Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 15: Combinatoria
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

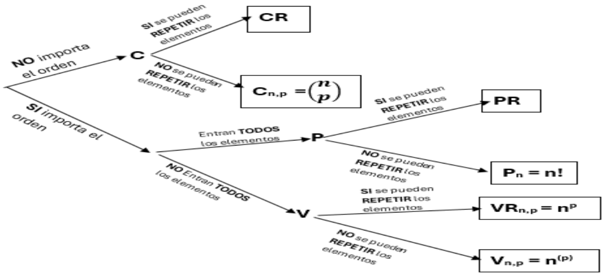
www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:
Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

NOCIÓN	DEFINICIÓN	EJEMPLOS
Permutaciones	Se considera sólo el **orden**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variaciones con repetición	Se consideran el **orden** y los **elementos**. Los elementos pueden **repetirse**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variaciones sin repetición	Influyen el **orden** y los **elementos**. Los elementos **NO** pueden repetirse. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6!}{3!} = 120$
Combinaciones	Influyen sólo los **elementos**. $C_{m,n} = \dfrac{V_{m,n}}{P_n} = \dfrac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \dbinom{m}{n}$	$C_{9,7} = \dbinom{9}{7} = \dfrac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propiedades de los números combinatorios	$\dbinom{m}{0} = 1;\ \dbinom{m}{m} = 1;\ \dbinom{m}{n} = \dbinom{m}{m-n};$ $\dbinom{m}{n} = \dbinom{m-1}{n} + \dbinom{m-1}{n-1}$	$\dbinom{5}{0} = \dbinom{5}{5} = 1;\ \dbinom{5}{2} = \dbinom{5}{3} = 10;$ $\dbinom{5}{3} = \dbinom{4}{3} + \dbinom{4}{2} = 6 + 4$
Triángulo de Tartaglia	$\dbinom{0}{0}$ $\dbinom{1}{0}\ \dbinom{1}{1}$ $\dbinom{2}{0}\ \dbinom{2}{1}\ \dbinom{2}{2}$ $\dbinom{3}{0}\ \dbinom{3}{1}\ \dbinom{3}{2}\ \dbinom{3}{3}$ ….	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 …
Binomio de Newton	$(a+b)^n = \dbinom{n}{0}a^n + \dbinom{n}{1}a^{n-1}b + \dbinom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \dbinom{n}{n-1}ab^{n-1} + \dbinom{n}{n}b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

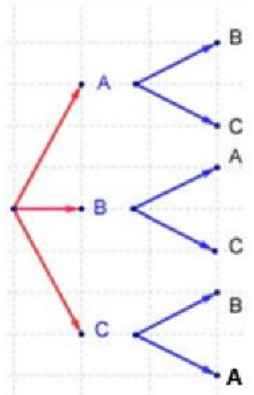


ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PERMUTACIONES

1. Haz diagramas en árbol y calcula:
a) Cuántas palabras de 2 letras distintas (con significado o sin él) puedes escribir con las letras A, B y C.
b) Cuántas palabras de 3 letras distintas que empiecen por vocal y terminen por consonante. Recuerda hay 5 vocales y 22 consonantes.

a)



$3 \cdot 2 = 6$

b) El abecedario tiene 27 letras, 5 vocales y 22 consonantes.
La primera letra puede ser una de las vocales: 5
La segunda letra puede ser cualquiera de las del abecedario menos la vocal utilizada: 26
La tercera letra puede ser cualquier consonante menos la utilizada anteriormente: 21
Palabras de 3 letras distintas empiezan vocal y terminan consonante: $5 \cdot 26 \cdot 21 = 2730$.

2. Ana tiene 5 camisetas, 3 pantalones y 4 pares de zapatillas. ¿Puede llevar un modelo diferente durante dos meses (61 días)? ¿Cuántos días deberá repetir modelo? Ayuda: Seguro que un diagrama en árbol te resuelve el problema

$5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ modelos diferentes. Sólo repetirá modelo un día.

3. En un tablero cuadrado con 25 casillas, ¿de cuántas formas diferentes podemos colocar 2 fichas idénticas de modo que estén en distinta fila y en distinta columna? Sugerencia: Confecciona un diagrama de árbol. ¿Cuántas casillas hay para colocar la primera ficha? Si eliminamos su fila y su columna, ¿en cuántas casillas podemos colocar la segunda ficha?

Para colocar la primera ficha tenemos 25 casillas.
Para colocar la segunda ficha nos queda, si eliminamos una fila y una columna, un cuadrado de 4 por 4 que son 16 casillas.
Hay que dividir entre 2, pues donde hemos puesto la segunda ficha ya la hemos contado como posible para poner la segunda, como son idénticas las fichas, se repite la colocación: $(25 \cdot 16) / 2 = 200$

4. ¿De cuántas formas pueden repartirse 4 personas, 4 pasteles distintos comiendo cada persona un pastel?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

5. En una carrera de caballos participan 5 caballos con los números 1, 2, 3, 4 y 5. ¿Cuál de ellos puede llegar el primero? Si la carrera está amañada para que el número 4 llegue el primero, ¿cuál de ellos puede llegar el segundo? Si la carrera no está amañada, ¿de cuántas formas distintas pueden llegar a la meta? Haz un diagrama en árbol para responder.

Cada uno de los 5 puede llegar el primero.

Si el nº 4 llega el primero, en segundo lugar pueden llegar los números 1, 2, 3, y 5.

Si la carrera no está amañada hay $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas distintas de llegar a la meta.

6. ¿De cuántas maneras puedes meter 4 objetos distintos en 4 cajas, si sólo puedes poner un objeto en cada caja?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

7. ¿Cuántos países forman actualmente la Unión Europea? Puedes ordenarlos siguiendo diferentes criterios, por ejemplo por su población, o con respecto a su producción de acero, o por la superficie que ocupan. ¿De cuántas maneras distintas es posible ordenarlos?

Desde 2007 (hasta 2015) hay 28 países que forman la Unión Europea.

Se pueden ordenar de $P_{28} = 28! =$ 304 888 344 611 714 000 000 000 000 000 formas diferentes.

8. En el año 1973 había 6 países en el Mercado Común Europeo. ¿De cuántas formas puedes ordenarlos?

Disposición de 6 elementos, importa el orden, entran todos: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

9. El desempleo aumenta y en una oficina de colocación hay 7 personas. ¿De cuántas formas distintas pueden haber llegado?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$ b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

a) $\frac{6!}{4!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $\frac{7!}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

c) $\frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$

d) $\frac{6!}{5!} = \frac{6\cdot 5!}{5!} = 6$

e) $\frac{12!}{11!} = \frac{12\cdot 11!}{11!} = 12$

f) $\frac{347!}{346!} = 347$

Cuando son dos números factoriales que se diferencian en una unidad, al dividir queda el mayor sin factorial

11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$

b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} = n + 4$

c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!} = \frac{(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)!}{(n+2)!} = (n+4)\cdot(n+3) = n^2 + 7n + 12$

d) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$

12. Expresa utilizando factoriales: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

a) $5\cdot 4\cdot 3 = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = \frac{5!}{2!}$

b) $10\cdot11\cdot12\cdot 13 = \frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9!}{9!} = \frac{13!}{9!}$

c) $8\cdot 7\cdot 6 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!} = \frac{8!}{5!}$

d) $10\cdot 9 = \frac{10\cdot9\cdot8!}{8!} = \frac{10!}{8!}$

13. Expresa utilizando factoriales: a) (n+3)·(n+2)·(n+1); b) n·(n+1)·(n+2)·(n+3); c) n·(n+1)·(n+2)·… ·(n+k).

a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1) = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{n!} = \frac{(n+3)!}{n!}$

b) $\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}+1)\cdot(\mathrm{n}+2)\cdot(\mathrm{n}+3) = \frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+3)!}{(n-1)!}$

c) $\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}+1)\cdot(\mathrm{n}+2)\cdot\ldots\cdot(\mathrm{n}+\mathrm{k}) = \frac{(n+k)\cdot\ldots\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!}$

14. Escribe en forma de factorial las distintas formas que tienen de sentarse en una clase los 30 alumnos en los 30 puestos que hay. No lo calcules. Es un número muy grande.

Disposición de 30 elementos, importa el orden, entran todos: $P_{30} = 30!$

15. Nueve amigos van en bicicleta por una carretera en fila india. ¿De cuántas formas distintas pueden ir ordenados?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos: $P_9 = 9! = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 362\,880$

2. VARIACIONES

16. Con los 10 dígitos, ¿cuántos números distintos pueden formarse de 6 cifras?

Como el 0 no puede estar en primera posición tenemos 9 dígitos para colocar en la primera posición y nos quedan 10 dígitos para 5 posiciones, disposición de 10 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 5), se pueden repetir: $9\cdot VR_{10,5} = 10^5 = 9\cdot 100\,000 = 900\,000$

17. Con los 10 dígitos y 27 letras del alfabeto, ¿cuántas matriculas de coche pueden formarse tomando 4 dígitos y 3 letras?

Los números pueden empezar por 0

Números: disposición de 10 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 4), se pueden repetir: $VR_{10,4}$

Letras: disposición de 27 elementos, importa el orden, no entran todos (sólo 3), se pueden repetir: $VR_{27,3}$

En total: $VR_{10,4}\cdot VR_{27,3} = 10^4\cdot 27^3 = 196\,830\,000$

18. Un byte u octeto es una secuencia de 0 y 1 tomados de 8 en 8. ¿Cuántos bytes distintos pueden formarse?

Disposición de 2 elementos, importa el orden, no entran todos (esta condición correctamente expresada es "no necesariamente entran todos"), se pueden repetir: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

a) $VR_{4,2} = 4^2 = 16$

b) $VR_{4,4} = 4^4 = 256$

c) $VR_{11,2} = 11^2 = 121$

d) $VR_{2,11} = 2^{11} = 2048$

20. Expresa con una fórmula:

Las variaciones con repetición de 3 elementos tomadas de 5 en 5.

Las variaciones con repetición de 7 elementos tomadas de 2 en 2.

Las variaciones con repetición de 5 elementos tomadas de 4 en 4.

a) $VR_{3,5} = 3^5$; b) $VR_{7,2} = 7^2$; c) $VR_{5,4} = 5^4$

21. Disparamos al plato 4 veces. En cada disparo puede que des en el blanco (B) o que no des en el blanco (NB). ¿Cuántos resultados distintos hay?

Acertar o no acertar lo podemos considerar como 0 y 1.

Disposición de 2 elementos, importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$

22. Escribe cuantas palabras de tres letras (con significado o no) puedes formar que empiecen por consonante y terminen con la letra R.

El alfabeto tiene 27 letras, 5 vocales y 22 consonantes.

La primera letra ha de ser consonante: 22

Como la última ha de ser la R, nos quedan 27 letras para la segunda posición: 27

En total: $22 \cdot 27 = 594$

23. Tres personas van a una pastelería en la que sólo quedan 4 pasteles distintos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir su pastel si cada una compra uno?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:

$V_{4,3} = 4^{(3)} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

24. Con los 10 dígitos se desean escribir números de 4 cifras, todas ellas distintas. ¿Cuántas posibilidades hay para escribir la 1ª cifra? Una vez elegida la primera, ¿cuántas hay para elegir la 2ª? Una vez elegidas las dos primeras, ¿cuántas hay para la 3ª? ¿Cuántas posibilidades hay en total?

Para escribir la primera cifra tenemos 9 posibilidades porque si el número empieza por 0 no es de cuatro cifras.

Para la segunda cifra también tenemos 9 porque ahora podemos poner el cero, pero no la colocada en primer lugar.

Para la tercera 8 y para la cuarta 7.

En total $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$ posibilidades.

25. Si tienes 9 elementos diferentes y los tienes que ordenar de 5 en 5 de todas las formas posibles, ¿cuántas hay?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{9,5} = 9^{(5)} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$

26. Con las letras A, B y C, ¿cuántas palabras de 2 letras no repetidas podrías escribir?

Disposición de 3 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{3,2} = 3^{(2)} = 3 \cdot 2 = 6$

27. Con los dígitos 3, 5, 7, 8, 9, ¿cuántos números de 3 cifras distintas puedes formar?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
$V_{5,3} = 5^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

28. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

a) $V_{11,6} = 11·10·9·8·7·6 = 332640$; b) $V_{7,5} = 7·6·5·4·3 = 2520$; c) $V_{8,4} = 8·7·6·5 = 1680$.

29. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

a) $\frac{7!}{3!} = \frac{7·6·5·4·3!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

b) $\frac{6!}{4!} = \frac{6·5·4!}{4!} = 6 \cdot 5 = 30$

c) $\frac{10!}{8!} = \frac{10·9·8!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$

COMBINACIONES

30. Tenemos 5 bombones (iguales) que queremos repartir entre 7 amigos, ¿de cuántas formas se pueden repartir los bombones si a ninguno le vamos a dar más de un bombón?

Reparto de 5 elementos entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,5} = \binom{7}{5} = 21$.

31. Juan quiere regalar 3 DVDs a Pedro de los 10 que tiene, ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

Reparto de 3 elementos entre 10, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$

32. En el juego del póker se da a cada jugador una mano formada por cinco cartas, de las 52 que tiene la baraja francesa, ¿cuántas manos diferentes puede recibir un jugador?

Reparto de 5 elementos entre 52, no importa el orden, no se pueden repetir:

$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 1\,497\,000\,960$

33. Añade tres filas más al triángulo de Tartaglia de la derecha

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Las 3 nuevas filas serían:

1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

34. Suma los números de cada fila y comprueba que la suma de los elementos de la fila m es siempre igual a 2^m

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

35. Sin calcularlos, indica cuánto valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ y $C_{5,5}$ buscando su valor en el triángulo.

Mirando en el triángulo del ejercicio 65, $C_{5,3} = 10$; $C_{5,4} = 5$; $C_{5,2} = 10$; $C_{5,5} = 1$.

También, la fila 5 es: $\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $C_{5,2} = \binom{5}{2}$ $C_{5,3} = \binom{5}{3}$ $C_{5,4} = \binom{5}{4}$ $C_{5,5} = \binom{5}{5}$

1 5 10 10 5 1

36. Desarrolla $(a + b)^6$

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$
$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

37. Desarrolla a) $(a - b)^6$; b) $(x - 3)^4$; c) $(x + 2)^7$; d) $(-x + 3)^5$.

$$\text{a) } (a-b)^6 = \binom{6}{0}a^6 - \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 - \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 - \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6 =$$
$$= a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$\text{b) } (x-3)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3 \cdot 3 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 3^2 - \binom{4}{3}x \cdot 3^3 + \binom{4}{4}3^4 =$$
$$= x^4 - 4x^3 \cdot 3 + 6x^2 \cdot 3^2 - 4x \cdot 3^3 + 3^4 = x^4 - 12 + 54x^2 - 108x + 81$$

c) $(x+2)^7=\binom{7}{0}x^7+\binom{7}{1}x^6 2+\binom{7}{2}x^5 2^2+\binom{7}{3}x^4 2^3+\binom{7}{4}x^3 2^4+\binom{7}{5}x^2 2^5+\binom{7}{6}x 2^6++\binom{7}{7}2^7=$

$$=x^7+14x^6+84x^5+280x^4+560x^3+672x^2+448x+128$$

d) $(-x+3)^5=\binom{5}{0}(-x)^5+\binom{5}{1}(-x)^4\cdot 3+\binom{5}{2}(-x)^3\cdot 3^2+\binom{5}{3}(-x)^2\cdot 3^3+\binom{5}{4}(-x)3^4++\binom{5}{5}3^5$

$$=-x^5+15x^4-90x^3+270x^2-405x+243$$

38. Calcula el coeficiente de x^7 en el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)^5$

La suma de los exponentes de x han de sumar 7, $x^{5-k}\cdot(x^2)^k=x^7$, luego

$5-k+2\cdot k=7$, $k=2$, por tanto el término es,

$\binom{5}{2}(3x)^3\left(\frac{x^2}{2}\right)^2=10\cdot 3^3\cdot x^3\cdot\frac{x^4}{2^2}$, el coeficiente es $\frac{10\cdot 27}{4}=\frac{135}{2}$

39. Expresa con radicales simplificados el polinomio que se obtiene al desarrollar $\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5$

$$\left(-\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right)^5=\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5$$

$$\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^5=\binom{5}{0}(\sqrt{2})^5-\binom{5}{1}(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+\binom{5}{2}(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-\binom{5}{3}(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+\binom{5}{4}(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-\binom{5}{5}\left(\frac{x}{2}\right)^5=$$

$$=(\sqrt{2})^5-5(\sqrt{2})^4\left(\frac{x}{2}\right)+10(\sqrt{2})^3\left(\frac{x}{2}\right)^2-10(\sqrt{2})^2\left(\frac{x}{2}\right)^3+5(\sqrt{2})\left(\frac{x}{2}\right)^4-\left(\frac{x}{2}\right)^5=$$

$$=4\sqrt{2}-10x+5\sqrt{2}x^2-\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{16}\sqrt{2}x^4-\frac{1}{32}x^5$$

4. OTROS PROBLEMAS DE COMBINATORIA

40. Tres amigos A, B y C están jugando a las cartas. Cada uno pasa una carta al que está a su derecha. Uno es español, otro italiano y el otro portugués. A le pasa una carta al italiano. B se la ha pasado al amigo que se la ha pasado al español. ¿Cuál de los amigos es español, cuál italiano y cuál portugués? Ayuda: Haz un diagrama circular como el anterior.

El español (A) tiene al italiano (B) a su derecha y al portugués (C) a su izquierda

41. Ana y Alejandro invitan a cenar a 3 amigos y 3 amigas, ¿cuántas formas tienen de colocarse en una mesa redonda? ¿En cuántas están juntos Ana y Alejandro? ¿En cuántas no hay dos chicos ni dos chicas juntos?

Con Ana y Alejandro hay 4 chicos y 4 chicas en total 8.

En las distribuciones circulares hay que fijar 1 persona, nos quedan 7

Hay P_7 = 7! = 5 040 formas de sentarse en la mesa.

Hay 2 formas de sentar a la pareja, según quien esté a derecha o izquierda, nos quedan 6, luego

Tenemos: $2\cdot P_6 = 2\cdot 6! = 1\,440$ formas en las que están juntos Ana y Alejandro.

Tenemos P_3 y P_3 formas de sentar a chicas y chicos intercalándoles, luego en total tenemos:

$P_3\cdot P_3 = 3!\cdot 3! = 6\cdot 6 = 36$ formas en las que no hay dos chicas ni dos chicos juntos.

42. ¿Cuántas poligonales cerradas se pueden dibujar con los 8 vértices de un octógono?

Hay P_7 = 7! = 5 040 poligonales cerradas contando con el propio octógono.

43. Con los dígitos 1, 2, y 3 cuántos números distintos de 7 cifras puedes formar con tres veces la cifra 1, dos veces la cifra 2 y dos veces la cifra 3.

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 3, 2 y 2 veces:

$PR_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210$ números distintos.

44. Con las letras de la palabra CARCAJADA, ¿cuántas palabras con estas 9 letras, con sentido o sin él, se pueden formar?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4, 2, 1, 1 y 1 veces:
$PR_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!\cdot 2!} = 7\,560$ Palabras distintas.

45. Tenemos dos bolas blancas, tres negras y cuatro rojas, ¿de cuántas formas distintas podemos ordenarlas? ¿Cuántas no tienen las dos blancas juntas?

Disposición de 9 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4, 3, y 2 veces:
$PR_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 2!} = 1\,260$ formas distintas.
Consideramos las 2 bolas blancas como una sola y contamos de cuantas formas se pueden ordenar:
$PR_8^{4,3,1} = \frac{8!}{4!\cdot 3!\cdot 1!} = 280$
Al total restamos las que están juntas y tenemos las que están separadas: 1 260 − 280 = 980.

46. El candado de mi maleta tiene 7 posiciones en las que podemos poner cualquiera de los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas contraseñas diferentes podría poner?, ¿cuántas tienen todos sus números distintos? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces? Ayuda: Observa que para calcular las que tienen algún número repetido lo más fácil es restar del total las que tienen todos sus números distintos.

- Disposición de 7 elementos, importa el orden, no entran todos, se pueden repetir:
  $VR_{10,7} = 10^7$ = 10 000 000 contraseñas.
- Disposición de 7 elementos, importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir:
  $V_{10,7} = 10^{(7)}$ = 604 800 contraseñas con números distintos.
- Algún número repetido (aparece 2 veces o más): a todas las contraseñas posibles le restamos las que tienen todos los dígitos distintos: 10 000 000 - 604 800 = 9 395 200 contraseñas.
- Tienen un número repetido 2 veces:
  - Cogemos el número que se va a repetir, que va a ocupar dos posiciones, nos quedan 5 posiciones que pueden ocupar cualquiera de los 9 dígitos restantes, tenemos que escoger que 5 dígitos van a ser, distintos del repetido: $C_{9,5}$.
  - Todos los números que se pueden escribir repitiendo uno de los dígitos: $PR_7^{2,1,1,1,1,1}$
  - En total tenemos: $C_{9,5} \cdot PR_7^{2,1,1,1,1,1}$ = 3 175 200 contraseñas.

47. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 7 bolas idénticas en 5 cajas diferentes colocándolas todas si ninguna caja puede quedar vacía? ¿Y si podemos dejar alguna caja vacía? Ayuda: Ordena las bolas en una fila separadas por 4 puntos así quedan divididas en 5 partes, que indican las que se colocan en cada caja.

- Como son todas iguales no hay que elegir, introducimos una bola en cada caja, nos quedan 2 bolas que podemos introducir, una en cualquiera de las 5 y lo mismo la otra, luego: $5 \cdot 5 = 25$
- Sumamos las maneras que hay sin dejar ninguna vacía y le sumamos dejar una vacía:
    - Ninguna vacía hay 25.
    - Una vacía: elegimos la vacía, hay 5 posibles, nos quedan 4 cajas y 7 bolas, como no puede quedar ninguna vacía, introducimos una en cada caja, nos quedan 3 bolas que las podemos introducir en cualquiera de las cajas: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
    - En total tenemos: $25 + 64 = 89$

48. ¿Cuántas pulseras diferentes podemos formar con 4 bolas blancas y 6 rojas? Ayuda: Este problema es equivalente a introducir 6 bolas iguales en 4 cajas idénticas pudiendo dejar cajas vacías.

Supongamos que las pulseras no se pueden voltear: Si no fueran cerradas tendríamos $C_{10,4} = 210$ pulseras diferentes. Al ser cerradas tenemos $210/10 = 21$ pulseras distintas.
Si las pulseras se pueden voltear:
Vamos a estudiar los casos a partir de la distancia entre las bolas blancas.
Si las 6 bolas rojas están unidas: Sólo hay 1 caso: 0-0-0-6
Si hay 5 bolas rojas unidas: Hay 2 casos posibles: 1-0-0-5 y 0-1-0-5.
Si hay 4 bolas rojas unidas: Hay 4 casos posibles: 1-1-0-4, 1-0-1-4, 0-0-2-4, 0-2-0-4
Si hay 3 bolas rojas unidas: Hay 6 casos posibles: 0-3-0-3, 3-0-0-3, 0-2-1-3, 0-1-2-3, 2-0-1-3, 1-1-1-3
Si hay 2 bolas rojas unidas: Hay 3 casos posibles: 2-1-1-2, 1-2-1-2, 0-2-2-2.
En total 16 casos.

49. ¿Cuántas formas hay de colocar al rey blanco y al rey negro en un tablero de ajedrez de forma que no se ataquen mutuamente? ¿Y dos alfiles? ¿Y dos reinas?

- El rey blanco lo podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición.
    - Si el rey blanco está en una esquina amenaza a 3 y excluyendo su posición hay 60 casillas para colocar al rey negro y como hay 4 esquinas en total hay 240 formas.
    - Si el rey blanco está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 5 casillas y excluyendo la suya tenemos 58, en total $58 \cdot 24 = 1392$ formas.
    - Si el rey blanco está en una posición central, hay 36 casillas de este tipo, amenaza 8 casillas que incluyendo la suya no amenaza a 55, en total $55 \cdot 36 = 1980$.
    - Por último $240 + 1392 + 1980 =$ **3612**.
- El alfil blanco lo podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición:
    - Si está en una esquina amenaza a 7, excluyendo la suya, nos quedan $64 – 8 = 56$ para el negro y como hay 4 esquinas, $4 \cdot 56 = 224$ formas.

- Si está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 7 casillas y excluyendo la suya tenemos 64 – 8 = 56 para el alfil negro, como para el blanco hay 24, en total hay 24 · 56 = 1344 formas.
- Si está en una de las 20 casillas de las segundas filas amenaza 9 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 10 = 54 casillas, en total, 20 · 54 = 1080.
- Si está en una de las 12 casillas de las terceras filas amenaza 11 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 12 = 52 casillas, en total, 12 · 52 = 624.
- Si está en una de las 4 casillas de las cuartas filas amenaza 13 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 14 = 50 casillas, en total, 4 · 50 = 200.
- En total, 224 + 1344 + 1080 + 624 + 200 = **3472**

* La reina blanca la podemos colocar en cualquiera de las 64 casillas. El número de casillas que amenaza depende de su posición:
  - Si está en una esquina amenaza a 21, excluyendo la suya, nos quedan 64 – 22 = 42 para la reina negra y como hay 4 esquinas, 4 · 22 = 88 formas.
    - En cualquier casilla, que no sean las esquinas, en horizontal y vertical siempre amenaza 7 en cada dirección, es decir, 14 y en diagonal se comporta como el alfil, luego a los cálculos del alfil hay que sumar siempre 14 casillas más de amenaza.
  - Si está en una de las 24 casillas del borde (no contamos las esquinas) amenaza 7 + 14 = 21 casillas y excluyendo la suya tenemos 64 – 22 = 42 para la reina negra, como para la blanca hay 24, en total hay 24 · 42 = 1008 formas.
  - Si está en una de las 20 casillas de las segundas filas amenaza 9 + 14 = 23 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 24 = 40 casillas, en total, 20 · 40 = 800.
  - Si está en una de las 12 casillas de las terceras filas amenaza 11 + 14 = 25 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 26 = 38 casillas, en total, 12 · 38 = 456.
  - Si está en una de las 4 casillas de las cuartas filas amenaza 13 + 14 = 27 casillas, excluyendo la suya, quedan 64 – 28 = 36 casillas, en total, 4 · 36 = 144
  - En total, 88 + 1008 + 800 + 456 + 144 = **2496**.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

PERMUTACIONES

1. Tres nadadores echan una carrera. ¿De cuántas formas pueden llegar a la meta si no hay empates? ¿Y si son 8 nadadores?

Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Disposición de 8 elementos, importa el orden, entran todos: $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

2. Loli, Paco, Ana y Jorge quieren fotografiarse juntos, ¿de cuántas maneras pueden hacerse la fotografía? Quieren situarse de manera que alternen chicos con chicas, ¿de cuántas maneras pueden ahora hacerse la fotografía?

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Disposición de 2 elementos, importa el orden, entran todos: P_2 para las chicas e igualmente para chicos P_2, como puede empezar por chica o chico multiplicamos por 2:

$2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! \cdot 2! = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

3. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 6 objetos distintos en 6 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja?

Disposición de 6 elementos, importa el orden, entran todos: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

4. En una parada de autobús hay 5 personas, ¿en cuántos órdenes distintos pueden haber llegado a la parada? Al llegar una nueva persona se apuesta con otra a que adivina el orden de llegada, ¿qué probabilidad tiene de ganar?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/120.

5. Siete chicas participan en una carrera, ¿de cuántas formas pueden llegar a la meta? No hay empates. ¿Cuál es la probabilidad de acertar el orden de llegada a la meta?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos: $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

La probabilidad de acertar el orden de llegada es 1/5040

6. ¿Cuántos números distintos y de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6, y 7? ¿Cuántos pueden formarse si todos empiezan por 5? ¿Y si deben empezar por 5 y terminar en 7?

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Si empiezan por 5 tenemos un dígito menos, nos quedan 4:

Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Si empiezan por 5 y terminan en 7 tenemos 3 dígitos:

Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

VARIACIONES

7. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos son impares? ¿Cuántos son múltiplos de 4? Recuerda: Un número es múltiplo de 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4.

- 4 cifras distintas: Disposición de 4 elementos (tomados de 6), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{6,4} = 6^{(4)} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
- Impares, acaban en 1, 3 o 5, hay 3 dígitos posibles, nos quedan 5 para coger 3: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $3 \cdot V_{5,3} = 3 \cdot 5^{(3)} = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 180$
- Para los múltiplos de 4, analizamos las dos últimas cifras que pueden ser: 12, 16, 24, 36, 52, 56 y 64, hay 7 posibles, nos quedan 4 dígitos y 2 para elegir: Disposición de 2 elementos (tomados de 4), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $7 \cdot V_{4,2} = 7 \cdot 4^{(2)} = 7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$

8. ¿Cuántos números de 4 cifras, distintas o no, se pueden escribir con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Calcula la suma de todos ellos. Sugerencia: Ordénalos de menor a mayor y suma el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente

Disposición de 4 elementos (tomados de entre 6), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{6,4} = 6^4 = 1296$.

Viene a ser la suma , 1 111 + 1 112 + … +6 666, la suma de los términos primero y último es igual a la suma de segundo y penúltimo, 7 777, como hay 1296 números y los juntamos de 2 en 2, la suma total es: $(7\,777 \cdot 1296)/2 = 5\,039\,496$.

9. ¿Cuántas banderas de 3 franjas horizontales de colores distintos se pueden formar con los colores rojo, amarillo y morado? ¿Y si se dispone de 5 colores? ¿Y si se dispone de 5 colores y no es preciso que las tres franjas tengan colores distintos?

3 colores: Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

5 colores: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{5,3} = 5^{(3)} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

5 colores, sin ser distintos: Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$

10. A Mario le encanta el cine y va a todos los estrenos. Esta semana hay 6, y decide ir cada día a uno. ¿De cuántas formas distintas puede ordenar las películas? Mala suerte. Le anuncian un examen y decide ir al cine solamente el martes, el jueves y el sábado. ¿Entre cuántas películas puede elegir el primer día? ¿Y el segundo? ¿Y el tercero?

6 días: Disposición de 6 elementos (tomados de 7), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{7,6} = 7^{(6)} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5\,040$

3 días: el primer día elige entre 6, el segundo entre 5 y el tercero entre 4.

11. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}, ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se pueden formar? (Observa: Si comienza por 0 no es un número de cuatro cifras). ¿Cuántos son menores de 3000?

4 cifras: como la primera no puede ser 0, nos quedan 5 para la primera posición y para las 3 restantes nos quedan 5 cifras, Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{5,3} = 5^{(3)}$
En total hay: $5 \cdot V_{5,3} = 5 \cdot 5^{(3)} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ números de 4 cifras distintas.
Menores de 3 000 son los que empiezan por 1 y por 2, es decir, 2 · Disposición de 3 elementos (tomados de 5), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $2 \cdot V_{5,3} = 2 \cdot 5^{(3)} = 120$.

12. ¿Cuántos números de tres cifras, diferentes o no, se pueden formar? De éstos, ¿cuántos son mayores que 123?

El menor número de tres cifras es 100, el mayor 999, en total hay 900.

Mayores que 123 hay 900 menos los menores o igual que 123, que son del 100 al 123, en total 24, luego mayores que 123 hay: $900 - 24 = 876$.

13. Con las letras de la palabra "arquetipo" ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?
a) Si todas las letras son distintas.
b) Si se pueden repetir letras.

Hay 5 vocales y 4 consonantes, tenemos que alternar vocal y consonante, luego tenemos que calcular el número de letras con 3 vocales y el de 3 consonates y multiplicarlas y a su vez multiplicar por 2, pues puede empezar en vocal o consonante.

a) $2 \cdot V_{5,3} \cdot V_{4,3} = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 2\,880$ palabras.

b) Si las letras se pueden repetir tenemos $2 \cdot VR_{5,3} \cdot VR_{4,3} = 54\,000$ palabras.

14. El lenguaje del ordenador está escrito en secuencias de ceros y unos. Un byte es una de estas secuencias y está formada, en general, por 8 dígitos. ¿Cuántos bytes diferentes se pueden formar? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 16 dígitos, ¿cuántos bytes diferentes se podrían formar ahora? Si se fabricara un ordenador cuyos bytes tuvieran 4 dígitos, ¿se podría escribir con ellos las letras del alfabeto?

Byte (8 dígitos): Disposición de 8 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,8} = 2^8 = 256$ bytes.

Byte (16 dígitos): Disposición de 16 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,16} = 2^{16} = 65\,536$ bytes.

Byte (4 dígitos): Disposición de 4 elementos (tomados de 2), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{2,4} = 2^4 = 16$ bytes diferentes, no se pueden escribir las letras del alfabeto.

COMBINACIONES

15. Escribe dos números combinatorios con elementos diferentes que sean iguales y otros dos que sean distintos.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\binom{6}{3} = \binom{20}{1}$ y $\binom{8}{5} \neq \binom{9}{9}$

$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20$, $\binom{20}{1} = 20$; $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = 56 \neq \binom{9}{9} = 1$

16. Tienes siete bolas de igual tamaño, cuatro blancas y tres negras, si las colocas en fila. ¿De cuántas formas puede ordenarlas?

Disposición de 7 elementos, importa el orden, entran todos, se repiten, 4 y 3 veces:

$PR_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 35$ formas distintas.

También, tenemos 7 posiciones, calculamos todas las formas de coger 4 posiciones y ponemos las bolas negras, en las restantes posiciones ponemos las blancas; igualmente puede calcularse cogiendo 3 posiciones y poner las blancas y en las restantes las negras: $\binom{7}{3} = \binom{7}{4} = 35$ formas distintas.

17. Con 5 latas de pintura de distintos colores, ¿cuántas mezclas de 3 colores podrás hacer?

Reparto de 3 elementos de entre 5, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{5,3} = \binom{5}{3} = 10$.

18. Calcula: $\boldsymbol{a)}\ \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}}$; $\boldsymbol{b)}\ \binom{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$; $\boldsymbol{c)}\ \binom{\mathbf{20}}{\mathbf{1}}$; $\boldsymbol{d)}\ \binom{\mathbf{34}}{\mathbf{0}}$; $\boldsymbol{e)}\ \binom{\mathbf{47}}{\mathbf{47}}$

a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$

b) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\cdot(8-5)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$

c) $\binom{20}{1} = 20$

d) $\binom{34}{0} = 1$

e) $\binom{47}{47} = 1$

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

a) $C_{9,3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\cdot(9-3)!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$

b) $C_{10,6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!\cdot(10-6)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!}{6!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$

c) $C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot(8-4)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70$

d) $C_{20,19} = \binom{20}{19} = 20$

e) C$_{47,1}$ = $\binom{47}{1} = 47$

20. ¿De cuántas maneras se puede elegir una delegación de 4 estudiantes de un grupo de 30? ¿Y en tu propio grupo?

Reparto de 4 elementos de entre 30, no importa el orden, no se pueden repetir:

C$_{30,3}$ = $\binom{30}{3}$ = 27 405 maneras de elegir 4 alumns de entre 30.

21. ¿Cuántos productos diferentes se pueden formar con los números: 2, 1/3, 7, 5 y π tomándolos de 3 en 3? ¿Cuántos de esos productos darán como resultado un número entero? ¿Cuántos un número racional no entero? ¿Cuántos un número irracional?

Reparto de 3 elementos de entre 5, no importa el orden, no se pueden repetir: C$_{5,3}$ = $\binom{5}{3}$ = 10.

Sólo el producto 2 · 7 · 5, es decir hay 1 producto que de número entero.

Para que el resultado sea un número racional no entero, debe entrar 1/3 y no puede entrar π, luego nos quedan, 3 números,2, 7 y 5 para dos factores: C$_{3,2}$ = $\binom{3}{2}$ = 3

Para que el resultado sea un número irracional debe entrar π, luego nos quedan 4 números para coger 2: C$_{4,2}$ = $\binom{4}{2} = 6$

22. ¿Cuántas aleaciones de 3 metales pueden hacerse con 7 tipos distintos de metales?

Reparto de 3 elementos de entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: C$_{7,3}$ = $\binom{7}{3}$ = 35.

23. Calcula: a) $\boldsymbol{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}}$ **b)** $\boldsymbol{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}}$

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\binom{4}{0}1^4+\binom{4}{1}1^3 1^1+\binom{4}{2}1^2 1^2+\binom{4}{3}1^1 1^3+\binom{4}{4}1^4=$

$=(1+1)^4=2^4=16$

b) $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$, análogamente, = 2^5 = 32

24. ¿Cuál es la forma más facil de calcular: $\boldsymbol{\binom{8}{0}+\binom{1}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}}$ **sin calcular cada uno de los números combinatorios?**

Al igual que el ejercicio anterior, la suma corresponde al desarrollo por el Binomio de Newton: $(1 + 1)^8 = 2^8 = 256$.

25. ¿De cuántas formas puedes separar un grupo de 10 estudiantes en dos grupos de 3 y 7 estudiantes respectivamente?

Reparto de 3 elementos de entre 10, no importa el orden, no se pueden repetir: C$_{10,3}$ = $\binom{10}{3}$ = 120.

Al escoger 3 ya queda el otro grupo con 7 estudiantes.

Tambien: C$_{10,7}$ = $\binom{10}{7}$ = 120

26. Vas a examinarte de una asignatura en la que hay 20 temas, y en el examen van a poner 2. ¿Cuántas posibilidades hay? Te sabes sólo 16 temas. ¿Cuántas posibilidades hay de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Cuál es la probabilidad de que te toquen dos temas que no te sepas? ¿Y la de que te toque sólo un tema que no te sepas?

Reparto de 2 elementos de entre 20, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{20,2} = \binom{20}{2} = 190$.

Si te sabes 16 temas hay 4 que no te sabes, luego, reparto de 2 elementos de entre 4, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$, de donde la probabilidad de que salgan 2 que no te sepas es: 6/190 = 0,032 es decir un 3,2%

Si te sabes un tema debemos calcular cuantas formas hay de sacar un tema que sabes de 16 y un tema que no te sabes de 4: $C_{16,1} \cdot C_{4,1} = 16 \cdot 4 = 64$ y la probabilidad es: 64/190 = 0,34 el 34%

27. Un grupo de 10 alumnos de 4º de ESO van a visitar un museo en el que pueden elegir entre dos actividades diferentes. ¿Cuántas formas distintas puede haber de formar los grupos de alumnos?

Si una actividad se puede quedar sin alumnos, son disposiciones ordenadas, la actividad 1 y la 2 e importa el orden y se pueden repetir, pueden ir todos a la misma, $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$ formas de formar los grupos.

Si ninguna actividad se puede quedar sin alumnos hay dos menos, pues hay que fijar que un alumno vaya a una actividad y otro a la otra, es decir 1024 – 2 = 1022 formas.

28. Desarrolla el binomio a) $(4 - x)^5$; b) $(3 - 2x)^4$; c) $(2ab - 3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3$

a) $(4 - x)^5 = \binom{5}{0}4^5 - \binom{5}{1}4^4 \cdot x + \binom{5}{2}4^3 \cdot x^2 - \binom{5}{3}4^2 \cdot x^3 + \binom{5}{4}4 \cdot x^4 + \binom{5}{5}x^5 =$

$= 256 - 640x + 640x^2 - 160x^3 + 20x^4 - x^5$

b) $(3 - 2x)^4 = \binom{4}{0}3^4 - \binom{4}{1}3^3 2x + \binom{4}{2}3^2(2x)^2 - \binom{4}{3}3(2x)^3 + \binom{4}{4}(2x)^4 =$

$= 81 - 216x + 216x^2 - 96x^3 + 16x^4$

c) $(2ab - 3c)^6 = \binom{6}{0}(2ab)^6 - \binom{6}{1}(2ab)^5 \cdot 3c + \binom{6}{2}(2ab)^4(3c)^2 - \binom{6}{3}(2ab)^3(3c)^3 +$

$+ \binom{6}{4}(2ab)^2(3c)^4 - \binom{6}{5}2ab(3c)^5 + \binom{6}{6}(3c)^6 =$

$= 64a^6b^6 - 576a^5b^5c + 2160a^4b^4c^2 - 4320a^3b^3c^3 + 4860a^2b^2c^4 - 2916abc^5 + 729c^6$

d) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2x}\right)^3 = \binom{3}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \binom{3}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{2x} + \binom{3}{2}\frac{x}{2}\left(\sqrt{2x}\right)^2 - \binom{3}{3}\left(\sqrt{2x}\right)^3 =$

$\frac{x^3}{2^3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2^2} \cdot \sqrt{2x} + 3 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2x - 2x \cdot \sqrt{2x} = \frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{4} \cdot \sqrt{2x} + 3x^2 - 2x \cdot \sqrt{2x}$

29. Calcula x en las siguientes expresiones:

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$, ***b)*** $\binom{10}{x} = \binom{10}{x+2}$, ***c)*** $\binom{x+3}{x} = \binom{7}{4} + \binom{7}{x}$, ***d)*** $\binom{12}{x} = \binom{12}{x+2}$

a) $\binom{x+2}{x} = \binom{6}{4} + \binom{6}{x}$ la suma de dos números combinatorios con numeradores iguales y denominadores consecutivos es igual a otro número combinatorio con numerador el siguiente y denominador el mayor de los denominadores, luego x + 2 = 7 , **x = 5,** $\binom{7}{5}=\binom{6}{4}+\binom{6}{5}$

b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$, dos números combinatorios con numeradores iguales valen lo mismo si la suma de los denominadores es igual al numerador, x + x + 2 = 10, **x = 4**, $\binom{10}{4}=\binom{10}{6}$

c) $\binom{x+3}{x}=\binom{7}{4}+\binom{7}{x}$, la suma de dos números combinatorios con numeradores iguales y denominadores consecutivos es igual a otro número combinatorio con numerador el siguiente y denominador el mayor de los denominadores luego x + 3 = 8 , **x = 5,** $\binom{8}{5}=\binom{7}{4}+\binom{7}{5}$,

d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$, dos números combinatorios con numeradores iguales valen lo mismo si la suma de los denominadores es igual al numerador, x + x + 2 = 12, **x = 5**, $\binom{12}{5}=\binom{12}{7}$

30. Calcula x en las igualdades siguientes:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x\neq 3$ **;** **b)** $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x\neq 3$ **;** **c)** $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$ **;**

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$ ***;*** ***e)*** $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$ ***;*** ***f)*** $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+3}$

Aplicando las propiedades dichas en el ejercicio 29.

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x\neq 3$; x + 3 = 4, **x = 1,** $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}$,

b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x\neq 3$; x + 3 = 7 , **x = 4,** $\binom{7}{3}=\binom{7}{4}$,

c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$; ***x = 3,*** $\binom{4}{3}=\binom{3}{3}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; *2x + 1 = 9 ,* ***x = 4,*** $\binom{9}{5}=\binom{8}{4}+\binom{8}{5}$

e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; **x = 6 ,** $\binom{7}{3}=\binom{6}{3}+\binom{6}{2}$

f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+3}$, x + 3 + x = 7 , x = 2, $\binom{7}{2}=\binom{7}{5}$

31. Calcula en función de n la suma de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$***;*** ***b)*** $\binom{n}{2}+n$***;*** ***c)*** $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$***;***

Aplicando las propiedades dichas en el ejercicio 29.

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}=\binom{n+1}{4}$

b) $\binom{n}{2}+n=\binom{n}{2}+\binom{n}{1}=\binom{n+1}{2}$

c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}=\binom{n+3}{3}$

32. Halla el término sexto en el desarrollo de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

El coeficiente del término sexto en el desarrollo del binomio de Newton será, $\binom{10}{5}$, luego el término sexto es: $\binom{10}{5}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^5=252\cdot\frac{a^5}{2^5}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{x^5}=\frac{63\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^5}{x^5}$, $\left(\frac{252\cdot 4\cdot\sqrt{2}}{32}=\frac{63\sqrt{2}}{2}\right)$,

33. Halla el coeficiente de x^2 en el desarrollo de: $(-1-5x)^9$.

El coeficiente de x^2 corresponderá al término : $\binom{9}{7}\cdot(-1)^7\cdot(-5x)^2=-36\cdot 5^2\cdot x^2=-900x^2$

Luego el coeficiente es: - 900.

34. ¿Cuántas opciones hay para elegir cuatro asignaturas entre siete optativas?

Reparto de 4 elementos de entre 7, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{7,4}=\binom{7}{4}=35$.

35. Se juega una partida de tiro al plato y se disparan sucesivamente 12 platos. ¿Cuál es el número de sucesos en los que se obtienen 4 éxitos, es decir se acierta 4 veces en el blanco? En el mismo caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de tener éxito en el último tiro?

Reparto de 4 elementos de entre 12, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{12,4}=\binom{12}{4}=495$.

Reparto de 3elementos de entre 11, no importa el orden, no se pueden repetir: $C_{11,3}=\binom{11}{3}=165$.

PROBLEMAS

36. En "Curiosidades y Revista" tienes el problema de Buteo. Con 7 discos y 6 letras, ¿cuántas combinaciones distintas se pueden hacer? Ayuda: En el primer disco podemos poner cualquiera de las 6 letras. Lo mismo en el segundo. ¿Y en el tercero? ¡Pero si es facilísimo! Si ya sabemos resolverlo.

En el año 1559 escribió Buteo en Francia el libro *"Logística, quae et Aritmética vulgo dicitur"*, uno de los primeros libros que tratan sobre Combinatoria. En este libro aparece el siguiente problema: Un cerrajero fabrica candados formados por 7 discos, y en cada disco hay 6 letras. ¿Cuántos candados es posible fabricar de forma que cada uno tenga una combinación diferente para abrir?

Disposición de 7 elementos (tomados de 6), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{6,7}=6^7$ combinaciones distintas.

37. En un restaurante hay 5 primeros platos, 4 segundos y 6 postres, ¿de cuántas formas diferentes se puede combinar el menú?

$5\cdot 4\cdot 6=120$, el menú se puede combinar de 120 formas diferentes.

38. Lanzamos una moneda y luego un dado, ¿Cuántos resultados distintos puedes obtener? ¿Y si lanzamos dos monedas y un dado? ¿Y si fuesen 3 monedas y 2 dados?

Al lanzar una moneda y un dado se pueden obtener: $2\cdot 6=12$ resultados.

Si lanzamos dos monedas y un dado tenemos: 2 · 2 · 6 = 24 resultados.
Y si lanzamos 3 monedas y 2 dados obtenemos: 2 · 2 · 2 · 6 · 6 = 288 resultados.

39. Se están eligiendo los actores y actrices para hacer de protagonistas en una teleserie. Se han presentado 6 chicos y 8 chicas. ¿Cuántas parejas distintas podrían formar?

Se pueden formar: 6 · 8 = 48 parejas distintas.

40. Una caja de un conocido juego educativo tiene figuras rojas, amarillas y azules, que pueden ser triángulos, círculo o cuadrados, y de dos tamaños, grandes y pequeñas. ¿De cuántas piezas consta la caja?

Tenemos 3 colores, 3 figuras y 2 tamaños. La caja consta de: 3 · 3 · 2 = 18 piezas.

41. En un restaurante hay 8 primeros platos y 5 segundos, ¿cuántos tipos de postres debe elaborar el restaurante para poder asegurar un menú diferente los 365 días del año?

Los diferentes menú que se pueden elaborar son: 80 · 50 = 40
Para que 40x > 365 el número de postres x debe ser mayor que 365/40 = 9,125. Con 10 postres sería suficiente.

42. En una reunión todas las personas se estrechan la mano. Hubo 91 apretones. ¿Cuántas personas había? Y si hubo 45 apretones, ¿cuántas personas había?

Si hubo 91 apretones, cada apretón consiste en elegir 2 personas, sin importar el orden de entre x, luego $C_{x,2}$ = 91 , $C_{x,2} = \binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{2} = 91 \to x\cdot(x-1) = 182 \to x^2 - x - 182 = 0$, x = 14 y x = -13 por tanto, había 14 personas.
Si hubo 45 apretones, $C_{x,2}$ = 45 , $C_{x,2} = \binom{x}{2} = \frac{x\cdot(x-1)}{2} = 45 \to x\cdot(x-1) = 90 \to x^2 - x - 90 = 0$,
x = 10 y x = -9 por tanto, había 10 personas.

43. ¿De cuántas maneras se pueden introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes si sólo se puede poner un objeto en cada caja? ¿Y si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos? ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera caja no haya ningún objeto?

Hay P_5 = 5! = 120 maneras de introducir 5 objetos distintos en 5 cajas diferentes.

Si se pueden poner varios objetos en cada caja colocando todos distribuimos las 5 cajas en 5 lugares ordenados simbolizados por los objetos, así C1-C1-C1-C1-C2 indica que los 4 primeros objetos están en la caja 1, el quinto en la caja 2 y el resto de las cajas están vacías, por lo tanto tenemos, disposiciones de 5 elementos (tomados de entre 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{5,5} = 5^5$ = 3 125 formas diferentes de colocarlos.

La probabilidad de que en la primera caja no haya ningún sería el cociente de disposiciones de 4 elementos (tomados de entre 5), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir:
$VR_{4,5} = 4^5$ = 1024 entre las disposiciones de los 5 objetos en las 5 cajas, (apartado anterior) por tanto p(no haya objeto en la primera caja) = 1024/3125 = 0,33

44. La mayor parte de las contraseñas de las tarjetas de crédito son números de 4 cifras. ¿Cuántas posibles contraseñas podemos formar? ¿Cuántas tienen algún número repetido? ¿Cuántas tienen un número repetido dos veces?

Con 4 cifras podemos formar, disposiciones de 10 elementos (tomados de entre 4, elegimos la posición y ponemos la cifra), importa el orden, no entran todos, se pueden repetir: $VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$ contraseñas.

No tienen ningún número repetido, disposiciones de 10 elementos (tomados de entre 4, elegimos la posición y ponemos la cifra), importa el orden, no entran todos, no se pueden repetir: $V_{10,4} = 5\,040$,

Por lo tanto tienen algún número repetido: 10 000 – 5 040 = 4 960 contraseñas.

Tienen un número repetido dos veces, hay 10 números que se pueden repetir, elegimos las posiciones donde va el número repetido ($V_{4,2}/2$) dividimos entre 2 pues al ser el mismo número el que elegimos, hemos contado el doble de disposiciones y elegimos los otros 2 números, $V_{9,2}$ en total tenemos: $10 \cdot (V_{4,2}/2) \cdot V_{9,2} = 10 \cdot (4 \cdot 3/2) \cdot 9 \cdot 8 = 4\,320$ contraseñas
Cualquier número repetido dos veces 4 320 contraseñas.

45. Tenemos 10 rectas en el plano que se cortan 2 a 2, es decir, no hay rectas paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?, ¿y si tienes 15 rectas?, ¿y si tienes n rectas?

El número de puntos de intersección entre 10 rectas es, cada punto de intersección consiste en elegir 2 rectas, sin importar el orden de entre 10: $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$.

Con 15 rectas se tienen $C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15\cdot 14}{2} = 105$ puntos

Con n rectas tenemos $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ puntos.

46. ¿Cuántas diagonales tiene un octógono regular?, ¿y un polígono regular de 20 lados?

Cada diagonal consiste en elegir 2 rectas, sin importar el orden de entre 8: $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$, restamos los 8 lados, un octógono regular tiene 28 − 8 = 20 diagonales.

Un polígono de 20 lados tiene $C_{20,2} - 20 = \binom{20}{2} - 20 = \frac{20\cdot 19}{2} - 20 = 190 - 20 = 170$ diagonales.

47. Utiliza una hoja de cálculo (o una calculadora) para comprobar los resultados de:

a) $P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$. **b) $VR_{2,4} = 24$**

c) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6!/\,3! = 120$ **d) $C_{6,3} = 20$**

Introducimos los datos en la calculadora y comprobamos que son ciertos

48. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?, ¿y un dodecaedro regular? Ayuda: Recuerda que el icosaedro y el dodecaedro son poliedros duales, es decir, el número de caras de uno coincide con el número de vértices del otro. Para saber el número de aristas puedes utilizar la Relación de Euler: C + V = A + 2

Un icosaedro regular tiene 12 vértices y 30 aristas por lo tanto tiene:

$C_{12,2} - 30 = \binom{12}{2} - 30 = \frac{12\cdot 11}{2} - 30 = 66 - 30 = 36$ diagonales.

Un dodecaedro tiene 20 vértices, 30 aristas y cada una de las 12 caras pentagonales tienen 5 diagonales, por lo tanto un dodecaedro tiene $C_{20,2} - 30 - 12 \cdot 5 = \binom{20}{2} - 30 - 60 = \frac{20\cdot 19}{2} - 90 =$
$= 190 - 90 = 100$ diagonales.

49. ¿Cuántos números diferentes de 5 cifras distintas puedes formar con los dígitos 1, 2, 3, 5 y 7? ¿Cuántos que sean múltiplos de 5? ¿Cuántos que empiecen por 2? ¿Cuántos que además de empezar por 2 terminen en 7?

- 5 cifras distintas: Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: P_5 = 5! = 120.
- Que terminan en 5: Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: P_4 = 4! = 24.
- Que empiecen por 2, Disposición de 4 elementos, importa el orden, entran todos: P_4 = 4! = 24.
- Que empiezan por 2 y terminan en 7, Disposición de 3 elementos, importa el orden, entran todos: P_3 = 3! = 6.

50. Con 5 bolas de 3 colores distintos, a) ¿Cuántas filas diferentes puedes formar de 5 bolas? b) ¿Cuántas pulseras distintas puedes formar de 5 bolas?

a) Si hay 5 bolas podemos tener 2 bolas de un color, 2 bolas de otro y 1 bola del tercer color, o bien 3 bolas de 1 color, 1 bola de otro y ota bola de otro, por tanto puede haber:

El número de filas que se puede formar con estas bolas en el primer caso es $PR_5^{2,2,1} = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30.$

El número de filas que se puede formar con estas bolas en el segundo caso es $PR_5^{3,1,1} = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!} = 20.$

b) Y pulseras hay: en el primer caso, AAVVR, ARAVV, AAVRV, 3 pulseras.

En el segundo caso, AAAVR, AAVAR, AARAV, 3 pulseras también.

51. Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, ¿cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar? Calcula la suma de todos estos números.

Cinco cifras distintas: Disposición de 5 elementos, importa el orden, entran todos: P_5 = 5! = 120

Ordenados de menor a mayor, 12 345 el menor y 54 321 el mayor, se observa que el primero más el ultimo suman 66 666 lo mismo que el segundo más el penúltimo y así sucesivamente por lo que la suma de estos 120 números es, como los cogemos de 2 en 2 nos quedan 60 sumas,

66 666 · 60 = 399 996.

52. Calcula x en los siguientes casos: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\, V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

a) $V_{x,3} = C_{x,2}$, $x\cdot(x-1)\cdot(x-2) = \frac{x\cdot(x-1)}{2}$, simplificando, 2·(x-2) = 1 , **x = 5/2**

b) $V_{x,5} = 6\, V_{x,3}$, x·(x-1)·(x-2)·(x-3)·(x-4) = 6·x·(x-1)·(x-2) , simplificando, (x-3)·(x-4) = 6, $x^2 - 7x - 6 = 0$,

x = 1, x = 6 , como la solución x = 1 no tiene sentido, nos queda **x = 6**.

c) $\frac{C_{x+1,14}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3} \to 3\cdot C_{x+1,14} = 7\cdot C_{x,2} \to 3\cdot\binom{x+1}{14} = 7\cdot\binom{x}{2} \to$

$\to 3\cdot\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-12)}{14!} = 7\cdot\frac{x(x-1)}{2!}$, simplificando,

$$(x+1)(x-2)\ldots(x-12) = \frac{7\cdot 14!}{3\cdot 2} \to (x+1)(x-2)\ldots(x-12) = \frac{7\cdot 7\cdot 2\cdot 13!}{3\cdot 2} = \frac{49}{3}\cdot 13!$$

53. Hace muchos años las placas de matrícula eran como esta: M 123456; luego fueron como ésta: M1234 A; y actualmente como ésta: 1234 ABC. Investiga qué ventajas tiene cada uno de estos cambios respecto al anterior.

Tenemos 27 letras y 10 números.

Con M 123456: $27 \cdot VR_{6,10} = 27\ 000\ 000$ matrículas diferentes,

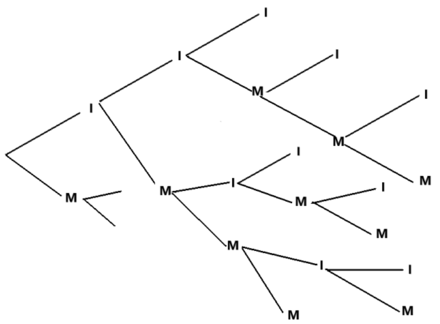
Con M 1234 A : $27 \cdot VR_{10,4} \cdot 27 = 7\ 290\ 000$ distintas, y

Con 1234 ABC: $VR_{10,4} \cdot VR_{27,3} = 10^4 \cdot 27^3 = 196\ 830\ 000$.

54. Iker y María juegan al tenis y deciden que gana aquel que primero gane 3 sets. ¿Cuál es el número máximo de sets que tendrán que disputar? ¿Cuántos desarrollos posibles puede tener el encuentro?

En el peor de los casos sería que ganasen los sets de forma que en el 4º hubieran ganado 2 cada uno, luego como máximo 5 sets.

Los desarrollos dependen de la forma en que vayan ganando los sets hasta el 4º pues el 5º terminarían y según empiece ganando Iker o María:



hay 10 posibles desarrollos para cada uno, luego en total hay 20 posibles desarrollos.

55. Pedro conoció ayer a una chica. Lo pasaron muy bien y ella le dio su número de móvil, pero él no llevaba su móvil ni bolígrafo. Pensó que se acordaría, pero… sólo recuerda que empezaba por 656, que había otras cuatro que eran todas distintas entre sí y menores que 5. Calcula cuántas posibilidades tiene de acertar si marca un número. Demasiadas. Hace memoria y recuerda que las dos últimas son 77. ¿Cuántas posibilidades hay ahora de acertar haciendo una llamada?

Menores que 5 son, 0, 1, 2, 3 y 4, 5 cifras para 4 huecos luego, el número del teléfono está entre $V_{5,4} = 120$ números diferentes.

56. Un club de alpinistas ha organizado una expedición al Kilimanjaro formada por 11 personas, 7 expertos y 4 que están en formación. En un determinado tramo sólo pueden ir 3 expertos y 2 que no lo sean, ¿de cuántas formas puede estar compuesto ese equipo de 5 personas? Tú eres un experto, y vas a ir en ese tramo, ¿cuántas formas hay ahora de componerlo?

Se trata de elegir 3 expertos entre los 7 que hay, no importa el orden y 2 en formación entre los 4 que hay, no importa el orden, el equipo puede estar formado de $C_{7,3} \cdot C_{4,2} = \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} =$ 210 formas diferentes.

Si un experto está fijo hay $C_{6,2} \cdot C_{4,2} = \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} = 90$ formas distintas.

57. En los billetes de una línea de autobuses va impreso la estación de partida y la de llegada. Hay en total 8 posibles estaciones. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir la empresa de autobuses? Ahora quieren cambiar el formato y sólo imprimir el precio, que es proporcional a la distancia. Las distancias entre las estaciones son todas distintas. ¿Cuántos billetes diferentes tendría que imprimir en este caso?

a) Para imprimir los billetes con salida y llegada se trata de elegir 2 entre 8, importa el orden: $V_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$ billetes diferentes hay que imprimir

b) Al imprimir sólo las distancias, no importa el orden por tanto, $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2} = 28$.

58. Una pareja tiene un hijo de 3 años que entra en la guardería a las 9 de la mañana. El padre trabaja en una fábrica que tiene 3 turnos mensuales rotativos: de 0 a 8, de 8 a 16 y de 16 a 24 horas. La madre trabaja en un supermercado que tiene dos turnos rotativos mensuales, de 8 a 14 y de 14 a 20 horas. ¿Cuántos días al año, por término medio, no podrá ninguno de los dos llevar a su hijo a la guardería?

Cada 6 meses coinciden 1 en que los dos entran a trabajar a las 8, en un año coinciden 2 meses, es decir, de cada 6 días 1 no podrá ninguno de los dos padres ir a la guardería. Suponiendo que trabajan los sábados, pero no los domingos habrá aproximadamente 52 días.

59. Un tiro al blanco tiene 10 caballitos numerados que giran. Si se acierta a uno de ellos se enciende una luz con el número del caballito. Tiras 3 veces, ¿de cuántas maneras se pueden encender las luces? ¿Y si el primer tiro no da a ningún caballito?

Debemos calcular las formas de encenderse las luces dependiendo de que se acierte a 3, 2, 1 o ningún caballito: $V_{10,3} + V_{10,2} + V_{10,1} + 1 = 10 \cdot 9 \cdot 8 + 10 \cdot 9 + 10 + 1 = 821$ formas diferentes.
Si el primer tiro falla tenemos: $V_{10,2} + V_{10,1} + 1 = 10 \cdot 9 + 10 + 1 = 101$ formas distintas.

60. En una fiesta hay 7 chicas y 7 chicos. Juan baila siempre con Ana. Antonio es el más decidido y siempre sale a bailar el primero, ¿de cuántas formas puede elegir pareja en los próximos 4 bailes?

Tenemos 6 chicas y 6 chicos, se trata de colocar personas en los 4 bailes:
Si elige chica Antonio tiene $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ formas de elegir pareja chica en cuatro bailes.
Si elige chico Antonio tiene $C_{5,4} = \binom{5}{4} = 5$ formas de elegir pareja chico en cuatro bailes.
En total hay 20 formas de elegir pareja.

61. Con los dígitos {0, 1, 2, 3, 4, 5}. ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden formar? ¿Cuántos hay con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2? Calcula la suma de todos estos últimos números.

Calculamos todos los de 6 cifras y restamos todos los que empiezan por 0.
Hay $VR_{6,5} = 6^5 = 7\,776$ formas de formar números de 5 dígitos. Hay $VR_{5,4} = 5^4 = 625$ que empiezan por 0 por lo que hay 7 776 – 625 = 7 151 números de cinco cifras.
2 veces el 1 y 3 veces el 2: hay $PR_5^{2,3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ números con dos veces la cifra 1 y tres la cifra 2.
Para calcular la suma podemos escribirlos: 11222 + 12122 + 12212 + 12221 + 21122 + 21212 + 21221 + 22112 + 22121 + 22211 = 177 776.
También fijando las cifras y calculando su valor y las veces que aparece:
El 1 en las decenas de millar, millar, etc:
4·(10 000 + 1 000 + 100 + 10 + 1) igualmente con el 2 : 2· 6·(10 000 + 1 000 + 100 + 10 + 1) =
= 44 444 + 133 332 = 177 776

62. ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra “puerta” que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas?

Tenemos 3 vocales y 3 consonantes, como no deben ir juntas vocales ni consonantes, es como alternar, empezando por vocal o consonante: hay $P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ palabras que empiezan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante. En total 72 palabras.

63. En una compañía militar hay 10 soldados, ¿cuántas guardias de 3 soldados pueden hacerse? Uno de los soldados es Alejandro, ¿en cuántas de estas guardias estará? ¿Y en cuántas no estará?

Como no importa el orden, se pueden realizar $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}$ = 120 guardias diferentes.

Alejandro estará en $C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2}$ = 36 guardias y no estará en 120 – 36 = 84. $C_{9,3}$

64. ¿Cuántos números capicúas de dos cifras existen? ¿Y de tres cifras? ¿Y de cuatro cifras?

Con dos cifras hay 9 números capicúas, los formados con los 9 dígitos.

Con tres cifras hay los mismos que antes multiplicados por los 10 que pueden ir en el centro: 10 · 9 = 90.

De cuatro cifras, el primero puede ser uno de los 9 dígitos distintos del 0 y el segundo cualquiera de los 10 dígitos, 3º y 4º son los mismos que 1º y 2º: 9 · 10 = 90 capicúas.

65. Con las letras de la palabra “argumento” ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas? a) Si todas las letras son distintas. b) Se pueden repetir letras.

Tenemos 4 vocales y 5 consonantes.

a) Comienzan y terminan por vocal, en el centro debe ir otra vocal, tenemos que elegir 3 vocales de 4 y 2 consonantes de 5, importa el orden y no se pueden repetir: $V_{4,3} \cdot V_{5,2} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 480$.

Comienzan y terminan por consonante, igual que antes pero ahora elegimos 3 consonantes de 5 y 2 vocales de 4: $V_{5,3} \cdot V_{4,2} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$. En total 1200 palabras.

b) Si se pueden repetir el cálculo es igual con repetición: comienzan y terminan por vocal $VR_{4,3} \cdot VR_{5,2} = 4^3 \cdot 5^2 = 1\,600$.

Comienzan y terminan por consonante: $VR_{5,3} \cdot VR_{4,2} = 5^3 \cdot 4^2 = 2000$. En total 3 600 palabras.

66. ¿Cuántos números hay entre el 6 000 y el 9 000 que tengan todas sus cifras distintas?

Pueden comenzar por 6, 7 u 8, (3 cifras) Nos quedan 9 cifras para poner en los 3 huecos, distintas y ordenadas luego hay $3 \cdot V_{9,3} = 3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 1\,296$ números con todas sus cifras distintas.

67. Una fábrica de juguetes tiene a la venta 8 modelos distintos. ¿Cuántos muestrarios distintos puede hacer de 4 juguetes cada uno? ¿Cuál es la probabilidad de que el último modelo de avión fabricado llegue a un determinado cliente? Si se quiere que en esos muestrarios siempre esté el último modelo de juguete fabricado, ¿cuántos muestrarios distintos puede hacer ahora?

Como no importa el orden hay $C_{8,4} = \binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}$ = 70 muestrarios distintos de cuatro juguetes.

Si queremos que siempre entre el último modelo, tenemos: $C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}$ =35 muestrarios.

Calculamos ahora la probabilidad que el último modelo llegue a un cliente: $\frac{35}{70} = 0{,}5$

68. La encargada de un guardarropa se ha distraído, y sabe que de los cinco últimos bolsos que ha recogido a tres bolsos les ha puesto el resguardo equivocado y a dos no. ¿De cuántas formas se puede haber producido el error? ¿Y si fuesen dos los equivocados?

Si hay tres resguardos equivocados se tienen $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4}{2}$ = 10 formas distintas de elegir tres resguardos equivocados, para cada una de estas elecciones hay 2 en las que ninguno de los tres resguardos coincide con el bolso respectivo, es decir, sea E equivocado, la distribución de equivocados puede ser E1-E2-E3, o bien, E1-E3-E2. En total 2 · 10 = 20 formas diferentes.

Si son dos los resguardos equivocados se tienen también $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2}$ = 10 formas distintas de elegir dos resguardos equivocados pero ahora sólo hay una forma en la que los dos resguardos no coincide con el bolso respectivo, E1-E2. En total 10 formas diferentes.

69. La primera obra impresa con resultados de Combinatoria es "Summa" de Luca Pacioli, de 1494. En esta obra se propone el siguiente problema: ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse cuatro personas en una mesa circular?

En las disposiciones circulares hay que fijar un elemento y permutar el resto, luego hay $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 = 6$ formas de colocar a cuatro personas en una mesa circular.

70. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen al menos un 5?

Hay 9 000 números de cuatro cifras de estos no tienen ningún cinco, a todos los los números de 4 cifras sin contar el 5 le restamos todos los números que empizan por 0 y no contienen el 5: $VR_{9,4} – VR_{8,3} = 9^4 - 8^3 = 6\,049$, por lo tanto tienen algún cinco: 9 000 – 6 049 = 2 951 números.

71. Con las letras de la palabra "saber", ¿cuántas palabras, con o sin sentido, de letras diferentes, se pueden formar que no tengan dos vocales ni dos consonantes juntas. Lo mismo para las palabras "corte", "puerta" y "Alberto".

Con las letras de la palabra "saber" se pueden formar, sin juntar dos vocales o dos consonantes, como hay 3 consonantes y 2 vocales tienen que empezar y terminar en vocal $P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ palabras, las mismas que con las letras de la palabra "corte".

Con las de la palabra "puerta" hay $P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ que comienzan por vocal y otras 36 que empiezan por consonante, en total 72.

Con las de la palabra "Alberto" hay $P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ palabras.

72. Considera la sucesión de números naturales 1, 3, 6, 10, 15, … ¿cuál es el siguiente término de esta sucesión? ¿Qué ley de recurrencia permite calcular el siguiente término de la sucesión? ¿Cuál es su término general?

Ley de recurrencia: $a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + n$.

Su término general $a_n = \binom{n+1}{2}$, se verifica la ley de recurrencia $a_1 = 1$ y $\binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$.

73. Con los dígitos 1, 3 y 5, ¿cuántos números menores de 6 000 se pueden formar? ¿Cuántos hay con 4 cifras que tengan dos veces la cifra 5?

Con una cifra hay 3. Con dos cifras hay $VR_{3,2} = 3^2 = 9$. Con tres cifras hay $VR_{3,3} = 3^3 = 27$ y con cuatro cifras hay $VR_{3,4} = 3^4 = 81$. En total 3 +9 + 27 + 81 = 120 números.

74. Con las letras de la palabra GRUPO, ¿cuántas palabras de 5 letras con o sin sentido se pueden formar que tengan alguna letra repetida?

En total se tienen $VR_{5,5} = 5^5 = 3\,125$ palabras con letras repetidas o no. Entre estas hay $P_5 = 5! = 120$ con las cinco letras distintas por lo tanto hay 3 125 – 120 = 3 005 palabras con alguna letra repetida.

75. En una baraja española hacemos 5 extracciones con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de obtener más de 3 ases? ¿y la probabilidad de obtener menos de 4 ases?

Al ser con reemplazo se pueden repetir y son ordenadas.

Obtenemos 4 ases cuando obtenemos una que no es as, nos quedan 36 multiplicado por las formas de sacar 4 ases, puede salir el mismo, $36 \cdot VR_{4,4} = 36 \cdot 4^4 = 9\,216$ casos.

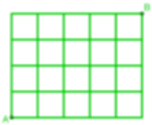
Tenemos 5 ases en $VR_{4,5} = 4^5 = 1024$ casos en total tenemos 9 216 + 1024 = 10 240 casos favorables.

El número de casos posibles es $VR_{40,5} = 102\,400\,000$.

La probabilidad de obtener más de 3 ases es 10 240/102 400 000 = 1/10 000.

La probabilidad de obtener menos de cuatro ases 1 – 1/10 000 = 9 999/10 000.

76. Caminos en una cuadrícula: a) ¿Cuántos caminos hay para ir de A hasta B si sólo podemos ir hacia la derecha y hacia arriba? b) Si no podemos atravesar el cuadrado verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B? c) Si no podemos atravesar el rectángulo verde, ni caminar por sus lados, ¿cuántas formas tenemos ahora para ir desde A hacia B? d) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula cuadrada con n caminos en cada lado? e) ¿Cuántos caminos hay en una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales?



a) Hay 9 pasos de A hasta B que se pueden escoger de 2 formas $\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ caminos diferentes.

b) En este caso tenemos 6 caminos.

c) En este caso tenemos 7 caminos

d) En una cuadrícula con n caminos en cada lado hay n – 1 cuadrados en cada lado y el número de caminos es $\binom{2n-2}{n-1}$

e) En una cuadrícula rectangular con m caminos verticales y n horizontales hay $\binom{n+m-2}{n-1}$ caminos.

AUTOEVALUACIÓN

1) Tienes nueve monedas de euro que colocas en fila. Si cuatro muestran la cara y cinco la cruz ¿De cuántas formas distintas puedes ordenarlas?:

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

Lo más fácil es $PR_9^{5,4} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \binom{9}{5}$

Respuesta: c) $C_{9,5}$

2) En una compañía aérea hay 10 azafatas, y un avión necesita a 4 en su tripulación, ¿de cuántas formas se puede elegir esa tripulación?:

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

Disposición de 4 elementos tomados entre 10, no importa el orden

Respuesta: c) $C_{10,4}$

3) ¿Cuántos productos distintos pueden obtenerse con tres factores diferentes elegidos entre los dígitos: 2, 3, 5 y 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

Disposición de 3 elementos tomados entre 4, no importa el orden.

Respuesta: c) $C_{4,3}$

4) Tenemos 5 objetos y los queremos guardar en 5 cajas, un objeto en cada caja, ¿de cuántas formas podemos hacerlo?:

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

Disposiciones de 5 elementos tomados entre 5, importa el orden, entran todos.

Respuesta: b) P_5

5) Permutaciones de n+4 elementos dividido por permutaciones de n+1 elementos es igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ d) $V_{n+4,n+2}/ C_{n+4,n+1}$

Respuesta: a) $\frac{(n+4)!}{(n+1)!} = (n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)$

6) Las variaciones de 10 elementos tomados de 6 en 6 es igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

Respuesta: b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$

7) Indica qué afirmación es falsa;

a) $0! = 1$; b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot\ldots\cdot (m-n)$; c) $VR_{m,n} = m^n$; d) $P_n = n!$

$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot\ldots\cdot (m-n)\cdot(m-n+1)$

Respuesta: b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot\ldots\cdot (m-n)$;

8) El valor de los siguientes números combinatorios $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ **es:**

a) 0, 1, y 1; **b) 0, 9 y 4;** **c) 1, 1 y 4;** **d) 5, 9 y 4**

Respuesta: c) 1, 1 y 4

9) El valor de x, distinto de 4, en $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ **es:**

a) 3 **b) 7** **c) 1** **d) 0**

4 + x = 7 , x = 3

Respuesta: a) 3

10) El coeficiente del término cuarto del desarrollo del Binomio de Newton de $(a + b)^7$ **es:**

a) $\binom{7}{3}$ **;** **b) 1;** **c)** $\binom{7}{4}$**;** **d)** $V_{7,4}$

Respuesta: a) $\binom{7}{3}$