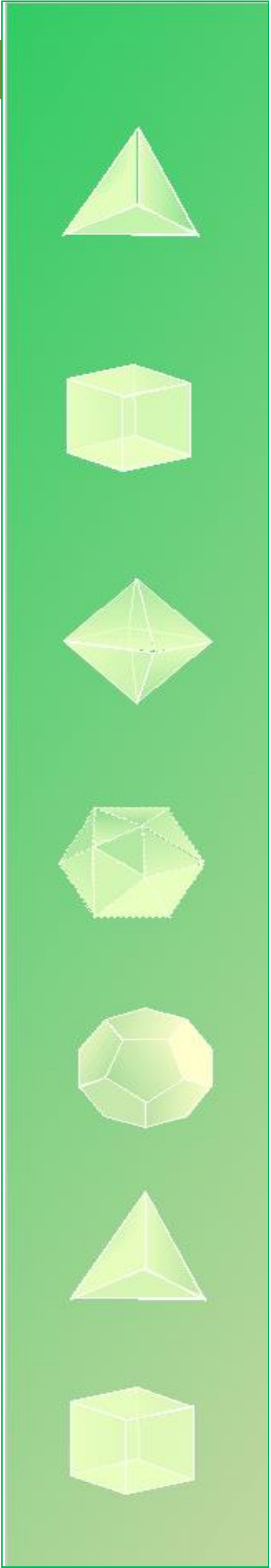

Matemáticas Académicas
4ºB ESO
Capítulo 3: Expresiones algebraicas. Polinomios

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: Pilar Paramio Barrigas y
Hugo Bastante Gómez-Limón
IES ATENEA, CIUDAD REAL
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. A finales de cada mes la empresa de telefonía móvil nos proporciona la factura mensual. En ella aparece mucha información, en particular, el número total de llamadas realizadas (N) así como la cantidad total de minutos de conversación (M). Con los datos del anterior ejemplo justifica que el importe de las llamadas efectuadas durante ese es: (0,05·M) +(0,12·N) = 0,05·M + 0,12·N euros.

Multiplicamos por 0,05 los minutos de conversación, por 0, 12 el número de llamadas y el resultado lo sumamos.

2. Recuerda la expresión algebraica que nos proporciona la longitud de una circunferencia

Longitud= 2πr

3. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:

a) La mitad del opuesto de su suma.

$$-\frac{1}{2}\,(\mathrm{x}+\mathrm{y})$$

b) La suma de sus cubos

$$x^3+y^3$$

c) el cubo de su suma

$$(x+y)^3$$

d) El inverso de su suma

$$\frac{1}{(\mathrm{x+y})}$$

e) La suma de sus inversos

$$\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{y}}$$

4. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta. Precio

final= Precio original- descuento, si el precio en etiqueta es x

Precio final= x – (0,2 ·x) Precio final= x – 0,2·x Precio final= 0,8·x

5. El anterior comercio, en los últimos días del periodo de rebajas, desea deshacerse de sus existencias y para ello ha decidido aumentar el descuento. Mantiene el 20 % para la compra de una única prenda y, a partir de la segunda, el descuento total aumenta un 5 % por cada nueva pieza de ropa, hasta un máximo de 10 artículos. Analiza cuánto pagaremos al realizar una compra en función de la suma total de las cantidades que figuran en las etiquetas y del número de artículos que se adquieran.

El % de descuento será $20+5(n-1)$. En el caso de 10 artículos será por tanto $20+(5\cdot 9)$ =65 % de descuento.

6. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $x^2+7x-12$ para x= 0.

$0^2+7(0)-12 = -12$

b) $(a+b)^2-(a^2+b^2)$ Para a = -3 y b = 4

$$\left(((-3)+4)^2-((-3)^2+4^2)\right)=-24$$

c) a^2-5a+2 para $a=-1$

$$(-1)^2-(5\cdot(-1))+2=8$$

7. Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: 10x + 20y + 30z

a) x=1, y=2, z=1

$$(10\cdot1)+(20\cdot2)+(30\cdot1)=80$$

b) x=2, y=0, z=5

$$(10\cdot2)+(20\cdot0)+(30\cdot5)=170$$

c) x=0, y=1, z=0

$$(10\cdot0)+(20\cdot1)+(30\cdot0)=20$$

8. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

a) $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$

$$x^2-2x^2+(-x-3x)`+(2x^3-2x^2+x-2)$$

$$(-x^2-4x)+(-4x^2-4x-2)$$

$$-x^2-4x-4x^2-4x-2$$

$$-5x^2-8x-2$$

b) $-x^4+(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)+(2x^3-x+5)$

$(-x^4+x^3+2x-3-3x^2-5x+4+2x^3-x+5)$

$$\left(x^4+(x^3+2x^3)-3x^2+(2x-5x-x)+(-3+4+5)\right)$$

$$(-x^4-3x^2-4x+6)$$

9. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $3x^4+5x^3+x^2+4x-1$

$-3x^4-5x^3-x^2-4x+1$

b) $7x$

$-7x$

c) $-x^4+3x^2$

x^4-3x^2

10. Considera los polinomios p = x^3 - 5x^2 + 2, q = 3x^2 + 3x + 1 así como el polinomio suma s = p + q . Halla los valores que adopta cada uno de ellos para x = -2, es decir, calcula p (-2), q (-2) y s (-2). Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

p (-2) = $-(-2x^3) - 5(-2) + 2 = -(-8) + 10 + 2 = 20$

q (-2) = $3(-2)^2 + 3(-2) + 1 = 3(4) - 6 + 1 = 12 - 6 + 1 = 7$

s (-2) = $p(-2) + q(-2) = 20 + 7 = 27$

Ahora, vamos a estudiar la relación entre estos valores. Parece que la relación es que el valor de $s(-2)$ es la suma de los valores de [p (-2) y q (-2)] lo cual tiene sentido, ya que s (x) es la suma de p (x) y q (x). En otras palabras, s (-2) = p (-2) + q (-2).

11. Obtén el valor del polinomio p=-x^3 -5x +2 en x=3. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en x=3?

$$p(3) = -3 \cdot 3 - 5(3) + 2$$
$$p(3) = -27 - 15 + 2$$
$$p(3) = -38$$

Ahora, para encontrar el valor del polinomio opuesto de (p) en x=3 simplemente toma el opuesto de (p (3)): -p (3) = - (-38) = 38

El polinomio opuesto de \(p\) toma el valor de 38 cuando x=3

12. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x)\ y\ (-3x^2)$

$(-4x^3) \cdot (-3x^2) = 12x^5$; $2x \cdot (-3x^2) = -6x^3$

$(-4x^3 + 2x) \cdot (-3x^2) = 12x^5 - 6x^3$

b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

$$(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4) = 2x^4 \cdot (-3x) + 2x^4 \cdot (-4) + x \cdot (-3x) + x \cdot (-4)$$

$-2x^4 \cdot (-3x) = -6x^5$; $-2x^4 \cdot (-4) = -8x^4$; $-x \cdot (-3x) = -3x^2$; $-x \cdot (-4) = -4x$

Finalmente, suma estos términos para obtener el resultado final:$-6x^5 - 8x^4 - 3x^2 - 4x$

c) $(2x^3 + x^2 - x)y(3x^2 - x)$

$(2x^3 + x^2 - x) \cdot (3x^2 - x) = 2x^3 \cdot 3x^2 + 2x^3 \cdot (-x) + x^2 \cdot 3x^2 + x^2 \cdot (-x) - x \cdot 3x^2 - x \cdot (-x)$

$-2x^3 \cdot 3x^2 = 6x^5$; $-2x^3 \cdot (-x) = -2x^4$; $-x^2 \cdot 3x^2 = 3x^4$; $-x^2 \cdot (-x) = -x^3$

$-x \cdot 3x^2 = 3x^3$; $-x \cdot (-x) = -x^2$

Finalmente, sumando estos términos obtenemos el resultado final: $6x^5 - 2x^4 + 3x^4 - x^3 - 3x^3 - x^2$

Ahora, simplificando los términos semejantes:$6x^5 + x^4 - 4x^3 - x^2$

d) $1 \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

El resultado es$-7x^3 + 4x^2 + 3x - 1$.

13. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

La diferencia de polinomios $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$ es igual a$-4x^3 + 3x^2 + 2x$.

b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

La diferencia de polinomios $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$ es igual a $2x^4 + x + 3x + 4$ que se simplifica a $2x^4 + 4x + 4$.

c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

La diferencia de polinomios $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$ es igual a $3x^2 - x - 2x^3 - x^2 + x$. Combinando términos semejantes: $3x^2 - x - 2x^3 - x^2 + x = -2x^3 + 2x^2 - x$.

14. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $4x^3 - 3x^2 + 2x$

Para convertir el polinomio $4x^3 - 3x^2 + 2x$ en un polinomio Mónico, hay que dividir cada término por el coeficiente principal, que en este caso es 4.

$(4x^3 - 3x^2 + 2x)$ dividido entre 4, resultado $x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

b) Para convertir el polinomio $-2x^4 + x - 1$ en un polinomio Mónico, hay que dividir todos los términos por el coeficiente principal, que en este caso es -2.

$(-2x^4 + x - 1)$ Dividido entre –2 , resultado $x^4 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c) $-x^2 + x - 7$

Para convertir el polinomio $-x^2 + x - 7$en un polinomio mónico, hay que dividir todos los términos por el coeficiente principal, que en este caso es -1.

$-x^2 + x - 7$ dividido entre -1 es $x^2 - x + 7$

15. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$

$3x \cdot 2x^2 = 6x^3$; $3x \cdot 4x = 12x^2$; $3x \cdot (-6) = -18x$

Ahora, sumamos estos términos:

$$6x^3 + 12x^2 - 18x$$

Eso es la forma simplificada del producto $3x \cdot (2x^2 + 4x - 6)$.

b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

$$(3x) \cdot (4x) = 12x^2 \quad ; \quad (3x) \cdot (6) = 18x \quad ; \quad (-4) \cdot (4x) = -16x \;\; ; \;\; (-4) \cdot (6) = -24$$

Ahora sumamos estos términos: $12x^2 + 18x - 16x - 24$

Simplificando: $12x^2 + 2x - 24$

c) $(2a^2 - 5b) * (4b - 3a^3)$

$(2a^2) \cdot (4b) = 8a^2b$; $(2a^2) \cdot (-3a^3) = -6a^5$; $(-5b) \cdot (4b) = -20b^2$; $(-5b) \cdot (-3a^3) = 15a^3b$

Ahora sumamos estos términos: $8a^2b - 6a^5 - 20b^2 + 15a^3b$

d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

$$(3a - 6) \cdot (8 - 2a) = (3a \cdot 8) + (3a \cdot (-2a)) + (-6 \cdot 8) + (-6 \cdot (-2a))$$

Esto se simplifica a:

$$24a - 6a^2 - 48 + 12a$$

Luego, multiplicamos el resultado anterior por el tercer paréntesis (9a -2):

$(24a - 6a^2 - 48 + 12a) \cdot (9a - 2) =$

$= (24a \cdot 9a) + (24a \cdot (-2)) + (-6a^2 \cdot 9a) + (-6a^2 \cdot (-2)) + (-48 \cdot 9a) + (-48 \cdot (-2)) + (12a \cdot 9a) + (12a \cdot (-2))$

Simplificando:

$$216a^2 - 48a - 54a^3 + 12a^2 - 432a + 96 + 108a^2 - 24a$$

Ahora, sumamos todos los términos semejantes:

$$(216a^2 + 12a^2 + 108a^2) + (-54a^3) + (-48a - 432a - 24a) + 96$$

Esto se simplifica a:

$$336a^2 - 54a^3 - 504a + 96$$

16. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$

$x^2 \cdot (-2x^2) = -2x^4$; $x^2 \cdot (-3x) = -3x^3$; $x^2 \cdot 1 = x^2$

Ahora, multiplicamos los resultados por el tercer polinomio:

$-2x^4 \cdot 2x^3 = -4x^7$; $-3x^3 \cdot 2x^3 = -6x^6$; $x^2 \cdot 2x^3 = 2x^5$

Finalmente, sumamos todos estos términos: $-4x^7 - 6x^6 + 2x^5$

Este es el producto de los tres polinomios: $-4x^7 - 6x^6 + 2x^5$

b) $(2x - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

$(2x-3)\cdot(-3x^2) = -6x^3 + 9x^2$; $(2x-3)\cdot(-5x) = -10x^2 + 15x$; $(2x-3)\cdot 4 = 8x - 12$

Ahora, multiplicamos estos resultados por el tercer polinomio (-x):

$(-6x^3 + 9x^2)\cdot(-x) = 6x^4 - 9x^3$; $(-10x^2 + 15x)\cdot(-x) = 10x^3 - 15x^2$;

$(8x-12)\cdot(-x) = -8x^2 + 12x$

Finalmente, sumamos todos estos términos: $6x^4 - 9x^3 + 10x^3 - 15x^2 - 8x^2 + 12x$

Simplificando los términos semejantes: $6x^4 + x^3 - 23x^2 + 12x$

Este es el resultado del producto de los tres polinomios: $6x^4 + x^3 - 23x^2 + 12x$.

17. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-15x^3 - 20x^2 + 10x$

$$-15x^3 - 20x^2 + 10x = 5x(-3x^2 - 4x + 2)$$

b) $24x^4 - 30x^2$

$$24x^4 - 30x^2 = 6x^2(4x^2 - 5)$$

18. Comprueba que los cálculos que tienes a continuación reflejan lo que se hizo en el ejemplo anterior para dividir el polinomio p (x)= $6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio q (x) = $2x^2 - x + 3$.

1. Primera etapa:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2 \\ \qquad 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

2. Primera y segunda etapas:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x \\ \qquad 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \qquad \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ \qquad\qquad -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

3. Las tres etapas:

$$\begin{array}{l|l} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & 2x^2-x+3 \\ \cline{2-2} \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} & 3x^2+4x-2 \\ \qquad 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \qquad \underline{-8x^3+4x^2-12x} & \\ \qquad\qquad -4x^2-9x-2 & \\ \qquad\qquad \underline{4x^2-2x+6} & \\ \qquad\qquad\quad -11x+4 & \end{array}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

19. Divide los siguientes polinomios:

a)

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - x^2 - x - 7 & x^2 - 2x + 4 \\ \hline 2x^3 - 4x^2 + 8x & 2x - 5 \\ \hline -5x^2 + 7x + 7 & \\ +5x^2 - 10x - 20 & \\ \hline -3x - 13 & \end{array}$$

$2x^3 : x^2 = 2x$

$2x(x^2 - 2x + 4) =$
$= 2x^3 - 4x^2 + 8x$

$-5x^2 : x^2 = -5$
$-5(x^2 - 2x + 4) =$
$= -5x^2 + 10x - 20$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ ***Entre*** $5x^3 - x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{l|l} -10x^3 - 2x^2 + 3x + 4 & 5x^3 - x^2 - x + 3 \\ \hline +10x^3 + 2x^2 + 2x + 6 & -2 \\ \hline 5x + 10 & \end{array}$$

$-10x^3 : 5x^3 = -2$
$-2(5x^3 - x^2 - x + 3) =$
$= -10x^3 + 2x^2 + 2x - 6$

20. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca q (x)= x^2+ x – 3 como el polinomio cociente y r (x) -3x^2 +1 como resto 21.

Usamos la división de polinomios. El dividendo, se puede obtener multiplicando el divisor por el cociente y sumándole el resto:

$(x^2 + x - 3)(x^2 + x - 3) + (-3x^2 + 1)$=$x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 6x + 9 - 3x^2 + 1$

Simplificando: $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 6x + 10$

Luego D(x) = $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 6x + 10$ y d(x) = $x^2 + x - 3$ son los dos polinomios.

21. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{3}{x} = \frac{x\cdot(2x+1)+3(x^2+1)}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{2x^2+x+3(x^2+1)}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{2x^2+x+3x^2+3}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{2x^2+x+3x^2+3}{x^3+x} = \frac{5x^2+x+3}{x^3+x}$

b) $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-2(x-2)}{(x-2)\cdot(x+1)} = \frac{x+1-2x+4}{(x-2)\cdot(x+1)} = \frac{x+1-2x+4}{x^2+x-2x-2} = \frac{-x+1+4}{x^2+x-2x-2} = \frac{-x+5}{x^2-x-2}$

c) $-\frac{x}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{1-x} = -\frac{x}{x\cdot(x+3)} \cdot \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x\cdot+3} \cdot \frac{1}{1-x} =$

$= \frac{1}{(x+3)\cdot(1-x)} = \frac{1}{x-x^2+3-3x} = \frac{1}{-2x-x^2+3} = \frac{1}{-x-2x+3}$

d) $\frac{(x-2)}{(x^2+3x)} : \frac{(x-2)}{(x+3)} = \frac{x-2}{x\cdot(x+3)} : \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-2}{x\cdot(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x-2} = \frac{(x+3)}{x\cdot(x+3)} = \frac{1}{x}$

22. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{3x-2}{x^2} = \frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{x(3x-2)}{x^3} = \frac{-x^2+x-1}{x^3} + \frac{3x^2-2x}{x^3} = \frac{2x^2-x-1}{x^3}$

b) $\frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{4}{x+3} = \frac{x-2}{x(x+3)} - \frac{4x}{x(x+3)} = \frac{3x-2}{x(x+3)}$

23. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\frac{8a^4b^2}{2a^2b} = 4a^2b \quad (8a^4b^2)/(2a^2b) = (8a^4b^2)/(2a^2b) = 4a^{(4-2)}b^{(2-1)} = 4a^2b$

b) $\frac{4x^2y^2-3xy^2}{2xy} = 2xy^2 - \frac{3}{2}y(4x^2y^2 - 3xy^2)/(2xy) = 2xy^2 - 3/(2y).$

c) $\frac{3x^2-9x}{6x+12} = \frac{x^2-3x}{x+4}$

$$\frac{(3x^2-9x)}{(6x+12)} = \frac{3x\cdot(x-3)}{6(x+2)} = \frac{x\cdot(x-3)}{2\cdot(x+2)}$$

d) $\frac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b} = \frac{3ab+2a-2}{b+8a}$

$\frac{6a^2b^2+4a^2b-4ab}{2ab^2+16a^2b} = \frac{2ab(3ab+2a-2)}{2ab(b+8a)} = \frac{3ab+2a-2}{b+8a}$

24. Calcula los siguientes cocientes:

a) $(3x^3 - 9x^2 - 6x): 3 = (x^3 - 3x^2 - 2x)$

b) $(7a^3 - 70a^2 - 21): 7 = (a^3 - 10a^2 - 3)$

c) $(25x^4 - 10x^2): 5x^2 = (5x^2 - 2)$

d) ($(3x^2y^3 - 8xy^2): xy^2 = (3x - 8)$

25. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{3x^2-6x}{9x^2+15} = \frac{3x(x-2)}{3(3x^2+5)} = \frac{x(x-2)}{3x^2+5}$

b) $\frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2} = \frac{a^2(a-5)}{a^2(7a+4)} = \frac{a-5}{7a+4}$

c) $\frac{x^2y+3xy^2}{4xy} = \frac{xy(x+3y)}{4xy} = \frac{x+3y}{4}$

d) $\frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab} = \frac{ab(2ab+3)}{ab(a^2-1)} = \frac{2ab+3}{a^2-1}$

26. Completa, cuando sea posible, las siguientes factorizaciones:

a) $-2x^3+2x=-2x(2x^2-1)$

b) $-6x^2+5x+6=(2x-3)\cdot(-3x-2)$

c) $-6x^4+3x^3-3x+6=3x\cdot(2x^3+x^2-1+2)$

d) $-6x^4+3x^3-3x+6$

$$-6x^4+3x^3-3x+6=(2x^2-x+2)\cdot(-3x^2-2x-3)$$

27. Determina un polinomio de grado 4 que admita una descomposición factorial en la que participe el polinomio $6x^3-x^2+3x-1$

Solución abierta: Por ejemplo: p(x) = $6x^4-x^3+3x^2-x$

28. Estudia si los siguientes números son o no raíz de los polinomios indicados:

a) $x=3\ de\ x^3-3x^2+1;\ No\ es\ raiz$

$$P\,(3)=3^3-3\,(3)^2+1=\ 1$$

b) $x=-2\ de\ x^3+3x^2+3x+2;\ Sí\ es\ raiz$

$$P\,(-2)=\ (-2)^3+3\,(-2)^2+\ 3x\,(-2)+2=0$$

c) $x=1\ de\ x^3-3x^2+x+1;\ Sí\ es\ raiz$

$$P\,(1)=1^3-3\,(1)^2+1+1=0$$

d) $x=0\ de\ x^3-3x^2+1;\ No\ es\ raiz$

$$P\,(0)=\ 0^3-3\,(0)^2+1=1$$

e) $x=-1\ de\ x^3-3x^2-x+3;\ Si\ es\ raiz$

$$P\,(-1)=\ (-1)^3-3\,(-1)^2-1(-1)+3=0$$

29. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y p_2 (x), y un número real α2

a) Si es una raíz de $p_1(x)$ ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$
No necesariamente: α =0 es una raíz de, $p_1(x)=x$, pero si $p_2(x)=1$; $\alpha=0$ no es una raíz de $p_1(x)+p_2(x)=x+1$

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$ ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$

Sí, ya que $p1(\alpha)\cdot p2(\alpha)=0\cdot p2(\alpha)=0$

c) Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio 4· $p_1(x)$

Son las mismas ya que $p1(\alpha) = 0 \leftrightarrow 4p1(\alpha) = 0$

30. Construye un polinomio de grado 3 tal que posea tres raíces distintas.

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$$

$$P(x) = (x^2 + x - 2)\,(x-3) \;\rightarrow\; P\,(x) = \; x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Las raíces de este polinomio son x = 1, x = -2 y x = 3, y son todas distintas entre sí.

31. Determina un polinomio de grado 3 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

$$P(x) = (x-2)^2\,(x-1)$$

$$P(x) = (x^2 - 4x + 4)\,(x-1) \rightarrow \; P(x) = \; x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

En este polinomio, la raíz x = 1 se repite dos veces.

32. Construye un polinomio de grado 3 de forma que tenga una única raíz.

$$P(x) = (x-2)^3$$

La única raíz de este polinomio es x = 2

33. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera admite al número 0 como raíz.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \ldots . + a_1 x + a_0$$

$a_0 = 0$ Debe ser nulo el término independiente.

34. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \ldots . + a_1 x + a_0$ ***admite al número 1 como raíz.***

La suma de los coeficientes ha de ser 0 ya que

$$a_n 1^n + a_{n-1} 1^{n-1} + \cdots \ldots . + a_1 1 + a_0 = a_n + a_{n-1} \ldots \ldots + a_1 + a_0 = 0$$

35. Obtén todas las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) x+7 ; (-7)

b) -x+5 ; (-5)

c) 2x-3 ; (3/2)

d) -4x-9 ; (-9/4)

e) -2x ; (0)

i) x^3 +x ; (0)

f) x^2 −3x ; (0 y 3)

g) $4x^2 - x - 3$; (1 y -3/4)

h) $x^3 - x$; (0,1,-1)

36. Usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios

a) $-2x^2 + x + 1 \quad entre \quad x - 1$

	-2	1	1
1		-2	-1
	-2	-1	0

b) $x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \quad entre \quad x + 2$

	1	2	−2	1
−2		−2	0	4
	1	0	−2	5

c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre x − 1

	4	−3	0	−1
1		4	1	1
	4	1	1	0

d) $x^3 - 9x + 1$ *entre x − 3*

	1	0	-9	1
3		3	9	0
	1	3	0	1

37.Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha = 3$ **de** $x^3 - 4x^2 + 5$

	1	−4	0	5
3		3	−3	−9
	1	−1	−3	−4

No es raíz

b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

	−1	−2	1	2
−2		2	0	−2
	−1	0	1	0

Sí es raíz

c) $\gamma = 1 \ de \quad -2x^4 + x + 1$

	-2	0	0	1	1
1		-2	-2	- 2	-1
	-2	- 2	-2	-1	0

Sí es raíz

d) $\sigma = -1 \ de \quad 2x^3 + 2x^2$

	2	2
-1		-2
	2	0

Sí es raíz

38. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio -x³ + 2x² +x + 2 en x=3

	−1	2	1	2
3		−3	−3	−6
	−1	−1	−2	−4

Su valor es – 4

39. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir x³ +3x² +3x +2 entre 2x +6

Dividimos ambos polinomios entre 2: $(\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ y (x + 3)

	$\frac{1}{2}$	3	3	2
-3		$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{13}{2}$

Nos queda C(x) = $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$ y resto $\frac{13}{2}$

40. Confecciona una hoja de cálculo que te permita dividir un polinomio usando la Regla de Ruffini.

41. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) x^3-x^2+2x-2

Candidatos: 1,-1, 2 y -2; Sólo 1 es raíz y no tiene más raíces reales

b) $x^4+4x^3+4x^2+4x+3$

Candidatos 1,– 1, 3 y -3. -1 y -3 son raíces y queda x^2+1 que no tiene mas raíces reales

c) $2x^3+x^2-18x-9$

1, -1, 3, -3, 9 y -9. 3y-3 son raíces y queda 2x+1 que no tiene más raíces enteras: x=-1/2

d) $x^4+2x^3+3x^2+6x$

Las posibles raíces, además de 0, son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6 ; 0 y -2 son raíces y queda que no tiene más raíces reales.

42. Completa el ejemplo precedente comprobando que, en efecto, -$\frac{1}{2}$ es raíz de un polinomio $2x^3+x^2-18x-9$

	2	1	-18	-9
3		6	21	9
	2	7	3	0
-3		-6	-3	
	2	1	0	
$-\frac{1}{2}$		-1		
	2	0		

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

43. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2 + 4x + 1$

los posibles candidatos a raíces racionales son: ±1 y ±1/3.

Ahora, podemos probar estos candidatos en el polinomio para determinar cuáles son realmente raíces. Para hacerlo, sustituimos cada uno de estos valores en el polinomio y verificamos si el resultado es igual a cero.

$3(1)^2 + 4(1) + 1 = 3 + 4 + 1 = 8$ (no es igual a cero)

$3(-1)^2 + 4(-1) + 1 = 3 - 4 + 1 = 0$ (igual a cero)

$3(1/3)^2 + 4(1/3) + 1 = 1/3 + 4/3 + 1 = 2$ (no es igual a cero)

$3(-1/3)^2 + 4(-1/3) + 1 = 1/3 - 4/3 + 1 = 0$ (igual a cero)

Por lo tanto, las raíces racionales son x = -1 y x = 1/3.

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

los posibles candidatos a raíces racionales son:

±1/1, ±2/1, ±4/1, ±1/2, ±2/2, ±4/2.

Ahora, podemos probar estos candidatos en el polinomio para determinar cuáles son realmente raíces. Para hacerlo, sustituimos cada uno de estos valores en el polinomio y verificamos si el resultado es igual a cero.

$2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 4 = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$ *(no es igual a cero)*

$2(-1)^3 - 9(-1)^2 + 12(-1) - 4 = -2 - 9 - 12 - 4 = -27$ *(no es igual a cero)*

$2(2)^3 - 9(2)^2 + 12(2) - 4 = 16 - 36 + 24 - 4 = 0$ *(igual a cero)*

$2(-2)^3 - 9(-2)^2 + 12(-2) - 4 = -16 - 36 - 24 - 4 = -80$ *(no es igual a cero)*

$2(1/2)^3 - 9(1/2)^2 + 12(1/2) - 4 = 1/4 - 9/4 + 6 - 4 = -8$ *(no es igual a cero)*

$2(-1/2)^3 - 9(-1/2)^2 + 12(-1/2) - 4 = -1/4 - 9/4 - 6 - 4 = -21/2$ *(no es igual a cero)*

Por lo tanto, las raíces racionales de $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ *son x = 2 y x = 1/2. Las demás opciones no son raíces racionales de este polinomio.*

44. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{x\cdot(x+4)}{(x+1)(x-2)(x+4)} = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$

b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)(x+4)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+4)}$

c) $\frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+x-6)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)(x+3)}$

45. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\frac{5}{-3x+12}+\frac{x+2}{x^2-4x}$

$\frac{5}{-3(x-4)}+\frac{x+2}{x\cdot(x-4)}=\frac{-5x+3(x+2)}{3x\cdot(x-4)}=\frac{-5x+6x+2}{3x\cdot(x-4)}=\frac{x+2}{3x\cdot(x-4)}$

b) $\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}$

$\frac{-x}{x^2-2x+1}-\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{-x}{(x-1)(x-1)}-\frac{(3x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x(x+1)}{(x-1)(x-1)(x+1)}-\frac{(3x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-1)}=$

$=\frac{-x^2-x-(3x^2-4x+1)}{(x-1)(x-1)(x+1)}=\frac{-4x^2-5x+1}{(x-1)(x-1)(x+1)}$

46. Realiza los cálculos:

a) $(1-3a)^2 = 1-6a+9a^2$

b) $(-x+3)^2 = x^2-6x+9$

c) $(-3x-2)^2 = 9x^2+12x+4$

d) $(x^2-1)^3 = x^6-3x^4+3x^2-1$

e) $(4x+2)^3 = 64x^3+96x^2+96x+8$

47. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+ac+2bc$

b) $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

48. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x+3y)^2 = 4x^2+12xy+9y^2$

b) $\left(3x+\frac{y}{3}\right)^2 = 9x^2+2xy+\frac{y^2}{9}$

c) $\left(5x-\frac{5}{x}\right)^2 = 25x^2-50+\frac{25}{x^2}$

d) $(3a-5)^2 = 9a^2-30a+25$

e) $(x^2-1)^3 = x^6-3x^4+3x^2-1$

f) $\left(\frac{3}{5y}-\frac{2}{y}\right)^2 = \frac{9}{25}y^2-\frac{12}{5}+\frac{4}{y^2}$

49. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^2+6a+9=(a+3)^2$

b) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

c) $b^2 - 10b + 25 = (b - 5)^2$

d) $4y^2 + 12y + 9 = (2y - 3)^2$

e) $a^4 - 2a^2 + 1 = \ (a^2 - 1)$

f) $y^4 + 6y^2 + 9 = \ (y^2 + 3)$

50. Efectúa estos productos:

a)$(4x + 3y) \cdot (4x - 3y) = 16x^2 - 9y^2$

b) $(2x^2 + 4) \cdot (2x^2 - 4) = \ 4x^4 - 16$

c) $(-x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x) = 9x^2 - x^4$

51. De acuerdo con lo expuesto, factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 2x + 1 = (x - 2)^2$

b) $3x^2 + 18x + 27 = 3(x^2 + 6x + 9) = 3(x + 3)^2$

c) $4x^5 - 16x^3 = 4x^3(x^2 - 4) = 4x^3(x - 2)(x + 2)$

52. Calcula los siguientes productos:

a) $(3x + 1)(3x - 1) = \ 9x^2 - 1$

b) $(2a + 3b)(2a - 3b) = 4a^2 - 9b^2$

c) $(x^2 + 5) \cdot (x^2 - 5) = x^4 - 25$

d) $(3a^2 + 5) \cdot (3a^2 - 5) = 9a^4 - 25$

53. Expresa como suma por diferencia las siguientes expresiones

a) $9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$

b) $4a^4 - 81b^2 = (2a^2 + 9b)(2a^2 - 9b)$

c) $49 - 25x^2 = (7 + 5x)(7 - 5x)$

d)$100a^2 - 64 = (10a + 8)(10a - 8)$

54. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

a) $\frac{x^2}{3x+3} = \frac{(x+1)(x-1)}{2\,(x+1)} = \frac{x-1}{3}$

b) $\frac{2x^2+12x+18}{x^2-9} = \frac{2\,(x^2+6+9)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2\,(x+3)^2}{(x+3)(x-3)} = \frac{2\,(x+3)}{X-3} = \frac{2x+6}{x-3}$

c) $\frac{6-3a}{a^2-4} = \frac{-3(a-2)}{(a+2)\,(a-2)} = -\frac{3}{a+2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un truco mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

1. Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre (x)
2. Que lo multiplique por 10 $(10 \cdot x)$
3. Que al resultado anterior le sume 100 $(10x + 100)$
4. Que multiplique por 1000 lo obtenido $1000(10x + 100) = 10000x + 10000$
5. Que divida entre 10 000 la última cantidad $\frac{10000x+100000}{10000} = x + 10$
6. Que al resultado precedente le reste el número que escribió $x + 10 - x = 10$
7. Independientemente del número desconocido original ¿qué número ha surgido? 10

2. En este otro ejercicio vamos a adivinar dos números que ha pensado un compañero. Construye una expresión algebraica que recoja todos los pasos y, finalmente, descubre el truco.

1. Solicita a un compañero que escriba en un papel, y no muestre, dos números naturales: uno de una cifra (entre 1 y 9) y otro de dos cifras (entre 10 y 99).
2. Que multiplique por 4 el número escogido de una cifra
3. Que al resultado anterior le sume 3
4. Que multiplique por 5 lo obtenido.
5. Que a la última cantidad le reste 15
6. Que multiplique el resultado precedente por 5
7. Que le sume a lo anterior el número de dos cifras que eligió
8. Dile al compañero que desvele cuál es el resultado de todos esos cambios.
9. ¿Qué debemos hacer para descubrir los dos números que escogió el compañero?

1)lamamos x al número de una cifra e y al número de dos cifras;

2)4x;

3) 4x+3;

4) 5(4x+3) =20x+15;

5) 20x + 15 -15 = 20x;

6) 5(20x) = 100x;

7) 100x + y;

8) El número de una cifra va multiplicado por 100, luego es la centena del número que te dicen, y el resto es el número de 2 cifras. Imagina que te dice: 825, entonces x = 8 e y = 25

3. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:

a) $\frac{3x-6}{(x+2)\cdot(2x-14)}$

$$(x + 2)(2x - 14) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \; o \; 2x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad o \quad x = 7$$

b) $\frac{-x}{-x^2-4x+4}$

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

c) $\frac{3x^3-x}{-2x^4-3x^2-4}$

En todo número real la expresión puede ser evaluada.

d) $\frac{5x-y+1}{x^2+y^2}$

$$x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0,\ y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

4. Una persona tiene ahorrados 1000 euros y decide depositarlos en un producto bancario con un tipo de interés anual del 3 %. Si decide recuperar sus ahorros al cabo de dos años, ¿cuál será la cantidad total de la que dispondrá.

Al final del primer año dispone de $1000+\frac{3}{100}1000 = 1030$.

Al cabo de dos años dispone de $1030+\frac{3}{100}1030$

5. Generalicemos el ejercicio anterior: Si ingresamos X euros en un depósito bancario cuyo tipo de interés es del i % anual, ¿cuál será la cantidad que recuperaremos al cabo de n años?

En el primer año recuperamos $\mathrm{X}+\frac{\mathrm{i}}{100}\mathrm{X} = \frac{100+\mathrm{i}}{100}\mathrm{X}$. En el segundo año recuperamos $\frac{100+\mathrm{i}}{100}\mathrm{x}+\frac{\mathrm{i}}{100}\frac{100+\mathrm{i}}{100}\mathrm{x} = \left(\frac{100+\mathrm{i}}{100}\right)^2$ x al cabo de n años recuperamos $\left(\frac{100+\mathrm{i}}{100}\right)^{\mathrm{n}}\mathrm{X}$

6. Construye un polinomio grado 2, p(x), tal que p (3) = -7

$$P(x) = x^2-6x+2$$
$$P(3) = 3^2-6(3)+2 = -7$$

7. Consideremos los polinomios p(x) = -5x³ + x² -3x -2, q(x)= 3x⁴ + 2x³ -x² + 2x + 7 y r (x) = 4x² +5x – 1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $p+q+r = (-5x^3+x^2-3x-2)+(3x^4+2x^3-x^2+2x+7)+(4x^2+5x-1) =$
$= 3x^4-3x^3+4x^2+4x+4$

b) $p-q = (-5x^3+x^2-3x-2)-(3x^4+2x^3-x^2+2x+7) = -3x^4-7x^3+2x^2-5x-9$

c) $p\cdot r = (-5x^3+x^2-3x-2)(4x^2+5x-1) = -20x^5-21x^4-2x^3-24x^2-7x+2$

d) $p\cdot r-q = (-20x^5-21x^4-2x^3-24x^2-7x+2)-(3x^4+2x^3-x^2+2x+7) =$
$= -20x^5-24x^4-4x^3-23x^2-9x-5$

8. Calcula los productos:

a) $\left(\frac{ax}{3}-\frac{by}{2}\right)\cdot\left(\frac{-xy}{6}\right) = \left(\frac{2ax-3by}{6}\right)\cdot\left(-\frac{xy}{6}\right) = -\frac{ax^2y}{18}+\frac{bxy^2}{12}=$

b) $(0{,}3x - 0{,}2y + 0{,}1z) \cdot (0{,}1x + 0{,}2y - 0{,}3z) = 0{,}03x^2 + 0{,}06xy - 0{,}09xz - 0{,}02xy - 0{,}04y^2 =$
$= +0{,}06yz + 0{,}01xz + 0{,}02yz - 0{,}03z^2 = 0{,}03x^2 + 0{,}04xy - 0{,}08xz - 0{,}04y^2 + 0{,}08yz - 0{,}03z^2$

c) $(x-1)(x-a)(x-b) = (x^2 - (a+1)x + a)(x-b) = x^3 - (a+1+b)x^2 + (ab+a+b)x - ab$

9. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x - 1 \; entre \; 2x^2 + 3x - 3$

Cociente: $x^2 - 3x + 2$; *Resto:* $-6x + 5$

b) $4x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x - 6 \; entre \; x^3 + 2x + 3$

Cociente: $4x^2 - 5x - 2$; *Resto: 9x*

10. Calcula los cocientes:

a) $(5x^4) : (x^2) = 5x^2$

b) $(3x^2y^4z^6) : \left(\left(\frac{1}{2}\right)xy^3z^5\right) = 6xyz$

c) $(x^4 + 2x^2y + y^2) : (x^2 + y) = (x^2 + y)^2 : (x^2 + y) = x^2 + y$

11. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-1}{x^2-3x} + \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)^2} + \frac{2x^2}{x(x-3)^2} = \frac{x^2-4x+4+2x^2}{x(x-3)^2} = \frac{3x^2-4x+3}{x^3-6x^2+9x}$

b) $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)^2} - \frac{2x^2}{x(x-3)^2} = \frac{x^2-4x+4-2x^2}{x(x-3)^2} = \frac{-x^2-4x+3}{x^3-6x^2+9x}$

c) $\frac{x-1}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{(x-1)(2x)}{x(x-3)\,(x-3)^2} = \frac{2(x-1)}{(x-3)^3} = \frac{2x-2}{x^3-9x^2+27x-27}$

d) $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{(x-1)(x-3)^2}{x(x-3)(2x)} = \frac{(x-1)(x-3)}{2x^2} = \frac{x^2-4x+3}{2x^2}$

12. *Construye un polinomio de grado 2 tal que el número -5 sea raíz suya.*

$p(x) = x^2 - 5x + 5 \quad ; \quad p(-5) = (-5)^2 + 5(-5) = 0$

13. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, - 3 y 0.

$$p(x) = x \cdot (x-6) \cdot (x+3) = x^3 - 3x^2 - 18x$$
$$p(6) = (6)^3 - 3(6)^2 - 18(6) = 0$$
$$p(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 18(-3) = 0$$
$$p(0) = (0)^3 - 3(0)^2 - 18(0) = 0$$

14. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

$$x(x-1)(x^2+1) = x^4 - x^3 + x^2 - x$$

15. Encuentra un polinomio q(x) tal que al dividir p(x)= $x^4+x^3+x^2+x+1$ ***entre q (x) se obtenga como polinomio resto*** $r(x) = 5x^2+5x+1$

p = q·d + r, luego q = (p – r) : d d puede ser el que quieras

$$p(x) - r(x) = (x^4+x^3+x^2+x+1) - (5x^2+5x+1) = x^4+x^3-4x^2-4x$$

Tomando d(x) = x ; q(x) = $(x^4+x^3-4x^2-4x): x = x^3+x^2-4\text{x}-4$

16. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $3x^3+11x^2+5x-3;\ Raices\ -1\ y\ -3$

$$p(-3) = 3\,(-3)^3 + 11\,(-3)^2 + 5\,(-3) - 3 = 0$$

$$p\,(-1) = 3\,(-1)^3 + 11\,(-1)^2 + 5\,(-1) - 3 = 0$$

b) $3x^3+2x^2+8x-3;\ No\ tiene\ raíces\ enteras.$

c) $3x^3+5x^2+x-1;\ Raíz\ 1\ (doble)$

$$p(-1)3(-1)^3 + 5\,(-1)^2 - 1 - 1 = 0$$

d) $2x^3+x^2-6x-3;\ No\ tiene\ raíces\ enteras$

17. Obtén las raíces racionales de los polinomios del ejercicio anterior.

a) Tiene las raíces -1 y –3 y $3x-1=0 \leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

b) La única raíz racional es $x = \frac{1}{3}$

c) Tiene raíz 1 (doble) y $3x-1=0 \leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

d) La única raíz racional es $x = -\frac{1}{2}$

18. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

a) $3x^3+11x^2+5x-3 = (x+3)(3x-1)(x+1)$

b) $3x^3+5x^2+x-1 = (3x-1)(x+1)^2$

c) $2x^3+x^2-6x-3 = (2x+1)(x^2-3)$

d) $3x^3-6x^2+x-2 = (x-2)(3x^2+1)$

19. Calcula las potencias:

a) $(x-2y+z)^2$

$$(x-2y+z)^2 = x^2 - 4xy + 2xz - 4y^2 + 4yz + z^2$$

b)$(3x-y)^3$

$$((3x-y)^\wedge 3 = 27x^\wedge 3 - 27x^\wedge 2y + 9xy^\wedge 2 - y^\wedge 3$$

c)$\left((1/2)a + b^2\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ab^2 + b^4$

d) $(x^3-y^2)^2 = x^6 - 2x^3y^2 + y^4$

$$(x^3-y^2)^2 = x^6 - 2x^3y^2 + y^4$$

20. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) $x^2 + 6x + 9 = \ (x+3)^2$

b) $x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2+4)^2$

c) $x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2 = \ \left(x + \sqrt{5}y\right)^2$

d)$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1;\ No\ se\ puede$

e) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1;\ No\ se\ puede$

f) $x^2 - 36 = \ (x+6)(x-6)$

g) $5x^2 + 1;\ No\ se\ puede$

h) $5x^2 - 11 = \ \left(\sqrt{5x} + \sqrt{11}\right)\left(\sqrt{5x} - \ \sqrt{11}\right)$

i) $x^2 - 3y^2 = \ \left(x + \sqrt{3y}\right)\left(x - \sqrt{3y}\right)$

21. Descompón en factores:

a) $x^4 - 1 = (x^2+1)\ (x^2-1)$

b) $x^2 - y^2 = (x+y)\ (x-y)$

c) $x^2y^2 - z^2 = (xy+z)(xy-z)$

d) $x - 2x^2y + y^2 = (x+y)^2$

22. Con este ejercicio se pretende mostrar la conveniencia a la hora de no operar una expresión polinómica que tenemos factorizada total o parcialmente.

a) Comprueba la igualdad $x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2-2)(x^2-3)$.

$$(x^2-2)(x^2-3). = \ x^4 - 3x^2 - 2x^2 + 6 = \ x^4 - 5x^2 + 6$$

b) Determina todas las raíces del polinomio $x^4 - 5x^2 + 6$

Las raíces de este polinomio son las siguientes: $\sqrt{3};\ \ -\sqrt{3};\ \sqrt{2};\ \ -\sqrt{2}$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

23. Factoriza numerador y denominador y simplifica:

a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x-1}{x+1}$

b) $\frac{x^4+2x^2y^2+y^4}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=x^2+y^2$

c) $\frac{x^3-x}{x^4-1}=\frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)}=\frac{x}{x^2+1}$

24. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{2}{x(5-x)}-\frac{3}{2(5-x)}=\frac{2\,(2)}{2x(5-x)}-\frac{3x}{2x(5-x)}=\frac{4-3x}{2x(5-x)}$

b) $\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x-4y}{2a-2b}=\frac{2(2x+3y)-3x-4y}{2(a-b)}=\frac{x+2y}{2(a-b)}$

c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}=\frac{2x+1}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{1}{2x-1}$

25. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{x^4-1}{x^7}:\frac{x^2+1}{x^8}=\frac{(x^4-1)x^8}{(x^2+1)x^7}=\frac{(x^2+1)(x^2-1)x}{x^2+1}=x^3-x$

b) $\frac{2x+3y}{a-b}-\frac{3x+4y}{2a-2b}=\frac{4x+6y-3x-4y}{2\,(a-b)}=\frac{x+2y}{2(a-b)}$

c) $-4x+(1-x^4)\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)=-4x+(1-x^2)(1+x^2)\,\frac{(x+1)^2-(1-x)^2}{1-x^2}=-4x+(1+x^2)4x=4x^3$

26. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right):\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=\frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2}:\frac{x^3+1}{x}=\frac{x^3-1}{x}$

b) $\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}:\frac{x-a}{x+a}=(x-a)^3=x^2-2ax+a^2$

c) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\frac{ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)\,(-a+b)}:\frac{ab}{a+b}=\frac{4ab}{(a-b)ab}=\frac{4}{a-b}$

27. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

a) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x+y}}:\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{a+y}}=\frac{\frac{x+y-a}{a(x+y)}}{\frac{x+y+a}{a\,(x+y)}}:\frac{\frac{a+y-x}{x(a+y)}}{\frac{a+y+x}{x(a+y)}}=\frac{x+y-a}{x+y+a}:\frac{a+y-x}{a+y+x}=\frac{(x+y-a)(x+y+a)}{(a+y-x)(a+y+x)}=\frac{x^2+y^2+2xy-a^2}{a^2+y^2+2ay-x^2}$

b) $\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{x^3-x^2+3x+2}{x^3}=\frac{x^3+x^2-3x-2}{x^3}=\frac{x^3-x^2+3x+2}{x^2-3x-2}$

c) $\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}\cdot\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{y}}=\frac{\frac{3y+2x}{xy}}{\frac{y-3x}{xy}}\cdot\frac{\frac{2y-x}{xy}}{\frac{3y+5x}{xy}}=\frac{(3y+2x)(2y-x)}{(y-3x)(3y+5x)}=\frac{6y^2+xy-2x^2}{3y^2-4xy-15x^2}$

AUTOEVALUACIÓN

1.Señala los coeficientes que aparecen en las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ b) $-2x^5+x^4-x^3+5x-1$ c) $5\cdot\sqrt{2\cdot x\cdot y^2\cdot z}$

a) 3,-7,2,-3,5,6; b)-2,1,-1,5,-1; c) $5\cdot\sqrt{2}$¡

2. ***El valor numérico de la expresión*** $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ **en = 2, y = −1, z = −1 es:**

$$\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}=\frac{3(2)-7}{2-3(-1)^2}+5(2)(-1)^3-\frac{6}{-1}=\frac{6-7}{2-3}-10+6=\frac{-1}{-1}-4=-3$$

c)-3

3. Completa adecuadamente las siguientes frases:

a) La suma de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a dos

b) La suma de tres polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a dos

c) El producto de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado 4

d) La diferencia de dos polinomios de grado dos es siempre otro polinomio de grado menor o igual a dos

4. Al dividir el polinomio p(x)= $x^5+x^4+x^3+1$ ***entre q (x)=*** x^2+x+1 ***el polinomio resto resultante:***

a) debe ser de grado 2 b) puede ser de grado 2

c) debe ser de grado menor que grado 2 d) ninguna de las opciones precedentes

5. Considera el polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$***. ¿Cuáles de los siguientes números enteros son razonables candidatos para ser una raíz suya?***

a) 3 b) 2 c)-5 d) -7

6. Considera el polinomio $2x^4-7x^3+x^2-7x-3$***. ¿Cuáles de los siguientes números racionales son razonables candidatos para ser una de sus raíces?***

a) -3 b) 2 y $\frac{-1}{2}$ c) -3 y $\frac{1}{3}$ d) -3 y $\frac{3}{2}$

7. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres:

a) tiene tres raíces reales. c) tiene, al menos, tres raíces.

b) tiene, a lo sumo, tres raíces reales.

8. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

Sí, por ejemplo, $x^2 (x - 1) (x - 2)$ tiene 3 raíces: 0 (doble), 1 y 2

9. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

Falso, el divisor ha de ser de grado 1;

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

Cierto, será raíz si el resto sale un 0;

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

Falso, se puede usar para polinomios con coeficientes racionales, aunque es más lioso;

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio Falso, sólo las raíces racionales.

10.Analiza si puede haber algún polinomio de grado ocho que no tenga ninguna raíz.

Puede haber polinomios de grado ocho que no tenga ninguna raíz real (cuando estudies los números complejos verás que puede tener 4 raíces complejas y sus conjugadas. Por ejemplo $(x^2-1)^4$