 \rightarrow x \leq 8$$
$$-x + 6 \leq 2 \rightarrow -x \leq -4 \rightarrow x \geq 4$$
$$La\ intersección\ es\ 4 \leq x \leq 8$$
$$Solución: x \in [4,8]$$

d) $|x - 2| \geq 2 \rightarrow x - 2 = 2 \rightarrow x = 4$

$$I1: x - 2 \leq 2\ \ si\ x \leq 4$$
$$I2: \ -x + 2 \leq 2\ \ si\ \ 0 \leq x$$
$$x - 2 \leq 2 \rightarrow x \leq 4$$
$$-x + 2 \leq 2 \rightarrow -x \leq 0 \rightarrow x \geq 0$$
$$Solución: x \in [0,4]$$

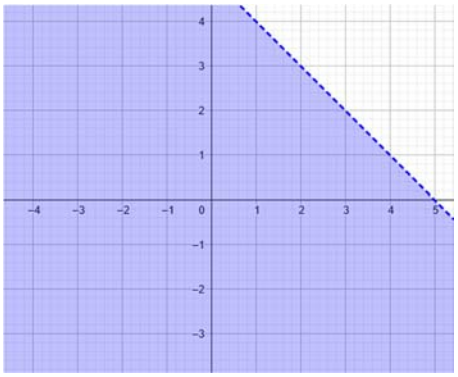
4. INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

4.1 INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

23. Representa los siguientes semiplanos:

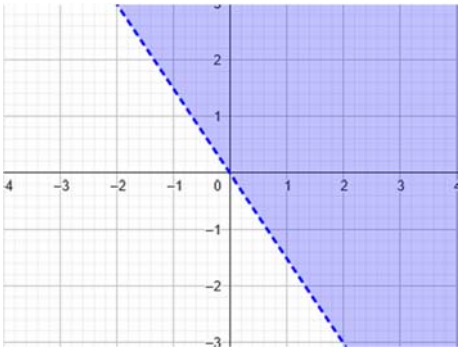
a) x + y < 5 → *Representamos el semiplano solución* $x + y < 5$

La recta no está incluida en la solución



b) 3x + 2y > 0 → *Representamos el semiplano solución* $3x + 2y > 0$

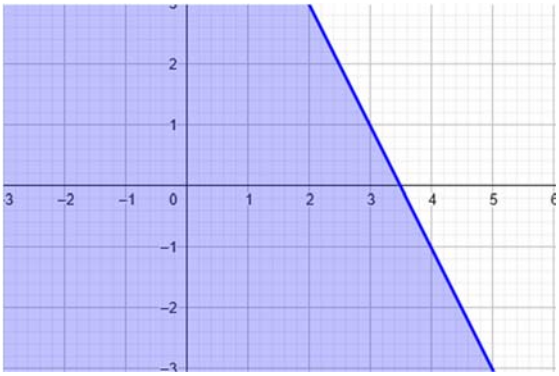
La recta no está incluida en la solución



Textos Marea Verde

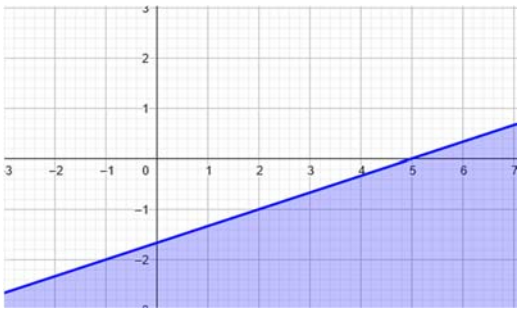
c) 2x + y ≤ 7→ *Representamos el semiplano solución* $2x + y \leq 7$

La recta está incluida en la solución



d) x - 3y ≥ 5→ *Representamos el semiplano solución* $x - 3y \geq 5$

La recta está incluida en la solución

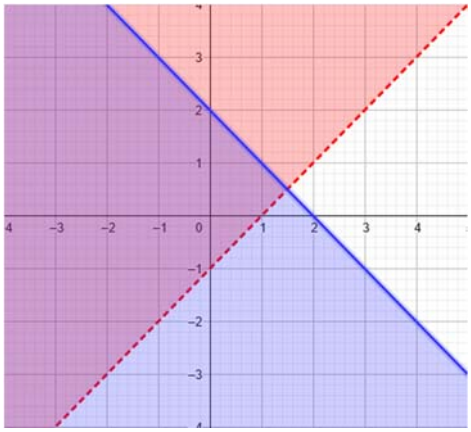


4.2. SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

24. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y < 1 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$

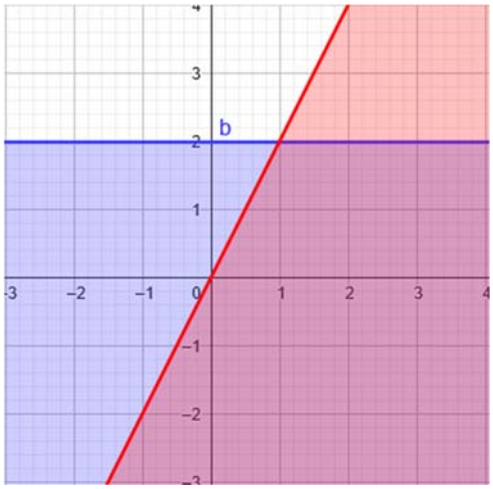
Representamos la región factible (morado) conformada por los dos semiplanos (primera recta roja no incluida en la región factible, segunda recta azul sí)



BY NC SA

b) $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$

Representamos la región factible (morado) conformada por los dos semiplanos (las dos rectas, roja y azul, incluidas en la región factible)



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo:

a) $-\infty \leq x \leq \frac{3}{2} \rightarrow (-\infty, \frac{3}{2}]$

b) $-11 < x < 11 \rightarrow (-11, 11)$

c) $-2 < x < \frac{1}{3} \rightarrow (-2, \frac{1}{3})$

2. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntelos en la recta real:

a) $[2, 6) \rightarrow 2 \leq x < 6$

b) $(-7, 1) \rightarrow -7 < x < 1$

c) $(0, 9] \rightarrow 0 < x \leq 9$

BY NC SA

3. Dada la siguiente inecuación $5-3x>2x+1$, determina si los siguientes valores son solución de la misma: 0, 1, -1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15

$$Simplificamos\ la\ inecuación: 3x-2x>1-5\rightarrow x>-4$$

$$Son\ solución\ todos\ los\ valores\ mayores\ que\ -4: 0, 1, -1, 2, -2, 3, 6\ y\ 12$$

4. Realiza las transformaciones indicadas de modo que se obtengan ecuaciones equivalentes:

i. Sumar 4: $x-2>5\rightarrow x-2+4>5+4\rightarrow x+2>9$

ii. Restar 6: $x-4>8\rightarrow x-4-6>8-6\rightarrow x-10>2$

iii. Multiplicar por 6: $5x\geq 10\rightarrow 5x\cdot 6\geq 10\cdot 6\rightarrow 30x\geq 60$

iv. Multiplicar por -4: $-2x\geq 8\rightarrow -2x(-4)\leq 8(-4)\rightarrow 8x\leq -32$

v. Dividir entre 2: $6x<12\rightarrow \frac{6x}{2}<\frac{12}{2}\rightarrow 3x<6$

vi. Dividir entre -2: $20x\geq 60\rightarrow \frac{20x}{-2}\leq \frac{60}{-2}\rightarrow -10x\leq -30$

5. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

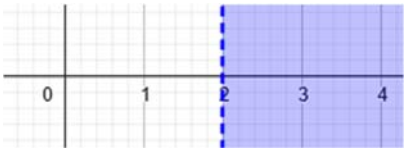
a) $2x-3\leq -5\rightarrow 2x\leq -2\rightarrow x\leq -1$

b) $x-2\leq 3x-5\rightarrow x-3x\leq -5+2\rightarrow -2x\leq -3\rightarrow 2x\geq 3\rightarrow x\geq \frac{3}{2}$

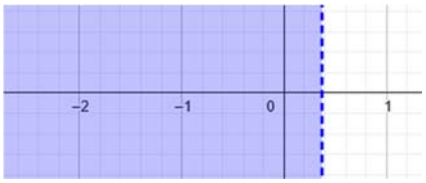
c) $12-x\leq -6\rightarrow -x\leq -18\rightarrow x\geq 18$

d) $-5x-3\leq -2x+9\rightarrow -3x\leq 12\rightarrow x\geq -4$

e) $\mathbf{2(3x-3)>6} \rightarrow 6x-6>6 \rightarrow 6x>12 \rightarrow x>2$



f) $\mathbf{-3(3-2x)<-2(3+x)} \rightarrow -9+6x<-6-2x \rightarrow 8x<3 \rightarrow x<\frac{3}{8}$



g) $\mathbf{2(x+3)+3(x-1)\leq 2(x+2)} \rightarrow 2x+6+3x-3\leq 2x+4 \rightarrow 3x\leq 1 \rightarrow x\leq \frac{1}{3}$

7. Resuelve:

a) $\frac{x}{2}-6<4 \rightarrow 2(\frac{x}{2}-6)<2(4) \rightarrow x-12<8 \rightarrow x<20$

b) $\frac{2x}{3}-3\leq -x \rightarrow 3(\frac{2x}{3}-3)\leq 3(-x) \rightarrow 2x-9\leq -3x \rightarrow -9\leq -5x \rightarrow 9\geq 5x \rightarrow \frac{9}{5}\geq x$

c) $2(3x-2)>3-x \rightarrow 6x-4>3-x \rightarrow 7x>7 \rightarrow x>1$

d) $\frac{2(x+2)}{3}<2x \rightarrow \frac{2x+4}{3}<2x \rightarrow 3(\frac{2x+4}{3})<3(2x) \rightarrow 2x+4<6x \rightarrow 4<4x \rightarrow 1<x$

e) $\frac{x-4}{4}+2>\frac{x+4}{8}$

$$8\left(\frac{x-4}{4}+2\right)>8\left(\frac{x+4}{8}\right) \rightarrow 2(x-4)+16>x+4 \rightarrow 2x-8+14>x+4 \rightarrow x>-4$$

f) $\frac{x}{4}-4<x-\frac{x+1}{7}$

$$28\left(\frac{x}{4}-4\right)<28\left(x-\frac{x+1}{7}\right) \rightarrow 7x-112<28x-4(x+1) \rightarrow -108<17x \rightarrow \frac{-108}{17}<x$$

Textos Marea Verde

8. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $(-\infty, -3]$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 5)$ **d)** $(-2, -\infty)$

a) $x \leq -3$; b) $x \geq 4$; c) $x < 5$; d) $x > -2$.

9. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-6}$ **b)** $\sqrt{-x+5}$ **c)** $\sqrt{10-5x}$ **d)** $\sqrt{-6x-30}$

a) $2x - 6 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3$

b) $-x + 5 \geq 0 \rightarrow -x \geq -5 \rightarrow x \leq 5$

c) $10 - 5x \geq 0 \rightarrow 10 \geq 5x \rightarrow \frac{10}{5} \geq x \rightarrow x \leq 2$

d) $-6x - 30 \geq 0 \rightarrow -6x \geq 30 \rightarrow x \leq \frac{30}{-6} \rightarrow x \leq -5$

10. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2 - 75 < 0 \rightarrow \frac{3x^2-75}{3} < \frac{0}{3} \rightarrow x^2 - 25 < 0 \rightarrow (x-5)(x+5) < 0 \rightarrow$

$x - 5 = 0, x + 5 = 0 \rightarrow x = 5, x = -5$

Los puntos $x = 5$ *y* $x = -5$ *dividen la recta en tres intervalos:*

$(-\infty, -5), (-5, 5) y\ (5, \infty)$

Comprobamos para $(-\infty, -5)$: $x = -6 \rightarrow (-6)^2 - 25 < 0 \rightarrow 11 < 0$ *Falso*

Comprobamos para $(-5, 5)$: $x = 0 \rightarrow (9)^2 - 25 < 0 \rightarrow -25 < 0$ *Cierto*

Comprobamos para $(5, \infty)$: $x = 6 \rightarrow (6)^2 - 25 < 0 \rightarrow 11 < 0$ *Falso*

Solución: $x \in (-5, 5)$

b) $-x^2 + 16 \leq 0 \rightarrow 16 \leq x^2 \rightarrow x^2 \geq 16$ *Aplicando raiz a ambos lados obtenemos*

$x \leq -4, \quad x \geq 4$

Solución: $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

c) $-x^2 + 25 \geq 0 \rightarrow 25 \geq x^2 \rightarrow x^2 \leq 25$ *Aplicando raiz a ambos lados obtenemos*

$-5 \leq x \leq 5$

Solución: $x \in [5,5]$

d) $5x^2 - 80 \geq 0 \rightarrow \frac{5x^2-80}{5} \geq \frac{80}{5} \rightarrow x^2 - 16 \geq 0 \rightarrow (x-4)(x+4) \geq 0$

Textos Marea Verde

$$x-4=0, x+4=0 \rightarrow x=4, x=-4$$

$$Los\ puntos\ x=4\ \ y\ \ x=-4\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty,-4], [-4,4]\ y\ [4,\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,-4]: x=-5 \rightarrow (-5)^2-16 \geq 0 \rightarrow 9 \geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ \ [-4,4]: x=0 \rightarrow (0)^2-16 \geq 0 \rightarrow -16 \geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [4,\infty): x=5 \rightarrow (5)^2-16 \geq 0 \rightarrow 9 \geq 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

e) $\mathbf{4x^2-1>0} \rightarrow (2x)^2-1^2>0 \rightarrow (2x-1)(2x+1)>0 \rightarrow$

$$2x-1=0, 2x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{2}$$

$$Los\ puntos\ x=\frac{1}{2}\ \ y\ \ x=-\frac{1}{2}\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty,-\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ y\ (\frac{1}{2},\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,-\frac{1}{2}): x=-1 \rightarrow 4(-1)^2-1>0 \rightarrow 3>0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}): x=-1 \rightarrow 4(0)^2-1>0 \rightarrow -1>0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ (\frac{1}{2},\infty): x=1 \rightarrow 4(1)^2-1>0 \rightarrow 3>0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty,-\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},\infty)$$

f) $\mathbf{25x^2-4<0} \rightarrow (5x)^2-2^2<0 \rightarrow (5x-2)(5x+2)<0 \rightarrow$

$$(5x-2)=0, (5x+2)=0 \rightarrow x=\frac{2}{5}, x=-\frac{2}{5}$$

$$Los\ puntos\ x=\frac{2}{5}\ \ y\ \ x=-\frac{2}{5}\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty,-\frac{2}{5}), (-\frac{2}{5},\frac{2}{5})\ y\ (\frac{2}{5},\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,-\frac{2}{5}): x=-1 \rightarrow 25(-1)^2-4<0 \rightarrow 21<0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ (-\frac{2}{5},\frac{2}{5}): x=0 \rightarrow 25(0)^2-4<0 \rightarrow -4<0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ (\frac{2}{5},\infty): x=1 \rightarrow 25(1)^2-4<0 \rightarrow 21<0\ Falso$$

$$Solución: x \in (-\frac{2}{5},\frac{2}{5})$$

Textos Marea Verde

g) $\mathbf{9x^2 - 16 < 0} \rightarrow (3x)^2 - 4^2 < 0 \rightarrow (3x-4)(3x+4) < 0 \rightarrow$

$$3x - 4 = 0, 3x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3}, x = -\frac{4}{3}$$

$$Los\ puntos\ x = \frac{4}{3}\ \ y\ \ x = -\frac{4}{3}\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, -\frac{4}{3}), (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})\ y\ (\frac{4}{3}, \infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty, -\frac{4}{3}): x = -2 \rightarrow 9(-2)^2 - 16 < 0 \rightarrow 20 < 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}): x = 0 \rightarrow 9(0)^2 - 16 < 0 \rightarrow -16 < 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ (\frac{4}{3}, \infty): x = 2 \rightarrow 9(2)^2 - 16 < 0 \rightarrow 20 < 0\ Falso$$

$$Solución: x \in (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$$

h) $\mathbf{36x^2 + 16 \leq 0} \rightarrow$ *La inecuación no tiene solución, para cualquier valor de x, el resultado será un número* > 0

11.Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\mathbf{-4x^2 + 5x \leq 0} \rightarrow (-1)(-4x^2 + 5x) \geq (-1)0 \rightarrow 4x^2 - 5x) \geq 0$

$$\rightarrow x(4x-5) \geq 0 \rightarrow x = 0, 4x - 5 = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{5}{4}$$

$$Los\ puntos\ x = 0\ \ y\ \ x = \frac{5}{4}\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, 0], [0, \frac{5}{4}]\ y\ [\frac{5}{4}, \infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty, 0]: x = -1 \rightarrow -4(-1)^2 + 5(-1) \leq 0 \rightarrow -9 \leq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ [0, \frac{5}{4}]: x = 1 \rightarrow -4(1)^2 + 5(1) \leq 0 \rightarrow 1 \leq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [\frac{5}{4}, \infty): x = 2 \rightarrow -4(2)^2 + 5(2) \leq 0 \rightarrow -6 \leq 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{5}{4}, \infty)$$

b) $\mathbf{3x^2 + 7x \geq 0} \rightarrow x(3x+7) \geq 0 \rightarrow x = 0, 3x + 7 = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{-7}{3}$

$$Los\ puntos\ x = \frac{-7}{3}\ y\ \ x = 0\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

Textos Marea Verde

$$\left]-\infty,\frac{-7}{3}\right],\left[\frac{-7}{3},0\right] y\ [0,\infty[$$

$$Comprobamos\ para\ \left]-\infty,\frac{-7}{3}\right]: x=-3\rightarrow 3(-3)^2+7(-3)\geq 0\rightarrow 6\geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ \left[\frac{-7}{3},0\right]: x=-1\rightarrow 3(-1)^2+7(-1)\geq 0\rightarrow -10\geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [0,\infty[: x=1\rightarrow 3(1)^2+7(1)\geq 0\rightarrow 10\geq 0\ Cierto$$

$$Solución: x\in\left]-\infty,\frac{-7}{3}\right]\cup[0,\infty[$$

c) $\boldsymbol{2x^2<8x}\rightarrow 2x^2-8x<0\rightarrow x(2x-8)<0\rightarrow x=0,2x-8=0\rightarrow x=0,x=4$

$$Los\ puntos\ x=0\ y\ \ x=4\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos: (-\infty,0),(0,4)\ y\ (4,\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,0): x=-1\rightarrow 2(-1)^2<8(-1)\rightarrow 2<-8\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ (0,4): x=1\rightarrow 2(1)^2<8(1)\rightarrow 2<8\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ (4,\infty): x=5\rightarrow 2(5)^2<8(5)\rightarrow 50<40\ Falso$$

$$Solución: x\in(0,4)$$

d) $\boldsymbol{-3x^2-6x\geq 0}\rightarrow -3x(x+2)\geq 0\rightarrow x(x+2)\leq 0\rightarrow x=0,x+2=0\rightarrow x=0,x=-2$

$$Los\ puntos\ x=0\ y\ \ x=-2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty,-2],[-2,0]\ y\ [0,\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,-2]: x=-3\rightarrow -3(-3)^2-6(-3)\geq 0\rightarrow -9\geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [-2,0]: x=-1\rightarrow -3(-1)^2-6(-1)\geq 0\rightarrow 3\geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ [0,\infty): x=1\rightarrow -3(1)^2-6(1)\geq 0\rightarrow -9\geq 0\ Falso$$

$$Solución: x\in[-2,0]$$

e) $\boldsymbol{-x^2+3x<0}\rightarrow x^2-3x>0\rightarrow x(x-3)>0\rightarrow x=0,x-3=0\rightarrow x=0,x=3$

$$Los\ puntos\ x=0\ y\ \ x=3\ \ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty,0),(0,3)\ y\ (3,\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,0): x=-1: -(-1)^2+3(-1)<0\rightarrow -4<0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ (0,3): x=1: -(1)^2+3(1)<0\rightarrow 2<0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ (3,\infty): x=4: -(4)^2+3(4)<0\rightarrow -4<0\ Cierto$$

$$Solución: x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$$

f) $\boldsymbol{-5x^2-10x\geq 0}\rightarrow -5x(x+2)\geq 0\rightarrow 5x(x+2)\leq 0\rightarrow 5x=0,x+2=0\rightarrow$

$$Los\ puntos\ x=0\ y\ \ x=-2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty,-2],[-2,0]\ y\ [0,\infty)$$

Textos Marea Verde

$Comprobamos\ para\ (-\infty,-2]: x=-3 \rightarrow -5(-3)^2-10(-3)\geq 0 \rightarrow -15\geq 0\ Falso$

$Comprobamos\ para\ [-2,0]: x=-1 \rightarrow -5(-1)^2-10(-1)\geq 0 \rightarrow 5\geq 0\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ [0,\infty): x=1 \rightarrow -5(1)^2-10(1)\geq 0 \rightarrow -15\geq 0\ Falso$

$Solución: x\in[-2,0]$

12. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\mathbf{3x^2\leq 0} \rightarrow\ Para\ cualquier\ valor\ de\ x\ que\ no\ sea\ 0, la\ desigualdad\ no\ se\ cumple$

$Para\ x=\ 0\rightarrow 0\leq 0\ Cierto$

$Solución: x=0$

b) $\mathbf{8x^2>0} \rightarrow\ Para\ cualquier\ valor\ de\ x, menos\ 0, la\ desigualdad\ se\ cumple$

$Para\ x=\ 0\rightarrow 0>0\ Falso$

$Solución: x\neq 0$

c) $\mathbf{-5x^2<0} \rightarrow\ Para\ cualquier\ valor\ de\ x, menos\ 0, la\ desigualdad\ se\ cumple$

$Para\ x=\ 0\rightarrow 0<0\ Falso$

$Solución: x\neq 0$

d) $\mathbf{9x^2\geq 0} \rightarrow\ Para\ cualquier\ valor\ de\ x, incluso\ el\ 0, la\ desigualdad\ se\ cumple$

$Para\ x=\ 0\rightarrow 0\geq 0\ Cierto$

$Solución: x\in R$

13. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\mathbf{x^2-1\leq\ 0} \rightarrow (x-1)(x+1)\leq 0 \rightarrow x-1=0,\ x+1=0\rightarrow x=1, x=-1$

$Los\ puntos\ x=1\ y\ \ x=-1\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty,-1],[-1,1]\ y\ [1,\infty)$

$Comprobamos\ para\ (-\infty,-1]: x=-2\rightarrow (-2)^2-1\leq\ \mathbf{0}\rightarrow\ 3\leq\ \mathbf{0}\ Falso$

$Comprobamos\ para\ [-1,1]: x=0\rightarrow (0)^2-1\leq\ \mathbf{0}\rightarrow\ -1\leq\ \mathbf{0}\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ [1,\infty): x=2\rightarrow (2)^2-1\leq\ \mathbf{0}\rightarrow\ 3\leq\ \mathbf{0}\ Falso$

$Solución: x\in[-1,1]$

b) $\mathbf{-x^2-4x\leq\ 0} \rightarrow x^2+4x\geq 0 \rightarrow x(x+4)\geq 0\rightarrow x=0, x+4=0\rightarrow x=-4$

$Los\ puntos\ x=0\ y\ \ x=-4\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

Textos Marea Verde

$$(-\infty,-4],[-4,0]\ y\ [0,\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,-4]: x=-5 \rightarrow -(-5)^2-4(-5) \leq 0 \rightarrow -5 \leq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ [-4,0]: x=-1 \rightarrow -(-1)^2-4(-1) \leq 0 \rightarrow 3 \leq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [0,\infty): x=1 \rightarrow -(1)^2-4(1) \leq 0 \rightarrow -5 \leq 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty,-4] \cup [0,\infty)$$

c) $\boldsymbol{x^2+1 \geq 0} \rightarrow$ *Para cualquier valor de x la desigualdad es cierta*

$$Solución: x \in R$$

d) $\boldsymbol{-3x^2 > 30} \rightarrow$ *Dividir entre* $-3 \rightarrow x^2 < 10$

Al elevar cualquier número al cuadrado, el resultado es ≥ 0, *por tanto la desigualdad no se cumple para ningún valor*

$$Solución: No\ tiene$$

e) $\boldsymbol{-x^2-4 \leq 0} \rightarrow -x^2 \leq 4 \rightarrow x^2 \geq -4 \rightarrow$ *Para cualquier valor de x, la desigualdad se cumple*

$$Solución: x \in R$$

f) $\boldsymbol{-3x^2-12x \geq 0} \rightarrow -3x(x+4) \geq 0 \rightarrow -3x=0, x+4=0 \rightarrow x=0, x=-4$

$$Los\ puntos\ x=0\ y\ x=-4\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty,-4],[-4,0]\ y\ [0,\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,-4]: x=-5 \rightarrow -3(-5)^2-12(-5) \geq 0 \rightarrow -15 \geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [-4,0]: x=-1 \rightarrow -3(-1)^2-12(-1) \geq 0 \rightarrow 9 \geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ [0,\infty): x=1 \rightarrow -3(1)^2-12(1) \geq 0 \rightarrow -15 \geq 0\ Falso$$

$$Solución: x \in [-4,0]$$

g) $\boldsymbol{-5x^2 < 0} \rightarrow$ *Dividir entre* $-5 \rightarrow x^2 > 0$

La desigualdad se cumple para todos los valores menos el 0

$$Para\ x=0: 0^2 > 0 \rightarrow 0 > 0\ Falso$$

$$Solución: x \neq 0$$

h) $\boldsymbol{x^2+9 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq -9} \rightarrow$ *La desigualdad se cumple para cualquier valor de x*

$$Solución: x \in R$$

Textos Marea Verde

14. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $\boldsymbol{x^2 - 2x > 0} \rightarrow x(x-2) > 0 \rightarrow x = 0, x - 2 = 0$

$Los\ puntos\ x = 0\ y\ \ x = 2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty, 0), (0, 2)\ y\ (2, \infty)$

$Comprobamos\ para\ (-\infty, 0): x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 2(-1) > 0 \rightarrow 3 > 0\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ (0, 2): x = 1 \rightarrow (1)^2 - 2(1) > 0 \rightarrow -1 > 0\ Falso$

$Comprobamos\ para\ (2, \infty): x = 3 \rightarrow (3)^2 - 2(3) > 0 \rightarrow 3 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

b) $\boldsymbol{3x^2 - 3 \leq 0} \rightarrow 3(x^2 - 1) \leq 0 \rightarrow 3(x+1)(x-1) \leq 0 \rightarrow x = 1, x = \boldsymbol{-1}$

$Los\ puntos\ x = -1\ y\ \ x = 1\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty, -1], [-1, 1]\ y\ [1, \infty)$

$Comprobamos\ para\ (-\infty, -1]: x = -2 \rightarrow 3(-2)^2 - 3 \leq 0 \rightarrow 9 \leq 0\ Falso$

$Comprobamos\ para\ [-1, 1]: x = 0 \rightarrow 3(0)^2 - 3 \leq 0 \rightarrow -3 \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ [1, \infty): x = 2 \rightarrow 3(2)^2 - 3 \leq 0 \rightarrow 9 \leq 0\ Falso$

$Solución: x \in [-1, 1]$

c) $\boldsymbol{5x^2 - 20 \geq 0} \rightarrow 5(x^2 - 4) \geq 0 \rightarrow 5(x-2)(x+2) \geq 0 \rightarrow x = -2, x = 2$

$Los\ puntos\ x = -2\ y\ \ x = 2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty, -2], [-2, 2]\ y\ [2, \infty)$

$Comprobamos\ para\ (-\infty, -2]: x = -3 \rightarrow (-3)^2 - 4 \geq 0 \rightarrow 5 \geq 0\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ [-2, 2]: x = 0 \rightarrow (0)^2 - 4 \geq 0 \rightarrow -4 \geq 0\ Falso$

$Comprobamos\ para\ [2, \infty): x = 3 \rightarrow (3)^2 - 4 \geq 0 \rightarrow 5 \geq 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

d) $\boldsymbol{x^2 + 4x > 0} \rightarrow x(x+4) > 0 \rightarrow x = 0, x + 4 = 0 \rightarrow x = 0, x = -4$

$Los\ puntos\ x = 0\ y\ \ x = -4\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$

$(-\infty, -4), (-4, 0)\ y\ (0, \infty)$

$Comprobamos\ para\ (-\infty, -4): x = -6 \rightarrow (-6)^2 + 4(-6) > 0 \rightarrow 12 > 0\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ (-4, 0): x = -1 \rightarrow (-1)^2 + 4(-1) > 0 \rightarrow -3 > 0\ Falso$

$Comprobamos\ para\ (0, \infty): x = 1 \rightarrow (1)^2 + 4(1) > 0 \rightarrow 5 > 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$

e) $\boldsymbol{2x(x-3) + 1 \geq x - 2} \rightarrow 2x^2 - 6x + 1 \geq x - 2 \rightarrow 2x^2 - 7x + 3 \geq 0$

Textos Marea Verde

$$Mediante\ la\ fórmula\ cuadrática: x = \frac{1}{2}, x = 3$$

$$Los\ puntos\ x = \frac{1}{2}\ y\ \ x = 3\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 3)\ y\ [3, \infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty, \frac{1}{2}]: x = 0 \rightarrow 2(0)^2 - 7(0) + 3 \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ [\frac{1}{2}, 3): x = 1 \rightarrow 2(1)^2 - 7(1) + 3 \geq 0 \rightarrow -2 \geq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [3, \infty): x = 4 \rightarrow 2(4)^2 - 7(4) + 3 \geq 0 \rightarrow 7 \geq 0\ Cierto$$

$$Solución: x \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup [3, \infty)$$

f) $(x - 2)(x + 3) - x + 5 \leq 2x - 1 \rightarrow x^2 + x - 6 - x + 5 \leq 2x - 1 \rightarrow$

$$x^2 - 1 \leq 2x - 1 \rightarrow x^2 - 2x \leq 0 \rightarrow x(x - 2) \leq 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

$$Los\ puntos\ x = 0\ y\ \ x = 2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, 0], [0, 2]\ y\ [2, \infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty, 0]: x = -1 \rightarrow (-1)^2 - 2(-1) \leq 0 \rightarrow 3 \leq 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ [0, 2]: x = 1 \rightarrow (1)^2 - 2(1) \leq 0 \rightarrow -1 \leq 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ [2, \infty): x = 3 \rightarrow (3)^2 - 2(3) \leq 0 \rightarrow 3 \leq 0\ Falso$$

$$Solución: x \in [0, 2]$$

g) $x^2 + 5x + 2 < 2x + 12 \rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \rightarrow Mediante\ form.cuadrática, x = 2, x = -5$

$$Los\ puntos\ x = -5\ y\ \ x = 2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, -5), (-5, 2)\ y\ (2, \infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty, -5): x = -6 \rightarrow (-6)^2 + 3(-6) - 10 < 0 \rightarrow 8 < 0\ Falso$$

$$Comprobamos\ para\ (-5, 2): x = 0 \rightarrow (0)^2 + 3(0) - 10 < 0 \rightarrow -10 < 0\ Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ (2, \infty): x = 3 \rightarrow (3)^2 + 3(3) - 10 < 0 \rightarrow 8 < 0\ Falso$$

$$Solución: x \in (-5, 2)$$

h) $2 - x(x + 3) + 2x \geq 2(x + 1) \rightarrow Multiplicando\ y\ agrupando\ términos \rightarrow$

$$-x^2 - 3x \geq 0 \rightarrow x^2 + 3x \leq 0 \rightarrow x(x + 3) \leq 0 \rightarrow x = 0, x = -3$$

$$Los\ puntos\ x = -3\ y\ \ x = 0\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos:$$

$$(-\infty, -3], [-3, 0]\ y\ [0, \infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty, -3]: x = -4 \rightarrow (-4)^2 + 3(-4) \leq 0 \rightarrow 4 \leq 0\ Falso$$

Textos Marea Verde

$Comprobamos\ para\ [-3,0]: x = -1 \rightarrow (-1)^2 + 3(-1) \leq 0 \rightarrow -2 \leq 0\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ [0,\infty): x = 1 \rightarrow (1)^2 + 3(1) \leq 0 \rightarrow 4 \leq 0\ Falso$

$Solución: x \in [-3,0]$

15. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{\mathbf{2x^2 + x - 3}} \rightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 0 \rightarrow Mediante\ la\ fórmula\ cuadrática\ obtenemos$

$los\ puntos\ x = \frac{-3}{2}\ y\ x = 1\ que\ dividen\ la\ recta\ en\ los\ intervalos:$

$(-\infty, \frac{-3}{2}], [\frac{-3}{2}, 1]\ y\ [1,\infty)$

$Comprobamos\ para\ (-\infty, \frac{-3}{2}]: x = -2 \rightarrow 2(-2)^2 - 2 - 3 \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0\ Cierto$

$Comprobamos\ para\ [\frac{-3}{2}, 1]: x = 0 \rightarrow 2(0)^2 - 0 - 3 \geq 0 \rightarrow -3 \geq 0\ Falso$

$Comprobamos\ para\ [1,\infty): x = 2 \rightarrow 2(2)^2 + 2 - 3 \geq 0 \rightarrow 7 \geq 0\ Cierto$

$Solución: x \in (-\infty, \frac{-3}{2}] \cup [1,\infty)$

b) $\sqrt{\mathbf{x^2 + 2x + 1}} \rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \rightarrow (x+1)^2 \geq 0 \rightarrow El\ cuadrado\ de\ cualquier$

$número\ más\ uno\ siempre\ será\ positivo\ o\ cero$

$Solución: x \in R$

c) $\sqrt{\mathbf{-1 + 2x - x^2}} \rightarrow -x^2 + 2x - 1 \geq 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \rightarrow (x-1)^2 \leq 0 \rightarrow$

$El\ cuadrado\ de\ cualquier\ número\ menos\ uno\ nunca\ será\ menor\ o\ igual\ que\ cero, excepto$

$en\ el\ caso\ de\ x = 1$

$(1-1)^2 \leq 0 \rightarrow 0 \leq 0\ Cierto$

$Solución: x = 1$

d) $\sqrt{\mathbf{x^2 + 3x + 5}} \rightarrow \mathbf{x^2} + 3x + 5 \geq 0 \rightarrow La\ fórmula\ cuadrática\ no\ tiene\ solución,$

$esto\ implica\ que\ la\ parábola\ asociada\ a\ la\ ecuación\ nunca\ corta\ el\ eje\ x\ y\ que\ es\ una$

$parábola\ abierta\ hacia\ arriba\ ya\ que\ el\ primer\ coeficiente\ es > 0$

$Concluimos\ que\ la\ expresión\ x^2 + 3x + 5\ es\ mayor\ que\ 0\ para\ cualquier\ valor\ de\ x$

$Solución: x \in R$

e) $\sqrt{\mathbf{-x^2 + 12x - 36}} \rightarrow -x^2 + 12x - 36 \geq 0 \rightarrow x^2 - 12x + 36 \leq 0 \rightarrow$

Textos Marea Verde

$\rightarrow (x-6)^2 \leq \rightarrow$ *El cuadrado de cualquier número menos uno nunca será menor o igual que cero, excepto en el caso* $x = 6$

$(6-6)^2 \leq 0 \rightarrow 0 \leq 0$ *Cierto*

Solución: $x = 6$

f) $\sqrt{\boldsymbol{x^2+6x-27}} \rightarrow x^2 + 6x - 27 \geq 0 \rightarrow$ *Mediante la fórmula cuadrática obtenemos los puntos* $x = -9$ *y* $x = 3$ *que dividen la recta en los intervalos:*

$(-\infty, -9], [-9, 3]$ *y* $[3, \infty)$

Comprobamos para $(-\infty, -9]$: $x = -10 \rightarrow (-10)^2 + 6(-10) - 27 \geq 0 \rightarrow$

$\rightarrow 13 \geq 0$ *Cierto*

Comprobamos para $(-9,3]$: $x = 0 \rightarrow (0)^2 + 6(0) - 27 \geq 0 \rightarrow -27 \geq 0$ *Falso*

Comprobamos para $[3, \infty)$: $x = 4 \rightarrow (4)^2 + 6(4) - 27 \geq 0 \rightarrow 13 \geq 0$ *Cierto*

Solución: $x \in (-\infty, -9] \cup [3, \infty)$

g) $\sqrt{\boldsymbol{1-4x^2}} \rightarrow 1 - 4x^2 \geq 0 \rightarrow -4x^2 \geq -1 \rightarrow 4x^2 \leq 1 \rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \rightarrow$

Aplicamos raíz cuadrada $\rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Solución: $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

16. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\boldsymbol{2(x-1)^2 > 2} \rightarrow \boldsymbol{(x-1)^2 > 1} \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

$x - 1 > 1 \rightarrow x > 2$

$x - 1 < -1 \rightarrow x < 0$

Solución: $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

b) $\boldsymbol{3(x+1)^2 \leq -12} \rightarrow (x+1)^2 \leq -4 \rightarrow$ *La expresión* $(x+1)^2$ *siempre será positiva para cualquier valor de* x, *por tanto, la desigualdad no se cumple nunca*

Solución: No tiene

c) $-x^2 < 2 \rightarrow -x^2 - 2 < 0 \rightarrow x^2 + 2 > 0 \rightarrow$ *La desigualdad será cierta para cualquier valor de* x

Solución: $x \in R$

Textos Marea Verde

d) $\mathbf{4(x-2)^2 > 1} \rightarrow (x-2)^2 > \frac{1}{4} \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

$$x-2 > \frac{1}{2} \rightarrow x > \frac{1}{2} + 2 \rightarrow x > \frac{5}{2}$$

$$x-2 < -\frac{1}{2} \rightarrow x < -\frac{1}{2} + 2 \rightarrow x < \frac{3}{2}$$

$$Solución: x \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$$

e) $\mathbf{-5(x+4)^2 \leq 0} \rightarrow (x+4)^2 \geq 0 \rightarrow$ *La expresión* $(x+4)^2$ *siempre será positiva o igual a* 0 *para cualquier valor de* x, *por tanto, la desigualdad se cumple siempre*

$$Solución: \ x \in R$$

f) $\mathbf{9(x+1)^2 \leq 81} \rightarrow (x+1)^2 \leq 9 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

$$-3 \leq x+1 \leq 3 \rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

$$Solución: [-4,2]$$

17. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\mathbf{x(2x-3) - 3(5-x) > 83} \rightarrow$ *Multiplicando y agrupando términos* $\rightarrow$

$2x^2 - 15 > 83 \rightarrow 2x^2 > 98 \rightarrow x^2 > 49 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

$$x > 7 \ y \ x < -7$$

$$Solución: x \in (-\infty, -7) \cup (7, \infty)$$

b) $\mathbf{(2x+5)(2x-5) \leq 11)} \rightarrow$ *Multiplicando los términos entre paréntesis* $\rightarrow$

$4x^2 - 25 \leq 11 \rightarrow 4x^2 \leq 36 \rightarrow x^2 \leq 9 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$$Solución: x \in [-3,3]$$

c) $\mathbf{(7+x)^2 + (7-x)^2 > 130} \rightarrow (49 + 14x + x^2) + (49 - 14x + x^2) > 130 \rightarrow$

Agrupando términos $\rightarrow 98 + 2x^2 > 130 \rightarrow x^2 > 16 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

$$x < -4 \ y \ x > 4$$

$$Solución: x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

d) $\mathbf{(2x-3)(3x-4) - (x-13)(x-4) \geq 40} \rightarrow$

$(6x^2 - 17x + 12) - (x^2 - 17x + 52) \geq 40 \rightarrow$ *Multiplicando y agrupando términos* $\rightarrow$

$5x^2 - 40 \geq 40 \rightarrow 5x^2 \geq 80 \rightarrow x^2 \geq 16 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

Textos Marea Verde

$$x \leq -4 \; y \; x \geq 4$$

$$Solución: x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$$

e) $(3x - 4)(4x - 3) - (2x - 7)(3x - 2) < 214 \rightarrow$

$(12x^2 - 25x + 12) - (6x^2 - 25x + 14) < 214 \rightarrow$ *Multiplicando y agrupando términos*

$\rightarrow 6x^2 - 2 < 214 \rightarrow x^2 < 36 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow -6 < x < 6$

$$Solución: x \in (-6,6)$$

f) $8(2 - x)^2 > 2(8 - x)^2 \rightarrow$ *Calculando cuadrado y multiplicación* $\rightarrow$

$32 - 32x + 8x^2 > 128 - 32x + 2x^2 \rightarrow$ *Agrupando términos* $\rightarrow$

$-96 + 6x^2 > 0 \rightarrow 6x^2 > 96 \rightarrow x^2 > 16 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

$$x > 4 \; y \; x < -4$$

$$Solución: x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

g) $\frac{x^2-6}{2} - \frac{x^2+4}{4} \geq 5 \rightarrow$ *Multiplicando por* $4 \rightarrow 2(x^2 - 6) - (x^2 + 4) \geq 20 \rightarrow$

$2x^2 - 12 - x^2 - 4 \geq 20 \rightarrow x^2 - 16 \geq 20 \rightarrow x^2 \geq 36 \rightarrow$ *Aplicando raíz cuadrada* $\rightarrow$

$$x \geq 6 \; y \; x \leq -6$$

$$Solución: x \in (-\infty, -6] \cup [6, \infty)$$

h) $\frac{5x-3}{x} \leq \frac{7-x}{x+2} \rightarrow$ *Multiplicando por* $x(x + 2) \rightarrow (5x - 3)(x + 2) \leq (7 - x) \cdot x \rightarrow$

Multiplicando términos $\rightarrow 5x^2 + 7x - 6 \leq 7x - x^2 \rightarrow 6x^2 - 6 \leq 0 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow$

Aplicando raíz cuadrada $\rightarrow -1 \leq x \leq 1 \rightarrow x \in [-1,1]$

A tener en cuenta que los denominadores no pueden ser cero $\rightarrow \; x \neq 0, \qquad x + 2 \neq 0$

$$x \neq 0 \; y \; x \neq -2$$

$$Solución: x \in (-1,0) \cup (0,1]$$

18. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 \leq 0 \end{cases}$

$$2x - 3 > 0 \rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$5x + 1 \leq 0 \rightarrow x \leq \frac{-1}{5}$$

No hay resultado posible que cumpla las dos condiciones

Textos Marea Verde

$Solución: Incompatible$

b) $\begin{cases} 3x-4<4x+1 \\ -2x+3<4x-5 \end{cases}$

$$3x-4<4x+1 \rightarrow -5<x \rightarrow x>-5$$

$$-2x+3<4x-5 \rightarrow 8<6x \rightarrow \frac{8}{6}<x \rightarrow x>\frac{4}{3}$$

$$La\ intersección\ de\ ambas\ es: x>\frac{4}{3}$$

$$Solución: x \in (\frac{4}{3}, \infty)$$

c) $\begin{cases} 2x-3>x-2 \\ 3x-7<x-1 \end{cases}$

$$2x-3>x-2 \rightarrow x>1$$

$$3x-7<x-1 \rightarrow 2x<6 \rightarrow x<3$$

$$La\ intersección\ de\ ambas\ es: 1<x<3$$

$$Solución: x \in (1,3)$$

d) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{x}{5}<8 \\ \frac{x}{2}-\frac{4x}{9}<5 \end{cases}$

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{5}<8 \rightarrow \frac{5x}{15}+\frac{3x}{15}<8 \rightarrow \frac{8x}{15}<8 \rightarrow 8x<120 \rightarrow x<15$$

$$\frac{x}{2}+\frac{4x}{9}<5 \rightarrow \frac{9x}{18}+\frac{8x}{18}<5 \rightarrow \frac{x}{18}<5 \rightarrow x<90$$

$$La\ intersección\ de\ ambas\ es: x<15$$

$$Solución: x \in (-\infty, 15)$$

e) $\begin{cases} \frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2} \leq x \\ \frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3} \geq x \end{cases}$

$$\frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{2} \leq x \rightarrow \frac{2(x-1)}{6}-\frac{3(x+3)}{6} \leq x \rightarrow Simplificando \rightarrow \frac{-x-11}{6} \leq x \rightarrow$$

$$\rightarrow -x-11 \leq 6x \rightarrow -11 \leq 7x \rightarrow x \geq \frac{-11}{7}$$

$$\frac{4x-2}{4}-\frac{x-1}{3} \geq x \rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{x-1}{3} \geq x \rightarrow \frac{2x-3}{6}-\frac{2(x-1)}{6} \geq x \rightarrow$$

Textos Marea Verde

$$\rightarrow Simplificando \rightarrow \frac{-1}{6} \geq x \rightarrow x \leq \frac{-1}{6}$$

$$La\ intersección\ de\ ambas\ es: \frac{-11}{7} \leq x \leq \frac{-1}{6}$$

$$Solución: x \in [\frac{-11}{7}, \frac{-1}{6}]$$

19. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $|\mathbf{2x+1}| \leq \mathbf{5} \rightarrow -5 \leq 2x+1 \leq 5 \rightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \rightarrow -3 \leq x \leq 2$

$$Solución: x \in [-3,2]$$

b) $|\mathbf{-x+1}| \geq \mathbf{2} \rightarrow -x+1 \geq 2 \rightarrow -x \geq 1 \rightarrow x \leq -1$

$$-x+1 \leq -2 \rightarrow -x \leq -3 \rightarrow x \geq 3$$

$$Solución: x \in (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

c) $|\mathbf{-x+9}| \leq \mathbf{10} \rightarrow -10 \leq -x+9 \leq 10 \rightarrow -19 \leq -x \leq 1 \rightarrow 19 \geq x \geq -1$

$$Solución: x \in [-1,19]$$

d) $|\mathbf{2x-1}| > \mathbf{4} \rightarrow 2x-1 > 4 \rightarrow x > \frac{5}{2}$

$$2x-1 < -4 \rightarrow x < \frac{-3}{2}$$

$$Solución: x \in (-\infty, \frac{-3}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$$

e) $|\mathbf{-4x+12}| < \mathbf{-6}$

El valor absoluto es siempre no negativo, por tanto no se puede cumplir la desigualdad

$$Solución: No\ tiene$$

f) $|\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{2}}| \leq \mathbf{10} \rightarrow -10 \leq \frac{x+1}{2} \leq 10 \rightarrow -20 \leq x+1 \leq 20 \rightarrow -21 \leq x \leq 19$

$$Solución: x \in [-21,19]$$

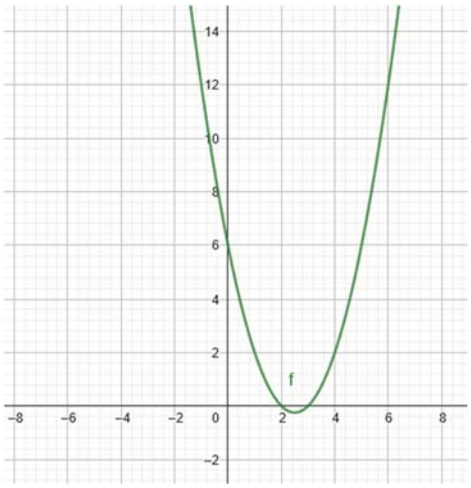
g) $|\mathbf{-4x+8}| < \mathbf{3} \rightarrow -3 < -4x+8 < 3 \rightarrow -11 < -4x < -5 \rightarrow \frac{11}{4} > x > \frac{5}{4}$

$$Solución: x \in (\frac{5}{4}, \frac{11}{4})$$

Textos Marea Verde

20. Representa gráficamente la parábola $y = x^2 - 5x + 6$ e indica en qué intervalos es $x^2 - 5x + 6 > 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 < 0$, dónde $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, y dónde $x^2 - 5x + 6 \leq 0$:

$$Parábola: y = x^2 - 5x + 6$$



$$Mediante\ la\ fórmula\ cuadrática\ obtenemos\ las\ raíces\ x = 2, x = 3\ que\ dividen\ la\ recta\ en\ los\ intervalos\ (-\infty, 2), (2, 3)\ y\ (3, \infty)$$

$$Comprobando\ valores\ de\ x\ en\ los\ intervalos:$$

$$x^2 - 5x + 6 > 0\ en\ (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$$

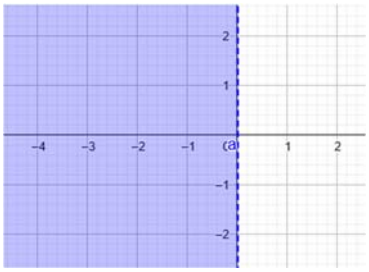
$$x^2 - 5x + 6 \geq 0\ en\ (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0\ en\ (2,3)$$

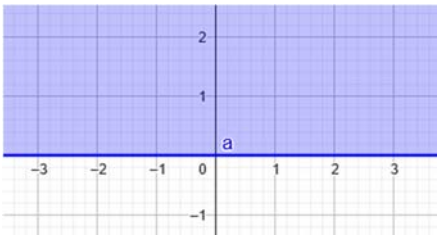
$$x^2 - 5x + 6 \leq 0\ en\ [2,3]$$

21. Representa los siguientes semiplanos:

a) $x < 0 \rightarrow$

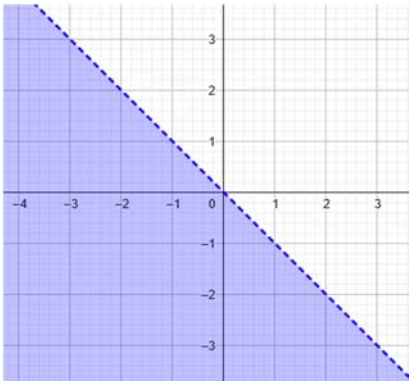


b) $y \geq 0 \rightarrow$

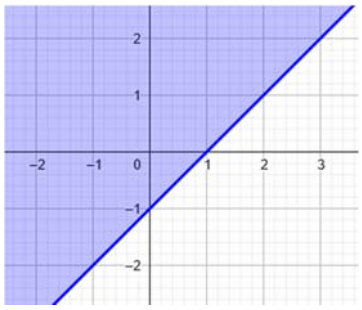


BY NC SA

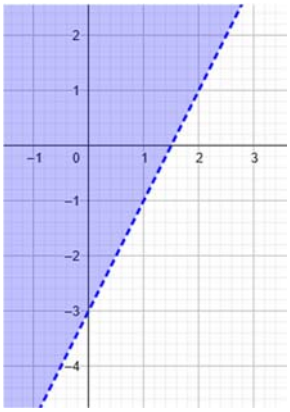
c) $x + y < 0 \rightarrow$



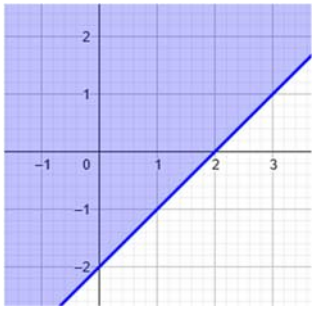
d) $x - y \leq 1 \rightarrow$



e) $2x - y < 3 \rightarrow$

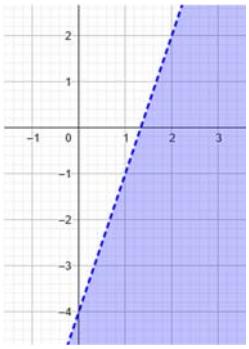


f) $-x + y \geq -2 \rightarrow$



BY NC SA

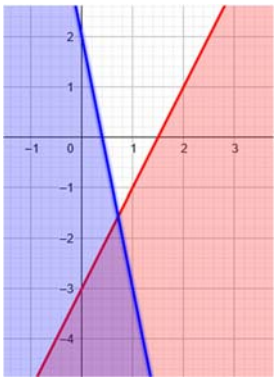
a) $3x - y > 4 \rightarrow$



22. Representa la región factible de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:

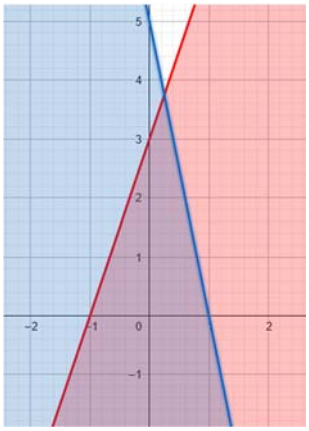
a) $\begin{cases} 2x - y \geq 3 \\ 5x + y \leq 2 \end{cases}$

Representamos la región factible (morado) conformada por los dos semiplanos (las dos rectas, roja y azul, incluidas en la región factible)



b) $\begin{cases} 3x - y \geq -3 \\ 5x + y \leq 5 \end{cases}$

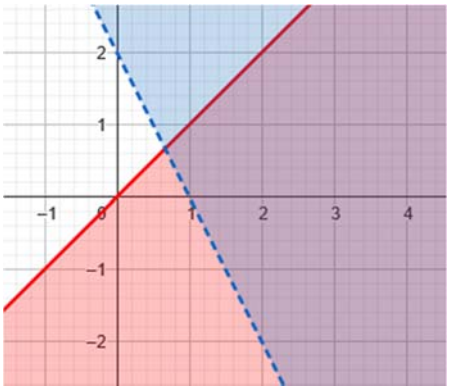
Representamos la región factible (morado) conformada por los dos semiplanos (las dos rectas, roja y azul, incluidas en la región factible)



Textos Marea Verde

c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ 2x + y > 2 \end{cases}$

Representamos la región factible (morado) conformada por los dos semiplanos (la primera recta roja incluida en la región factible, la segunda azul no)



23. ¿Cuáles son los números cuyo triple es mayor o igual que su doble más 30?

Si x es el número, *Diseñamos la inecuación*: $3x \geq 2x + 30$

Resolvemos: $3x - 2x \geq 30 \rightarrow x \geq 30$

Solución: $[30, \infty)$ *Todos los números mayores o igual que* 30

24. Averigua cuál es el menor número entero múltiplo de 3 que verifica la inecuación:

Si x es el número, $x + 2 > -3x + 10$

Resolvemos la desigualdad: $x + 3x > 10 - 2 \rightarrow 4x > 8 \rightarrow x > 2$

el menor múltiplo de 3 *siendo mayor que* 2 *es* $x = 3$

25. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre 70 Km/h y 110 Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de 4 horas?

D: distancia, v: velocidad ; $Distancia = Velocidad \cdot Tiempo$,

Velocidad: 70 < v < 110

$Dmin = 70 \cdot 4 = 280km$

$Dmax = 110 \cdot 4 = 440km$

Distancia: 280 < D < 440 , es decir ,

El coche habrá recorrido entre 280 *y* $440km$

26. La tarifa de telefonía de la empresa A es 25 euros fijos mensuales más 10 céntimos de euro por minuto de conversación, la de la empresa B es 20 euros fijos más 20 céntimos por minuto de conversación. ¿A partir de cuantos minutos empieza a ser más rentable la tarifa de la empresa A?

Textos Marea Verde

$$m = minutos\ de\ conversación$$

$$Coste\ en\ euros:$$

$$Coste\ A: 25 + 0{,}1m$$

$$Coste\ B: 20\ +\ 0{,}2m$$

$$En\ qué\ punto\ (valor\ de\ m)\ la\ empresa\ A\ cuesta\ menos\ que\ B:$$

$$25 + 0.1m < 20 + 0.2m$$

$$Resolvemos: 5 < 0.1m \rightarrow m > 50$$

$$Solución: A\ partir\ de\ los\ 50\ minutos\ empieza\ a\ ser\ rentable\ la\ tarifa\ A$$

27. Una fábrica paga a sus comerciales 20 € por artículo vendido más una cantidad fija de 600 €. Otra fábrica de la competencia paga 40 € por artículo y 400 € fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?

$$x\ =\ articulos\ vendidos$$

$$Fábrica\ 1: 600 + 20x$$

$$Fábrica\ 2: 400 + 40x$$

$$En\ qué\ punto\ (valor\ de\ x)\ la\ fábrica\ 2\ ingresa\ más\ que\ B:$$

$$400 + 40x > 600 + 20x$$

$$Resolvemos: 20x > 200 \rightarrow x > 10$$

$$Solución: A\ partir\ de\ 10\ artículos\ vendidos\ la\ segunda\ fábrica\ ingresa\ más$$

28. A un vendedor de aspiradoras le ofrecen 1000 euros de sueldo fijo más 20 euros por aspiradora vendida. A otro le ofrecen 800 euros de fijo más 25 euros por aspiradora vendida. Explica razonadamente qué sueldo es mejor a partir de qué cantidad de aspiradoras vendidas.

$$x\ =\ aspiradoras\ vendidas$$

$$Vendedor\ 1: 1000 + 20x$$

$$Vendedor\ 2: 800 + 25x$$

$$En\ qué\ punto\ (valor\ de\ x)\ el\ vendedor\ 2\ ingresa\ más\ que\ el\ 1:$$

$$800 + 25x > 1000 + 20x$$

$$Resolvemos: 5x > 200 \rightarrow x > 40$$

$$Solución: A\ partir\ de\ las\ 40\ aspiradoras\ vendidas, el\ vendedor\ 2\ tiene\ mejor\ sueldo$$

29. El área de un cuadrado es menor o igual que 64 cm^2. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

$$Sea\ x\ la\ medida\ del\ lado\ en\ cm:$$

$$Área\ =\ x^2$$

Textos Marea Verde

$$Area\ menor\ o\ igual\ que\ 64\colon\ x^2 \leq 64$$

$$Resolvemos\colon aplicando\ raíz\ cuadrada\ obtenemos\ el\ intervalo\ -8 \leq x \leq 8$$

$$Al\ ser\ x\ una\ longitud\ en\ cm, los\ valores\ negativos\ y\ el\ 0\ no\ tienen\ sentido$$

$$Solución\colon (0,8]$$

30. El perímetro de un cuadrado es menor que 60 metros. Determina entre qué valores se halla la medida del lado.

$$Sea\ x\ la\ medida\ del\ lado\ en\ m\colon$$

$$Perímetro\ =\ 4x$$

$$Perímetro\ menor\ que\ 60\colon 4x < 60$$

$$Resolvemos\colon x < \frac{60}{4} \rightarrow x < 15$$

$$Al\ ser\ x\ una\ longitud\ en\ m, los\ valores\ negativos\ y\ el\ 0\ no\ tienen\ sentido$$

$$Solución\colon (0{,}15)$$

31. Un panadero fabrica barras y hogazas. La barra de pan lleva 200 gramos de harina y 5 gramos de sal, mientras que la hogaza lleva 500 gramos de harina y 10 gramos de sal. Si dispone de 200 kg de harina y 2 kg de sal, determina cuántos panes de cada tipo pueden hacerse.

x: número de barras de pan , y: número de hogazas

$$Harina\colon 200x + 500y \leq 200\ 000$$

$$Sal\colon 5x + 10y \leq 2\ 000$$

$$x \geq o \quad , \quad y \geq 0 \quad \text{, simplificando}$$

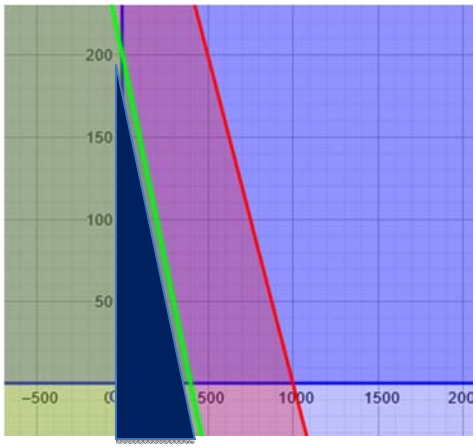
$$I1\colon 2x + 5y \leq 2\ 000$$

$$I2\colon x + 2y \leq 400$$

$$I3\colon x \geq 0$$

$$I4\colon y \geq 0$$

$$La\ solución\ está\ comprendida\ en\ la\ región\ factible(morado\ oscuro)\ que\ representa\ el\ sistema\colon$$



Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. La desigualdad 2 < x < 7 se verifica para los valores:

a) 2, 3 y 6 → $Sí$

b) 3, 4.7 y 6 → $Sí$

c) 3, 5.2 y 7 → No

d) 4, 5 y 8 → No

2. Tiene como solución x = 2 la inecuación siguiente:

a) x < 2 → No

b) x > 2 → No

c) x ≤ 2 → $Sí$

c) x+3 < 5 → $x < 2 \rightarrow No$

3. La solución de la inecuación 3.4 + 5.2x – 8.1x < 9.4 + 7.3x es:

a) x < –10/1.7 **b) x > –3/5.1** **c) x > –10/1.7** **d) x < 6/10.2**

$$-6 < 10.2x \rightarrow x > \frac{-6}{10.2} \rightarrow x > \frac{-3}{5.1}$$

$Solución: b$

4. La ecuación $x^2 \leq 4$ **tiene de soluciones:**

a) x ∈ (–2, 2) **b) x ∈ [–2, 2]** **c) x ∈ (–∞,–2) ∪ (2, +∞)** **d) x ∈ (–∞,–2] ∪ [2, +∞)**

$$Aplicando\ raíz\ cuadrada\ obtenemos \rightarrow -\sqrt{4} \leq x \leq \sqrt{4} \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \rightarrow x \in [-2,2]$$

$Solución: \boldsymbol{b}$

5. La suma de las edades de dos personas es mayor de 40 años y su diferencia menor o igual que 8 años. ¿Cuál de los siguientes sistemas de inecuaciones nos permite calcular sus edades?

a) $\begin{cases} x+y>40 \\ y-x\leq 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y\geq 40 \\ y-x<8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y>40 \\ x-y<8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y<40 \\ x-y\leq 8 \end{cases}$

$Solución: \boldsymbol{c}$

6. El perímetro de un rectángulo es menor que 14 cm. Si la base es mayor que el doble de la altura menos 3 cm, algún valor que verifica es sistema es:

a) base = 4 cm, altura = 1 cm **b) base = 2 cm, altura = 3 cm**

c) base = 6, altura = 4cm **d) base = 9 cm, altura = 2 cm**

$$\begin{cases} Perímetro: P < 14, \quad P = 2(base + altura) \\ base > 2altura - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(b + a) < 14 \\ b > 2a - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b + 2a < 14 \\ 2a - b < 3 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 10 < 14 \quad Sí \\ 2 \cdot 2 - 1 = 3 < 3 \quad No \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10 < 14 \quad Sí \\ 2 \cdot 2 - 3 = 1 < 3 \quad Sí \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 20 < 14 \quad No \\ 2 \cdot 6 - 4 = 8 < 3 \quad No \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 \cdot 9 + 2 \cdot 2 = 22 < 14 \quad No \\ 2 \cdot 9 - 2 = 16 < 3 \quad No \end{cases}$

$$Solución: \boldsymbol{b} \quad b = 2cm, \quad a = 3cm$$

7. La solución de la inecuación $|-x+7| \leq 8$ es:

a) [–1, 15] **b) (–∞, –1]** **c) (–1, 1)** **d) [1, ∞)**

$$-8 \leq -x + 7 \leq 8$$

$$Resolver\ parte\ izquierda: \ -8 \leq -x + 7 \rightarrow -15 \leq -x \rightarrow 15 \geq x$$

$$Resolver\ parte\ derecha: \ -x + 7 \leq 8 \rightarrow -x \leq 1 \rightarrow x \geq -1$$

$$Combinando\ soluciones: \ -1 \leq x \leq 15 \rightarrow x \in [-1, 15]$$

$$Solución: \boldsymbol{a}$$

8. Las soluciones posibles de $\sqrt{5x-9}$ son:

a) x < 9/5 **b) x > 9/5** **c) x ≤ 9/5** **d) x ≥ 9/5**

La raíz cuadrada está definida si su radicando es mayor o igual que cero →

$$5x - 9 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{9}{5}$$

$$Solución: \boldsymbol{d}$$

9. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ es:

a) (1, 2) **b) (–∞, 1)** **c) x < 1 U x > 2** **d) (–1, 2)**

$$Restando\ 1 \rightarrow \frac{2x-3}{x-2} - 1 < 0 \rightarrow Denominador\ común\ x-2 \rightarrow \frac{2x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} < 0 \rightarrow$$

Textos Marea Verde

$$\frac{(2x-3)-(x-2)}{x-2} < 0 \rightarrow Simplificando \rightarrow \frac{x-1}{x-2} < 0 \rightarrow x-1=0, x-2=0$$

$$Los\ puntos\ x=1\ y\ \ x=2\ dividen\ la\ recta\ en\ tres\ intervalos: (-\infty,1), (1,2)\ y\ (2,\infty)$$

$$Comprobamos\ para\ (-\infty,1): x=0 \rightarrow \frac{1-1}{1-2} < 0 \rightarrow 0<0 \rightarrow Falso$$

$$Comprobamos\ para\ (1,2): x=1.5 \rightarrow \frac{1.5-1}{1.5-2} < 0 \rightarrow -1<0 \rightarrow Cierto$$

$$Comprobamos\ para\ (2,\infty): x=3 \rightarrow \frac{3-1}{3-2} < 0 \rightarrow 2<0 \rightarrow Falso$$

$$Solución: \boldsymbol{a}\ \ x \in (1,2)$$

10. Una inecuación cuya solución sea el intervalo $(-\infty, 5)$ es:

a) 5x – 3x + 2 < 9x + 2 **b) 8x – 3x + 7 < 9x + 2**

c) 5x – 3x + 2 < 7x + 27 **d) 5x – 3x – 2 > 7x – 27**

a) 5x – 3x + 2 < 9x + 2 , 2x + 2 < 9x + 2 , 2x – 9x < 2 – 2 , - 5x < 0 , x > 0 , $(0,\infty)$

b) 8x – 3x + 7 < 9x + 2 , 5x + 7 < 9x + 2 , 5x – 9x < 2 – 7 , - 4x < - 5 , x > 5/4 , $(5/4,\infty)$

c) 5x – 3x + 2 < 7x + 27 , 2x + 2 < 7x + 27 , 2x – 7x < 27 – 2 , - 5x < 25 , x > - 5 , $(-5,\infty)$

d) $5x-3x-2>7x-27 \rightarrow 2x>7x-25 \rightarrow -5x>-25 \rightarrow x<5 \rightarrow (-\infty,5)$

$$Solución: \boldsymbol{d}\ \ (-\infty,5)$$

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 6: Porcentajes

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Pilar Paramio Barrigas
Hugo Bastante Gómez-Limón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

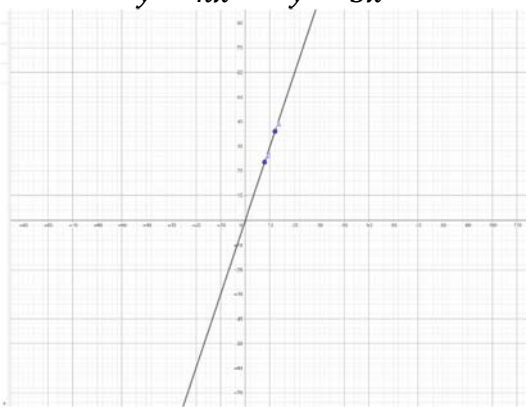
1. Copia en tu cuerno y completa la tabla de proporción directa. Calcula la razón de proporcionalidad. Representa gráficamente los puntos. Determina la ecuación de la recta.

Litros	12	7,82	**3,09**	1	**3,33…**	50
Euros	36	**23,46**	9,27	**3**	10	**150**

k=36/12=3

36/12 = x/7,82 = 9,27/x = 3/1 = 10/x = x/50 = 3

$$y = kx \rightarrow y = 3x$$



2. Calcula los términos que faltan para completar las proporciones:

a) 24/100 = 30/x ; x = 100·30:24 = 125

b) x/80 = 46/12 ; x = 80·46:12 = 306,6

c) 3,6/12,8 = x/60 ; x = 60·3,6:12,8 = 16,8

3. Si el AVE tarda una hora y treinta y cinco minutos en llegar desde Madrid a Valencia, que distan 350 kilómetros, ¿cuánto tardará en recorrer 420 km?

1 hora y 35 minutos son 60 + 35 = 95 minutos; 95 : 60 = 1,58 h

$$\begin{matrix} 1{,}58\ h \rightarrow & 350\ km \\ x\ h \rightarrow & 420\ km \end{matrix}$$ proporcionalidad directa (PD)

$1{,}58 \cdot 420 = 350x \rightarrow x = \frac{1{,}58 \cdot 420}{350} = 1{,}9\ h$; 0,9 · 60 = 54 ;

Tarda 1 hora y 54 minutos.

4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de frutas del bosque necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fruta. Queremos hacer 7 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fruta debemos poner?

El peso del azúcar más la mermelada es x + 2x = 3x, donde x son kg.

Para conseguir 7kg de mermelada, será: 3x = 7, x = 7/3 = 2,33

Luego necesitamos 2,33kg de azúcar y 2·2,33 = 4,66kg de fruta

5. La altura de una torre es proporcional a su sombra (a una misma hora). Una torre que mide 12 m tiene una sombra de 25m. ¿Qué altura tendrá otra torre cuya sombra mida 43m?

Textos Marea Verde

$12\ m\ de\ altura \rightarrow \quad 25\ m\ de\ sombra$
$x\ m\ de\ altura \rightarrow \quad 43\ m\ de\ sombra$

$$\frac{12}{x} = \frac{25}{43} \rightarrow 25x = 516 \rightarrow x = \frac{516}{25} = 20{,}64\ m\ de\ altura$$

También: y = kx, 25 = k·12, k = 25/12, y = 25/12 x, 43 = 25/12 · x, x = 43·12/25 , x = 20,64 m de altura

6. Una fuente llena una garrafa de 12 litros en 8 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en llenar un bidón de 135 litros?

$12\ litros \rightarrow \quad 8\ minutos$
$135\ litros \rightarrow \quad x\ minutos$

$$\frac{12}{135} = \frac{8}{x} \rightarrow 12x = 1080 \rightarrow x = \frac{1080}{12} = 90\ min$$

7.Hemos gastado 12 litros de gasolina para recorrer 100 km. ¿Cuántos litros necesitaremos para una distancia de 1374 km?

$12\ litros \rightarrow \quad 100\ km$
$x\ litros \rightarrow \quad 1374\ km$

$$\frac{12}{x} = \frac{100}{1374} \rightarrow 100x = 16488 \rightarrow x = \frac{16488}{100} = 164{,}88\ litros$$

8. Mi coche ha gasta 67 litros de gasolina en recorrer 1250 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 5 823 km?

$67\ litros \rightarrow \quad 1250\ km$
$x\ litros \rightarrow \quad 5823\ kilometros$

$$\frac{67}{x} = \frac{1250}{5823} \rightarrow 1250x = 390141 \rightarrow x = \frac{390141}{1250} = 312{,}11\ litros$$

9. Un libro de 300 páginas pesa 127 g. ¿Cuánto pesará un libro de la misma colección de 420 páginas?

$127\ gramos \rightarrow \quad 300\ páginas$
$x\ gramos \rightarrow \quad 420\ páginas$

$$\frac{127}{x} = \frac{300}{420} \rightarrow 300x = 53340 \rightarrow x = \frac{53340}{300} = 117{,}8\ gramos$$

10. Dos pantalones nos costaron 28 €, ¿cuánto pagaremos por 7 pantalones?

$2\ pantalones \rightarrow \quad 28\ euros$
$7\ pantalones \rightarrow \quad x\ euros$

$$\frac{2}{7} = \frac{28}{x} \rightarrow 2x = 196 \rightarrow x = \frac{196}{2} = 98\ euros$$

11. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

a) 27/100 = 27% b) "1 de cada 2" = 50% c) 52/90 = 57%

12. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16% y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?

Textos Marea Verde

$4\ alumnos\ rubios \rightarrow \quad 16\%$
$x\ alumnos \rightarrow \quad 100\%$

$$\frac{4}{x}=\frac{16}{100} \rightarrow 16x=400 \rightarrow x=\frac{400}{16}=25\ alumnos$$

13. Un depósito de 2 000 litros de capacidad contiene en este momento 1 036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?

% = (1036l/2000l)·100 = 51,8%

14. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70%. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido

$30\ alumnos \rightarrow \quad 100\%$
$x\ alumnos \rightarrow \quad 70\%$

$$\frac{30}{x}=\frac{100}{70} \rightarrow 100x=210 \rightarrow x=\frac{210}{100}=\ 21\ alumnos$$

15. Una fábrica ha pasado de tener 130 obreros a tener 90. Expresa la disminución en porcentaje

$130\ obreros \rightarrow \quad 100\%$
$90\ obreros \rightarrow \quad x\ \%$

$$\frac{130}{90}=\frac{100}{x} \rightarrow 130x=9000 \rightarrow x=\frac{9000}{130}=69{,}2\%$$

100 – 69,2 = 30,08 , ha disminuido un 30,08%

16. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 520 más un 21% de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 18 %, sigue estos pasos:

21% de 520€ = 0,21·520€ = 109,20€
520€+109,20€ = 629,20€
18% de 629,20€ = 0,18·629,20€ = 113,06€
629,20€-113,06€ = 516,14€

17. Copia en tu cuaderno y completa:

a) De una factura de 1340 € he pagado 1200 €. Me han aplicado un 10,56% de descuento.

$1340€ \rightarrow \quad 100\%$
$1200€ \rightarrow \quad x\ \%$

$$\frac{1340}{1200}=\frac{100}{x} \rightarrow 1340x=120000 \rightarrow x=\frac{120000}{1340}=89{,}55\% \rightarrow 100\%-89{,}55\%=10{,}55\%$$

b) Me han descontado el 9% de una factura de 307,69 € y he pagado 280€

$x\ € \rightarrow \quad 100\%$
$280€ \rightarrow \quad 91\%$

$$\frac{x}{280}=\frac{100}{91} \rightarrow 91x=28000 \rightarrow x=\frac{28000}{91}=307{,}69€$$

c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 20% y me he ahorrado 100. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?

$x\ € \rightarrow \quad 100\%$
$100€ \rightarrow \quad 20\ \%$

$$\frac{x}{100}=\frac{100}{20} \rightarrow 20x=10000 \rightarrow x=\frac{10000}{20}=\ 500€$$

Textos Marea Verde

18. El precio inicial de un electrodoméstico era 500 euros. Primero subió un 10% y después bajó un 30%. ¿Cuál es su precio actual? ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?

El incremento del 10% 500 · 0,1 = 50 500 + 50 = 550

Disminución del 30% 550 · 0,3 = 165 550 – 165 = 385

Ha bajado 500 – 385 = 115, hemos tenido una rebaja de 115/500 = 0,23 , 23% de descuento.

También: 1,1·0,7 = 0,77 , 1 – 0,77 = 0,23

19. Una persona compró acciones de bolsa en enero por 10.000. De enero a febrero estas acciones aumentaron un 8%, pero en febrero han disminuido un 16% ¿Cuál es su valor a finales de febrero? ¿En qué porcentaje han aumentado o disminuido?

Aumento del 8% de enero a febrero:

$$Vfebrero_1 = Venero \cdot (1 + 0.08) = 10\,000 \cdot 1.08 = 10\,800€$$

Disminución del 16% en febrero:

$$Vfebrero_{final} = Vfebrero_1 \cdot (1 - 0.16) = 10\,800 \cdot 0.84 = 9\,072€$$

El valor de las acciones a finales de febrero es 9 072 €.

$$Varación\ porcentual = \left(\frac{Valor\ final - Valor\ inicial}{Valor\ inicial}\right) \cdot 100 = \left(\frac{9\,072 - 10\,000}{10\,000}\right) \cdot 100 =$$

$$= \left(-\frac{928}{10000}\right) \cdot 100 = -9{,}28\%$$

Por lo tanto, las acciones han disminuido en un 9,28% desde enero hasta finales de febrero.

También: 1,08·0,84 = 0,9072 , 1 – 0,9072 = 0,0928 , ha disminuido un 9,28%.

20. El precio inicial de una enciclopedia era de 300 € y a lo largo del tiempo ha sufrido variaciones. Subió un 10%, luego un 25% y después bajó un 30%. ¿Cuál es su precio actual? Calcula la variación porcentual.

Subida del 10%:

$$300 + (300 \cdot 0.10) = 300 + 30 = 330€$$

Subida del 25%:

$$330 + (330 \cdot 0.25) = 330 + 82.50 = 412.50€$$

Bajada del 30%:

$$412.5 - (412{,}5 \cdot 0{,}3) = 412.5 - 123{,}75 = 288{,}75€$$

$$Variación\ porcentual = \left(\frac{Pfinal - Pinicial}{Pinicial}\right) \cdot 100 = \left(\frac{288.75 - 300}{300}\right) \cdot 100 = \left(-\frac{11{,}25}{300}\right) \cdot 100 \approx -3{,}75\%$$

La variación porcentual total es aproximadamente -3.75%

El precio actual es de 288,75€

21. En una tienda de venta por Internet se anuncian rebajas del 25% , pero luego cargan en la factura un 20% de gastos de envío. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o descuento?¿Cuánto tendremos que pagar por un artículo que costaba 30 euros?¿Cuánto costaba un artículo por el que hemos pagado 36 euros?

0,25·30 = 7,5 euros 30 – 7,5 = 22,5

0,20·22,5 = 4,5 euros 22,5 + 4,5 = 27 tendremos que pagar 27 euros

(27 – 30) / 30 = -0,1 hay un descuento del 10%

Si hemos pagado 36 euros, x · (1 – 0,1) = 36 , luego x = 36/0,9 = 40, el artículo costaba 40 euros.

Textos Marea Verde

22. La distancia real entre dos pueblos es 28,6 km. Si en el mapa están a 7 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?

$$28{,}6km = 28{,}6 \cdot 100\,000cm = 2\,860\,000cm$$

$$Escala = \frac{Espacio\ en\ el\ mapa}{Espacio\ real} = \frac{7}{2\,860\,000} = \frac{1}{408\,571{,}43}$$

La escala del mapa es aproximadamente 1:408,571

23. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1: 200 presenta una altura de 8 cm?

Altura real= 8cm· 200=1600cm

Altura real=1600cm/100=16m

24. Dibuja la escala gráfica correspondiente a la escala 1 : 60000.

25. Las dimensiones de una superficie rectangular en el plano son 7 cm y 23 cm. Si está dibujado a escala 1:50, calcula sus medidas reales.

Medida Real(ancho)=7cm·50=350cm

Medida Real(largo)=23cm·50=1150cm

Ancho real= 350cm/100= 3,5m

Largo real= 1150cm/100=11,5m

PROPORCIONALIDAD INVERSA

26. Para embaldosar un recinto, 7 obreros han dedicado 80 horas de trabajo. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y determina la constante de proporcionalidad. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Número de obreros	1	5	7	12	20	56	60
Horas de trabajo	560	112	80	46,6	28	10	9,3

Proporcionalidad inversa

$$A \cdot B = 7 \cdot 80 = 560$$

1·x = 560, x = 560; 5·x = 560, x = 112; 12·x = 560, x = 46,6; 28·x = 560, x = 20 ; ….

27. Al cortar una cantidad de madera hemos conseguido 5 paneles de 1,25 m de largo. ¿Cuántos paneles conseguiremos si ahora tienen 3 m de largo?

$$A_1 \cdot B_1 = A_2 \cdot B_2 \rightarrow 5 \cdot 1{,}25 = A_2 \cdot 3 \rightarrow A_2 = \frac{5 \cdot 1{,}25}{3} = 2{,}08\ paneles$$

Como son paneles conseguiremos 2 paneles de 3 metros de largos y nos queda un poco madera.

28. En un huerto ecológico se utilizan 5 000 kg de un tipo de abono de origen animal que se sabe que tiene un 12 % de nitratos. Se cambia el tipo de abono, que ahora tiene un 15 % de nitratos, ¿cuántos kilogramos se necesitarán del nuevo abono para que las plantas reciban la misma cantidad de nitratos?

5000·0,12(12%) = 600kg

600/0,15(15%) = 4000kg

Textos Marea Verde

29. Ese mismo huerto necesita 200 cajas para envasar sus berenjenas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de 1,7 kilogramos? ¿Y para envasarlas en cajas de 2,3 kilogramos?

200/1,7 = 117,6 cajas, es decir, 118 cajas y una iría incompleta.

200/2,3 = 86,9 cajas, 87 cajas y una sin llenar.

30. Para envasar cierta cantidad de leche se necesitan 8 recipientes de 100 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de leche empleando 20 recipientes. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos recipientes?

8·100 = 800L

800/20 = 40L por recipiente

31. Copia en tu cuaderno la tabla siguiente, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad inversa. Escribe la ecuación de la hipérbola.

Magnitud A	40	0,07	**2**	8	**1,5625**
Magnitud B	0,25	**142,85**	5	**1,25**	25

40· 0,25 = 10 $y = \frac{10}{x}$; $y = \frac{10}{0{,}07} = 142{,}85$; $y = \frac{10}{2} = 5$; ...

32. Seis personas realizan un viaje de 12 días y pagan en total 40 800 €. ¿Cuánto pagarán 15 personas si su viaje dura 4 días?

días	euros	personas
12	40 800	6
4	x	15

Dividimos el gasto entre el total de días y personas:

40800/(6·12) = 40800/72 = 566,67 euros por persona y día

Multiplicamos el precio por persona y día por el total de personas y días:

566,67·(15·4) = 34000 euros pagarán en total.

33. Si 16 bombillas originan un gasto de 4 500 €, estando encendidas durante 30 días, 5 horas diarias, ¿qué gasto originarían 38 bombillas en 45 días, encendidas durante 8 horas diarias?

bombillas	euros	días	horas
16	4 500	30	5
38	x	45	8

4500/(16·30·5) = 1,875 euros por bombilla, día y hora.

1,875·(38·45·8) = 25650 euros en total.

34. Para alimentar 6 vacas durante 17 días se necesitan 240 kilos de alimento. ¿Cuántos kilos de alimento se necesitan para mantener 29 vacas durante 53 días?

Textos Marea Verde

vacas	días	kg
6	17	240
29	53	x

240/(6·17) = 2,35 kg por vaca y día
2,35·(29·53) = 3616,47kg en total.

35. Si 12 hombres construyen 40 m de tapia en 4 días trabajando 8 horas diarias, ¿cuántas horas diarias deben trabajar 20 hombres para construir 180 m en 15 días?

hombres	m	días	horas
12	40	4	8
20	180	15	x

Metros de tapia realizados por hombre por hora y día 40/8·4·12 = 5/48
Si x es el número de horas, $\frac{5}{48} \cdot 20 \cdot 15 \cdot x = 180$, $x = \frac{180 \cdot 48}{5 \cdot 20 \cdot 15} = 5{,}76\ horas$

36. Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 24 animales durante 50 días con una ración de 1 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 100 animales si la ración es de 800 g?

animales	días	kg
24	50	1
100	x	0,8

Cantidad consumida por cada animal durante los 50 días: 50 kg.
Cantidad de pienso: $24 \times 50 = 1200$ kg.
Número de días, x : 0,8·x· 100 = 1200 ⇒ x = 1200/100·0,8 = 15

37. Para llenar un depósito se abren 5 grifos que lanzan 8 litros por minuto y tardan 10 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán 7 grifos similares que lanzan 10 litros por minuto?

grifos	litros	horas
5	8	10
7	10	x

Litros por minuto: 5·8 = 40l/min

En 10 horas: 40·60·10 = 24000l

24000/(7·10)=24000/70=342,86 min ; 342,86/60 = 5,7143 ; 5 horas y 43 minutos.

38. Si 4 máquinas fabrican 2 400 piezas funcionando 8 horas diarias. ¿Cuántas máquinas se deben poner a funcionar para conseguir 7 000 piezas durante 10 horas Diarias?

Textos Marea Verde

máquinas	piezas	horas
4	2 400	8
x	7 000	10

Piezas que fabrica cada máquina: 2400/4 = 600 piezas por máquina
Piezas por cada hora: 600/8 = 75 piezas por hora y máquina
Máquinas necesarias, x; trabajando 10 horas: 75·10·x = 7000 ; x = 7000/750 = 9,33..
Necesitaremos 10 máquinas.

39. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18 000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
10 + 6 + 12 + 7 + 5 = 40
(10/40)·18000 = 450 euros
(6/40)·18000 = 2700 euros
(12/40)·18000 = 5400 euros
(7/40)·18000 = 3150 euros
(5/40)·18000 = 2250 euros

40. Tres socios han invertido 20 000 €, 34 000 € y 51 000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31 500€, ¿cuánto corresponde a cada uno?
20000 + 34000 + 51000 = 105000 euros
(20000/105000)·31500 = 6000 euros
(34000/105000)·31500 = 10200 euros
(51000/105000)·31500 = 15300 euros

41. La Unión Europea ha concedido una subvención de 48 000 000 € para tres Estados de 60, 46 y 10 millones de habitantes, ¿cómo debe repartirse el dinero, sabiendo que es directamente proporcional al número de habitantes?
60 millones + 46 millones + 10 millones = 116 millones
(60 millones/116 millones)·48 000 000 = 24 827 586,21
(46 millones/116 millones)·480 000 00 = 19 172 413,79
(10 millones/116 millones)·48 000 000 = 4 000 000

42. Se reparte una cantidad de dinero, entre tres personas, directamente proporcional a 2, 5 y 8. Sabiendo que a la segunda le corresponde 675 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.
2 + 5 + 8 = 15 ; cantidad de dinero x;
(5/15) · x = 675 ; x = 675·15/5 = 2025 es el total.
Al primero: (2/15)·2025 = 270
Al tercero: (8/15)·2025 = 1080

43. Una abuela reparte 100 € entre sus tres nietos de 12, 14 y 16 años de edad; proporcionalmente a sus edades. ¿Cuánto corresponde a cada uno?
12 + 14 + 16 = 42 años
(12/42)·100 = 28,57 euros

Textos Marea Verde

(14/42)·100 = 33,33 euros
(16/42)·100 = 38,09 euros

44. En un concurso se acumula puntuación de forma inversamente proporcional al número de errores. Los cuatro finalistas, con 10, 5, 2 y 1 error, deben repartirse los 2 500 puntos. ¿Cuántos puntos recibirá cada uno?

$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1+2+5+10}{10}=\frac{18}{10}$ también: 0,1 + 0,2 + 0,5 + 1,0 = 1,8 y repartimos proporcionalmente
(0,1/1,8)·22500 = 138,89 puntos
(0,2/1,8)·2500 = 277,78 puntos
(0,5/1,8)·2500 = 694,44 puntos
(1.0/1,8)·2500 = 1,388.89 puntos

45. En el testamento, el abuelo establece que quiere repartir entre sus nietos 4 500 €, de manera proporcional a sus edades, 12, 15 y 18 años, cuidando que la mayor cantidad sea para los nietos menores, ¿cuánto recibirá cada uno?

m.c.m. (12, 15, 18) = 180 ; (1/12) = (**15**/180) ; (1/15) = (**12**/180) ; (1/18) = (**10**/180)
(15/180) + (12/180) + (10/180) = (37/180)
(15/37)·4500 = 1824,32€ para el de 12 años
(12/37)·4500 = 1459,46€ para el de 15 años
(10/37)·4500 = 1216,22€ para el de 18 años.

46. Se reparte dinero inversamente proporcional a 5, 10 y 15; al menor le corresponden 3 000 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?

Al segundo le corresponden 1500 € (ya que es el doble que el menor) y al mayor 1000 € (ya que es el triple que el menor)

47. Tres hermanos ayudan al mantenimiento familiar entregando anualmente 6 000 €. Si sus edades son de 18, 20 y 25 años y las aportaciones son inversamente proporcionales a la edad, ¿cuánto aporta cada uno?

m.c.m. (18, 20, 25) = 900 ; (1/18)=(50/900) ; (1/20)=(45/900) ; (1/25)=(36/900)
(50/900)+(45/900)+(36/900)=(131/900)
(50/131)·6000 = 2290,08 euros el de 18 años
(45/131)·6000 = 2061,07 euros el de 20 años
(36/131)·6000 = 1648,85 euros el de 25 años

48. Un padre va con sus dos hijos a una feria y en la tómbola gana 50 € que los reparte de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 15 y 10 años. ¿Cuántos euros debe dar a cada uno?

m.c.m. (15, 10) = 30 ; (1/15) = (2/30) ; (1/10) = (3/30)

(2/30)+(3/30)=(5/30)

(2/5)·50 = 20 euros la de 15 años

(3/5)·50 = 30 euros la de 10 años

49. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.

Textos Marea Verde

Precio total: 3,5·4,8 + 5,20·6 = 48€
Peso total: 3,5 + 5,2 = 8,7
Precio del kg: 48/8,7 = 5,52€

50. ¿Cuántos litros de zumo de pomelo de 2,40 €/l deben mezclarse con 4 litros de zumo de naranja a 1,80 €/l para obtener una mezcla a 2,13 €/l?
(2,40·x+1,80·4)/(x+4) = 2,13 ; 2,40x+7,20 = 2,13·(x+4)
2,40x+7,20 = 2,13x+8,52 ; 0,27x+7,20 = 8,52
0,27x = 1,32 ; x = 1,32/0,27 = 4,89 l

51. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 87 g y contiene 69 g de oro puro. ¿Cuántos quilates tiene, aproximadamente, la joya anterior?
(69/87) ; 0,7931 de ley

52. Calcula el interés simple que producen 10 000 € al 3 % durante 750 días.
(10000·0,03·750)/360 = 625 €

53. ¿Qué capital hay que depositar al 1,80 % durante 6 años para obtener un interés simple de 777,6 €?

$$\frac{C\cdot 1{,}8\cdot 6}{100} = 777{,}6 \rightarrow C = \frac{77760}{1{,}8\cdot 6} = 7200$$ hay que depositar 7200€

54. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39 500 €?

100 + 5 = 105 $C = 39500 \cdot \left(\frac{105}{100}\right)^{12} = 70936{,}3€$

BY NC SA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

Litros	(x)	8,35	**4,66**	0,75	1,5	**2,66**
Euros	(y)	**25,05**	14	2,25	**4,5**	8

$\frac{2,25}{0,75} = 3$; y = 3x ;

2. Estima cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado. Ha habido una fiesta y se ha llenado completamente un local de 400 m², ¿cuántas personas estimas que han ido a esa fiesta?

Suponemos que en un metro caben 12 personas: 400·12=4800 personas

3. Cada semana pagamos 48 € en transporte. ¿Cuánto gastaremos durante el mes de febrero?

48·4 = 192 euros

4. Con 85 € hemos pagado 15 m de tela, ¿cuánto nos costarán 23 m de la misma tela?

euros	metros
85	15
x	23

$\frac{85}{x} = \frac{15}{23}$; x = 85·23 : 15 = 130,67 euros

5. Para tapizar cinco sillas he utilizado 0.6 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 10 m?

10m/0,6m por silla = 16,67 sillas

6. Un camión ha transportado en 2 viajes 300 sacos de patatas de 25 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 950 sacos de 30 kg cada uno?

300·25 = 7500 kg ha transportado en 2 viajes, en 1 viaje 7500/2 = 3750 kg por viaje
950·30 = 28500 kg quiere transportar
28500/3750 = 7,6 ; necesita 8 viajes.

7. Una edición de 400 libros de 300 páginas cada uno alcanza un peso total de 100 kg. ¿Cuántos kg pesará otra edición de 700 libros de 140 páginas cada uno?

libros	páginas	kg
400	300	100
700	140	x

BY NC SA

400·300 = 120 000 páginas ; 100/120 000 = 0,0083kg por página
700·140·0,0083 = 82,6kg

8. Sabiendo que la razón de proporcionalidad directa es k = 1.8, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Magnitud A	15,9	3,33	**0,055**	0,01	**5,55**
Magnitud B	**28,62**	6	0,1	**0,018**	10

y = 1,8x

9. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)
Descuento = 285·0,15 = 42,75 euros
285 - 42,75 = 242,25 euros
242,25·0,21 = 50,77 euros
242,25 + 50,77 = 293,02 euros

10. Por retrasarse en el pago de una deuda de 1 500 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %. ¿Cuánto tiene que devolver en total?
1500·0,12 = 180 euros
1500 + 180 = 1,680 euros

11. Si un litro de leche de 0,85 € aumenta su precio en un 12 %, ¿cuánto vale ahora?
0,85·0,12 = 0,102 euros
0,85 + 0,102 = 0,952 euros

12. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1900 € si finalmente se pagaron 1 200 €?
1900 – 1200 = 700
(700/1900)·100 = 36,84%

13. Si unas zapatillas de 60 € se rebajan un 15 %, ¿cuál es el valor final?
60·0,15 = 9 euros
60 – 9 = 51 euros

14. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?
483,60/(1 - 0,22) = 483,60/0,78 = 620 euros

15. Luis compró una camiseta que estaba rebajada un 20 % y pagó por ella 20 €. ¿Cuál era su precio original?
20/(1 - 0,20) = 20/0,80 = 25 euros

16. Por liquidar una deuda de 35 000 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 30 800 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?
((35000 – 30800)/35000)·100

Textos Marea Verde

(4200/35000)·100 = 12%

17. El precio de un viaje se anuncia a 500 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)
500/(1+(21/100)) = 500/1,21 = 413,22 euros

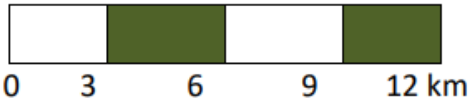
18. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 25 € y ahora se paga a 29 €?
((29-25)·100 = (4/25)·100 = 16%

19. Un balneario recibió 10 mil clientes en el mes de julio y 12 mil en agosto. ¿Cuál es el incremento porcentual de clientes de julio a agosto?
((12000-10000)/10000)·100 = (2000/10000)·100 = 20%

20. Un mapa está dibujado a escala 1:800 000. La distancia real entre dos ciudades es 200 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?
200km/800000 = 20 000 000cm/800 000 = 25cm

21. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 12 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?
12/(340·100000) = 12/34000000
Escala = 1/2 833 333,33

22. Interpreta la siguiente escala gráfica y calcula la distancia en la realidad para 21 cm.



Cada cm en la escala son 3 km en la realidad.
Entonces 21 cm corresponden a 21·3 = 63 km

23. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

Tamaño en el dibujo	Tamaño real	Escala
20 cm largo y 5 cm de ancho	**5 km largo y 1,25 km de ancho**	1:25000
10cm	15 km	**1:150 000**
1,5 cm	450m	1:30000

* 20·25000 = 500 000 cm = 5 km ; 5·25 000 = 125 000 cm = 1,25 km
* 10/1 500 000 = 1/150 000
* 450m/30 000 = 45 000cm/30 000 = 1,5 cm

24. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	8	7,5	**600**	3,5	**9**
Magnitud B	**11,25**	12	0,15	**25,71…**	10

12·7,5 = 90
8·x = 90 , x = 11,25 ; 0,15·x = 90 , x = 600 ; 3,5·x = 90 , x = 25,71… ; 10·x = 90 , x = 9 .

Textos Marea Verde

25. Determina si las siguientes magnitudes se encuentran en proporción directa, inversa o en ninguna de ellas:

a) Velocidad a la que circula un coche y espacio que recorre. Proporción directa, a mayor velocidad, se recorre mayor espacio.

b) Dinero que tienes para gastar y bolsas de almendras que puedes comprar. Proporción directa, ya que a medida que tienes más dinero, puedes comprar más bolsas de almendras.

c) Talla de zapatos y precio de los mismos. En general, no siguen una proporción directa o inversa clara, ya que el precio de los zapatos puede variar independientemente de la talla

d) Número de miembros de una familia y litros de leche que consumen. Proporción directa, generalmente, a más miembros en la familia, se consume más litros de leche.

e) Número de entradas vendidas para un concierto y dinero recaudado. Proporción directa, ya que a medida que se venden más entradas, se recauda más dinero.

f) Números de grifos que llenan una piscina y tiempo que esta tarda en llenarse. Proporción inversa, más grifos reducen el tiempo necesario para llenar la piscina.

g) Edad de una persona y estatura que tiene. En general, no siguen una proporción directa o inversa clara, ya que la estatura puede variar independientemente de la edad

h) Número de trabajadores y tiempo que tardan en hacer una valla. Proporción inversa, más trabajadores reducen el tiempo necesario para hacer la valla.

i) Edad de una persona y número de amigos que tiene. No siguen una proporción directa o inversa clara, ya que el número de amigos puede variar independientemente de la edad.

26. ¿Qué velocidad debería llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia, si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

velocidad	horas
x	4
80 km/h	5h 15 min

5+(15/60)=5,25 horas

80·5,25=420 km

420/4 = 105 km/h

27. La razón de proporcionalidad inversa entre A y B es 5. Copia en tu cuaderno y completa la tabla siguiente:

A	20	**100**	7	**0,06**	10,8
B	**0,25**	0,05	**1,4**	0,3	**2,16**

A·B = 5; 20x = 5, x = 0,25 ; 0,05x = 5, x = 100 ; 7x = 5, x = 1,4 ; 0,3x = 5, x = 0,06 ; 10,8x = 5, x = 2,16

28. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 cerdos durante 9 semanas. Si vende 60 cerdos, ¿cuántas semanas le durará el forraje? ¿Y si en lugar de vender, compra treinta cerdos? ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con los 240 cerdos?

240-60=180 cerdos ; 240+30=270 cerdos ; proporcionalidad inversa.

Textos Marea Verde

cerdos	semanas
240	9
180	x
270	y
240	z (75%)

240·9 = 2160 , 180x = 2160 , x = 2160/180 = 12 semanas
270y = 2160 , y = 2160/270 = 8 semanas
Si 1 ración dura 9 semanas, ¾ de ración dura z semanas, ¾ z = 1 · 9 , z = 4/3 · 9 = 12 semanas

29. Un granjero con 65 gallinas tiene maíz para alimentarlas 25 días. Si vende 20 gallinas, ¿Cuántos días podrá alimentar a las restantes?

gallinas	días
65	25
45	x

65 – 20 = 45
65·25=1625
1625/45=36,11 , 36 días.

30. Con 15 paquetes de 4 kg cada uno pueden comer 150 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2.7 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

gallinas	kg	paquetes
150	4	15
150	2,7	x

15·4=60kg
60/2.7=22,22 ; 23 paquetes.

31. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6	**3,6**	50
B	3	9	180	**12**	20	**6,25**

Inversamente proporcionales, 24·3 = 72 ; 8·9 = 72 ; 0,4·180 = 72 ;
6x = 72 , x = 72/6 = 12 ; 20x = 72 , x = 72/20 = 3,6 ; 50x = 72 , x = 72/50 = 1,44

32. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 20 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

8-0,5=7,5 ; 8·20 = 160 ; inversamente proporcional

Textos Marea Verde

Horas	operarios
8	20
7,5	x

160/7,5=21,33

33. En un almacén se guardan reservas de comida para 100 personas durante 20 días con 3 raciones diarias, ¿cuántos días duraría la misma comida para 75 personas con 2 raciones diarias?

personas	días	raciones
100	20	3
75	x	2

100·20·3 = 60000 raciones totales
60000/(75·2) = 400 días

34. Si 15 operarios instalan 2 500 m de valla en 7 días. ¿Cuántos días tardarán 12 operarios en instalar 5 250 m de valla?

operarios	días	metros
15	7	2500
12	x	5250

2500/7 = metros/día los 15 operarios (2500/7) / 15 = 11,9m por operario en un día
5250/11,9 = 441,18 días

35. En un concurso el premio de 168 000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?
120+78+42 = 240
(120/240)·168000 = 60 000 euros
(78/240)·168000 = 54 600 euros
(42/240)·168000 = 29 400 euros

36. Repartir 336 en partes directamente proporcionales a 160, 140, 120.
160+140+120 = 420
(160/420)·336 = 128
(140/420)·336 = 112
(120/420)·336 = 96

37. Un trabajo se paga a 3 120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

22+16+14 = 52

Textos Marea Verde

(22/52)·3 120 = 1 320
(16/52)·3 120 = 960
(14/52)·3 120 = 840

38. Repartir 4 350 en partes inversamente proporcionales a 18, 30, 45.
m.c.m. (18, 30, 45) = 90 ; 1/18 = 5/90 ; 1/30 = 3/90 ; 1/45 = 2/90.
(5/90) + (3/90) + (2/90) = 10/90
(5/10)·4 350 = 2 175 para 18
(3/10)·4 350 = 1 305 para 30
(2/10)·4 350 = 870 para 45

39. Mezclamos 3 kg de almendras a 14 €/kg, 1,5 kg de nueces a 6 €/kg, 1,75 kg de castañas 8 €/kg. Calcula el precio final de paquete de 250 g de mezcla de frutos secos.
3·14 = 42 euros

1,5·6 = 9 euros

1,75·8 = 14 euros

42+9+14 = 65 euros

3+1,5+1,75 = 6,25 kg

65/6,25 = 10,40

250 gramos = 0,25 kg , 10,40· 0,25 = 2,60 euros el paquete.

40. Calcula el precio del litro de zumo que se consigue mezclando 8 litros de zumo de piña a 2,5 €/l, 15 litros de zumo de naranja a 1,6 €/l y 5 litros de zumo de uva a 1,2 €/l. ¿A cuánto debe venderse una botella de litro y medio si se le aplica un aumento del 40 % sobre el precio de coste?
8·2,5 = 20 euros

15·1,6 = 24 euros

5·1,2 = 6 euros

20 + 24 + 6 = 50 euros

8 + 15 + 5 = 28L

50/28 = 1,79 euros el litro, medio litro 0,895

1,0 + 0,4 = 1,4 ; (1,79 + 0,895)·1,4 = 3,74 euros el litro y medio debe venderse.

41. Para conseguir un tipo de pintura se mezclan tres productos 5 kg del producto X a 18 €/kg, 19 kg del producto Y a 4,2 €/kg y 12 kg del producto Z a 8 €/kg. Calcula el precio del kg de mezcla.
5·18 = 90 euros

19·4,2 = 79,8 euros

12·8 = 96 euros

Textos Marea Verde

90 + 79,8 + 96 = 265,8 euros

5 + 19 + 12 = 36 kg

265,8/36 = 7,38 euros el kg.

42. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

157,5+20 = 177,5 euros

3 + 5 + 7 + 8 + 12 = 35 km

177,5/35 = 5,07 euros el km

3·5,07 = 15,21 euros

5·5,07 = 25,35 euros

7·5,07 = 35,49 euros

8·5,07 = 40,56 euros

12·5,07 = 60,84 euros

43. Se ha decidido penalizar a las empresas que más contaminan. Para ello se reparten 2 350 000 € para subvencionar a tres empresas que presentan un 12 %, 9 % y 15 % de grado de contaminación. ¿Cuánto recibirá cada una?

Ha de hacerse un reparto inversamente proporcional

m.cm.(12, 9, 15) = 180 ; 1/12 = 15/180 ; 1/9 = 20/180 ; 1/15 = 12/180

15 + 20 + 12 = 47

(15/47)·2 350 000 = 750 000 euros para la que contamina un 12%

(20/47)·2350000 = 1 000 000 euros para la que contamina un 9%

(12/47)·2350000 = 600 000 euros para la que contamina un 15%

44. Un lingote de oro pesa 340 g y contiene 280,5 g de oro puro. ¿Cuál es su ley?

(280,5/340)·100 = (0,825)·100 = 82,5%

45. ¿Cuántos gramos de oro contiene una joya de 0,900 de ley, que se ha formado con una aleación de 60 g de 0,950 de ley y 20 g de 0,750 de ley?

0,950·60 = 57g

0,750·20 = 15g

57 + 15 = 72g

72/0,900 = 80g

46. ¿Qué capital hay que depositar al 3,5 % de rédito en 5 años para obtener un interés simple de 810 €?

$i = \frac{C \cdot 3{,}5 \cdot 5}{100}$; $810 = \frac{C \cdot 3{,}5 \cdot 5}{100}$; $C = \frac{810 \cdot 100}{3{,}5 \cdot 5} = 4628{,}57$ €

BY NC SA

47. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25 400 € al 1,4 % en 10 años?

$i = \frac{25400 \cdot 1{,}4 \cdot 10}{100} = 3556$ C = 25 400 + 3 556 = 28 956 euros.

48. ¿Cuántos meses debe depositarse un capital de 74 500€ al 3% para obtener un interés de 2 980€?

$$i = \frac{C \cdot r \cdot t}{12 \cdot 100} \; ; \; t = \frac{12 \cdot 100 \cdot i}{C \cdot r} = \frac{12 \cdot 100 \cdot 2980}{74500 \cdot 0{,}03} = 16\, meses$$

49. Al 3% de interés compuesto, un capital se ha convertido en 63 338,5€. ¿De qué capital se trata?

Suponemos que se trata de un año.

Capital final = $C + 0{,}3 \cdot C = 1{,}03C = 63338{,}5$; $C = \frac{63338{,}5}{1{,}03} = 61493{,}69$ euros era el capital inicial.

50. En la construcción de un puente de 850 m se han utilizado 150 vigas, pero el ingeniero no está muy seguro y decide reforzar la obra añadiendo 50 vigas más. Si las vigas se colocan uniformemente a lo largo de todo el puente, ¿a qué distancia se colocarán las vigas?

850/(150+50) = 850/200 = 4,25m

51. En un colegio de primaria se convoca un concurso de ortografía en el que se dan varios premios. El total que se reparte entre los premiados es 500 €. Los alumnos que no han cometido ninguna falta reciben 150 €, y el resto se distribuye de manera inversamente proporcional al número de faltas. Hay dos alumnos que no han tenido ninguna falta, uno ha tenido una falta, otro dos faltas y el último ha tenido cuatro faltas, ¿cuánto recibirá cada uno?

1/0=no cometió faltas
1/1=1
1/5=0,5
1/4=0,25
0+1+0,5+0,25=1,75
0·500=500 euros
1,75·500=875 euros
3,5·500=1750 euros
7·500=3500 euros

52. El capital inicial de un depósito asciende a 82 000 €. El tanto aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final. Puedes usar la Hoja de cálculo.

82 000·$(1{,}03)^5$ = 93 268,92 euros.

53. Un empleado desea conocer qué cantidad recibirá después de 20 años si al principio de cada uno de ellos entrega 2 000 euros. Puedes usar la Hoja de cálculo.

20·2000 = 40 000 euros recibirá

54. El ayuntamiento de una ciudad ha emitido un empréstito de 300 000 €, que abona al 6 % de interés compuesto, *está incompleto.*

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	**10**	**0,25**		**0,1**	**100**
B		**50**	**5**		

a) 2000; 0,025; 20; 20000 **b) 2000; 0,25; 2; 20000** **c) 1000; 0,025; 10; 10000**

Constante: 50/0,25 = 200

x/10 = 200, x = 2000 ; 5/x = 200 , x = 0,025 ; x/0,1 = 200 , x = 20 ; x/100 = 100 , x = 20000

Respuesta: a)

2. Con 500 € pagamos los gastos de gas durante 10 meses. En 36 meses pagaremos:

a) 2 000 € **b) 1 900 €** **c) 1 800 €** **d) 1 500 €**

500/10 = 50 ; 50·36 = 1 800

3. Un artículo que costaba 2000 € se ha rebajado a 1750 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 10 % **b) 12,5 %** **c) 15,625 %** **d) 11,75 %**

(2000 – 1750)/ 2000 = 0,125 ; 0,125·100 = 12,5%

4. Para envasar 510 litros de agua utilizamos botellas de litro y medio. ¿Cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 590 botellas **b) 700 botellas** **c) 650 botellas** **d) 680 botellas**

510:(3/4) = 680

5. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad inversa son:

A	**5,5**	**10**		**11**	
B	**20**		**0,5**		**0,1**

a) 40; 200; 11,5; 1000 **b) 11; 200; 20; 300** **c) 11; 220; 10; 1100** **d) 40; 220; 10; 500**

Constante: 20·5,5 = 110

10x = 110 , x = 11 ; 0,5x = 110 , x = 220 ; 11x = 110 , x = 10 ; 0,1x = 110 , x = 1 100

Respuesta: c)

6. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibido 30 toneladas, la segunda es de 12 ha y la tercera de 10 ha recibirá:

a) 24 t y 20 t **b) 20 t y 24 t** **c) 24 t y 18 t** **d) 25 t y 20 t**

15 + 12 + 10 = 37

(15/37) · x = 30 , x = 74 , la cosecha es de 74 t

(12/37) · 74 = 24 t ; (10/37) · 74 = 20 t

7. La escala a la que se ha dibujado un mapa en el que 2,7 cm equivalen a 0,81 km es:

a) 1 : 34000 **b) 1 : 3000** **c) 1 : 30000** **d) 1 : 300**

0,81 km = 81 000 ; 81 000/2,7 = 30 000

BY NC SA

8. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos **b) 5 rollos** **c) 4 rollos** **d) 2 rollos**

$4 \cdot 5 = 20$ m en total ; $20/32 = 0{,}625$ m por libro

$0{,}625 \cdot 16 = 10$ m necesitamos ; $10/2 = 5$ rollos

9. El precio final del kg de mezcla de 5 kg de harina clase A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg clase B a 0,85 €/kg y 4 kg clase C a 1 €/kg es:

a) 1,12€ **b) 0,98 €** **c) 1,03€** **d) 1,049€**

$5 \cdot 1{,}2 = 6$ €

$2{,}8 \cdot 0{,}85 = 2{,}38$ €

$4 \cdot 1 = 4$ €

Total $6 + 2{,}38 + 4 = 12{,}38$ €

$5 + 2{,}8 + 4 = 11{,}8$ kg

$12{,}38 / 11{,}8 = 1{,}049$ €/kg

10. La ley de una aleación es 0,855. Si el peso de la joya es 304 g, la cantidad de metal precioso es:

a) 259,92 g **b) 255,4 g** **c) 248,9 g** **d) 306 g**

$304 \cdot 0{,}855 = 259{,}92$

BY NC SA

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 8: Trigonometría

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
María Peláez Ruíz y
Silvana Parra Torres
IES ATENEA, CIUDAD REAL
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SISTEMAS DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1. Expresa en radianes las siguientes medidas: 45° , 150° , 210° , 315° .

a) 45° → x = $\frac{2\pi\, rad \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} rad$

b) 150° → x = $\frac{2\pi\, rad \cdot 150}{360} = \frac{5}{6}\pi rad$

c) 210° → x = $\frac{2\pi\, rad \cdot 210}{360} = \frac{7}{6}\pi rad$

d) 315° → $x = \frac{2\pi\, rad \cdot 315}{360} = \frac{7}{4}\pi rad$

2. Expresa en grados sexagesimales: $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{8}$ radianes.

a) $\frac{2\pi}{3} rad \rightarrow x = \frac{360 \cdot \frac{2}{3}\pi\, rad}{2\pi\, rad} = 120°$

b) $\frac{\pi}{5} rad \rightarrow x = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{5} rad}{2\pi\, rad} = 36°$

c) $\frac{3\pi}{8} rad \rightarrow x = \frac{360 \cdot \frac{3\pi}{8} rad}{2\pi\, rad} = 67{,}5°$

3. Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 40° y $\frac{3}{\pi}$ radianes. Calcula en radianes lo que mide el tercer ángulo.

$\frac{\pi}{3} = \frac{360 \cdot \frac{\pi}{3} rad}{2\pi rad} = 60°$ → Si todos los triángulos miden 180° , entonces 60° + 40°=100° y 180° − 100° = 80° mide el ángulo que falta → (80° = $\frac{2\pi\, rad \cdot 80°}{360°} = \frac{4\pi}{9} rad$)

4. Un ángulo de un triángulo isósceles mide $\frac{5\pi}{6}$ radianes. Calcula en radianes la medida de los otros dos.

$$\frac{5\pi}{6} = \frac{360° \cdot \frac{5\pi}{6} rad}{2\pi\, rad} = 150°$$

180-150= 30→ dos ángulos iguales → $\frac{30}{2} = 15°$ cada ángulo→

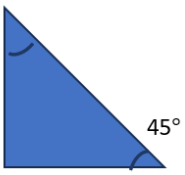
→ $15° = \frac{2\pi\, rad \cdot 15}{360} = \frac{\pi}{12} rad \rightarrow$ los dos ángulos restantes.

Solución: $\frac{5\pi}{6} rad$, $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{\pi}{12}$

5. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles y expresa en radianes la medida de cada uno de sus ángulos.

BY NC SA

Textos Marea Verde



→ En un triángulo rectángulo isósceles uno de sus ángulos mide 90° por lo que los otros dos restantes miden 45° cada uno;

$90° = \frac{2\pi\, rad \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2} rad \rightarrow$ el ángulo recto

$45° = \frac{2\pi\, rad \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{4} rad \rightarrow$ los otros dos ángulos

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

6. Sabiendo que $cos \propto = \frac{1}{3}$, calcula las razones trigonométricas secante, cosecante y cotangente de $\propto$.

$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \rightarrow sen^2 \propto + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow sen^2 \propto = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow$ sen$\propto = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

tg$\propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3}{3 \cdot 1} = 2\sqrt{2}$

Soluciones:

sec$\propto = \frac{1}{cos \propto} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

cosec$\propto = \frac{1}{sen \propto} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2^2}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

cotg$\propto = \frac{1}{tg \propto} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

7. Si cotg $\propto$ = 2, calcula las cinco razones trigonométricas del ángulo $\propto$.

$cosec^2 \propto = 1 + cotg^2 \propto \rightarrow cosec^2 \propto = 1 + (2)^2 = 5 \rightarrow$ cosec$\propto = \sqrt{5}$

sen$\propto = \frac{1}{cosec \propto} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

tg$\propto = \frac{1}{cotg \propto} = \frac{1}{2}$

$sec^2 \alpha = 1 + tg^2 \propto = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow sec \propto = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$cos \propto = \frac{1}{sec \propto} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

8. Demuestra que $cosec^2 \propto = 1 + cotan^2 \propto$

A partir de: $sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$ dividimos toda la expresión entre $sen^2 \propto$

$\frac{sen^2 \propto}{sen^2 \propto} + \frac{cos^2 \propto}{sen^2 \propto} = \frac{1}{sen^2 \propto} \rightarrow 1 + cotg^2 \propto = cosec^2 \propto$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA

9. Sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo el seno, el coseno y tangente de los siguientes ángulos:

BY NC SA

Textos Marea Verde

ÁNGULO	CUADRANTE	SENO	COSENO	TANGENTE
165°	Segundo	Sen15°	-Cos15°	-Tg15°
-230°	Segundo	Sen50°	-Cos50°	-Tg50°
315°	Cuarto	-Sen45°	Cos45°	-Tg45°
3625°	primero	Sen25°	Cos25°	Tg25°

10. Utiliza la calculadora y lo aprendido en este epígrafe para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360° cuyo seno es de 0.4.

$arcosen(0{,}4) = 23° 58´$

$180° - 23° 58´ = 156° 25´$

11.Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360° cuya tangente vale 2.

$arcotan2 = 63° 26´ 5´´$

$360° - 63° 26´ 5´ = -296° 33´ 55´´$

$180° - 63° 26´ 5´´ = -116° 33´ 55´´$

12. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360° y 720° cuyo coseno vale 0.5.

$arcos(0{,}5) = 60° \rightarrow 360° + 60° = 420°$

$720° - 60° = 660°$

4. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

13. Calcula la longitud del lado a de un triángulo, sabiendo que C = 25°, b = 7 cm y c = 4 cm.

$$\frac{c}{senC} = \frac{b}{senB};\ \frac{4}{sen25°} = \frac{7}{senB} \rightarrow senB = \frac{7(sen25°)}{4} = 0{,}7395$$

$arcosen(0{,}7395) = 47° 41´ 19´´$ $\qquad B = 47° 41´ 19´´$

$25° + 47°\ 41´ 19´´ = 72°\ 41´ 19´´ \rightarrow 180° - 72°\ 41´ 19´´ = 107°\ 18´ 41´´$ $\qquad A = 107°\ 18´ 41´´$

$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$; $\frac{a}{sen107°\ 18´ 41´´} = \frac{7}{sen47° 41´ 19´´}$; $\boldsymbol{a = \frac{sen(107°\ 18´ 41´´)7}{sen(47°\ 41´ 49´´)}}$ **= 9,035cm**

14. Calcula los ángulos del triángulo de lados: a = 6, b = 8 y c = 5.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cosA$

$$A = arcos\frac{8^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = arcos(0{,}6625) = 48°\ 30´ 33´´$$

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \rightarrow senB = \frac{senA \cdot b}{a} = 0{,}9987 \rightarrow arcosen(0{,}9987) = 87°\ 4´ 41´´$$

$ángulo\ C \rightarrow 48°\ 30´ 33´´ + 87°\ 4´ 41´´ = 135°\ 35´ 14´´$

$\hat{C} = 180° - 135°\ 35´ 14´´ = 44°\ 24´ 46´´$

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresa las siguientes medidas de ángulos en radianes:

a) 30° -> $x = \frac{2\pi\ rad \cdot 30°}{360°} = \frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}\pi = \frac{\pi}{6} rad$

b) 60° -> $x = \frac{2\pi\ rad \cdot 60°}{360°} = \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{3} rad$

c) 100° -> $x = \frac{2\pi\ rad \cdot 100°}{360°} = \frac{200°}{360°} = \frac{5}{9}\pi = \frac{5\pi}{9} rad$

d) 330° -> $x = \frac{2\pi\ rad \cdot 330°}{360°} = \frac{600°}{360°} = \frac{11}{6}\pi = \frac{11\pi}{6} rad$

2.¿Cuánto mide en grados sexagesimales un ángulo de 1 rad? Aproxima el resultado con grados, minutos y segundos.

$1rad \cdot \frac{180°}{\pi} = 57° 12' 58''$

3. Halla la medida en grados de los siguientes ángulos expresados en radianes:

a) π -> $\frac{360° \cdot \pi\ rad}{2\pi\ rad} = 180°$

b) $\frac{\pi}{3}$ -> $\frac{360° \cdot \frac{\pi}{3} rad}{2\pi\ rad} = 60°$

c) $\frac{5\pi}{6}$ -> $\frac{360° \cdot \frac{5\pi\ rad}{63}}{2\pi\ rad} = 150°$

d) 2π -> $\frac{360° \cdot 2\pi\ rad}{2\pi\ rad} = 360°$

4. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de :

a) 28° -> sen28°= 0,47
cos28°= 0,88
tg28°= 0,53

b) 62° -> sen62°= 0,88
cos62°= 0,47
tg62°= 1,88

¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?

Que el seno de 28° se corresponde con el coseno de 62°. Y que el seno de 62° se corresponde con el coseno de 28°

5. Halla el seno y el coseno de los ángulos B y C del dibujo. ¿Qué relación encuentras?

Lado AB->

$10^2 = 6^2 + x^2$ $\quad 100 = 36 + x^2$ $\quad x^2 = 64$ $\quad x = 8$ --> lado

$senB = \frac{cat\ op}{h} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\qquad senC = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Textos Marea Verde

$CosB = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\quad\quad$ $CosC = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

6. En un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A, si tan B = 1.2 y b = 3 cm, ¿cuánto mide c?

$tg\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow 1{,}2 = \frac{3}{c} \rightarrow c = \frac{3}{1{,}2} = 2{,}5cm$

7. Trabajando con ángulos agudos, ¿es cierto que a mayor ángulo le corresponde mayor seno? ¿Y para el coseno?

Con ángulos agudos:
-Mayor ángulo mayor seno
-Mayor ángulo menor coseno

8. Usando la calculadora halla el seno, el coseno y la tangente de 9° y 81°. ¿Encuentras alguna relación entre las razones trigonométricas de ambos ángulos?

9° → sen9°= 0,157
cos9°= 0,988
tg9°= 0,158

81°-> sen81°= 0,988
cos81°= 0,157
tg81°= 6,314

→El sen9° se corresponde con el cos81°. Y el sen81° se corresponde con el cos9°

9. Si a es un ángulo agudo y cos a = 0.1, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

a-> ángulo agudo / cos a= 0,1

$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$; $sen^2 \propto + (0{,}1)^2 = 1$; $sen^2 \propto = 1 - 0{,}01$

$sen^2 \propto = 0{,}99$; $sen \propto = \sqrt{0{,}99}$; $sen \propto = 0{,}995$

$tg \propto = \frac{sen\propto}{cos\propto}$; $tg \propto = \frac{0{,}995}{0{,}1}$; $tg \propto = 9{,}95$

10. Comprobar las relaciones trigonométricas fundamentales con 30°, 45° y 60° sin utilizar decimales ni calculadora.

	Seno	Coseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

11. Si a es un ángulo agudo y tan a = 0.4, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

Si a es un ángulo agudo y tg a = 0,4:

$sec^2 \propto = 1 + tg^2 \propto$
$sec^2 \propto = 1 + 0{,}4^2$
$sec^2 \propto = 1{,}16$
$\sec \propto = \sqrt{1{,}16} = 1{,}077$

$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$
$sen^2 \propto + 0{,}928^2 = 1$
$sen^2 \propto = 1 - 0{,}861$
$\text{sen}^2 \propto = 0{,}139 \rightarrow \text{sen} \propto = \sqrt{0{,}139} \rightarrow \text{sen} \propto = 0{,}373$

$tg \propto = 0{,}4$
$sen \propto = 0{,}37$
$cos \propto = 0{,}928$

$cotg \propto = 2{,}5$
$cosec \propto = 2{,}682$
$sec \propto = 1{,}077$

Textos Marea Verde

12. Completa en tu cuaderno el siguiente cuadro sabiendo que α es un ángulo agudo

sen∝	cos∝	tg∝
0,71	0,7	1,01
$\frac{1}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	2

$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$

$sen^2 \propto + (\mathbf{0,7})^2 = 1$

$sen^2 \propto = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$-> sen∝= $\sqrt{0{,}51} = 0{,}714$

$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{0{,}71}{0{,}7} = 1{,}014$

$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \rightarrow (\frac{1}{3})^2 + cos^2 \propto = 1 \rightarrow cos^2 \propto = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow cos \propto = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$tg \propto = 2 - cotg \propto = \frac{1}{2}$

$cosec^2 \propto = 1 + cotg^2 \propto = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow$ cosec ∝= $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

$sen \propto = \frac{1}{cosec \propto} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$sec^2 \propto = 1 + tg^2 = 1 + (2)^2 = 5 \rightarrow sec \propto = \sqrt{5}$

$cos \propto = \frac{1}{sec \propto} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

13. ¿Es rectángulo un triángulo cuyos lados miden 12, 13 y 5 cm? En caso afirmativo determina el seno, coseno y tangente de los dos ángulos agudos.

Sí es triángulo rectángulo porque cumple el teorema de Pitágoras que dice que la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir:

$h^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 13^2 = 12^2 + 5^2 \rightarrow 169 = 144 + 25 \rightarrow 169 = 169$

ángulo B:

$SenB = \frac{b}{a} = 0{,}38$

$\mathrm{CosB} = \frac{c}{a} = 0{,}92$

$\mathrm{TgB} = \frac{b}{c} = 0{,}42$

ángulo C:

$SenC = \frac{c}{a} = 0{,}92$

$CosC = \frac{b}{a} = 0{,}38$

$TgC = \frac{c}{b} = 2{,}4$

Textos Marea Verde

14. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 y 12 cm. Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos. ¿Qué amplitud tienen?

$h = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$

ángulo B:

$\text{senB} = \frac{5}{13} = 0{,}384$

$\text{cosB} = \frac{12}{13} = 0{,}923$

$\text{tgB} = \frac{5}{12} = 0{,}416$

$ángulo\ C$:

$SenC = \frac{12}{13}$

$CosC = \frac{5}{13}$

$tgC = \frac{12}{5} = 2{,}4$

15. Si α es un ángulo agudo tal que $sen \propto = \frac{1}{3}$, calcula:

i) Las restantes razones trigonométricas de α

ii) Las razones trigonométricas de 180° – α

iii) Las razones trigonométricas de 180° + α

iv) Las razones trigonométricas de 360° – α

i) $sen \propto = \frac{1}{3} \rightarrow \propto = 19° 28' 16,39''$

$$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (cos \propto)^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{9} + (cos \propto)^2 = 1 \rightarrow (cos \propto)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \rightarrow$$

$$\rightarrow cos \propto = \sqrt{\frac{8}{9}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$ii)\ segundo\ cuadrante: sen \propto = \frac{1}{3} \qquad cos \propto = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \qquad tg \propto = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$iii) tercer\ cuadrante: sen \propto = -\frac{1}{3} \qquad cos \propto = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \qquad tg \propto = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$iv) cuarto\ cuadrante: sen \propto = -\frac{1}{3} \qquad cos \propto = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad tg \propto = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

16. Sin utilizar calculadora, calcula el valor de x en los siguientes triángulos rectángulos.

<u>-primer triángulo rectángulo:</u>

$$sen45° = \frac{4}{x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{x} \longrightarrow \sqrt{2} \cdot x = 8 \longrightarrow x = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \longrightarrow \mathbf{x = 4\sqrt{2}}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

-segundo triángulo rectángulo:

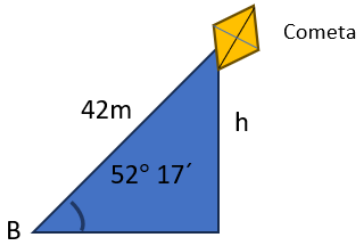
$sen60° = \frac{x}{3\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{3\sqrt{3}} \longrightarrow \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2x \longrightarrow x = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2} \longrightarrow x = \frac{9}{2}$

–tercer triángulo rectángulo:

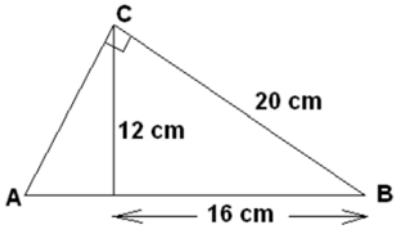
$sen \propto = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow arcoseno \frac{\sqrt{2}}{2} = 45° \longrightarrow x = 45°$

17. Beatriz sujeta una cometa con una cuerda de 42m ¿A qué altura se encuentra esta en el momento en que el cable tenso forma un ángulo de 52° 17´con el suelo?



$sen\hat{B} = \frac{h}{42} \longrightarrow h = sen\hat{B} \cdot 42 = 35{,}34m\ de\ altura$

18. Calcula el seno, coseno y tangente del ángulo A en el siguiente dibujo:



$senA = cosB = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

$\text{cosA} = \text{senB} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$\text{tgA} = \text{cotgB} \rightarrow \text{tgB} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \quad \text{cotgB} = \frac{4}{3} \qquad \text{tgA} = \frac{4}{3}$

19. Si a es un ángulo del segundo cuadrante y cos a = –0.05, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

-segundo cuadrante:

$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$

$(-0{,}05)^2 + (\text{sen} \propto)^2 = 1 \quad ; \quad (\text{sen} \propto)^2 = 1 - 0{,}0025$

Textos Marea Verde

$\text{sen} \propto = \sqrt{0{,}9975} = 0{,}999$

$\text{tg} \propto = \frac{0{,}999}{-0{,}05} = -19{,}99$

20. Si a es un ángulo obtuso y sen a = 0.4, ¿cuánto valen las otras dos razones trigonométricas?

-segundo cuadrante→$sen \propto^2 = 0{,}4$ tg $\propto$ 0? Cos $\propto$=?

$sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1$

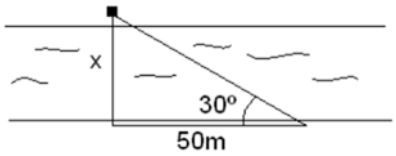
$(\cos \propto)^2 + 0{,}4^2 = 1$ $(\cos \propto)^2 + 0{,}16 = 1$ $(\cos \propto)^2 = 1 - 0{,}1616$

$\cos \propto = -\sqrt{0{,}84} \rightarrow -0{,}92$ $\text{tg} \propto = \frac{0{,}4}{-0{,}92} = -0{,}43$

21. Dibuja en tu cuaderno la tabla siguiente y sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo, el seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente de los siguientes ángulos. Si puedes, calcúlalos:

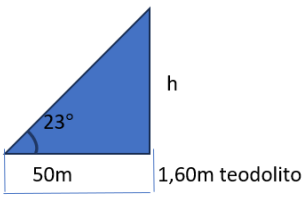
ángulo	cuadrante	seno	coseno	tangente	secante	cosecante	cotangente
-225°	2º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
150°	2º	$\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\sqrt{3}$
-60°	4º	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$
3645°	1º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

22. Calcula la anchura del río representado en la figura siguiente:



$tg30° = \frac{x}{50} \rightarrow x = 28{,}87m$

23. Averigua la altura de la torre de una iglesia si a una distancia de 80m, y medido con un teodolito de 1,60m de altura, el ángulo de elevación del pararrayos que está en lo alto de la torre es de 23 grados.



$tg23° = \frac{h}{80} \rightarrow h = tg23 \cdot 80 = 33{,}96$

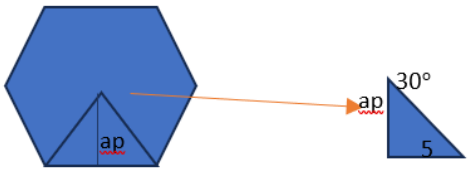
$h = 33{,}96 + 1{,}60 = 35{,}56m\ de\ altura$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

24. Halla el área de un hexágono regular de lado 10 cm

360:6 = 60

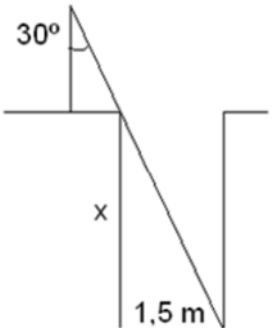


$$\text{tg}30° = \frac{5}{ap} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{ap} \longrightarrow \sqrt{3} \cdot \text{ap} = 15 \longrightarrow \text{ap} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}\ \text{cm}$$

$$A = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{60 \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3}$$

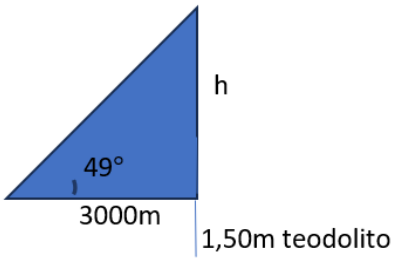
$$A = 150\sqrt{3} = 259{,}8\ cm^2$$

25.Calcula la profundidad de un pozo de 1.5 m de diámetro sabiendo el ángulo indicado en la figura de la derecha.



$$\text{tg}30° = \frac{1{,}5}{x} \rightarrow \text{x} \cdot \text{tg}30° = 1{,}5 \rightarrow \quad \text{x} = \frac{1{,}5}{tg30°} = 2{,}598 = 2{,}6\text{m}$$

26. Cuál es la altura de una montaña cuya cima, si nos situamos a una distancia de 3 000 metros del pie de su vertical y medimos con un teodolito de altura 1.50 m, presenta un ángulo de inclinación de 49°.

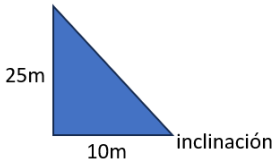


$$tg49° \cdot \frac{h}{3000} \longrightarrow h = tg49° \cdot 3000 = 3451{,}1m$$

$$3451{,}1 + 1{,}5 = 3452{,}6m\ de\ altura$$

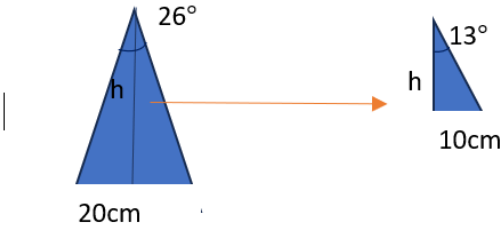
Textos Marea Verde

27.¿Cuál es el ángulo de inclinación de los rayos solares en el momento en que un bloque de pisos de 25 m de altura proyecta una sombra de 10 m de longitud?



$tg \propto = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \rightarrow arcotg\frac{5}{2} = 68° 11´54´93´´$

28. Halla la altura y el área de un triángulo isósceles cuya base mide 20 cm y cuyo ángulo desigual vale 26°.



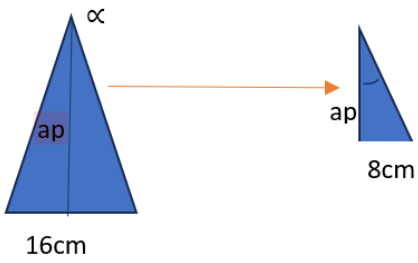
(dividimos el ángulo y la base en dos)

$tg13° = \frac{10}{h} \longrightarrow h = \frac{10}{tg13°} = 43{,}31cm$ de altura

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 43{,}31}{2} = 433{,}1cm^2 \ de \ área$$

29. Halla el área de un dodecágono regular de lado 16 cm.

$\frac{360}{12} = 30$

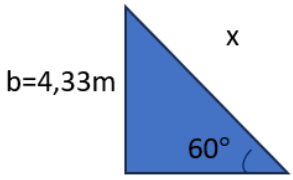


$$tg15° = \frac{8}{ap} \rightarrow ap = \frac{8}{tg15°} = 29{,}86$$

$$A = \frac{Perímetro \cdot ap}{2} = \frac{12 \cdot 6 \cdot ap}{2} 6 \cdot ap \cdot L = 6 \cdot 29{,}86 \cdot 16 = 2868{,}56$$

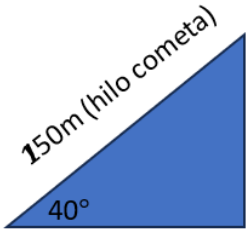
Textos Marea Verde

30. Obtener la longitud de una escalera apoyada en una pared de 4.33 m de altura que forma un ángulo de 60° con respecto al suelo



$sen60° = \frac{4,33}{x}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4,33}{x}$; $x = \frac{4,33 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 5m$

31. El hilo de una cometa totalmente extendida mide 150 m, y forma un ángulo con el suelo de 40° mientras lo sujeto a 1.5 m del suelo. ¿A qué altura del suelo está la cometa?

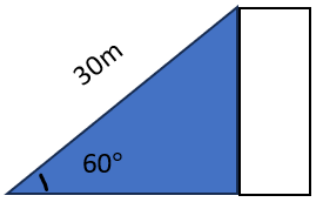


$sen40° = 0,642$

$sen40° = \frac{cat\ op}{h} \rightarrow 0,642 = \frac{x}{150} \rightarrow x = 96,3m$

$96,3 + 1,5 = 97,8m$

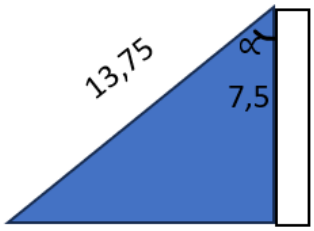
32. Para medir la altura de un campanario a cuya base no podemos acceder, tendemos una cuerda de 30 m de largo desde lo alto de la torre hasta tensarla en el suelo, formando con éste un ángulo de 60°. ¿Cuál es la altura del campanario?



$sen60° = 0,866$

$sen60° = \frac{cat\ op}{h} \rightarrow 0,866 = \frac{x}{30} \rightarrow x = 0,866 \cdot 30 = 25,98m$

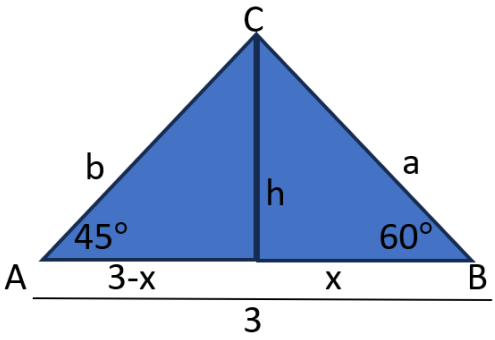
33. Obtener el ángulo que forma un poste de 7.5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13.75 m



$cos \propto = \frac{7,5}{13,75} = 0,54$; $arcos 0,54 = 57° 18' 58,9''$

Textos Marea Verde

34. Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45° y 60°. Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.



$tg60° = \frac{h}{x} \longrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \longrightarrow h = \sqrt{3}x$

$tg45° = \frac{h}{3-x} \rightarrow 1 = \frac{h}{3-x} \rightarrow h = 3 - x$

a) $3 - x = \sqrt{3}x$

$3 = \sqrt{3}\text{x} + \text{x}$; $3 = (\sqrt{3} + 1)\text{x}$

$\text{x} = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$; $\text{x} = 1{,}1\text{km}$

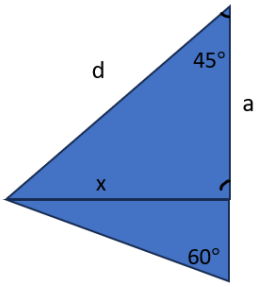
$h = 3 - x = 3 - 1{,}1 \rightarrow \boldsymbol{h = 1{,}9km}$ $\boldsymbol{(altura\ globo)}$

b) $a^2 = x^2 + h^2$

$\text{a} = \sqrt{1{,}1^2 + 1{,}9^2} = 2{,}2\text{km}$ $b = \sqrt{1{,}9^2 + 1{,}9^2} = 2{,}69\text{km}$

–Solución: un amigo dista de 2,69km del globo y el otro a 2,2km

35. Un biólogo se encuentra en el puerto de Somiedo haciendo un seguimiento de los osos pardos. Cuenta con la ayuda de un cámara y un piloto que vuelan en un helicóptero, manteniéndose a una altura constante de $40\sqrt{3}$ m. En el momento que describe la figura, el cámara ve desde el helicóptero al oso con un ángulo de depresión (ángulo que forma su visual con la horizontal marcado en el dibujo de 60°. El biólogo dirige una visual al helicóptero que forma con el suelo un ángulo de 45°. Calcular la distancia d entre el biólogo y el oso.



ángulo entre d y x 180°- 60° - 45° = 75°

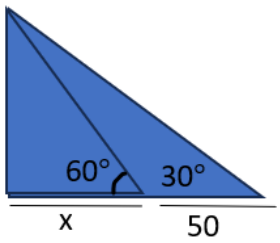
$Distancia\ entre\ el\ helicóptero\ y\ el\ oso = sen60° = \frac{40\sqrt{3}}{x} \rightarrow x = \frac{40\sqrt{3}}{sen60°} = 80\text{m}$

$distancia\ entre\ el\ helicóptero\ y\ la\ persona;\ \ sen45° = \frac{40\sqrt{3}}{d} \rightarrow d = \frac{40\sqrt{3}}{sen45°} = 97{,}98m$

Teorema del coseno $a^2 = x^2 + d^2 - 2 \cdot x \cdot d \cdot cos75°$

$a^2 = 80^2 + 97{,}98^2 - 2 \cdot 80 \cdot 97{,}98 \cdot cos75° = 1549{,}97$ $a = \sqrt{1549{,}97} = 39{,}37m$

36. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60°. Calcula la altura de la torre



$tg30° = \frac{h}{50+x} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{50+x} \longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (50+x)$

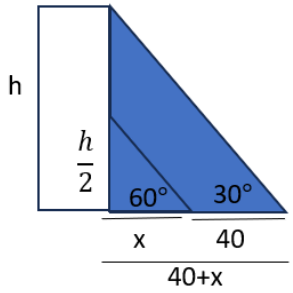
$tg60° = \frac{h}{x} \longrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x} \longrightarrow h = \sqrt{3} \cdot x$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (50+x) = \sqrt{3}x \quad ; \quad \frac{1}{3}(50+x) = x \quad ; \quad \frac{50}{3} + \frac{x}{3} = x$

$50 + x = 3x \quad ; \quad 50 = 3x - x \quad ; \quad x = \frac{50}{2} \longrightarrow x = 25m$

$h = \sqrt{3} \cdot x = 25\sqrt{3} = 43{,}4m \ \ de\ altura$

37. Con un teodolito de 1 metro de altura, dos personas pretenden medir la altura del Coliseo de Roma. Una de ellas se acerca al anfiteatro, separándose 40 m. de la otra. Esta última obtiene que el ángulo de elevación del punto más alto es de 30°. La otra no divisa el Coliseo completo por lo que mide el ángulo de elevación al punto que marca la base del tercer piso, obteniendo 60° como resultado. Calcular la altura del Coliseo y la distancia de los dos observadores a la base del mismo.



$tg30° = \frac{h}{40+x} \rightarrow h = (40+x)tg30°$

$tg60° = \frac{\frac{h}{2}}{x} \rightarrow h = (tg60° \cdot x)2$ igualando

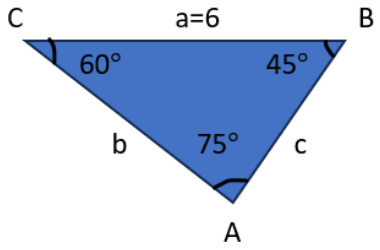
$0{,}577x + 23{,}08 = 3{,}464x$

$23{,}08 = 2{,}887x \rightarrow x = \frac{23{,}08}{2{,}887} = 7{,}99 = 8m$

$tg60° = \frac{h/2}{8} \rightarrow 1{,}73 = \frac{h/2}{8} \rightarrow \frac{h}{2} = 13{,}856 \rightarrow h = 13{,}856 \cdot 2 = 27{,}712m$

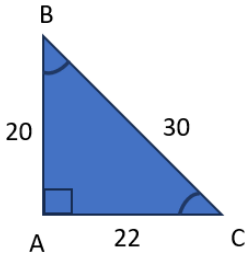
Textos Marea Verde

38. Resuelve el triángulo: a = 6; B = 45°; A = 75°



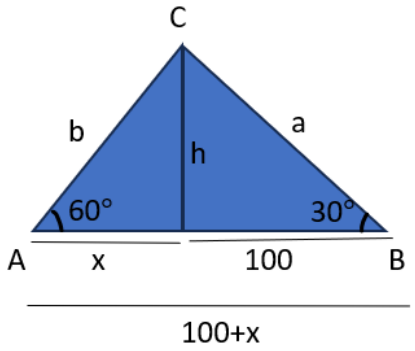
$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}\rightarrow\frac{6}{sen75°}=\frac{b}{sen45°}\rightarrow b=\frac{6(sen45°)}{sen75°}\rightarrow b=4{,}39$$
$$\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}\rightarrow\frac{4{,}39}{sen45°}=\frac{c}{sen60°}\rightarrow c=\frac{4{,}39(sen60°)}{sen45°}=5{,}38$$

39. Los padres de Pedro tienen una parcela en el campo de forma triangular cuyos lados miden 20, 22 y 30 m. Pedro quiere calcular los ángulos. ¿Cuáles son esos ángulos?



$$senB=\frac{22}{30}=0{,}73\quad;\quad B=arcsen0{,}73=47°\,9'56'$$
$$senC=\frac{20}{30}=0{,}6\quad;\quad C=arcsen0{,}6=41°\,48''\,37'13''$$
$$Ángulo\ A=47°\,9'56'+41°\,48''\,37''=88°\,58'33''\rightarrow 180°-88°\,53'\,33''=91°\,21'27''$$

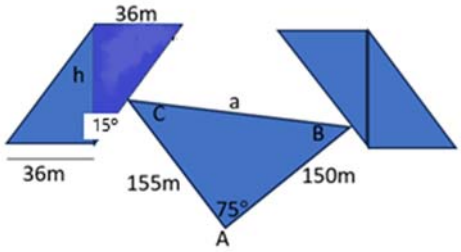
40. Estando situado a 100 m de un árbol, veo su copa bajo un ángulo de 30°. Mi amigo ve el mismo árbol bajo un ángulo de 60°. ¿A qué distancia está mi amigo del árbol?



$$tg60°=\frac{h}{x}\longrightarrow\sqrt{3}=\frac{h}{x}\longrightarrow h=\sqrt{3}\cdot x$$
$$tg30°=\frac{h}{100}\longrightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{h}{100}\longrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{3}(100)$$
$$\sqrt{3}\cdot x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 100\qquad x=\frac{100}{3}\longrightarrow x=33{,}3m\ de\ distancia$$
$$h=\frac{\sqrt{3}}{3}(100)=57{,}74\ m$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

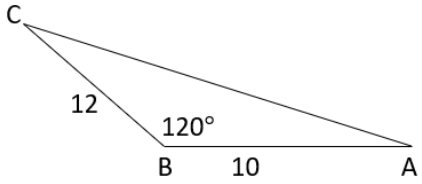
41. Las conocidas torres Kio de Madrid son dos torres gemelas que están en el Paseo de la Castellana, junto a la Plaza de Castilla. Se caracterizan por su inclinación y representan una puerta hacia Europa. a) Con los datos que aparecen en la figura, determina su altura. b) Desde dos oficinas situadas en torres distintas se han extendido dos cables hasta un mismo punto que miden 155 y 150 metros y que forman un ángulo de 75° en su punto de encuentro. ¿Qué distancia en línea recta hay entre ambas?



$a)\ tg15° = \frac{cat\ op}{cat\ cont} = \frac{36}{h} \rightarrow h = \frac{36}{tg15°} = 134{,}35m$

b) $a^2 = 155^2 + 150^2 - 2 \cdot 155 \cdot 150 \cdot cos75° = 34489{,}91 \quad a = \sqrt{34489{,}91} = 185{,}71m$

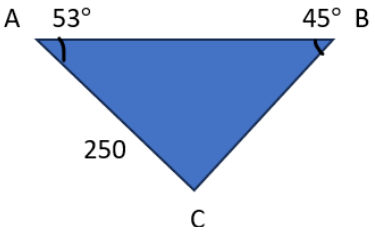
42.Tres pueblos están unidos por carreteras: AB = 10 km, BC = 12 km y el ángulo formado por AB y BC es de 120°. Cuánto distan A y C.



$AC^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot cos120° = 144 + 100 - 2 \cdot 120 \cdot (\frac{-1}{2}) = 364;$

$$AC = \sqrt{364} = 19{,}07\ km$$

43. Van a construir un túnel del punto A al punto B. Se toma como referencia una antena de telefonía (C) visible desde ambos puntos. Se mide entonces la distancia AC = 250 m. Sabiendo que el ángulo en A es de 53° y el ángulo B es de 45° calcula cuál será la longitud del túnel.

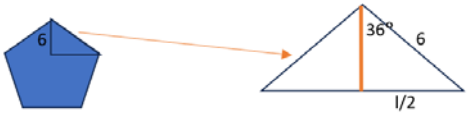


$180° - 53° - 45° = 82°$

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} \rightarrow \frac{250}{sen45°} = \frac{c}{sen82°} \rightarrow c = \frac{250(sen82°)}{sen45°} = 350{,}11m$$

Textos Marea Verde

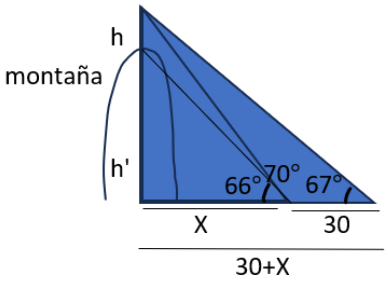
44. Calcula el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 m.



360:5 = 72, 72:2 = 36

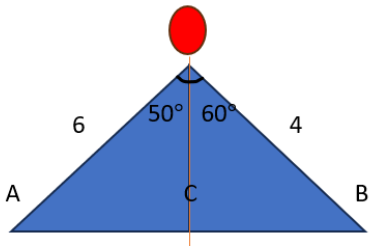
$$sen36° = \frac{\frac{l}{2}}{6} \;;\quad l = 12 \cdot sen36° = 7{,}05m$$

45. El punto más alto de un repetidor de televisión, situado en la cima de una montaña, se ve desde un punto del suelo P bajo un ángulo de 67°. Si nos acercamos a la montaña 30 m lo vemos bajo un ángulo de 70° y desde ese mismo punto vemos la cima de la montaña bajo un ángulo de 66°. Calcular la altura del repetidor.



$$tg70° = \frac{h}{x} \rightarrow h = tg70° \cdot x = 2{,}75x$$
$$tg67° = \frac{h}{30+x} \rightarrow h = tg67°(30+x) = 2{,}35x + 70{,}5$$
$$2{,}75x = 2{,}35x + 70{,}5 \rightarrow 0{,}4x = 70{,}5 \rightarrow x = \frac{70{,}5}{0{,}4} = 176{,}25$$
$$tg70° = \frac{h}{176{,}25} \rightarrow h = tg70°(176{,}25) = 484{,}24$$
$$tg66° = \frac{h'}{176{,}25} \rightarrow h' = tg66°(176{,}25) = 395{,}86$$
$$altura\ repetidor = h - h' = 484{,}24 - 395{,}86 = 88{,}38\ m$$

46. Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50°. Otro pueblo, B situado al lado y en línea recta se observa desde un ángulo de 60°. El globo se encuentra a 6 km del pueblo A y a 4 km de B. Calcula la distancia entre A y B.



$$sen50° = \frac{AC}{6} \quad ; \quad sen60° = \frac{CB}{4}$$
$$d = AC + CB = 6(sen50°) + 4(sen60°) = 8{,}06km$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

47. Utiliza la calculadora y resuelve los triángulos:
a) a = 20 m; B = 45°; C = 65°
b) c = 6 m, A = 105°, B = 35°
c) b = 40 m; c = 30 m, A = 60°.

$\boldsymbol{a})\ ángulo\ A;\ 65° + 45° = 110° \rightarrow 180° - 110° = 70°$

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{20}{sen70°} = \frac{b}{sen45°} \rightarrow b = \frac{20(sen45°)}{sen70°} = \frac{20(0{,}707)}{0{,}939} = \frac{14{,}14}{0{,}939} = 15{,}05$$

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{15{,}05}{sen45°} = \frac{c}{sen65°} \rightarrow c = \frac{15{,}05 \cdot sen65°}{sen45°} = \frac{13{,}6353}{0{,}707} = 19{,}28$$

b) $A = 105°\quad B = 35\quad C = 180° - 140° = 40°$

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen35°} = \frac{c}{sen40°} \rightarrow b = \frac{6(sen40°)}{sen35°} = \frac{3{,}85}{sen35°} = 5{,}35$$

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} \rightarrow \frac{a}{sen105°} = \frac{6{,}71}{sen35°} \rightarrow a = \frac{5{,}35(sen105°)}{sen35°} = 9{,}01$$

$\boldsymbol{c})A = 60\quad b = 40\quad c = 30$

$$a = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot cos60°} = 36{,}01$$

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \rightarrow senB = \frac{senA \cdot b}{a} = \frac{34{,}64}{36{,}01} = 0{,}961 \rightarrow arcosen0{,}961 = B = 73°\ 56´\ 44´$$

$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} \rightarrow senC = \frac{(senB)(c)}{b} = 0{,}724 \rightarrow C = arcosen(0{,}724) = 46°\ 23´\ 8´´$$

48. Dado el triángulo de vértices A, B, C, y sabiendo que A = 60°, B = 45° y que b = 20 m. Resolverlo y calcular su área.

$$\frac{a}{SenA} = \frac{b}{senB} \rightarrow \frac{a}{sen60°} = \frac{20}{sen45°} \rightarrow a = \frac{20(sen60°)}{sen45°} = 24{,}49$$

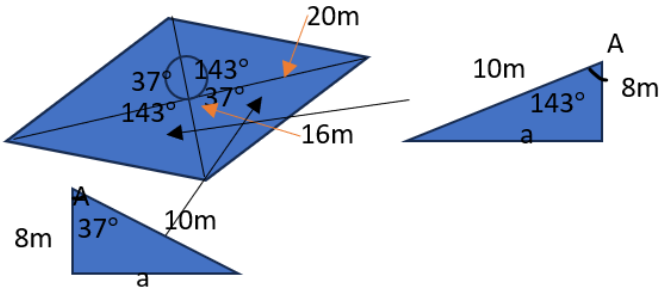
$$\frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} \rightarrow \frac{20}{sen45°} = \frac{c}{sen75°} \rightarrow c = \frac{20(sen75°)}{sen45°} = 27{,}32$$

$$senC = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot sen75° = 23{,}665$$

$$área\ triángulo = \frac{b \cdot h}{2} = 289{,}89$$

49.Calcula la longitud de los lados de un paralelogramo cuyas diagonales son de 20 y 16 m. y las diagonales forman entre sí un ángulo de 37°.

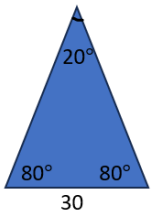
Textos Marea Verde



$a = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot cos143°} = 17{,}08$

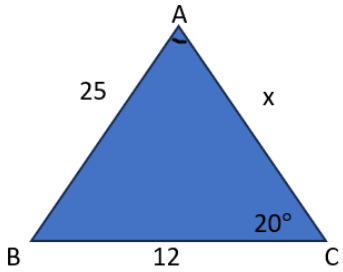
$a = \sqrt{10^2 + 8^2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot cosB \cdot 7} = 6{,}02$

50.Un triángulo isósceles con base 30 m tiene dos ángulos iguales de 80°. ¿Cuánto miden los otros do s lados?



$$\frac{30}{sen20°} = \frac{x}{sen80°} \rightarrow x = \frac{30(sen80°)}{sen20°} = 86{,}38$$

51.Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Álvaro y Bartolo hay 25 m y entre Bartolo y Cés ar, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de César es de 20°. Calcula la distancia entre Álvaro y César.



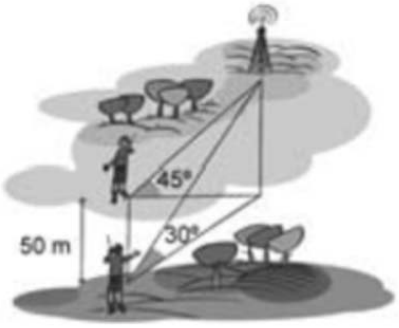
$$\frac{25}{sen20°} = \frac{12}{senA} \rightarrow senA = \frac{12(sen20°)}{25} = 0{,}1641 \rightarrow A = arcosen(0{,}1641) = 9°26'42''$$

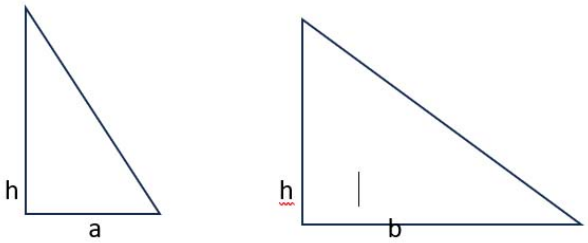
B=180° – 20° $-9°26'42''$ = $150°33'18''$

$$\frac{x}{senB} = \frac{25}{senC} \rightarrow x = \frac{(sen150°\ 33'18'')25}{sen20°} = 36{,}05m$$

52.Un hombre que está situado al oeste de una emisora de radio observa que su ángulo de elevación es de 45°. Camina 50 m hacia el sur y observa que el ángulo de elevación es ahora de 30°. Halla la altura de la antena.

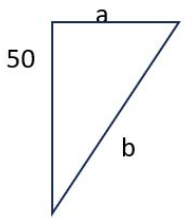
Textos Marea Verde





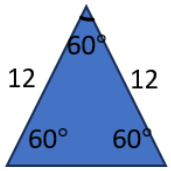
$tg45° = \frac{h}{a} \rightarrow 1 = \frac{h}{a} \rightarrow a = h$

$tg30° = \frac{h}{b} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{b} \rightarrow b = h\sqrt{3}$



$b^2 = 50^2 + a^2 \rightarrow \left(h\sqrt{3}\right)^2 = 2500 + h^2 \rightarrow 3 \cdot h^2 = 2500 + h^2 \rightarrow 2 \cdot h^2 = 2500 \rightarrow$
$\rightarrow h^2 = 1250 \rightarrow h = 25\sqrt{2} = 35{,}4m$

53.Los brazos de un compás miden 12 cm y forman un ángulo de 60°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?



Es un triángulo equilátero, por tanto, radio=12cm

54. Escribe cuatro ángulos con el mismo seno que 135°.

$sen135° = sen45°\ por\ simetría$
$1º\ cuadrante = 45° + 360° = 405°$
$2º\ cuadrante = 135° + 360° = 495°$
$3ºcuadrante = 405° + 360° = 765°$

55. Encuentra dos ángulos que tengan la tangente opuesta a la de 340°.

$\tan(340°) = -0{,}36397$
$arcotan(0{,}36397) = 20°\ 30´\ 15´´$
$180° + 20°\ 30´\ 15´´ = 200°\ 30´\ 15´´$

56. Busca dos ángulos con el mismo seno que 36° y coseno opuesto.

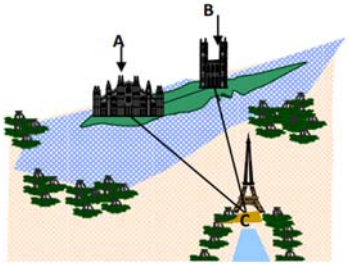
sen36° cosen op -->segundo cuadrante
$180° - 36° = 144°$
$360° + 144° = 504°$

57.¿Qué ángulos negativos, comprendidos entre –360° y 0° tienen el mismo seno que 60°?

$0°\ y - 360°\ mismo\ sen60°$
$-360° + 60° = -300°$
$-300° + 60° = -240°$

BY NC SA
Textos Marea Verde

58.En París y en l' Île de la Cité se encuentran Nôtre Dame y la Sainte Chapelle a una distancia de 200 metros. Imaginemos que un observador situado en A ve B y C con un ángulo de 56° y que otro situado en B ve A y C con un ángulo de 117°. Calcular las distancias entre la torre Eiffel (C) y Nôtre Dame (B), asi como entre la torre Eiffel (C) y la Sainte Chapelle (A).



ángulo C = 180°- 117°- 56° = 7°.

$$\frac{BC}{SenA} = \frac{AB}{senC} \rightarrow \frac{BC}{sen56°} = \frac{200}{sen7°} \rightarrow BC = \frac{200(sen56°)}{sen7°} = 1360{,}53m$$

$$\frac{AC}{SenB} = \frac{AB}{senC} \rightarrow \frac{AB}{sen117°} = \frac{200}{sen7°} \rightarrow AB = \frac{200(sen117°)}{sen7°} = 1462{,}23m$$

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1.La expresión en radianes de 65° es:

a) 1.134 rad b) 1.134π rad c) 2.268 rad d) 2.268π rad

$$65° \rightarrow x = \frac{2\pi\ rad \cdot 65°}{360°} = 1{,}134 rad$$

$$\rightarrow opción\ a)$$

2.El valor de la hipotenusa en un triángulo rectángulo con un ángulo de 25° y con uno de los catetos de 3 cm es:

a) 3.3 cm b) 7.1 cm c) 6.4 cm d) 2.2 cm

$$sen25° = \frac{3}{h} \rightarrow 0{,}423 = \frac{3}{h} \rightarrow h(0{,}423) = 3 \rightarrow h = \frac{3}{0{,}423} = 7{,}09cm$$

$$\underline{\rightarrow solución\ b)}$$

3. Si α es un ángulo agudo y senα = 0.8, la tangente de α es:

a) 0.6 b) –0.6 c) –1.33 d) 1.33

$sen \propto = 0{,}8$ ¿ $tg \propto$?

$$sen \propto^2 + cos \propto^2 = 1 \rightarrow (0{,}8)^2 + (cos \propto)^2 = 1;\ (cos \propto)^2 = 1 - 0{,}64\ ;\ cos \propto = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

$$tg \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1{,}3$$

$$\underline{\rightarrow solución\ d)}$$

4. Selecciona la opción correcta:

a) $\boldsymbol{tang\hat{A} = \frac{2}{3}}$ **significa que** $\boldsymbol{sen\hat{A} = 2}$ **y** $\boldsymbol{cos\hat{A} = 3}$

b) La secante de un ángulo siempre está comprendida entre –1 y 1

c) En el segundo y cuarto cuadrantes la tangente y cotangente de un ángulo tienen signo negativo d) El seno de un ángulo es siempre menor que su tangente.

$$\rightarrow opción\ correcta: c)$$

5. Si el seno de un ángulo del segundo cuadrante es $\frac{4}{5}$ **entonces su tangente y secante son respectivamente:**

a) $-\frac{3}{5}\ y\ -\frac{5}{3}$ **b)** $\frac{3}{5}\ y \frac{5}{3}$ **c)** $-\frac{4}{3}\ y\ -\frac{5}{3}$ **d)** $\frac{4}{3}\ y \frac{3}{4}$

$$sen \propto = \frac{4}{5} \rightarrow segundo\ cuadrante \quad tang(-) \quad \cos(-)$$

$$sen \propto^2 + cos \propto^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + cos \propto^2 = 1 \rightarrow \frac{16}{25} + cos \propto^2 = 1 \rightarrow cos \propto^2 = 1 - \frac{16}{23} = \frac{9}{23}$$

Textos Marea Verde

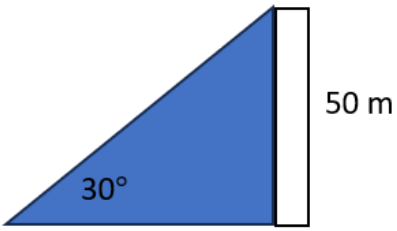
$cos\ \propto = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \rightarrow -\frac{3}{5} \rightarrow sec\ \propto = -\frac{5}{3}$

$tg\ \propto = \frac{sen\propto}{cos\propto} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$

$\rightarrow opción\ c)$

6.La altura de un edificio es de 50 m, la medida de su sombra cuando los rayos del sol tienen una inclinación de 30° con la horizontal es de:

a) 25 m b) 100 m c) 50 $\sqrt{3}$ m d) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ m



$tg30° = \frac{cat\ op}{cat\ cont}$

$tg30° = \frac{cat\ op}{cat\ cont} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{50}{x} = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{3} = 50 \rightarrow \frac{50}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 50\sqrt{3}$

$\rightarrow opción\ c)$

7.El ángulo de -420° es un ángulo que se sitúa en:

a) El primer cuadrante b) El segundo cuadrante c) El tercer cuadrante d) El cuarto cuadrante

$-420° = cuarto\ cuadrante$

$\rightarrow opción\ d)$

8. Si α es un ángulo agudo y β es su suplementario, se cumple:

a) sen α = –sen β y cos α = cos β b) sen α = sen β y cos α = – cos β

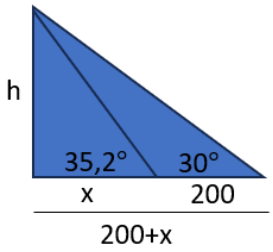
c) sen α = sen β y cos α = cos β d) sen α = –sen β y cos α = – cos β

$\rightarrow opción\ b)$

9.Para calcular la altura de una montaña se mide con un teodolito desde A el ángulo que forma la visual a la cima con la horizontal, que es $\widehat{A} = 30°$. Avanzando 200 m, se vuelve a medir y el ángulo resulta ser$\widehat{B} = 35,2$. La altura de la montaña es de:

a) 825 m b) 773 m c) 595 m d) 636 m

Textos Marea Verde



$tg30° = \frac{h}{200+x}$

$tg35{,}2° = \frac{h}{x}$

$tg35{,}2° \cdot x = tg30° \cdot x + tg30°(200)$

$0{,}705x = 0{,}377x + 115{,}47$

$0{,}128x = 115{,}47 \rightarrow x = 902{,}1$

$h = tg35{,}2° \cdot 902{,}19 = 636{,}36m$

$\rightarrow opción\ d)$

10.Si el radio de un pentágono regular es 8 cm, su área mide:

a) 305.86 cm^2 b) 340.10 cm^2 c) 275.97 cm^2 d) 152.17 cm^2

$360°:5 = 72° \cdot$

$\cos 36° = \frac{h}{8}$; $h = 8 \cdot cos36° = 6{,}47$ luego apotema a = h = 6,47

Calculamos el lado, que será el doble de "x": $sen36° = \frac{x}{8}$; $x = 8 \cdot sen36° = 4{,}7$

Luego el lado mide 2·4,7 = 9,4

$área\ pentágono = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 9{,}4 \cdot 6{,}47}{2} = 152{,}045$

$\rightarrow opción\ d)$

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 9: Geometría

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Laura Del Álamo León
IES ATENEA, CIUDAD REAL
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. **¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 12 y 16 cm y su hipotenusa 30 cm? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 16 cm.**

   No, ya que aplicando el teorema de Pitágoras ($h^2=a^2+b^2$), $30^2 \neq 12^2+16^2$; $900 \neq 400$

   $h^2=400$; $\sqrt{400}=20$.

   Para que los catetos de un triángulo rectángulo midan 12 y 16 cm, la hipotenusa debe medir 20 cm.

2. **Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:**

   a) **4 cm y 3 cm**

   $$h^2 = 4^2 + 3^2 = 25 = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

   b) **1 m y 7 m**

   $$h^2 = 1^2 + 7^2 = 50 = \sqrt{50} = 7{,}071 \text{ m}$$

   c) **2 dm y 5 dm**

   $$h^2 = 2^2 + 5^2 = 29 = \sqrt{29} = 5{,}39 \text{ dm}$$

   d) **23.5 km y 47.2 km.**

   $$h^2 = 23{,}5^2 + 47{,}2^2 = 2780{,}09 = \sqrt{2780{,}09} = 52{,}72 \text{ km}$$

3. **Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:**

   a) **8 cm y 3 cm**

   $8^2=3^2+x^2$

   $64=9+x^2$

   $x^2=64-9=55$

   $x=\sqrt{55}=7.41$ cm

   b) **15 m y 9 m**

   $15^2=9^2+x^2$

   $225=81+x^2$

   $x^2=225-81=144$

   $x=\sqrt{144}=12$ m

   c) **35 dm y 10 dm**

   $35^2=10^2+x^2$

   $1225=100+x^2$

   $x^2=1125$

   $x=\sqrt{1125}=33{,}5$ dm

   d) **21.2 km y 11.9 km**

   $21.2^2=11.9^2+x^2$

   $449.44=141.61+x^2$

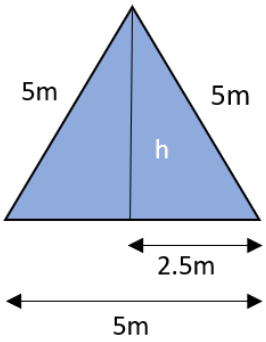
   $x^2=307.83$

   $x=\sqrt{307.83}=17{,}54$ km

4. **Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 5 m.**

BY NC SA

Textos Marea Verde



$5^2=h^2+2.5^2$

$25=h^2+6.25$

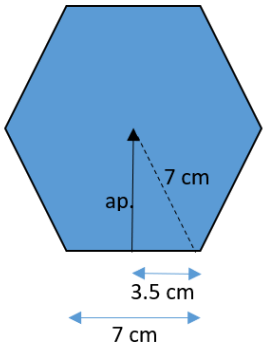
$h^2=25-6.25=18.75$

$h=\sqrt{18.75}=4.33m$

$A=\frac{base\ .\ altura}{2}$

$A=\frac{5\ .\ 4.33}{2}$ = 10.825 m

5. Calcula el área de un hexágono regular de lado 7 cm.



$7^2=3.5^2+ap^2$

$49=12.25+ap^2$

$Ap^2=49-12.25=36.75$

$Ap.=\sqrt{36.75}=6.06\ m$

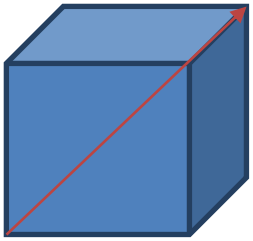
P=7 x 6 =42 m

$A=\frac{perímetro\ .\ apotema}{2}$

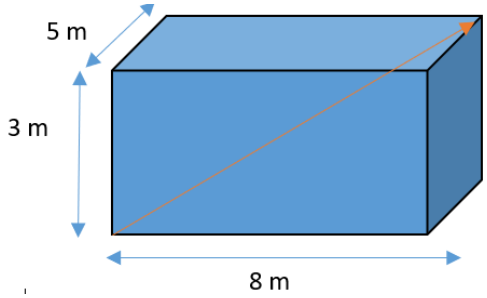
A=127, 26 m

6. Una caja tiene forma cúbica de 3 cm de arista. ¿Cuánto mide su diagonal?

$D^2=a^2+a^2+a^2$ $D^2=3^2+3^2+3^2=27$ $D=\sqrt{27}=3\cdot\sqrt{3}$ = 5.19 cm



7. Calcula la medida de la diagonal de una sala que tiene 8 metros de largo, 5 metros de ancho y 3 metros de altura.



$D^2=a^2+b^2+c^2$

$D^2=8^2+3^2+5^2$

$D^2=64+9+25=98$

$D=\sqrt{98}=9.89\ m$

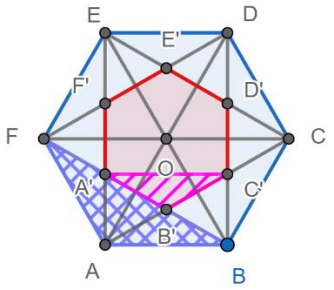
BY NC SA

8. En una foto hay un niño,que sabemos que mide 1.5 m,y un edificio. Medimos la altura del niño y del edificio en la foto, y resultan ser: 0.2 cm y 10 cm. ¿Qué altura tiene el edificio?

$\frac{0.2}{1.5} = \frac{10}{h}$

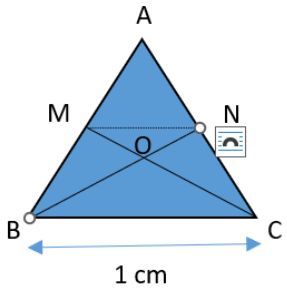
H = 1.5 · 10/0.2=75m mide el edificio

9. Se dibuja un hexágono regular. Se trazan sus diagonales y se obtiene otro hexágono regular. Indica la razón de semejanza entre los lados de ambos hexágonos.



K=$\frac{\sqrt{3}}{6}$

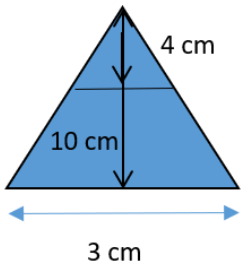
10. En un triángulo regular ABC de lado, 1 cm, trazamos los puntos medios, M y N, de dos de sus lados. Trazamos las rectas BN y CM que se cortan en un punto O. ¿Son semejantes los triángulos MON y COB?



Sí, son semejantes, ya que sus ángulos son iguales, sus lados proporcionales y sus bases paralelas

La razón de semejanza es 0.5 y el lado MN, por tanto, mide 0.5 cm

11. Una pirámide regular hexagonal de lado de la base 3 cm y altura 10 cm, se corta por un plano a una distancia de 4 cm del vértice,con lo que se obtiene una nueva pirámide. ¿Cuánto miden sus dimensiones?



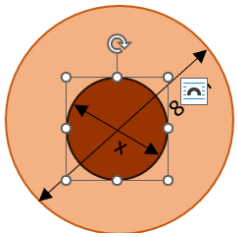
$\frac{x}{3} = \frac{4}{10}$

x=3 · 4/ 10= 1.2

El lado de la nueva base mide 1.2 cm y la altura 4 cm

12. El diámetro de un melocotón es tres veces mayor que el de su hueso, y mide 8 cm. Calcula el volumen del melocotón, suponiendo que es esférico, y el de su hueso, también esférico.

¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre el volumen del melocotón y el del hueso?



$V_{MELOCOTÓN}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(4)^3=268.08cm^3$

$V_{HUESO}=\frac{268.08}{3}=89.36\ cm^3$

$K=\frac{268.08}{8}=\frac{89.36}{\frac{8}{3}}$

13. En la pizzería tienen pizzas de varios precios: 1 €, 2 € y 3 €. Los diámetros de estas pizzas son: 15 cm,20 cm y 30 cm, ¿cuál resulta más económica? Calcula la relación entre las áreas y compárala con la relación entre los precios.

$A_1=\pi \times 15^2=706.5\ cm^2$

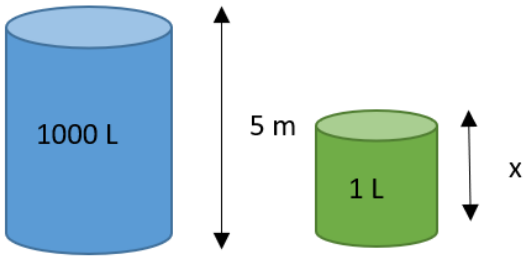
$A^2=\pi \times 20^2=1256.64cm2$

$A^3=\pi \times 30^2=2827.44cm2$

$\frac{706.5}{1}=\frac{1256.64}{2}=\frac{2827.44}{3}; 706.5\neq 628.32\neq 942.48$

Resulta más económica la de 30 cm

14. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, quere mos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura debe tener la maqueta?



$k^3=\frac{1000}{1}=1000; k=10$

$\frac{5}{x}=10; x=\frac{5}{10}=0.5$

— La maqueta debe tener 0.5 m de altura

BY NC SA

Textos Marea Verde

15. Calcula el volumen de un prisma recto de 20 dm de altura cuya base es un hexágono de 6 dm de lado.

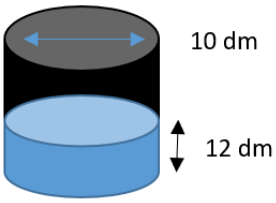
V= A_b x h

$A_b=\frac{p\ x\ ap}{2}; p = 6\ \times 6 = 36; ap = x;$ $6^2=x^2+3^2;36=x^2+9;x^2=27;x=\sqrt{27} = 5.19\ dm$

$A_b=\frac{36x5.19}{2} = 93.42\ dm^2$

V=93.42 x 20=1868.4 dm^3

16. Calcula la cantidad de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 10 cm de diámetro y que el agua alcanza 12 dm de altura.



V= Ab x h

$A_b=\pi x r^2 = \pi x 5^2 = 78.53 dm^2$

V=78.53 x 12 =942.36 dm^3/ L

Hay 942.36 litros de agua en el recipiente

17. Calcula las áreas lateral y total de un prisma hexagonal regular sabiendo que las aristas de las bases miden 3 cm y cada arista lateral 2 dm.

A_l = P_b x h

P_b=3x6=18 cm

h= 2 dm = 20 cm

A_l= 18 · 20= 360 cm^2

$A_b=\frac{p\ x\ ap}{2}; p = 18\ ; ap = x;$ $1.5^2=x^2+0{,}75^2;2.25=x^2+0.56;x^2=2.81;x=\sqrt{2.81} = 1.67\ cm$

$A_b=\frac{18x1.67}{2} = 30.06\ cm^2$

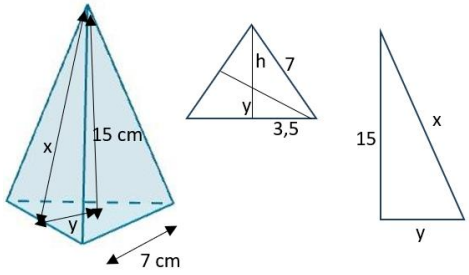
$A_T = A_L + 2 \cdot A_b$= 360 + 2. 30.06= 420.12 cm^2

18. El área lateral de un prisma regular de base cuadrada es 16 m^2 y tiene 10 m de altura. Calcula el perímetro de la base.

A_l= P_b x h

16= P_b x 10; P_b=1.6m

19. El lado de la base de una pirámide triangular regular es de 7 cm y la altura de la pirámide 15 cm. Calcula la apotema de la pirámide y su área total.



$7^2 = h^2 + 3.5^2$

BY NC SA

h^2=49 - 12.25 = 36.75

h = $\sqrt{36.75} = 6.06cm\ (altura\ base)$

y = h/3 = 6.06/3 = 2.02

$x^2 = y^2+15^2$

$x^2 = 2.02^2+15^2 = 229.08$

x = $\sqrt{229.08} = \mathbf{15.13}$ **Apotema de la pirámide**

$A_T=A_L+A_b=165.69+42.42=208.11cm^2$

$A_b = \frac{7\cdot 6.06}{2} = 21.21cm^2$

$A_L = \frac{perimetro\ de\ la\ base \cdot apotema\ de\ la\ piramide}{2} = \frac{perimetro\ de\ la\ base}{2} \cdot apotema$

$= \frac{42}{2} \cdot 15.13 = 107.73cm^2$

$A_T = A_L + A_b = 107.73 + 21.21 = 128.94cm^2$

A_T = 128.94cm²

20. Calcula el área lateral de un tronco de pirámide regular,sabiendo que sus bases son dos octógonos regulares de lados 3 y 8 dm y que la altura de cada cara lateral es de 9 dm.

$Ap^2 = 9^2 + 1.5^2 = 83.25 \Rightarrow$ Ap. = 9.12 dm

P_B=8x8=64

P_b=3x8=24

$Al = \frac{(P_B \cdot P_b)\cdot ap}{2} = \frac{(64\cdot 24)\cdot 9.12}{2} = 7004.16\ dm^2$

21. Si el área lateral de una pirámide cuadrangular regular es 104 cm² y la arista de la base mide 4 cm, calcula la apotema de la pirámide y su altura.

$A_l = \frac{perimetro\ de\ la\ base}{2} \cdot apotema; 104 = \frac{16}{2} \cdot ap; 104=8 \cdot ap; \quad ap = \frac{104}{8} = 13cm$

$13^2=h^2+2^2$

$169=h^2+4$

$169-4=h^2$

$H=\sqrt{165} = 12.84\ cm$

22. Una columna cilíndrica tiene 35 cm de diámetro y 5 m de altura. ¿Cuál es su área lateral?

5m=500cm ; 35cm diámetro=17,5cm de radio

A_L = Longitud de la base · Altura = (2π R) · h = $2\pi\cdot (17,5)\cdot(500)=54977,87144\ cm^2=549,778\ m^2$

23. El radio de la base de un cilindro es de 7 cm y la altura es el triple del diámetro. Calcula su área total.

Diámetro = 7·2 = 14cm; altura = 3·14 = 42cm

$A_t=A_L+\pi R^2+\pi R^2 = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi\cdot(7)\cdot(42)+2\pi\cdot(7)2=147.25+307,87=455,12\ cm^2$

BY NC SA

24. CalcuCla el área lateral de un cono recto sabiendo que su generatriz mide 25 dm y su radio de la base 6 dm.

$A_l = \pi RG = \pi \cdot (6) \cdot (25) = 471{,}23$ cm^2

25. La circunferencia de la base de un cono mide 6.25 m y su generatriz 12 m. Calcula el área total.

$2\pi r = 6{,}25$; $r = \frac{6{,}25}{2\pi} = 0.99$ m

$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (0.99) \cdot (12) + \pi \cdot (0{,}99)^2 = 37{,}32 + 3{,}07 = 40{,}39 m^2$

26. Una esfera tiene 4 m de radio. Calcula:

a) La longitud de la circunferencia máxima

$2\pi r = 2\pi \cdot (4) = 25{,}1$ m mide la longitud de la circunferencia máxima

b) El área de la esfera.

$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (4)2 = 201{,}06$ m^2

27. El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros.

a) ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3.14 como valor de π).

1m=10dm 2m=20dm

$V = Ab \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi (10)^2 \cdot 10 = 3140$ dm^3

b) Si el precio del gasoil es de 0.80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por lle nar el depósito?

3140 dm^3 =3140 l; 3140 – 140 3000

3000 · 0,80 =2400 € tiene que pagar la madre de Irene

28. Comprue-

ba que el volumen de la esfera de radio 4 dm sumado con el volumen de un cono del mismo rad io de la base y 8 dm de altura, coincide con el volumen de un cilindro que tiene 8 dm de altura y 4 dm de radio de la base.

Volumen cilindro = Volumen esfera + Volumen cono

Volumen esfera$= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 4^3 = 85{,}33\ \pi$ dm^3

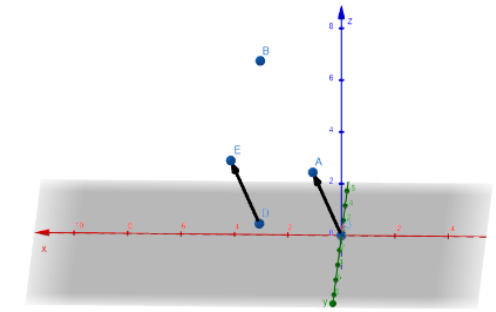
Volumen cilindro$= \pi r^2 h = \pi \cdot (4)^2 \cdot (8) = 128\ \pi$ dm^3

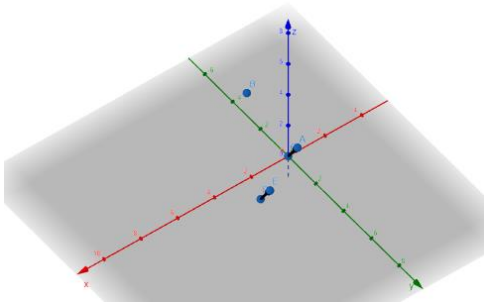
Volumen cono$= \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 4^2 8}{3} = 42{,}67\pi$ dm^3

$128\ \pi$ dm^3 = $85{,}33\ \pi$ dm^3 + $42{,}67\pi$ dm^3

29. Representa en un sistema de referencia en el espacio de dimensión tres los puntos: O(0, 0, 0), A(1, 2, 3), B(3, 1, 7), D-(3, 2, 1) y E(4, 4, 4) y vectores: DE y OA.

BY NC SA





30. El vector de componentes u = (2, 3) y origen A = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

Extremo=B

(2,3) = (B_1-1, B_2-1)

B_1-1=2; B_1=2+1=3

B_2-1=3; B_2=3+1=4

B= (3,4)

31. Calcula la distancia entre los puntos A (6, 2) y B (3, 9).

D=$\sqrt{(3-6)^2+(9-2)^2}$=$\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$

32. Calcula la distancia entre los puntos A (6, 2, 5) y B (3, 9, 7).

D=$\sqrt{(3-6)^2+(9-2)^2+(7-5)^2}=\sqrt{9+49+4}=\sqrt{62}$

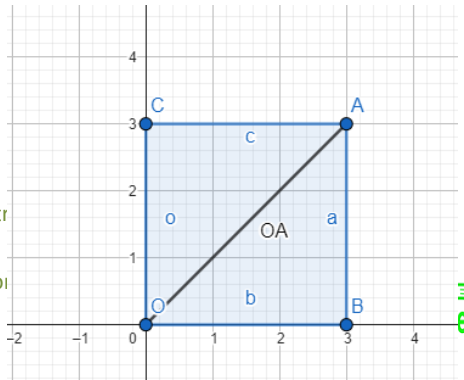
33. Calcula la longitud del vector de componentes u = (3, 4)

L=$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

34. Calcula la longitud del vector de componentes u = (3, 4, 1).

L=$\sqrt{3^2+4^2+1^2}=\sqrt{9+16+1}=\sqrt{26}$

35. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto O(0, 0) y A(3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.



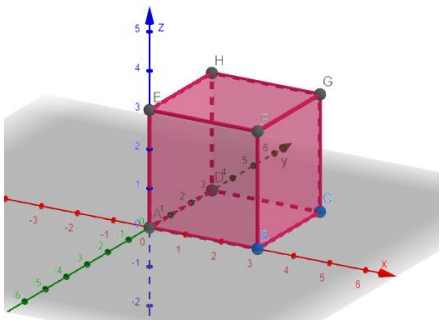
C (0,3)

B (3,0)

Longitud del lado: 3

Diagonal:$3\sqrt{2}$

36. Dibuja un cubo de diagonal O(0, 0, 0) y A(3, 3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices? Ya sabes, son 8 vértices. Calcula la longitud de la arista, de la diagonal de una cara y de la diagonal del cubo



B (3, 0, 0), C (3, 3, 0), D (0, 3, 0), E (0, 0, 3), F (3, 0, 3), G (0, 3, 3)

Arista: 3

Diagonal de una cara: $3\sqrt{2}$

Diagonal del cubo: $3\sqrt{3}$.

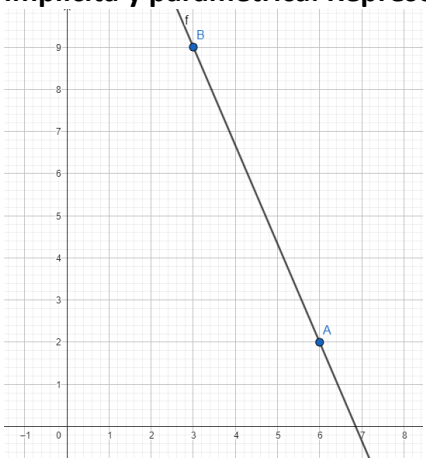
37. Sea X(x, y) un punto genérico del plano, y O(0, 0) el origen de coordenadas escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

$$D^2 = x^2 + y^2$$

38. Sea X(x,y,z)un punto genérico del espacio,y O(0,0,0) el origen de coordenadas escribe la expresión de todos los puntos X que distan de O una distancia D.

$$D^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

39. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(6, 2) y B(3, 9), de forma explícita, implícita y paramétrica. Represéntala gráficamente



EXPLÍCITA: y= mx+n =$-\frac{7}{3}x + 16$

IMPLÍCITA: ax + by + c = 0; 7x + 3y – 48 =0

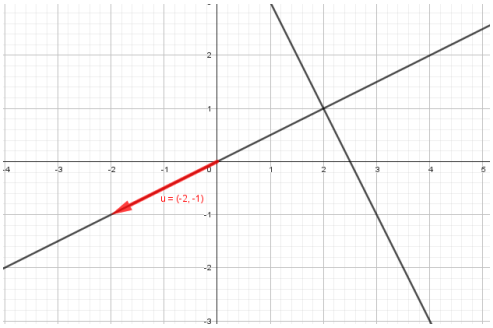
PARAMÉTRICA: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases} =$

$\begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 2 + 7t \end{cases}$

40. Representa gráficamente la recta r: –2x –y + 5 = 0. Comprueba que el vector (–2, –1) es perpendicular a la recta. Representa gráficamente la recta s: x– 2y = 0 y comprueba que es perpendicular a r.

BY NC SA

Textos Marea Verde



Recta r:
Para x=0; y=5 (0, 5)
Para y=0; x=2,5 (2.5, 0)

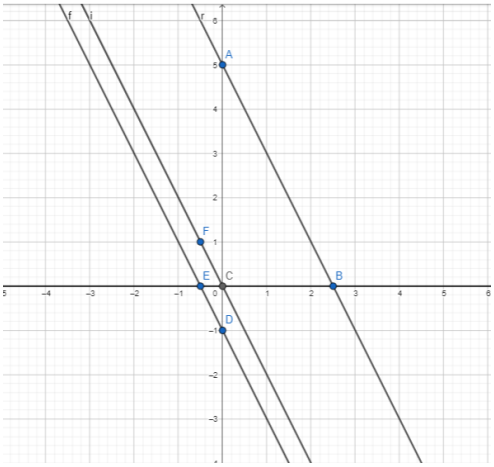
Recta s:
Para x=0; y=0 (0, 0)
Para x=2 ; y=1 (2, 1)

41. Representa gráficamente la recta r: –2x-y + 5 = 0.
Representa gráficamente las rectas: –2x – y = 0, –2x–y = 1, y comprueba que son paralelas a r.

Recta r
Puntos
Para x=0 y=5
(0,5)
Para y=0 x=2,5
(2.5,0)

Recta s
-2x-y=0
Para x=0 y=0
(0,0)
Para y=1 x= 0
(-1/2,1)

Recta t
-2x-y=1
Para x=0 y=-1
(0,-1)
Para y=0 x= -1/2
(-1/2,0)



42. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (6, 2, 5) y B (3, 9, 7), de forma explícita, y como intersección de dos planos.

EXPLÍCITA: $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{2}$

INTERSECCION DE DOS PLANOS: $\begin{cases} 7x + 3y - 48 = 0 \\ 2y - 7z + 31 = 0 \end{cases}$

43. Escribe las ecuaciones de los tres planos coordenados.

x=0, y=0, z=0

44. Escribe las ecuaciones de los tres ejes coordenados en el espacio.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

45. En el cubo de diagonal O(0, 0, 0) y A(6, 6, 6) escribe las ecuaciones de los planos que forman sus caras. Escribe las ecuaciones de todas sus aristas, y las coordenadas de sus vértices.

Caras: x = 0, y = 0, z = 0, x = 6, y = 6, z = 6.

Aristas:

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ z=6 \end{cases}, \begin{cases} y=0 \\ z=6 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} y=6 \\ z=0 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ z=6 \end{cases}, \begin{cases} y=6 \\ z=6 \end{cases}$

Vértices: A (0, 0, 0), B (6, 0, 0), C (6, 6, 0), D (0, 6, 0), E (0, 0, 6), F (6, 0, 6), G (0, 6, 6), H (6, 6, 6).

46. Escribe la ecuación del cilindro de eje, el eje OZ y radio 2.

La ecuación de un cilindro con eje OZ y radio r se puede expresar como:

$x^2 + y^2 = r^2$

En este caso r=2; $4 = x^2 + y^2$

47. Escribe la ecuación de la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 2.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

En este caso r=2; $4 = x^2 + y^2 + z^2$

48. Escribe la ecuación del cilindro de eje, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ **y radio 1**

$1 = (y - 2)^2 + (z - 3)^2$

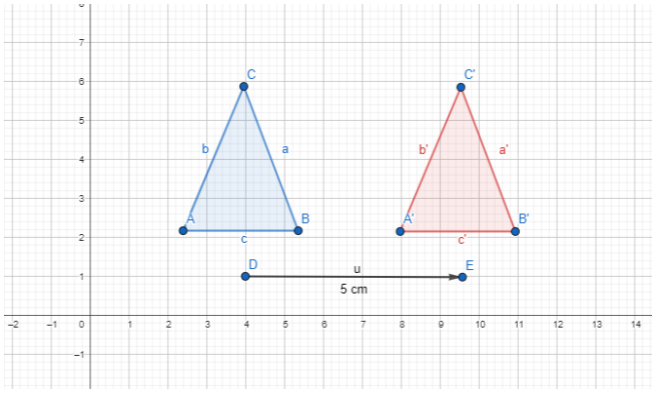
49. Escribe la ecuación de la circunferencia en el plano de centro A (2, 5) y radio 2.

$(x-h)^2+(y-k)^2=2^2$; $(x-2)^2+(y-5)^2=4$

50. Al cortar a un cierto cilindro por un plano horizontal se tiene la circunferencia del ejercicio anterior. Escribe la ecuación del cilindro.

$(x-2)^2+(y-5)^2=4$

51. Dibuja en tu cuaderno una figura y utiliza escuadra y cartabón para trasladarla 5 centímetros hacia la derecha.



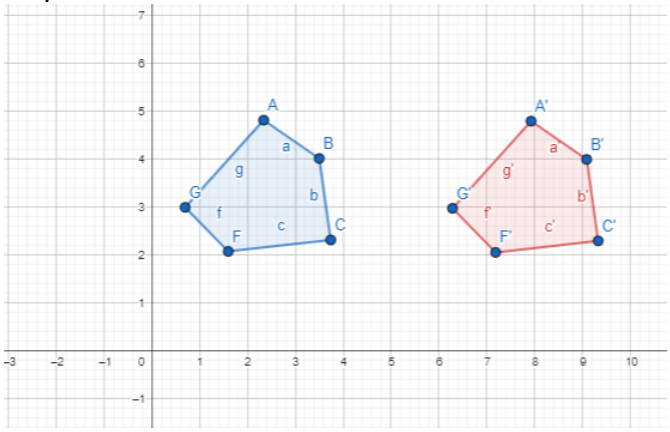
52. Dibuja en tu cuaderno una figura. (Si no se te ocurre ninguna otra, dibuja la letra G). Coloca encima un papel vegetal y cálcala. Desplaza en línea recta el papel vegetal y vuelve a calcar la figura. Las dos figuras que has obtenido, ¿tienen todas sus medidas, tanto longitudes como ángulos, iguales? Traza las rectas que unen pares de puntos co-

BY NC SA

Textos Marea Verde

rrespondientes, ¿cómo son esas rectas? ¿Qué trayectoria han seguido los puntos en el desplazamiento?

Las dos figuras tienen sus longitudes y ángulos iguales. Esas rectas son paralelas. La trayectoria ha sido libre



53. Con ayuda de papel cuadriculado transforma mediante una traslación una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

Solución manipulativa: Mediante traslación la recta se transforma en una recta, la circunferencia, el segmento y el triángulo en una circunferencia, un segmento y un triángulo igual, respectivamente. Dos rectas paralelas en dos rectas paralelas, y dos rectas perpendiculares, en dos rectas perpendiculares

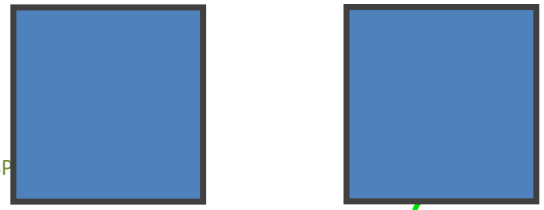
54. Observa este friso de un templo de Camboya. Es una figura que se repite por traslación. ¿Qué dirección tiene el vector de traslación? ¿De dónde a dónde iría?

Tiene dirección horizontal va de izquierda a derecha y viceversa

55. En edificación se utilizan mucho las traslaciones. Piensa en las ventanas de un edificio y elige una. ¿Puedes obtener otra distinta mediante traslación? Haz un dibujo que represente esta situación.

Sí, en un edificio las ventanas son elementos que a menudo se disponen en patrones regulares y pueden ser generados mediante traslaciones. Imaginemos una ventana rectangular como se muestra a continuación:

Supongamos que queremos obtener otra ventana diferente a partir de esta mediante una traslación. Podemos trasladar la ventana original horizontalmente para obtener una nueva ventana adyacente, manteniendo la misma forma y tamaño. El resultado sería algo como esto:



BY NC SA
Textos Marea Verde

Ambas ventanas tienen la misma forma y tamaño, pero están ubicadas en posiciones diferentes debido a la traslación horizontal. Esta es una forma común en la que se utilizan las traslaciones en edificación para crear patrones repetitivos de elementos arquitectónicos como ventanas, puertas y azulejos.

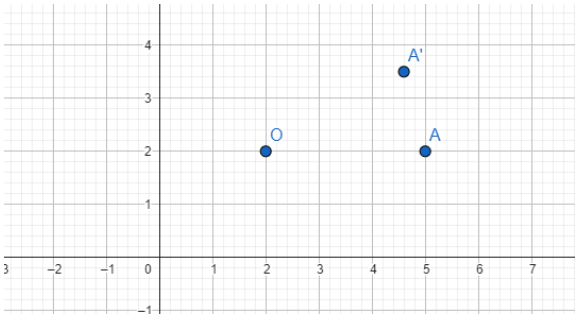
56. En la fachada de esta torre mudéjar de Teruel podemos ver distintas traslaciones. En la parte superior hay dos conjuntos de cuatro ventanitas. Uno es trasladado del otro. Y cada ventanita forma a las otras cuatro mediante una traslación. Al seguir bajando, los dos arcos se trasladan formando otros dos arcos. Observa, en este caso todas las traslaciones tienen un vector de traslación horizontal. Continúa describiendo las traslaciones que ves en el diseño de esta torre.

Hay dos ventanas rectangulares con traslación vertical, dos arcos con traslación horizontal y conjuntos de arcos con traslación vertical del conjunto.

57. Dibuja en tu cuaderno un punto O y otro punto distinto A. Gira al punto A con centro en O un ángulo de 30° en sentido positivo y denomina A' el punto girado.

1. Dibuja un punto O: Este será el centro de tu rotación.
2. Dibuja un punto A: Colócalo en cualquier lugar en el papel, distinto de O. Este será el punto que vas a rotar.
3. Usa un transportador para medir un ángulo de 30 grados: Coloca el centro del transportador en el punto O, alinea el borde horizontal del transportador con la línea que conecta O y A, y marca el punto donde el borde inclinado del transportador cruza la circunferencia del mismo. Llamemos a este punto A'.
4. Conecta O, A y A': Dibuja líneas que conecten los puntos O, A y A'.

Ahora tendrás tres puntos: O, A y A', donde A' es el resultado de rotar el punto A 30 grados en sentido positivo alrededor de O.

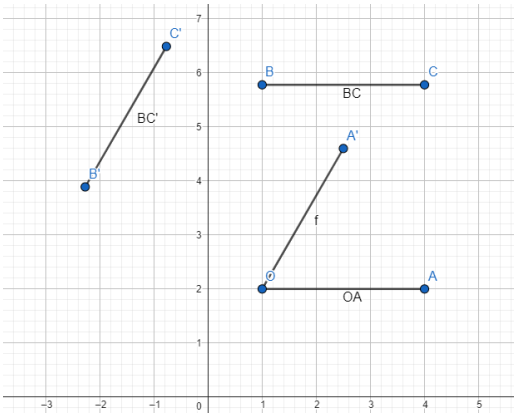


58. Dibuja en tu cuaderno un punto O y dos segmentos, uno OA que pase por O, y otro BC que no pase por O. Dibuja los segmentos girados OA' y B'C' del giro de centro O y ángulo 60°.

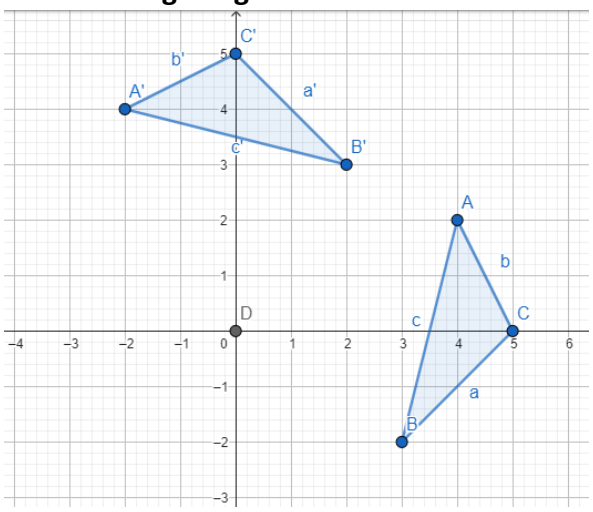
1. Dibuja un punto O en el papel.
2. Dibuja un segmento OA que pase por O: Esto significa que el extremo A del segmento debe estar en el punto O.
3. Dibuja otro segmento BC que no pase por O: Coloca el extremo B de este segmento en un lugar diferente en el papel, sin estar en O.

4. Usa un transportador para medir un ángulo de 60 grados: Coloca el centro del transportador en el punto O, alinea el borde horizontal del transportador con el segmento OA y marca el punto donde el borde inclinado del transportador cruza la circunferencia del mismo. Llamemos a este punto A'.
5. Usa el mismo ángulo de 60 grados con el transportador: Coloca el centro del transportador en el punto O, alinea el borde horizontal del transportador con el segmento BC y marca el punto donde el borde inclinado del transportador cruza la circunferencia del mismo. Llamemos a este punto B'.
6. Conecta O con A' y O con B': Dibuja líneas que conecten los puntos O, A' y B'. Estos serán los segmentos girados OA' y B'C' respectivamente.

Ahora tendrás los segmentos originales OA y BC, junto con los segmentos girados OA' y B'C' después de un giro de 60 grados alrededor del punto O.



59. Dibuja en tu cuaderno el triángulo de vértices A (4, 2), B (3, −2) y C (5, 0). Dibuja el triángulo que se obtiene al girarlo con centro en el origen de coordenadas un ángulo de 90° en sentido positivo. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices A', B' y C' del triángulo girado?



A’ (-2,4)

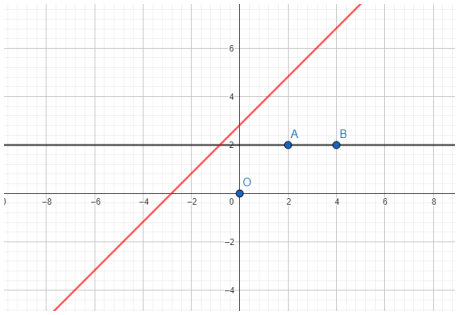
B’ (2,3)

C’ (0,5)

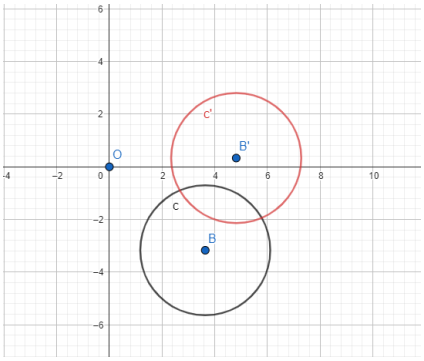
60. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante un giro, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza los resultados.

- Recta:

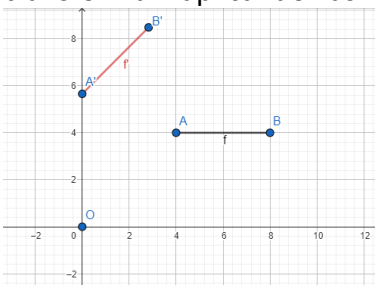
La ecuación de la recta se mantiene igual, pero los puntos en la recta se transforman aplicando las fórmulas de rotación.



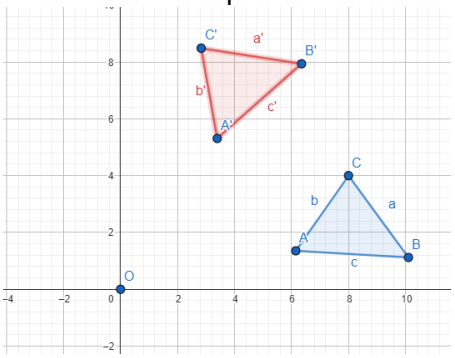
- Circunferencia:
  La circunferencia se mantiene igual, pero los puntos en la circunferencia se transforman aplicando las fórmulas de rotación.



- Segmento:
  Los puntos del segmento se transforman aplicando las fórmulas de rotación.

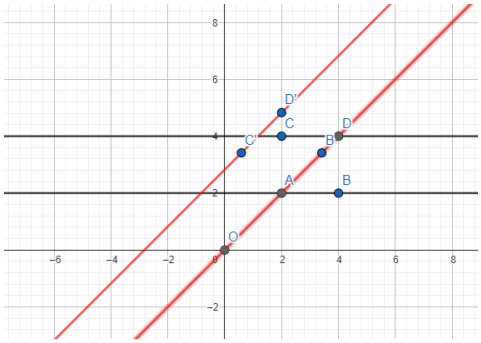


- Triángulo:
  Cada vértice del triángulo se transforma aplicando las fórmulas de rotación.



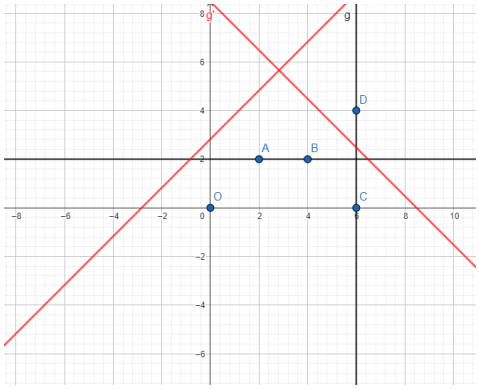
- Dos Rectas Paralelas:
  Las dos rectas paralelas se mantendrán paralelas después de la rotación, pero los puntos individuales en las rectas se transformarán.

BY NC SA



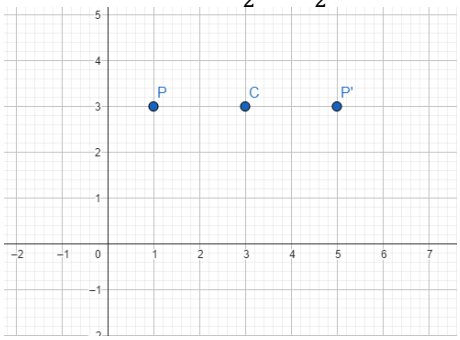
- Dos Rectas Perpendiculares:

  Las dos rectas perpendiculares se mantendrán perpendiculares después de la rotación, pero los puntos individuales en las rectas se transformarán.



61. Dibuja en tu cuaderno dos puntos cualesquiera P y P'. Encuentra su centro de simetría.

P(x, y) P'(x', y') $C(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$



62. ¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura? ¿Hay rectas invariantes? ¿Y en un giro de 180°? Las rectas que pasan por el centro de giro, ¿en qué rectas se transforman? ¿Y con un giro de 0°? ¿Y con un giro de 360°?

- Giro de 60°:

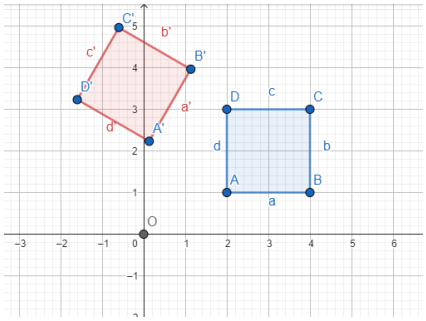
¿Qué ocurre al aplicar un giro de 60° a una figura?

La figura se rotará 60° en sentido antihorario alrededor del centro de giro.

¿Hay rectas invariantes?

Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes, lo que significa que permanecen en la misma posición después de la rotación.

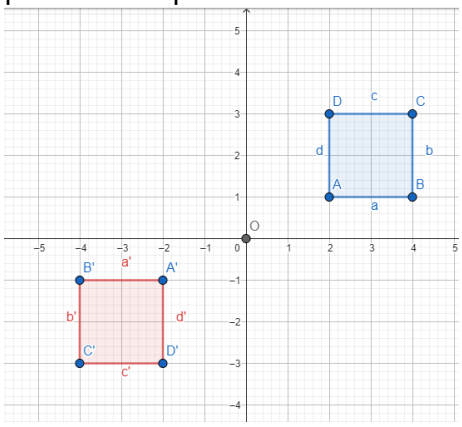
BY NC SA



- Giro de 180°:

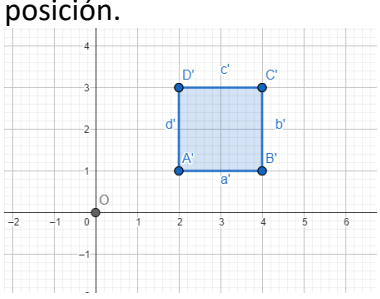
¿Qué ocurre al aplicar un giro de 180° a una figura?
La figura se invertirá, es decir, cada punto se moverá 180° alrededor del centro de giro.

¿Las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes?
Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes; permanecen en la misma posición después de la rotación.



- Giro de 0°:

¿Qué ocurre al aplicar un giro de 0° a una figura?
La figura permanece en la misma posición; no hay ningún movimiento.
¿Las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes?
Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes. En un giro de 0°, todas las líneas, incluyendo las que pasan por el centro de giro, permanecen en la misma posición.



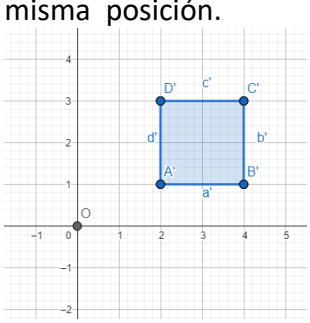
- Giro de 360°:

¿Qué ocurre al aplicar un giro de 360° a una figura?
La figura vuelve a su posición original; no hay cambio en la posición de los puntos.
¿Las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes?
Sí, las rectas que pasan por el centro de giro son invariantes. En un giro de 360°, todas las líneas, incluyendo las que pasan por el centro de giro, permanecen en la

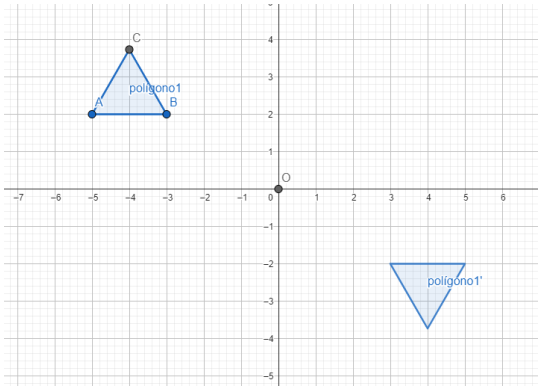
BY NC SA

Textos Marea Verde

misma posición.



63. Dibuja un triángulo ABC y su simétrico A'B'C' respecto un punto O. ¿Cómo son sus lados? ¿Son iguales? ¿Y sus ángulos? ¿Se mantiene el sentido de los ángulos? Comprueba cómo es el ángulo ABC y el ángulo A'B'C'. ¿Es un movimiento directo?



Los lados son iguales y los ángulos también, el sentido de los ángulos se mantiene y el movimiento es directo

64. Vamos a analizar las letras mayúsculas. Indica cuáles de las siguientes letras no tienen simetría central y cuáles si la tienen, indicando entonces su centro de simetría: B, H, N, O, P, S, T, X, Z. Recuerda, buscas un punto tal que la simetría central de centro ese punto deje invariante a la letra.

B= no tiene simetría central

H=tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto medio de la línea central de la letra.

N=si tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto medio de la diagonal.

O=si tiene simetría central, el centro de simetría seria el centro del circulo

P=no tiene simetría central

S=tiene simetría central, el centro de simetría seria el centro de la curva diagonal.

T=no tiene simetría central

X=tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto de corte de las diagonales

Z=tiene simetría central, el centro de simetría seria el punto medio de la diagonal

65. Escribe cinco ejemplos de objetos del espacio que giren.

tiovivo, rueda, trompo, ventilador, tambor de lavadora

66. Mediante un giro en el espacio, ¿en qué se transforma un plano? ¿Y una esfera? ¿Y un cono? ¿Y dos planos paralelos? ¿Y dos planos ortogonales? Analiza los resultados.

Plano:

Transformación por Giro: Si giras un plano en el espacio alrededor de una línea en el

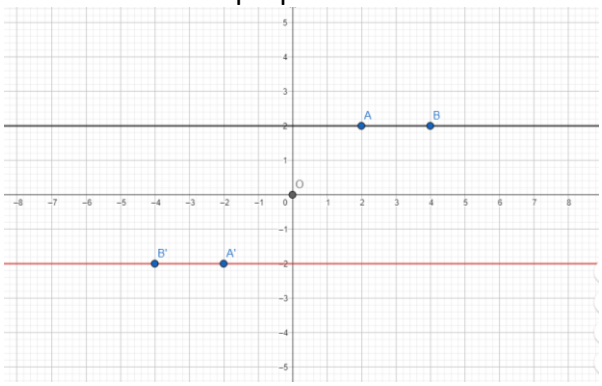
mismo plano, el plano se mantiene igual. No se transforma. Cada punto del plano gira alrededor de la línea, pero el plano en sí mismo sigue siendo el mismo.
Esfera:
Transformación por Giro: Si giras una esfera en el espacio alrededor de un eje que pasa por su centro, la esfera se mantiene igual. No se transforma. Cada punto de la esfera gira alrededor del eje, pero la esfera en sí misma permanece sin cambios.
Cono:
Transformación por Giro: Si giras un cono en el espacio alrededor de su eje central, el cono se mantiene igual. No se transforma. Cada punto del cono gira alrededor del eje, pero el cono en sí mismo sigue siendo el mismo.
Dos Planos Paralelos:
Transformación por Giro: Si giras dos planos paralelos en el espacio alrededor de una línea que es paralela a ellos, los planos se mantienen iguales. No se transforman. Cada punto de los planos gira alrededor de la línea paralela, pero los planos en sí mismos permanecen sin cambios.
Dos Planos Ortogonales (Perpendiculares):
Transformación por Giro: Si giras dos planos ortogonales en el espacio alrededor de su línea de intersección (la línea donde se cruzan), los planos se mantienen iguales. No se transforman. Cada punto de los planos gira alrededor de la línea de intersección, pero los planos en sí mismos siguen siendo los mismos.

67. Indica cuáles de las siguientes letras mayúsculas son simétricas, y si lo son, indica si sus ejes de simetría son horizontales o verticales: A, B, D, F, K, M, N, R, T, U, V, W, Z.

- Letras mayúsculas simétricas respecto a un eje vertical: A, M, T, U, V, W.
- Letras mayúsculas simétricas respecto a un eje horizontal: B, D.
- Letras mayúsculas no simétricas: F, K, N, R, Z.

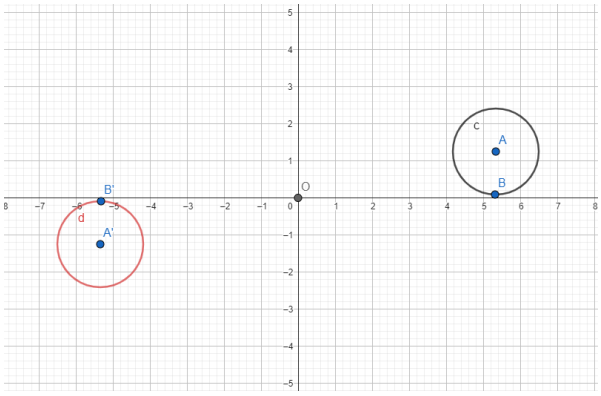
68. Con ayuda de papel cuadriculado, transforma mediante una simetría, una recta, una circunferencia, un segmento, un triángulo, dos rectas paralelas y dos rectas perpendiculares. ¿En qué se transforman? Analiza la respuesta.

Recta:
Transformación: Una recta se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a otra recta. Esto se debe a que cada punto en la recta tiene un punto correspondiente a la misma distancia perpendicular a la línea de simetría.



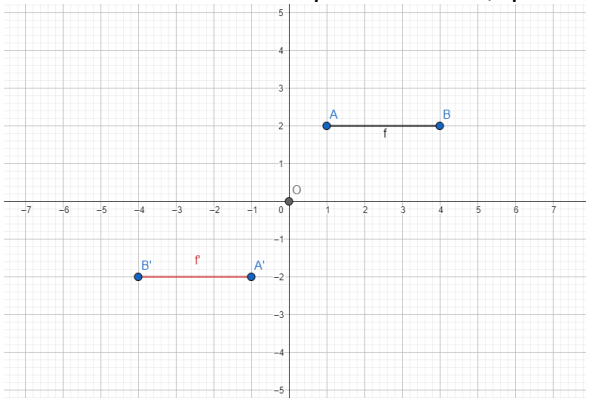
Circunferencia:
Transformación: Una circunferencia se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a su centro. Cada punto en la circunferencia tiene un punto correspondiente a la misma distancia del centro, pero en el lado opuesto.

BY NC SA
Textos Marea Verde



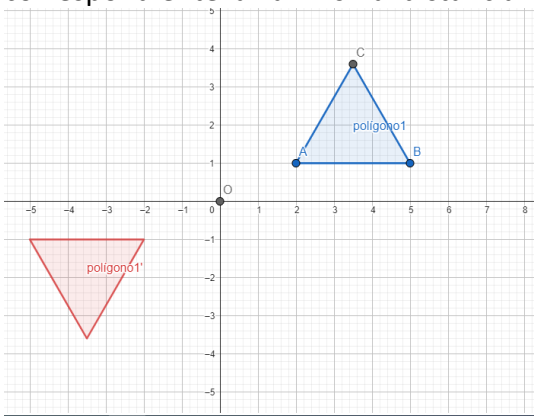
Segmento:

Transformación: Un segmento de línea se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a su punto medio. Cada punto en el segmento tiene un punto correspondiente a la misma distancia del punto medio, pero en el lado opuesto.



Triángulo:

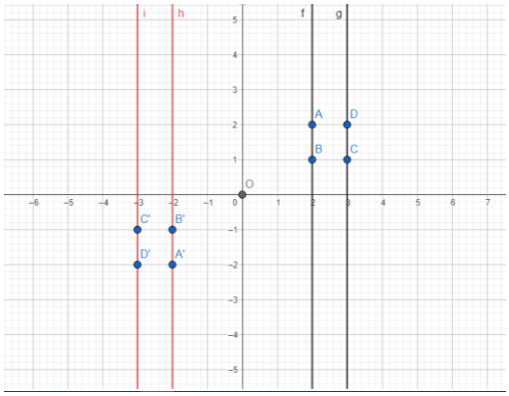
Transformación: Un triángulo se mantiene invariable al aplicar una simetría respecto a su punto de intersección de medianas (centro de). Cada punto en el triángulo tiene un punto correspondiente a la misma distancia del centro de, pero en el lado opuesto.



Dos Rectas Paralelas:

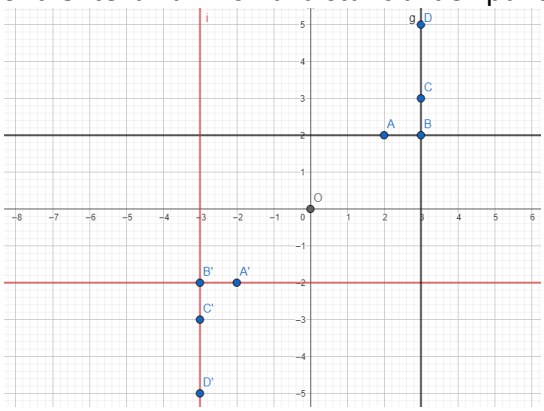
Transformación: Dos rectas paralelas se mantienen invariables al aplicar una simetría respecto a una tercera recta que sea perpendicular a ellas. Esto se debe a que cada punto en una de las rectas tiene un punto correspondiente a la misma distancia perpendicular a la línea de simetría.

BY NC SA

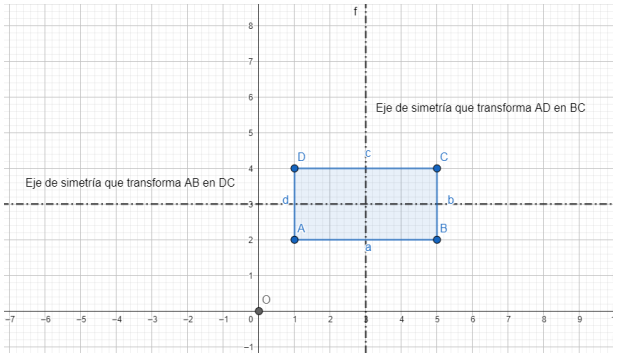


Dos Rectas Perpendiculares:

Transformación: Dos rectas perpendiculares se mantienen invariables al aplicar una simetría respecto al punto de intersección. Cada punto en una de las rectas tiene un punto correspondiente a la misma distancia del punto de intersección, pero en el lado opuesto.

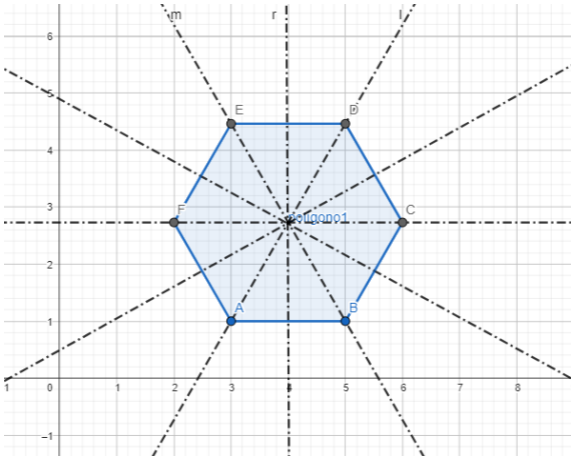


69. Dibuja un rectángulo ABCD. Dibuja el eje de simetría que transforma AB en CD, y el eje de simetría que transforma AD en BC.



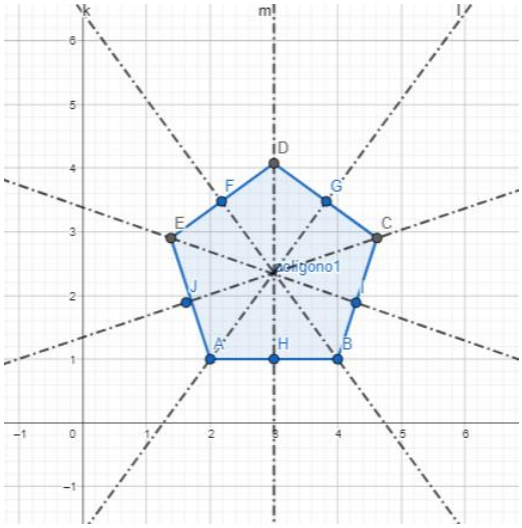
70. Dibuja un hexágono regular y dibuja sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Tiene 6. Descríbelos.

BY NC SA



Tiene 6 ejes de simetría; todo ellos pasan por el centro de la figura, 3 de ellos cortan a la figura por sus vértices y 3 de ellos van del vértice a la mitad del lado opuesto

71. Dibuja un pentágono regular y sus ejes de simetría. ¿Cuántos tiene? Descríbelos.



Tiene 5 ejes de simetría que van desde cada vértice a la mitad del lado opuesto.

72. Escribe cinco objetos que estén a tu alrededor que sean simétricos e indica su plano de simetría. Mira en el aula y busca simetrías. ¿Son simétricas las sillas, la lámpara, la ventana, las mesas...? ¿Cuál es su plano de simetría?

1.Libros:su eje de simetría es el lomo

2. reloj de pared: su eje de simetría es el centro que divide el reloj en dos partes simétricas

3.Pantallas de ordenador: suelen tener forma rectangular y el eje de simetría es el centro de dicho rectángulo

Sillas: Algunas sillas tienen simetría, el plano de simetría pasa por el centro de la silla desde la mitad del respaldo hasta la mitad del asiento quedando dos patas en cada parte de la simetría.

Lámparas; son simétricas tanto si son circulares, cuadradas o de cualquier forma geométrica regular, el plano de simetría pasa por el centro de la lámpara.

Ventanas: Las ventanas a menudo tienen simetría, especialmente si tienen un diseño regular, como ventanas rectangulares, el plano de simetría de las ventanas rectangulares pasa por el centro horizontal y verticalmente.

BY NC SA

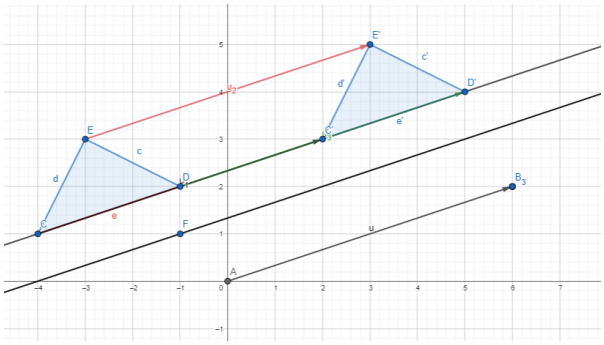
Textos Marea Verde

Mesas: las mesas tienen simetría, el plano de simetría de las mesas rectangulares pasa por el centro horizontal y verticalmente.

73. Comprueba en la ventana algebraica que:

a) Las coordenadas de los puntos C', D' y E' se obtienen respectivamente al sumar a las coordenadas de los puntos C, D, y E las coordenadas del vector u.

b) La longitud de cada lado del triángulo es la misma que la de su trasladado y las áreas de los triángulos CDE y C'D'E' coinciden



a) Las coordenadas de los puntos C', D' y E' se obtienen al sumar las coordenadas de C, D y E y el vector u

b) la longitud de los lados trasladados es igual a la de los lados originales y el área también ya que son simétricos

74. Investiga si algún punto del plano permanece invariante mediante traslaciones según diferentes vectores.

En un plano, los puntos que permanecen invariables al ser sometidos a traslaciones son aquellos que se encuentran en la línea de acción del vector de traslación.

75. ¿Cuáles son los puntos invariantes de una simetría axial? ¿Y las rectas invariantes?

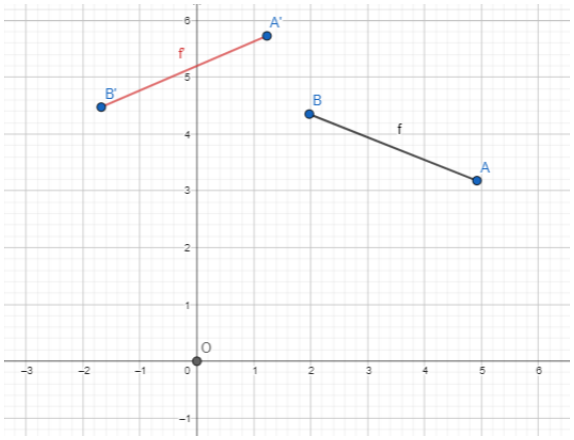
Puntos Invariantes: Los puntos que se encuentran sobre la línea de simetría son invariantes durante una simetría axial.

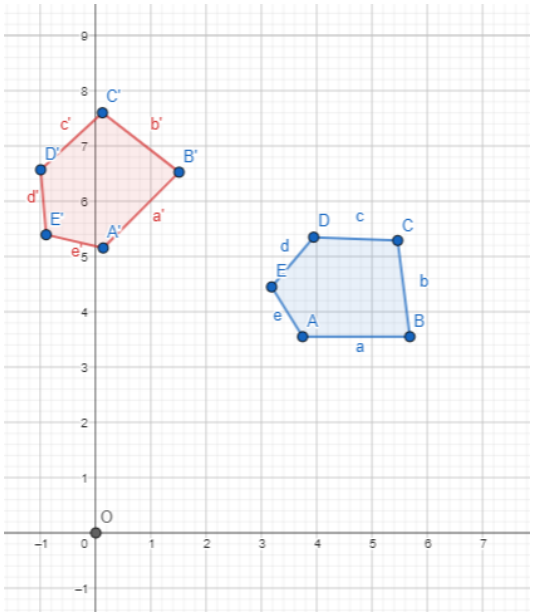
Rectas Invariantes: Las rectas perpendiculares a la línea de simetría son invariantes durante una simetría axial.

76. Utiliza la herramienta Rota objeto en torno a un punto, el ángulo indicado para estudiar los giros en el plano. Define un punto O como centro de giro, por ejemplo, el centro de coordenadas. Define tres puntos para determinar con Angulo uno de 45°.

a)Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman mediante este giro.

BY NC SA



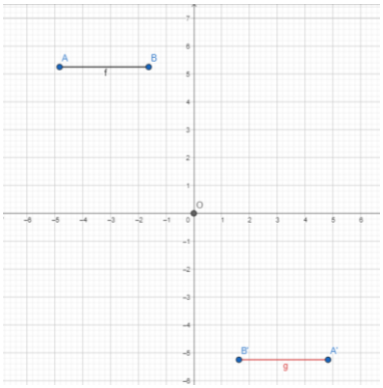


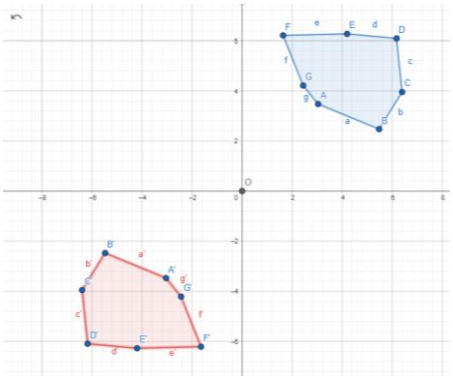
b) Investiga si al realizar un giro existen puntos y/o rectas que permanecen invariantes.

1. Puntos Invariantes:
   - Centro de Giro: El punto alrededor del cual se realiza el giro permanece invariable después de la rotación.
2. Rectas Invariantes: si el giro no es de 180º no hay rectas invariantes

77. Utiliza la herramienta Refleja objeto por punto para estudiar la simetría central. Define un punto O como centro de simetría, por ejemplo, el centro de coordenadas.

a) Dibuja rectas y polígonos y observa cómo se transforman por una simetría central.

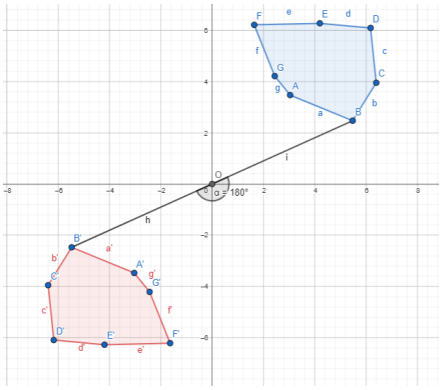




BY NC SA

Textos Marea Verde

b) Comprueba que una simetría central equivale a un giro de 180°.



c) **Investiga si en una simetría central hay puntos y/o rectas que permanecen invariantes.**

1. Puntos Invariantes:
   - Centro de Simetría: El punto alrededor del cual se realiza la simetría central permanece invariable después de la reflexión.
2. Rectas Invariantes:
   - Rectas que Pasan por el Centro de Simetría: Cualquier recta que pase por el centro de simetría se mantiene invariable después de la reflexión. Los puntos en esta recta conservan su posición.

BY NC SA

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Teorema de Pitágoras y teorema de Tales

1. **Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 cm.**

$$\frac{7^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = 40{,}42 \ cm^3$$

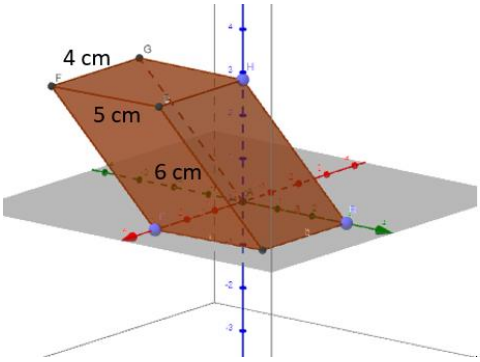
2. **Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 m.**

$$D^2 = 1^2 + 1^2; \quad D = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} cm$$

3. **Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 cm y altura 6 cm.**

$$D^2 = 15^2 + 6^2; \quad D = \sqrt{225+36} = \sqrt{261} = 16{,}15 \ cm$$

4. **Dibuja un paralelepípedo cuyas aristas midan 4 cm, 5 cm y 6 cm que no sea un ortoedro. Dibuja también su desarrollo.**



5. **Si el paralelepípedo anterior fuera un ortoedro, ¿cuánto mediría su diagonal?**

$$D^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2; \quad D = \sqrt{77} = 8{,}8 \ cm$$

6. **Un vaso de 11 cm de altura tiene forma de tronco de cono en el que los radios de las bases son de 5 y 3 cm. ¿Cuánto ha de medir como mínimo una cucharilla para que sobresalga del vaso por lo menos 2 cm?**

$$2 + \sqrt{185} = 15{,}81 \ cm$$

7. **¿Es posible guardar en una caja con forma de ortoedro de aristas 4 cm, 3 cm y 12 cm un bolígrafo de 13 cm de longitud?**

$$D^2 = 4^2 + 3^2 + 12^2; \quad D = \sqrt{169} = 13 \ cm$$

Sí, se podría guardar, pero un bolígrafo de mayor longitud no.

8. **Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 cm y la altura del prisma 8 cm.**

$$D^2 = 6^2 + 6^2 + 8^2; \quad D = \sqrt{136} = 11{,}66 \ cm$$

9. **Si un ascensor mide 1.2 m de ancho, 1.6 m de largo y 2.3 m de altura, ¿es posible introducir en él una escalera de 3 m de altura?**

BY NC SA

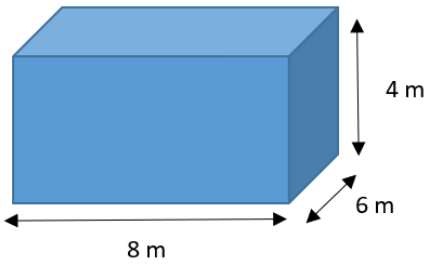
Textos Marea Verde

$$D^2 = 1{,}2^2 + 1{,}6^2 + 2{,}3^2; \quad D = \sqrt{9{,}29} = 3{,}04\ m$$

Si es posible ya que la diagonal mide más de 3 m

10. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 m de ancho, 8 m de largo y 4 m de altura?

$$D^2 = 6^2 + 8^2 + 4^2; \quad D = \sqrt{116} = 10{,}77\ m$$



11. Calcula la longitud de la arista de un cubo sabiendo que su diagonal mide 3.46 cm.

$$D = \sqrt{3} \cdot longitud\ \ arista; longitud\ \ arista = \frac{3{,}46}{3} \cong 2\ \ cm$$

12. Calcula la distancia máxima entre dos puntos de un tronco de cono cuyas bases tienen radios 5 cm y 2 cm, y altura 10 cm.

$$D = \sqrt{(5+2)^2 + 10^2} = 12{,}2\ \ cm$$

13. En una pizzería la pizza de 15 cm de diámetro vale 2€ y la de 40 cm vale 5€. ¿Cuál tiene mejor precio?

$$PIZZA\ \ 1 = \frac{15^2\pi}{2} = \frac{225\pi}{2} = 353{,}25\ \ cm^2/€$$

$$PIZZA\ \ 2 = \frac{40^2\pi}{5} = 320\pi = 1004{,}8\ \ cm^2/€$$

Tiene mejor precio la segunda

14. Vemos en el mercado una merluza de 30 cm que pesa un kilo. Nos parece un poco pequeña y pedimos otra un poco mayor, que resulta pesar 2 kilos. ¿Cuánto medirá?

$$medida = \ \ 30 \cdot \sqrt[3]{2} = 37{,}8\ \ cm$$

15. En un día frío un padre y un hijo pequeño van exactamente igual abrigados, ¿Cuál de los dos tendrá más frío?

El padre tendrá más frio ya que su volumen es mayor que el de su hijo y para tener la misma cantidad de frio que su hijo debería llevar la ropa de abrigo proporcional no igual.

16. Identifica a qué cuerpo geométrico pertenecen los siguientes desarrollos:

1. Prisma cuadrangular regular
2. Prisma hexagonal regular
3. Tronco de cono
4. Tetraedro
5. Cilindro recto

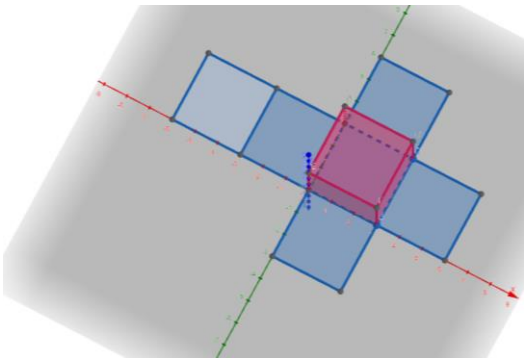
BY NC SA

17. **¿Podrá existir un poliedro regular cuyas caras sean hexagonales? Razona la respuesta.**
No, porque en un hexágono regular los ángulos internos tienen una medida de 120◦. Si intentáramos construir un poliedro utilizando hexágonos regulares como caras, los ángulos en los vértices estarían formados por tres de los ángulos internos del hexágono. Es decir, 360◦. En un poliedro regular, el ángulo en un vértice debe ser menos de 360◦para que el poliedro sea cerrado y tenga una estructura tridimensional.

18. **¿Cuántas diagonales puedes trazar en un cubo? ¿Y en un octaedro?**
En el cubo 4 y en el octaedro 3

19. **¿Puedes encontrar dos aristas paralelas en un tetraedro? ¿Y en cada uno de los restantes poliedros regulares?**
En el tetraedro no puedo encontrar dos aristas paralelas, en cambio, en el resto de poliedros regulares si.

20. **Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo.**



21. **El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás, ¿cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?**
En la C

22. **Un prisma de 8 dm de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 dm y 4 dm. Calcula las áreas lateral y total del prisma.**
Área Lateral=Perímetro de la Base x Altura del Prisma
En este caso, la base del prisma es un triángulo rectángulo con catetos de 3 dm y 4 dm.
Perímetro de la Base=3 dm+4 dm+5 dm =12 dm
h=8 dm
Área Lateral=12 dm×8 dm=96 dm^2
Área de la Base=$\frac{3\ x\ 4}{2} = 6\ dm^2$
Área Total=96 +2×6 = 108 dm^2

23. **Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 cm de arista basal y 0.9 dm de altura y calcula las áreas de la base y total.**
Área de la base=$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = 23{,}38\ cm^2$
Área lateral=6 x 3 x 9 =162 cm^2
Área total= 2×23.38+162=208,76 cm^2

BY NC SA

Textos Marea Verde

24. Un prisma pentagonal regular de 15 cm de altura tiene una base de 30 cm² de área. Calcula su volumen.

V=30 x 15= 450 cm³

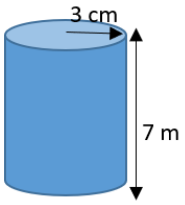
25. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2.7 dm, 6.2 dm y 80 cm.

$A = 2 \cdot (2{,}7 \cdot 6{,}2 + 2{,}7 \cdot 8 + 6{,}2 \cdot 8) = 175{,}88\ dm^2$

Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 m de altura y 3 cm de radio de la base.

$S = 2\pi \cdot 3 \cdot 700 + 2\pi \cdot 3^2 =$ 13251.24 cm²

$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 700^2 =$ $19.792034 cm^3$



26. Calcula el área total de una esfera de 7 cm de radio.

$A = 4 \cdot \pi \cdot 7^2 = 615{,}44 \text{cm}^2$

27. Calcula la apotema de una pirámide regular sabiendo que su área lateral es de 150 cm² y su base es un hexágono de 4 cm de lado.

$$150 = \frac{4 \cdot 6 \cdot ap}{2}; \quad 150 = \frac{24 \cdot ap}{2}; 300 = 24 \cdot ap; \quad ap = \frac{300}{24} = 12{,}5\ cm$$

28. Calcula la apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 dm y la altura de la pirámide es de 6 dm. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

Lado de la base = $\frac{36}{6}$=6 dm

Apotema= $ap^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36; ap = \sqrt{45}$

Área lateral=$\frac{36 \cdot \sqrt{45}}{2} = 120{,}7\ dm^2$

Área total= $120{,}7 + \left(18\sqrt{22{,}5}\right) = 206{,}08\ dm^2$

Volumen:$\frac{18\sqrt{22{,}5} \cdot 6}{3} = 170{,}7$ dm³.

29. Un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 16 cm gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

Área lateral=753,98 cm²

Área total=1206,37 cm²

BY NC SA

Textos Marea Verde

Volumen=2412,74 cm^3

30. Tres bolas de metal de radios 15 dm, 0.4 m y 2 m se funden en una sola, ¿Cuál será el diámetro de la esfera resultante?

$$Vtotal = \frac{4}{3}\pi \cdot (15)^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot (4)^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot (20)^3 = 47915{,}5$$

$$47915{,}5 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3; r^3 = \frac{47915{,}5}{4{,}18} = 11463{,}03; r = \sqrt[3]{11463{,}03} = 22{,}54\ dm$$

D=22,54 x2= 45,08 dm

31. ¿Cuál es la capacidad de un pozo cilíndrico de 1,50 m de diámetro y 30 m de profundidad?

$\pi \cdot 0{,}75^2 \cdot 30 = 52{,}9$ m^3;52900 dm^3/l

32. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 cm y que su altura sea de 15 cm?

Área de la base=12^2=144 cm^2

Área lateral=$\frac{6 \cdot 15}{2} = 45\ cm^2$

Área total=180+144=324 cm^2

33. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 cm de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 cm de lado y 800 cm3 de volumen.

$$800 = 4 \cdot 4 \cdot h; h = 50\ cm$$

Volumen=$4\pi \cdot 50 = 200\pi\ cm^3$= 628.31$cm^3$

34. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 m de alto y 135 dm3 de volumen?

$135 = \pi \cdot r^2 \cdot 15; r = \sqrt{\frac{\pi \cdot 15}{135}} = 0{,}58$dm

$Ab = \pi \cdot 0{,}58^2 = 1{,}05\ dm^2$

35. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 m de radio de la base y 20 m de altura. Luego se embotella en bidones de 2.5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

$V = 2000\pi\ m^2$= 2000000π l

Envases=$\frac{2000000\pi}{2{,}5} = 251327\ envases$

36. Calcula la cantidad de cartulina necesaria para construir un anillo de 10 tetraedros cada uno de los cuales tiene un centímetro de arista.

$$Área\ triángulo\ equilatero = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot lado^2$$

$$Área\ tetraedro = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2\right) = \sqrt{3} cm^2$$

$$Área\ anillo = 10\sqrt{3} = 17{,}32\ cm^2$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

37. Al hacer el desarrollo de un prisma triangular regular de 5 dm de altura, resultó un rectángulo de un metro de diagonal como superficie lateral. Calcula el área total.

$D^2 = a^2 + b^2; 10^2 = 5^2 + b^2; 100 = 25 + b^2; b^2 = 75; b = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$A_l = 15\sqrt{3} \cdot 5 = 75\sqrt{3}$

$A_t = 75\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot (75\sqrt{3})^2 = 75\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot (5\ \sqrt{3})^2 = 75\sqrt{3} + 112{,}5 = 242{,}4\ dm^2$

38. Determina la superficie mínima de papel necesaria para envolver un prisma hexagonal regular de 2 cm de lado de la base y 5 cm de altura.

$At = perímetro \cdot (h + ap) = 12 \cdot \left(5 + \sqrt{3}\right) = 80{,}78\ cm^2$

$superficie\ del\ papel = 5 \cdot 3{,}5 = 17{,}5\ cm^2$

39. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 cm de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 cm. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

$Área\ base = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 60^2 = 5400\sqrt{3} cm^2$

$Volumen\ tierra = 5400\sqrt{3} \cdot 80 = 432000\sqrt{3} = 748240\ cm^3 \rightarrow 748{,}24\ dm^3$

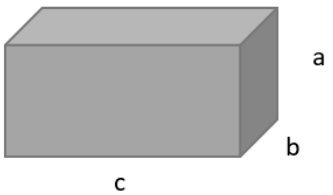
40. Una habitación tiene forma de ortoedro y sus dimensiones son directamente proporcionales a los números 2, 4 y 8. Calcula el área total y el volumen si además se sabe que la diagonal mide 18.3 m.

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2; 18{,}3^2 = 4x^2 + 16x^2 + 64x^2; 334{,}89 = 84x^2; x^2 = \frac{334{,}89}{84} = 3{,}9; x = \sqrt{3{,}9} = 1{,}97$

$a = 2 \cdot 1{,}97 = 3{,}94\ m\ ; b = 4 \cdot 1{,}97 = 7{,}88\ m\ ; c = 8 \cdot 1{,}97 = 15{,}76\ m$

$A = 2 \cdot (3{,}94 \cdot 7{,}88 + 3{,}94 \cdot 15{,}76 + 7{,}88 \cdot 15{,}76) = 434{,}66\ m^2$

$V = 3{,}94 \cdot 7{,}88 \cdot 15{,}76 = 489{,}3\ m^3$



41. Un ortoedro tiene 0.7 dm de altura y 8 dm2 de área total. Su longitud es el doble de su anchura, ¿cuál es su volumen?

$V = \frac{7}{4}\left(2041 - 21\sqrt{3642}\right) = 1354{,}22\ cm^3$

42. Si el volumen de un cilindro de 15 cm de altura es de 424 cm3, calcula el radio de la base del cilindro.

BY NC SA

$$r = \sqrt{\frac{424}{15\pi}} = 3\ cm$$

43. Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. a) Calcula el volumen del depósito en m3. b) ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

a)$V = \pi \cdot 3 = 3\pi\ m^3$;b) 9,42 m^3; 9420 dm^3/ l de agua caben en el deposito

44. Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 cm de lado. a) ¿Cuál es, en cm3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

a)1l = $1dm^3$ = $1000cm^3$

b)$V = Área\ base\ \cdot altura$

1000 = 100 x h ; h = 10cm

45. Una circunferencia de longitud 18.84 cm gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.

$V = \frac{2\cdot(18{,}84)^3}{3\pi^2} = 43955.24\ cm^3$

46. Una puerta mide 1.8 m de alto, 70 cm de ancho y 3 cm de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.

Área total a barnizar=2×(1.8m×0.7m)=2.52 m^2

Costo del barnizado= Área total a barnizar x tarifa de barnizado=2.52 m2×5 €/m^2 =12.60€

Costo de la madera=0.0378 m3×280 €/m^3 =10.584€

Costo total de la puerta: Finalmente, el costo total de la puerta es la suma del costo del barnizado, el costo de la madera y el costo de instalación, que es 100 €.

Costo total= 12.60 €+10.584 €+100 € =123.184€

47. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 cm de altura y 15 cm de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 cm de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

$$Vcono = \frac{\pi \cdot 7{,}5^2 \cdot 21}{3} = 1236{,}375\ cm^3$$

$$1236{,}375 = \pi \cdot 7{,}5^2 \cdot h; h = \frac{1236{,}375}{176{,}6} = 7\ cm\ alcanzará\ el\ agua$$

48. Según Arquímedes, ¿qué dimensiones tiene el cilindro circunscrito a una esfera de 7 cm de radio que tiene su misma área? Calcula esta área.

14 cm de diámetro y 14 cm de altura.

A= 196 π = 615.75 cm^2.

49. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 m?

BY NC SA

Textos Marea Verde

$251{,}2 = 2\pi \cdot r; \qquad r = \dfrac{251{,}2}{2\pi} = 40\ m$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 40^3 = 267946{,}6667\ m^3$

50. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

1. Área: 480 cm^2. Volumen: 448 cm^3.
2. Área: 72 π cm^2 = 226.19 cm^2. Volumen: 90 π cm^3 =282.743 cm^3.
3. El área puede variar. Volumen: 40 π cm^3 = 125.66 cm^3.
4. Área= 277.24 cm2. Volumen: 352$\boldsymbol{\pi}$ 3 cm^3 = 368.61 cm^3

51. Calcula el área lateral y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos

1. Área:274.45 cm^2. Volumen: 980,3 cm^3
2. Área:162.06 cm^2. Volumen: 116.636 cm^3.
3. Área: 124.71 cm^2. Volumen: 101.82 cm^3.
4. Área: 59.1506 dm^2. Volumen: 41.666 dm^3.

52. En la construcción de un globo aerostático esférico de un metro de radio se emplea lona que tiene un coste de 300 €/m². Calcula el importe de la lona necesaria para su construcción.

$A = 4\pi \cdot 1 = 4\pi\ m^2$

coste $= 12{,}56 \cdot 300 = 3768$€

53. Calcula el radio de una esfera que tiene 33.51 dm^3 de volumen.

$$33{,}51 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3; \qquad r^3 = \frac{33{,}51}{4{,}18} = 8{,}01; \qquad r = \sqrt[3]{8{,}01} \approx 2\ dm$$

54. El Atomium es un monumento de Bruselas que reproduce una molécula de hierro. Consta de 9 esferas de acero de 18 m diámetro que ocupan los vértices y el centro de una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realizada con cilindros de 2 metros de diámetro. Si utilizamos una escala 1:100 y tanto las esferas como los cilindros son macizos, ¿qué cantidad de material necesitaremos?

Hay 9 esferas, 12 cilindros laterales y 8 cilindros centrales

V esferas $= \frac{\pi}{3} \cdot (9)^3 = 763{,}41$; $763{,}41 \cdot 9 = 6870{,}66 m^3$; 9 esferas

$D = l\sqrt{3}$; $\quad 103 = l\sqrt{3}$; $\quad l = \frac{103}{\sqrt{3}} = 60{,}5$ lado del cubo

Altura de los cilindros laterales: $60{,}5 - 18 - 18 = 24{,}5$

Altura de los cilindros centrales: $60{,}5 - 18 - 18 - 18 = 6$

V cilindro lateral $= \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 24{,}5 = 76{,}97$

Volumen cilindros laterales: $76{,}97 \cdot 12 = 923{,}63$

Volumen cilindro central: $\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 6 = 18{,}85$

Volumen cilindros centrales: $18{,}85 \cdot 8 = 150{,}8$

BY NC SA

Textos Marea Verde

$$V\ total\ =\ 6870{,}66\ +\ 923{,}63 +\ \ 150{,}8\ =\ 7945\ m^3$$

Como la escala es 1:100, 7945 : 100 = 79,45 m^3 necesitamos.

55. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2 €/dm2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

Área del depósito (fuera y dentro): $2\cdot \pi\ \cdot\ r^2\ \cdot\ h\ = 2\cdot\pi\ \cdot\ 3^2\ \cdot\ 8 = 452,39$

Área de la base: $\pi\ \cdot\ r^2\ = \pi\ \cdot\ 3^2\ = 28{,}27$

Área total: $452,39 + 28{,}27 =\ 480{,}66$

Coste total: $2\cdot 480{,}66 = 961{,}32\ €$

57. Una piscina mide 20 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de alto.

a. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

V=20 x 5 x 2 = 200 m^3; 200000 dm^3/ l

b. ¿Cuánto costará recubrir el suelo y las paredes con PVC si el precio es de 20 €/ m2?

A = 2·(20·2) + 2·(5·2) + (20·5) = 200 m^2 ; 200·20 = 4000€

58. ¿Cuál de las dos campanas extractoras de la figura izquierda tiene un coste de acero inoxidable menor?

$$\boldsymbol{A\ campana\ 1}\ =\ \text{á}\boldsymbol{rea\ tronco\ de\ cono}\ +\ \text{á}\boldsymbol{rea\ cilinro}\ =\ \mathbf{314}$$

$$(\mathbf{16}\ +\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{41}})=\ \mathbf{11052{,}8}\ \boldsymbol{cm}^2$$

$$\boldsymbol{A\ campana\ 2}\ =\ \boldsymbol{area\ tronco\ de\ p}\text{irá}\boldsymbol{mide}\ +\ \boldsymbol{area\ cubo}\ =$$

$$\mathbf{2400}\cdot(\mathbf{3}\ +\sqrt{53}\ )=\ \mathbf{24672}\ \boldsymbol{cm}^2$$

Es mayor la segunda, por tanto, tiene menor coste la primera.

59. En una vasija cilíndrica de 3 m de diámetro y que contiene agua, se introduce una bola. ¿Cuál es su volumen si después de la inmersión sube 0,5 m el nivel del agua?

$$\boldsymbol{V\ bola}\ =\ \boldsymbol{A\ base}\ \cdot\ \boldsymbol{diferencia\ de\ altura}\ =\ \boldsymbol{\pi}\ \cdot\ \mathbf{1{,}5}^2\ \cdot\ \mathbf{0{,}5}\ \approx\ \mathbf{3{,}534}\ \boldsymbol{m}^3$$

60. El precio de las tejas es de 12.6 €/m² ¿Cuánto costará retejar una vivienda cuyo tejado tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 1,5 m de altura y 15 m de lado de la base?

$$\text{Á}\boldsymbol{rea\ lateral} = \frac{\boldsymbol{perimetro\ base}\cdot\boldsymbol{ap}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{15}\cdot\mathbf{4}\cdot\mathbf{7{,}6}}{\mathbf{2}} = \mathbf{456}\cdot\mathbf{12{,}6} = \mathbf{5745{,}6}€$$

$$\boldsymbol{ap}^2\ =\ \boldsymbol{a}^2\ +\ \boldsymbol{b}^2\ =\ \mathbf{1{,}5}^2\ +\ \mathbf{7{,}5}^2;\quad \boldsymbol{ap}\ =\ \sqrt{58{,}5}\ =\ \mathbf{7{,}6}\ \boldsymbol{m}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

61. Se enrolla una cartulina rectangular de lados 40 cm y 26 cm formando cilindros de las dos formas posibles, haciendo coincidir lados opuestos. ¿Cuál de los dos cilindros resultantes tiene mayor volumen?

$$\boldsymbol{Opcion\ 1\ ; V = \pi \cdot 13^2 \cdot 40 = 21226{,}4\ cm^3}$$

$$\boldsymbol{Opcion\ 2 = \pi \cdot 20^2 \cdot 26 = 32656 cm^3}$$

El segundo cilindro tiene más volumen

62. Cada uno de los cubos de la figura tiene 2 cm de arista. ¿Cuántos hay que añadir para formar un cubo de 216 cm³ de volumen?

Volumen = $2^3 = 8$ 216 : 8 = 27, 27 – 10 = 17 cubos hay que añadir.

63. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematad o por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 cm y la altura totales de 12 cm, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

$$\boldsymbol{V\ cilindro = \pi \cdot 1^2 \cdot 11 = 34{,}54\ cm^3}$$

$$\boldsymbol{V\ semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 1^3\right) = \frac{2}{3}\pi\ cm^3$$

$$\boldsymbol{V\ total} = 34{,}54 + \frac{2}{3}\pi = 36{,}6 cm^3$$

64. El lado de la base de la pirámide de Keops mide 230 m, y su altura 146 m. ¿Qué volumen encierra?

$$\boldsymbol{V = \frac{230 \cdot 230 \cdot 146}{3} = 2574466{,}667\ m^3}$$

65. La densidad de un tapón de corcho es de 0,24 g/cm3, ¿cuánto pesan mil tapones si los diámetros de sus bases miden 2.5 cm y 1.2 cm, y su altura 3 cm?

$$\boldsymbol{V = (1{,}25^2 + 0{,}6^2 + 1{,}25 \cdot 0{,}6) : 3 = 8{,}39 cm^3;}$$

1000 tapones: $\boldsymbol{8390 \cdot 0{,}24 = 2013{,}6\ g}$

66. Comprueba que el volumen de una esfera es igual al de su cilindro circunscrito menos el del cono de igual base y altura.

$$\boldsymbol{V\ esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad ; \quad \boldsymbol{V\ cilindro = \pi \cdot r^2 \cdot 2 \cdot r} \quad ; \quad \boldsymbol{V\ cono} = (\boldsymbol{\pi \cdot r^2 \cdot 2r}) : 3$$

67. Calcula el volumen de un octaedro regular de arista 2 cm

BY NC SA

$$V = 2^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} = 3{,}77\ cm^3$$

68. Construye en cartulina un prisma cuadrangular regular de volumen 240 cm3, y de área lateral 240 cm2.

$$\text{arista base} = 4\ \text{cm};\ \text{arista lateral} = 15\ \text{cm}$$

69. El cristal de una farola tiene forma de tronco de cono de 40 cm de altura y bases de radio s 20 y 10 cm. Calcula su superficie.

$$Al = (\pi \cdot 20 + \pi \cdot 10) \cdot \sqrt{40^2 + 10^2} = 94{,}2 \cdot 41{,}23 = 3883{,}86\ cm^2$$

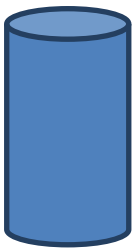
$$S = Al + A\ bases = 3883{,}86 + 1256 + 314 = 5453{,}86\ cm^2$$

70. Un bote cilíndrico de 15 cm de radio y 30 cm de altura tiene en su interior cuatro pelotas de radio 3.5 cm. Calcula el espacio libre que hay en su interior.

$$\text{V cilindro} = \pi \cdot 225 \cdot 30 = 21195\ \text{cm}^3$$

$$\text{V pelotas} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3.5^3 = 179{,}2 \cdot 4 = 716{,}8\ \text{cm}^3$$

$$\text{espacio} = 21195 - 716{,}8 = 20478{,}2\text{cm}^3$$



71. Un embudo cónico de 15 cm de diámetro tiene un litro de capacidad, ¿cuál es su altura?

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h\ ; 1000 = 58{,}8\ \cdot h\ ; h = \frac{1000}{58{,}8} \approx 17\ \text{cm}$$

72. En un depósito con forma de cilindro de 30 dm de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h; 450 = \pi \cdot 30^2 \cdot h; 450 = 900\pi \cdot h; h = \frac{2826}{450} = 6{,}28\ \text{dm de altura}$$

73. La lona de una sombrilla abierta tiene forma de pirámide octogonal regular de 0.5 m de altura y 40 cm de lado de la base. Se fija un mástil en el suelo en el que se encaja y el vértice de la pirámide queda a una distancia del suelo de 1.80 m. En el momento en que los rayos de sol son verticales, ¿qué área tiene el espacio de sombra que determina?

$$\text{A sombra} = \frac{2a^2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{2 \cdot 40^2}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = 7725{,}48\ \text{cm}^2$$

74. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 cm de largo y 20 cm de ancho, ¿cuál es su profundidad?

BY NC SA

Textos Marea Verde

$$65000 = 65 \cdot 20 \cdot \text{h}; \text{h} = \frac{65000}{1300} = 50 \text{ cm de profundidad}$$

75. **En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 cm de altura y 4 cm diámetro. ¿Cuál es su superficie? Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm³ de helado contiene?**

$$superficie\ \ galleta = \pi \cdot 2 \cdot 12{,}16 = 76{,}3\ \ cm^2$$

$$volumen\ \ helado = (\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4\pi \cdot 8}{3} = 33{,}49) + (\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 12}{3} = 50{,}24) = 83{,}73\ \text{cm}^3$$

BY NC SA

AUTOEVALUACIÓN

1. Las longitudes de los lados del triángulo de vértices A(2, 2) B(1, 4) y C(0, 3) son:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{(0-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$
$$CA = \sqrt{(2-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

b)$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$

2.En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 cm se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

$\frac{(3\cdot 10)\cdot(4\cdot 10)}{2} = 600\ cm^2; 6dm^2$

b)6 dm²

3.La altura de un prisma de base cuadrada es 20 cm y el lado de la base es 5 cm, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0.45 m^2

A_l=(4x5)x20=400 cm^2

A_b=5 x 5 = 25 cm^2

A_t=400+2 x 25=450 cm^2

a) 450 cm²

4.Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 m de altura y lado de la base 1 m. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}$ m³ b) $45\sqrt{2}$ m³ c) 30 000$\sqrt{2}$ dm³ d) $7.5\sqrt{3}$ m³

V=A_b x h = $\frac{3\sqrt{3}}{2} x\ 5 = 7.5\sqrt{3}m^3$

A_b=$\frac{3\sqrt{3}}{2}\ m^2$

d)$7,5\sqrt{3}m^3$

5.El tejado de una caseta tiene forma de pirámide cuadrangular regular de 0.5 m de altura y 1000 cm de lado de la base. Si se necesitan 15 tejas por metro cuadrado para recubrir el tejado, se utilizan un total de:

a) 1 508 tejas. b) 150 tejas. c) 245 tejas. d) 105 tejas.

$A_{lateral}$=$\frac{perimetro\ base\ \cdot apotema}{2} = \frac{(4\ \cdot 10)\cdot 5{,}02}{2} = 100{,}4\ m^2$; $100{,}4 \cdot 15 = 1506 \approx 1508$

$$ap^2 = 5^2 + 0{,}5^2; ap = \sqrt{25 + 0{,}25} = \sqrt{25{,}25} = 5{,}02$$

a) 1508 tejas.

6.Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 cm, está llena de cubos de 1 cm de arista. Si se

BY NC SA

Textos Marea Verde

utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 cm de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

$$V = 30 \cdot 20 \cdot 15 = 9000 cm^3$$

$$Nº\ CUBOS = \frac{9000}{1} = 9000\ cubos$$

$$A_{BASE\ PRISMA} = 10 \cdot 10 = 100\ cm^3; 100\frac{cubos}{capa}; \frac{9000}{100} = 90\ capas; 90\ cm$$

d) 90 cm

7.El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 dm de radio de la base y 120 cm de altura es:

a) $5\sqrt{3}\ dm$ b) $\sqrt[3]{75}\ dm$ c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2\,250}\ cm$

V esfera = V cono

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}; 4{,}18 \cdot r^3 = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 12}{3}; 4{,}18 \cdot r^3 = 314; r^3 = \frac{314}{4{,}18} = 75{,}1; r \cong \sqrt[3]{75}$$

b)$\sqrt[3]{75}$

8.Se distribuyen 42.39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 cm de altura y 3 cm de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

$$V = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 423{,}9\ cm^3; 0{,}4239\frac{dm^3}{l}$$

$$Nº\ ENVASES = \frac{42{,}39}{0{,}4329} = 100\ envases$$

a)100

9. La ecuación de una recta en el plano que pasa por los puntos A(2, 5) y B(1, 3) es:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

AB(1-2, 3-5) AB(-1, -2) m = $\frac{-2}{-1} = 2$ y – 5 = 2 (x – 2) ; y = 2x – 4 + 5

c)y = 2x + 1

10.La ecuación de la esfera de centro A(2, 3, 5) y radio 3 es:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = r^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 10z + 25 = 3^2$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 25 + 4 + 9 - 9 = 0$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$$

b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 13: Derivadas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Pilar Paramio Barrigas

Hugo Bastante Gómez-Limón

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3] de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2+13}{2+3} = 3 \qquad [3,2]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{11+1}{5-1} = 3 \qquad [1,5]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{5+4}{3-0} = 3 \qquad [0,3]$

b) $y = -2x - 3$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-7-3}{2+3} = -2 \qquad [3,2]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-13+5}{5-1} = -2 \qquad [1,5]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-13+3}{3-0} = -2 \qquad [0,3]$

c) $y = 0.5x + 2$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3-0,5}{2+3} = 0,5 \qquad [3,2]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4,5-2,5}{5-1} = 0,5 \qquad [1,5]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3,5-2}{3-0} = 0,5 \qquad [0,3]$

d) $y = x - 1$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1+4}{2+3} = 1 \qquad [3,2]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4-0}{5-1} = 1 \qquad [1,5]$

$TVM: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{2+1}{3-0} = 1 \qquad [0,3]$

2.Halla la tasa de variación media de la función y = x^2 – 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3]. ¿Es ahora constante?

$[-3,2] \Rightarrow TVM \rightarrow \frac{f(2)-f(-3)}{2-3} \rightarrow \frac{(2^2-1)-((-3)^2-1)}{2+3} \rightarrow \frac{-5}{5} \rightarrow -1$

$[1,5] \Rightarrow TVM \rightarrow \frac{f(5)-f(1)}{5-1} \rightarrow \frac{(5^2-1)-(1^2-1)}{5-1} \rightarrow \frac{24}{4} \rightarrow 6$

$[0,3] \Rightarrow TVM \rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \rightarrow \frac{(3^2-1)-(0^2-1)}{3-0} \rightarrow \frac{9}{3} \rightarrow 3$

Ahora no es cte.

3. Halla la tasa de variación media de la función y = x^3 + 1 en los intervalos [–3, 2], [1, 5] y [0, 3].

$[-3,2] \Rightarrow TVM \rightarrow \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} \rightarrow \frac{(2^3+1)-((-3)^3+1)}{2+3} \rightarrow \frac{35}{5} \rightarrow 7$

BY NC SA

Textos Marea Verde

$[1,5]$=>$TVM \rightarrow \frac{f(5)-f(-1)}{5-1} \rightarrow \frac{(5^3+1)-(1^3+1)}{5-1} \rightarrow \frac{124}{4} \rightarrow 31$

$[0,3]$=>$TVM \rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{3-0} \rightarrow \frac{(3^3+1)-(0^3+1)}{3-0} \rightarrow \frac{27}{3} \rightarrow 9$

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas

Tiempo (t) en segundos	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (d) en metros	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

$$Vmedia = \frac{340}{14} \rightarrow 24.26 \frac{m}{s}$$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].

$$Vmedia\ [0,6] \rightarrow \frac{230}{6} = 38.33 \frac{m}{s}$$

$$Vmedia\ [2,10] \rightarrow \frac{200}{8} = 25 \frac{m}{s}$$

$$Vmedia\ [6,14] \rightarrow \frac{40}{8} = 5 \frac{m}{s}$$

c) ¿Es constante?

No es cte. La velocidad va disminuyendo.

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	35
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].

$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow TVM\ (0,40) = \frac{720-0}{40-0} = 18\ m/s$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es contante?

$$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow TVM\ (15,25) = \frac{430-290}{25-15} = 14\ m/s$$

$$TVM\ (a,b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow TVM\ (0,40) = \frac{510-370}{30-20} = 14\ m/s$$

Cómo la velocidad no varía se puede decir que son constantes.

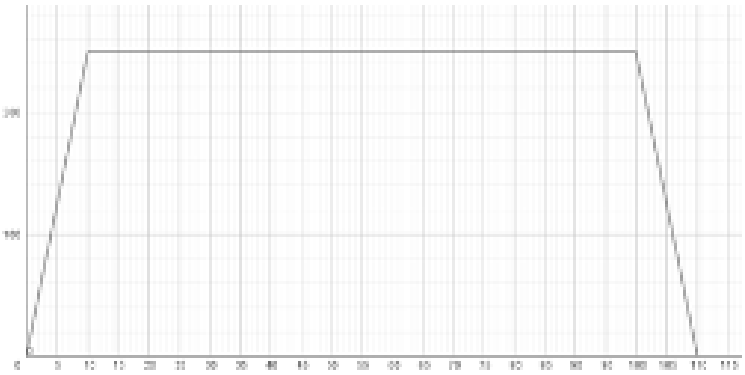
c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

Textos Marea Verde

120 km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22.2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.



b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

$$am\,[0{,}10] = \frac{250-0}{10-0} = 25\ km/h^2$$

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

$am\,[10{,}90] = \frac{250-250}{90-10} = 0$**,** velocidad constante

d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

$$am\,[100{,}110] = \frac{0-250}{110-100} = -25\ km/h^2$$

7. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B\,(x) = x^2 + 7x + \sqrt{x}$ **donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 0 y 100 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 25 y 100 unidades.**

$$TVM(0-100) = \frac{B(100)-B(0)}{100-0}$$

$$B(0) = (0)^2 + 7(0) + \sqrt{0} = 0$$

$$B(100) = (100)^2 + 7(100) + \sqrt{100} = 10710$$

$$TVM(0-100) = \frac{10710-0}{100-0} = 107.1$$

$$TVM(25-100) = \frac{B(100)-B(25)}{100-25}$$

Textos Marea Verde

$$B(25) = (25)^2 + 7(25) + \sqrt{25} = 805$$

$$TVM(25 - 100) = \frac{10710 - 805}{100 - 25} = 132.07$$

8. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$ y que los ingresos por ventas también contratado vienen dados por $l(x) = 2x + x^2$. Por tanto, los beneficios B (x) por trabajador contratado son ingresos menos costes (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina las tasas de variación media si se contratan entre 100 y 2500 trabajadores.

$$B(x) = x^2 + x - \sqrt{x}$$

$$TVM = \frac{B(2500) - B(100)}{2500 - 100}$$

$$B(2500) = 2500^2 + 2500 - \sqrt{2}500 = 6252450$$

$$B(100) = 100^2 + 100 - \sqrt{1}00 = 10090$$

$$TVM = \frac{6252450 - 10090}{2500 - 100} = 2601.83$$

9. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5:

a) $y = 3x - 4$

$$y = 3x - 4 \rightarrow y' = 3$$

$$x = 1;\ y'(1) = 3$$

$$x = 3;\ y'(3) = 3$$

$$x = 5;\ y'(5) = 3$$

b) $y = -2x - 3$

$$y = -2x - 3 \rightarrow y' = -2$$

$$x = 1;\ y'(1) = -2$$

$$x = 3;\ y'(3) = -2$$

$$x = 5;\ y'(5) = -2$$

c) $y = 0.5x + 2$

$$y = 0.5x + 2 \rightarrow y' = 0.5$$

$$x = 1;\ y'(1) = 0.5$$

$$x = 3;\ y'(3) = 0.5$$

$$x = 5;\ y'(5) = 0.5$$

Textos Marea Verde

d) $y = x - 1$

$$y = x - 1 \rightarrow y' = 1$$
$$x = 1;\ y'(1) = 1$$
$$x = 3;\ y'(3) = 1$$
$$x = 5;\ y'(5) = 1$$

La derivada es constante.

10. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5. ¿Es ahora constante?

$$y = x^2 - 1 \rightarrow y' = 2x$$
$$x = 1;\ y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$
$$x = 3;\ y'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$
$$x = 5;\ y'(5) = 2 \cdot 5 = 10$$

No, no es constante.

11. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos x = 1, x = 3 y x = 5.

$$y = x^3 - 1 \rightarrow y' = 3x^2$$
$$x = 1;\ y'(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3$$
$$x = 3;\ y'(3) = 3 \cdot (3)^2 = 27$$
$$x = 5;\ y'(5) = 3 \cdot (5)^2 = 75$$

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia "y" dada por la ecuación: y = 0.2x + 110x – 67.2. Determina la velocidad que llevaba el coche para x = 1.5.

$$y = 0.2x^2 + 110x - 67.2 \rightarrow y' = 0.4x + 110$$
$$0.4 \cdot (1.5) + 110 \rightarrow 110.6\ \frac{m}{s}$$

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2.5 \leq x \leq 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121.4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0{,}1x^2 + 118x - 143.3$. Para x = 3 hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de x = 3, y la velocidad después de x = 3.

Para $2{,}5 \leq x \leq 3$

$y = 110x - 121{,}4 \rightarrow y' = 110 = 110$

Para $3 \leq x \leq 5$

$y = 0{,}1x^2 + 118x - 146{,}3 \rightarrow y' = 0{,}2x + 118 \rightarrow y'(3) = 0{,}2 \cdot 3 + 118 = 0{,}6 + 118 = 118{,}6$

Antes de x= 3 la velocidad es 110 m/s y después 118,6 m/s

14. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0.2x^2$ **(x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2 km de distancia sobre el horizonte.**

$$y = 50x - 0.2x^2 \rightarrow y' = 50 - 0.4x$$

$$x = 2 \rightarrow 50 - 0.4(2) \rightarrow 50 - 0.8 \rightarrow 49.2$$

Solución= 49.2m

15. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del avión nodriza viene dada por $d = 0.3t^4$**. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3, 4, 7 y 10 segundos de haber sido soltado.**

$$d = 0.3t^4 \rightarrow d' = 1.2t^3$$

$$t = 4 \rightarrow v(4) = 1.2 \cdot (4)^3 = 76.8$$

$$t = 7 \rightarrow v(7) = 1.2 \cdot (7)^3 = 411.6$$

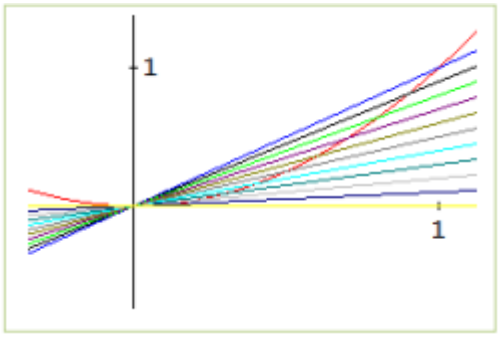
$$t = 10 \rightarrow v(10) = 1.2 \cdot (10)^3 = 1200$$

16. Representa gráficamente la función y = 2, y determina su derivada para x = 1, 2, 3.... a. ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal y=b?

y = 2 es una recta horizontal y su derivada siempre vale 0.

Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal.

17. Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, f(x) y f(a), correspondientes a las ordenadas x, a. Interpreta geométricamente la definición de derivada a partir del dibujo.

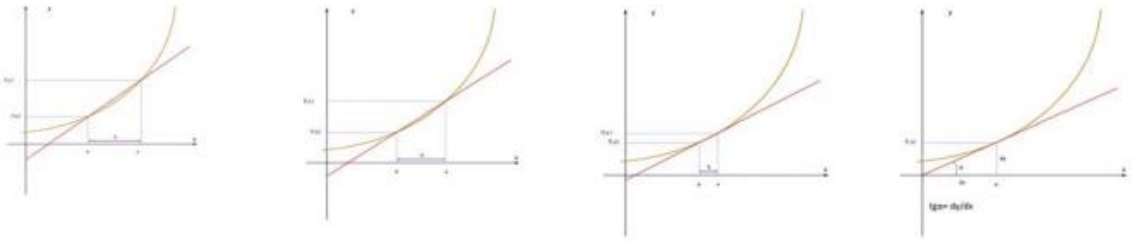


Es la pendiente de la recta tangente en el punto (a, f(a)).

18.Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica1, las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: para t = 1, 2, 3, 4, 5, ..., el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25, ..., etc. Calcula la función de posición y = f(t), y calcula la velocidad y la aceleración derivando la función de posición.

$$y = f(t) = t^2; \qquad y' = v = 2t; \qquad a = y'' = 2.$$

19. Dibuja una función cualquiera y un punto cualquiera sobre la función f(a). Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen en a y longitud h. Interpreta de nuevo la definición de derivada en un punto basándote en dicha figura.



20. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los ingresos por ventas por trabajador contratado vienen dados por I(x) = 2x + x2. (Observa que esta función no es continua, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar como si lo fuera). Determina la derivada de la función ingresos respecto a las personas contratadas. ¿Qué significado crees que tiene?

$$y = f(t) = t^2; y' = v = 2t; a = y'' = 2.$$

21. Calcula la derivada mediante el límite de la función y = x² – x + 1 en el punto x = 1. Calcula la derivada mediante el límite de la función y = x² – x + 1 en el punto x = a. Calcula mediante la expresión resultante f '(1), f' (2), f' (12), f' (5.43) y f' (-7).

$y = x^2 - x + 1 \rightarrow y'(1). = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-(1+h)+1-1}{h} \rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(1+h^2+2h)-(1+h)+1-1}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2+2h-1-h-1+1}{h} \rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{h^2+h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{h(h+1)}{h} = 0 + 1 = 1$

$y = x^2 - x + 1 \rightarrow$

$y'(a). = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - (a+h) + 1 - (a^2 - a + 1)}{+1)h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(a^2+h^2+2ah)-(a+h)+1-a^2+a-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2ah-h}{h} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2a-1)}{h} = 2a - 1$

f '(1) = 2·1 – 1 = 1; f' (2) = 2·2 – 1 = 3; f' (12) = 2·12 – 1 = 23; f' (5.43) = 2·5.43 – 1 = 9.86; f' (-7) = 2·(-7) – 1 = -15

22. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla con las derivadas:

Función	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 2x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 2$	$f'(x) = 4x+3$

BY NC SA

Textos Marea Verde

23. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen.

24.Piensa en un ejemplo de función con un mínimo en un punto en el que no es derivable.

La función valor absoluto es continua en toda la recta real y no es derivable en el origen, pero tiene un mínimo en dicho origen.

25. Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^{24} \rightarrow f'(x) = 24x^{23}$

b) $g(x) = 6x^{10} \rightarrow g'(x) = 60x^{9}$

c) $h(x) = \frac{6}{7x^{13}} \rightarrow h`(x) = \frac{78}{7x^{12}}$

d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7 \rightarrow j'(x) = 12x^3 - 10x$

e) $p(x) = 5x^3 - x \rightarrow p'(x) = 15x^2 - 1$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 6 + x - 5x^2 \rightarrow y' = -10x + 1$

b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5 \rightarrow y' = 15x^4 + 12x - 7$

c) $y = \frac{2}{3x^7} + \frac{8}{5x^5} - \frac{9}{4x^4} \rightarrow y' = \frac{14}{3x^6} + \frac{40}{5x^4} - \frac{36}{4x^3}$

d) $y = x^8 - x \rightarrow y' = 7x^7 - 1$

27. Ya hemos obtenido la derivada $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ de Utilízala para obtener la derivada en x = 1, 4, 5... ¿Puedes obtener la derivada en x = 0? Razona la respuesta.

$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

En $x = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

En $x = 4 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

En $x = 5 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 0.2236$

En $x = 0 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot 0^{\frac{1}{2}}} \rightarrow$ No existe, puesto que cuando el 0 se encuentra en el denominador no es un valor real.

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3)(6x^6 - 5) \rightarrow y = 6x^8 - 5x^2 + 18x^2 \rightarrow y' = 48x^7 + 108x^5 - 10x$

b) $y = (7x^3 - 1)(5x^4 + 4) \rightarrow y = 35x^7 + 28x^3 - 5x^4 - 4 \rightarrow y' = 245x^6 + 84x^2 - 20x^3$

BY NC SA

Textos Marea Verde

c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x) \rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3 - 5x) + \sqrt{x} \cdot (3x^2 - 5)$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-1}{x+3} \rightarrow y' = \frac{x(x-3)-x(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$

b) $y = x^2 + \left(\frac{5}{3}\right)x^3 - 2x + 7 \rightarrow y' = 2x + 5x^2 - 2;\ y' = 2x + 5x^2 - 2$

c) $y = \frac{2x^3-5x^2}{6x^4-2x^3} \rightarrow y' = \frac{(6x^2-10x)(6x^4-2x^3)-(24x^3-6x^2)(2x^3-5x^2)}{(6x^4-2x^3)^2} = \frac{-6x^2+30x-5}{18x^4-12x^3+2x^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x+2} \rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(x+2)-x^{\frac{3}{2}}\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}+3\right)}{(x+2)^2}$

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7} = (x^7)^{\frac{1}{5}} \rightarrow y' = \frac{1}{5}(x^7)^{-\frac{4}{5}}(7x^6) = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}}{x^3+5} = \frac{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3+5} \rightarrow y' = \frac{\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3+5)-\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{x}\right)(3x^2)}{(x^3+5)^2} = \frac{-11x^4+35x}{(x^3+5)^2}$

c) $y = \frac{(x^4-2)\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}} \rightarrow y' = \frac{\left[4x^3\cdot\sqrt{x}+(x^4-2)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]\cdot\left(\sqrt[4]{x^5}\right)-\left((x^4-2)\cdot\sqrt{x}\right)\cdot\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}{\left(\sqrt[4]{x^5}\right)^2}$

d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2} = \frac{(x)^{\frac{11}{6}}}{x+2} \rightarrow y' = \frac{\frac{11}{6}(x)^{\frac{5}{6}}(x+2)-(x)^{\frac{11}{6}}}{(x+2)^2}$

31. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por, $I(x) = 2x + x^2$ Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la derivada de la función costes C(x) y de la función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados. ¿Qué significado tienen?

$$C'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; B'(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Estas derivadas nos dan información sobre cómo los costes y los beneficios cambian con respecto al número de trabajadores contratados, lo que puede ser útil para la toma de decisiones empresariales.

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12} \rightarrow y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11}(5x^4 - 21x^2)$

b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7 \rightarrow y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6(9x^2 - 10x)$

Textos Marea Verde

c) $y=\sqrt{(4x^5-8x^3)^5} \rightarrow y=(4x^5-8x^3)^{\frac{5}{2}} \rightarrow y'=\frac{5}{2}(4x^5-8x^3)^{\frac{3}{2}}(20x^4-24x^2)$

d) $y=\sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4} \rightarrow y=(2x^2+4x^7)^{\frac{4}{3}} \rightarrow y'=\frac{4}{3}(2x^2+4x^7)^{\frac{1}{3}}(4x-28x^6)$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2}=$ y$=(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2)^{\frac{1}{2}}$

y'$=\frac{1}{2}(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}(x^4-6x^3)^2)^{\frac{-1}{2}}\cdot(\frac{(6x-5)(2x^3+7)-(3x^2-5x)(6x^2)}{(2x^3+7)^2})\cdot(x^4-6x^3)^2+(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7})\cdot 2(x^4-6x^3)(4x^3-18x^2)$

b) $y=\sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5}}=\sqrt{\frac{x^4-7x^2+3x^2-21}{x^3-5}}=\sqrt{\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}}=\left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4-4x^2-21}{x^3-5}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(4x^3-8x)(x^3-5)-3x^2(x^4-4x^2-21)}{(x^3-5)^2}\right)\right]$

c) $y=\sqrt{\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^3}=\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

$y'=\left[\frac{3}{2}\left(\frac{5x^2+3x}{8x^3-2x^2}\right)^{\frac{1}{2}}(10x+3)(8x^3-2x^2)-(5x^2+3x)(24x^2-4x)\right]$

d) $y=\sqrt[3]{3+\sqrt{x-\frac{2}{x^3}}}$ $y'=\left(3+\sqrt{x-\frac{2}{x^3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(3+\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

y'$=\frac{1}{3}(3+(x-\frac{2}{x^3})^{\frac{1}{2}})^{\frac{-2}{3}}\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{2}{x^3})^{\frac{-1}{2}}(1-6x^{-4})$

34. Determina la ecuación de la recta tangente a y = 7x² + 5x – 3 en el punto x = 2.

$$y=7x^2+5x-3 \rightarrow y'=14x+5$$
$$y'(2)=14(2)+5=28+5=33$$
$$y(2)=7(2)^2+5(2)-3=29 \rightarrow P(2,29)$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \rightarrow y-29=33(x-2) \rightarrow y=33x-66+29 \rightarrow y=33x-37$$

35. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y=0.05x-0.01x^2$ **donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para x = 0, x = 1, x = 2, x = 3 km.**

$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$; $\quad f(0)=0.05\cdot 0-0.01\cdot 0^2=0 \quad f'(x)=0.05-\frac{1}{50}x$

$f'(0)=0.05-\frac{1}{50}\cdot 0=0.05$

$y=0+0.05\cdot(x-0)$, $\quad y=0{,}05x$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

PARA x=1 -> $x_0 = 1$

$f(1) = 0.05 \cdot 1 - 0.01 \cdot 1^2 = 0.04$ $\quad f'(1) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 1 = 0.03$; y = 0.03x + 0.01

PARA X=2-> $x_0 = 2$

$f(2) = 0.05 \cdot 2 - 0.01 \cdot 2^2 = 0.06$ $\quad f'(2) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 2 = 0.01\ y = 0.06 + 0.01 \cdot (x - 2)$

$y = 0.06 + 0.01x - 0.02\ ; y = 0.01x + 0.04$

PARA X=3-> $x_0 = 3$

$f(3) = 0.05 \cdot 3 - 0.01 \cdot 3^2 = -0.04$ $\quad f'(3) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 3 = -0.01, y = -0.04 + (-0.01) \cdot (x - 3); y = -0.04 - 0.01x + 0{,}03;\ y =$ -0,01x - 0,01

36. El departamento de "marketing" de una empresa estima que los ingresos mensuales que va a producir el lanzamiento de un nuevo producto vienen dados por: $y = 30 + 5t^2 - 0.4t^3$ donde t es el tiempo expresado en meses desde que el producto salga al mercado, e y son los ingresos en cientos de euros. a) Calcula si los ingresos están creciendo o decreciendo a los 3 meses de lanzamiento del producto. b) ¿Durante qué periodo de tiempo aumentan los ingresos? c) ¿Durante qué periodo de tiempo disminuyen?

a) $\frac{dy}{dt} = 10 \cdot (3) - 1.2 \cdot (3)^2 = 19.2$. Creciente

b) $10t - 1.2t^2 > 0$

$t(10 - 1.2t) > 0$

$t > 0\ y\ 10 - 1.2t > 0$

$t > 0\ y\ t < \frac{10}{1.2}$

$$t > 0 \quad y \quad t < \frac{25}{3}$$

$$10t - 1.2t^2 = 0 \rightarrow t(10 - 1.2t) = 0 \rightarrow t = 0{,}10 = 1.2t \rightarrow t = 8.333.$$

Los ingresos están aumentando para $0 < t < \frac{25}{3}$

c) $10t - 1.2t^2 < 0$

$$t(10 - 1.2t) < 0$$

$$t < 0\ o\ 10 - 1.2t < 0$$

$$t < 0\ o\ t > \frac{10}{1.2}$$

$$t < 0\ o\ t > \frac{25}{3}$$

37. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: y = x³ - 3x. ¿Cómo es en x = 0? ¿Y en x = 2? ¿Y en x = -2?

$y = x^3 + 3x$ -> $y' = 3x^2 + 3$, ahora igualo la derivada a 0 (y´=0)->

$3x^2 + 3 = 0$ -> $x = \sqrt{-1}$

Textos Marea Verde

$y = x^3 - 3x$ -> $y' = 3x^2 - 3$, (y´=0)-> $3x^2 - 3 = 0$-> $x = \sqrt{1}$-> $x = \pm 1$
$y'(0) = -3 < 0$ / Decreciente
$y'(2) = 1 > 0$ / Creciente
$y'(-2) = 1 > 0$ / Creciente
Creciente $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Decreciente $(-1, 1)$

38. En un ejercicio anterior vimos que una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado eran $C(x) = x + \sqrt{x}$ y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 2x + x^2$. Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

$$B(x) = I(x) - C(x) \rightarrow B(x) = (2x + x^2) - (x + x) \rightarrow x^2$$
$$B(x) = x^2 \; ; \; B'(x) = 2x$$

Es creciente

39. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3; y' = 8x;\ 8x = 0 \quad x = 0;\ y'' = 8 > 0$ En x = 0 hay un mínimo

b) $y = 5x^4 - 2\ ;\ y' = 20x^3\ ;\ 20x^3 = 0\ ;\ x = 0\ ;$

$(-\infty, 0)$ *decreciente*, $(0, \infty)$ *creciente*, en x = 0 hay un mínimo

c) $y = 3x^3 + 1;\ y' = 9x^2$ como siempre es positiva, no hay máximos ni mínimos

d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5\ ;\ y' = 16x^3 - 4x \rightarrow y' = 4x \cdot (4x^2 - 1) \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = -\frac{1}{2}\ y\ x = 0; y'' = 48$

$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ *Es un mínimo relativo*
$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -16 < 0$ *Es un máximo relativo*
y''(0) = -4 < 0 *Es un máximo relativo*

e) $y = 7x^3 - 3x\ ;\ y' = 21x^2 - 3 \rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{3}{21}}; y'' = 42x$

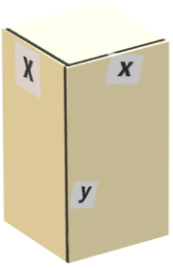
$y''\left(\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42 \cdot \sqrt{\frac{3}{21}} = 6 \cdot \sqrt{7} > 0$ *Es un mínimo relativo*

$y''\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42x \rightarrow 42\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = -6 \times \sqrt{7} < 0$ *Es un máximo relativo*

40. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.

BY NC SA

Textos Marea Verde



Función para optimizar, superficie: S(x, y) = 2·x·x + 4·x·y = $2x^2 + 4xy$

Condición: x·x·y = 1 , $x^2y = 1$

Despejamos y, $y = \frac{1}{x^2}$ sustituimos en la función, $S(x) = 2x^2 + 4x\frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$

Derivamos $S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$

Igualamos a 0 y resolvemos, $4x - \frac{4}{x^2} = 0$, $4x = \frac{4}{x^2}$, $x^3 = 1$, $x = 1$

Calculamos la segunda derivada, $S''(x) = 4 + \frac{8}{x^3}$ y $S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$

Luego en x = 1 hay un mínimo, $y = \frac{1}{1^2} = 1$

La mínima superficie se obtiene con un cubo de 1dm de arista.

41. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \rightarrow y' = 18x^2 - 4x + 5 \rightarrow 18x^2 - 4x + 5 = 0$; $sin\ raíces\ reales$

$y(0) = 5 > 0$ por tanto, siempre creciente, no hay máximos ni mínimos

b) $y = x^3 - 3x + 5 \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1;\ x = -1$

$$y'' = 6x \rightarrow y''(-1) = -6 < 0;\ máximo \rightarrow y''(1) = 6 > 0$$

c) $y = |x - 4| \rightarrow x - 4 = 0 \rightarrow x = 4,\ mínimo\ en\ x = 4$

d) $y = |x + 1| + |x - 2|$; $|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & x \le -1 \\ x + 1 & x > -1 \end{cases}$; $|x - 2| = \begin{cases} -x + 2 & x < 2 \\ x - 2 & x \ge 2 \end{cases}$

$$|x + 1| + |x - 2| = \begin{cases} -x - 1 - x + 2 & x \le -1 \\ x + 1 - x + 2 & -1 < x < 2 \\ x + 1 + x - 2 & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 1 & x \le -1 \\ 3 & -1 < x < 2 \\ 2x - 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

No tiene máximos ni mínimos

42. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [–4, 3] y en el intervalo [0, 5].

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72 \rightarrow 6x^2 - 6x + 72 = 0\ no\ tiene\ solución\ real$ No hay máximos ni mínimos relativos

Intervalo [–4, 3]:

$$f(-4) = 2(-4)^3 - 3(-4)^2 + 72(-4) = -128 - 48 - 288 = -464$$

$$f(3) = 2(3)^3 - 3(3)^2 + 72(3) = 54 - 27 + 216 = 243$$

En x = - 4, hay un mínimo absoluto y en x = 3, hay un máximo absoluto.

Intervalo [0, 5]

$$f(0) = 2(0)^3 - 3(0)^2 + 72(0) = 0$$

$$f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 250 - 75 + 360 = 535$$

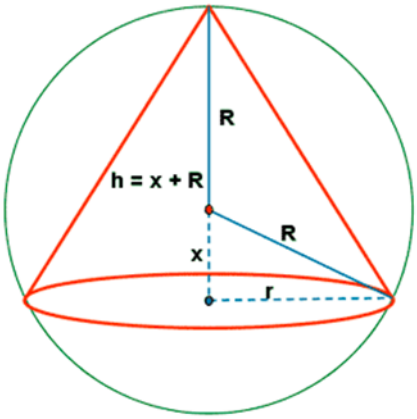
En x = 0, hay un mínimo absoluto y en x = 5, hay un máximo absoluto.

43. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo [–3, 5].

$x + 2 = 0\,;\ x = -2\ \ ;\ f(-3) = -3 + 2 = -1\ \ ;\ f(-2) = -2 + 2 = 0\ \ ;\ f(5) = 5 + 2 = 7$

En x = -2 hay un mínimo absoluto y en x = 5 hay un máximo absoluto.

44. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de R= 5 cm. (La altura del cono es igual a R+x, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$



$v = \frac{(\pi r^2 h)}{3} = \frac{\pi r^2 (R+x)}{3} = \frac{\pi(R^2 - x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi(25 - x^2)(5+x)}{3} = \frac{\pi}{3}(125 + 25x - 5x^2 - x^3)$

$v' = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25) \rightarrow v' = \frac{\pi}{3}(-3x^2 - 10x + 25) = 0 \rightarrow x = 1{,}66 \rightarrow v'' = \frac{\pi}{3}(-6x - 10)$

$v''(1{,}66) < 0$, por tanto, es un máximo.

$r^2 = R^2 - x^2 = 5^2 - 1{,}66^2;\ r = 4{,}83\ cm$

$h = R + x = 5 - 1{,}66;\ h = 6{,}66\ cm$

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y = x³ en el punto x = 2.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)f(a)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2) = 3x^2$$

$$f'(2) = 3\cdot 2^2 = 12$$

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

$$y'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función y= $\frac{1}{x^2}$ en x= 4

$$y'(4) = \lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{16}}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\frac{16-x^2}{16x^2}}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{16x^2(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{16-x^2}{16x^3-64x^2}$$

$$= \frac{16-4^2}{16(4^3)-64(4^2)} = \frac{16-16}{1024-1024} = \frac{0}{0}, indeterminación\ .= \lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(4+x)}{16x^2(x-4)} =$$

$$\lim_{x\to 4} -\frac{4+x}{16x^2} = -\frac{4+4}{16(4^2)} = -\frac{8}{256} = -\frac{1}{32}$$

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-5(1+h)+2-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^2+6h+3-5-5h+2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}(3h+1) = 1$$

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{2+h-3-(-1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 4x^2 + 2x - 3 \rightarrow y' = 8x + 2$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5 \rightarrow y' = 6x^2 - 6x + 7$

c) $y = x^2 - 5x + 2 \rightarrow y' = 2x - 5$

d) $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3 \rightarrow y' = (56x^6 - 54x^5 - 15x^2)$

BY NC SA

Textos Marea Verde

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (5x^2 + 7x^4 + 3x) \rightarrow y' = (10x + 28x^3 + 3)$

b) $y = (6x^5 + 4x^2 + 7x + 5x^3) \rightarrow y' = (30x^4 + 8x + 7 + 15x^2)$

c) $y = (x^5 + 7x^4 + 2x^3) \rightarrow y' = (5x^4 + 28x^3 + 6x^2)$

d) $y = (3x^3 + 9x^6 + 2x^8) \rightarrow y' = (9x^2 + 54x^5 + 16x^7)$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \left(7x^2 + 3x + \frac{1}{x}\right) = (7x^2 + 3x + x^{-1}) \rightarrow y' = 14x + 3 - x^{-2} = 14x + 3 - \frac{1}{x^2}$

b) $y = \left(5x^3 + 2x^2 + \sqrt{x}\right) = \left(5x^3 + 2x^2 + x^{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y' = 15x^2 + 4x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 15x^2 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3)(x^2-5x+2)} \rightarrow y = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-5x^2+2x+3x^2-15x+6} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3-2x^2-13x+6}$

$y' = \frac{\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}(x^3-2x^2-13x+6)-(x)^{\frac{1}{2}}(3x^2-4x-13)}{(x^3-2x^2-13x+6)^2} = \frac{-5x^3+6x^2+13x+6}{\sqrt{x}(x+3)^2(x^2-5x+2)^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}\cdot(x+5)}{(x^2-5)} \rightarrow y' = \frac{\left[\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}(x+5)+\sqrt{x}\cdot 1\right](x^2-5)-2x\sqrt{x}\cdot(x+5)}{(x^2-5)^2} = \frac{-x^3-15x^2-15x-25}{2\sqrt{x}(x^2-5)^2}$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{7x^2}{3} + \frac{3x}{5} + \frac{8}{3x} = \frac{7x^2}{3} + \frac{3x}{5} + \frac{8}{3}x^{-1} \rightarrow y' = \frac{14x}{3} + \frac{3}{5} - \frac{8}{3}x^{-2} = \frac{14x}{3} + \frac{3}{5} - \frac{8}{3x^2}$

b) $y = \frac{5x^3}{2} + \frac{2x^2}{3} + 6\frac{\sqrt{x}}{5} = \frac{5x^3}{2} + \frac{2x^2}{3} + \frac{6}{5}x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{15x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{6}{5}\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{3}{5\sqrt{x}}$

c) $7y = \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{7} + \frac{7}{\sqrt{x}} \rightarrow y = \frac{1}{7}\left(\frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{7} + 7x^{-\frac{1}{2}}\right)$

$y' = \frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3} + \frac{10x}{7} + 7\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{12x^2}{3} + \frac{10x}{7} - \frac{7}{2\sqrt{x^3}}\right)$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-1)(2x-3)}{x+2} \rightarrow y = \frac{2x^2-3x-2x+3}{x+2} \rightarrow y = \frac{2x^2-5x+3}{x+2}$

$y' = \frac{(4x-5)(x+2)-(2x^2-5x+3)}{(x+2)^2}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

b) $y=\frac{(3x^2+4)(4x-2)}{7x-1} \rightarrow y=\frac{12x^3-6x^2+16x-8}{7x-1}$

$y'=\frac{(36x^2-12x+16)(7x-1)-7(12x^3-12x^2+16x-8)}{(7x-1)^2}$

c) $y=\frac{(8x+5x^2)(2x^5-7)}{4x+6} \rightarrow y=\frac{16x^6-56x^2+10x^7-35x^2}{4x+6} \rightarrow y=\frac{16x^6+10x^7-91x^2}{4x+6}$

$y'=\frac{(96x^5+70x^6-182x)(4x+6)-4(16x^6-91x^2+10x^7)}{(4x+6)^2}$

d) $y=\frac{(x+9)(2x-3)}{(x+3)(x+2)} \rightarrow y=\frac{2x^2-3x+18x-27}{x^2+5x+6} \rightarrow y=\frac{2x^2+15x-27}{x^2+5x+6}$

$y'=\frac{(4x+15)(x^2+5x+6)-(2x^2+15x-27)(2x+5)}{(x^2+5x+6)^2}$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x^3+5} \rightarrow y=(x^3+5)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y'=\frac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)$

b) $y=\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1} \rightarrow y=(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}} \rightarrow y'=-\frac{1}{3}(2x^3+4x^2-1)^{\frac{2}{3}}(6x^2+8x)$

c) $y=(5x^3+2)^5 \rightarrow y'=5(15x^2+2)^4(15x^2)$

d) $y=(2x^2+5x)^9 \rightarrow y'=9(2x^2+5x)^8 4x$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\sqrt{x^3+5}\cdot(x^7+3x^2)^6 \rightarrow y=(x^3+5)^{\frac{1}{2}}\cdot(x^7+3x^2)^6$

$y'=\left[\frac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}(3x^2)(x^7+3x^2)^6+(x^3+5)^{\frac{1}{2}}\cdot 6(x^7+3x^2)^5\cdot(7x^6+6x)\right]$

b) $y=\frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1} \rightarrow y=\frac{(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{x+1}$

$y'=\frac{\frac{1}{3}(2x^3+4x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(6x^2+8x)(x+1)-(2x^3+4x^2-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^2}$

c) $y=(5x^3+2)^5\cdot(x^5+6x^8) \rightarrow y'=5(5x^3+2)^4(15x^2)(x^5+6x^8)+(5x^3+2)^5(5x^4+48x^7)$

d) $y=\frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

$y'=\frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)^2-(2x^3-5x^2)^9-2(7x^4-5x^3)(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^4}=$

$=\frac{9(2x^3-5x^2)^8(6x^2-10x)(7x^4-5x^3)-(2x^3-5x^2)^9-2(28x^3-15x^2)}{(7x^4-5x^3)^3}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3} \rightarrow y' = \left(e^{x^5+4x^3}\right)(5x^4 + 12x^2)$

b) $y = \left(e^{2x^3+7x^2}\right)^7 \rightarrow y' = 7\left(e^{2x^3+7x^2}\right)^6 \cdot \left(e^{2x^3+7x^2}\right) \cdot (6x^2 + 14x)$

c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5} \rightarrow y' = \left(e^{(3x^5+5x^3)^5}\right)(5(3x^5 + 5x^3)^4)(15x^4 + 15x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}} = e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}}$

$y' = \left[\left(e^{(6x^5-9x^8)^{\frac{2}{3}}}\right)\left(\frac{2}{3}(6x^5 - 9x^8)^{-\frac{1}{3}}\right)(30x^4 - 72x^7)\right]$

14. La derivada de $y = cos(x)$ es $y' = -sen(x)$. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(x^5 - 7x^3) \rightarrow y' = -\operatorname{sen}(x^5 - 7x^3)\,(5x^4 - 21x^2)$

b) $y = (\cos(3x^3 - 5x^2))^7 \rightarrow y' = 7\left(\cos(3x^3 - 5x^2)\right)^6 \cdot (-\operatorname{sen}(3x^3 - 5x^2))(9x^2 - 10x)$

c) $y = \cos^5(4x^5 - 8x^3) \rightarrow y' = 5(\cos(4x^5 - 8x^3))^4 \cdot \left(-\operatorname{sen}(4x^5 - 8x^3)\right) \cdot (20x^4 - 24x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{\cos^4(2x^2 + 4x^7)} = \left(cos(2x^2 + 4x^7)\right)^{\frac{4}{3}}$

$y' = \left[\frac{4}{3}\left(cos(2x^2 + 4x^7)\right)^{\frac{1}{3}} \cdot (-\operatorname{sen}(2x^2 + 4x^7))(4x + 28x^6)\right]$

15. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

$y' = 3x^2 - 3$

Para x = 0 $y'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$

Punto: (0,0) Pendiente: -3

Ecuación recta tangente: $y - 0 = -3(x - 0) \rightarrow y = -3x$

Para x = 1 $y'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$

Punto: (1,-2) Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y + 2 = 0 \rightarrow y = -2$

Para x = 2 $y'(2) = 3(2)^2 - 3 = 6$

Punto: (2,2) Pendiente: 6

Ecuación recta tangente: $y - 2 = 6(x - 2) \rightarrow y = 6x - 12 + 2 \rightarrow y = 6x - 10$

BY NC SA

Textos Marea Verde

16. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en x= 2

$$y' = 3x^2 \rightarrow y'(2) = 3(2)^2 = 12$$

Pendiente: 2

Ecuación recta tangente: $y - y(2) = 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 24 - 8 \rightarrow y = 12x - 16$

b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en x= 1

$$y' = 4x + 4 \rightarrow y'(1) = 4\,(1) + 4 = 8$$

Pendiente: 8

Ecuación recta tangente: $y - y(1) = 8(x - 1) \rightarrow y = 8x - 8 + (2 + 4 - 5) \rightarrow y = 8x - 7$

c) $y = x^3 - 7x^2 + 3x$ en x= 0

$$y' = 3x^2 - 14x \rightarrow y'(0) = 3\,(0)^2 - 14(0) = 0$$

Pendiente: 0

Ecuación recta tangente: $y - y(0) = 0(x - 0) \rightarrow y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$

17. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en x = 3

$$y' = 3x^2 + 3 \rightarrow y'(3) = 3(3)^2 + 3 = 30$$

Pendiente: 30

b) $y + 2x - 5 = 0$

$$y = -2x + 5 \rightarrow y' = -2$$

Pendiente: -2

c) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en x= 1

$$y' = 12x^2 - 10x \rightarrow y'(1) = 12\,(1)^2 - 10\,(1) = 2$$

Pendiente: 2

18. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela:

a) a la recta $y = 0$;

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Para que la tangente sea paralela a la recta y = 0, su pendiente debe ser cero, es decir $\rightarrow y' = 0$

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y(-1) = (-1)3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$y(1) = (1)3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

Solución: (1, 0), (–1, 4);

Textos Marea Verde

b) a la recta $y = 6x$.

$$y = x^3 - 3x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$y(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) + 2 = 7 - 3\sqrt{3}$$

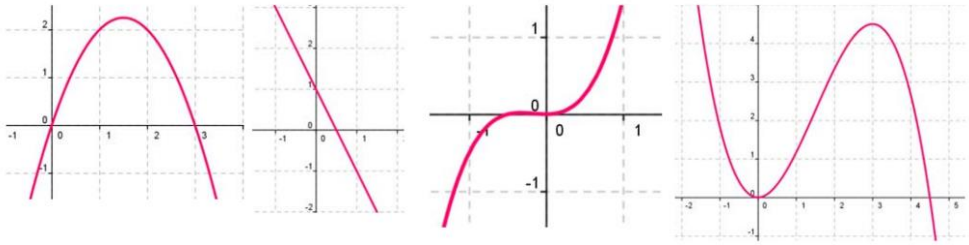
solución $(\sqrt{3}, 2), (-\sqrt{3}, 2)$

19. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $\sqrt{x^3}$ en x = 0.

$$y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad y'(0) = \frac{3}{2}0^{\frac{1}{2}} = 0$$

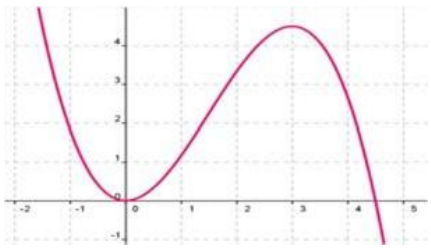
Solución: y = 0.

20. Si $f'(x) = x\,(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



$$f'(x) = x(3 - x) = 0 \rightarrow x = 0 \;\; x = 3$$

Tiene extremos relativos en los puntos x= 0 y x=3, por lo que la única gráfica que cumple los requisitos es la siguiente:



21. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Para saber en qué puntos de x la pendiente es 12, igualamos f'(x) a 12

$$y' = 12x^2 - 12 \rightarrow 12x^2 - 12 = 12 \rightarrow 12x^2 = 24 \rightarrow x^2 = \frac{24}{12} \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Utilizamos la fórmula $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ para calcular las rectas. Después calculamos $f(\sqrt{2})$

$$a = \pm\sqrt{2} \rightarrow y = f(\pm\sqrt{2}) + f'(\pm\sqrt{2})(x - \pm\sqrt{2}) \rightarrow$$

$$f(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^3 - 12(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Reemplazamos en la fórmula para calcular la recta tangente

$y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2}) \rightarrow y = -4\sqrt{2} + 12x - 12\sqrt{2} \rightarrow y = 12x - 16\sqrt{2}$

Y repetimos el proceso con $a = -\sqrt{2}$

$f(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 - 12(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

Reemplazamos en la fórmula para calcular la recta tangente

$y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2}) \rightarrow y = 4\sqrt{2} + 12x + 12\sqrt{2} \rightarrow y = 12x + 16\sqrt{2}$

Calculamos el mínimo de $y' = 12x^2 - 12$; $y'' = 24x$; $24x = 0$, $x = 0$; $y''' = 24 > 0$, mínimo.

$y'(0) = 12 \cdot 0^2 - 12 = -12$; $f(0) = 4(0)^3 - 12(0) = 0$

El menor valor de la pendiente es -12 y se alcanza en (0, 0).

22. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto A (–1, 2). ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

$$f(x) = x^3 - 3x \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \rightarrow y = 2 + 0(x - 0) \rightarrow y = 2$$

$$x^3 - 3x = 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \rightarrow x = -1 , x = 2$$

Por ende, x= 2 es el otro punto por donde pasa la recta en la función. Llamaremos a este punto B (2,2)

23. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A (1, 2) y es tangente a la recta $y = x$ en el punto O (0, 0).

Tenemos que utilizar la información a nuestra disposición para calcular las tres incógnitas.

Primero, sabiendo que f(x) es tangente a la recta en (0,0), sabemos que cuando x=0; y=0

Por ende, sabemos que c=0

También sabemos que porque la pendiente de la recta y=x es 1

$$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(0) = 3a \cdot 0 + b = 1 \rightarrow f'(0) = b = 1$$

Luego, para encontrar el valor de a podemos utilizar más información: f(x) pasa por el punto A (1,2)

$$f(1) = 2 \rightarrow a \cdot 1^3 + 1 \cdot 1 + 0 = 2 \rightarrow \boldsymbol{a = 1, b = 1, c = 0}$$

24. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A (1, 0).

$f'(x) = 3x^2 + b \rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1 + b = 3 + b$

$g'(x) = a - 2x \rightarrow g'(1) = a - 2 \cdot 1 = a - 2$

$3 + b = a - 2 \rightarrow a = b + 5$

$f(1) = 0 \rightarrow 1 + b + c = 0$

Textos Marea Verde

$g(1) = 0 \rightarrow a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$

$1 = 5 + b \rightarrow b = -5 + 1 \rightarrow b = -4$; $1 - 4 + c = 0 \rightarrow c = 3$

$\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = -4}$, $\mathbf{c = 3}$

25. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$

$y' = 2x \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$ sustituimos en la recta, $y = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a = 0 \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{4}$

26. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x^2$.

$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$

$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^3} > 0$, $y'(10) = -\frac{2}{(10)^3} < 0$

Creciente: $(-\infty, 0)$ y Decreciente $(0, \infty)$

27. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/x$.

$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

$y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot x}{(x^2)} = -\frac{1}{x^2}$

$y'(-10) = -\frac{2}{(-10)^2} < 0$, $y'(10) = -\frac{2}{(10)^2} < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 6x \rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x-2) = 0$; $x = 0$, $x = 2$

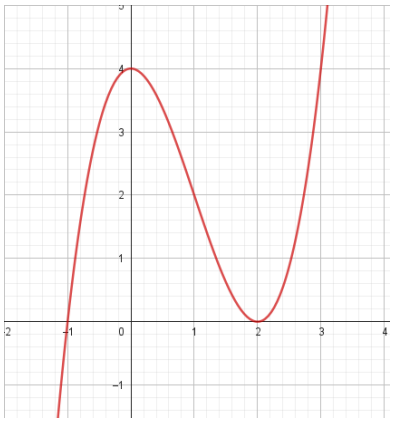
$y'(-10) = 3(-10)(-10-2) > 0$; $y'(1) = 3(1)(1-2) < 0$; $y'(10) = 3(10)(10-2) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ **Decreciente:** $(0,2)$

$y(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 4 = 4 \rightarrow Máximo: (0,4)$; $y(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 0 \rightarrow Mínimo: (2,0)$

BY NC SA

Textos Marea Verde



29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

$f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 6 = 0$; *Punto corte con el eje de ordenadas* $(0,6)$

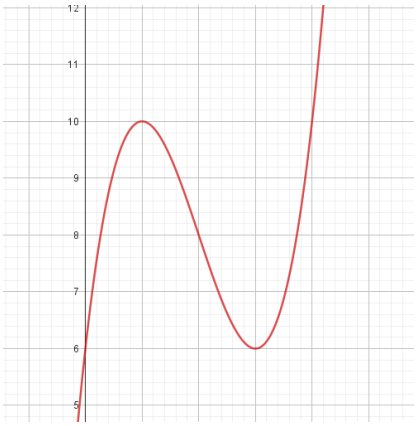
$y' = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$; $x = 1 \;\; x = 3$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 12(-10) + 9 > 0 \qquad f'(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 < 0$

$f'(10) = 3(10)^2 - 12(10) + 9 > 0$

Creciente: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ **Decreciente:** $(1,3)$

Existe un máximo relativo cuando x= 1 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 3 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

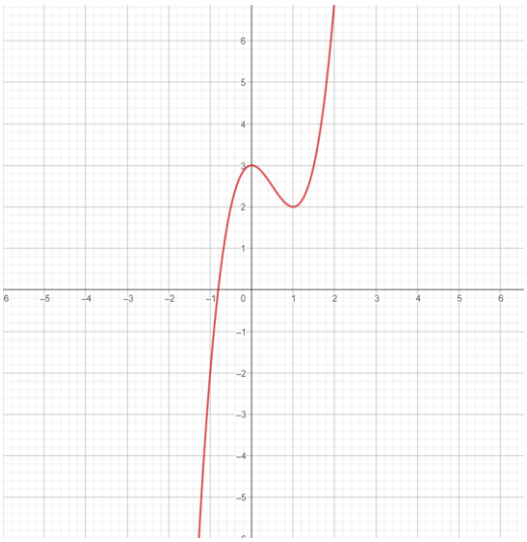
$y' = 6x^2 - 6x \rightarrow y' = 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0 \;\; x = 1$

$f'(-10) = 6(-10)^2 - 6(-10) > 0; f'(0{,}5) = 6(0{,}5)^2 - 6(0{,}5) < 0 ; f'(10) = 6(10)^2 - 6(10) > 0$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ **Decreciente:** $(0,1)$

Existe un máximo relativo cuando x= 0 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 1 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.

BY NC SA



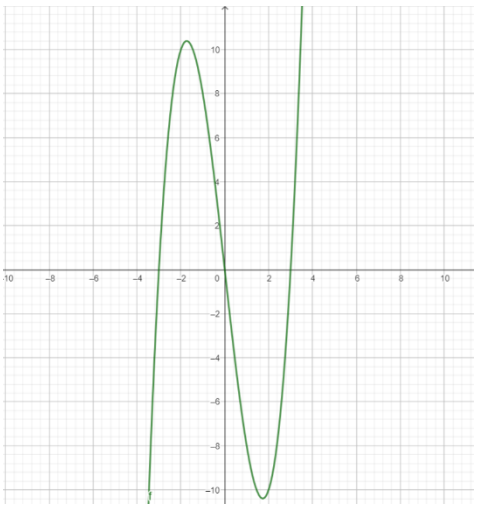
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$y' = 3x^2 - 9 \rightarrow y' = 3x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = -3 \; x = 3$

$f'(-10) = 3(-10)^2 - 9 > 0 \quad ; \quad f'(0) = 3(0)^2 - 9 < 0 \quad ; \quad f'(10) = 3(10)^2 - 9 > 0$

Creciente: $(-\infty - 3) \cup (3, \infty)$ **Decreciente:** $(-3,3)$

Existe un máximo relativo cuando x= -3 pues la función deja de crecer y comienza a decrecer y existe un mínimo cuando x= 3 pues la función deja de decrecer y comienza a crecer.



32. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [–7, 2] y en el intervalo [0, 8].

$y' = 12x^2 - 12x + 72 \rightarrow y' = 12(x^2 - x + 6)$

No tiene soluciones reales, no existen máximos o mínimos relativos

Textos Marea Verde

En [–7, 2] :

$f(-7) = 4(-7)^3 - 6(7)^2 + 72(-7) = -1372 - 294 - 504 = -2170$;
$Mínimo\ absoluto\ (-7, -2170)$

$f(2) = 4(2)^3 - 6(2)^2 + 72(2) = 32 - 24 + 144 = 152$; $Máximo\ absoluto\ (2, 152)$

En [0, 8]:

$f(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 + 72(0) = 0$ $Mínimo\ absoluto\ (0,\ 0)$

$f(8) = 4(8)^3 - 6(8)^2 + 72(8) = 2048 - 384 + 576 = 2240$; $Máximo\ absoluto\ (8,\ 2240)$

33. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo [–3, 3].

Máximos y mínimos absolutos:

$$f(3) = x + 3 = 6 \rightarrow Máximo\ absoluto\colon (3,6)$$
$$f(-3) = -(-3 + 3) = 0 \rightarrow Mínimo\ absoluto\colon (-3,0)$$

34. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0.8t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 5 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

$y(t) = 15t + 0{,}8\,t^2$; $v(t) = 15 + 1{,}6t$

Para t = 0

$v(0) = 15 + 1{,}6\,(0) = 15$ m/s

Para t = 5

$v(5) = 15 + 1{,}6\,(5) = 15 + 8 = 23$ m/s

$120\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = \frac{100}{3}\ \frac{m}{s}$

$15 + 1{,}6t = \frac{100}{3}$; $45 + 4{,}8t = 100$; $t = \frac{100-45}{4{,}8} = 11{,}46\ seg$

35. La temperatura, T, en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r, en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50°, 75°, 100°? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para t = 90 segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

$$r = 40 + 0.001T \rightarrow v(t) = \frac{dr}{dt} = 0{,}001$$

Por lo tanto, la velocidad a la que varía el radio cuando la temperatura es de 50°, 75° y 100° es constante y es de 0,001mm/°.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$T = 200 - \frac{500}{t} \rightarrow v(T) = \frac{500}{t^2}$

Para t=30 segundos:

$v(30) = \frac{500}{30^2} = \frac{500}{900} = 0{,}556$ °/s

Para t=90 segundos:

$v(90) = \frac{500}{90^2} = \frac{500}{8100} = 0{,}061$ °/s

$r = 40 + 0.001T \ ; T = 200 - \frac{500}{t}$

$r(t) = \frac{dr}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = 0{,}001 \cdot \frac{500}{t^2}$

Para t=10 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{10^2} = 0{,}05$ mm/s

Para t=30 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{30^2} = 0{,}001$ mm/s

Para t=90 segundos:

$r(10) = 0{,}001 \cdot \frac{500}{90^2} = 0$ mm/s

36. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115 m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

$d = \frac{1}{2} g t^2 \ ; \quad v = g \cdot t$

Para la primera plataforma (57 m):

$d = \frac{1}{2} 9.8t^2 \rightarrow 57 = 4{,}9t^2 \rightarrow t^2 = \frac{57}{4.9} \rightarrow t = \sqrt{11{,}63} = 3{,}41\ s$

$v = (9{,}8)(3{,}41) = 33{,}38$ m/s

Para la segunda plataforma (115 m):

$d = \frac{1}{2} 9.8t^2 \rightarrow 115 = 4{,}9t^2 \rightarrow t^2 = \frac{115}{4.9} \rightarrow t = \sqrt{23{,}47} = 4{,}85\ s$

$v = (9{,}8)(4{,}85) = 47{,}63$ m/s

Para la tercera plataforma (274 m):

$d = \frac{1}{2} 9.8t^2 \rightarrow 274 = 4{,}9t^2 \rightarrow t^2 = \frac{274}{4.9} \rightarrow t = \sqrt{55{,}92} = 7{,}48\ s$

$v = (9{,}8)(7{,}48) = 73.30$ m/s

BY NC SA

Textos Marea Verde

37. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

a) $\boldsymbol{e = t^2 - 4t + 3}$

$v(t) = \frac{de}{dt} = \ v = 2t - 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = 2$

b) $\boldsymbol{e = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3}$

$v(t) = \frac{de}{dt} \ \rightarrow \ v = 6t^2 - 10t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = 36t - 10$

c) $\boldsymbol{e = -t^2 + 4t + 3}$

$v(t) = \frac{de}{dt} \ \rightarrow \ v = -2t + 4$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = -2$

d) $\boldsymbol{e = (3t - 4)^2}$

$v(t) = \frac{de}{dt} \ \rightarrow \ v = 9t^2 + 16 - 24t$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \ \rightarrow \ a = 18t - 24$

38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

$V = 0.3t \, m^3 \ \rightarrow \ V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ diámetro = 10 ; radio = 5

$\pi \cdot r^2 \cdot h = 0{,}3t \ \rightarrow \ h = \frac{0{,}3t}{\pi \cdot r^2} \ \rightarrow \ h' = v = \ \frac{0.3}{\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}3}{25\pi}$

Para t=2

$v(2) = \ \frac{0{,}3}{25\pi} = \ 0{,}0038$ **m/s**

Para t=5

$v(5) = \ \frac{0{,}3}{25\pi} = \ 0{,}0038$ **m/s**

La velocidad es 0,0038 m/s

39. La distancia, d, en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0.2t^2 + 0.01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos,

BY NC SA

Textos Marea Verde

¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

$d(t) = 0.2t^2 + 0.01t^3 \rightarrow v(t) = \frac{d(d)}{dt} = 0.4t + 0.03t^2$

Para t= 2

$v(2) = 0.4(2) + 0.03(2)^2 = 0.8 + 0.12 = 0{,}92$ m/s

Para t= 4

$v(4) = 0.4(4) + 0.03(4)^2 = 1.6 + 0.48 = 2{,}08$ m/s

Para t= 7

$v(7) = 0.4(7) + 0.03(7)^2 = 2.8 + 1.47 = 4.27$ m/s

Para t= 15

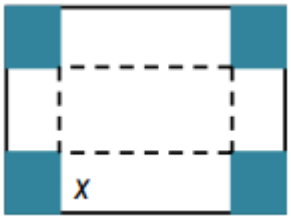
$v(15) = 0.4(15) + 0.03(15)^2 = 6 + 6.75 = 12{,}75$ m/s

$60\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1000m}{1km} \cdot \frac{1h}{3600s} = 16{,}67$ m/s

$0{,}4t + 0{,}03t^2 = 16{,}67 \rightarrow 0{,}4t + 0{,}03t^2 - 16{,}67 = 0 \rightarrow t = \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{(0{,}4)^2 - 4(0{,}03)(-16{,}67)}}{2(0{,}03)} =$

$= \frac{-0{,}4 \pm \sqrt{2{,}1604}}{0{,}06} = \frac{0{,}4 + 1{,}469}{0{,}06} \rightarrow t = \frac{1{,}068}{0{,}06} = 17{,}8\ s$

40. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.



$V(x) = x(25 - 2x)(20 - 2x) \rightarrow V'(x) = (25 - 2x)(20 - 2x) - 2x(20 - 2x) - 2x(25 - 2x) =$

$(25 - 2x)(20 - 2x) - 2x(20 - 2x) - 2x(25 - 2x) = 0$

$(500 - 90x + 4x^2) - (40 - 4x^2) - (50 - 4x^2) = 500 - 90x + 4x^2 - 40x + 4x^2 - 50x + 4x^2 = 0$

$500 - 180x + 12x^2 = 0 \rightarrow 12x^2 - 180x + 500 = 0 \rightarrow 3x^2 - 45x + 125 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{45 \pm \sqrt{(45)^2 - 4(3)(125)}}{2\ (3)} = \frac{45 \pm \sqrt{525}}{6} = \frac{45 \pm 5\sqrt{21}}{6}$

$x_1 = \frac{45 + 5\sqrt{21}}{6} = 11{,}31\ cm$ *no válido* ; $x_2 = \frac{45 - 5\sqrt{21}}{6} \approx 3{,}7\ cm$

BY NC SA

Textos Marea Verde

41. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 150 \rightarrow \pi \cdot r^2 \cdot h \rightarrow h = \frac{150}{\pi \cdot r^2}$

$A = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot r \cdot \frac{150}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{300}{r} + 2\pi r^2$

$A' = -\frac{300}{r^2} + 4\pi r = 0 \rightarrow \frac{300}{r^2} = 4\pi r$

$300 = 4\pi r^3 \rightarrow \frac{300}{4\pi} = r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{300}{4\pi}} \rightarrow \boldsymbol{r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}}$

$A'' = \frac{600}{r^3} + 4\pi \quad ; \quad A''\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right) = \frac{600}{\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^3} + 4\pi > 0, \quad mínimo$

$\boldsymbol{h = \frac{150}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}} = \frac{150}{\pi \cdot 2{,}879} = 137{,}46\ m}$

42. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que, según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: $y = 100 - 80/(x + 5)$. Sin embargo, el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

$y = 100 - \frac{80}{(x+5)} - 2x \quad ; \quad y' = \frac{80}{(x+5)^2} - 2 \quad ; \frac{80}{(x+5)^2} - 2 = 0$

$2(x+5)^2 = 80 \; ; \quad 2x^2 + 20x - 30 = 0 \; ; \; x^2 + 10x - 15 = 0 \; , \; x = -5 \mp 2\sqrt{10}$

Solución válida, $x = -5 + 2\sqrt{10}$, la otra es negativa; $y'' = \frac{-160}{(x+5)^3}$ que es negativa para $x = -5 + 2\sqrt{10}$

Por tanto, es un máximo.

43. En una industria la función $u = f(t)$ indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t, y la función $v = g(t)$ indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. (Vamos a considerar que ambas funciones son derivables, aunque en realidad el número de personas es siempre un número natural, y por tanto son funciones escalonadas). La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Si la fuerza de trabajo aumenta un 3 % anual, ($u' = 0.03u$) y la producción por trabajador aumenta un 2 % anual ($v' = 0.02v$) total, determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$f'(t) = 0{,}03 \cdot f(t) \quad ; \quad g'(t) = 0{,}02 \cdot g(t)$

$0{,}03 \cdot f(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot 0{,}02 \cdot g(t) \rightarrow 0{,}03\, u \cdot v + 0{,}02\, u \cdot v \rightarrow 0{,}05\, u \cdot v$

Aumenta un 5%

Textos Marea Verde

44. En el ejercicio anterior considera que la función que indica el número de personas que constituyen la fuerza del trabajo en el instante t es $u = f(t) = 3t$ y que la función $v = g(t) = t^2 + 3t$, indica la producción media por persona incorporada a la fuerza de trabajo en el instante t. La producción total es igual a $y = u \cdot v$. Determina la tasa de crecimiento instantánea de la producción total.

$$y = u \cdot v = (3t) \cdot (t^2 + 3t) \rightarrow y = 3t\,(t^2 + 3t) = 3t^3 + 9t^2 \rightarrow y' = 9t^2 + 18t$$

45. Si en el ejercicio anterior consideras que la fuerza de trabajo ha disminuido un 5 % anual, y la producción por trabajador ha aumentado un 3 % anual total, determina entonces la tasa de crecimiento instantánea de la producción total. ¿Crece o decrece la producción total?

$$\frac{dp}{dt} = P(x) \cdot 0{,}03 \quad ; \frac{dT}{dt} = T(x) \cdot (-0{,}05)$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = \frac{d(P \cdot T)}{dt} \rightarrow \frac{d\,(PT)}{dt} = P \cdot \frac{dT}{dt} + T \cdot \frac{dP}{dt}$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = P(x) \cdot \big(T(x) \cdot (-0.05)\big) + T(x) \cdot (P(x) \cdot 0.03) \rightarrow \frac{d(PT)}{dt} =$$

$$= -0.05 \cdot P(x) \cdot T(x) + 0.03 \cdot P(x) \cdot T(x)$$

$$\frac{d(PT)}{dt} = -0.02 \cdot P(x) \cdot T(x)$$

Disminuye un 2% anual.

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

a) $\lim_{b\to x} \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ **c)** $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **d)** $\lim_{h\to 0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

2. La derivada de $y = \sqrt{x}\,(x-1)$ en x= 1 es:

a) 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** 1 **d)** 2

$$y'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+h}(1+h-1)-\left(\sqrt{1}(1-1)\right)\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}h}{h} = \sqrt{1+0} = 1$$

3. La derivada de $y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$ en x= es:

a) $\frac{15}{11}$ **b)** $-\frac{10}{25}$ **c)** $-\frac{16}{121}$ **d)** $\frac{1}{3}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{(2+h)^2+1}{(2+h)^3+3}-\frac{2^2+1}{2^3+3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(4+4h+h^2+1)+1}{(8+12h+6h^2+h^3)+3}-\frac{4+1}{8+3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h+h^2+5}{(11+12h+6h^2+h^3)}-\frac{5}{11}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{11(4h+h^2+5)-5(11+12h+6h^2+h^3)}{11(11+12h+6h^2+h^3)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{11h^2+44h+55-5h^3-30h^2-60h-55}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-5h^3-19h^2 16h-}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-5h^2-19h-16)}{h\cdot 11(11+12h+6h^2+h^3)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-5h^2-19h-16)}{11(11+12h+6h^2+h^3)} = -\frac{16}{11\cdot 11} = -\frac{16}{121}$$

4. La derivada de $y = e^{x^{2+}\,3}$ es:

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ **b)** $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ **c)** $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ **d)** $y' = 2e^{x^2}$

$$y = e^{x^2+3} \rightarrow y' = \left(e^{x^2+3}\right)(2x)$$

5. La derivada $y = sen(x^3)$ es:

a) $y' = 3\left(sen\,(x)\right)^2 \cdot (\cos\,(x)^3)$ **b)** $y' = cos\,(x^3) \cdot 3x^2$

c) $y' = cos\,(x^3) \cdot \text{sen}(3x^2)$ **d)** $y' = 3(\text{sen}(x))^2 \cdot \left(\cos\,(x)\right)$

$$y = sen\,x^3 \rightarrow y' = 3x^2 \cdot \cos x^3$$

6. La ecuación de la recta tangente de la gráfica de la función $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x - 6$ **b)** $y = x + 8$ **c)** $y = 2x + 6$ **d)** $y = 2x + 8$

$y' = -6x^2 + 6x + 2 \rightarrow y'(1) = -6(1)^2 + 6\,(1) + 2 = 2$; $y(1) = 5 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1^2 - 2\cdot 1^3 = 8$

$y = 8 + 2(x-1) \rightarrow y = 8 + 2x - 2 \rightarrow y = 2x + 6$

BY NC SA
Textos Marea Verde

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x + 3$ **b)** $y = x + 8$ **c)** $y = 6x$ **d)** $y = 0$

$y' = -6x^2 + 6x \rightarrow y'(0) = -6(0)^2 + 6(0) = 0$; $y(0) = 3\cdot 0^2 - 2\cdot 0^3 = 0$

$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

a) creciente **b) decreciente** **c) alcanza un mínimo** **d) alcanza un máximo**

$y' = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 1 \rightarrow y'(1) = 12\,(1)^3 - 15\,(1)^2 + 4\,(1) - 1 = 0$

$y'(0) = 12\,(0)^3 - 15\,(0)^2 + 4\,(0) - 1 < 0$; $y'(2) = 12\,(2)^3 - 12\,(2)^2 + 4\,(2) - 1 < 0$

Decrecimiento: $(-\infty, 1)$ Crecimiento: $(1, \infty)$

9. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)\,x$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < 0$, $decreciente$; $0 < x < 4$, $decreciente$; $x > 4$, $creciente$

b) $x < 0$, $decreciente$; $0 < x < 4$, $creciente$; $x > 4$, $decreciente$

c) $x < 0$, $creciente$; $0 < x < 4$, $creciente$; $x > 4$, $decreciente$

d) $x < 0$, $creciente$; $0 < x < 4$, $decreciente$; $x > 4$, $decreciente$

$f'(x) = x(x - 4) \rightarrow x(x - 4) = 0 \rightarrow x = 0 \;\; x = 4$

$f'(-10) = (-10)(-10 - 4) > 0$; $f'(1) = (1)(1 - 4) < 0$; $f'(10) = (10)(10 - 4) > 0$

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ La función es decreciente en $(0,4)$

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

a) $(0, 0)$ **máximo y** $(1, 1)$ **mínimo** **b)** $(-1, 5)$ **máximo y** $(1, 1)$ **mínimo**

c) $(6, -324)$ **mínimo y** $(1, 1)$ **máximo** **d)** $(0, 0)$ **mínimo y** $(1, 1)$ **máximo**

$y = 3x^2 - 2x^3 \rightarrow y' = 6x - 6x^2 = 0$; $x = 1 \;\; x = 0$

$y'(-10) = 6(-10) - 6(-10)^2 < 0$; $y'(0{,}5) = 6(0{,}5) - 6(0{,}5)^2 > 0$; $y'(10) = 6(10) - 6(10)^2 < 0$

Decreciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Creciente: $(0,1)$

x=0 mínimo f (0) =0 , (0,0) ; x=1 máximo f (1) = 1 , (1,1)

BY NC SA

Textos Marea Verde

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 15: Combinatoria

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

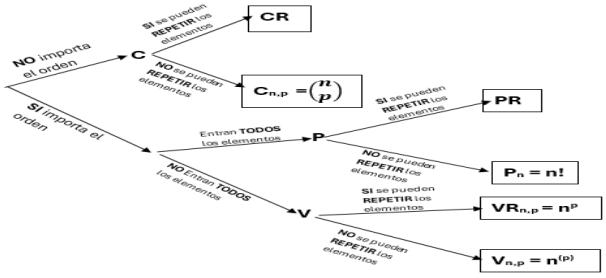
www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

NOCIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLOS
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades de los números combinatorios	$\binom{m}{0} = 1; \binom{m}{m} = 1; \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n};$ $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1; \binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10;$ $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 ...
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

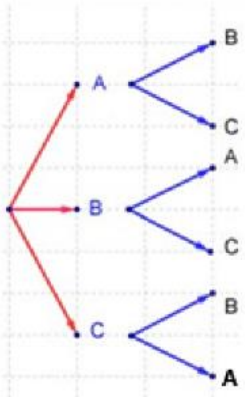


BY NC SA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PERMUTACIONES

1. Haz diagramas en árbol y calcula:
a) Cuántas palabras de 2 letras distintas (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B y C.
b) Cuántas palabras de 3 letras distintas que empiecen por vocal y terminen por consonante. Recuerda hay 5 vocales y 22 consonantes.
a)



$3 \cdot 2 = 6$

b) El abecedario tiene 27 letras, 5 vocales y 22 consonantes.
La primera letra puede ser una de las vocales: 5
La segunda letra puede ser cualquiera de las del abecedario menos la vocal utilizada: 26
La tercera letra puede ser cualquier consonante menos la utilizada anteriormente: 21
Palabras de 3 letras distintas empiezan vocal y terminan consonante: 5·26·21 = 2730.

2. Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar un modelo diferente durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir modelo? Ayuda: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema

5·3·4 = 60 modelos diferentes. Sólo repetirá modelo un día.

3. En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar 2 fichas idénticas de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? Sugerencia: Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si eliminamos su fila y su columna, ¿en cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?

Para colocar la primera ficha tenemos 25 casillas.
Para colocar la segunda ficha nos queda, si eliminamos una fila y una columna, un cuadrado de 4 por 4 que son 16 casillas.
Hay que dividir entre 2, pues donde hemos puesto la segunda ficha ya la hemos contado como posible para poner la segunda, como son idénticas las fichas, se repite la colocación: $(25 \cdot 16) / 2 = 200$

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 4 personas, 4 pasteles distintos comiendo cada persona un pastel?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

BY NC SA
Textos Marea Verde

5. En una carrera de caballos participan 5 caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número 4 llegue el primero, ¿cuál de ellos puede llegar el segundo? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

Cada uno de los 5 puede llegar el primero.

Si el nº 4 llega el primero, en segundo lugar pueden llegar los números 1, 2, 3, y 5.

Si la carrera no está amañada hay $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas distintas de llegar a la meta.

6. ¿De cuántas maneras puedes meter 4 objetos distintos en 4 cajas, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

7. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

Desde 2007 (hasta 2015) hay 28 países que forman la Unión Europea.

Se pueden ordenar de $P_{28} = 28!$ = 304 888 344 611 714 000 000 000 000 000 formas diferentes.

8. En el año 1973 había 6 países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

Disposición de 6 elementos, importa el orden, entran todos: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

9. El desempleo aumenta y en una oficina de colocación hay 7 personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

10. Calcula: **a)** $\frac{6!}{4!}$ **b)** $\frac{7!}{3!}$; **c)** $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$; **d)** $\frac{6!}{5!}$; **e)** $\frac{12!}{11!}$; **f)** $\frac{347!}{346!}$.

a) $\frac{6!}{4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$

d) $\frac{6!}{5!} = \frac{6\cdot 5!}{5!} = 6$

e) $\frac{12!}{11!} = \frac{12\cdot 11!}{11!} = 12$

f) $\frac{347!}{346!} = 347$

Cuando son dos números factoriales que se diferencian en una unidad, al dividir queda el mayor sin factorial

11. Calcula: **a)** $\frac{(n+1)!}{n!}$; **b)** $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; **c)** $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; **d)** $\frac{n!}{(n-1)!}$.

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$

b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} = n + 4$

BY NC SA
Textos Marea Verde

c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = \frac{(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)!}{(n+2)!} = (n+4)\cdot(n+3) = n^2 + 7n + 12$

d) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$

12. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = \frac{5!}{2!}$

b) $10\cdot11\cdot12\cdot 13 = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9!}{9!} = \frac{13!}{9!}$

c) $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!} = \frac{8!}{5!}$

d) $10 \cdot 9 = \frac{10\cdot9\cdot8!}{8!} = \frac{10!}{8!}$

13. Expresa utilizando factoriales: a) (n+3)·(n+2)·(n+1); b) n·(n+1)·(n+2)·(n+3); c) n·(n+1)·(n+2)·… ·(n+k).

a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1) = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{n!} = \frac{(n+3)!}{n!}$

b) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3) = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)!}{(n-1)!}$

c) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k) = \frac{(n+k)\cdot\ldots\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!}$

14. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. No lo calcules. Es un número muy grande.

Disposición de 30 elementos, importa el orden, entran todos: $P_{30} = 30!$

15. Nueve amigos van en bicicleta por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos: $P_9 = 9! = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 362\,880$

2. VARIACIONES

16. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?

Como el 0 no puede estar en primera posición tenemos 9 dígitos para colocar en la primera posición y nos quedan 10 dígitos para 5 posiciones, disposición de 10 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 5), se pueden repetir: $9\cdot VR_{10,5} = 10^5 = 9\cdot100\,000 = 900\,000$

17. Con los 10 dígitos y 27 letras del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando 4 dígitos y 3 letras?

Los números pueden empezar por 0

Números: disposición de 10 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 4), se pueden repetir: $VR_{10,4}$

Letras: disposición de 27 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 3), se pueden repetir: $VR_{27,3}$

En total: $VR_{10,4}\cdot VR_{27,3} = 10^4\cdot27^3 = 196\,830\,000$

BY NC SA
Textos Marea Verde

18. Un byte u octeto es una secuencia de 0 y 1 tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

Disposición de 2 elementos, importa el orden, no entran todos (esta condición correctamente expresada es "no necesariamente entran todos"), se pueden repetir: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

a) $VR_{4,2} = 4^2 = 16$

b) $VR_{4,4} = 4^4 = 256$

c) $VR_{11,2} = 11^2 = 121$

d) $VR_{2,11} = 2^{11} = 2048$

20. Expresa con una fórmula:

Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.
Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.
Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.

a) $VR_{3,5} = 3^5$; b) $VR_{7,2} = 7^2$; c) $VR_{5,4} = 5^4$

21. Disparamos al plato 4 veces. En cada disparo puede que des en el blanco (B) o que no des en el blanco (NB). ¿Cuántos resultados distintos hay?

Acertar o no acertar lo podemos considerar como 0 y 1.
Disposición de 2 elementos, importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$

22. Escribe cuantas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R.

El alfabeto tiene 27 letras, 5 vocales y 22 consonantes.
La primera letra ha de ser consonante: 22
Como la última ha de ser la R, nos quedan 27 letras para la segunda posición: 27
En total: $22 \cdot 27 = 594$

23. Tres personas van a una pastelería en la que sólo quedan 4 pasteles distintos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{4,3} = 4^{(3)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

24. Con los 10 dígitos se desean escribir números de 4 cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la 1ª cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la 2ª? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la 3ª? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

Para escribir la primera cifra tenemos 9 posibilidades porque si el número empieza por 0 no es de cuatro cifras.
Para la segunda cifra también tenemos 9 porque ahora podemos poner el cero, pero no la colocada en primer lugar.
Para la tercera 8 y para la cuarta 7.
En total $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$ posibilidades.

BY NC SA
Textos Marea Verde

25. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{9,5} = 9^{(5)} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

26. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

Disposición de 3 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{3,2} = 3^{(2)} = 3 \cdot 2 = 6$

27. Con los dígitos 3, 5, 7, 8, 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{5,3} = 5^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

28. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

a) $V_{11,6} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 332640$; b) $V_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$; c) $V_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

29. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

a) $\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

b) $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

c) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$

COMBINACIONES

30. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

Reparto de 5 elementos entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,5} = \binom{7}{5} = 21$.

31. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

Reparto de 3 elementos entre 10, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$

32. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Reparto de 5 elementos entre 52, no importa el orden, no se pueden repetir:

$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 1\,497\,000\,960$

BY NC SA
Textos Marea Verde

33. Añade tres filas más al triángulo de Tartaglia de la derecha

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Las 3 nuevas filas serían:

1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

34. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2^m

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

35. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

Mirando en el triángulo del ejercicio 65, $C_{5,3} = 10$; $C_{5,4} = 5$; $C_{5,2} = 10$; $C_{5,5} = 1$.

También, la fila 5 es: $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ $C_{5,3} = \binom{5}{3}$ $C_{5,4} = \binom{5}{4}$ $C_{5,5} = \binom{5}{5}$

1 5 10 10 5 1

36. Desarrolla $(a + b)^6$

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$
$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

37. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

a) $$(a-b)^6 = \binom{6}{0}a^6 - \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 - \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 - \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$
$$= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

b) $$(x-3)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3 \cdot 3 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 3^2 - \binom{4}{3}x \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$$
$$= x^4 - 4x^3 \cdot 3 + 6x^2 \cdot 3^2 - 4x \cdot 3^3 + 3^4 = x^4 - 12 + 54x^2 - 108x + 81$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

c) $(x+2)^7=\binom{7}{0}x^7+\binom{7}{1}x^6 2+\binom{7}{2}x^5 2^2+\binom{7}{3}x^4 2^3+\binom{7}{4}x^3 2^4+\binom{7}{5}x^2 2^5+\binom{7}{6}x 2^6++\binom{7}{7}2^7=$

$=x^7+14x^6+84x^5+280x^4+560x^3+672x^2+448x+128$

d) $(-x+3)^5=\binom{5}{0}(-x)^5+\binom{5}{1}(-x)^4\cdot 3+\binom{5}{2}(-x)^3\cdot 3^2+\binom{5}{3}(-x)^2\cdot 3^3+\binom{5}{4}(-x)3^4++\binom{5}{5}3^5$

$=-x^5+15x^4-90x^3+270x^2-405x+243$

38. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)^5$

La suma de los exponentes de x han de sumar 7, $x^{5-k}\cdot(x^2)^k=x^7$, luego

$5-k+2\cdot k=7$, $k=2$, por tanto el término es,

$\binom{5}{2}(3x)^3\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=10\cdot 3^3\cdot x^3\cdot\frac{x^4}{2^2}$, el coeficiente es $\frac{10\cdot 27}{4}=\frac{135}{2}$

39. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5$

$$\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5=\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5$$

$$\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5=\binom{5}{0}(\sqrt{2})^5-\binom{5}{1}(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+\binom{5}{2}(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-\binom{5}{3}(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+\binom{5}{4}(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-\binom{5}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5=$$

$$=(\sqrt{2})^5-5(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+10(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-10(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+5(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-\left(\frac{x}{2}\right)^5=$$

$$=4\sqrt{2}-10x+5\sqrt{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{16}\sqrt{2}x^4-\frac{1}{32}x^5$$

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

40. Tres amigos A, B y C están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. A le pasa una carta al italiano. B se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? Ayuda: Haz un diagrama circular como el anterior.

El español (A) tiene al italiano (B) a su derecha y al portugués (C) a su izquierda

41. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?

Con Ana y Alejandro hay 4 chicos y 4 chicas en total 8.

En las distribuciones circulares hay que fijar 1 persona, nos quedan 7

Hay $P_7 = 7! = 5\,040$ formas de sentarse en la mesa.

Hay 2 formas de sentar a la pareja, según quien esté a derecha o izquierda, nos quedan 6, luego

Tenemos: $2\cdot P_6 = 2\cdot 6! = 1\,440$ formas en las que están juntos Ana y Alejandro.

Tenemos P_3 y P_3 formas de sentar a chicas y chicos intercalándoles, luego en total tenemos:

$P_3\cdot P_3 = 3!\cdot 3! = 6\cdot 6 = 36$ formas en las que no hay dos chicas ni dos chicos juntos.

BY NC SA
Textos Marea Verde

42. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?

Hay P_7 = 7! = 5 040 poligonales cerradas contando con el propio octógono.

43. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 3, 2 y 2 veces:

$PR_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210$ números distintos.

44. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4, 2, 1, 1 y 1 veces:

$PR_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!\cdot 2!} = 7\,560$ Palabras distintas.

45. Tenemos dos bolas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos ordenarlas? ¿Cuántas no tienen las dos blancas juntas?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4, 3, y 2 veces:

$PR_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1\,260$ formas distintas.

Consideramos las 2 bolas blancas como una sola y contamos de cuantas formas se pueden ordenar:

$PR_8^{4,3,1} = \frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!} = 280$

Al total restamos las que están juntas y tenemos las que están separadas: 1 260 − 280 = 980.

46. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que podemos poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner?, ¿cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? Ayuda: Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.

- Disposición de 7 elementos, importa el orden, no entran todos, se pueden repetir:
  $VR_{10,7} = 10^7 = 10\,000\,000$ contraseñas.
- Disposición de 7 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
  $V_{10,7} = 10^{(7)} = 604\,800$ contraseñas con números distintos.
- Algún número repetido (aparece 2 veces o más): a todas las contraseñas posibles le restamos las que tienen todos los dígitos distintos: 10 000 000 - 604 800 = 9 395 200 contraseñas.
- Tienen un número repetido 2 veces:
  - Cogemos el número que se va a repetir, que va a ocupar dos posiciones, nos quedan 5 posiciones que pueden ocupar cualquiera de los 9 dígitos restantes, tenemos que escoger que 5 dígitos van a ser, distintos del repetido: $C_{9,5}$.
  - Todos los números que se pueden escribir repitiendo uno de los dígitos: $PR_7^{2,1,1,1,1,1}$
  - En total tenemos: $C_{9,5} \cdot PR_7^{2,1,1,1,1,1} = 3\,175\,200$ contraseñas.

Textos Marea Verde

47. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? Ayuda: Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.

- Como son todas iguales no hay que elegir, introducimos una bola en cada caja, nos quedan 2 bolas que podemos introducir, una en cualquiera de las 5 y lo mismo la otra, luego: $5 \cdot 5 = 25$
- Sumamos las maneras que hay sin dejar ninguna vacía y le sumamos dejar una vacía:
  - Ninguna vacía hay 25.
  - Una vacía: elegimos la vacía, hay 5 posibles, nos quedan 4 cajas y 7 bolas, como no puede quedar ninguna vacía, introducimos una en cada caja, nos quedan 3 bolas que las podemos introducir en cualquiera de las cajas: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
  - En total tenemos: $25 + 64 = 89$

48. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? Ayuda: Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.

Supongamos que las pulseras no se pueden voltear: Si no fueran cerradas tendríamos $C_{10,4} = 210$ pulseras diferentes. Al ser cerradas tenemos 210/10 = 21 pulseras distintas.
Si las pulseras se pueden voltear:
Vamos a estudiar los casos a partir de la distancia entre las bolas blancas.
Si las 6 bolas rojas están unidas: Sólo hay 1 caso: 0-0-0-6
Si hay 5 bolas rojas unidas: Hay 2 casos posibles: 1-0-0-5 y 0-1-0-5.
Si hay 4 bolas rojas unidas: Hay 4 casos posibles: 1-1-0-4, 1-0-1-4, 0-0-2-4, 0-2-0-4
Si hay 3 bolas rojas unidas: Hay 6 casos posibles: 0-3-0-3, 3-0-0-3, 0-2-1-3, 0-1-2-3, 2-0-1-3, 1-1-1-3
Si hay 2 bolas rojas unidas: Hay 3 casos posibles: 2-1-1-2, 1-2-1-2, 0-2-2-2.
En total 16 casos.

49. ¿Cuántas formas hay de colocar al rey blanco y al rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente? ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?

- El rey blanco lo podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición.
  - Si el rey blanco está en una esquina amenaza a 3 y excluyendo su posición hay 60 casillas para colocar al rey negro y como hay 4 esquinas en total hay 240 formas.
  - Si el rey blanco está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 5 casillas y excluyendo la suya tenemos 58, en total $58 \cdot 24 = 1392$ formas.
  - Si el rey blanco está en una posición central, hay 36 casillas de este tipo, amenaza 8 casillas que incluyendo la suya no amenaza a 55, en total $55 \cdot 36 = 1980$.
  - Por último $240 + 1392 + 1980 =$ **3612**.
- El alfil blanco lo podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición:
  - Si está en una esquina amenaza a 7, excluyendo la suya, nos quedan $64 - 8 = 56$ para el negro y como hay 4 esquinas, $4 \cdot 56 = 224$ formas.

BY NC SA
Textos Marea Verde

- Si está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 7 casillas y excluyendo la suya tenemos 64 – 8 = 56 para el alfil negro, como para el blanco hay 24, en total hay 24 · 56 = 1344 formas.
- Si está en una de las 20 casillas de las segundas filas amenaza 9 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 10 = 54 casillas, en total, 20 · 54 = 1080.
- Si está en una de las 12 casillas de las terceras filas amenaza 11 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 12 = 52 casillas, en total, 12 · 52 = 624.
- Si está en una de las 4 casillas de las cuartas filas amenaza 13 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 14 = 50 casillas, en total, 4 · 50 = 200.
- En total, 224 + 1344 + 1080 + 624 + 200 = **3472**

- La reina blanca la podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición:
  - Si está en una esquina amenaza a 21, excluyendo la suya, nos quedan 64 – 22 = 42 para la reina negra y como hay 4 esquinas, 4 · 22 = 88 formas.
    - En cualquier casilla, que no sean las esquinas, en horizontal y vertical siempre amenaza 7 en cada dirección, es decir, 14 y en diagonal se comporta como el alfil, luego a los cálculos del alfil hay que sumar siempre 14 casillas más de amenaza.
  - Si está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 7 + 14 = 21 casillas y excluyendo la suya tenemos 64 – 22 = 42 para la reina negra, como para la blanca hay 24, en total hay 24 · 42 = 1008 formas.
  - Si está en una de las 20 casillas de las segundas filas amenaza 9 + 14 = 23 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 24 = 40 casillas, en total, 20 · 40 = 800.
  - Si está en una de las 12 casillas de las terceras filas amenaza 11 + 14 = 25 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 26 = 38 casillas, en total, 12 · 38 = 456.
  - Si está en una de las 4 casillas de las cuartas filas amenaza 13 + 14 = 27 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 28 = 36 casillas, en total, 4 · 36 = 144
  - En total, 88 + 1008 + 800 + 456 + 144 = **2496**.

BY NC SA
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PERMUTACIONES

1. Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
Disposición de 8 elementos, importa el orden, entran todos: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

2. Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Disposición de 2 elementos, importa el orden, entran todos: P_2 para las chicas e igualmente para chicos P_2, como puede empezar por chica o chico multiplicamos por 2:
$2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! \cdot 2! = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

3. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

Disposición de 6 elementos, importa el orden, entran todos: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

4. En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/120.

5. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/5040

6. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
Si empiezan por 5 tenemos un dígito menos, nos quedan 4:
Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Si empiezan por 5 y terminan en 7 tenemos 3 dígitos:
Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

BY NC SA
Textos Marea Verde

VARIACIONES

7. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? Recuerda: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

- 4 cifras distintas: Disposición de 4 elementos (tomados de 6), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{6,4} = 6^{(4)} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- Impares, acaban en 1, 3 o 5, hay 3 dígitos posibles, nos quedan 5 para coger 3: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $3 \cdot V_{5,3} = 3 \cdot 5^{(3)} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
- Para los múltiplos de 4, analizamos las dos últimas cifras que pueden ser: 12, 16, 24, 36, 52, 56 y 64, hay 7 posibles, nos quedan 4 dígitos y 2 para elegir: Disposición de 2 elementos (tomados de 4), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $7 \cdot V_{4,2} = 7 \cdot 4^{(2)} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$

8. ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. Sugerencia: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente

Disposición de 4 elementos (tomados de entre 6), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{6,4} = 6^4 = 1296$.
Viene a ser la suma , 1 111 + 1 112 + … +6 666, la suma de los términos primero y último es igual a la suma de segundo y penúltimo, 7 777, como hay 1296 números y los juntamos de 2 en 2, la suma total es: $(7\,777 \cdot 1296)/2 = 5\,039\,496$.

9. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

3 colores: Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
5 colores: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{5,3} = 5^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$
5 colores, sin ser distintos: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$

10. A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay 6, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

6 días: Disposición de 6 elementos (tomados de 7), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{7,6} = 7^{(6)} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5\,040$
3 días: el primer día elige entre 6, el segundo entre 5 y el tercero entre 4.

Textos Marea Verde

11. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

4 cifras: como la primera no puede ser 0, nos quedan 5 para la primera posición y para las 3 restantes nos quedan 5 cifras, Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{5,3} = 5^{(3)}$
En total hay: $5 \cdot V_{5,3} = 5 \cdot 5^{(3)} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ números de 4 cifras distintas.
Menores de 3 000 son los que empiezan por 1 y por 2, es decir, 2 · Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $2 \cdot V_{5,3} = 2 \cdot 5^{(3)} = 120$.

12. ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?

El menor número de tres cifras es 100, el mayor 999, en total hay 900.

Mayores que 123 hay 900 menos los menores o igual que 123, que son del 100 al 123, en total 24, luego mayores que 123 hay: $900 - 24 = 876$.

13. Con las letras de la palabra "arquetipo" ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?
a) Si todas las letras son distintas.
b) Si se pueden repetir letras.

Hay 5 vocales y 4 consonantes, tenemos que alternar vocal y consonante, luego tenemos que calcular el número de letras con 3 vocales y el de 3 consonates y multiplicarlas y a su vez multiplicar por 2, pues puede empezar en vocal o consonante.

a) $2 \cdot V_{5,3} \cdot V_{4,3} = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2\,880$ palabras.

b) Si las letras se pueden repetir tenemos $2 \cdot VR_{5,3} \cdot VR_{4,3} = 54\,000$ palabras.

14. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formada, en general, por 8 dígitos. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 16 dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se podrían formar ahora? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Byte (8 dígitos): Disposición de 8 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$ bytes.

Byte (16 dígitos): Disposición de 16 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,16} = 2^{16} = 65\,536$ bytes.

Byte (4 dígitos): Disposición de 4 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$ bytes diferentes, no se pueden escribir las letras del alfabeto.

BY NC SA
Textos Marea Verde

COMBINACIONES

15. Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\binom{6}{3} = \binom{20}{1}$ y $\binom{8}{5} \neq \binom{9}{9}$

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20$, $\binom{20}{1} = 20$; $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = 56 \neq \binom{9}{9} = 1$

16. Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4 y 3 veces:

$PR_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$ formas distintas.

También, tenemos 7 posiciones, calculamos todas las formas de coger 4 posiciones y ponemos las bolas negras, en las restantes posiciones ponemos las blancas; igualmente puede calcularse cogiendo 3 posiciones y poner las blancas y en las restantes las negras: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$ formas distintas.

17. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?

Reparto de 3 elementos de entre 5, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$.

18. Calcula: $\boldsymbol{a)}\ \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}}$; $\boldsymbol{b)}\ \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$; $\boldsymbol{c)}\ \binom{\mathbf{20}}{\mathbf{1}}$; $\boldsymbol{d)}\ \binom{\mathbf{34}}{\mathbf{0}}$; $\boldsymbol{e)}\ \binom{\mathbf{47}}{\mathbf{47}}$

a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$

b) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$

c) $\binom{20}{1} = 20$

d) $\binom{34}{0} = 1$

e) $\binom{47}{47} = 1$

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

a) $C_{9,3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\cdot(9-3)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$

b) $C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\cdot(10-6)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$

c) $C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot(8-4)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$

d) $C_{20,19} = \binom{20}{19} = 20$

Textos Marea Verde

e) $C_{47,1} = \binom{47}{1} = 47$

20. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

Reparto de 4 elementos de entre 30, no importa el orden, no se pueden repetir:

$C_{30,3} = \binom{30}{3}$ = 27 405 maneras de elegir 4 alumns de entre 30.

21. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

Reparto de 3 elementos de entre 5, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$.

Sólo el producto $2 \cdot 7 \cdot 5$, es decir hay 1 producto que de número entero.

Para que el resultado sea un número racional no entero, debe entrar 1/3 y no puede entrar π, luego nos quedan, 3 números,2, 7 y 5 para dos factores: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3$

Para que el resultado sea un número irracional debe entrar π, luego nos quedan 4 números para coger 2: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$

22. ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metales?

Reparto de 3 elementos de entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35$.

23. Calcula: a) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$ **b)** $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$

a) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3 1^1 + \binom{4}{2}1^2 1^2 + \binom{4}{3}1^1 1^3 + \binom{4}{4}1^4 =$

$= (1+1)^4 = 2^4 = 16$

b) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$, análogamente, = 2^5 = 32

24. ¿Cuál es la forma más facil de calcular: $\binom{8}{0} + \binom{1}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$ **sin calcular cada uno de los números combinatorios?**

Al igual que el ejercicio anterior, la suma corresponde al desarrollo por el Binomio de Newton:

$(1 + 1)^8 = 2^8 = 256$.

25. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?

Reparto de 3 elementos de entre 10, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

Al escoger 3 ya queda el otro grupo con 7 estudiantes.

Tambien: $C_{10,7} = \binom{10}{7} = 120$

BY NC SA
Textos Marea Verde

26. Vas a examinarte de una asignatura en la que hay 20 temas, y en el examen van a poner 2. ¿Cuántas posibilidades hay? Te sabes sólo 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

Reparto de 2 elementos de entre 20, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{20,2} = \binom{20}{2} = 190$.

Si te sabes 16 temas hay 4 que no te sabes, luego, reparto de 2 elementos de entre 4, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$, de donde la probabilidad de que salgan 2 que no te sepas es: 6/190 = 0,032 es decir un 3,2%

Si te sabes un tema debemos calcular cuantas formas hay de sacar un tema que sabes de 16 y un tema que no te sabes de 4: $C_{16,1} \cdot C_{4,1} = 16 \cdot 4 = 64$ y la probabilidad es: 64/190 = 0,34 el 34%

27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?

Si una actividad se puede quedar sin alumnos, son disposiciones ordenadas, la actividad 1 y la 2 e importa el orden y se pueden repetir, pueden ir todos a la misma, $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$ formas de formar los grupos.

Si ninguna actividad se puede quedar sin alumnos hay dos menos, pues hay que fijar que un alumno vaya a una actividad y otro a la otra, es decir 1024 – 2 = 1022 formas.

28. Desarrolla el binomio a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3$

a) $(4 - x)^5 = \binom{5}{0} 4^5 - \binom{5}{1} 4^4 \cdot x + \binom{5}{2} 4^3 \cdot x^2 - \binom{5}{3} 4^2 \cdot x^3 + \binom{5}{4} 4 \cdot x^4 + \binom{5}{5} x^5 =$

$= 256 - 640x + 640x^2 - 160x^3 + 20x^4 - x^5$

b) $(3 - 2x)^4 = \binom{4}{0} 3^4 - \binom{4}{1} 3^3 2x + \binom{4}{2} 3^2 (2x)^2 - \binom{4}{3} 3(2x)^3 + \binom{4}{4} (2x)^4 =$

$= 81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$

c) $(2ab - 3c)^6 = \binom{6}{0} (2ab)^6 - \binom{6}{1} (2ab)^5 \cdot 3c + \binom{6}{2} (2ab)^4 (3c)^2 - \binom{6}{3} (2ab)^3 (3c)^3 +$

$+ \binom{6}{4} (2ab)^2 (3c)^4 - \binom{6}{5} 2ab(3c)^5 + \binom{6}{6} (3c)^6 =$

$= 64a^6b^6 - 576a^5b^5c + 2160a^4b^4c^2 - 4320a^3b^3c^3 + 4860a^2b^2c^4 - 2916abc^5 + 729c^6$

d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3 = \binom{3}{0} \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \binom{3}{1} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sqrt{2x} + \binom{3}{2} \frac{x}{2} \left(\sqrt{2x}\right)^2 - \binom{3}{3} \left(\sqrt{2x}\right)^3 =$

$\frac{x^3}{2^3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2^2} \cdot \sqrt{2x} + 3 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2x - 2x \cdot \sqrt{2x} = \frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{4} \cdot \sqrt{2x} + 3x^2 - 2x \cdot \sqrt{2x}$

29. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$, ***b)*** $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$, ***c)*** $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$, ***d)*** $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$ la suma de dos números combinatorios con numeradores iguales y denominadores

BY NC SA
Textos Marea Verde

consecutivos es igual a otro número combinatorio con numerador el siguiente y denominador el mayor de los denominadores, luego x + 2 = 7 , **x = 5,** $\binom{7}{5} = \binom{6}{4} + \binom{6}{5}$

b) $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$, dos números combinatorios con numeradores iguales valen lo mismo si la suma de los denominadores es igual al numerador, x + x + 2 = 10, **x = 4**, $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$

c) $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$, la suma de dos números combinatorios con numeradores iguales y denominadores consecutivos es igual a otro número combinatorio con numerador el siguiente y denominador el mayor de los denominadores luego x + 3 = 8 , **x = 5,** $\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5}$,

d) $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$, dos números combinatorios con numeradores iguales valen lo mismo si la suma de los denominadores es igual al numerador, x + x + 2 = 12, **x = 5**, $\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$

30. Calcula x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3} = \binom{4}{x}$, $x \neq 3$; **b)** $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$, $x \neq 3$; **c)** $\binom{4}{3} = \binom{3}{x} + \binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5} = \binom{8}{x} + \binom{8}{5}$; ***e)*** $\binom{7}{x-3} = \binom{6}{3} + \binom{x}{2}$; ***f)*** $\binom{7}{x} = \binom{7}{x+3}$

Aplicando las propiedades dichas en el ejercicio 29.

a) $\binom{4}{3} = \binom{4}{x}$, $x \neq 3$; x + 3 = 4, **x = 1**, $\binom{4}{3} = \binom{4}{1}$,

b) $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$, $x \neq 3$; x + 3 = 7 , **x = 4**, $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$,

c) $\binom{4}{3} = \binom{3}{x} + \binom{3}{2}$; ***x = 3***, $\binom{4}{3} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5} = \binom{8}{x} + \binom{8}{5}$; *2x + 1 = 9* , ***x = 4***, $\binom{9}{5} = \binom{8}{4} + \binom{8}{5}$

e) $\binom{7}{x-3} = \binom{6}{3} + \binom{x}{2}$; **x = 6** , $\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$

f) $\binom{7}{x} = \binom{7}{x+3}$, x + 3 + x = 7 , x = 2, $\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$

31. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3} + \binom{n}{4}$; ***b)*** $\binom{n}{2} + n$; ***c)*** $\binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3}$;

Aplicando las propiedades dichas en el ejercicio 29.

a) $\binom{n}{3} + \binom{n}{4} = \binom{n+1}{4}$

b) $\binom{n}{2} + n = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}=\binom{n+3}{3}$

32. Halla el término sexto en el desarrollo de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

El coeficiente del término sexto en el desarrollo del binomio de Newton será, $\binom{10}{5}$, luego el término sexto es: $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^5=252\cdot\frac{a^5}{2^5}\cdot\frac{(\sqrt{2})^5}{x^5}=\frac{63\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^5}{x^5}$, $\left(\frac{252\cdot4\cdot\sqrt{2}}{32}=\frac{63\sqrt{2}}{2}\right)$,

33. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(-1-5x)^9$.

El coeficiente de x^2 corresponderá al término : $\binom{9}{7}\cdot(-1)^7\cdot(-5x)^2=-36\cdot5^2\cdot x^2=-900x^2$

Luego el coeficiente es: - 900.

34. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

Reparto de 4 elementos de entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,4}=\binom{7}{4}=35$.

35. Se juega una partida de tiro al plato y se disparan sucesivamente 12 platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen 4 éxitos, es decir se acierta 4 veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Reparto de 4 elementos de entre 12, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{12,4}=\binom{12}{4}=495$.

Reparto de 3elementos de entre 11, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{11,3}=\binom{11}{3}=165$.

PROBLEMAS

36. En "Curiosidades y Revista" tienes el problema de Buteo. Con 7 discos y 6 letras, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? Ayuda: En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.

En el año 1559 escribió Buteo en Francia el libro "*Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur*", uno de los primeros libros que tratan sobre Combinatoria. En este libro aparece el siguiente problema: Un cerrajero fabrica candados formados por 7 discos, y en cada disco hay 6 letras. ¿Cuántos candados es posible fabricar de forma que cada uno tenga una combinación diferente para abrir?

Disposición de 7 elementos (tomados de 6), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{6,7}=6^7$ combinaciones distintas.

37. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?

$5\cdot4\cdot6=120$, el menú se puede combinar de 120 formas diferentes.

38. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos puedes obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

Al lanzar una moneda y un dado se pueden obtener: $2\cdot6=12$ resultados.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Si lanzamos dos monedas y un dado tenemos: 2 · 2 · 6 = 24 resultados.
Y si lanzamos 3 monedas y 2 dados obtenemos: 2 · 2 · 2 · 6 · 6 = 288 resultados.

39. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formar?

Se pueden formar: 6 · 8 = 48 parejas distintas.

40. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?

Tenemos 3 colores, 3 figuras y 2 tamaños. La caja consta de: 3 · 3 · 2 = 18 piezas.

41. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?

Los diferentes menú que se pueden elaborar son: 80 · 50 = 40
Para que 40x > 365 el número de postres x debe ser mayor que 365/40 = 9,125. Con 10 postres sería suficiente.

42. En una reunión todas las personas se estrechan la mano. Hubo 91 apretones. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 apretones, ¿cuántas personas había?

Si hubo 91 apretones, cada apretón consiste en elegir 2 personas, sin importar el orden de entre x, luego $C_{x,2} = 91$, $C_{x,2} = \binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{2} = 91 \rightarrow x \cdot (x-1) = 182 \rightarrow x^2 - x - 182 = 0$, x = 14 y x = -13 por tanto, había 14 personas.
Si hubo 45 apretones, $C_{x,2} = 45$, $C_{x,2} = \binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{2} = 45 \rightarrow x \cdot (x-1) = 90 \rightarrow x^2 - x - 90 = 0$, x = 10 y x = -9 por tanto, había 10 personas.

43. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?

Hay $P_5 = 5! = 120$ maneras de introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes.

Si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos distribuimos las 5 cajas en 5 lugares ordenados simbolizados por los objetos, así C1-C1-C1-C1-C2 indica que los 4 primeros objetos están en la caja 1, el quinto en la caja 2 y el resto de las cajas están vacías, por lo tanto tenemos, disposiciones de 5 elementos (tomados de entre 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{5,5} = 5^5 = 3\,125$ formas diferentes de colocarlos.

La probabilidad de que en la primera caja no haya ningún sería el cociente de disposiciones de 4 elementos (tomados de entre 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{4,5} = 4^5 = 1024$ entre las disposiciones de los 5 objetos en las 5 cajas, (apartado anterior) por tanto p(no haya objeto en la primera caja) = 1024/3125 = 0,33

44. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

BY NC SA
Textos Marea Verde

Con 4 cifras podemos formar, disposiciones de 10 elementos (tomados de entre 4, elegimos la posición y ponemos la cifra), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ contraseñas.

No tienen ningún número repetido, disposiciones de 10 elementos (tomados de entre 4, elegimos la posición y ponemos la cifra), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{10,4} = 5\,040$,

Por lo tanto tienen algún número repetido: 10 000 – 5 040 = 4 960 contraseñas.

Tienen un número repetido dos veces, hay 10 números que se pueden repetir, elegimos las posiciones donde va el número repetido ($V_{4,2}/2$) dividimos entre 2 pues al ser el mismo número el que elegimos, hemos contado el doble de disposiciones y elegimos los otros 2 números, $V_{9,2}$ en total tenemos: $10 \cdot (V_{4,2}/2) \cdot V_{9,2} = 10 \cdot (4 \cdot 3/2) \cdot 9 \cdot 8 = 4\,320$ contraseñas
Cualquier número repetido dos veces 4 320 contraseñas.

45. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes n rectas?

El número de puntos de intersección entre 10 rectas es, cada punto de intersección consiste en elegir 2 rectas, sin importar el orden de entre 10: $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Con 15 rectas se tienen $C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ puntos

Con n rectas tenemos $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ puntos.

46. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?

Cada diagonal consiste en elegir 2 rectas, sin importar el orden de entre 8: $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$, restamos los 8 lados, un octógono regular tiene 28 − 8 = 20 diagonales.

Un polígono de 20 lados tiene $C_{20,2} - 20 = \binom{20}{2} - 20 = \frac{20 \cdot 19}{2} - 20 = 190 - 20 = 170$ diagonales.

47. Utiliza una hoja de cálculo (o una calculadora) para comprobar los resultados de:

a) $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$. **b) $VR_{2,4} = 24$**

c) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6!/3! = 120$ **d) $C_{6,3} = 20$**

Introducimos los datos en la calculadora y comprobamos que son ciertos

48. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? Ayuda: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la Relación de Euler:

C + V = A + 2

Un icosaedro regular tiene 12 vértices y 30 aristas por lo tanto tiene:

$C_{12,2} - 30 = \binom{12}{2} - 30 = \frac{12 \cdot 11}{2} - 30 = 66 - 30 = 36$ diagonales.

Un dodecaedro tiene 20 vértices, 30 aristas y cada una de las 12 caras pentagonales tienen 5 diagonales, por lo tanto un dodecaedro tiene $C_{20,2} - 30 - 12 \cdot 5 = \binom{20}{2} - 30 - 60 = \frac{20 \cdot 19}{2} - 90 =$
$= 190 - 90 = 100$ diagonales.

BY NC SA
Textos Marea Verde

49. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?

- 5 cifras distintas: Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 120$.
- Que terminan en 5: Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 24$.
- Que empiecen por 2, Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 24$.
- Que empiezan por 2 y terminan en 7, Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 6$.

50. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar de 5 bolas? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar de 5 bolas?

a) Si hay 5 bolas podemos tener 2 bolas de un color, 2 bolas de otro y 1 bola del tercer color, o bien 3 bolas de 1 color, 1 bola de otro y ota bola de otro, por tanto puede haber:

El número de filas que se puede formar con estas bolas en el primer caso es $PR_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30$.

El número de filas que se puede formar con estas bolas en el segundo caso es $PR_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20$.

b) Y pulseras hay: en el primer caso, AAVVR, ARAVV, AAVRV, 3 pulseras.

En el segundo caso, AAAVR, AAVAR, AARAV, 3 pulseras también.

51. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.

Cinco cifras distintas: Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 120$

Ordenados de menor a mayor, 12 345 el menor y 54 321 el mayor, se observa que el primero más el ultimo suman 66 666 lo mismo que el segundo más el penúltimo y así sucesivamente por lo que la suma de estos 120 números es, como los cogemos de 2 en 2 nos quedan 60 sumas,

66 666 · 60 = 399 996.

52. Calcula x en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

a) $V_{x,3} = C_{x,2}$, $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = \frac{x\cdot(x-1)}{2}$, simplificando, 2·(x-2) = 1 , **x = 5/2**

b) $V_{x,5} = 6\ V_{x,3}$, x·(x-1)·(x-2)·(x-3)·(x-4) = 6·x·(x-1)·(x-2) , simplificando, (x-3)·(x-4) = 6, $x^2 - 7x - 6 = 0$,

x = 1, x = 6 , como la solución x = 1 no tiene sentido, nos queda **x = 6**.

c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3} \rightarrow 3 \cdot C_{x+1,14} = 7 \cdot C_{x,2} \rightarrow 3 \cdot \binom{x+1}{14} = 7 \cdot \binom{x}{2} \rightarrow$

$\rightarrow 3 \cdot \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-12)}{14!} = 7 \cdot \frac{x(x-1)}{2!}$, simplificando,

$(x+1)(x-2)\ldots(x-12) = \frac{7\cdot 14!}{3\cdot 2} \rightarrow (x+1)(x-2)\ldots(x-12) = \frac{7\cdot 7\cdot 2\cdot 13!}{3\cdot 2} = \frac{49}{3}\cdot 13!$

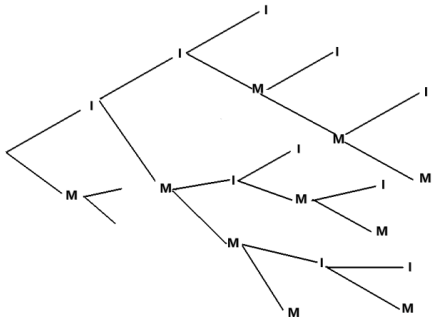
53. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 123456; luego fueron como ésta: M1234 A; y actualmente como ésta: 1234 ABC. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Tenemos 27 letras y 10 números.
Con M 123456: $27 \cdot VR_{6,10} = 27\,000\,000$ matrículas diferentes,
Con M 1234 A : $27 \cdot VR_{10,4} \cdot 27 = 7\,290\,000$ distintas, y
Con 1234 ABC: $VR_{10,4} \cdot VR_{27,3} = 10^4 \cdot 27^3 = 196\,830\,000$.

54. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

En el peor de los casos sería que ganasen los sets de forma que en el 4º hubieran ganado 2 cada uno, luego como máximo 5 sets.
Los desarrollos dependen de la forma en que vayan ganando los sets hasta el 4º pues el 5º terminarían y según empiece ganando Iker o María:



hay 10 posibles desarrollos para cada uno, luego en total hay 20 posibles desarrollos.

55. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

Menores que 5 son, 0, 1, 2, 3 y 4, 5 cifras para 4 huecos luego, el número del teléfono está entre $V_{5,4} = 120$ números diferentes.

56. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

Se trata de elegir 3 expertos entre los 7 que hay, no importa el orden y 2 en formación entre los 4 que hay, no importa el orden, el equipo puede estar formado de $C_{7,3} \cdot C_{4,2} = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 210$ formas diferentes.

Si un experto está fijo hay $C_{6,2} \cdot C_{4,2} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 90$ formas distintas.

57. En los billetes de una línea de autobuses va impreso la estación de partida y la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

BY NC SA
Textos Marea Verde

a) Para imprimir los billetes con salida y llegada se trata de elegir 2 entre 8, importa el orden: $V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$ billetes diferentes hay que imprimir

b) Al imprimir sólo las distancias, no importa el orden por tanto, $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

58. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

Cada 6 meses coinciden 1 en que los dos entran a trabajar a las 8, en un año coinciden 2 meses, es decir, de cada 6 días 1 no podrá ninguno de los dos padres ir a la guardería. Suponiendo que trabajan los sábados, pero no los domingos habrá aproximadamente 52 días.

59. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

Debemos calcular las formas de encenderse las luces dependiendo de que se acierte a 3, 2, 1 o ningún caballito: $V_{10,3} + V_{10,2} + V_{10,1} + 1 = 10 \cdot 9 \cdot 8 + 10 \cdot 9 + 10 + 1 = 821$ formas diferentes.

Si el primer tiro falla tenemos: $V_{10,2} + V_{10,1} + 1 = 10 \cdot 9 + 10 + 1 = 101$ formas distintas.

60. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

Tenemos 6 chicas y 6 chicos, se trata de colocar personas en los 4 bailes:

Si elige chica Antonio tiene $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ formas de elegir pareja chica en cuatro bailes.

Si elige chico Antonio tiene $C_{5,4} = \binom{5}{4} = 5$ formas de elegir pareja chico en cuatro bailes.

En total hay 20 formas de elegir pareja.

61. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar? ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2? Calcula la suma de todos estos últimos números.

Calculamos todos los de 6 cifras y restamos todos los que empiezan por 0.

Hay $VR_{6,5} = 6^5 = 7\,776$ formas de formar números de 5 dígitos. Hay $VR_{5,4} = 5^4 = 625$ que empiezan por 0 por lo que hay 7 776 – 625 = 7 151 números de cinco cifras.

2 veces el 1 y 3 veces el 2: hay $PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ números con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2.

Para calcular la suma podemos escribirlos: 11222 + 12122 + 12212 + 12221 + 21122 + 21212 + 21221 + 22112 + 22121 + 22211 = 177 776.

También fijando las cifras y calculando su valor y las veces que aparece:

El 1 en las decenas de millar, millar, etc:

4·(10 000 + 1 000 + 100 + 10 + 1) igualmente con el 2 : 2· 6·(10 000 + 1 000 + 100 + 10 + 1) =

= 44 444 + 133 332 = 177 776

62. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra "puerta" que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?

Tenemos 3 vocales y 3 consonantes, como no deben ir juntas vocales ni consonantes, es como alternar, empezando por vocal o consonante: hay $P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ palabras que empiezan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante. En total 72 palabras.

Textos Marea Verde

63. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?

Como no importa el orden, se pueden realizar $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2}$ = 120 guardias diferentes.

Alejandro estará en $C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2}$ = 36 guardias y no estará en 120 – 36 = 84. $C_{9,3}$

64. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?

Con dos cifras hay 9 números capicúas, los formados con los 9 dígitos.

Con tres cifras hay los mismos que antes multiplicados por los 10 que pueden ir en el centro: $10 \cdot 9 = 90$.

De cuatro cifras, el primero puede ser uno de los 9 dígitos distintos del 0 y el segundo cualquiera de los 10 dígitos, 3º y 4º son los mismos que 1º y 2º: $9 \cdot 10 = 90$ capicúas.

65. Con las letras de la palabra "argumento" ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Se pueden repetir letras.

Tenemos 4 vocales y 5 consonantes.

a) Comienzan y terminan por vocal, en el centro debe ir otra vocal, tenemos que elegir 3 vocales de 4 y 2 consonantes de 5, importa el orden y no se pueden repetir: $V_{4,3} \cdot V_{5,2} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 480$.

Comienzan y terminan por consonante, igual que antes pero ahora elegimos 3 consonantes de 5 y 2 vocales de 4: $V_{5,3} \cdot V_{4,2} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$. En total 1200 palabras.

b) Si se pueden repetir el cálculo es igual con repetición: comienzan y terminan por vocal $VR_{4,3} \cdot VR_{5,2} = 4^3 \cdot 5^2 = 1\,600$.

Comienzan y terminan por consonante: $VR_{5,3} \cdot VR_{4,2} = 5^3 \cdot 4^2 = 2000$. En total 3 600 palabras.

66. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?

Pueden comenzar por 6, 7 u 8, (3 cifras) Nos quedan 9 cifras para poner en los 3 huecos, distintas y ordenadas luego hay $3 \cdot V_{9,3} = 3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1\,296$ números con todas sus cifras distintas.

67. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?

Como no importa el orden hay $C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2}$ = 70 muestrarios distintos de cuatro juguetes.

Si queremos que siempre entre el último modelo, tenemos: $C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}$ =35 muestrarios.

Calculamos ahora la probabilidad que el último modelo llegue a un cliente: $\frac{35}{70} = 0{,}5$

68. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?

Si hay tres resguardos equivocados se tienen $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{2}$ = 10 formas distintas de elegir tres resguardos equivocados, para cada una de estas elecciones hay 2 en las que ninguno de los tres resguardos coincide con el bolso respectivo, es decir, sea E equivocado, la distribución de equivocados puede ser E1-E2-E3, o bien, E1-E3-E2. En total $2 \cdot 10 = 20$ formas diferentes.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Si son dos los resguardos equivocados se tienen también $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ formas distintas de elegir dos resguardos equivocados pero ahora sólo hay una forma en la que los dos resguardos no coincide con el bolso respectivo, E1-E2. En total 10 formas diferentes.

69. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es "Summa" de Luca Pacioli, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?

En las disposiciones circulares hay que fijar un elemento y permutar el resto, luego hay $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6$ formas de colocar a cuatro personas en una mesa circular.

70. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?

Hay 9 000 números de cuatro cifras de estos no tienen ningún cinco, a todos los los números de 4 cifras sin contar el 5 le restamos todos los números que empizan por 0 y no contienen el 5: $VR_{9,4} - VR_{8,3} = 9^4 - 8^3 = 6\,049$, por lo tanto tienen algún cinco: 9 000 – 6 049 = 2 951 números.

71. Con las letras de la palabra "saber", ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras "corte", "puerta" y "Alberto".

Con las letras de la palabra "saber" se pueden formar, sin juntar dos vocales o dos consonantes, como hay 3 consonantes y 2 vocales tienen que empezar y terminar en vocal $P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ palabras, las mismas que con las letras de la palabra "corte".

Con las de la palabra "puerta" hay $P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ que comienzan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante, en total 72.

Con las de la palabra "Alberto" hay $P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ palabras.

72. Considera la sucesión de números naturales 1, 3, 6, 10, 15, … ¿cuál es el siguiente término de esta sucesión? ¿Qué ley de recurrencia permite calcular el siguiente término de la sucesión? ¿Cuál es su término general?

Ley de recurrencia: $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + n$.

Su término general $a_n = \binom{n+1}{2}$, se verifica la ley de recurrencia $a_1 = 1$ y $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$.

73. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?

Con una cifra hay 3. Con dos cifras hay $VR_{3,2} = 3^2 = 9$. Con tres cifras hay $VR_{3,3} = 3^3 = 27$ y con cuatro cifras hay $VR_{3,4} = 3^4 = 81$. En total 3 +9 + 27 + 81 = 120 números.

74. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?

En total se tienen $VR_{5,5} = 5^5 = 3\,125$ palabras con letras repetidas o no. Entre estas hay $P_5 = 5! = 120$ con las cinco letras distintas por lo tanto hay 3 125 – 120 = 3 005 palabras con alguna letra repetida.

75. En una baraja española hacemos 5 extracciones con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 3 ases? ¿y la probabilidad de obtener menos de 4 ases?

BY NC SA
Textos Marea Verde

Al ser con reemplazo se pueden repetir y son ordenadas.
Obtenemos 4 ases cuando obtenemos una que no es as, nos quedan 36 multiplicado por las formas de sacar 4 ases, puede salir el mismo, $36 \cdot VR_{4,4} = 36 \cdot 4^4 = 9\,216$ casos.
Tenemos 5 ases en $VR_{4,5} = 4^5 = 1024$ casos en total tenemos 9 216 + 1024 = 10 240 casos favorables.
El número de casos posibles es $VR_{40,5} = 102\,400\,000$.
La probabilidad de obtener más de 3 ases es 10 240/102 400 000 = 1/10 000.
La probabilidad de obtener menos de cuatro ases 1 – 1/10 000 = 9 999/10 000.

76. Caminos en una cuadrícula: a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba? b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B? c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B? d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con n caminos en cada lado? e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales?

a) Hay 9 pasos de A hasta B que se pueden escoger de 2 formas $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ caminos diferentes.
b) En este caso tenemos 6 caminos.
c) En este caso tenemos 7 caminos
d) En una cuadrícula con n caminos en cada lado hay n – 1 cuadrados en cada lado y el número de caminos es $\binom{2n-2}{n-1}$
e) En una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales hay $\binom{n+m-2}{n-1}$ caminos.

BY NC SA
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1) Tienes nueve monedas de euro que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?:

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

Lo más fácil es $PR_9^{5,4} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \binom{9}{5}$

Respuesta: c) $C_{9,5}$

2) En una compañía aérea hay 10 azafatas, y un avión necesita a 4 en su tripulación, ¿de cuántas formas se puede elegir esa tripulación?:

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

Disposición de 4 elementos tomados entre 10, no importa el orden

Respuesta: c) $C_{10,4}$

3) ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

Disposición de 3 elementos tomados entre 4, no importa el orden.

Respuesta: c) $C_{4,3}$

4) Tenemos 5 objetos y los queremos guardar en 5 cajas, un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?:

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

Disposiciones de 5 elementos tomados entre 5, importa el orden, entran todos.

Respuesta: b) P_5

5) Permutaciones de n+4 elementos dividido por permutaciones de n+1 elementos es igual a:

a) (n+4)·(n+3)·(n+2) = $\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ d) $V_{n+4,n+2}$/ $C_{n+4,n+1}$

Respuesta: a) $\frac{(n+4)!}{(n+1)!} = (n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)$

6) Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6\cdot 5\cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

Respuesta: b) $V_{10,6} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10!}{6!}$

7) Indica qué afirmación es falsa;

a) 0! = 1; b) $V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)$; c) $VR_{m,n} = m^n$; d) $P_n = n!$

$V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)\cdot(m-n+1)$

Respuesta: b) $V_{m,n} = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)$;

BY NC SA

8) El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}, \binom{9}{9}, \binom{4}{1}$ es:

a) 0, 1, y 1; **b) 0, 9 y 4;** **c) 1, 1 y 4;** **d) 5, 9 y 4**

Respuesta: c) 1, 1 y 4

9) El valor de x, distinto de 4, en $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ es:

a) 3 **b) 7** **c) 1** **d) 0**

4 + x = 7 , x = 3

Respuesta: a) 3

10) El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de $(a + b)^7$ es:

a) $\binom{7}{3}$; **b) 1;** **c) $\binom{7}{4}$;** **d) $V_{7,4}$**

Respuesta: a) $\binom{7}{3}$

BY NC SA

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 16: Probabilidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Laura Del Álamo León

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. **En una caja tenemos mezclados 25 clavos de 2 cm de largo, 15 de 3 cm, 20 de 2,5 cm y 40 de 3,5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la misma probabilidad de elegir).¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor longitud?**

$$\text{P(el clavo extraído tenga la menor longitud)} = \frac{25}{25+15+20+40} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

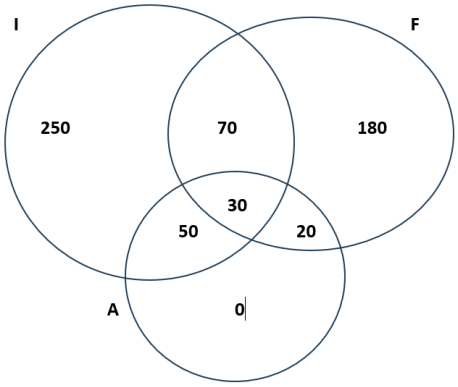
   a) **La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a "par" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta?**

$$\text{P(ganar)} = \frac{18}{18 \text{ números impares}+18 \text{ pares}+ 0} = \frac{18}{37}$$

   b) **La ruleta americana consta de un 0, un 00 y de los números que van del 1 al 36. Si sale 0 o 00 gana la banca. Decidimos apostar a "par"(ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta?**

$$\text{P(ganar)} = \frac{18}{18 \text{ números impares}+18 \text{ pares}+ 0+00} = \frac{18}{38}$$

2. **En un instituto de 800 alumnos hay 400 estudiantes que hablan inglés, 300 que hablan francés, 100 que hablan alemán, 100 que hablan inglés y francés, 80 que hablan inglés y alemán, 50 que hablan francés y alemán y 30 que hablan los tres idiomas. Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?**



Hay 30 que hablan los 3 idiomas
Inglés y Francés = 100 – 30 = 70
Inglés y Alemán = 80 – 30 = 50
Francés y Alemán = 50 – 30 = 20

Inglés = 400 – 70 – 30 – 50 = 250
Francés = 300 – 70 – 30 – 20 = 180
Alemán = 100 – 50 – 30 – 20 = 0

$$\text{P(un sólo idioma)} = \frac{250 + 180 + 0}{800} = \frac{430}{800} = \frac{43}{80}$$

3. **Vuelve a hacer todos los apartados del ejemplo anterior, pero sustituyendo en cada caso "bola blanca" por "bola roja". Es decir, la bolsa tiene ahora 6 bolas rojas y una bola negra:**
   a) **Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una roja y una negra?**

{RN, RN, …. RN} ; $\binom{7}{2} formas\ de\ coger\ 2\ bolas\ de\ 7$; $\text{P(una roja y una negra)} = \frac{6}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

BY NC SA

Textos Marea Verde

b) Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bol sa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola ro ja y una bola negra?

Casos favorables: R1N, R2N, R3N, R4N, R5N, R6N, NR1, NR2, NR3, NR4, NR5, NR6 (se considera orden de extracción)

Casos posibles: son todas las formas de elegir una pareja de bolas en las que sí importa el orden de elección (primero se saca una y después otra) $V_{7,6} = 7 \cdot 6 = 42$

$$\text{P(tras la segunda extracción tengamos una bola roja y una negra)} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

c) Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda negra?

$$\text{P(la primera bola sea roja y la segunda negra)} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7}$$

d) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda negra?

$$\text{P(la primera bola sea roja y la segunda negra)} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{49}$$

e) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?

$$\text{P(las dos veces salga una bola negra)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}$$

f) Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color es se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola roja?

$$\text{P(las dos veces salga una bola roja)} = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{36}{49}$$

4. En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles. El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49).

¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora?

$$\text{P(acertar la combinación ganadora)} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$$

¿Cuál es la probabilidad de que aciertes únicamente 5 números?

$$\text{P(acertar 5 números)} = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{6 \cdot 43}{13983816} = \frac{43}{2330636}$$

¿Y la de que aciertes únicamente 4 números?

$$\text{P(acertar 4 números)} = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13983816}$$

5. a) Se llama trío a la jugada que consiste en 3 cartas del mismo valor y otras dos de diferente valor al de esas 3 y además con diferentes valores entre sí. Calcula la probabilidad de obtener un trío de ases en una jugada de 5 cartas.

$$P(\text{trío de ases en una jugada de 5 cartas}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{4 \cdot 1128}{2598960} = \frac{4512}{2598960}$$

b) Calcula la probabilidad de obtener un trío cualquiera.

$$P(\text{trío cualquiera}) = \frac{13 \times \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{58656}{2598960} = \frac{1222}{54145}$$

6. a) Se llama escalera de color a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener esta escalera de color:

$$P(\text{dicha escalera de color}) = \frac{1}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{2598960}$$

c) Calcula la probabilidad de obtener una escalera de color cualquiera. La escalera de color puede ser As, 2, 3, 4, 5, que es la escalera de color mínima, o, 10, J, Q, K, As, que es la escalera de color máxima o escalera real.

En cada palo se pueden formar 10 escaleras y hay 4 palos

$$P(\text{escalera de color}) = \frac{4 \cdot 10}{\binom{52}{5}} = \frac{40}{2598960}$$

7. Se llama color a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener color en una jugada.

$$P(\text{color}) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{5148}{2598960}$$

8. Se consideran los siguientes experimentos aleatorios:

1) Se tienen 5 fichas de Scribe formando la palabra CASAS. Se meten en una bolsa y se extraen 3 fichas.

2) Se mezcla una baraja de póker, se corta y se mira el valor de la carta superior.

3) Un monedero contiene 4 monedas de 5 céntimos, 2 monedas de 10 céntimos y 1 moneda de 20 cm. Se extraen al azar dos monedas de él.

4) De los 30 alumnos de una clase se elige uno al azar. Se le pregunta en qué mes ha nacido.

a) Describe los espacios muestrales de cada uno de los 4 experimentos aleatorios anteriores.

1) {(C, A, S), (C, A, A), (A, A, S), (S, S, A), (S, S, C)}
2) {Todas las cartas de la baraja en opciones posibles}
3) {(5,10), (5,20), (5,5), (10,20), (10,10)}
4) Cualquier mes del año {enero…..diciembre}

b) Indica los sucesos contrarios a

1. {AAC}

2. {A, 2, 3, 4, 5}

BY NC SA
Textos Marea Verde

3. Sacar una cantidad par de céntimos.
4. Haber nacido en un mes en el que seguro que es verano.
1) (CAS), (CSS), (AAS), (SAS)
2) (6, 7, 8, 9, 10, S, C, R)
3) {(5,10), (5,20)}
4) (enero….junio o septiembre….diciembre)

c) ¿Son independientes estos pares de sucesos?
1. {AAC} y {{ASA}, {CAS}}
2. "Obtener un 6" y "obtener un número par"
3."Obtener una cantidad par de céntimos" y "sacar dos monedas de 5 céntimos"
4. "Haber nacido en un mes que seguro es de verano" y "haber nacido en junio"
1) Independiente
2) No es independiente
3) No es independiente
4) Independiente

9. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener doble pareja en una jugada de 5 cartas de póker. . (Doble pareja consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anteriores. Por ejemplo, AA 33 Q).

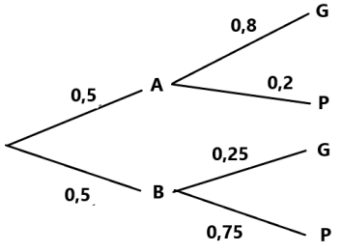
Solución gráfica

10. En el monedero tengo 3 monedas de un céntimo, 2 de 5 céntimos, 3 de 10 céntimos, 1 de 20 y 1 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número par de céntimos?

Si P es par y I es impar, los resultados posibles son : PPP, PPI, PIP, PII, IPP, IPI, IIP, III, de estos tenemos que 4 dan número par de céntimos y 4 impar, por tanto, la P(par) = ½

11. Un analista deportivo, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 25 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis. ¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?

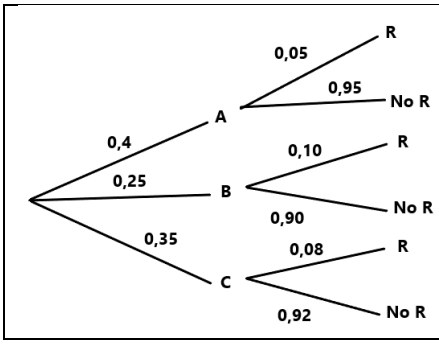
A…analista deportivo B…analista competencia G…ganar P…perder



P(ganar) = 0,5 · 0,8 + 0,5 · 0,25 = 0,525

12. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 40 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 25 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 10 % de los de B y un 8 % de

los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de hue vos con al- gún huevo roto?



A: Producción en la planta A
B: Producción en la planta B
C: Producción en la planta C
R: el paquete contiene algún huevo roto
P(A)=0,4;
P(B)=0,25;
P(C)=1-P(A)-P(B)=0,35

P (R/A) = 0,05 de probabilidad de que un paquete en la planta A tenga un huevo roto
P(R/B) = 0,10 de probabilidad de que un paquete en la planta B tenga un huevo roto
P (R /C) = 0,08 de probabilidad de que un paquete en la planta C tenga un huevo roto
Probabilidad de que os toque una docena de huevos rotos:

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{R}) = \mathrm{P}\,(\mathrm{R/A}) \cdot P\,(A) + P(R/B) \cdot P(B) + P(R/\,C) \cdot P(C) =$$
$$= 0{,}05 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}08 \cdot 0{,}35 = 0{,}073$$

13--En un instituto con 300 alumnos se está estudiando si la calificación obtenida en Lengua Española tiene que ver con la calificación obtenida en Matemáticas. Tras hacer una encuesta, se obtienen los siguientes resultados:

		Matemáticas		
		Sobresaliente	Notable	Otro
Lengua	Sobresaliente	110	25	18
	Notable	20	70	40
	Otro	10	5	2

Se elige un alumno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en Lengua, si lo ha tenido en Matemáticas?

$$\mathrm{P}(L/M) = \frac{110}{140}$$

¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un sobresaliente en Matemáticas, si lo ha tenido en Lengua?

$$\mathrm{P}(M/L) = \frac{110}{153}$$

14. Una bolsa contiene 9 bolas rojas y 6 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola. ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea roja? ¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?

$$\mathrm{P}(\text{segunda bola sea roja}) = \mathrm{P}(\mathrm{N} \cap \mathrm{R}) + \mathrm{P}(\mathrm{R} \cap \mathrm{R}) = \frac{6}{15} \cdot \frac{11}{16} + \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{16} = \frac{20}{40}$$

$$P(\text{ambas bolas sean del mismo color}) = P(N \cap N) + P(R \cap R) = \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{16} + \frac{9}{15}\cdot\frac{8}{16} = \frac{17}{40}$$

15. En el comedor escolar la probabilidad de que no haya pasta una semana es 1/3; la probabilidad de que haya pollo es 3/5 y la probabilidad de que haya pasta y pollo es 4/7. Calcula la probabilidad de que no haya ni pasta ni pollo. Calcula la probabilidad de que no haya pollo sabiendo que ha habido pasta.

$P(\text{no haya pasta}) = \frac{1}{3}$ $P(\text{haya pollo}) = \frac{3}{5}$ $P(\text{pasta y pollo}) = \frac{4}{7}$

$P(\text{haya pasta}) = 1 - P(\text{no haya pasta}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

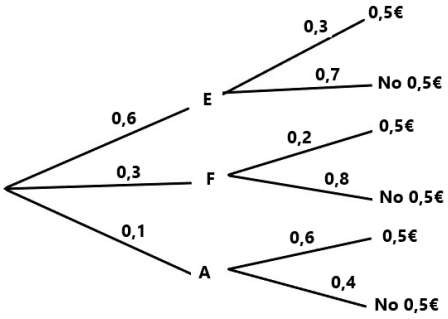
$P(\text{haya pasta o pollo}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} = \frac{73}{105}$

$P(\text{no haya pasta ni pollo}) = 1 - P(\text{haya pasta o pollo}) = 1 - \frac{73}{105} = \frac{32}{105}$

$P(\text{no haya pollo y pasta}) = p(\text{pasta}) - P(\text{pasta y pollo}) = \frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{2}{21}$

$$P(\text{no haya pollo/pasta}) = \frac{P(\text{no haya pollo y pasta})}{P(\text{haya pasta})} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{7}$$

16--Tenemos en el bolsillo monedas procedentes de 3 países: españolas (60 %), francesas (30 %) y ale manas (el resto). El 30 % de las monedas españolas y el 20 % de las francesas son de 50 céntimos. También sabemos que, del total de monedas, el 30 % son de 50 céntimos. Se extrae una moneda al azar. ¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda francesa de 50 céntimos?
¿Qué probabilidad hay de que sea una moneda de 50 céntimos, sabiendo que es alemana?



$P(F \cap 50 \text{ céntimos}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6$

monedas de 50cts $= \frac{20}{100}\cdot\frac{30}{100} + \frac{10}{100}\cdot\frac{x}{100} + \frac{30}{100}\cdot\frac{60}{100} = \frac{30}{100}$; x = 60

$P(50 \text{ cts/A}) = 0{,}6$

17. En una clase hay 24 alumnos y 16 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 5 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo en las siguientes condiciones:

a) Todos los participantes son del mismo sexo.

$$P(\text{todos los participantes sean del mismo sexo}) = \frac{\binom{24}{5}+\binom{16}{5}}{\binom{40}{5}} = \frac{46872}{658008} = 0{,}07$$

b) En el equipo hay al menos 3 chicas.

Textos Marea Verde

$$P(\text{haya al menos 3 chicas}) = \frac{\binom{16}{3}\cdot\binom{24}{2}+\binom{16}{4}\cdot\binom{24}{1}+\binom{16}{5}}{\binom{40}{5}} = 0{,}01$$

c) En el equipo hay exactamente 3 chicas.

$$P(\text{haya 3 chicas}) = \frac{\binom{16}{3}\cdot\binom{24}{2}}{\binom{40}{5}} = 0{,}23$$

d) En el equipo hay 3 estudiantes de un sexo y 2 de otro.

$$P(\text{haya 3 de un sexo y dos del otro}) = \frac{\binom{16}{3}\cdot\binom{24}{2}+\binom{16}{2}\cdot\binom{24}{3}}{\binom{40}{5}} = 0{,}60$$

18. Supón que se sortea ser delegado de tu clase por el método descrito antes. ¿Quién tendría más probabilidad de salir? ¿Hay alguien que no tendría ninguna posibilidad? Hazlo con una lista de tu clase.

No tienen posibilidad de salir todos los que no sean los primeros en cada letra.

19--Toma 2 cartulinas de colores, cada una de un color distinto (por ejemplo, roja y azul) y recorta en cada una de ellas 3 rectángulos del mismo tamaño. Pega esos rectángulos entre sí de modo que uno sea rojorojo, otro azulazul y otro rojoazul. Mete las 3 cartulinas así preparadas en un sobre y saca una al azar, con cuidado de no mostrar nada más que un lado. Pregunta a un compañero que "adivine" el color de la cara que está oculta. Repite el proceso con todos los compañeros. Escribe los resultados del experimento en una tabla como esta que copies en tu cuaderno: ¿Qué observas? ¿Es mejor decir que el color oculto es el mismo que el visible? ¿O es peor?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Oculto																														
Apuesta																														
Sale																														
¿acierta?																														

Solución experimental y abierta: La probabilidad de que el color oculto sea igual al visible es 2/3, y de que sea el otro: 1/3.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En una clase hay 15 chicos y 18 chicas. Como no se presenta nadie para ser delegado se hace un sorteo. ¿Cuál es la probabilidad de que en la clase haya delegada?

$$P(chica) = \frac{18}{15+18} = \frac{18}{33}$$

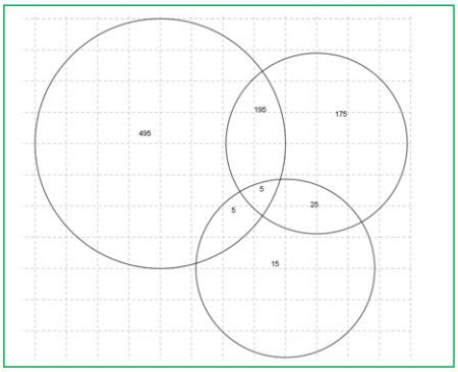
2..En el monedero tenemos 8 monedas de 1 céntimo, 3 monedas de 5 céntimos,8 monedas de 10 cént imos y 5 monedas de 50 céntimos. Sacamos una moneda al azar,¿cuál es la probabilidad de que la can tidad obtenida sea un número par de céntimos?

$$P(10cts \text{ ó } 50cts) = \frac{8+5}{8+3+8+5} = \frac{13}{24}$$

3..En una caja tenemos mezclados 50 clavos de 2 cm de largo, 30 clavos de 3 cm, 35 clavos de 2.5 cm y 60 clavos de 3.5 cm. Sacamos al azar un clavo de la caja (se asume que todos los clavos tienen la mis ma probabilidad de ser elegidos).. ¿Qué probabilidad hay de que el clavo extraído tenga la menor lon gitud?

$$P(2cm) = \frac{50}{50+30+35+60} = \frac{50}{175}$$

4 En un instituto de mil estudiantes hay 700 que hablan inglés, 400 que hablan francés, 50 que hablan alemán, 200 que hablan inglés y francés, 30 que hablan inglés y alemán, 10 que hablan francés y alemán y 5 que hablan los tres idiomas. Se elige un estudiante al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que hable solamente una lengua extranjera?



Solo hablan inglés=700-200-30+5=475 alumnos
Solo hablan francés=400-200-10+5=195 alumnos
Solo hablan alemán=50-30-10+5=15alumnos

$$\text{probabilidad de que hable una sola lengua extranjera} = \frac{475+195+15}{1000} = \frac{685}{1000}$$

5. La ruleta francesa consta de los números que van del 0 al 36. Si sale 0 gana la banca. Decidimos apostar a "par" (ganaremos si sale un número par no nulo). ¿Qué probabilidad tenemos de ganar la apuesta? ¿Y si apostamos a 7? ¿Y si apostamos a un número impar?

$$\text{apuesta a un número par} = \frac{18}{18 \text{ números impares}+18 \text{ pares}+0} = \frac{18}{37}$$

$$\text{apuesta al número 7} = \frac{1}{18 \text{ números impares}+18 \text{ pares}+0} = \frac{1}{37}$$

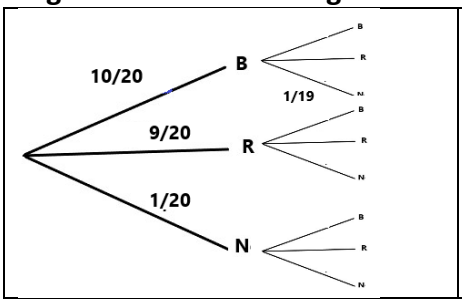
$$\text{apuesta a un número impar} = \frac{18}{18 \text{ números impares}+18 \text{ pares}+0} = \frac{18}{37}$$

Textos Marea Verde

6. Una bolsa contiene 7 bolas blancas, 5 bolas rojas y 3 bolas negras.
Se extraen dos bolas al mismo tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que sean una blanca y una negra?

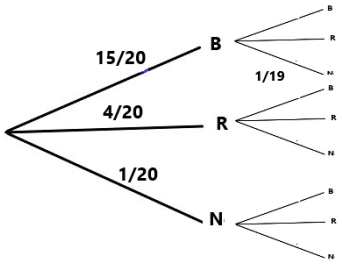
$$P(B \cap N) = \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{1}}{\binom{15}{2}} = \frac{21}{105} = \frac{1}{5}$$

7..Una bolsa contiene 10 bolas blancas, 9 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda extracción tengamos una bola blanca y una bola negra?



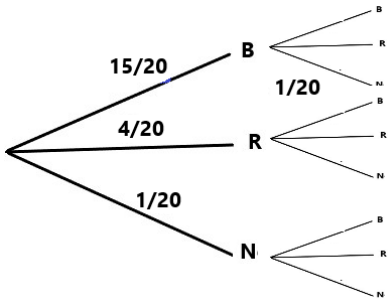
$$P(N/B) = \frac{1}{19}$$

8..Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Después se saca una segunda bola, sin volver a meter en la bolsa la primera.
¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?



$$P(B \cap N) = P(B) \cdot P(N/B) = \frac{15}{20} \cdot \frac{1}{19} = \frac{3}{76}$$

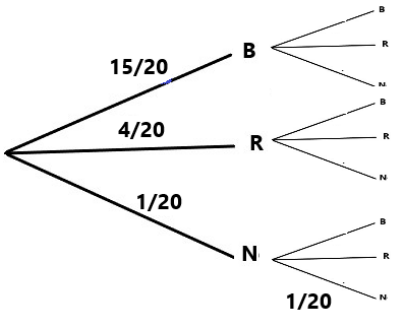
9. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca y la segunda negra?



$$P(B \cap N) = P(B) \cdot P(N/B) = \frac{15}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{80}$$

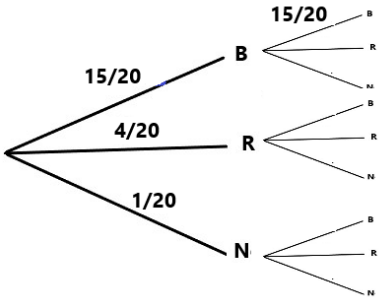
10. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido la bola negra?

BY NC SA
Textos Marea Verde



$$P(N \cap N) = P(N) \cdot P(N/N) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$$

11. Una bolsa contiene 15 bolas blancas, 4 bolas rojas y una bola negra. Se extrae una bola de la bolsa. Tras mirar de qué color se introduce en la bolsa de nuevo. Se saca una segunda bola. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos veces haya salido una bola blanca?



$$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B/B) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{9}{16}$$

12. En la lotería primitiva una apuesta consiste en marcar 6 casillas de entre 49 posibles.
El día del sorteo se extraen 6 bolas (de entre 49).
¿Cuál es la probabilidad de que tu apuesta coincida con la combinación ganadora? ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes un número? ¿Y la de que aciertes 2 números?

$P(\text{ganar}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}$ $\binom{49}{6}$ seleccionar 6 entre 49

$P(\text{acertar 1 número}) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{43}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{5775588}{13983816}$

$\binom{6}{1} \cdot \binom{43}{5}$ acertar 1 de 6 y seleccionar 5 de los 43 restantes

$P(\text{acertar 2 números}) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{43}{4}}{\binom{49}{6}} = \frac{1851150}{13983816}$

$\binom{6}{2} \cdot \binom{43}{5}$ acertar 2 de 6 y seleccionar 4 de los 43 restantes

13. Se reparten al azar 5 cartas de una baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que tengas 4 cartas del mismo número?

Hacemos 10 bloques de 4 cartas con los números iguales y cogemos 1 bloque: $\binom{10}{1}$

Cogemos una carta que sea diferente de las 4 anteriores: $\binom{36}{1}$

$P(\text{4 cartas del mismo número}) = \frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{36}{1}}{\binom{40}{5}}$ (poker)

Textos Marea Verde

14. En una jugada se reparten 5 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de conseguir tres ases y dos reyes?

$$P(3ases\ y\ 2reyes) = \frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{4\cdot 6}{2598960} = \frac{24}{2598960}$$

¿Cuál es la probabilidad de tener tres cartas iguales?

$$P(3\ cartas\ iguales) = \frac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{58656}{2598960}$$ (trío)

¿Y una pareja?

$$P(pareja) = \frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{50}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{152880}{2598960}$$

¿Y de tener tres cartas iguales y las otras dos también iguales entre sí?

$$P(3\ iguales\ y\ 2\ iguales) = \frac{13\cdot\binom{4}{3}\cdot 12\cdot\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960}$$ (full)

15. En una jugada se reparten 5 cartas.
Se llama escalera de color a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo ordenadas consecutivamente. Calcula la probabilidad de obtener una escalera de color de tréboles.

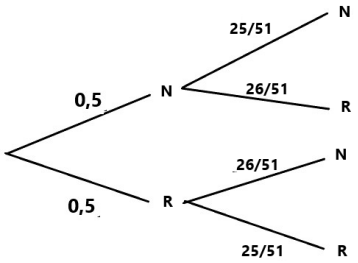
Hay 10 formas de escoger 10 cartas seguidas

$$\mathrm{P(escalera\ de\ color\ de\ tréboles)} = \frac{10}{\binom{52}{5}} = \frac{10}{259890}$$

16. En una jugada se reparten 5 cartas. Se llama color a una jugada compuesta por 5 cartas del mismo palo que no son (todas) consecutivas. Calcula la probabilidad de obtener color de tréboles.

$$\mathrm{P(color\ de\ tréboles)} = \frac{\binom{13}{5} - 10}{\binom{52}{5}} = \frac{1277}{259890}$$

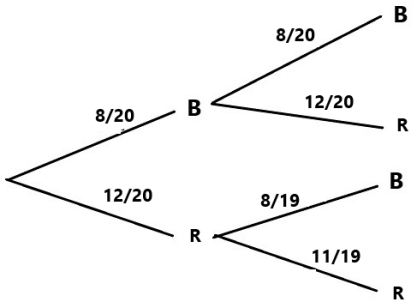
17. Considera el experimento aleatorio "mezclar una baraja, cortar y mirar el color de las dos cartas que han quedado arriba". ¿Cuál es la probabilidad de que ambas tengan el mismo color?



$$\mathrm{P(N \cap N) + P(R \cap R) =}$$
$$\mathrm{= P(N)\cdot P(N/N)`P(R)\cdot P(R/R) =}$$
$$= 0{,}5\cdot\frac{25}{51} + 0{,}5\cdot\frac{25}{51} = \frac{25}{51}$$

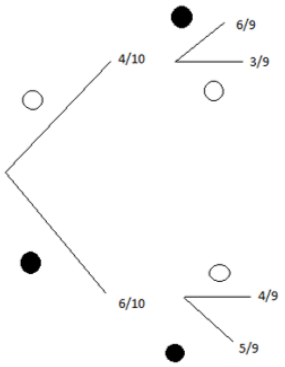
18. Tenemos una caja con 12 bolas rojas y 8 bolas blancas. Se saca una bola al azar.
Si es blanca se vuelve a meter en la caja. Si es roja se deja fuera. En estas condiciones se saca otra bola de la caja. ¿Qué probabilidad hay de que esta bola sea roja?

Textos Marea Verde



$$\boldsymbol{P(segunda\ sea\ roja)} =$$
$$= \boldsymbol{P(B \cap R)} + \boldsymbol{P(R \cap R)} =$$
$$= \boldsymbol{P(B)} \cdot \boldsymbol{P(R/B)} + \boldsymbol{P(R)} \cdot \boldsymbol{P(R/R)} =$$
$$= \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20} + \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{279}{475} = 0{,}587 = 0{,}59$$

19. En un cajón tenemos 10 calcetines: 6 negros y 4 blancos. Sacamos, sin mirar, dos calcetines del cajón. ¿Qué es más probable, que sean ambos del mismo color o que sean de colores distintos?

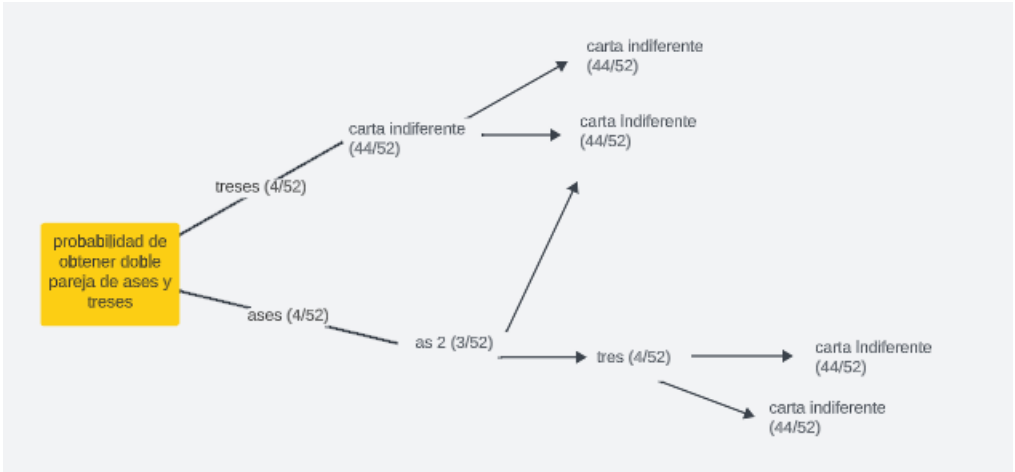


$$P(N \cap N) + P(B \cap B) =$$
$$= P(N) \cdot P(N/N) + P(B) \cdot P(B/B) =$$
$$= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{42}{90}$$

$$P(N \cap B) + P(B \cap N) =$$
$$= P(N) \cdot P(B/N) + P(B) \cdot P(N/B) =$$
$$\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{48}{90}$$

Lo más probable es que sean de distinto color

20. Elabora un árbol de probabilidades para calcular la probabilidad de obtener doble pareja de ases y treses en una jugada de 5 cartas de póker. (Doble pareja consiste en 2 pares de cartas del mismo valor, diferentes entre sí, y una carta indiferente, de valor distinto a los dos anterio res. Por ejemplo, AA 33 Q).



Textos Marea Verde

21. En el monedero tengo 7 monedas de un céntimo, 4 de 5 céntimos, 6 de 10 céntimos, 5 de 20 y 7 de 50 céntimos. Saco 3 monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga un número impar de céntimos?

Para que la suma sea impar hemos de obtener 3 impares o 2 pares y 1 impar

Hay 13 monedas impares y 18 monedas pares

111……$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{210}$

115-151-511……$3\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{56}$

155-515-551……$3\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{28}$

555……$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

IPP-PIP-PPI……$3\cdot\frac{13}{31}\cdot\frac{18}{30}\cdot\frac{17}{29}=\frac{1989}{4495}$

$$\text{P(un número impar de céntimos)}=\frac{10854}{21924}=\frac{201}{406}$$

22. El 60 % de una determinada población fuma, el 30 % es hipertenso, y el 12 % fuma y es hipertenso

Utiliza estas frecuencias para obtener probabilidades y determina si ser hipertenso es dependiente o independiente de fumar

¿Cuál es la probabilidad condicionada de que una persona fumadora sea hipertensa?

P(F) = 0,6 ; P(H) = 0,3 ; P(F∩H) = 0,12

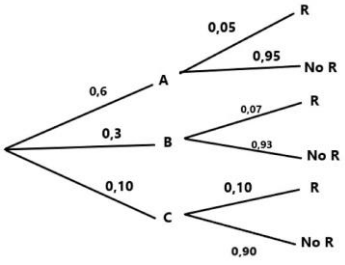
P(F)·P(H) = 0,6·0,3 = 0,18 distinto de P(F∩H) = 0,12 , no son independientes

P(H/F) = $\frac{P(F\cap H)}{\text{P(F)}}=\frac{0{,}12}{0{,}6}=0{,}2$

23. Un analista deportivo, que se equivoca el 10 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito va a ganar la liga. El analista de la competencia, que se equivoca el 20 % de las veces, ha dicho que nuestro equipo favorito no va a ganar la liga. A tenor de dichos análisis.
¿Qué probabilidad hay de que nuestro equipo gane la liga?

P(ganar A1) = 0,9 ; P(ganar A2) = 0,2

24. Una compañía de productos avícolas empaqueta docenas de huevos en tres lugares diferentes. El 60 % de la producción tiene lugar en la planta A, el 30 % en B y el resto en C. Un control de calidad nos dice que un 5 % de los paquetes elaborados en A, un 7 % de los de B y un 10 % de los de C contienen algún huevo roto. ¿Qué probabilidad hay de que nos toque una docena de huevos con algún huevo roto?



$$\text{P (R)}=\text{P(R/A)}\cdot\text{P (A)}+\text{P(R/B)}\cdot\text{P(B)}+\text{P(R/ C)}\cdot\text{P(C)}=$$

$$=0{,}05\cdot0{,}6+0{,}07\cdot0{,}3+0{,}1\cdot0{,}1=0{,}61$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

25. En un cajón tengo un par de calcetines rojos, un par de calcetines negros y un par de calcetines blancos.
Al hacer la maleta, con las prisas, cojo 3 calcetines sin mirar.
¿Qué probabilidad tengo de haber cogido 2 del mismo color?

Sea O otro color, las combinaciones son BBO – NNO – RRO y sus distintas ordenaciones, que son 3 y las probabilidades anteriores que son las 3 iguales, luego tenemos:

$$P(\ 2\ del\ mismo\ color) = 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3}{5}$$

26. Se hace un estudio de consumo en una población.
Se descubre que al 70 % de las personas a las que les gusta la mermelada de naranja también les gusta la de grosella y que al 80 % de las personas a las que les gusta la mermelada de grosella también les gusta la de naranja.
Al 40 % de esa población no le gustan ni la mermelada de naranja ni la de grosella.
Se elige al azar una persona de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste tanto am bas mermeladas?

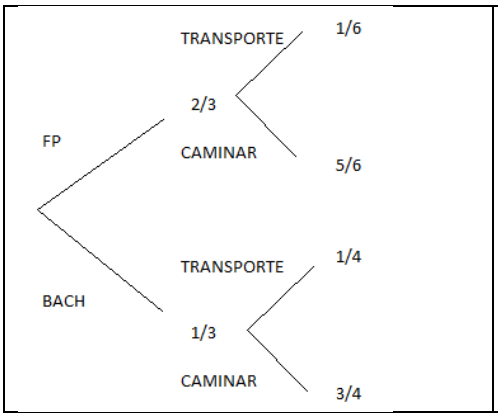
$$\mathrm{P(G/N)} = 0{,}7 \quad \mathrm{P(N/G)} = \ 0{,}8 \quad \mathrm{P(noN\ y\ noG)} = 0{,}4 \quad \mathrm{P(N \cup G)} = 0{,}6$$
$$\mathrm{P(N \cap G)} = P(N) \cdot P(G/N)\ ;\ \ \mathrm{P(N \cap G)} = P(N) \cdot 0{,}7\ \ ;\ \ \mathrm{P(N)} = \frac{\mathrm{P(N \cap G)}}{0{,}7}$$
$$\mathrm{P(N \cap G)} = P(G) \cdot P(N/G)\ \ ;\ \mathrm{P(N \cap G)} = P(G) \cdot 0{,}8\ ;\ \ \mathrm{P(G)} = \frac{\mathrm{P(N \cap G)}}{0{,}8}$$
$$\mathrm{P(N \cup G)} = \mathrm{P(N)} + \mathrm{P(G)} - \mathrm{P(N \cap G)}; 0{,}6 = \frac{\mathrm{P(N \cap G)}}{0{,}7} + \frac{\mathrm{P(N \cap G)}}{0{,}8} - \mathrm{P(N \cap G)};$$
$$\mathrm{P(N \cap G)} = \frac{84}{235}$$

27. En la lotería primitiva se apuestan 6 números de entre 49. Jugando a dos apuestas, ¿cuál es la probabilidad de que te toque un premio de 5 aciertos más complementario?

$$2 \cdot \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{49}{6}}$$

28. En un instituto hay Bachillerato y Formación Profesional. En Bachillerato estudian 1/3 de los estudiantes y el resto lo hace en Formación Profesional.
La cuarta parte de los estudiantes de Bachillerato y la sexta parte de los Formación Profesional utiliza un medio de transporte para ir al instituto.
El resto llega caminando. Se elige al azar un estudiante de ese instituto. ¿Qué probabilidad hay de que vaya a clase utilizando un medio de transporte?

Textos Marea Verde



$$P(T) = P(FP \cap T) + P(BACH \cap T) =$$

$$= P(FP) \cdot P(T/FP) + P(BACH) \cdot P(T/BACH) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{36}$$

29. Un tahúr juega con una baraja trucada de 40 cartas. Saca una carta, la mira, la vuelve a meter en la baraja y mezcla.
Repite este procedimiento otras 2 veces más.
La baraja está preparada de tal modo que el hecho de una de las tres cartas vistas sea una figura tiene una probabilidad de 19/27
¿Cuántas figuras tiene su baraja?

X= número de figuras

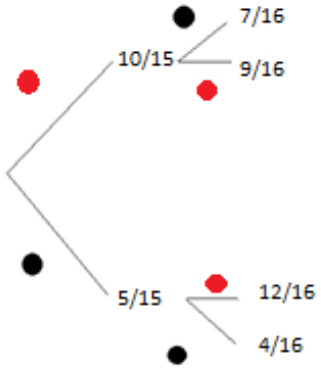
probabilidad de no obtener figura en cada extracción $= \frac{40-x}{40}$

probabilidad de no obtener figura en las 3 extracciones $= \left(\frac{40-x}{40}\right)^3$

P(no obtener ninguna figura) $= 1 -$ P(obtener figura) $= 1 - \frac{19}{27} = \frac{8}{27}$

$\left(\frac{40-x}{40}\right)^3 = \frac{8}{27}$; $\frac{40-x}{40} = \frac{2}{3}$; $x = 13,3$ figuras. (el enunciado no es correcto)

30. Una bolsa contiene 10 bolas rojas y 5 bolas negras. Se extrae al azar una de ellas y se sustituye por dos del otro color. Tras ello se extrae una segunda bola.
¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea negra?
¿Qué probabilidad hay de que la segunda bola sea del mismo color que la primera?



$$P(N) = P(R \cap N) + P(N \cap N) =$$

$$= P(R) \cdot P(N/R) + P(N) \cdot P(N/N) =$$

$$= \frac{10}{15} \cdot \frac{7}{16} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(R \cap R) + P(N \cap N) =$$

$$= P(R) \cdot P(R/R) + P(N) \cdot P(N/N) =$$

$$= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{16} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{16} = \frac{11}{24}$$

Textos Marea Verde

31. En el comedor escolar la probabilidad de que no haya patatas una semana es 2/5; la probabilidad de que haya pescado es 2/5 y la probabilidad de que haya patatas y pescado es 1/10. Calcula la probabilidad de que no haya ni patatas ni pescado. Calcula la probabilidad de que no haya pescado sabiendo que ha habido patatas.

$$P(\text{noPat}) = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(\text{Pat}) = \frac{3}{5} \quad ; \quad P(\text{Pesc}) = \frac{2}{5} \quad ; \quad P(\text{Pat} \cap \text{Pes}) = \frac{1}{10}$$

$$P(\text{Pat} \cup \text{Pes}) = P(\text{Pat}) + P(\text{Pesc}) - P(\text{Pat} \cap \text{Pes}) = \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) = \frac{7}{10}$$

$$P(\text{noPat} \cap \text{noPes}) = 1 - P(\text{Pat} \cup \text{Pes}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{noPes/Pat}) = \frac{P(\text{Pat} \cap \text{noPes})}{P(\text{Pat})} \; ; \quad P(\text{Pat} \cap \text{noPes}) = P(\text{Pat}) - P(\text{Pat} \cap \text{Pes}) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{P(\text{Pat} \cap \text{noPes})}{P(\text{Pat})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$$

32. En una clase hay 20 alumnos y 10 alumnas. Se forman equipos de trabajo de 6 personas. Calcula la probabilidad de formar un equipo:

a) con únicamente chicas

$$P = \frac{\binom{10}{6}}{\binom{30}{6}} = \frac{210}{593775}$$

b) con 3 chicas

$$P = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{20}{3}}{\binom{30}{6}} = \frac{136800}{593775}$$

c) con únicamente chicos

$$P = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} = \frac{38760}{593775}$$

d) con al menos 3 chicas.

$$P = \frac{\binom{20}{6} + 10 \cdot \binom{20}{5} + \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{4} + \binom{10}{3} \cdot \binom{30}{3}}{\binom{30}{6}} = \frac{899025}{593775}$$

33. Aunque parezca una casualidad, por tener el año 365 días, es muy probable que en una clase de 35 alumnos haya dos que celebren su cumpleaños el mismo día. Calcula dicha probabilidad. Lo mismo si la clase tiene 20 estudiantes.

$$\text{probabilidad en una clase de 35 alumnos} = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \ldots \cdot \frac{331}{365} = 0{,}814$$

$$\text{probabilidad en una clase de 20 alumnos} = \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \ldots \cdot \frac{346}{365} = 0{,}411$$

34. Utiliza la tabla para obtener una tabla de contingencia sobre los accidentes de tráfico:

	En carretera (C)	En zona urbana (U)	total
Con víctimas (V)	34092	32295	66387
Solo daños materiales (D)	11712	20791	32503
Total	45804	53086	98890

Textos Marea Verde

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); P(V ∩ C); P(D ∩ U); P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Se sabe que ha habido un accidente en carretera, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido víctimas? ¿Son independientes los sucesos de accidente con víctimas y accidente en carretera?

$$P(V) = \frac{66387}{98890} = 0.67 \quad ; \quad P(D) = \frac{32503}{98890} \quad ; \quad P(C) = \frac{45804}{98890} \quad ; \quad P(U) = \frac{53086}{98890}$$

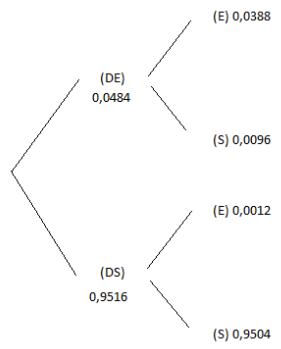
$$P(V \cap C) = \frac{34092}{98890} = 0.34 \quad ; \quad P(D \cap U) = \frac{20791}{98890}$$

$$P[U/V] = \frac{32295}{66387} \quad ; \quad P(V/U) = \frac{32295}{53086} \quad ; \quad P(V/C) = \frac{34092}{45805}$$

$$P(C/V) = \frac{34092}{66387} \quad ; \quad P(C/D) = \frac{11712}{32503}$$

$$P(V/C) = \frac{34092}{45805} \approx 0.74 \quad \text{como} \quad P(V) \approx 0.67 \quad \text{no son independientes}$$

35. Se realizan estudios sobre una determinada enfermedad y se conoce que la probabilidad de que una persona la tenga es de 0.04. Una determinada prueba detecta si una persona está enfer ma con una probabilidad de 0.97, pero también califica como enferma, en ocasiones, a una perso na sana con una probabilidad de 0.01. Representa esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada.
Calcula la probabilidad de que una persona sana sea detectada como enferma.



	Enfermo (E)	Sano (S)	total
Detectado enfermo (DE)	0.0388	0.0096	0.0484
Detectado como sano (DS)	0.0012	0.9504	0.9516
Total	0,4	0,96	1

$$P(DE/S) = \frac{0,0096}{0,96} = 0,001$$

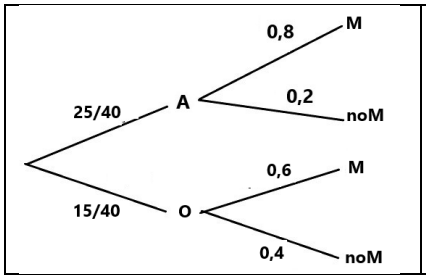
36. En el control de calidad de un proceso de fabricación se sabe que la probabilidad de que un circuit o sea defectuoso es 0.02. Un dispositivo para detectar los defectuosos tiene una probabili- dad de detectarlos de 0.9, pero también califica como defectuosos a 0.03 de los correctos. Repre- senta esta situación en un diagrama en árbol. Construye la tabla de contingencia asociada. Calcu- la la probabilidad de que un circuito defectuoso sea calificado como correcto.

	Defectuosos (D)	buenos (B)	total
Detectado defectuoso (DD)	0.018	0.0294	0.0474
Detectado como bueno (DB)	0.002	0.9506	0.9526
Total	0,02	0,98	1

$$P(DB/D) = \frac{0,002}{0,2} = 0,1$$

37. En una clase hay 25 alumnas y 15 alumnos, y se sabe que el 80 % de las alumnas aprueban las

Matemáticas mien-
tras que las aprueban el 60 % de los alumnos. Utiliza estos porcentajes para asignar probabilidades y calcula la probabilidad que hay al elegir una persona de la clase al azar de que:



A….Alumna
O….Alumno

M……Aprueba Matemáticas
noM….no Aprueba Matemáticas

a) Sea alumna y apruebe las matemáticas

$P(A \cap M) = P(A) \cdot P(M/A) = \frac{25}{40} \cdot 0{,}8 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) Sea alumna o apruebe las matemáticas

$\mathrm{P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M)}$

$\mathrm{P(M) = P(A \cap M) + P(O \cap M) = P(A)P(M/A) + P(O)P(M/O) = \frac{25}{40} \cdot 0{,}8 + \frac{15}{40} \cdot 0{,}6 = 0{,}725}$

$\mathrm{P(A \cup M) = \frac{25}{40} + 0{,}725 - 0{,}5 = 0{,}85}$

c) Sea alumno y suspenda matemáticas

$P(A \cap noM) = P(A) \cdot P(noM/A) = \frac{25}{40} \cdot 0{,}2 = 0{,}125$

d) Haya aprobado las matemáticas.

$\mathrm{P(M) = P(A \cap M) + P(O \cap M) = P(A)P(M/A) + P(O)P(M/O) = \frac{25}{40} \cdot 0{,}8 + \frac{15}{40} \cdot 0{,}6 = 0{,}725}$

Mediante tabla de contingencia, 80% de 25 = 20, 60% de 15 = 9

	Ap. Matem.	No Ap. Matem.	Total
Alumnas	20	5	25
Alumnos	9	6	15
Total	29	11	40

Y respondemos a los apartados.

38. Se estudian las familias de tres hijos. Para simplificar hacemos la hipótesis de que la probabilidad de chico sea igual a la de chica. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) A = El primer hijo es chica.

$\mathrm{P(A) = \frac{1}{2}}$

b) B = Al menos hay un varón.

$\mathrm{P(B) = 1 - P(ningún\ varón) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}}$

c) A ∪ B. Hacemos primero el d)

$\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}}$

d) A ∩ B. Primero una hija y al menos un varón, AOO-AAO-AOA

Textos Marea Verde

$P(A \cap B) = 3 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

39. En una bolsa hay 3 bolas verdes, 4 bolas rojas y una bola blanca. Sacamos dos bolas de la bolsa. Calcula la probabilidad de los sucesos: A = "alguna de las bolas es verde", B = "ha salido la bola blanca". Calcula también: P(A^c), P(B^c), P(A ∪ B) y P(A^c∩ B). ¿Son A y B sucesos incompatibles? ¿Son sucesos independientes?

$P(A^c) = P(\text{noV} \cap \text{noV}) = \frac{5}{8}\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$;

$P(B) = P(\text{blanca} \cap \text{otra}) + P(\text{otra} \cap \text{blanca}) = \frac{1}{8}\frac{7}{7} + \frac{7}{8}\frac{1}{7} = \frac{1}{4}$; $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\quad A \cap B$: Verde y Blanca − Blanca y Verde

$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$

$P(A \cup B) = \frac{9}{14} + \frac{1}{4} - \frac{3}{28} = \frac{11}{14}$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{3}{28} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

A y B no son incompatibles pues $P(A \cap B) \neq 0$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{9}{14} \cdot \frac{1}{14} = \frac{9}{56} \neq P(A \cap B) = \frac{3}{28}$ Son dependientes.

40. Dados los sucesos A y B de probabilidades: P(A^c) = 3/5; P(A ∩ B) = 1/8; P(B ∪ A) = 3/4; calcula las siguientes probabilidades: P(A); P(B); P(B^c); P(B/A^c); P(A^c∩ B^c); P(A/B). ¿Son A y B sucesos independientes?

$P(A^c) = \frac{3}{5}$; $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $\frac{3}{4} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{19}{40}$

$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{19}{40} = \frac{21}{40}$

$P(B/A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{p(A^c)} = \frac{\frac{19}{40} - \frac{1}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{12}$

$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{19}{40} \neq P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ Son dependientes.

41. Determina si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B tales que:

a) P(A) = 1/7; P(B) = 3/7; P(B ∪ A) = 4/7

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} - \frac{4}{7} = 0$

Son incompatibles

b) P(A) = 1/5; P(B) = 0

Incompatibles

42. Dados los sucesos A y B de probabilidades: P(A^c) = 2/5; P(B) = 3/5; P(A^c∩ B^c) = 1/5; calcula las siguientes probabilidades: P(A); P(B^c); P(B∪A); P(B/A^c); P(A∩B); P(A/B). ¿Son A y B sucesos independientes?

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

$\mathrm{P}(B^c) = 1 - \mathrm{P(B)} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(A^c \cap B^c) = \mathrm{P}[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B)$; $P(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

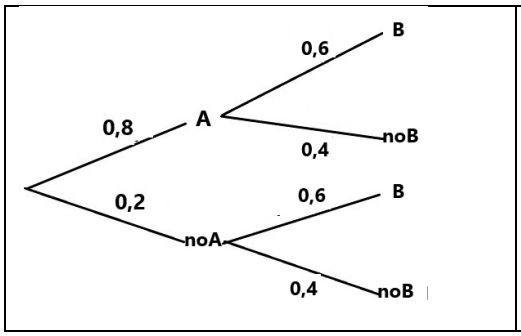
$\mathrm{P(B \cup A)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)}$; $\frac{4}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \mathrm{P(A \cap B)}$; $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{2}{5}$

$\mathrm{P(B}/A^c) = \frac{\mathrm{P(B \cap} A^c)}{\mathrm{P}(A^c)} = \frac{P(B) - \mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P}(A^c)} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$

$\mathrm{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$

$\mathrm{P(A \cap B)} \neq \mathrm{P(A)} \cdot P(B)$, No son sucesos independientes

43. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0.8 y el segundo de 0.6. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y la tabla de contingencia asociada las distintas posibilidades.



	A	A^c	
B	0,48	0,12	**0,6**
B^c	0.32	0,08	0,4
	0,8	0,2	1

Calcula:

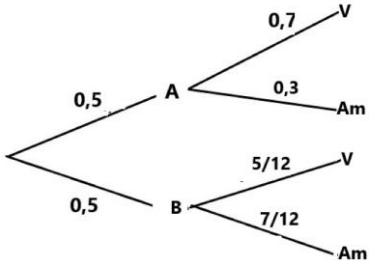
a) **¿Qué probabilidad hay de que al menos uno de los tiradores dé en el plato?**
$\mathrm{P}(A^c \cap B^c) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}008$
$P(A \cup B) = 1 - \mathrm{P}(A^c \cap B^c) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

b) ¿Probabilidad de que ninguno acierte?
$\mathrm{P}(A^c \cap B^c) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}008$

c) Sabemos que el disparo ha acertado en el blanco, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho el primer tirador?

$\mathrm{P(A/A \cup B)} = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0{,}8}{0{,}92} = \frac{20}{23}$

44. Se dispone de dos urnas A y B. La urna A tiene 7 bolas verdes y 3 amarillas.
La urna B tiene 5 bolas verdes y 7 amarillas.
Se saca una bola al azar de una de las dos urnas, también al azar, y resulta ser amarilla. Calcula la probabilidad de que sea de la urna B.



$\mathrm{P(B}/Am) = \frac{\mathrm{P(B \cap Am)}}{\mathrm{P(Am)}}$

$\mathrm{P}(Am) = \mathrm{P(A \cap Am)} + \mathrm{P(B \cap Am)} =$

$= \mathrm{P(A)P(Am/A)} + \mathrm{P(B)P(Am/B)} =$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot \frac{7}{12} = \frac{53}{120}$

$\frac{\mathrm{P(B \cap Am)}}{\mathrm{P(Am)}} = \frac{0{,}5 \cdot \frac{7}{12}}{\frac{53}{120}} = \frac{35}{53}$

BY NC SA
Textos Marea Verde

45. Se sabe que, en cierta población,la probabilidad de ser hombre y daltónico es un décimo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es 1/20.

La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

	H	M	
D	1/10	1/20	3/20
D^c	2/5	9/20	17/20
	1/2	1/2	1

$$P(D) = P(H \cap D) + P(M \cap D) = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$$

$$P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

$$P(M) = P(M \cap D^c) + P(M \cap D)\,;$$

$$\frac{1}{2} = P(M \cap D^c) + \frac{1}{20}; \qquad P(M \cap D^c) = \frac{9}{20}$$

a) Hallar la probabilidad de que no sea daltónico.

$P(D^c) = \frac{17}{20}$

b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

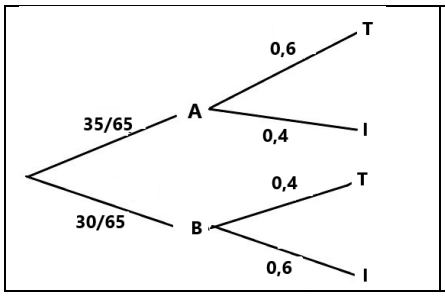
$$\mathrm{P(D/M)} = \frac{P(D \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{10}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

$P(D) = \frac{3}{20}$

46. En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo A consta de 35 estudiantes y el B tiene 30 estudiantes. El 60 % del grupo A ha elegido teatro, así como el 40 % del grupo B y el resto ha elegido informática.

a) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya elegido in formática.



$$\mathrm{P}(I) = \mathrm{P(A \cap I)} + \mathrm{P(B \cap I)} =$$
$$= P(A)P(I/A) + P(B)P(I/B) =$$
$$= \frac{35}{65} \cdot 0{,}4 + \frac{30}{65} \cdot 0{,}6 = \frac{32}{65}$$

b) Si un estudiante ha elegido teatro, calcula la probabilidad de que pertenezca al grupo B.

$$\mathrm{P(B/T)} = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} \frac{0{,}4 \cdot \frac{30}{65}}{0{,}6 \cdot \frac{35}{65} + 0{,}4 \cdot \frac{30}{65}} = \frac{12}{33}$$

47. En una baraja española de cuarenta cartas se han eliminado varias cartas. Se sabe que la prob abilidad de extraer un as entre las que quedan es 0.1, la probabilidad de que salga una copa es 0.3 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.6.

a) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa.

P(As) = 0,1 ; P(Copa) = 0,3 ; P(noAs y no Copa) = 0,6

$P(A \cup C) = 1 - \mathrm{P}(A^c \cap C^c) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Textos Marea Verde

b) Calcu-

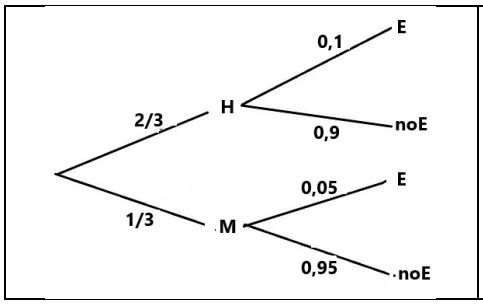
lar la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las carta s que no se han eliminado está el as de copas?

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap B)$; $0{,}4 = 0{,}1 + 0{,}3 - P(A \cap B)$; $P(A \cap B) = 0$

Hay Ases pero se ha eliminado el As de Copas

48. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que, de mujeres, hay una epidemia. El 10 % de los hombres y el 5 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de:

a) que sea hombre.



$$P(H) = \frac{2}{3}$$

b) que esté enfermo.

$$P(E) = P(H \cap E) + P(M \cap E) = P(H)P(E/H) + P(M)P(E/M) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 = \frac{1}{12}$$

c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

$$P(H/E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}1}{\frac{2}{3} \cdot 0{,}1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}05} = \frac{4}{5}$$

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. **En una bolsa hay 6 bolas negras y 3 bolas blancas, la probabilidad de sacar una bola negra es:**

   a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

   $$P(N) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

   Solución: b

2. **Indica cuál de los siguientes experimentos no es un experimento aleatorio:**

   a) Tirar una tiza y anotar el número de trozos en que se rompe
   b) Tirar un dado trucado y anotar el número de la cara superior.
   c) Cruzar una calle y estudiar si hay un atropello.
   d) Calcular el consumo de gasolina de un coche.

   El consumo de gasolina es determinado y constante, no aleatorio

   Solución: d

3. **El espacio muestral de tirar 3 monedas al aire y anotar si caen en cara (C) o en cruz (X) con sucesos elementales equiprobables es:**

   a) {CCC, CCX, CXX, XXX}
   b) {3C, 2C, 1C, 0C}
   c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}
   d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

   Solución: c

4. **El suceso contrario a sacar al menos una cara en el experimento anterior es:**

   a) {XXX}
   b) {CCC, CCX, CXX}
   c) {CXX, XCX, XXC}
   d) {CCC, CCX, CXC, XCC}

   Solución: a

5. **Indica cuál de los siguientes sucesos no son independientes:**

   a) Sacar un oro y sacar un rey con reemplazamiento.
   b) Tirar una moneda y sacar cara y volver a tirarla y volver a sacar cara.
   c) Tirar un dado y sacar 6 y volver a tirarlo y volver a sacar 6.
   d) Tirar un dado y sacar un múltiplo de 2, y sacar un 6.

   En el apartado d, no son eventos independientes, porque al haber sacado ya un múltiplo de dos la probabilidad de sacar un 6 en el mismo lanzamiento se ve afectada por que el 6 es múltiplo de dos.

   Solución: d

6. **La probabilidad de no sacar un as en una baraja de póker es:**

   a) 4/52 b) 48/52 c) 36/40 d) 1 – 36/40

   $$P(\text{no sacar un as}) = \frac{\text{total de cartas} - \text{ases}}{\text{total de cartas}} = \frac{48}{52}$$

   Solución: b

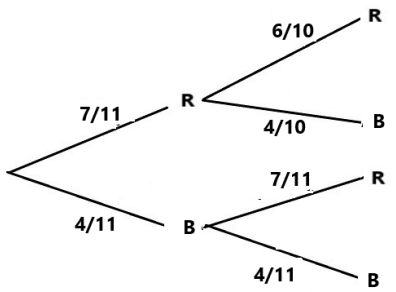
Textos Marea Verde

7. La probabilidad de que la suma de las caras superiores sea 7 del experimento tirar dos dados es:
a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

$$\text{P(suma de las caras sea 7)} = \frac{\text{combinacioes que suman 7}}{\text{total de combinaciones}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Solución: a

8. En una bolsa hay 7 bolas rojas y 4 blancas. Se saca una bola al azar y si es blanca se vuelve a meter en la bolsa, mientras que si es roja se deja fuera. Se saca otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea roja es: a) 42/110 b) 28/121 c) 371/605 d) 411/605



$$\text{P(R)} = \text{P(R} \cap \text{R)} + \text{P(B} \cap \text{R)} =$$
$$= P(R)P(R/R) + P(B)P(R/B) =$$
$$= \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{371}{605}$$

Solución: c

9. En una bolsa hay 4 bolas rojas y 3 blancas. Sacamos sin mirar dos bolas. La probabilidad de que sean del mismo color es: a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7 10.

$$\text{P(BB)} + \text{P(RR)} = \text{P(B)P(B/B)} + \text{P(R)P(R/R)} = \frac{3}{7}\frac{2}{6} + \frac{4}{7}\frac{3}{6} = \frac{3}{7}$$

Solución: c

10. Al lanzar un dado ha salido un número par, la probabilidad de que sea un 6 es P(sacar 6/ par):
a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6

$$\text{P(sacar 6/ha salido par)} = \frac{P(par \cap 6)}{P(par)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Solución: a

Textos Marea Verde