

Soluciones de actividades y ejercicios

2º Bachillerato

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

ÍNDICE:

1. Matrices	2
2. Determinantes	22
3. Sistemas lineales	41
4. Inecuaciones y programación lineal	53
5. Límites y continuidad	73
6. Derivadas	91
7. Integrales	138
8. Probabilidad	149
9. Estimación. Intervalos de confianza	169
Total:	177

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Leticia González Pascual, Álvaro Valdés y varios autores más.

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF y de los autores

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-069507

Fecha y hora de registro: 2015-07-09 13:48:48.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



CAPÍTULO 1: MATRICES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE MATRIZ

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido mil lechugas, 2 000 kilos de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1 000 y 400 respectivamente. Por cada lechuga recibe un céntimo, por cada kilo de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias del año 2014.

Solución:

Colecta	Lechugas (kg)	Naranja (kg)	Melones (kg)
Años anteriores	500	1 000	400
2014	1 000	2 000	500

Ganancias	Lechugas (céntimos)	Naranja (céntimos)	Melones (céntimos)
2014	1 000 c.	6 000 c.	2 500 c.

2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no:

- Un calendario.
- La clasificación de la Liga de fútbol (o cualquier otro deporte).
- El disco duro de un ordenador.
- Un armario donde se guarda una colección de copas.
- Los lineales de un supermercado.
- Una pantalla de televisión.
- El boleto de la Lotería Primitiva, de la Quiniela y del Euromillón.
- Los buzones de una vivienda.
- Los pupitres de una clase.

Solución: Recuerda: Las matrices son un conjunto de números reales dispuestos en filas y columnas.

Son matrices: a) y g), y pueden serlo, si sustituimos la información por números: b), c) y f), y extendiendo la definición a "... dispuestos en filas y columnas" pero que usualmente no son numéricos, podrían representarse con una matriz: d), e), h, i).

3. Propón otros elementos de tu entorno que sea matrices o puedan representarse mediante matrices.

Solución abierta: Las taquillas de la recepción de un hotel para dejar correspondencia, llaves, etc., para las diferentes habitaciones de cada planta. (No es una matriz numérica, pero se disponen los datos en filas y columnas).

Siempre que queramos organizar datos como:

- La disponibilidad de artículos de diferentes marcas en una tienda dependiendo de la talla.
- El número de alumnos matriculados en una academia en los diferentes idiomas que se imparten en los diferentes niveles en los que estén.
- Distribución de la producción de varios artículos entre varios clientes de una empresa.
- Coste del transporte por unidad de una determinada materia prima desde varios orígenes a varios destinos.

4. Escribe tres matrices fila.

Solución abierta: Por ejemplo: (1, 3, 8); (9, 2, 6, 7); (3, 5).

5. Escribe tres matrices columna.

Solución abierta: Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

Solución abierta: Por ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. OPERACIONES CON MATRICES

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, calcula:

- a) $A + 3B$
b) $2A + B - 5C$

Solución: a) $A + 3B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & -9 \\ -11 & 9 & 16 \end{pmatrix};$ b) $2A + B - 5C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 10 & -18 & 17 \\ -42 & -12 & 32 \end{pmatrix}$

10. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA . ¿Es el producto conmutativo?

Solución: $AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \\ -23 & 19 & 19 \end{pmatrix};$ $BA = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 26 & 2 & -20 \\ 15 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $3A^t - B^2$.

Solución: $3A^t - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -11 & 0 & 8 \\ 6 & -15 & 7 \end{pmatrix}.$

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{57} & \frac{1}{19} \\ 1 & \frac{-14}{57} & \frac{-2}{19} \\ 0 & \frac{2}{57} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$

D no es invertible, es singular, ya que su rango es 1 pues solo tiene una fila o columna linealmente independiente.

13. Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = M^{-1} \cdot (P - N).$

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $r(A) = 2;$ $r(B) = 3;$ $r(C) = 1;$ $r(D) = 1.$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula:

- a) $A + B$
 b) $A - B - C$
 c) $3A + 5B - 6C$

Solución

$$\text{a) } A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A - B - C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } 3A + 5B - 6C = \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$$

2. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA . ¿Es el producto conmutativo?

Solución

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$$

El producto no es conmutativo.

3. Calcula los productos posibles entre las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Solución: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 7 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

El resto de los productos no se puede realizar

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $3A^t - B^2$.

Solución: $3A^t - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 5 \\ 17 & 15 & 23 \end{pmatrix}$

5. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, realiza las

siguientes operaciones si es posible:

a) $A + B$ b) $3A - 4B$ c) AB d) AD e) BC f) CD g) $A^t C$

Solución: a) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix};$

b) $3A - 4B = \begin{pmatrix} 3 & -15 & -10 \\ 16 & 8 & -21 \end{pmatrix};$

c) $A \cdot B \rightarrow$ No se puede realizar el producto. d) $A \cdot D = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix};$

e) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -11 & 3 & 12 & -18 \\ 11 & -5 & -8 & -6 \end{pmatrix}$

f, g) $C \cdot D$ y $A^t C \rightarrow$ No se puede realizar el producto

6. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir AB y BA ?

Solución: Si una matriz A tiene dimensión $m \times n$ y otra matriz B tiene dimensión $n \times m$ se pueden realizar los dos productos:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times m} = C_{m \times m}$$

$$B_{n \times m} \cdot A_{m \times n} = C_{n \times n}$$

7. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^{50} y A^{97} . Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$.

Solución: $A^{50} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$ $A^{97} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Calcula A^n , para $n \in \mathbb{N}$, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix};$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Se dice que dos matrices A y B conmutan si $A \cdot B = B \cdot A$. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ halla las matrices B que conmuten con A .

Solución: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

10. Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$

11. Sean las matrices $A = 2 \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}$, $D = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$

Calcula cada uno de los productos AB , DE , EB , CE .

Solución: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 10x + 4y \\ 2my \end{pmatrix}$; $DE = \begin{pmatrix} 30 & 10m \\ 30m & 10m^2 \end{pmatrix}$; $EB = (15 + my)$; $CE = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30x & 10mx \end{pmatrix}$

12. Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$ dos matrices de orden 2×3 , en las que x, y, z denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A \cdot B$? Razona la respuesta.

Solución

a) $x + z = 5$; $x = 2$; $y = 3$; $z = 3$.

b) **El producto AB no puede efectuarse.**

13. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X , tal que $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Una matriz Y tal que $A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a) $X = (-1, -1, -1)$; La matriz X para que se pueda multiplicar por la matriz A tiene que ser de dimensión 1×3
b) **La matriz Y no existe.**

14. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) **No tiene: $8 - 8 = 0$;**

c) $\begin{pmatrix} -3/16 & 1/16 & 3/16 \\ 11/16 & -9/16 & 5/16 \\ 1/16 & 5/16 & -1/16 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \\ 4/3 & 4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$

15. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

Solución: $(AB)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ y $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/14 & 1/2 \\ 3/14 & -1/2 \end{pmatrix}$

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de A

b) Comprueba que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

c) Halla una matriz X tal que $AX = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$; b) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$; c) $X = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 \\ -4/3 & -2 \end{pmatrix}$

17. Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtener, si procede, $(BA)^{-1}$.

Solución: $(BA)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/15 & 1/15 \\ -1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$

19. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de AB

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

Solución: a) $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Como se puede observar, se verifica que: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ya que se verifica que $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$, por lo que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

20. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba que $A^t = A^{-1}$ y calcula $(A \cdot A^t)^{2003}$.

Solución: $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son iguales. $(A \cdot A^t)^{2003} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. Sean las matrices: $C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla C^{-1} y D^{-1}

b) Calcula la matriz inversa de $C \cdot D$

c) Comprueba que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$

Solución: a) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $(C \cdot D)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$

c) $D^{-1}C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3/2 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix} = (C \cdot D)^{-1}$

22. Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

23. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (2B + 3I)$

b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

Solución: a) $A^{-1} \cdot (2B + 3I) = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

24. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resuelve la ecuación $XAB - XC = 2C$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 5/2 \end{pmatrix}$

25. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $r(A) = 2$;

b) $r(B) = 2$;

c) $r(C) = 4$.

26. Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Solución: a) Si $a = 4$ entonces $r(A) = 2$ y si $a \neq 4$ entonces $r(A) = 3$.

c) Si $a = 1$ entonces $r(B) = 1$, si $a = -2$ entonces $r(B) = 2$ y si $a \neq 1, -2$ entonces $r(B) = 3$.

d)

27. Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

Solución: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

28. Obtener las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.

$$a) \begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & -8/3 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$

29. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtener matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{pmatrix}$

30. En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y

grupos normales. La matriz $A = \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$ expresa el número de personas por grupo, donde la primera

columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,4 & 0,75 \\ 0,8 & 0,75 & 0,6 & 0,25 \end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

Solución: a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,25 & 0,4 & 0,75 \\ 0,8 & 0,75 & 0,6 & 0,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{reducido} \\ \text{normal} \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{inglés} & \text{alemán} \\ 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 30 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13350 & 10090 \end{pmatrix}$

Se han recaudado 13350 € en los grupos de inglés y 10090 € en los grupos de alemán.

31. Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor ¿qué gasto tendría el editor?

Solución: Pagará en total 6 425 €.

32. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras: A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 en la L y 30 en la S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

a) Representar la información en dos matrices.

b) Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

Solución: a) Construimos la matriz A de dimensión 2x3 que representa las unidades fabricadas, en la que las filas representan el modelo de lavadora (A y B), y las columnas cada una de las terminaciones (N, L y S).

$$A = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

Construimos la matriz B de dimensión 3x2 que representa las horas de trabajo, en la que las filas representan la terminación (N, L y S) y las columnas el tipo de trabajo (taller y administración).

$$B = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1,2 \\ 33 & 1,3 \end{pmatrix}$$

b) La matriz pedida debe tener dimensión 2x2. Será el producto A · B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1,2 \\ 33 & 1,3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{máquina}_A \\ \text{máquina}_B \end{matrix} \begin{pmatrix} \text{taller} & \text{administración} \\ 17650 & 705 \\ 11490 & 459 \end{pmatrix}$$

33. Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$. Justifica el resultado.

Solución: Sean A y B las siguientes matrices de orden dos: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Si multiplicamos por λ a la

suma de ambas matrices quedará:

$$\lambda(A + B) = \lambda \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a+e) & \lambda(b+f) \\ \lambda(c+g) & \lambda(d+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda e & \lambda b + \lambda f \\ \lambda c + \lambda g & \lambda d + \lambda h \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos a cada matriz por λ y luego sumamos, se obtiene:

$$\lambda A + \lambda B = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda e & \lambda f \\ \lambda g & \lambda h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda e & \lambda b + \lambda f \\ \lambda c + \lambda g & \lambda d + \lambda h \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si se verifica la igualdad.

34. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto $A \cdot B$. Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

Solución: El producto de dos matrices simétricas no es necesariamente una matriz simétrica. Contraejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dos matrices simétricas y su producto $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ no lo es.

35. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r \cdot s \neq 1$. Calcula M^2 , M^3 , M^4 y M^{2k} para $k \in \mathbb{N}$.

Solución: $M^2 = \begin{pmatrix} rs & 0 \\ 0 & rs \end{pmatrix}$; $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & r^2s \\ s^2r & 0 \end{pmatrix}$; $M^4 = \begin{pmatrix} r^2s^2 & 0 \\ 0 & r^2s^2 \end{pmatrix}$; $M^{2k} = \begin{pmatrix} r^k s^k & 0 \\ 0 & r^k s^k \end{pmatrix}$.

36. Sea el conjunto de matrices definido por: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}$

- a) Comprueba que $A, B \in M$, también $A + B \in M$ y $A \cdot B \in M$
b) Encuentra todas las matrices $C \in M$, tales que $C^2 = C$.

Solución: a) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \in M$; $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix} \in M$;

- e) $a = b = 1/2$ o también $a = 1/2$ y $b = -1/2$.

37. Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A \cdot B$ es una matriz ortogonal.

Solución: Para que sea $A \cdot B$ ortogonal se debe verificar que $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^t = I$.

Sabemos que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, por lo que: $(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^t = (A \cdot B) \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$.

Por tanto si A y B son ortogonales su producto $A \cdot B$ también lo es.

38. Considera las matrices A , B y C definidas como:

$$A_{3 \times 3} = (a_{ij} = i + j), \forall i, j = 1, 2, 3$$

$$B_{2 \times 3} = (b_{ij} = i - j), \forall i = 1, 2; j = 1, 2, 3$$

$$C_{3 \times 2} = (c_{ij} = 2i + j), \forall i = 1, 2, 3; j = 1, 2$$

a) Construye las tres matrices.

b) Halla las traspuestas A^t , B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.

c) Analiza cuáles de los productos $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot A$, $C \cdot B$ o $C \cdot C$ pueden realizarse.

d) Determina el rango de las tres matrices A , B y C .

Solución: a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

b) $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $C^t = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. **Son simétricas A y A^t .**

c) **Se pueden realizar los siguientes productos: $A \cdot A$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot C$, y $C \cdot B$.**

d) **$Rg(A) = 2$; $Rg(B) = 2$; $Rg(C) = 2$.**

39. Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ en la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. a) Calcula M^2 . b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprueba que $P^2 = P$. d) Comprueba que $P \times M = M \times P = O$.

Solución: a) $M^2 = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & xy & xz \\ xy & y^2 - 1 & yz \\ xz & yz & z^2 - 1 \end{pmatrix}$. **Se observa que la matriz M es antisimétrica y M^2 es simétrica;**

b) $P = M^2 + I = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$. **La matriz P es simétrica.**

c) **Al realizar el producto, sacar factor común y sustituir $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, efectivamente se comprueba que $P^2 = P$.**

d) **Realizando el producto se comprueba que se obtiene la matriz nula de orden 3.**

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

1.- La dimensión de la matriz A es:

- a) 3 b) 2 c) 2×3 d) 3×2

Solución: c)

2.- La matriz A es:

- a) una matriz fila b) cuadrada c) traspuesta d) rectangular

Solución: d)

3.- La suma de las matrices A y B es:

a) $A+B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ b) $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ c) $A+B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ d) $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -9 \end{pmatrix}$

Solución: b)

4.- El producto $3A$ es:

a) $3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ b) $3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -9 \end{pmatrix}$ c) $3A = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix}$ d) $3A+B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$

Solución: c)

5.- Indica qué afirmación es cierta

- a) Las matrices A y B se pueden multiplicar b) Las matrices A y B no se pueden multiplicar
c) Ambas tienen matriz inversa d) Sus matrices traspuestas son iguales

Solución: b)

Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz identidad es la matriz:

- a) C ; b) D ; c) E ; d) F .

Solución: b)

7.- El producto de las matrices E y F es:

a) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$ b) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$ c) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 0 & 13 & 8 \\ 2 & 13 & 9 \end{pmatrix}$ d) $EF = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 10 & 16 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

Solución: d)

8.- La matriz inversa de la matriz F es:

a) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a)

9.- La matriz traspuesta de la matriz F es:

a) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Solución: d)

10.- El rango de la matriz C es:

- a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

<http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examen selectividad A4.pdf>

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examen-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

(1) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que verifica $A^3 - I = O$, con I la matriz identidad y O la nula. b) Calcula A^{13} . c) Basándote en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2 \cdot X + I = A$

Solución: a) $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

b) $A^{13} = (A^3)^4 \cdot A = A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix};$

c) $A^2 X + I = A \Rightarrow A^3 X + A = A^2 \Rightarrow X = A^2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(2) a) Define rango de una matriz.

b) Una matriz de 3 filas y 3 columnas tiene rango 3. ¿Cómo varía el rango si quitamos una columna? Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá dos?

Solución: a) Es el máximo número de columnas linealmente independientes que tiene la matriz; **b)** El rango es 2, ya que las dos columnas que quedan son linealmente independientes. No se puede asegurar, por ejemplo esta

matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 3, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, pero si

quitamos la primera fila y columna queda $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, de rango 1 al ser la segunda fila opuesta a la primera

(3) Sea A una matriz ($m \times n$)

a) ¿Existe una matriz B tal que $B \cdot A$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que $A \cdot B$ sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

c) Busca una matriz B tal que $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a) Cualquier matriz B de orden $1 \times m$ lo cumple, ya que el producto sería $1 \times n$;

b) Sólo si $m=1$, ya que B ha de ser de orden $n \times k$ para que el producto sea $m \times k$. En ese caso, cualquier matriz B de orden $n \times k$ valdría.

c) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y el vector $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se pide obtener razonadamente:

- a) El vector X tal que $A \cdot X = 0 \cdot X$.
- b) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 3 \cdot X$.
- c) Todos los vectores X tales que $A \cdot X = 2 \cdot X$.

Solución: a) $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = 0 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=x, x+2x=3x=0 \Leftrightarrow y=x=0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$b) A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2x \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix}$$

$$c) A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+4y \end{pmatrix} = 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-x \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

(5) Sean I y A las matrices cuadradas siguientes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$$

Se pide calcular, explicando todos los pasos necesarios:

- a) Las matrices A^2 y A^3 .
- b) Los números reales a y b para los cuales se verifica $(I + A)^2 = a \cdot I + b \cdot A$.

Solución: a) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17^2 - 290 & 0 \\ 0 & 17^2 - 290 \end{pmatrix} = -I \Rightarrow A^3 = -I \cdot A = -A = \begin{pmatrix} -17 & -29 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$

b) $(I + A)^2 = (I + A)(I + A) = I + A + A + A^2 = 2A = aI + bA \Leftrightarrow (2-b)A = aI \Leftrightarrow b=2, a=0$ (ya que si $b \neq 2$, $A = \frac{a}{2-b}I$ y A sería diagonal, contradicción).

(6) Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 , se pide:

- a) Calcula el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
- b) Calcula B en el caso $a = 1$.

Solución: a) $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+2z & ay+2t \\ 3x+7z & 3y+7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+2z=1 \\ 3x+7z=1 \end{cases}, \begin{cases} ay+2t=1 \\ 3y+7t=1 \end{cases}$ Los 2

sistemas tienen solución si y sólo si $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7a-6 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{6}{7}$

b) Si $a = 1$, los sistemas quedan $\begin{cases} x+2z=1 \\ 3x+7z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+6z=3 \\ 3x+7z=1 \end{cases} \Rightarrow z=-2, x=1-2z=5, y=5, t=-2$, luego

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(7) Una matriz 2×2 se dice que es triangular si el primer elemento de su segunda fila es 0. Encuentra todas las matrices triangulares B tales que $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow B B^t = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & bc \\ bc & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 27 \\ bc = 4 \\ c^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{2}$

Si $c = 2\sqrt{2}$, $b = \frac{4}{c} = \sqrt{2}$, $a^2 + b^2 = a^2 + 2 = 27 \Rightarrow a = \pm 5$, luego tenemos las soluciones:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si $c = -2\sqrt{2}$, $b = \frac{4}{c} = -\sqrt{2}$, $a^2 + b^2 = a^2 + 2 = 27 \Rightarrow a = \pm 5$, luego tenemos las soluciones:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(8) Comprueba razonadamente que:

- a) Si el producto de dos matrices cuadradas A y B es conmutativo, entonces se deduce que el producto de los cuadrados de dichas matrices es igual al cuadrado del producto de dichas matrices.
- b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^2 - 3 \cdot A + 2 \cdot I = O$, siendo I y O , respectivamente, las matrices de orden 3×3 unidad y nula.
- c) Calcula razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado, los valores a y b que hacen que $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$, sabiendo que la matriz A verifica la igualdad $A^2 = 3 \cdot A + 2 \cdot I$.

Solución: a) $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = A^2 B^2$

b)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 30 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = O$$

c) $A^2 = 3A + 2I = aA + bI \Leftrightarrow (3-a)A = (b-2)I$. Si $a \neq 3$:

$$A = \frac{b-2}{3-a}I \Rightarrow A^2 = \frac{(b-2)^2}{(3-a)^2}I = 3A + 2I = \left(\frac{3b-6}{3-a} + 2\right)I = \frac{3b-2a}{3-a}I \Leftrightarrow \frac{(b-2)^2}{3-a} = 3b-2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4b + 4 = 9b - 3ab - 6a + 2a^2 \Leftrightarrow b^2 + (3a-13)b - 2a^2 + 6a + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{13-3a \pm \sqrt{(3a-13)^2 + 8a^2 - 24a - 16}}{2} = \frac{13-3a \pm \sqrt{17a^2 - 102a + 153}}{2} =$$

$$= \frac{13-3a \pm \sqrt{17(a-3)^2}}{2} = \frac{(\sqrt{17}-3)a + 13 - 3\sqrt{17}}{2}, \frac{-(\sqrt{17}+3)a + 13 + 3\sqrt{17}}{2}$$

Otra solución es $a = 3, b = 2$

(9) a) Calcula las matrices reales cuadradas de orden 3, X e Y , que satisfacen las ecuaciones: $\begin{cases} 2 \cdot X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases}$ donde:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si X e Y son las matrices anteriores, calcula $(2 \cdot X + Y) \cdot X - (2 \cdot X + Y) \cdot (2Y)$.

$$\begin{cases} 2X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2X + Y = B \\ 2X - 4Y = 2C \end{cases} \Rightarrow 5Y = B - 2C \Rightarrow Y = \frac{1}{5}(B - 2C) =$$

Solución: a)
$$= \frac{1}{5} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$X = 2Y + C = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

b)
$$(2X + Y)X - (2X + Y)2Y = (2X + Y)(X - 2Y) = BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(10) Calcula todos los valores reales x, y, z, t para los cuales se verifica $A \cdot X = X \cdot A$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2z=3y \\ 2x+3y-2t=0 \\ 3x+3z-3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{3y}{2}, 2x+3y-2t=0 \\ 3x+\frac{9y}{2}-3t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{3y}{2}, 2x+3y-2t=0 \\ 2x+3y-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=\frac{2t-3y}{2}, z=\frac{3y}{2} \end{aligned}$$

(11) Tenemos las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A .

b) Calcula la matriz $B = A \cdot (A + 4 \cdot I)$.

c) Determina los números reales que cumplen: $A^{-1} = x \cdot A + y \cdot I$, $A^2 = z \cdot A + t \cdot I$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Solución: a) y b) $\Rightarrow B = A(A + 4I) = A^2 + 4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -4 & 8 \\ 12 & -20 & 24 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{4}(A + 4I) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} = xA + yI = \begin{pmatrix} -x & -x & 2x \\ 3x & -5x & 6x \\ x & -x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y & -x & 2x \\ 3x & -5x+y & 6x \\ x & -x & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}, y = -1$$

(Cumplen todas las condiciones)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = zA + tI = \begin{pmatrix} -z & -z & 2z \\ 3z & -5z & 6z \\ z & -z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z+t & -z & 2z \\ 3z & -5z+t & 6z \\ z & -z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = t = -4$$

(12) Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$

dos matrices de orden (2×3) en las que x, y y $z \in \mathbb{R}$ denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de x, y y $z \in \mathbb{R}$ de manera que $B = A$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A \times B$? Razona la respuesta

Solución: a) $x = 2, y = 2, z = 3$ **(cumplen la última condición); a) No, ya que el número de columnas de A no es igual al número de filas de B**

(13) Sea $6 \cdot A + 2 \cdot I = B$ una expresión matricial, donde B denota la matriz cuadrada de orden (2×2) : $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la

matriz identidad de orden correspondiente:

a) ¿Qué dimensión tiene la matriz A ?

b) Determina los elementos que integran la matriz A , esto es, $a_{ij} \in A_{\times q}$.

c) Calcula $A + 2 \cdot I$.

Solución: a) 2×2 ; b) $A = \frac{1}{6}(B - 2I) = \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; **c)** $A + 2I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(14) Sean A y B dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad 3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 2A + B &= \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B &= \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 4A + 2B &= \begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B &= \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow A &= \begin{pmatrix} 10 & 24 & 14 \\ 8 & 4 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - 2A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 28 \\ -24 & -12 & -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(15) Sean X e Y dos matrices desconocidas. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \quad 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} 5X + 3Y &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} 10X + 6Y &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} \\ 9X + 6Y &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \\ Y &= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - 3X \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(16) Se llama "traza" de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal principal. Halla A , matriz de tamaño (2×2) , sabiendo que la traza de $A \cdot A^t$ es cero.

Solución: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\text{tr}(A A^t) = \text{tr} \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right) = \text{tr} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & \dots \\ \dots & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0 \Rightarrow A = O$$

(17) Sea A una matriz que tiene tres filas; sea B la matriz que resulta de sustituir en A la 1ª fila por la suma de las otras dos. ¿Qué debe ocurrir entre las filas de A para que A y B tengan el mismo rango?

Solución: *Que sean linealmente dependientes, ya que como la primera fila de B es linealmente dependiente con las otras dos, para que tengan el mismo rango la primera fila de A ha de ser dependiente con las otras dos.*

(18) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

- a) Encontrar las condiciones que deben cumplir a , b y c para que se verifique $A \cdot B = B \cdot A$.
 b) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10} .

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$a) \quad BA = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b) \quad B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots, B^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(19) Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M . Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 4 \ 3), \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

- a) Calcula $(A \cdot B)^t$ y $(B \cdot A)^t$.
 b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (A \cdot B)^t = C$.

Solución: a) $(AB)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 4 \ 3) \right)^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad (BA)^t = \left((1 \ 4 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^t = (6)^t = (6)$

$$b) \quad X = 2(C - (AB)^t) = 2 \left(\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -12 & 2 & -12 \\ -4 & -20 & 6 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 2: DETERMINANTES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DETERMINANTE

1. Calcula los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución: a) 7; b) 3; c) 1.

2. Calcula los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Solución: a) 8; b) -2; c) -16.

2. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

3. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces **dos** permutaciones de filas.

Solución: $|A| = -|B|$.

4. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

Solución: *Permutamos las filas y después las columnas y calculamos, obteniendo que:* $|A| = |B|$.

5. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

Solución: *En la matriz A hemos permutado las filas 1 y 2, y luego las filas 2 y 3, obteniendo la matriz C, y calculado sus determinantes, obteniendo que:* $|A| = |C|$.

6. Comprueba qué ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

Solución: $|A| = |D|$.

7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.

Solución: *La propiedad 5 dice: “Si en una matriz se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo”. Sea A la matriz inicial y B la matriz obtenida permutando dos filas, entonces $|A| = -|B|$. Ahora permutamos dos columnas de la matriz B obteniendo la matriz D, entonces: $|B| = -|D|$. Por tanto $|A| = -|B| = -(-|D|) = |D|$.*

8. Comprueba en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.

Solución: *El determinante de una matriz con dos líneas (filas o columnas) iguales es cero, por tanto si permutamos filas o columnas seguirá siendo 0 su determinante.*

9. Demuestra esta propiedad para determinantes de orden tres.

Solución: *Se deduce de la propiedad 5 que dice: “Si en una matriz se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo”.*

10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el del determinante de partida.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 + C_1 + 2C_2} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

Solución: *Por la propiedad 3 podemos descomponer el segundo determinante en suma de tres determinantes. El primero es el de partida, y los otros dos son cero, pues tienen dos columnas iguales.*

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres: a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ c) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Lo comprobamos con la matriz A y se haría igual con el resto de matrices:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 105 - 40 + 18 = -149 + 18 = -131.$$

Si transformamos la matriz A realizando la transformación $C_3 = C_3 + C_1 + 2C_2$ (sumando a la columna que sustituimos una combinación lineal de las demás, podría ser cualquier otra) nos queda el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} = 120 - 16 - 273 - 104 + 72 + 70 = 262 - 396 = -131.$$

Nos da el mismo valor el determinante ya que:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5+6+2(1) \\ 7 & -2 & 1+7+2(-2) \\ -4 & -3 & 0-4+2(-3) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 7 & -2 & 7 \\ -4 & -3 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \\ -4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

Los dos últimos determinantes de los tres en los que se ha descompuesto el determinante tienen dos columnas iguales, por tanto su valor es 0.

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, pero no se verifique que $|A \cdot B| = |B \cdot A|$.

Solución: Si las matrices son cuadradas siempre se verifica la expresión pues sabemos que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ y $|B \cdot A| = |B| \cdot |A|$. Siempre se verifica la propiedad conmutativa del producto por lo que $|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$, por lo que, si las matrices son cuadradas $|A \cdot B| = |B \cdot A|$.

13. Dadas dos matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no:

- | | |
|--|--|
| a) $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A^2 + B^2$ | f) $ (A+B)^2 = A ^2 + B ^2$ |
| b) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B$ | g) $ (A+B)^2 = A ^2 + B ^2 + 2 \cdot A \cdot B $ |
| c) $(A-B)^2 = (A-B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ | h) $ (A-B)^2 = A ^2 - B ^2$ |
| d) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B$ | i) $ (A-B)^2 = A ^2 + B ^2 - 2 \cdot A \cdot B $ |
| e) $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$ | j) $ (A+B) \cdot (A-B) = A ^2 - B ^2$ |

Solución: Ciertas: b); d); e); g); i); j). Falsas: a); c); f); h).

3. CÁLCULO DE DETERMINANTES POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Solución: 4.

15. Halla el valor de a que verifica:

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

Solución: $24 = 8a \Rightarrow a = 3$.

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina: a) $|A|$ y $|B|$; b) $[Adj(A)]^t$ y $[Adj(B)]^t$; c) $A \cdot [Adj(A)]^t$ y $B \cdot [Adj(B)]^t$. ¿Qué observas?

Solución: a) $|A| = -131$; $|B| = -8$;

$$b) (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 11 \\ 4 & 20 & 29 \\ -29 & 14 & -19 \end{pmatrix} \text{ y } (Adj(B))^t = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$c) A(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -131 & 0 & 0 \\ 0 & -131 & 0 \\ 0 & 0 & -131 \end{pmatrix} \text{ y } B(Adj(B))^t = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Al multiplicar se obtiene una matriz diagonal con los elementos de la diagonal todos iguales al valor del determinante de la matriz de inicio.

17. a) Calcula la matriz adjunta de: $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. b) Halla $|C|$, $[Adj(C)]^t$ y efectúa el producto $C \cdot [Adj(C)]^t$. c)

¿Qué observas?

$$\text{Solución: a) } Adj(C) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}; b) |C| = -7; (Adj(C))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}; c) C(Adj(C))^t = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

c) Se obtiene una matriz diagonal, con los términos de la diagonal iguales al determinante.

4. MATRIZ INVERSA

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A \cdot A^{-1} = I$ y $B \cdot B^{-1} = I$

Solución: Comprobado.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & b \end{pmatrix} & \text{d)} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{g)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \text{h)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \text{i)} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} & \text{j)} \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución: a) -2 ; b) 22 ; c) $ab + 25$; d) $a^2 - b^2$; e) 0 ; f) -2 ; g) 2 ;
h) 79 ; i) $a^3 - 3a + 2$; j) $-m^2 - 4m + 1$.

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$$

Solución: a) Descomponemos el determinante en suma de dos determinantes, y permutando filas observamos que son dos determinantes iguales, luego vale 0: b) A la tercera columna le sumamos la segunda. La columna así obtenida tiene todos sus elementos iguales luego es proporcional a la primera, por lo que el determinante vale 0.

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ son múltiplos de 15.

Solución: a) En la tercera fila sacamos 5 factor común. A la tercera columna le hemos restado la segunda. Ahora de la tercera columna podemos sacar el factor 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

b) En la primera fila sacamos 3 factor común. En la tercera columna podemos sacar el factor 5:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución: a) Operando filas y columnas obtenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; b) De igual modo se comprueba con b)

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = 5$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \quad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución: $A_1 = 1/5 \cdot \begin{vmatrix} -40 & 25 & 40 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_2 = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

6.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$ calcula, sin desarrollar, el valor de $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = 9$

permutando filas y columnas $(-3) \cdot (-1) \cdot (-1) = 9$.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 9$$

7.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$ calcula sin desarrollar:

a) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} =$ b) $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} =$ c) $\begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} =$

Solución: a) 12; b) 12; c) -6.

8.- ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale -5 y que el determinante de la matriz $3 \cdot A^t$ vale -1215 ?

Solución: $3^n (-5) = -1215 \Rightarrow n = 5$.

9.- Justifica, sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

Solución: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \cdot 1 & y \cdot 1 & z \cdot 1 \\ x \cdot x & y \cdot y & z \cdot z \\ x^2 \cdot x & y^2 \cdot y & z^2 \cdot z \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.- Dadas las matrices A y B de orden 4×4 con $|A| = 3$ y $|B| = 2$, calcula $|A^{-1}|$, $|B^t A|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

Solución: $|A^{-1}| = 1/3$; $|B^t A| = 6$; $|(AB^{-1})^t| = 3/2$.

11.- Obtén, en función de a , b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

Solución: $a \cdot b \cdot c$.

12.- Demuestra que:
$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$$

Solución: Dejamos la primera fila igual, en la segunda, la $1^a - 2^a$, en la tercera, la $1^a - 3^a$, en la cuarta, la $1^a - 4^a$, y desarrollamos por la segunda columna. Descomponemos en suma de dos determinantes. Y se obtiene: $-ab^2 - a(-(1+a)b^2) = a^2b^2$; Hacemos lo mismo con el otro determinante y se obtiene $(a-1)^3(a+3)$

13.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcula: $|A|$; α_{32} ; α_{13} ; A_{22} ; A_{12}

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

Solución: a) $|A| = 28$; $\alpha_{32} = 9$; $\alpha_{13} = -8$; $A_{22} = 11$; $A_{12} = -12$;
b) $A_{23} = 5$; $\alpha_{11} = 8$; $A_{13} = -8$; $|A|x + A_{23} + 3\alpha_{11} = 28x + 5 + 3 \cdot 8 = -2 - 8x$; $x = -31/36$.

14.- Sea una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$. Comprueba si es verdadero o falso

$ -3A = 9$	$\frac{ A \cdot A^t }{3} = 3^{-3}$	$A^3 \notin \mathcal{M}_{3 \times 3}$	$4 A - 7 A^t = 1$	$2A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$
$ 4A - A^t = -3^2$	$ A^{-1} = -3^{-1}$	$\frac{ 3A - A^t }{ 3A^t + A } = (-2)^{-3}$	$\frac{1}{9} A^{-1} - 6 A^t ^2 = 1$	$ 3^{-2}A^t = -\frac{1}{3^7}$

Si son falsas, indica la respuesta correcta.

Solución:

Verdaderas: $|-3A| = 9$; $\frac{|A \cdot A^t|}{3} = 3^{-3}$; $4|A| - 7|A^t| = 1$; $|4A - A^t| = -3^2$; $|3^{-2}A^t| = -\frac{1}{3^7}$

Falsas: $A^3 \notin \mathcal{M}_{3 \times 3}$ pues si es una matriz cuadrada de orden 3;

$2A \in \mathcal{M}_{6 \times 6}$ pues $2A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$; $|A^{-1}| = -3^{-1}$ pues $|A^{-1}| = -3$;

$\frac{|3A - A^t|}{|3A^t + A|} = (-2)^{-3}$ pues es igual a $1/2^3$; $\frac{1}{9}|A^{-1}| - 6|A^t|^2 = 1$ pues es igual a -1 .

15.- Sean las matrices A y $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ tales que $|A| = -3^{-2}$ y $|B| = 3$. Con estos datos calcula de forma razonada: $|A^{-1}|$; $|B^{-1}|$; $|A \cdot B|^{-1}$; $|3B^{-1} \cdot A|$; $|3A \cdot B^t|$; $|(B^{-1} \cdot A^{-1})^t|$

Solución: $|A^{-1}| = -9$; $|B^{-1}| = 1/3$; $|A| \cdot |B^{-1}| = -1/3^3$; $|3B^{-1}A| = -1$; $|3AB^t| = -9$; $|(B^{-1}A^{-1})^t| = -3$.

16. - Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A , cuyo determinante vale -2 . Se pide calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz $-\frac{3A}{2}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A .

c) El determinante de la matriz $\frac{A^2}{6}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3$.

Solución: a) $-81/8$; b) $-1/2$; c) $4/6^4$; d) -24 .

17.- Para los determinantes $A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix}$ $A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$

a) Halla los menores complementarios de los elementos α_{11} , α_{23} , α_{32} y α_{12} , cuando existan.

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

Solución:

	A_1	A_2	A_3
α_{11}	$a^2 - b^2$	b	$b - bd - cb$
α_{23}	$ab - b^2$	No existe	$a^2b + abd - (ab + a^2bd)$
α_{32}	$ab - b^2$	No existe	$2(a^2cd + ad)$
α_{12}	$ab - b^2$	a	$-a^2c - ad - a$
A_{11}	α_{11}	α_{11}	α_{11}
A_{23}	$-\alpha_{23}$	No existe	$-\alpha_{23}$
A_{32}	$-\alpha_{32}$	No existe	$-\alpha_{32}$
A_{12}	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{12}$

18.- a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A .

b) La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A .

Solución: a) $|A| = 1$; b) $|A| = 1$ o bien $|A| = -1$.

19.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.

b) Desarrollando por los elementos de la 3ª fila y de la 2ª columna.

Solución: a) $|A| = 0$; b1) $|A| = (-2)(-8) + (1)(-8) + 1(-8) = 0$; b2) $|A| = (2)(5) + (2)(-1) + 1(-8) = 0$

20.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se pide calcular el valor de los

siguientes determinantes: $|A \cdot B|$; $|C|$; $|A^t \cdot B^t|$; $|C \cdot B \cdot A|$; $|C|^2$

Solución: $|A \cdot B| = 7$; $|C| = -12$; $|A^t \cdot B^t| = 0$; $|C \cdot B \cdot A| = 0$; $|C|^2 = 144$.

21. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3x$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & x & -3 \\ x & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = 5x - 3$

Solución: a) $x = 7$; b) $x = 4$ y $x = -1$.

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11$

Solución: a) $x = -5$; $x^3 - 18x + 35 = 0$. b) Sin soluciones reales: $x^2 - 4x + 25 = 0$.

23.- Resuelve la siguiente ecuación $|A - x \cdot I| = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

Solución: $x = 1$, $x = -1$ y $x = 3$.

24.- Halla los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución: $|A| = -5$; $|B| = 3$; $|D| = 7$; $|E| = 14$;
 $|F| = 6$; $|G| = -4$; $|H| = -20$; $|J| = 7$.

25.- Aplicando propiedades, calcular el valor del determinante: $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

- a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2.
 b) Desarrollando por los elementos de una línea.

Solución: 3.

26.- Comprobar el valor de los siguientes determinantes: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 137$; $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27$

Solución: Comprobado.

27.- Calcula el determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Solución: -168.

28.- Calcula los determinantes siguientes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución: a) -295; b) $(x + 1)^4$.

29. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución: a) $8x^2 + 15x - 62 = 0$, $x = 2$ y $x \approx -3,875$; b) $x = 2$ y $x = -6$.

30. - Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 7x$

Solución: a) $4x^2 + 7x - 57 = 0$, $x = 3$ y $x = -4,75$; b) $x = -1$ y $x = -2$.

31. - Halla las matrices inversas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix}$

Solución: a) $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \frac{-20}{41} & \frac{-8}{41} & \frac{17}{41} \\ \frac{-7}{41} & \frac{11}{41} & \frac{8}{41} \\ \frac{25}{41} & \frac{10}{41} & \frac{-11}{41} \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \frac{ac-bc}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{b^2-c^2}{b^2-ab+ac-bc} & \frac{c^2-ab}{b^2-ab+ac-bc} \\ 0 & c-b & b-c \\ \frac{b^2-ab+ac-bc}{b-a} & \frac{b^2-ab+ac-bc}{a-b} & \frac{b^2-ab+ac-bc}{a-c} \\ b^2-ab+ac-bc & b^2-ab+ac-bc & b^2-ab+ac-bc \end{pmatrix}$

32. - Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a) Halla la matriz inversa de A . b) Comprueba que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. c) Halla una

matriz X tal que $AX = B$, siendo $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

b) $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

c) $A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{-6}{3} \end{pmatrix}$

33.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Calcula la matriz inversa de $A \cdot B$.
 b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A . ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$

$$b) B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \Rightarrow B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices obtenidas en ambos apartados son idénticas.

Se cumple con A y B y con cualesquiera otras dos matrices. Esto es debido a que existe una propiedad de la matriz inversa que dice: la inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando su orden: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

34.- Siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) ¿Es cierto que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?
 b) Calcula, si es posible, la inversa de $A \cdot B$.

Solución: a) $|AB| = 23$ y $|BA| = 0$, luego son distintos; **b)** $\begin{pmatrix} -3/23 & 5/23 \\ -10/23 & 9/23 \end{pmatrix}$.

35.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa.

Solución: Calculamos su determinante y lo igualamos a 0, $|A| = t^2 + 3t = 0$.

Luego no existe matriz inversa para $t = 0$ y $t = -3$.

36.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$, averigua para qué valores de λ existe A^{-1} , y calcúlala para $\lambda = -3$.

Solución: Calculamos su determinante y lo igualamos a 0, $|A| = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$.

Luego no existe matriz inversa para $\lambda = 3$ y $\lambda = -2$. Para $\lambda = -3$, la matriz inversa es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & \frac{6}{6} \end{pmatrix}$$

37.- Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

38.- Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

- a) Comprueba si es una matriz regular o invertible. En caso afirmativo, halla su inversa.
 b) Descompón la matriz M en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica.
 c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean todos no nulos y que el valor de uno de ellos sea nulo.
 d) Comprueba si: $|M| = |P| + |Q|$ y $|M| = |P| \cdot |Q|$
 e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13}x^2 - |M|x + 4A_{32} = 2$

Solución: a) $|M| = 13$, distinto de cero, luego existe su matriz inversa. $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 13 & 13 & 13 \\ 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}$

b) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3/2 & 1 \\ 3/2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, la primera simétrica y la segunda antisimétrica.

c) Solución abierta: Por ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -4 & -6 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. Todos los

elementos son no nulos, pero los determinantes son nulos, pues la primera matriz tiene las filas primera y segunda iguales y la segunda, la primera y la tercera fila.

d) $|M| = 13$ es distinto de $0 + 0$, y de $0 \cdot 0$.

e) $3x^2 - 13x + 4(-9) = 2$; $3x^2 - 13x - 38 = 0$; $x = 19/3$ y $x = -2$.

39.- ¿Para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa? Halla la inversa para $a = 2$.

Solución: El determinante se anula para $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$. Para $\alpha = 2$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

40.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A ? $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$.

Solución: a) La matriz A no es invertible para $a = 3$; b) $|AA^t| = 0$; $|A^tA| = 0$.

41.- Sea C la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C ?
 b) Calcula la inversa de C para $m = 2$.

Solución: a) La matriz C no es invertible para $m = -1$; b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

42.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde x es un número real, halla:

- a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa.
 b) La inversa de A para $x = 2$.
 c) Con $x = 5$, el valor $b \in \mathbb{R}$ para que la matriz $b \cdot A$ tenga determinante 1.

Solución: a) La matriz A es invertible para x distinto de 1 y distinto de 3;

b) $\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) Para $x = 5$ el determinante de A vale -8 , luego $b^3 = -1/8$, $b = -1/2$.

43.- Dadas las matrices A, B y $C \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $X \cdot A = B$

b) $B \cdot X - 2B = 3X$

c) $A \cdot X \cdot C = 2B^t + A$

Solución: a) $X = BA^{-1}$;

b) $X = (B - 3I)^{-1}2B$;

c) $X = A^{-1}(2B^t + A)C^{-1}$.

44.- Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

Solución: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

45.- a) Halla, si existe, la matriz inversa de M . $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

b) Calcula la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

46.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) ¿Qué valores de a hacen singular la matriz C ?
 b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz B para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido?
 c) Calcula B para el valor $a = 1$.

Solución: a) $a = 0$ y $a = 2$; b) 2×3 ; c) $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

47.- Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ 2 & x-1 & 2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

Solución: a) $x = 111/19$; b) $x = 3$ (doble) y $x = -2$; c) $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

48.- Halla el rango de las siguientes matrices: a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Solución: a) 2; b) 2; c) 3; d) 2.

49.- Halla el rango de las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Solución: $\text{rg}(A) = 1$; $\text{rg}(B) = 3$; $\text{rg}(C) = 2$.

50.- Halla el rango de las matrices en función del parámetro: a) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) Para $a = 1$, el rango es 1, y para a distinto de 1 el rango es 2;
 b) Para $a = 2$, el rango es 1, y para a distinto de 2 el rango es 2;
 c) Para $a = 2$ o para $a = 1$, el rango es 2, y para a distinto de 0 o 1 el rango es 3;
 d) Para $a = 1$, el rango es 1, para a igual a -2 , el rango es 2, para a distinto de 1 y de -2 , el rango es 3.

51.- Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$A = \begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

Solución: Para $x = 0$ o $x = 2$, el $\text{rg}(A) = 2$, y para x distinto de 0 y de 2 el $\text{rg}(A) = 3$;
 Para $x = 1$, el $\text{rg}(B) = 2$, y para x distinto de 1 el $\text{rg}(B) = 3$;
 Para $x = 2/3$, el $\text{rg}(C) = 2$, y para x distinto de $2/3$ el $\text{rg}(C) = 3$.

52.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$

- a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$
 b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x .

Solución: a) $x = -1$ (doble) y $x = 2$;
 b) Para $x = -1$ el $\text{rg}(A) = 1$, para $x = 2$, el $\text{rg}(A) = 2$, y para x distinto de -1 y de 2 el $\text{rg}(A) = 3$

53. - Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Discute el rango de A según los valores de m .
 b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$?
 c) Calcula X para $m = 0$.

Solución: a) Para $m = 2$ o $m = -2$, el $\text{rg}(A) = 2$, y para m distinto de 2 y de -2 el $\text{rg}(A) = 3$;

b) 3×2 ;

c) $X = \begin{pmatrix} 5/2 & -2 \\ 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

54.- Resuelve las ecuaciones:

a) $A \cdot X = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot X = C$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot X = B + 2C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A \cdot X + B = 2C$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: a) $X = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$;

b) $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

c) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $X = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & 2 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1.- El valor del determinante de la matriz A es:

- a) 4 b) 0 c) -4 d) 8

Solución: a)

2.- El adjunto B_{23} del determinante de la matriz B es:

- a) 0 b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) -4 d) $-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: a)

3.- El valor del determinante de la matriz B es:

- a) 4 b) 0 c) 8 d) -8

Solución: b)

4.- El rango de B es:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Solución: c)

5.- La matriz inversa de A es:

- a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$

Solución: d)

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6.- La matriz inversa de la matriz F es:

- a) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 11 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $F^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: a)

7.- El rango de la matriz C es:

- a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Solución: c)

8.- La matriz de determinante nulo es:

- a) C b) D c) E d) F

Solución: a)

9.- El determinante de la matriz $5CD$ vale:

- a) 5 b) 0 c) 15 d) 1

Solución: b)

10.- El rango de la matriz CF es:

- a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Solución: a)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadesol.pdf

<http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examen selectividad A4.pdf>

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

(1) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ¿Puede existir una matriz C de forma que se puedan realizar los productos $A \cdot C$ y $C \cdot B$? Si es posible, proporciona un ejemplo. Si no es posible, explica por qué.
- Calcula $(B - I)^2$.
- Determina los valores de x que verifican $|A| = -7|I|$

(2) Dados los números reales a, b, c y d , se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Prueba que el polinomio $p(x) = \det(A - x \cdot I_2)$ es $p(x) = x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det(A)$, donde $\text{tr}(A)$ es la traza de la matriz A , es decir, la suma de los elementos de la diagonal de A .

(3) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- Halla el determinante de la matriz A .
- Halla el determinante de la matriz $3 \cdot A$.
- Halla el determinante de la matriz $(3 \cdot A)^3$.

(4) Dadas las matrices cuadradas $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

- Calcula las matrices $(A - I)^2$ y $A \cdot (A - 2 \cdot I)$.
- Justifica razonadamente que
 - Existen las matrices inversas de las matrices A y $(A - 2 \cdot I)$.
 - No existe la matriz inversa de la matriz $(A - I)$.
- Determina el valor del parámetro real λ para el que se verifica que $A^{-1} = \lambda \cdot (A - 2 \cdot I)$.

(5) Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sec \theta & \tan \theta & 0 \\ \tan \theta & \sec \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Estudia para qué valores de θ la matriz A tiene inversa.
- Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

(6) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M , donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica

que $M^2 = M$. Obtén razonadamente:

- Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - k \cdot I$ tiene inversa.
- La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$.
- Las constantes reales α y β para las que se verifica que $\alpha A^2 + \beta A = -2 I$.
- Comprueba razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $M P = P M$.

(7) Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Obtén los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.
b) Busca, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a = 0$.

(8) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ c & b & a-x \end{pmatrix}$

- a) Obtén el polinomio $p(x) = \det(A)$.
b) Si $c = 0$, busca las raíces de $p(x)$ dependiendo de a y b .

(9) Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Calcula, si es posible, la matriz inversa de la matriz A .
b) Resuelve, si es posible, la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

(10) Utilizando las propiedades de los determinantes:

a) Verifica que: $\begin{vmatrix} a-2 & 4 & 3 \\ 1 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & a-4 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot (a-4) \cdot (a+2)$

b) Calcula: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(11) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- a) Calcula su inversa, si existe.
b) Encuentra la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A .

c) Resuelve la ecuación $x \cdot (A^4 + A^2 - A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(12) Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6 \cdot A - 9 \cdot I$, donde I es la matriz identidad.

a) Expresa A^4 como combinación lineal de I y A .

b) 1) Estudia si la matriz: $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $B^2 = 6 \cdot B - 9 \cdot I$.

2) Determina si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlala.

(13) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$

- a) Resuelve la ecuación $\det(A) = 0$.
b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x .

(14) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- a) Calcula las matrices que verifican la relación $|A| = |A + I|$ (I es la matriz identidad)
b) Calcula todas las matrices diagonales, que no poseen inversa y que verifican la relación anterior.
c) ¿Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $|B + C| = |B| + |C|$? Si no es cierto pon un contraejemplo.

(15) Sea la matriz

$$\begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$$

- a) Calcula el valor de su determinante en función de a
 b) Encuentra su inversa, si existe, cuando $a = 1$.

(16) Aplicando las propiedades de los determinantes (y sin desarrollar, ni aplicar la regla de Sarrus) responde razonadamente a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cómo varía el determinante de una matriz de orden 3 si se multiplica cada elemento a_{ij} de la matriz por 2^{i-j} ?
 b) La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, ¿tiene inversa?

(17) Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcula razonadamente las raíces de la

ecuación polinómica: $p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ Enuncia las propiedades utilizadas.

(18) Dada la siguiente matriz de orden n : $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 9 \end{pmatrix}$ se pide:

- a) Calcular el determinante de la matriz A_2 .
 b) Calcular el determinante de la matriz A_3 .
 c) Calcular el determinante de la matriz A_5 .

(19) Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -a \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

- a) Determina el rango de M según los valores del parámetro a .
 b) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M . Calcula dicha inversa para $a = 2$.

(20) Halla una matriz X tal que $A^{-1} \cdot X \cdot A = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(21) Calcula los valores de b para los cuales la matriz A tiene inversa. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & b \\ b+1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(22) Resuelve la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$

(23) Obtén razonadamente:

- a) El determinante de una matriz cuadrada B de dos filas, que tiene matriz inversa y verifica la ecuación $B^2 = B$.
 b) El determinante de una matriz cuadrada A que tiene tres filas y que verifica la ecuación:

$$A^2 - 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sabiendo que el determinante de } A \text{ es positivo.}$$

- (24) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y se sabe que T es una matriz cuadrada de tres filas y tres columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$. Calcula razonadamente los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

a) $\frac{1}{2} T$

b) M^4

c) TM^3T^{-1}

- (25) Dadas las matrices $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & 4 & 3 \\ x+2 & 6 & 2 \\ x+3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B(y) = \begin{pmatrix} y+1 & 4 & 3 \\ y+2 & 6 & 2 \\ y+3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. a) Obtén razonadamente el valor de x para que el determinante de la matriz $A(x)$ sea 6. b) Calcula razonadamente el determinante de la matriz $2A(x)$. c) Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene matriz inversa para ningún valor real de y .

- (26) Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}$ donde m es un parámetro real. a) Obtén razonadamente el rango o característica de la matriz A en función de los valores de m . b) Explica por qué es invertible la matriz A cuando $m = 1$. c) Obtén razonadamente la matriz inversa A^{-1} de A cuando $m = 1$, indicando los distintos pasos para la obtención de A^{-1} . Comprueba que los productos AA^{-1} y $A^{-1}A$ dan la matriz identidad.

- (27) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ calcula razonadamente el valor de los determinantes siguientes escribiendo todos los pasos utilizados.

a) $|A+B|$ y $\frac{1}{2}|(A+B)^{-1}|$

b) $|(A+B)^{-1}A|$ y $|A^{-1} \cdot (A+B)|$

c) $|2ABA^{-1}|$ y $|A^3B^{-1}|$

- (28) Dada la matriz $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a-2 \\ 4 & 3 & 2 \\ a & a & -6 \end{pmatrix}$ a) Calcula, en función de a , el determinante de la matriz $A(a)$, escribiendo los cálculos necesarios. b) Determina, razonadamente, los números reales a , para los que el determinante de la matriz inversa $A(a)$ es igual a $\frac{1}{66}$.

- (29) Dadas las matrices cuadradas $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 18 & 48 & 12 \\ 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a) Justifica que la matriz A tiene inversa y obtener razonadamente la matriz inversa de A , incluyendo en la respuesta todos los pasos.
b) Calcula, razonadamente, el determinante de la matriz $3A^{-1}$, incluyendo en la respuesta todos los pasos realizados.
c) Obtén razonadamente los valores reales x, y, z que verifican la ecuación:

$$x \cdot I + y \cdot A + z \cdot A^2 = B.$$

- (30) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Calcula $(A - I)^2 \cdot (A - 5I)$ donde I es la matriz identidad.
b) Obtén la matriz traspuesta de la matriz A .
c) Razona si existe la matriz inversa de A y, en su caso, calcúlala.

- (31) Tenemos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

- a) Justifica que existe la matriz inversa de A , calcúlala y calcula el determinante de A^{-1} .
b) Calcula el determinante de la matriz B , $B = A(A + 4 \cdot I)$.
c) Determina los números reales x, y, z, t que cumplen: $A^{-1} = x \cdot A + y \cdot I$, $A^2 = z \cdot A + t \cdot I$.

CAPÍTULO 3: SISTEMAS DE ECUACIONES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

3. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

1. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los sistemas siguientes:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} -x + 2y - 5z = -3 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -5x + 2y - 5z = -4 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z = -14 \\ -x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 6z = -22 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 2x + 2y + 3z = -9 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases} \end{array}$$

Solución: a) $(1/4, -3/4, 1/4)$; b) $(-1, 2, -3)$; c) $(1/2, -3/2, 1)$; d) **Sistema indeterminado** $(3/2 - z/2, -7/2 + z/2, z)$

4. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 6x - 2,5y - 1,5z = 210 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Resuelve el sistema anterior y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

Solución: **Comprobado, 50 correctas, 30 erróneas y 10 en blanco.**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} -x + 2y - 5z = -3 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -5x + 2y - 5z = -4 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z = -14 \\ -x + 3y - z = 10 \\ 2x - y + 6z = -22 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ 2x + 6y - z = -9 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = 5 \end{cases} \end{array}$$

Solución: a) $(1/4, -3/4, 1/4)$; b) $(-1, 2, -3)$; c) $(1/2, -3/2, 1)$; d) **Sistema indeterminado** $(3/2 - z/2, -7/2 + z/2, z)$

2. – Dados los sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} -4x + 3y = -5 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x - y = -4y \\ 5 + 2y = 3x \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} y + 2z = -3 \\ 2x + y = 3 \\ x + 3y - 4z = 3 \end{cases} \end{array}$$

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer.

b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

Solución: a) $x = 2, y = 1$; b) $x = -13, y = -22$; c) $x = 2, y = -1, z = -1$.

3. – Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} -2x + y = -3 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} -4x - 6y = -6 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 9x - 6y = 6 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases} \end{array}$$

Solución: a) **Compatible, indeterminado**; b) **Compatible determinado**: $x = 3/2, y = 0$; c) **Incompatible**.

4. – Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible, la Regla de Cramer:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} -x - 2y + 3z = 6 \\ 3x - 4y + 2z = 7 \\ 4x + y - z = -1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y + z = -29 \\ 3x + y - 5z = 21 \\ -x + 2y - 4z = 32 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \end{array}$$

Solución: a) $x = 1/3, y = -2/3, z = 5/3$; b) $x = -2, y = 7, z = -4$; c) $x = 1, y = 1, z = -1$; d) $x = -4, y = 6, z = 1$.

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 4x - y + m^2z = m - 1 \end{cases} \end{array}$$

Solución:

a) Si $a = -8$ es compatible indeterminado. En caso contrario es compatible determinado.

Para $a = -8$ la solución es $(29 + 12z, -19 + 20z, z)$. En otro caso $(232 - 29a, 19a - 152, 0) / (8 - a)$

b) Si $m = 1$ compatible indeterminado. Si $m = -1$ incompatible. En otro caso compatible indeterminado.

Para $m = 1$ la solución es $(2z/7, z/7, z)$. Para m distinto de 1 y -1,

$$\frac{1}{7m^2 - 7} (2 - 2m, 1 - m, 7m - 7)$$

6. – Dado el sistema

- a) Estudia su compatibilidad según los valores de α .

incompatible; Si $a = -1$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $a = -1$ las soluciones son: $x = -7 + \alpha$, $y = 2$, $z = \alpha$, con $\alpha \in \mathcal{R}$.

7. – Dadas las ecuaciones:

- a) Añade una ecuación para que el sistema resulte ser incompatible.

Solución abierta: Por ejemplo: a) $2x - 3y + z = 0$; b) $x = 7$.

8. – Dado el sistema de ecuaciones

- a) Discute y resuelve, cuando sea posible.

i) una solución ii) muchas soluciones

iii) no tenga solución

Solución: a) Sistema compatible indeterminado. Las soluciones son: $x = -7 + 8\alpha$, $y = 4 - 5\alpha$, $z = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) i) Solución abierta, por ejemplo: $z = 1$, siendo entonces la solución única: $x = 1, y = -1, z = 1$;

ii) Solución abierta, por ejemplo: $3x + 5y + z = 9$, que es combinación lineal de las ecuaciones;

iii) Solución abierta, por ejemplo: $3x + 5y + z = 0$, que es combinación lineal de las ecuaciones excepto el término independiente.

9. – Discute y resuelve cuando sea posible los siguientes sistemas homogéneos:

a)
$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solución:

a) Compatible determinado. Solución única $(0, 0, 0)$.

b) Compatible indeterminado. $(-5y/2, y, 2y)$

c) **Compatible determinado. Solución única $(0, 0, 0)$.**

10. – Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Calcula cada uno de los tres productos $A \cdot B$, $E \cdot D$, $D \cdot E$.

b) Si $C - 2AB = -D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m . ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

Solución: a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix}$, $E \cdot D = (19x)$, $D \cdot E = \begin{pmatrix} 3x & 12x \\ 4x & 16x \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+2my=m \end{cases}$; Si m es distinto de 3, el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m = 3$, es sistema es incompatible.

11. – Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

- a) Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a .
 b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?
 c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

Solución: a) $\begin{cases} y + z = 0 \\ y + z = 2a \\ x + y + z = 2a \end{cases}$; **b) El sistema es incompatible si a es distinto de 0, y compatible**

indeterminado si $a = 0$; Para ningún valor de a , tiene solución única; c) Para $a = 0$, la solución es: $x = 0$, $y = -\alpha$, $z = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, luego una solución podría ser: $x = 0$, $y = -1$, $z = 1$.

12. – El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 €. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución: 100 billetes de 50 €, 75 billetes de 20 € y 50 billetes de 10 €.

13. – Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en ésta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en ésta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1 550 euros.

Solución: 25 billetes de 10 €, 15 de 20 € y 20 de 50 €.

14. – La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. ¿De qué número se trata?

Solución: Número 369.

15. – Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener por lo menos 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quintuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

Solución: 38 aciertos, 18 fallos y 4 preguntas en blanco.

16. – En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- Alimento Migato: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura
- Alimento Catomeal: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura
- Alimento Comecat: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Solución: Migato: 62 %; Catomeal: 22 %; Comecat 16 %.

17. – Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la edad de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.

Solución: Padre 32, madre 30, hija 8.

18. – Una persona invirtió 72 000 € repartidos en tres empresas y obtuvo 5 520 € de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10 % en la empresa A, el 8 % en la empresa B y el 5 % en la empresa C.

Solución: En la empresa A invirtió 6 000 €, en la B, 54 000 €, y en la C, 12 000 €.

19. – Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

Solución: De la clase A, 50 kg; de la B, 20 kg; y de la C, 10 kg.

20. – Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución: La madre tiene 44 años, el hijo mayor, 18 años y el menor, 16 años.

21. – En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además, el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x , y , z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.
 b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?
 c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros 2.

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - m = -56 \\ 3x + mz = 28m \end{cases}$$

Solución: a) **. El sistema es compatible indeterminado para $m = 3$ y es incompatible para cualquier otro valor de m .**

b) El precio del anticaspa debe ser necesariamente 3. Si no, no se puede resolver.

c) No es posible resolverlo. El sistema es incompatible.

22. – En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1,20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1,18 euros/litro, pero ha olvidado el precio en C. (Supongamos que son " m " euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46,80 € al gasto en C.
- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.
- el gasto de litros en A superó al de B en 12,60 euros.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de " m ") para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.
 b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de " m ". ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

Solución: a) $\begin{cases} 1.2x + 1.18y = mz + 46.80 \\ y = z \\ 1.2x = 1.18y + 12.60 \end{cases}$ **siendo x el número de litros de la gasolinera A, y el de B y z el de C;**

b) Si $m \neq 2.36$ el sistema es compatible determinado, y si $m = 2.36$, el sistema es incompatible.

23. – En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

- a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?
 b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

Solución: a) 6€; **b) No podemos saber cuánto vale un café.**

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2z + 2y = 5 \\ 2y - x + z = 11 \end{cases}$$

1.- Su matriz de coeficientes es:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: d)

2.- Su matriz ampliada es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right)$

Solución: d)

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{array}\right)$

Solución: d)

4.- El sistema es:

a) compatible determinado b) compatible indeterminado c) incompatible d) tiene tres soluciones

Solución: a)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y = -4y \\ 5 + 2y + z = 3x \end{cases}$$

5.- Su forma matricial es:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Solución: b)

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $-3x + 2y + z = 7$

Solución: b)

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $-3x + 2y + z = 7$

Solución: c)

8.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible

a) $3y + 2x = 7$ b) $x - y = 7$ c) $-x + 5y + z = -5$ d) $x + y + z = 7$

Solución: a)

9.- Indica la afirmación que es correcta:

- a) Los sistemas homogéneos tienen siempre infinitas soluciones.
- b) Dos sistemas son equivalentes si coincide alguna de sus soluciones.
- c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.
- d) Todos los sistemas se pueden resolver por el método de Cramer.

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

<http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examen selectividad A4.pdf>

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

- (1) Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + z = 11 \end{cases}$$
 a) Obtén su matriz de coeficientes. b) Calcula el

determinante de la matriz anterior. c) Sin resolver el sistema, razonar si tendrá solución única.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; b) 6; c) Sí.

- (2) En el primer curso de un centro de la Universidad de Oviedo se han matriculado 352 alumnos divididos en tres titulaciones distintas. En la tercera titulación hay la tercera parte de alumnos que en la primera, y la diferencia de alumnos que hay entre la primera titulación y la segunda es inferior en dos alumnos al doble de los alumnos que hay en la tercera.

a) Establece un sistema de ecuaciones con las condiciones del problema, en función del número de alumnos en cada titulación, y obtenga el número de alumnos que hay en cada titulación. b) Calcula el determinante de la matriz del sistema.

Solución: a) Si llamamos x al número de alumnos en la primera titulación, y al número de alumnos en la segunda titulación, z al número de alumnos en la tercera titulación, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 352 \\ z = \frac{1}{3}x \\ x - y = 2z - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x + y = 352 \\ \frac{1}{3}x - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{3}x = 350 \Rightarrow x = 210, y = 72, z = 70;$$

b) El sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 352 \\ \frac{1}{3}x - z = 0 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 352 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ por lo que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

- (3) En un partido de baloncesto femenino, el equipo de la Universidad de Oviedo ganó al de otra universidad española con un marcador 64 a 48. El marcador obtenido por el equipo ganador se consiguió mediante canastas de dos puntos, triples (canastas de tres puntos) y tiros libres (canastas de un punto). El número de tiros libres fue dos más que cinco veces el número de triples. Además, el número de canastas de dos puntos fue dos más que el número de tiros libres.

a) Plantea el sistema de ecuaciones resultante de lo anterior. b) Escribe la matriz ampliada del sistema obtenido en a). c) ¿Cuántas canastas de cada tipo metió el equipo de la Universidad de Oviedo?

Solución: a) Si llamamos x al número de canastas de 2, y al número de canastas de 3, z al número de canastas de

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 64 \\ 1, \text{ el sistema es; } z = 5y + 2 \\ x = z + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $x = 19$ canastas dobles, $y = 3$ canastas triples y $z = 17$ tiros libres.

- (4) Cada acción de BBA ha dado una ganancia de 6 euros y cada acción de NKO ha dado una ganancia de m euros. Un inversor había comprado acciones de ambos tipos, lo que le supuso una ganancia total de 800 euros, pero está arrepentido de su inversión, porque si hubiese comprado la mitad de acciones de BBA y el doble de NKO, su ganancia total habría sido de 1 150 euros. a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de acciones compradas de cada tipo. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema, ¿existe algún valor de m para el que el sistema tenga más de una solución? b) Si la ganancia por cada acción de NKO fue de 5 euros, ¿cuántas acciones de NKO había comprado?

Solución: a) Si llamamos x al número de acciones de BBA, y al número de acciones de NKO, el sistema es

$$\begin{cases} 6x + my = 800 \\ 6\frac{x}{2} + m2y = 1150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + my = 800 \\ 3x + 2my = 1150 \end{cases}; \text{ el sistema no puede tener más de una solución porque la segunda}$$

ecuación no es proporcional a la primera, al ser el coeficiente de x en la segunda ecuación la mitad que en la primera y el coeficiente de y el doble; b) El sistema sería:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 800 \\ 3x + 10y = 1150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 5y = 800 \\ 6x + 20y = 2300 \end{cases} \Rightarrow 15y = 1500 \Rightarrow y = 100$$

- (5) Una tienda vende bolsas de caramelos a 2 euros cada una y bolsas de gominolas a 4 euros cada una. La recaudación de un determinado día por estos dos conceptos ha ascendido a 200 euros y se sabe que el número de bolsas de caramelos que han vendido ese día es m veces el número de bolsas de gominolas.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de bolsas de cada tipo que se han vendido ese día. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que se hayan vendido el doble de bolsas de caramelos que de gominolas? b) Suponiendo que se han vendido el triple de bolsas de caramelos que de gominolas, ¿cuántas bolsas de gominolas se han vendido?

$$\begin{cases} 2x + 4y = 200 \\ x = my \end{cases}$$

Solución: a) **El sistema es incompatible para $m = -2$ y es compatible determinado en otro caso. Por tanto, sí, es posible pues para $m = 2$ es correcto. b) 20 bolsas de gominolas.**

- (6) Un tren realiza un viaje directo entre dos capitales. El viaje lo realiza por dos tipos de vías, por la primera circula siempre a 100 Km/h y por la segunda circula siempre a m Km/h. El recorrido total del viaje es de 1240 Km y la duración del mismo es de 11 horas.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de horas que circula por cada tipo de vía. Basándote en un estudio de la compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía sea también de 100 Km/h? b) Suponiendo que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía es 120 Km/h, ¿cuánto tiempo ha estado circulando por el primer tipo de vía?

Solución: a) Si llamamos x al tiempo que circula por la primera vía, y al tiempo que circula por la segunda vía, el

$$\text{sistema es } \begin{cases} 100x + my = 1240 \\ x + y = 11 \end{cases}; \text{ No puede ser que la velocidad a la que circula por el segundo tipo de vía}$$

sea de 100 Km/h, ya que entonces para que el sistema fuera compatible la primera ecuación tendría que ser 100 veces la segunda, lo que no cumple el término independiente; b) El sistema sería:

$$\begin{cases} 100x + 120y = 1240 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 6y = 62 \\ y = 11 - x \end{cases} \Rightarrow 5x + 66 - 6x = 62 \Rightarrow x = 4 \text{ horas}$$

- (7) Una academia de idiomas da clases de español a un total de m alumnos, entre los de nivel básico y los de nivel avanzado, con los que recauda 3 000 euros. Los alumnos de nivel básico pagan m euros al mes, mientras que los de nivel avanzado pagan el doble. a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de alumnos de cada tipo en las clases de español de la academia. Basándote en un estudio de compatibilidad del sistema anterior, ¿es posible que los alumnos de nivel básico paguen 40 euros al mes? b) Si los alumnos de nivel básico pagan 50 euros al mes, ¿cuántos alumnos de nivel avanzado hay?

Solución: a) Si llamamos x al número de alumnos de nivel básico, y al número de alumnos de nivel avanzado, el

$$\text{sistema es } \begin{cases} mx + 2my = 3000 \\ x + y = m \end{cases}; \text{ el sistema no puede tener más de una solución porque la primera ecuación no}$$

es proporcional a la segunda, al ser el coeficiente de x en la primera ecuación m veces el de la primera y el coeficiente de y 2 m veces; b) Si $m = 50$, el sistema queda

$$\begin{cases} 50x + 100y = 3000 \\ x + y = 50 \end{cases} \Rightarrow x = 50 - y, 50(50 - y) + 100y = 2500 + 50y = 3000 \Rightarrow y = 10 \text{ €}$$

(8) Juan y Luis son dos amigos que en total tienen 10 hijos. Un tercer amigo, Javier, tiene m hijos más que Juan y m veces los de Luis.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de hijos de Juan y Luis.

¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única?

b) Si Javier tiene el doble de hijos que Luis, ¿cuántos hijos tiene Luis?

Solución: a) Si llamamos x al número de hijos de Juan, y y al número de hijos de Luis, el sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + m = m y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ -x + m y = m \end{cases}; \text{ se cumple que } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m + 1, \text{ luego el sistema tiene solución única si } m \text{ es distinto de } -1. \text{ Para } m = -1 \text{ el sistema es incompatible.}$$

b) Si $m = 2$, el sistema queda:
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ -x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 10 - y, y - 10 + 2y = 2 \Rightarrow y = 4 \text{ hijos}$$

Luis, 4, y Javier tiene 8 hijos. Juan tiene 6 hijos.

(9) Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ x + 1 = y \end{cases}$$

Solución: a) b) 7 hombres, 8 mujeres y 5 niños

(10) Considere el sistema
$$\begin{cases} ax - ay + z = 2 \\ 3x + 2y - 2z = a \\ -ax + 3y - z = 2 \end{cases}$$

a) Estudie su compatibilidad según los distintos valores del número real a .

b) Resuélvalo, si es posible, en el caso $a = 1$.

Solución: a) Se cumple que:

$$\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -a & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2a - 2a^2 + 9 + 2a + 6a - 3a = -2a^2 + 3a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 72}}{-4} = 3, -\frac{3}{2},$$

Luego si $a \neq 3, -\frac{3}{2}$ el sistema tiene solución única. Si $a = 3$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 27 + 18 + 12 - 27 + 18 = 60 \neq 0, \text{ luego el sistema es incompatible. Si } a = -\frac{3}{2}:$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 3 & 2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 - \frac{27}{8} + 18 + 12 - 6 - \frac{27}{4} - 9 = 9 - \frac{81}{8} \neq 0, \text{ luego el sistema es incompatible.}$$

b) Si $a = 1$ se cumple que:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ 3 & 2 & -2 & : & 1 \\ -1 & 3 & -1 & : & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 5 & -5 & : & -5 \\ 0 & 2 & 0 & : & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 5y - 5z = -5 \\ 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 2, 2 - z = -1, x = 2 + y - z \Rightarrow y = 2, z = 3, x = 1$$

(11) Dado el sistema
$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + (a-1)z = 1+a \\ (a+1)y - (a+1)z = 2 \\ x + y + az = a \end{cases}$$

- a) Estudie su compatibilidad según los valores de a .
b) Resuélvalo cuando $a = 0$.

Solución: a) Se cumple que:
$$\begin{vmatrix} a-1 & 2 & a-1 \\ 0 & a+1 & -a-1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - a - 2a - 2 = a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2, -1$$

Luego si $a \neq 2, -1$ el sistema tiene solución única.

Si $a = 2$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 9 - 2 = -1 \neq 0$$
, luego el sistema es incompatible.

Si $a = -1$ la segunda ecuación queda $0=2$, luego el sistema es incompatible;

b) Si $a = 0$ el sistema queda:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ y - z = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x, z = y - 2 = -x - 2, -x - 2 - x + x + 2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = -\frac{5}{2}$$

(12) La matriz ampliada asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales es: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

- a) Obtener las ecuaciones del sistema.
b) Calcular el rango de la matriz formada por los coeficientes del sistema.
c) Sin resolver el sistema, deducir razonadamente si admite soluciones y en qué número.

Solución: a) El sistema es
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y + 2z = 5 \end{cases};$$

b) Se cumple que:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 2 - 1 - 4 - 4 = -13 \neq 0$$
, luego el rango es 3;

c) Como el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo, el sistema tiene una única solución.

(13) La matriz de los coeficientes de un sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 4a & 1 \end{pmatrix}$ y la de términos independientes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix}$

- a) ¿Para qué valor o valores de a el sistema no tiene solución?
b) Para cierto valor de a un individuo encontró 2 soluciones del sistema. ¿Cuánto valía a ? ¿Tenía más soluciones el sistema?
c) Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga solución única y, para dicho valor, resuélvelo.

Solución: a) No hay solución si $a = 1$

b) Tendría que ser $a = 1/2$. Y sí, hay más soluciones (de hecho hay infinitas).

c) Valdría cualquier a que no fuera 1 ni $1/2$. Por ejemplo para $a = 0$ obtenemos $(1, 0, 0)$.

(14) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.

- Calcular las matrices $(A \cdot B) + C$ y $3D$
- Sabiendo que $(AB) + C = 3D$, plantear un sistema de ecuaciones para encontrar los valores de x, y, z .
- Estudiar la compatibilidad del sistema ¿Cuántas soluciones tiene?
- Encontrar, si es posible, una solución.

Solución: a) $AB + C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix};$

b) $AB + C = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix} = 3D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases};$

c) Se cumple que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 2 - 1 - 2 + 2 = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 6 - 3 - 2 = 0$ luego el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2 y el sistema

es compatible indeterminado luego tiene infinitas soluciones;

d) Si sumamos la primera ecuación y la tercera, obtenemos $2y = 4 \Rightarrow y = 2$. Sustituyéndolo en la primera, obtenemos $x + 2 + z = 3 \Rightarrow z = 1 - x$. Esto también cumple la segunda ecuación, luego la solución es: $(x, 2, 1-x)$

(15) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde a es desconocido.

- Sea el sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es A y de términos independientes B . ¿Puede para algún valor de a no tener solución este sistema? ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución única?
- Si la matriz de coeficientes es A pero la de términos independientes es C , ¿es posible que para algún valor de a el sistema no tenga solución? Encuentra un valor de a para el que el sistema tenga más de una solución y calcula dos de ellas.

Solución: a) Se cumple que: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & a \end{vmatrix} = -a + 12 + 3 + 3 - 6 - 2a = 12 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 4$. Entonces si $a \neq 4$ el

determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y el sistema tiene solución única. Si $a = 4$,

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$, $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 24 - 12 - 8 = 0$ luego el rango de la matriz de coeficientes y de la

ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado, luego no hay ningún valor de a para el que el sistema no tiene solución.

b) No es posible, ya que al ser homogéneo siempre tiene solución. Si $a = 4$ el sistema tiene más de una solución como consecuencia del apartado anterior, una de ellas es $(0, 0, 0)$. Para hallar otra hacemos $z = 1$

en las dos primeras ecuaciones: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + y = -2 \end{cases} \Rightarrow 3y = -1, x = -2 - y \Rightarrow y = -\frac{1}{3}, x = -2 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$, luego otra

solución es $\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$

(16) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}$, $D = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, $E = (3 \ m)$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A \cdot B$, $D \cdot E$, $E \cdot B$.

b) Si $AB + C = D$ plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m . ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

Solución: a) $AB = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ my \end{pmatrix}$; $DE = \begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix} (3 \ m) = \begin{pmatrix} 30 & 10m \\ 30m & 10m^2 \end{pmatrix}$; $EB = (3 \ m) \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = (15 + my)$;

b) $AB + C = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ my \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 10x + my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y = 10 \\ 10x + my = 10m \end{cases}$; $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & m \end{vmatrix} = 5m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Entonces si $m \neq 4$ el sistema tiene solución única al ser el determinante de la matriz de coeficientes no nulo. Si $m = 4$ la segunda ecuación es el doble de la primera luego el sistema representa una recta y tiene infinitas soluciones, luego la solución no es siempre única.

(17) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$

a) Si $AB - C = D$, plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de a .

b) ¿Para qué valores de a el sistema tiene solución? ¿Es siempre única? Encuentra una solución para $a = 1$ con $y \neq 1$

Solución: a) $\begin{cases} ax = 6 - ay \\ y - ay = 1 - a \end{cases}$

b) **Sí, descartamos $a = 0$.**

c) **Sí, descartamos $a = 1$ (y obviamente también $a = 0$).**

d) **Sí, $a = 1$.**

(18) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $AB = 2C - D$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) donde a es cierto valor desconocido.

b) Si se supiera que el sistema tiene solución, ¿podríamos descartar algún valor de a ?

c) Si se supiera que el sistema tiene solución única, ¿podríamos descartar algún valor de a ?

d) ¿Hay algún valor de a para el que el sistema tenga más de una solución?

Solución: a) $AB + D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + y + z \\ x + ay + z \\ x + z \end{pmatrix} = 2C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + y + z = 2 \\ x + ay + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$;

b) **Se cumple que:** $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 1 - a - 1 = a^2 - a = a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, 1$.

Entonces si $a \neq 0, 1$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y el sistema tiene solución única. Si $a = 0$, las dos últimas ecuaciones quedan $\begin{cases} x + z = 2 \\ x + z = 0 \end{cases}$, luego el sistema no tiene solución y se

descarta este valor de a ; Si $a = 1$, las dos primeras ecuaciones son iguales, luego se quita la primera y como $x + z = 0$, sustituyendo en la segunda queda $y = 2$, luego el sistema tiene infinitas soluciones:

$(-z, 2, z)$ y no se descarta este valor;

c) Se descarta $a = 1$ como vimos en el apartado anterior;

d) $a = 1$, como vimos en el apartado b)

(19) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

a) Sabiendo que $(AB - C)D = 2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a .

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

c) Para $a = 0$ encuentra una solución del sistema con $z \neq 0$

$$(AB - C)D = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -y & -z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Solución: a)

$$= \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = 2E = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ y+z=2a \\ x+y+z=2a \end{cases}$$

b) No, ya que el determinante de la matriz de coeficientes es 0 al tener las dos primeras filas iguales;

c) El sistema queda $\begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$. Si $z=1$, obtenemos $y=-z=-1$, $x=-y-z=0$, luego una solución es $(0, -1, 1)$

(20) Halla todas las soluciones de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas del que se conoce que $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$ son soluciones y el rango de la matriz de los coeficientes es mayor o igual que uno.

Solución: Como $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ son soluciones, tenemos que $(0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$, $(0,0,3) - (1,0,0) = (-1,0,3)$ son soluciones del homogéneo asociado y no habrá solución independiente a éstas ya que el rango de la matriz de los coeficientes sería 0, luego las soluciones del homogéneo asociado serían: $\lambda(-1,2,0) + \mu(-1,0,3) = (-\lambda - \mu, 2\lambda, 3\mu)$ y la solución del sistema:

$$(-\lambda - \mu, 2\lambda, 3\mu) + (1,0,0) = (-\lambda - \mu + 1, 2\lambda, 3\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

CAPÍTULO 4: PROGRAMACIÓN LINEAL

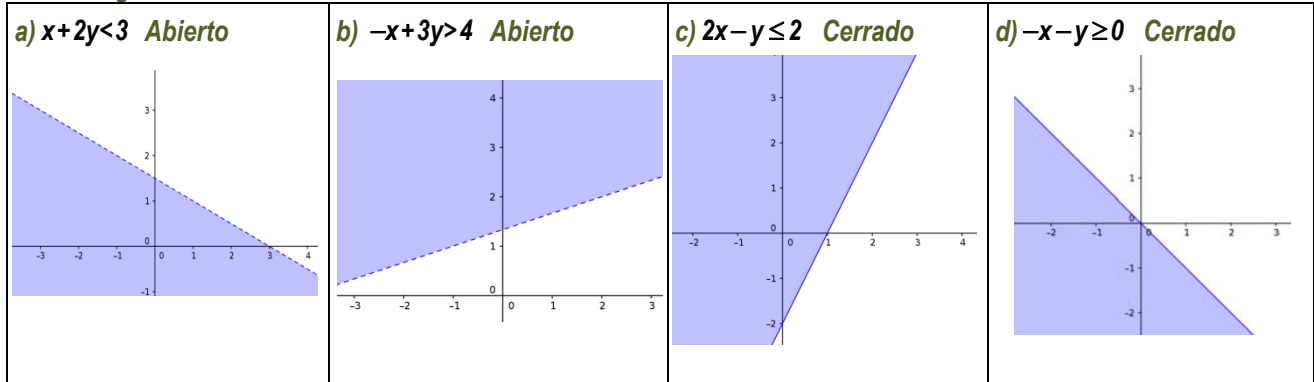
ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. INECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

1. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes: $x + 2y < 3$ $-x + 3y > 4$ $2x - y \leq -2$ $-x - y \geq 0$

Indica en cada caso si el recinto solución es abierto o cerrado.

Solución gráfica:



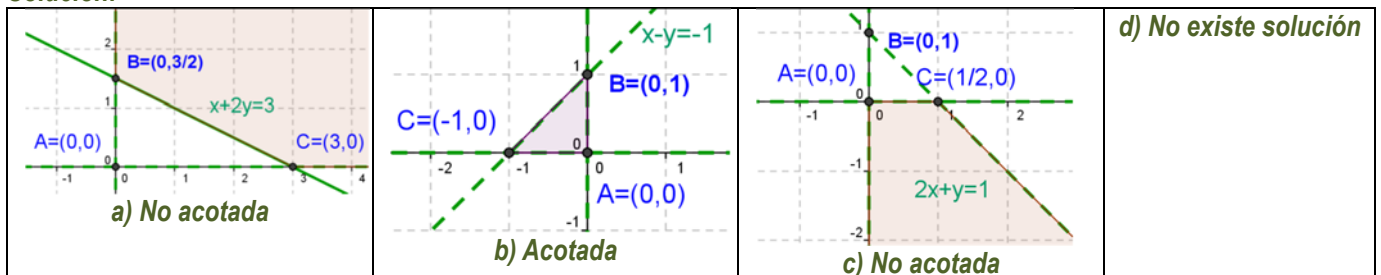
2. SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES

2. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ x - y > -1 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$	d) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$
--	---	---	--

Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

Solución:



3. PROGRAMACIÓN LINEAL:

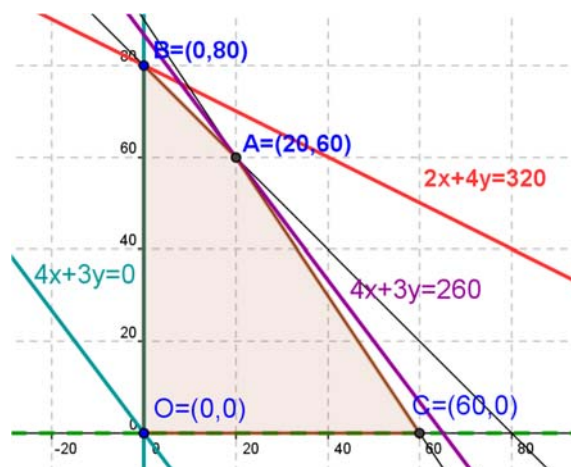
3. Con la misma región factible del ejemplo, optimiza las siguientes funciones objetivo:

a) $z = 2x + 4y \rightarrow \text{Máx}$

b) $z = 4x + 3y \rightarrow \text{Mín}$

c) $z = 4x + 3y \rightarrow \text{Máx}$

Solución:



Región factible OBAC, $O(0,0)$, $A(20,60)$, $B(0,80)$, $C(60,0)$.

a) **Max. 320 en B (0, 80);** b) **Min. 0 en O = (0, 0);** c) **Max. 260 en A.**

4. Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

f.o. $f(x, y) = 2x + 3y$

s.a. $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

f.o. $f(x, y) = x + 3y$

s.a. $\begin{cases} 2x + 5y \leq 300 \\ x + y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 15 \end{cases}$

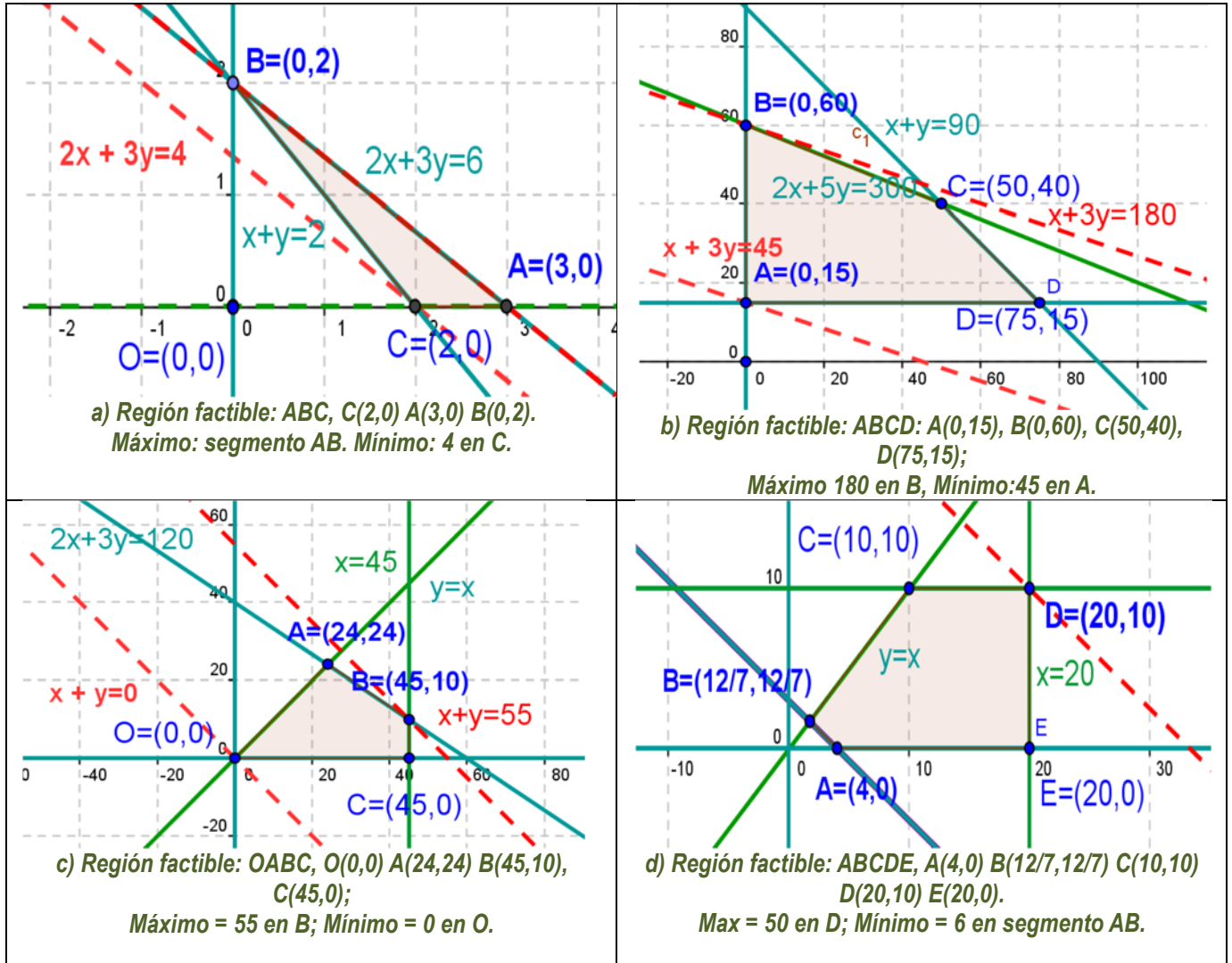
f.o. $z = x + y$

s.a. $\begin{cases} 2x + 3y \leq 120 \\ x \geq y \\ 0 \leq x \leq 45 \\ y \geq 0 \end{cases}$

f.o. $z = 1,5x + 2y$

s.a. $\begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ x \geq y \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$

Solución:



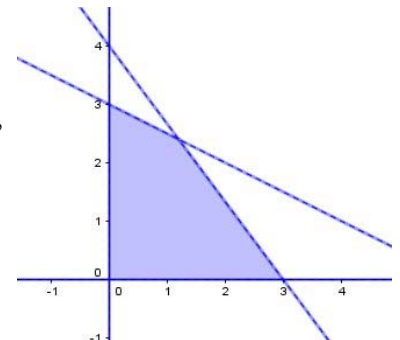
4. PROBLEMAS RESUELTOS

5. Dibuja el recinto que cumple las restricciones: $\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 4x + 3y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ y analiza si los puntos (0,

2), (3,0), (1,1) y (5,6) al conjunto de soluciones del sistema anterior.

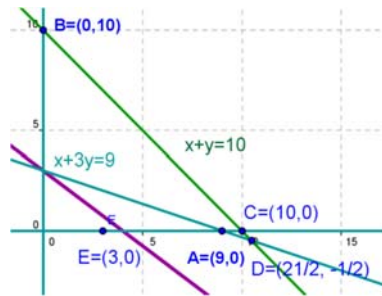
Solución gráfica:

(0, 2), (3, 0) y (1, 1) sí. (5, 6) no.



6. Dibuja el recinto que cumple las restricciones: $\begin{cases} x + 3y \leq 9 \\ x + y \geq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

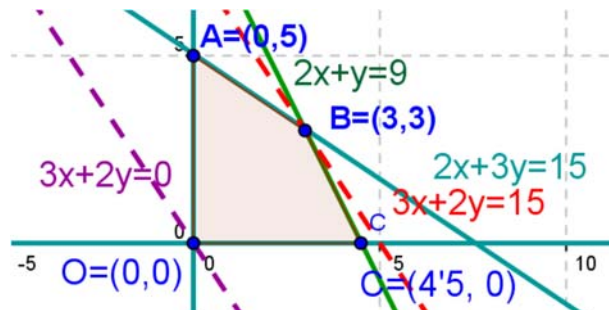
Solución: 6.- No existe solución.



7. Maximiza la función $f(x,y) = 3x + 2y$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases} 2x + 3y \leq 15 \\ 2x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$ y da seis puntos que sean solución del

sistema anterior

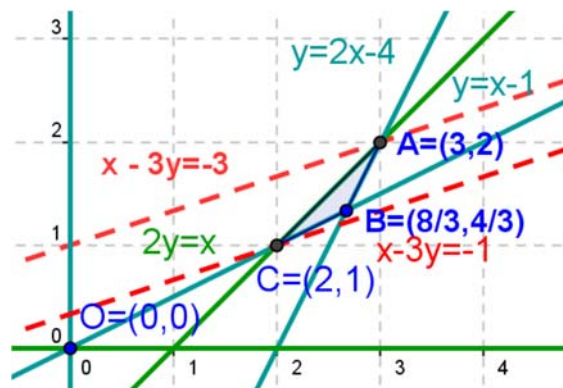
Solución:



Región factible: OABC, O(0,0), A(0,5), B(3,3), C(4.5,0); **Máximo** = 15 en B; **Mínimo** = 0 en O.

8. Sea S la región del plano definida por $y \geq 2x - 4$, $y \leq x - 1$, $2y \geq x$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. a) Representa la región S y calcula las coordenadas de sus vértices. b) Obtén los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x - 3y$ en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:



a) $S: ABC$, A(3,2) B(8/3, 4/3) C(2,1).

b) Si $f(x,y) = x - 3y$, $\text{Max. } f(C) = -1$; $\text{Min. } f(A) = -3$;

9. Se consideran la función $f(x, y) = 5x - 2y$ y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

$$x - 2y \leq 0 \quad x + y \leq 6 \quad x \geq 0 \quad y \leq 3$$

- a) Representa la región S . b) Calcula las coordenadas de los vértices de la región S y obtén los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan.

Solución gráfica:

$$f(x, y) = 5x - 2y$$

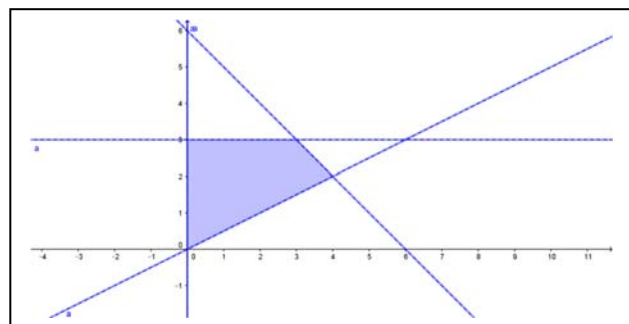
$$b) A = (0, 0), B = (6, 0), C = (3, 3).$$

$$f(A) = f(0, 0) = 0$$

$$f(B) = f(6, 0) = 30$$

$$f(C) = f(3, 3) = 9$$

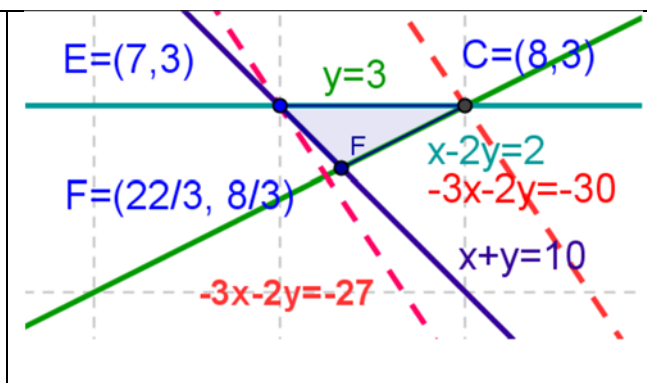
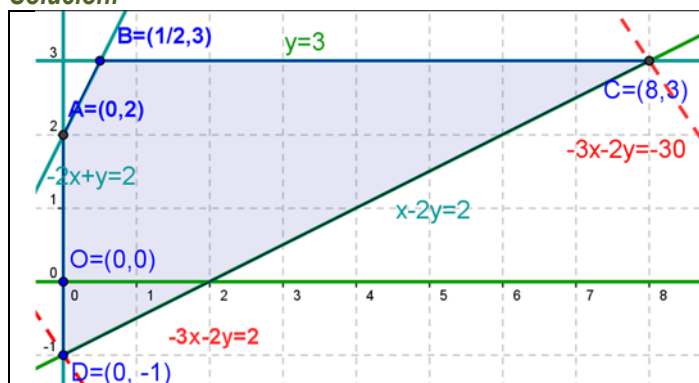
B es máximo y A es mínimo



10. Minimiza $z = -3x - 2y$ sujeta a $-2x + y \leq 2 \quad x - 2y \leq 2 \quad x \geq 0 \quad y \leq 3$

- a) Mediante la resolución gráfica del problema, discute si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.
b) Si se añade la restricción: $x + y \geq 10$, discute si existe solución óptima y en caso afirmativo calcúlala.

Solución:



a) $S: ABCD, A(0,2), B(1/2,3), C(8,3), D(0,-1); \text{Max} = 2 \text{ en } D, \text{Min.} = -30 \text{ en } C.$

b) Si añadimos la otra restricción, $S: ECF, E(7,3), C(8,3), F(22/3, 8/3); \text{Max} = -27 \text{ en } E. \text{Min} = -30 \text{ en } C.$

11. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1 600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

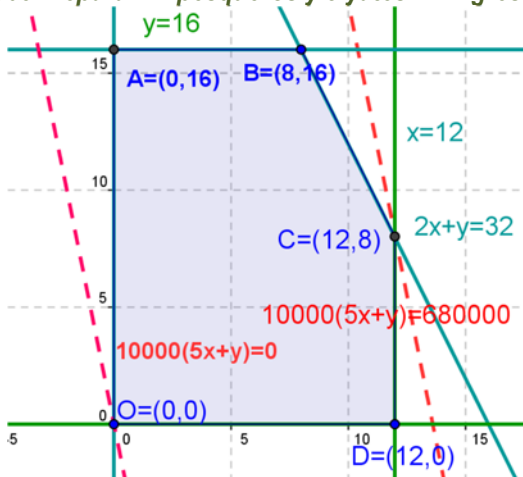
Solución: Sea $x =$ número de pesqueros, $y =$ número de yates.

Condiciones: $0 \leq x \leq 12; 0 \leq y \leq 16; 100x + 50y \leq 1600;$

Función objetivo: $f(x, y) = 10000(5x + y);$

Región factible: $OABCD, O(0, 0), A(0, 16), B(8, 16), C(12, 8), D(12, 0). \text{Max} = f(C).$

Para maximizar el ingreso se deben reparar 12 pesqueros y 8 yates. El ingreso máximo es de 680 000 euros.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $x + y - 7 \leq 0$

b) $2x - y + 3 \geq 0$

c) $y \geq 3$

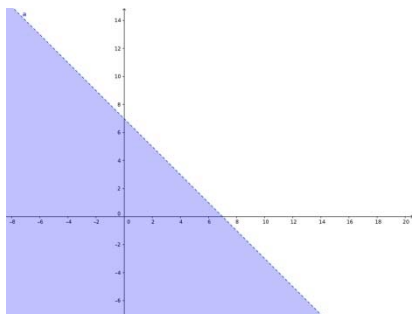
d) $x \leq 5$

e) $x \geq 0$

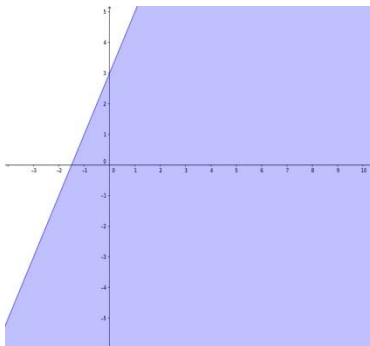
f) $y \leq 0$

Solución gráfica:

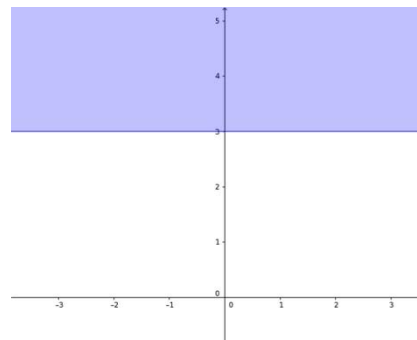
a)



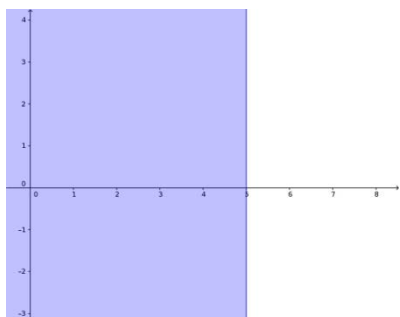
b)



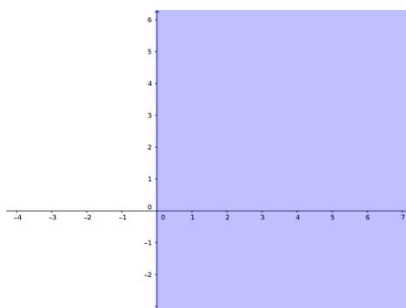
c)



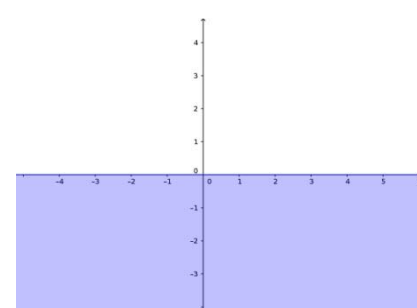
d)



e)



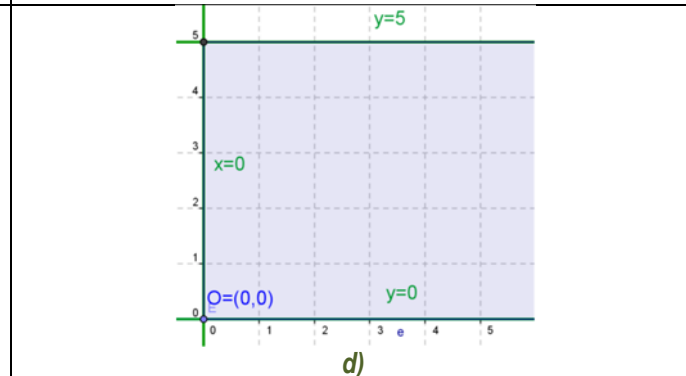
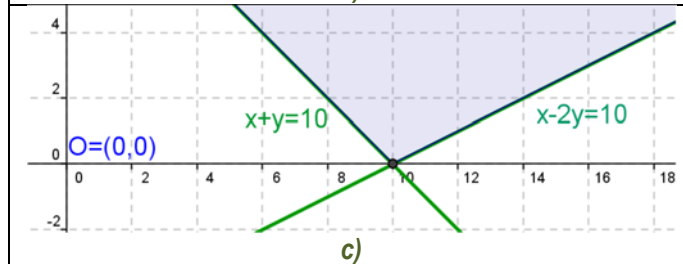
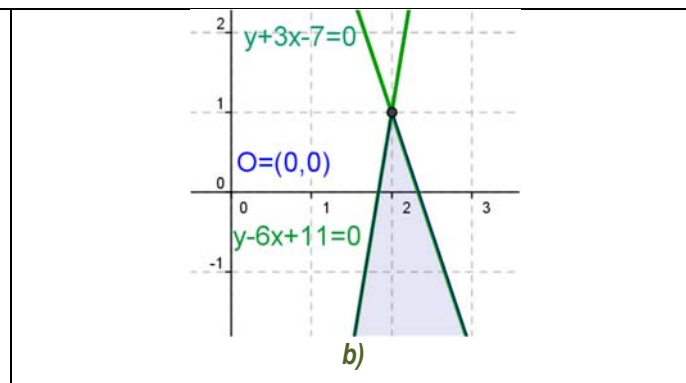
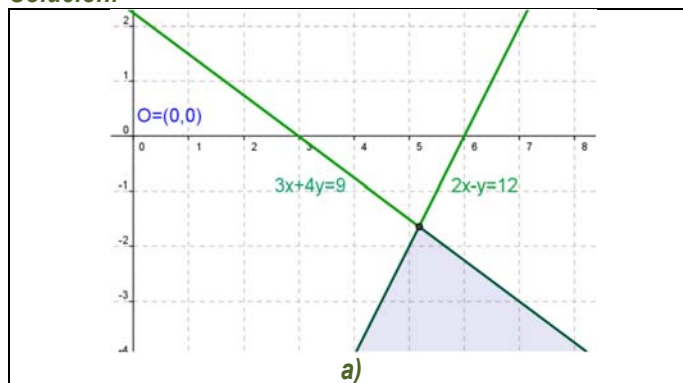
f)



2. - Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

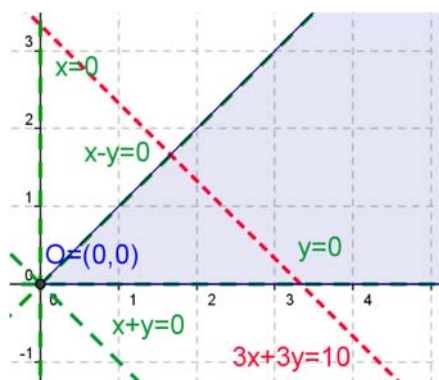
a) $\begin{cases} 3x + 4y \leq 9 \\ 2x - y \geq 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + 3x - 7 \leq 0 \\ y - 6x + 11 \leq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 2y \leq 10 \\ x + y \geq 10 \end{cases}$ $x \geq 0$ $0 \leq y \leq 5$

Solución:



3. - Maximizar la función $z = 3x + 3y$ sujeta a las restricciones:
- $$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

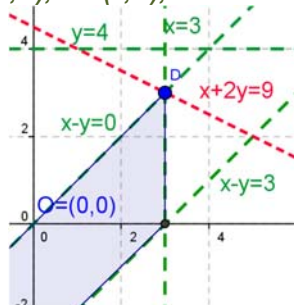
Solución:



La región factible es abierta, no acotada. No existe máximo.

4. - Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = x + 2y$ sometida a las restricciones
- $$y \leq 4 \quad x \leq 3 \quad x - y \leq 3 \quad x - y \geq 0$$

Solución: 4.- Recinto abierto no acotado $D = (3, 3)$, $B = (3, 0)$, Máximo = 9 en $D = (3, 3)$.



5. - Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenido vitamínico al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se mezclan piensos de los tipos P y Q cuyo precio por kilogramo es para ambos de 30 céntimos, y cuyo contenido vitamínico por kilo se recoge en la tabla adjunta.

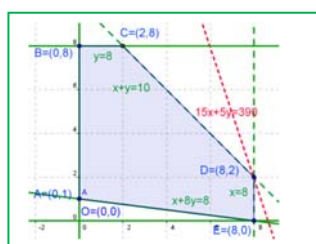
	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

Solución: Hay infinitas soluciones para que el coste sea mínimo. Una de ellas es mezclar 1.2 Kg del pienso A y 0.8 del pienso B. El coste es de 60 céntimos. Otra es mezclar 1.5 Kg de pienso A con 0.5 de pienso B, con igual coste. Son solución todos los puntos de la recta $A + B = 2$ comprendidos entre las soluciones ya indicadas.

6. - Desde dos almacenes A y B se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diaria y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan diariamente 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste de transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado, en euros por tonelada, en el cuadro adjunto. Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

	M ₁	M ₂	M ₃
A	10	15	20
B	15	10	10



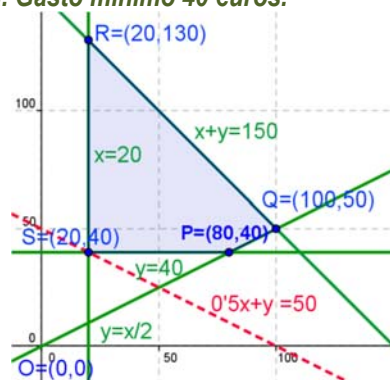
Solución: x : toneladas de A a M₁; y : toneladas de A a M₂; Condiciones: $x \geq 0$; $y \geq 0$; $10 - (x + y) \geq 0$; $8 - x \geq 0$; $8 - y \geq 0$; $x + y - 1 \geq 0$. Región factible: ABCDE, A(0,1), B(0,8), C(2,8), D(8,2), E(8,0), F(2,0). Coste: $F(x, y) = -15x - 5y + 390$; Mínimo en D: Almacén A: 8 al M₁; 2 al M₂; 0 al M₃. Almacén B: 0 al M₁; 6 al M₂; 9 al M₃. Coste: 260 euros.

7. - Una empresa construye en dos factorías, F1 y F2, tres tipos de barcos deportivos (A, B y C). La factoría F1 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 5 del tipo B y 1 del tipo C, siendo su coste de mantenimiento mensual cuarenta mil euros. F2 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 1 de tipo B y 2 de tipo C, siendo su coste mensual 20 000 euros. La empresa se ha comprometido a entregar anualmente a un club deportivo 3 barcos tipo A, 15 de tipo B y 12 de tipo C. ¿Cuántos meses deberá trabajar cada factoría, con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con el mínimo coste?

Solución: Sea x : meses factoría 1, y : meses factoría 2; Condiciones: $x, y \geq 0$; $x + y \geq 3$; $5x + y \geq 15$; $x + 2y \geq 12$; Región factible: 1º cuadrante menos OABC abierto; Coste: $F(x,y) = 4x + 2y$; mínimo en C: 12 meses la factoría 1, 0 meses factoría 2. Coste mínimo 480 000 euros.

8. - En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1 euro, y el de un bidón de aceite de girasol es de 0,5 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

Solución: Sea x : nº de bidones de girasol, y : nº de bidones de oliva; Condiciones: $x \geq 20$; $y \geq 40$; $y \geq x/2$; $x + y \leq 150$. Región factible: SPQR, S(20,40), P(80,40), Q(100,50), R(20,130). Gasto: $F(x, y) = 0,5x + y$, Mínimo en S; 20 bidones de girasol y 40 de oliva. Gasto mínimo 40 euros.



9. - Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1 000. Conoce que la demanda de ambos productos conjuntamente es mayor que 3 000 unidades y menor que 6 000 unidades. Asimismo, sabe que la cantidad que se demanda de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble de la del otro. Si la empresa desea vender toda la producción:

- ¿De cuántos modos puede organizar la producción?
- Para obtener los máximos beneficios, ¿cuánto ha de ser la producción de cada uno de los productos si uno se vende a un precio que es triple que el del otro?

Solución: Vértices: (2, 2), (2, 3), (3, 2). Sólo son válidos esos puntos (en miles de unidades). El óptimo es producir dos unidades del más barato y tres del más caro.

10. - Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8000 y 15 000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10 000, 7 000 y 6 000 piezas respectivamente.

Los costes de transporte, en céntimos de euro, por pieza son los que aparecen en el cuadro adjunto. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

	Fáb. 1	Fáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	6	13	2
Fact. 2	4	4	12

Solución: Factoría 1: 2 000 a fábrica 1, 0 a fábrica 2, 6 000 a fábrica 3. Factoría 2: 8 000 a fábrica 1, 7 000 a fábrica 2, 0 a fábrica 3. Coste 840 euros.

11. - Una persona va a iniciar una dieta y recibe las siguientes recomendaciones:
- Debe tomar una mezcla de dos compuestos D_1 y D_2
 - La cantidad total diaria que puede ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos.
 - En la mezcla debe haber más cantidad de D_1 que de D_2
 - La mezcla no debe contener más de 100 gramos de D_1
- Se sabe que cada gramo de D_1 aporta 0.3 mg de vitaminas y 4.5 calorías y cada gramo de D_2 aporta 0.2 mg de vitaminas y 1.5 calorías. ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener la máxima cantidad de vitaminas? ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar si desea el mínimo posible de calorías?

Solución: Max. Vitaminas: 100 gr. de D_1 , 0 gr. de D_2 . Max = 30 mg.
Min. Calorías: 0 gr. de D_1 , 50 gr. de D_2 . Min. = 75 calorías.

12. - Una promotora pretende diseñar una urbanización con a lo sumo 15 edificaciones entre chalets y bloques de pisos. Los bloques de pisos no deberían ser más de un 40 % de las edificaciones que se construyan. La urbanización tendría como mucho 12 chalets y como poco 2 bloques de pisos.

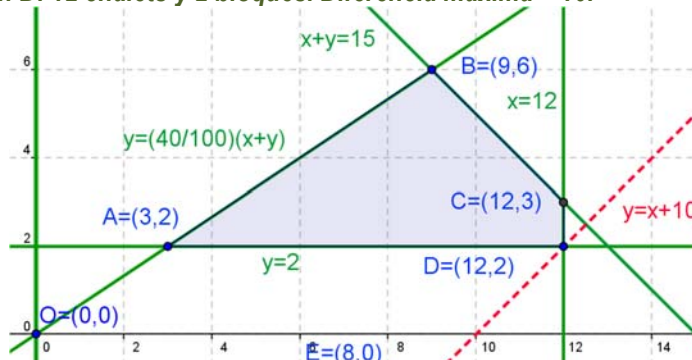
- a) ¿Qué combinaciones de cada tipo de viviendas son posibles? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
b) ¿Qué combinación hace mayor la diferencia entre el número de chalets y de bloques de pisos?

Solución: Sea x : n° de chalets; y : n° de bloques de pisos.

a) **Condiciones:** $0 \leq x \leq 12$; $2 \leq y$; $x + y \leq 15$; $y \leq (40/100)(x + y)$

Región factible: ABCD, A(2,3), B(9,6), C(12,3), D(12,2).

b) **Diferencia máximo en D: 12 chalets y 2 bloques. Diferencia máxima = 10.**



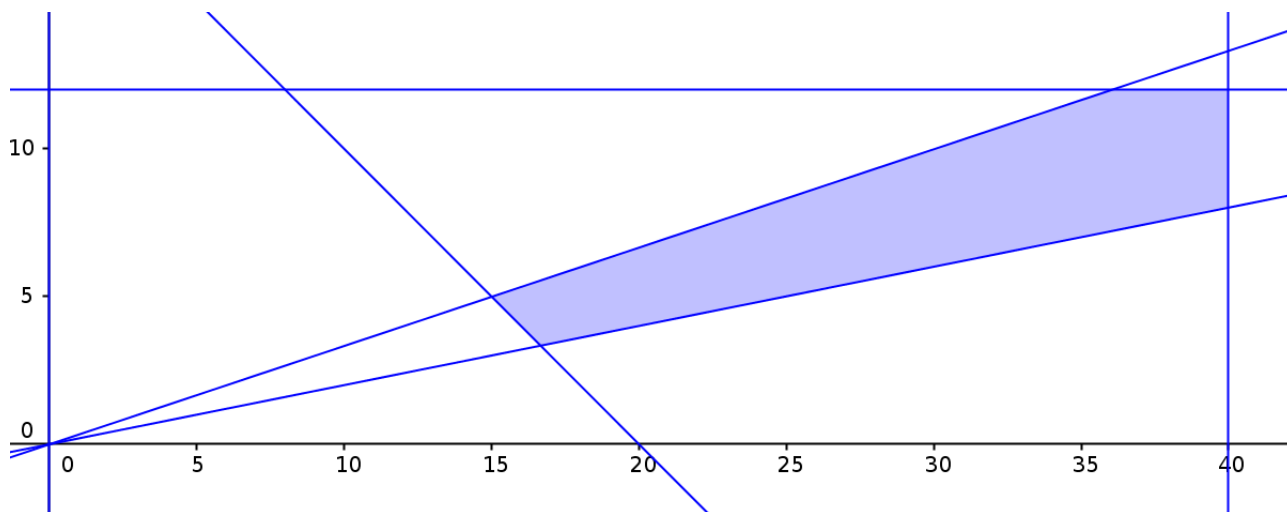
13. - Para dotar mobiliario a cierta zona de una ciudad, se quiere colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20 % de las piezas que se coloquen sean jardineras.

- a) ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
b) ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?

Solución: a) **Planteamiento del problema:**

$$\begin{cases} x + y \geq 20 \\ 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 12 \\ y \leq \frac{x}{3} \\ \frac{20}{100}(x + y) \leq y \end{cases}$$

Solución gráfica: Si x son las farolas e y las jardineras el problema que gráficamente resulta:



b) **La mayor diferencia se da con 40 farolas y 8 jardineras. No da el máximo de piezas colocadas, se pueden poner todas (40 farolas y 12 jardineras).**

14. - Un restaurante quiere adecuar, en parte o en su totalidad, una superficie de $1\,100\text{ m}^2$ para aparcamiento y área recreativa infantil. La superficie de área recreativa ha de ser de al menos 150 m^2 . El aparcamiento ha de tener como poco 300 m^2 más que el área recreativa, y como mucho 700 m^2 más que la misma. El aparcamiento le cuesta 15 euros por m^2 , y el área recreativa 45 euros por m^2 .

a) ¿Qué combinaciones de superficie dedicados a cada tipo de servicio se pueden adecuar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

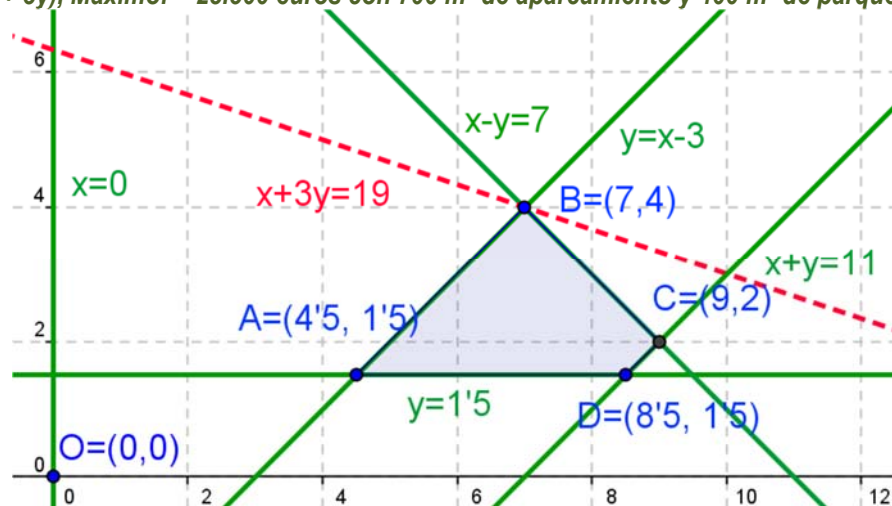
b) ¿Cuál es la combinación más cara? ¿Coincide con la que dedica más espacio al aparcamiento?

Solución: Sea x : m^2 de aparcamiento, y : m^2 de parque infantil.

a) Condiciones: $x + y \leq 1\,100$; $y + 300 \leq x$; $x \leq y + 700$; $0 \leq x$; $150 \leq y$;

Región factible: ABCD, A(4.5, 1.5), B(7, 4), C(9, 2), D(8.5, 1.5) (en 100 m^2).

b) Coste: $15(x + 3y)$, Máximo: = 28.500 euros con 700 m^2 de aparcamiento y 400 m^2 de parque. SI.



15. - Una empresa está seleccionando empleados con contrato eventual por un año y con contrato fijo. El sueldo anual (en miles de euros) de cada empleado eventual es 8 y de cada empleado fijo es 15. La empresa tiene un tope de 480 (miles de euros) para pagar los sueldos anuales de los empleados que contrate. Los empleados fijos han de ser por lo menos 10, y no más de 24. Además el número de eventuales no puede superar en más de 14 al de fijos.

a) ¿Qué combinaciones de empleados fijos y eventuales se puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratar 24 fijos y ningún eventual?

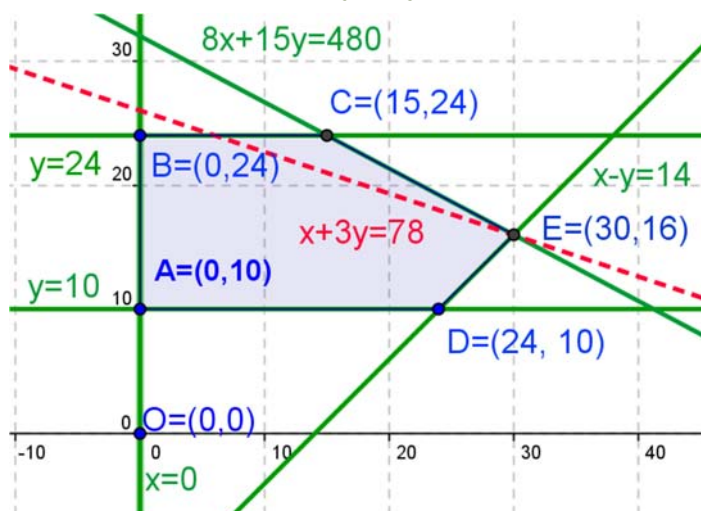
b) Si el objetivo es contratar el mayor número total de empleados ¿cuántos ha de contratar de cada tipo? ¿Y si el objetivo es contratar el mayor número de eventuales?

Solución: Sea x : n° de empleados eventuales, y : n° de empleados fijos.

a) Condiciones: $0 \leq x$; $10 \leq y \leq 24$; $8x + 15y \leq 480$; $x \leq y + 14$;

Región factible: ABCDE, A(0, 10), B(0, 24), C(15, 24), E(24, 10). SI.

b) Max. N° empleados: 30 eventuales y 16 fijos. Max. Eventuales: 30.



16. - Una empresa de autobuses dispone de un vehículo para cubrir dos líneas (A y B) que puede trabajar en ellas, a lo sumo, 300 horas mensualmente.

Un servicio en la línea A lleva 2 horas, mientras que en la B supone 5 horas. Por otra parte, en la línea B se deben cubrir al menos 15 servicios mensualmente y, además, el autobús no puede prestar globalmente más de 90 servicios cada mes entre ambas líneas.

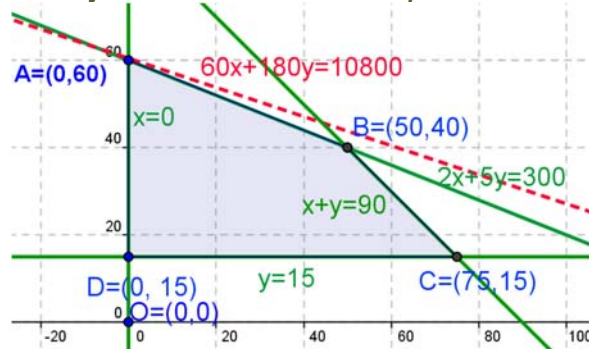
- a) ¿Cuántos servicios puede prestar el vehículo al mes en cada una de las líneas? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.
b) Sabiendo que la empresa obtiene un beneficio con cada servicio prestado de 60 euros y 180 euros en las líneas A y B respectivamente, ¿cuántos servicios le convendrá realizar en cada una para maximizar el beneficio total? ¿Cuál será su importe?

Solución: Sea x : n° servicios línea A, y : n° servicios línea B.

a) **Condiciones:** $0 \leq x$; $15 \leq y$; $2x + 5y \leq 300$; $x + y \leq 90$;

Región factible: ABCD, A(0, 60), B(50, 40), C(75, 15), D(0, 15).

b) **F:** $60x + 180y$; 0 servicios línea A y 60 en servicios línea B. **Importe:** 10 800 euros.



17. - En una fábrica de cajas de cartón para embalaje y regalo se fabrican dos tipos de cajas: la caja A que requiere para su construcción 4 m de papel decorado y 0.25 m de rollo de cartón, que se vende a 8 euros, y la caja B que requiere 2 m de papel decorado y 0.5 m de rollo de cartón y que se vende a 12 euros. En el almacén disponen únicamente de 440 m de papel de regalo y de 65 m de rollo de cartón. Si suponemos que se vende toda la producción de cajas, ¿cuántas de cada tipo deberán de fabricarse para que el importe de las ventas sea máximo? ¿A cuánto ascenderá?

Solución: El máximo beneficio se obtiene con 60 cajas de A y 100 de B. Dicho beneficio asciende a 1 680 €.

18. - Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 9 000 euros y el modelo B a 12 000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36 000 euros.

- a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.

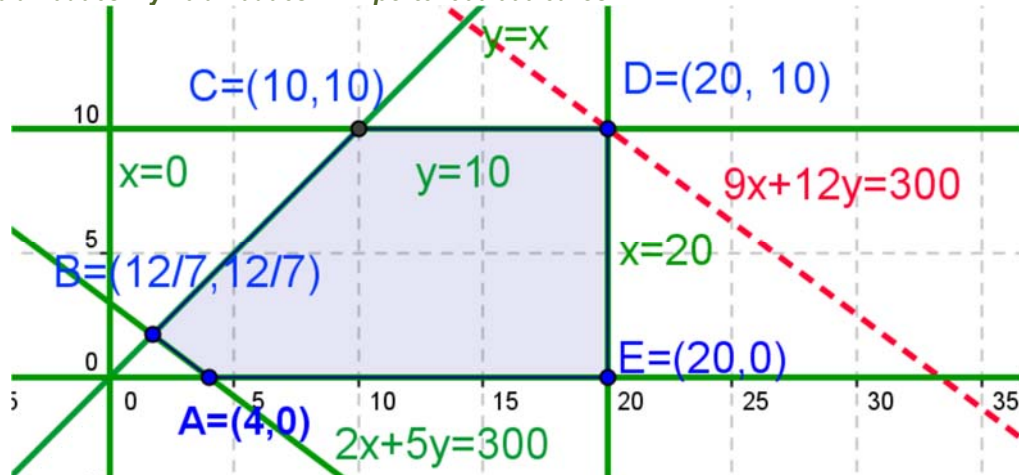
- b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

Solución: Sea x : n° de unidades A, y : n° de unidades B.

a) **Condiciones:** $0 \leq x \leq 20$; $0 \leq y \leq 10$; $y \leq x$; $36 \leq 9x + 12y$ (en miles de euros).

Región factible: ABCDE, A(4, 0), B(12/7, 12/7), C(10, 10), D(20, 10), E(20, 0).

b) 20 unidades A y 10 unidades B. **Importe:** 300.000 euros.



AUTOEVALUACIÓN

1.- Indica cuál de las inecuaciones siguientes es estricta:

- a) $5x + 2y < 7$; b) $5x + 2y \leq 7$; c) $5x + 2y = 7$; d) $5x + 2y \geq 7$

Solución: a)

2.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes es acotado:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y \leq -5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + y > 8 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \end{array}$$

Solución: b)

3.- Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes no posee solución:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} x + y \leq -5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x + y > 8 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \end{array}$$

Solución: c)

4.- Indica cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

- a) La solución de un programa lineal está siempre en un vértice
 b) La solución óptima de un programa lineal siempre se encuentra en la frontera de la región factible.
 c) La región factible determina la función objetivo.
 d) En un programa lineal se optimiza la región factible.

Solución: d)

5.- Una nueva **granja** estudia cuántos patos y gansos puede albergar. Cada pato consume 3 kg de pienso por semana y cada ganso 4 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 700 kg semanales. Además, quieren que el número de patos sea mayor que el de gansos. Denomina x al número de patos e y al de gansos. ¿Cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

Solución: 100 patos y 100 gansos

6.- Para este problema la función objetivo es:

- a) $3x + 4y \rightarrow \text{Mín}$ b) $x + y \rightarrow \text{Máx}$ c) $x + y \rightarrow \text{Mín}$ d) $3x + 4y \rightarrow \text{Máx}$

Solución: b)

7.- Para este problema las restricciones son:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} 3x + 4y \leq 700 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 3x + 4y \geq 700 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 4x + 3y \geq 700 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x + 4y \leq 700 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x > y \end{cases} \end{array}$$

Solución: c)

8.- Resuelve el problema e indica si la solución es:

- a) No tiene solución. b) 100 patos y 100 gansos. c) 233 patos y ningún ganso. d) Ningún ganso y 175 patos.

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadesol.pdf

<http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examen selectividad A4.pdf>

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examen-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

- (1) Una empresa fabrica únicamente tapas y envases. Cada lote de tapas requiere de 1 litro de barniz y 5 minutos en el horno, mientras que cada lote de envases requiere de 2 litros de barniz y 3 minutos en el horno. Semanalmente se dispone de 1 000 litros de barniz y 3 000 minutos en el horno. Por restricciones de su infraestructura, la producción semanal entre los dos productos es, como mucho, de 650 lotes. a) ¿Cuántos lotes de cada tipo puede fabricar la empresa cada semana? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si la empresa fabricase 200 lotes de tapas y 100 lotes de envases? b) Si la empresa vende todo lo que fabrica y gana por cada lote de tapas fabricado 3 000 euros y por cada lote de envases 4 000 euros, ¿cuántos lotes de cada tipo deberá fabricar para maximizar sus ganancias?

Solución: Sea x : nº de tapas. y : nº de envases.

a) **Región factible:** $O(0, 0)$, $E(0, 500)$, $A(250, 360)$, $C(525, 125)$, $D(600, 0)$. $x = 200$, $y = 600$ SI.

b) $F(x, y) = 3x + 4y$, **Max en A: 250 tapones y 350 envases. $F(A) = 2\,150$ euros.**

- (2) Un empresario dispone un determinado día de 3 600 euros para fabricar ratones y teclados. Cada ratón le cuesta 30 euros y lo vende a 34 euros. En cuanto a los teclados, cada uno tiene asociado un coste de fabricación de 40 euros y un precio de venta de 45 euros. Por restricciones de la empresa, no se pueden fabricar más de 95 aparatos en total en un día.

a) ¿Cuántos ratones y cuántos teclados puede fabricar en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría fabricar en un día 15 ratones y 20 teclados?

b) Teniendo en cuenta que el beneficio es la diferencia entre el precio de venta y el coste y que la empresa vende todo lo que fabrica, ¿cuántos aparatos de cada tipo debe fabricar en un día para que el beneficio sea máximo?

Solución: Sea x : nº de ratones, y : nº de teclados.

a) **Región factible:** $OAPQ$, $O(0, 0)$, $A(0, 90)$, $P(20, 65)$, $Q(95, 0)$. SI.

b) $F(x, y) = 4x + 5y$ en P , **20 ratones y 65 teclados. Beneficio = 405 euros.**

- (3) Una empresa fabrica dos tipos de piezas: A y B. Cada día debe fabricar al menos 6 piezas, disponiendo para ello de 160 horas de mano de obra. La fabricación de cada pieza tipo A necesita 8 horas de mano de obra y la de tipo B necesita 16 horas de mano de obra. Existe además la restricción de que no puede fabricar más de 4 piezas de tipo A. a) ¿Cuántas piezas de cada tipo puede fabricar en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. b) Si vende todo lo que fabrica y por cada pieza tipo A obtiene un beneficio de 120 euros y por cada pieza tipo B obtiene un beneficio de 100 euros, ¿cuántas piezas de cada tipo debe fabricar cada día para maximizar su beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución: Sea x : nº de piezas A, y : nº de piezas B.

a) **Región factible:** $ABCD$, $A(0, 6)$, $B(0, 10)$, $C(4, 8)$, $D(4, 2)$.

b) $F(x, y) = 120x + 100y$, **máximo en C, 4 tipo A y 8 tipo B. Beneficio = 1 280 euros.**

- (4) Una carpintería elabora dos tipos de muebles, A y B. Cada mueble de tipo A requiere 6 días de trabajo para su elaboración, mientras que cada mueble de tipo B requiere 3 días. Por la estructura organizativa de dicha empresa, cada mes, que consta de 30 días laborables, se puede elaborar, a lo sumo, 4 muebles de tipo A y 8 de tipo B.

a) ¿Cuántos muebles de cada tipo pueden fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) Si venden todo lo que fabrican y el beneficio proporcionado por cada mueble tipo A vendido es de 500 euros y por cada mueble de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos muebles de cada tipo deberían fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuántos tendrían que fabricar para maximizar el número de muebles elaborados?

Solución: Sea x : nº de muebles tipo A, y : nº de tipo B.

a) **Región factible:** $OABCD$, $O(0, 0)$, $A(0, 8)$, $B(1, 8)$, $C(4, 2)$, $D(4, 0)$.

b) **Beneficio mes $F(x, y) = 500x + 200y$ máximo en C: 4 tipo A y 2 tipo B. Beneficio = 2 400 euros.**

Máximo nº de muebles: $G(x, y) = x + y$ en B **1 tipo A y 8 tipo B. Nº total 9 muebles.**

(5) Una fábrica de cerveza produce cerveza negra y rubia. Para la elaboración de un bidón de cerveza negra son necesarios 2 kg de lúpulo, 4 kg de malta y una hora de trabajo. Para la elaboración de un bidón de cerveza rubia son necesarios 3 kg de lúpulo, 2 kg de malta y una hora de trabajo. Cada día se dispone de 60 kg de lúpulo, 80 kg de malta y 22 horas de trabajo. El beneficio obtenido es de 60 euros por cada bidón de cerveza negra vendido y de 40 euros por cada bidón de cerveza rubia.

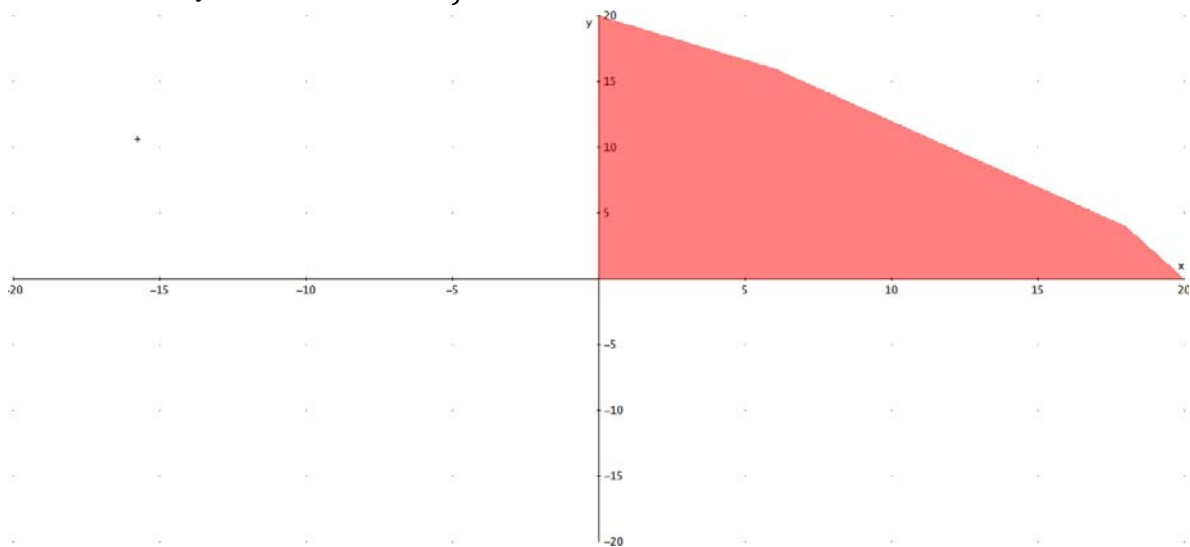
a) ¿Cuántos bidones de cerveza de cada tipo pueden producir al día para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Es posible que en un día cualquiera se hayan producido 15 bidones de cerveza negra y 20 de cerveza rubia?

b) Si vende todo lo que produce, ¿cuántos bidones de cerveza de cada tipo debería producir para maximizar el beneficio?

Solución: a) Si llamamos x al número de bidones de cerveza negra, y al número de bidones de cerveza rubia, el

problema es

$$\left. \begin{array}{l} \max f(x, y) = 60x + 40y \\ 2x + 3y \leq 60 \\ 4x + 2y \leq 80 \\ x + y \leq 22 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ . Representación del conjunto de soluciones factibles:}$$



No puede producir 15 bidones de cerveza negra y 20 de cerveza rubia porque $(15, 20)$ no está en la región factible (puede producir cantidades a, b si (a, b) es un punto con coordenadas enteras en la región factible).

b) Como la función objetivo y las restricciones son lineales, el máximo se alcanzará en algún vértice de la región factible. Punto de corte de $2x + 3y = 60$ y $x + y = 22$:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 60 \\ x + y = 22 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 60 \\ 2x + 2y = 44 \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = 16, x = 22 - 16 = 6 : (6, 16);$$

Punto de corte de $2x + y = 40$ y $x + y = 22$: $\left. \begin{array}{l} 2x + y = 40 \\ x + y = 22 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 18, y = 22 - 18 = 4 : (18, 4)$. Se cumple que:

$f(6, 16) = 60 \times 6 + 40 \times 16 = 1000$, $f(18, 4) = 60 \times 18 + 40 \times 4 = 1240$, $f(0, 20) = 40 \times 20 = 800$, $f(20, 0) = 60 \times 20 = 1200$, por lo que el beneficio máximo es 1 240 produciendo 18 bidones de negra y 4 de rubia.

(6) Una vagoneta de una empresa está destinada a transportar paquetes de tipo A y B y soporta como mucho 1 000 kg de peso. Se sabe además que cada paquete de tipo A pesa 20 kg y cada uno de tipo B pesa 25 kg. Por exigencias de la producción, en cada viaje debe transportar al menos 15 paquetes de tipo A y al menos 20 paquetes de tipo B.

a) ¿Cuántos paquetes de cada tipo se pueden transportar en un viaje? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría transportar en un viaje 17 paquetes de tipo A y al menos 20 paquetes de tipo B?

b) ¿Cuántos paquetes de cada tipo debería transportar en un viaje para maximizar el número total de paquetes transportados?

Solución: Sea x : n° de paquetes tipo A, y : n° de paquetes tipo B.

a) Región factible: ABC, A(15, 20), B(15, 28), C(25, 20). SI.

b) $F(x, y) = x + y$ en C con 25 tipo A y 20 tipo B. Total: 45 paquetes.

(7) Una nueva granja estudia cuántas gallinas y ocas puede albergar. Cada gallina consume 1 kg de pienso por semana y cada oca 5 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 200 kg semanales. Además, quieren que el número de gallinas sea menor o igual que cinco veces el número de ocas.

- a) ¿Cuántas gallinas y ocas podrá tener la granja? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se cumplirían los requisitos si albergase 40 gallinas y 20 ocas?
b) Según estos requisitos, ¿cuál es el máximo número de animales que podría albergar la granja?

Solución: Sea x : n° de gallinas, y : n° de ocas.

a) **Región factible:** OAB , $O(0, 0)$, $A(0, 40)$, $B(100, 20)$. SI.

b) $F(x, y) = x + y$, máximo en B con 100 gallinas y 20 ocas, total 120 animales.

(8) Una fábrica está especializada en dos juguetes: bicicletas y patinetes. Al mes puede fabricar un máximo de 480 bicicletas y 600 patinetes. Para la elaboración de cada bicicleta son necesarias 2 horas de trabajo y para la elaboración de cada patinete es necesaria una hora de trabajo. Se dispone de un máximo de 1000 horas de trabajo al mes.

- a) ¿Cuántas bicicletas y patinetes puede fabricar en un mes para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
b) ¿Cuántas bicicletas y patinetes deberían fabricar para maximizar el número total de juguetes (bicicletas más patinetes) fabricados? ¿Cuántos juguetes fabrica en ese caso?

Solución: Sea x : n° de bicicletas, y : n° de patinetes.

a) **Región factible:** $OABCD$, $O(0, 0)$, $A(0, 600)$, $B(200, 600)$, $C(480, 40)$, $D(480, 0)$.

b) $F(x, y) = x + y$, máximo en B con 200 bicis y 600 patinetes total 800 juguetes.

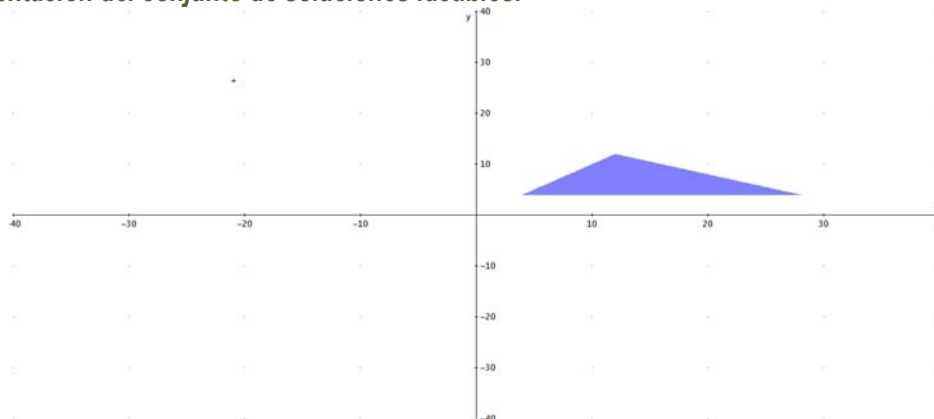
(9) Una costurera dispone de 36 metros de tela para hacer faldas y pantalones. Necesita 1 metro de tela para hacer una falda y 2 metros de tela para hacer un pantalón. Por exigencias del cliente, tiene que hacer al menos la misma cantidad de faldas que de pantalones y al menos 4 pantalones.

- a) ¿Cuántas unidades puede hacer de cada prenda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
b) Si le cuesta 3 euros cada falda terminada y 9 euros cada pantalón, ¿cuántas unidades debe producir de cada tipo para minimizar los costes? ¿Cuánto sería en ese caso el coste total?

Solución: a) Si llamamos x al número de faldas, y al número de pantalones, las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 36 \\ x \geq y \\ y \geq 4 \end{array} \right\}.$$

Representación del conjunto de soluciones factibles:



Puede hacer cantidades a, b si (a, b) es un punto con coordenadas enteras en la región factible; b) El pro-

blema es: $\left. \begin{array}{l} \min f(x, y) = 3x + 9y \\ x + 2y \leq 36 \\ x \geq y \\ y \geq 4 \end{array} \right\}$. Como la función objetivo y las restricciones son lineales, el mínimo se alcanzará en algún vértice de la región factible. Punto de corte de $x + 2y = 36$ y $y = x$:

$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 36 \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow x + 2x = 36 \Leftrightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12, y = 12 : (12, 12)$; Los otros vértices son $(4, 4)$, $(28, 4)$. Se

cumple que: $f(12, 12) = 3 \times 12 + 9 \times 12 = 144$, $f(4, 4) = 3 \times 4 + 9 \times 4 = 48$, $f(28, 4) = 3 \times 28 + 36 = 120$

Por tanto el coste mínimo es 48 haciendo 4 faldas y 4 pantalones.

(10) Una compañía minera extrae dos tipos de carbón, hulla y antracita, de forma que todo el carbón extraído es vendido. Por exigencias gubernamentales, debe extraer diariamente al menos el triple de camiones de hulla que de antracita. Además, por la infraestructura de la compañía, como mucho se pueden extraer 80 camiones de carbón en un día y al menos 10 de ellos deben ser de antracita.

- ¿Cuántos camiones de cada tipo de carbón se pueden extraer en un día? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría extraer en un día 20 camiones de hulla y 15 de antracita?
- Si la ganancia por cada camión de hulla es de 4 000 € y por cada camión de antracita es de 6 000 €, ¿cuántos camiones de cada tipo debería extraer en un día para maximizar sus ganancias?

Solución: Sea x : nº de camiones de hulla, y : nº de camiones de antracita.

a) **Región factible:** ABC, A(30, 10), B(60, 20), C(70, 10). NO.

b) $F(x, y) = 4x + 6y$. Max. En B con 60 de hulla y 20 de antracita. Ganancia: 360 000 euros.

(11) En cierta quesería producen dos tipos de queso: mezcla y tradicional. Para producir un queso mezcla son necesarios 25 cl de leche de vaca y otros 25 cl de leche de cabra; para producir uno tradicional, sólo hacen falta 50 cl de leche de vaca. La quesería dispone de 3600 cl de leche de vaca y 500 cl de leche de cabra al día. Por otra parte, puesto que los quesos tradicionales gustan más, cada día produce al menos tantos quesos de tipo tradicional como de mezcla.

- ¿Cuántas unidades de cada tipo podrá producir en un día cualquiera? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- Si la quesería vende todo lo que produce y obtiene un beneficio de 3 euros por cada queso de tipo mezcla y de 4 euros por cada queso de tipo tradicional, ¿cuántas unidades de cada tipo debe producir diariamente para maximizar beneficios? ¿Qué beneficio obtiene en ese caso?

Solución: Sea x : nº de quesos tipo mezcla, y : nº de quesos tipo tradicional.

a) **Región factible:** OABC, O(0, 0), A(0, 72), B(20, 62).

b) $F(x, y) = 3x + 4y$, máximo en B con 20 de mezcla y 62 de tradicional. Beneficio 308 euros.

(12) Para que una encuesta sobre política de inmigración sea fiable, se exige que haya al menos 2 300 personas entrevistadas, entre españoles y extranjeros, de las cuales como mucho 1 000 serán extranjeros y también se exige que los extranjeros sean por lo menos un 10 % del total de personas entrevistadas.

- ¿Cuántos españoles y cuántos extranjeros pueden ser entrevistados? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- Si el coste estimado de cada entrevista es de 6 euros, ¿cuál sería el máximo coste que podría tener la encuesta? ¿a cuántos españoles se habría entrevistado en dicho caso?

Solución: Sea x : nº de españoles encuestados, y : nº de extranjeros encuestados.

a) **Región factible:** ABC, A(1 300, 1 000), B(9 000, 1 000), C(2 070, 230).

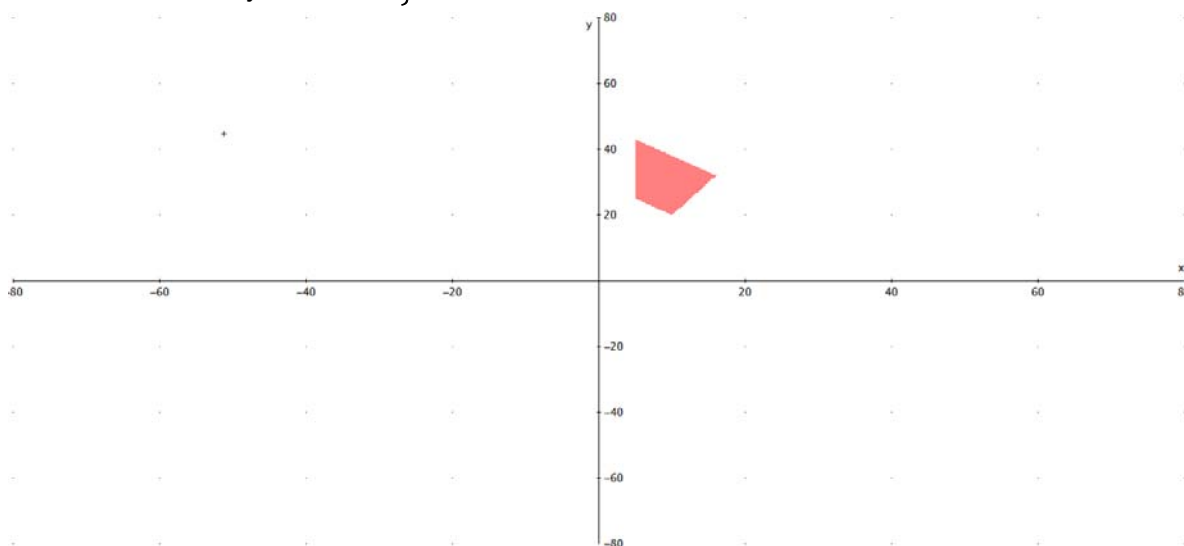
b) $F(x, y) = 6(x + y)$ máximo en B con 9 000 españoles y 1 000 extranjeros. Coste = 60 000 euros

(13) Un tenista planea su entrenamiento para la próxima temporada. Dispone de 48 horas semanales en las que puede entrenar y debe repartir ese tiempo entre la preparación física y mejorar su técnica. El entrenador le obliga a dedicar al menos 5 horas semanales a la parte física y al menos 30 horas en total, entre preparación física y técnica. Por otra parte, él quiere dedicar al menos el doble de tiempo a la parte técnica que a la preparación física.

- a) ¿Cuántas horas puede dedicar a cada tipo de entrenamiento? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- b) Si la hora de preparación física le cuesta 50 euros y la de mejora de la técnica 80 euros, ¿cuántas horas debe dedicar a cada tipo de entrenamiento para minimizar el coste? ¿a cuánto ascendería dicho coste?

Solución: a) Si llamamos x al número de horas de preparación física, y al número de horas de preparación técnica, las

restricciones son $\left. \begin{array}{l} 30 \leq x + y \leq 48 \\ x \geq 5 \\ y \geq 2x \end{array} \right\}$. Representación del conjunto de soluciones factibles:



Puede dedicar un número de horas a , b si (a, b) es un punto con coordenadas enteras en la región factible.

b) El problema es: $\left. \begin{array}{l} \min f(x, y) = 50x + 80y \\ 30 \leq x + y \leq 48 \\ x \geq 5 \\ y \geq 2x \end{array} \right\}$. Como la función objetivo y las restricciones son lineales, el mínimo se alcanzará en algún vértice de la región factible. Punto de corte de $x = 5$ y $y = 48 - x$:

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 48 - x \end{array} \right\} \Rightarrow y = 48 - 5 = 43 : (5, 43). \text{ Punto de corte de } x = 5 \text{ y } y = 30 - x :$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 30 - x \end{array} \right\} \Rightarrow y = 30 - 5 = 25 : (5, 25). \text{ Punto de corte de } y = 2x \text{ y } y = 48 - x :$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = 48 - x \end{array} \right\} \Rightarrow y = 48 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{48}{3} = 16, y = 2x = 32 : (16, 32).$$

Punto de corte de $x = 5$ y $y = 30 - x$:

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = 30 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 30 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{30}{3} = 10, y = 2x = 20 : (10, 20).$$

Se cumple que: $f(5, 43) = 50 \times 5 + 80 \times 43 = 3690$, $f(5, 25) = 50 \times 5 + 80 \times 25 = 2250$,

$f(16, 32) = 50 \times 16 + 80 \times 32 = 3360$, $f(10, 20) = 50 \times 10 + 80 \times 20 = 2100$

Por tanto, el coste mínimo es 2 100 € entrenando 10 horas físico y 20 horas técnico.

(14) Para cubrir las nuevas necesidades de un centro hospitalario en los servicios de corta estancia y planta se quiere asignar un máximo de 24 auxiliares de enfermería. En corta estancia debería haber al menos 4. Como poco, tiene que haber 8 auxiliares más en planta que en corta estancia.

- a) ¿Qué combinaciones de auxiliares para cada tipo de servicio se pueden asignar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.
b) ¿Cuál es la combinación con menos personal? ¿Cuál asigna más auxiliares en corta estancia?

Solución: Sea x : n° de auxiliares en corta estancia, y : n° de auxiliares en planta.

a) **Región factible:** ABC, A(4, 12), B(4, 20), C(8, 16).

b) $F1(x, y) = x + y$; mínimo en A, con 4 en corta estancia y 12 en planta. $F2(x, y) = x$;

Máximo en corta estancia en C con 8 en corta estancia y 16 en planta.

(15) Una empresa de alta confitería elabora tartas y bizcochos especiales, disponiendo de 80 horas cada día para la elaboración de dichos productos. Cada tarta requiere 1 hora para su elaboración y cada bizcocho 2 horas. Además debe abastecer a un restaurante que compra todos los días 20 tartas y 10 bizcochos.

- a) ¿Cuántas unidades de cada tipo podrá elaborar en un día para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.
b) Si cada tarta le cuesta a la empresa 15 € y cada bizcocho le cuesta 12 €, ¿cuántos productos de cada tipo debe elaborar en un día para minimizar el coste total? ¿Y para maximizar el número de productos elaborados?

Solución: Sea x : n° de tartas, y : n° de bizcochos.

a) **Región factible:** ABC, A(20, 10), B(20, 30), C(60, 10).

b) **Coste mínimo** $F1(x, y) = 15x + 12y$; en A con 20 tartas y 10 bizcochos. Coste 1 020 euros.

Máximo n° de productos $F2(x, y) = x + y$; en C con 60 tartas y 10 bizcochos. Total 70 productos.

(16) *Fabada Móvil* sólo comercializa dos platos: fabada tradicional y *light*. Cada ración de fabada tradicional lleva 100 g de fabes y 100 g de *compangu*, mientras que cada ración de fabada *light* lleva 110 g de fabes y 50 g de *compangu*. Cada día *Fabada Móvil* dispone de 11000 g de fabes y de 6200 g de *compangu*. Tiene un cliente fijo que compra cada día 4 raciones de fabada *light* y que *Fabada Móvil* se ha comprometido a abastecer.

- a) ¿Cuántas raciones de cada tipo puede preparar *Fabada Móvil* en un día para cumplir con todos los requerimientos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
b) ¿Cuántas raciones de cada tipo debería preparar para maximizar el número total de raciones de fabada que puede poner a la venta? ¿Cuántas tendría que preparar para maximizar el número de raciones de fabada tradicional que puede poner a la venta?

Solución: Sea x : n° de raciones de fabada tradicional, y : n° de raciones de fabada *light*.

a) **Región factible:** CBAD, A(80, 22), B(4, 96), C(4, 0), D(62, 0).

b) $F1(x, y) = x + y$; máximo n° total de productos en A con 80 de tradicional y 22 de *light*.

Máximo de tradicional: $F2(x, y) = x$; en A con 80 de tradicional y 22 de *light*.

(17) El aforo máximo de un circo es de 300 personas. Se exige que cada niño vaya acompañado al menos de un adulto. Por otro lado, una subvención recibida obliga a que el número de adultos entre el público sea como mucho el doble que el de niños. El circo gana 30 € por adulto y 15 € por niño.

- a) ¿Cuántas entradas de adulto y cuántas de niño se podrán vender en total para la próxima sesión? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
b) ¿Cuántas entradas de cada tipo debe vender el circo para maximizar sus ganancias? ¿Y para maximizar el número de niños entre el público?

Solución: Sea x : n° de niños, y : n° de adultos.

a) **Región factible:** OAB, O(0, 0), A(100, 200), B(150, 150).

b) **Máxima ganancia** $F1(x, y) = 15x + 30y$; en A con 100 niños y 200 adultos. Ganancia = 7 500.

Máximo n° de niños $F2 = x$; en B con 150 niño y 150 adultos. 300 entradas.

(18) Una mueblería fabrica mesas y sillas. La fabricación de una mesa requiere de 1 hora de corte, 4 horas de ensamble y 3 horas de acabado, generando un beneficio de 100 €. La fabricación de una silla requiere de 2 horas de corte, 4 h de ensamble y 1 h de acabado, generando un beneficio de 50 €. Cada día se dispone de un máximo de 14 horas de corte, 32 h de ensamble y 18 h de acabado.

- ¿Cuántos artículos de cada tipo puede fabricar cada día esta mueblería? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- Si vende cuanto produce, ¿cuántos artículos de cada tipo debe fabricar diariamente para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución: Sea x : n° de mesas, y : n° de sillas.

a) **Región factible:** OABDE, A(0, 7), B(2, 6), D(5, 3), E(6, 0).

b) **Beneficio:** $F(x, y) = 100x + 50y$; máximo en D con 5 mesas y 3 sillas. Beneficio = 650 euros.

(19) Una empresa especializada organiza un cumpleaños para 10 niños, en el que se van a servir helados y flanes. Puesto que todos los niños quieren tener postre, el número de helados más el de flanes tiene que ser al menos igual al número de niños en el cumpleaños. El cliente ha exigido que haya al menos 2 helados más que flanes. La empresa dispone como mucho de 14 helados.

- ¿Cuántas unidades de cada tipo puede servir la empresa para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.
- Si la empresa cobra al cliente por cada helado 3 euros y por cada flan 2 euros, ¿cuántas unidades de cada tipo deberá servir para maximizar sus ingresos? ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?

Solución: Sea x : n° de helados, y : n° de flanes.

a) **Región factible:** ABCD, A(10, 0), B(6, 4), C(14, 12), D(14, 0).

b) **Beneficio:** $F(x, y) = 3x + 2y$; máximo en C con 14 helados y 12 flanes. Beneficio = 66 euros.

(20) En una determinada empresa, se elige energía eólica o energía eléctrica al principio de cada día para el funcionamiento de una máquina que fabrica coches y motos de juguete. Los días que está con eólica la máquina fabrica 20 coches y 10 motos. Los días que está con eléctrica fabrica 40 coches y 90 motos. La empresa recibe el pedido de un cliente que desea al menos 360 coches y al menos 600 motos y que tiene que ser abastecido como mucho en 20 días.

- ¿Cuántos días deberá utilizar cada tipo de energía para abastecer a dicho cliente cumpliendo los plazos establecidos? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
- Si a la empresa le cuesta 1 000 euros cada día que utiliza la energía eólica y 2 500 euros cada día que utiliza la eléctrica, ¿cuántos días debe utilizar cada una para minimizar sus gastos? ¿Y para abastecer al cliente lo antes posible?

Solución: Sea x : n° de días de energía eólica, y : n° de días de energía eléctrica.

a) **Región factible:** ABCD, A(0, 9), B(0, 20), C(15, 5), D(6, 6).

b) **Mínimo gasto:** $F(x, y) = 1\,000x + 2\,500y$; en D con 6 días E.O. y 6 días E.El. 21 000 euros.

Para abastecer lo antes posible: $F(x, y) = x + y$ y mínimo en A con 9 días de E. El. 0 de E.O.

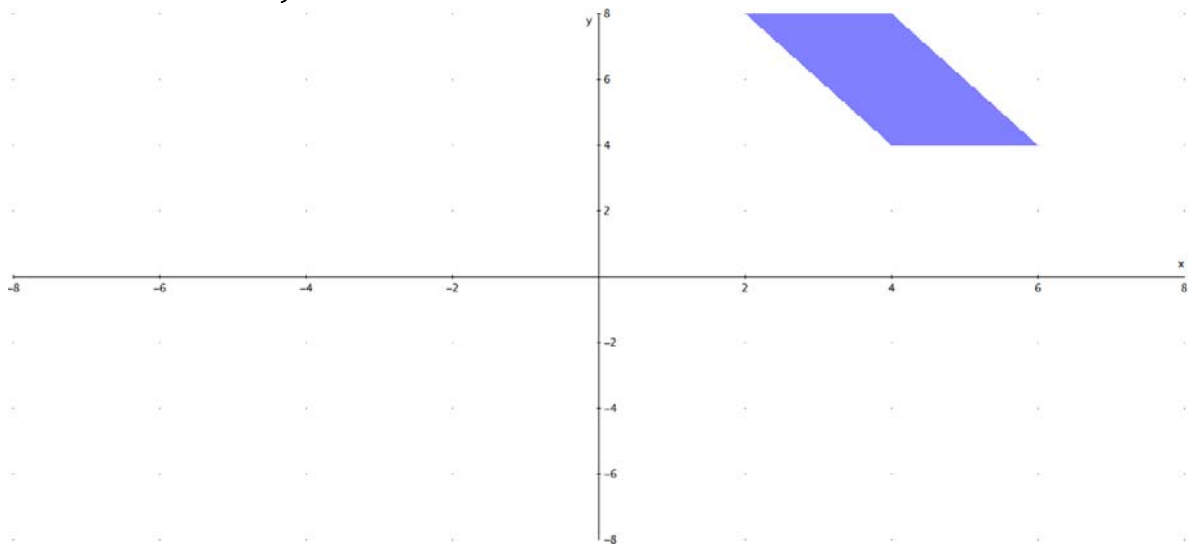
(21) Una ONG va a realizar un envío compuesto de lotes de alimentos y de medicamentos. Como mínimo ha de mandar 4 lotes de medicamentos, pero por problemas de caducidad no pueden mandarse más de 8 lotes de estos medicamentos. Para realizar el transporte se emplean 4 contenedores para cada lote de alimentos y 2 para cada lote de medicamentos. El servicio de transporte exige que al menos se envíe un total de 24 contenedores, pero que no se superen los 32.

a) ¿Qué combinaciones de lotes de cada tipo pueden enviarse? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones. ¿Pueden enviarse 4 lotes de alimentos y 5 de medicamentos?

b) Si la ONG quiere maximizar el número de lotes enviados, ¿qué combinación debe elegir?

Solución: a) Si llamamos x al número de lotes de alimentos, y al número de lotes de medicamentos, las restricciones son

$$\left. \begin{array}{l} 4 \leq y \leq 8 \\ 24 \leq 4x + 2y \leq 32 \end{array} \right\} . \text{ Representación del conjunto de soluciones factibles:}$$



Si $y = 4$, tenemos $24 \leq 4x + 8 \leq 32 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6$, si $y = 5$, tenemos $24 \leq 4x + 10 \leq 32 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$ (ya que x es entero), si $y = 6$, tenemos $24 \leq 4x + 12 \leq 32 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5$, si $y = 7$, tenemos:

$$24 \leq 4x + 14 \leq 32 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4, \text{ si } y = 8, \text{ tenemos } 24 \leq 4x + 16 \leq 32 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4.$$

Entonces las combinaciones posibles son $(4, 4)$, $(5, 4)$, $(6, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(3, 7)$, $(4, 7)$, $(2, 8)$, $(3, 8)$, $(4, 8)$ y sí pueden enviarse 4 lotes de alimentos y 5 de medicamentos;

b) El problema es: $\left. \begin{array}{l} \max f(x, y) = x + y \\ 4 \leq y \leq 8 \\ 24 \leq 4x + 2y \leq 32 \end{array} \right\} . \text{ Como la función objetivo y las restricciones son lineales, el mínimo}$

se alcanzará en algún vértice de la región factible.

$$\text{Punto de corte de } y = 4 \text{ y } 4x + 2y = 24: \left. \begin{array}{l} y = 4 \\ 4x + 2y = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{24 - 8}{4} = 4 : (4, 4).$$

$$\text{Punto de corte de } y = 4 \text{ y } 4x + 2y = 32: \left. \begin{array}{l} y = 4 \\ 4x + 2y = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{32 - 8}{4} = 6 : (6, 4).$$

$$\text{Punto de corte de } y = 8 \text{ y } 4x + 2y = 24 :$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 8 \\ 4x + 2y = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{24 - 16}{4} = 2 : (2, 8).$$

$$\text{Punto de corte de } y = 8 \text{ y } 4x + 2y = 32: \left. \begin{array}{l} y = 8 \\ 4x + 2y = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{32 - 16}{4} = 4 : (4, 8).$$

Se cumple que: $f(4, 4) = 4 + 4 = 8$, $f(6, 4) = 6 + 4 = 10$, $f(2, 8) = 2 + 8 = 10$, $f(4, 8) = 4 + 8 = 12$

Por tanto el envío máximo es 12 con 4 lotes de alimentos y 8 de medicamentos.

(22) Una empresa de excavaciones y movimientos de tierra va a realizar un pedido de gasóleo A para sus vehículos de transporte (a un precio de 0.90 euros el litro) y B para la maquinaria (a 0.70 euros el litro). Como poco, se necesitan 1 000 litros de gasóleo A, y como mucho 3 600 de gasóleo B. En total, entre ambos tipos de gasóleo, no debe pedir más de 5 000 litros. Además, se quiere pedir por lo menos 1 000 litros más de gasóleo B que de gasóleo A.

- a) ¿Cuántos litros de cada tipo de gasóleo se pueden pedir? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.
b) ¿Cuál es la composición del pedido más barato? ¿Y la del más caro?

Solución: Sea x : nº de litros de gasóleo A, y : nº de litros de gasóleo B.

a) **Región factible:** (En miles) ABCD, A(1, 2), B(1, 3.6), C(1.4, 3.6), D(2, 3).

b) **Más barato:** $F(x, y) = 0.9x + 0.7y$; mínimo en A con 1 000 l de A y 2 000 de B. Coste 2 100 €.

Más caro: $F(x, y) = 0.9x + 0.7y$ máximo en D con 2 000 de A y 3 000 de B. Coste: 3 900 €.

(23) En la remodelación de un centro de enseñanza se quiere habilitar un mínimo de 8 nuevas aulas, entre pequeñas (con capacidad para 50 alumnos) y grandes (con capacidad para 120). Como mucho, un 25 % de aulas podrán ser grandes. Además, el centro necesita que se habilite al menos 1 aula grande, y no más de 15 pequeñas.

- a) ¿Qué combinaciones de aulas de cada tipo se pueden habilitar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.
b) ¿Cuál es el conjunto mínimo de aulas pequeñas que se pueden habilitar? Si se quiere que la capacidad total conseguida con las aulas habilitadas sea lo mayor posible ¿cuántas tendría que hacer de cada tipo? ¿Cuántos alumnos cabrían en total?

Solución: Sea x : nº de aulas pequeñas, y : nº de aulas grandes.

a) **Región factible:** ABCD, A(7, 1), B(6, 2), C(15, 5), D(15, 1).

b) **Mínimo de aulas pequeñas:** $F(x, y) = x$; en B con 6 pequeñas y 2 grandes. **Máximo de capacidad** $F(x, y) = 50x + 120y$; máximo en C con 15 pequeñas y 5 grandes. Capacidad 1 350 alumnos.

(24) En una empresa se está discutiendo la composición de un comité para negociar los sueldos con la dirección. En el comité habrá sindicalistas e independientes. El número total de miembros no deberá ser inferior a 10 ni superior a 20. Al menos un 40 % del comité serán sindicalistas. El número de independientes será como poco una cuarta parte del de sindicalistas.

- a) ¿Qué combinaciones de miembros de cada tipo puede tener el comité? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede haber 4 sindicalistas y 16 independientes?
b) Si se quiere que el número de independientes sea máximo, ¿cuál será la composición del comité?

Solución: Sea x : nº de sindicalistas, y : nº de independientes.

a) **Condiciones:** $x \geq 0$, $y \geq 0$, $10 \leq x + y \leq 20$; $x \geq (40/100)(x + y)$; $y \geq x/4$. **Región factible:** ABCD, A(4, 6), B(8, 2), C(16, 4), D(8, 2). NO.

b) **Máximo de independientes:** $F(x, y) = y$; en B con 8 sindicalistas y 12 independientes.

CAPÍTULO 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. – Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} 2 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-5} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{10}} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{10}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{13}} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{13}} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -1} x^6 & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \end{array}$$

Solución: a) 2; b) 0; c) 1/9; d) $-\infty$; e) -7; f) $+\infty$ g) 0; h) $-\infty$; i) 0; j) 1; k) 0; l) $+\infty$

2. – Halla los siguientes límites:

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[7]{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[7]{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^7} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^7} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{7})^x & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{7})^x & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 7^{\frac{1}{x}} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 7^{\frac{1}{x}} \\ \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} & \text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} & \text{q) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} \\ \text{r) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x & \text{s) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x & \text{t) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{u) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x^2} & \text{w) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2} \end{array}$$

Solución: a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\infty$; e) 0^+ ; f) 0^- ; g) $+\infty$; h) 0^+ ; i) $+\infty$; j) 0^+ ; k) 1; l) 1; m) $+\infty$; n) $-\infty$; ñ) $+\infty$; o) $+\infty$; p) 0^+ ; q) 0^+ ; r) $+\infty$; s) 0^+ ; t) 0; u) $+\infty$; v) $+\infty$; w) $+\infty$.

3. – Halla los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 2} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16}{x - 2} \end{array}$$

Solución: a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 1/3; d) 1/3; e) $-\infty$; f) $-\infty$; g) 1; h) 0; i) 0; j) 0; k) 1; l) 0.

4. – Determina el límite de estas funciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x + 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6) & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x + x^2 - x^3) \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{x - 4}{2}\right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)(2x - 3) & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^3 + 1} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 8x^2 - x + 8) \\ \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 2}{3x^3 - 7x + 1} & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 16}{35} & \text{o) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2 - x^3}{2x^2 - 5x - 4} \end{array}$$

Solución: a) $+\infty$; b) 0; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $+\infty$; g) 0; h) 1; i) $+\infty$; j) $+\infty$; k) $-\infty$; l) $-\infty$; m) $+\infty$; n) 0; ñ) $+\infty$; o) $-\infty$.

5. – Determina los límites de estas funciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3} \end{array}$$

Solución: a) 1/2; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) 1; f) 7/2; g) 1; h) 1/6

6. – Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^4 & \text{c)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{x^3} \right] & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^{-2}}{5} \right] & \text{e)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^5}{3} \right] & \text{f)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} \\ \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{x^5} \right] & \text{h)} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x} & \text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} & \text{j)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3} \right]^x & \text{k)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}} & \text{l)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} \right] \end{array}$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-4} = \infty^{-4} = 0$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^4 = 4(-\infty)^4 = 4 \times \infty = \infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{(+0)^3} = \frac{3}{+0} = \infty$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{5} = \frac{(0)^{-2}}{5} = \frac{1}{+0} = \infty$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5}{3} = \frac{0^5}{3} = \frac{0}{3} = 0$;

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$; g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^5} = \frac{2}{(-\infty)^5} = -\frac{2}{\infty} = 0$;

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$; i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} = 3^{-(-\infty)} = 3^{\infty} = \infty$; j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^{\infty} = 0$;

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$; l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} \right) = \frac{2}{\infty^2 + 1} + \frac{3}{\infty + 2} = 0 + 0 = 0$

7. – Resuelve los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3 + 1} \right) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{1 - 2x} \cdot \frac{5x^3}{x^2 + 12} \right) & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{5x} + \frac{6x - x^2}{3x} \right) \end{array}$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x^3 - 6x}{5x^4 + 5x} = 0$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{1 - 2x} \cdot \frac{5x^3}{x^2 + 12} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 5)(x^2 + 12)}{5x^3(1 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{-10x^4} = -\frac{1}{10}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{5x} + \frac{6x - x^2}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 + 9x + 30x - 5x^2}{15x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 39x}{15x} = -\infty$

8. – Halla los siguientes límites de funciones:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x) & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x) & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 - \frac{3}{x^2} \right) \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3)^x & \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x^2 - 3) & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x^2 + 1)^2 + 4x \right] \end{array}$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 12x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \sqrt{\infty} = \infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = \infty$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 - \frac{3}{x^2} \right) = (-\infty)^3 - \frac{3}{(-\infty)^2} = -\infty - 0 = -\infty$;

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2) = -\infty^2 = -\infty$;

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3)^x = (2\infty - 3)^{\infty} = \infty^{\infty} = \infty$;

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$;

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x^2 + 1)^2 + 4x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = (-\infty)^4 = \infty$.

9. – Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^3 - 7x + 2]$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x^2 - 5x + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} [4x^4 - 7x + 5]$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} [-3x^5 + 2x - 4]$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^2 + 3x - 2]$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{-2x^2 + 4x - 3}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 7}}{2x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2}}{\sqrt[3]{4x^2 + 5}}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x + 1}{7x^4 - 2x^2}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 5x + 1}{2x^3 - 3}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1 - x^3}$$

Solución: a) $+\infty$; b) 0; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) -1 ; g) $1/2$; h) $+\infty$; i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; j) $-\infty$; k) 0; l) 0.

10. – Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{1 + 4x})$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x})$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x})$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1 - 2x^3 - x}{2x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x} = -\frac{1}{2};$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} - x)(\sqrt{x^2 - 2x} + x)}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1;$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{1 + 4x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - \sqrt{1 + 4x})(2x + \sqrt{1 + 4x})}{2x + \sqrt{1 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x}{2x + \sqrt{1 + 4x}} = \infty;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 3x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x} = \frac{1}{2};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x}) = -\infty - \infty = -\infty;$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4x})(x - \sqrt{x^2 - 4x})}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 4x)}{2x} = 2;$$

11. - Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1} & \text{b)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{6x+2} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} \\ \text{e)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} & \text{f)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} & \text{g)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} & \text{h)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1-x} \end{array}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{x} = 2 \Rightarrow ; \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1} = e^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{6x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{6x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (6x+2) \log \left(1 - \frac{3}{x}\right) = -3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x+2}{x} = -18 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{6x+2} = e^{-18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad \log \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x+2) \log \left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{4x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} = e^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad \log \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x+1) \log \left(\frac{x}{x+3}\right) = -3 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x+3} = -9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = e^{-9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) \log \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+6) \log \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x+6)}{x^2+1} = \\ &= -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \log \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left(\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \log \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1-x} = e^2 \end{aligned}$$

12. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 2x} - x]$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} \right]$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} - \frac{3}{x + 2} \right]$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} \right]$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1;$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2 - 3x + 9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 3x + 9}{x-3} = \frac{(-3)^2 - 3(-3) + 9}{-3-3} = -\frac{9}{2};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1} - \frac{3}{x + 2} \right) = \frac{2}{\infty^2 + 1} - \frac{3}{\infty + 2} = 0 - 0 = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty$

13. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4^x)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} \right)^{x^2 - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \right)^{x^2 - 3x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3^{-x})$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)]$

Solución: a) $-\infty$; b) 0; c) e^{-2} ; d) 0; e) $+\infty$; f) 1; g) 3.

14. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+1} \sqrt{x^2 + 1} \right]$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{9x^2 + 2x - 3} - 3x]$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})]$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 2}{x+1} - \frac{x^2 + 1}{x} \right]$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - x - 5} \right]^{\frac{x^2}{2}}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4 - 3x}{5 - 3x} \right]^{x-3}$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^2 + 1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = 2;$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 2x - 3} - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 2x - 3} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 3x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2x - 3 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 2x - 3} + 3x} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})) = \lim_{x \rightarrow \infty} ((\sqrt{x} \sqrt{x+3} - x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} \sqrt{x+3} - x)(\sqrt{x} \sqrt{x+3} + x)}{\sqrt{x} \sqrt{x+3} + x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x} \sqrt{x+3} + x} = \frac{3}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x+1} - \frac{x^2 + 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - (x^3 + x^2 + x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1;$

e) $\log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - x - 5} \right)^{\frac{x^2}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\left(\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - x - 5} \right)^{\frac{x^2}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \log \left(\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - x - 5} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2} \frac{-5x + 5}{2x^2 - x - 5} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - x - 5} \right)^{\frac{x^2}{2}} = e^{-\infty} = 0$

f) $\log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 3x}{5 - 3x} \right)^{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\left(\frac{4 - 3x}{5 - 3x} \right)^{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-3) \log \left(\frac{4 - 3x}{5 - 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{5-3x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4 - 3x}{5 - 3x} \right)^{x-3} = e^{\frac{1}{3}}$

15. – Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{3x+3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}}$

Solución: a) $1/3$; b) $-2/3$; c) $-\infty$; d) 0 .

16. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12}$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2(x+\frac{1}{2})} = \frac{3}{5}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{0}{3} = 0$;

c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x(x+2)(x+3)}{(x+2)^2(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x(x+3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{-2}{-9} = \frac{2}{9} \neq$
 $\neq \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x(x+3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{-2}{0} = -\infty$

Por tanto no existe el límite.

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+2)(x+3)}{(x+2)^2(x-3)} = \frac{0}{-6} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +3} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x \rightarrow +3^+} \frac{x(x+2)(x+3)}{(x+2)^2(x-3)} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +3} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \lim_{x \rightarrow +3^-} \frac{x(x+2)(x+3)}{(x+2)^2(x-3)} = -\infty$

Por tanto no existe el límite.

17. – Calcula estos límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-3}{(x-1)^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-3}{(x-1)^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12}$

Solución: a) -1 ; b) -1 ; c) $-\infty$; d) $+\infty$; e) $-\infty$; f) $-\infty$; g) $+\infty$; h) $-\infty$.

18. – Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3}{x+2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-3}{x+2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3}{x+2} = \frac{3^2-3}{3+2} = \frac{6}{5}$;

b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-3}{x+2} = \frac{(-2)^2-3}{-2+2} = \frac{1}{0} = -\infty \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2-3}{x+2} = \frac{(-2)^2-3}{-2+2} = \frac{1}{0} = +\infty$

Por tanto no existe el límite.

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2})} = 1$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 0} = \infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-\sin 0} = -\infty$. **No existe el límite**

19. – Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{5x^2 - 13x - 6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^2}{x^2 + x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{2x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{2 - \sqrt{8-x}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2 + x}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{\sqrt{x+7} - 3}$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x(x+3)} = \frac{3}{4};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)x}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{(x-1)^2} = 1;$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{5x^2 - 13x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{10x - 13} = \frac{6}{30 - 13} = \frac{6}{17};$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^3}{3x^2} = \frac{4(-1)^3}{3(-1)^2} = -\frac{4}{3};$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^3 - 3x)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x}{x+1} = 0;$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \infty \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty;$

Por tanto, no existe el límite

g) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x}}{2x} = \frac{\sqrt{1-0}}{-0} = \frac{1}{-0} = -\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x}}{2x} = \frac{\sqrt{1-0}}{+0} = \frac{1}{+0} = \infty.$ Por tanto no existe el límite;

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1)(x+1) = 4;$

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(x+3)} = \frac{1}{12\sqrt{3}};$

j) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{2 - \sqrt{8-x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{5+x}}}{\frac{1}{2\sqrt{8-x}}} = -\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{8-x}}{\sqrt{5+x}} = -\frac{2}{3};$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x})(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})}{(x^2 + x)(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2};$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+16} - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+9}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+16}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+16}}{\sqrt{x+9}} = \frac{4}{3};$

n) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} = -1;$

o) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{\sqrt{x+7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x\sqrt{x+7}}{\sqrt{x^2+5}} = 4;$

20. – Calcula los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} \right] \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} \right] \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} \right] \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3(-3)^2}{2(-3)} = -\frac{9}{2};$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty;$
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1} \cdot \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}{(x^2 + 1)x(x-2)} = \frac{16}{5};$
 d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+1)}{x-1} = \frac{4}{+0} = +\infty;$

21. – Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x}{x^2} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5}{|x-3|} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} [x-1]_{x-2}^3 \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 + 4}{x + 4} \right]^{\frac{x}{x-1}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-2}{x^2 - 1} \right] & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x-4}}{x-2} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{x^3} \cdot \frac{x^2 + 2x}{3} \right] & \text{j) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5x-2}{5x+3} \right]^{3x} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2 + 2} \right) \right] \end{array}$$

Solución: a) No existe: El límite a la izquierda es $-\infty$ y el límite a la derecha es $+\infty$;
 b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) e^3 ; e) $e^{1/5}$;
 f) No existe: El límite a la izquierda es $-\infty$ y el límite a la derecha es $+\infty$;
 g) $+\infty$; h) 8; i) $+\infty$; j) e^{-3} ;
 k) No existe: El límite a la izquierda es $-\infty$ y el límite a la derecha es $+\infty$.

22. – Calcula los siguientes límites: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2 + \ln x}{3 + \ln x^2} \right)^{\frac{-3}{x-1}}$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x} \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{1-x} \sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{\frac{3}{2}};$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2 + \ln x}{3 + \ln x^2} \right)^{\frac{-3}{x-1}} = \left(\frac{2 + \ln 1}{3 + \ln 1} \right)^{\frac{-3}{+0}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-\infty} = \infty;$

23. – Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \leq x \end{cases} \text{ en } x=3 \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2+3x-1 & \text{si } x < 1 \\ x+2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \text{ en } x=1$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x-2) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2x = 6$. Por tanto no existe el límite;
 b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+3x-1) = 3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} - 4x}{4^{\frac{1}{x}} + 3x - 2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}} + 3x^2 + 1}{5^{\frac{3}{x}} - 3 + 2x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{\frac{4}{x}} - 2x^2 + 3}{3^{\frac{1}{x}} - 3 - 2x}$$

Solución: a) $-3/4$; b) $-1/3$; c) $-1/3$; d) $+\infty$.

25. – Calcula el valor de los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+7}}{-1} = -\frac{3}{4};$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4} = 1/3.$

26. – Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x+5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ calcula: a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

¿Tiene alguna discontinuidad?

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x+5) = 9;$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (3x-1) = -10;$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x-1) = -1;$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+5) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$

Por tanto no existe el límite y f no es continua en 0 (en los demás puntos no hay problema ya que son polinomios)

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 2 \\ 2x-1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-1) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) = 4$. **Por tanto no existe el límite y f no es continua en 2 (en los demás puntos no hay problema ya que son polinomios)**

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+1) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-1) = 3$. **Por tanto no existe el límite y f no es continua en 2.**

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x-1) = 7 \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} 5 = 5$. **Por tanto no existe el límite y f no es continua en 4 (en los demás puntos no hay problema ya que son polinomios).**

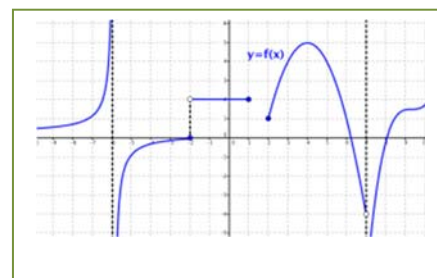
28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:

Solución: En -6 tiene una discontinuidad de salto infinito.

En -2 tiene una discontinuidad de salto finito.

En (1, 2) no está definida por lo que no es continua.

En 7 tiene una discontinuidad de salto infinito.



29. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x-5}{\sqrt{x+1}} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Solución:

a) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. En 4 tiene una discontinuidad de salto finito. En $x = 2$ es continua.

b) Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En 0 tiene una discontinuidad de salto finito. En $x = 3$ es continua.

30. – Estudia la continuidad de las funciones:

$$a) f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$c) f(x) = |x-3|$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución: a) $x^2 + x = x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$. Entonces f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$ (en -1 tendrá una discontinuidad evitable);

b) Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \neq f(x_0) = 1$, luego f no es continua (discontinuidad evitable).

Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$ f es continua ya que cerca del punto es constante.

c) f es continua en todo punto al ser composición de funciones continuas (valor absoluto y polinomio).

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{-\infty} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\infty} = \infty$, luego no existe el límite y f no es continua en 0 , con una discontinuidad de primera especie de salto infinito. En los demás puntos f es continua al no anularse el denominador.

e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 2 + 1 = 3$, luego existe el límite y coincide con $f(2)$, por lo que f es continua en 2 . En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es polinómica.

31. – Estudia la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $(2, 5)$.

Solución: f es cociente de funciones continuas, no se anula el denominador (sólo se anula en el 0 que no pertenece al intervalo), luego f es continua en $(2, 5)$

32. – Estudia la continuidad de las funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < -1 \\ x^2+4x-1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x+11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-4} & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2+4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} -5 - \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g) f(x) = |x^2 - 6x + 5|$$

$$h) f(x) = \begin{cases} |3-x| & \text{si } x \leq 5 \\ \ln e^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = -1+1 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2-3) = 1-3 = -2$, luego no existe el límite y f no es continua en -1 . En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es polinómica.

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x-2) = -3-2 = -5 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2+4x-1) = 1-4-1 = -4$, luego no existe el límite y f no es continua en -1 .

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+4x-1) = 4+8-1 = 11 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+11) = 2+11 = 13$, luego no existe el límite y f no es continua en 2 . En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es polinómica.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4}{x-4} = \frac{4}{0-4} = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = 0-1 = -1$, luego existe el límite y f tiene una discontinuidad evitable en 0 al no estar definida.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-1) = 3-1 = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+0} = \infty$, luego no existe el límite y f no es continua en 3 . En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es cociente de polinomios y no se anula el denominador.

d) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} -2 = -2 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^2+4) = -(-2)^2+4 = 0$, luego no existe el límite y f tiene una discontinuidad en -2 .

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2+4) = -2^2+4 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2$, luego no existe el límite y f no es continua en 2 . En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es un polinomio.

e) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3 = 6 = f(3)$, luego

f es continua en 3 . En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es un cociente de polinomios y no se anula el denominador.

f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-5 - \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-5 + \frac{x}{x}\right) = -4 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-5 - \frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-5 - \frac{x}{x}\right) = -6$,

luego no existe el límite y f tiene una discontinuidad en 0 . En los demás puntos f es continua ya que no se anula el denominador.

g) f es continua en todo punto al ser composición de funciones continuas (valor absoluto y polinomio).

h) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} |3-x| = |3-5| = 2 = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(e^2) = \ln(e^2) = 2$, luego existe el límite y coincide con $f(5)$, por lo que f es continua en 5 . En los demás puntos f es continua ya que cerca de ellos f es composición de funciones continuas o constante.

33. – Determina el valor de a para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Solución: $a = -7/4$.

34. – Determina el valor del parámetro b para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 3 \\ x+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua en todo su dominio.

Solución: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x-3) = 6-3 = 3 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+b) = 3+b \Leftrightarrow b = 0$.

35. – Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$ sea continua en $x = -2$.

Solución: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -4 = f(-2) = k \Leftrightarrow k = -4$.

36. – Calcula m , n , y p para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{si } x < -8 \\ -2m+3 & \text{si } -8 \leq x < -4 \\ x - \frac{1}{n} & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ px & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Solución: $\lim_{x \rightarrow -8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -8^-} \frac{3}{x} = -\frac{3}{8} = \lim_{x \rightarrow -8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -8^+} (-2m+3) = -2m+3 \Leftrightarrow m = \frac{27}{16}$,

$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} (-2m+3) = -\frac{3}{8} = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(x - \frac{1}{n}\right) = -4 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow n = -\frac{8}{29}$,

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} = \frac{45}{8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} px = 2p \Leftrightarrow p = \frac{45}{16}$

37. – Calcula k , en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} kx-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-13 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1+|x| & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{2}x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Solución: a) $k = 7/2$; b) $k = 1$.

38. – El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 3t+a & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \\ -t^2+13t+b & \text{si } 5 < t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b , para que la función sea continua en $t = 2$ y $t = 5$.

Solución: $\lim_{x \rightarrow 2^-} e(t) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3t^2 = 12 = \lim_{x \rightarrow 2^+} e(t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3t+a) = 6+a \Leftrightarrow a = 6$,

$\lim_{x \rightarrow 5^-} e(t) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (3t+a) = 21 = \lim_{x \rightarrow 5^+} e(t) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (-t^2+13t+b) = 40+b \Leftrightarrow b = -19$

39. – Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6 € por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{600+ax^2} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran “muchísimas” unidades?

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 10^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} 6x = 60 = \lim_{x \rightarrow 10^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{600+ax^2} = \sqrt{600+100a} \Leftrightarrow a = 30$;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{600+ax^2}}{x} = \sqrt{a} = \sqrt{30}$

40. – Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3a+3^{\frac{2}{x}}}{4} & \text{si } x < 0 \\ \frac{2+2^x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{b-2^{-x}}{b-2^{-x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Halla a y b para que la función sea continua.

b) Calcula: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0,5} f(x)$

c) Si $a=0$ y $b = \frac{1}{8}$, estudia las discontinuidades.

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{3a+3^{\frac{2}{x}}}{4} \right) = 3a = \lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{2+2^x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a = \frac{4}{9},$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{2+2^x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{b-2^{-x}} = \frac{3}{b-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow b = \frac{7}{2};$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3a+3^{\frac{2}{x}}}{4} \right) = 3a+1 = \frac{7}{3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{b-2^{-x}} = \frac{3}{b} = \frac{6}{7},$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4}{2+2^x} = \frac{4}{2+\sqrt{2}};$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{3a+3^{\frac{2}{x}}}{4} \right) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{2+2^x} = \frac{4}{3}. \text{ Por tanto } f \text{ tiene una discontinuidad de}$

salto en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{2+2^x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{b-2^{-x}} = \frac{3}{b-\frac{1}{2}} = -8. \text{ Tiene una discontinuidad de salto en 1.}$$

41. – La función $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo $[-1,2]$ y, sin embargo, no tiene ninguna raíz en dicho intervalo. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

Solución: No, porque la función es discontinua en un punto (concretamente en $x = 0$).

42. – Comprueba que la función $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1,2]$.

Solución: f es continua en $[1, 2]$ (polinomio), $f(1) = -1^3 + 1^2 + 2 = 2 > 0$, $f(2) = -2^3 + 2^2 + 2 = -2 < 0$, por lo que f tiene al menos una raíz en el intervalo $[1, 2]$ (Teorema de Bolzano).

43. – Demuestra que la función $f(x) = -2x^3 + 3x - 8$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-2,2]$. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x+1}$?

Solución: f es continua en $[-2, 2]$ (polinomio), $f(-2) = -2(-2)^3 - 6 - 8 = 2 > 0$,

$f(2) = -2^4 + 6 - 8 = -18 < 0$, por lo que f tiene al menos una raíz en el intervalo $[-2, 2]$ (Teorema de Bolzano).

g es continua en $(-1, 2]$ (cociente de polinomios, no se anula el denominador), $g(2) = \frac{2^3 - 8 - 4}{3} < 0$,

$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x+1} = \frac{(-1)^3 - 2 - 4}{+0} < 0$, por lo que g tiene al menos una raíz en el intervalo: $[-2, 2]$ (Teorema de Bolzano).

44. – Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-3,2]$, donde $f(-3) < 0$ y $f(2) = 5$. ¿Se puede asegurar que la función $g(x) = f(x) - 2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-3,2]$?

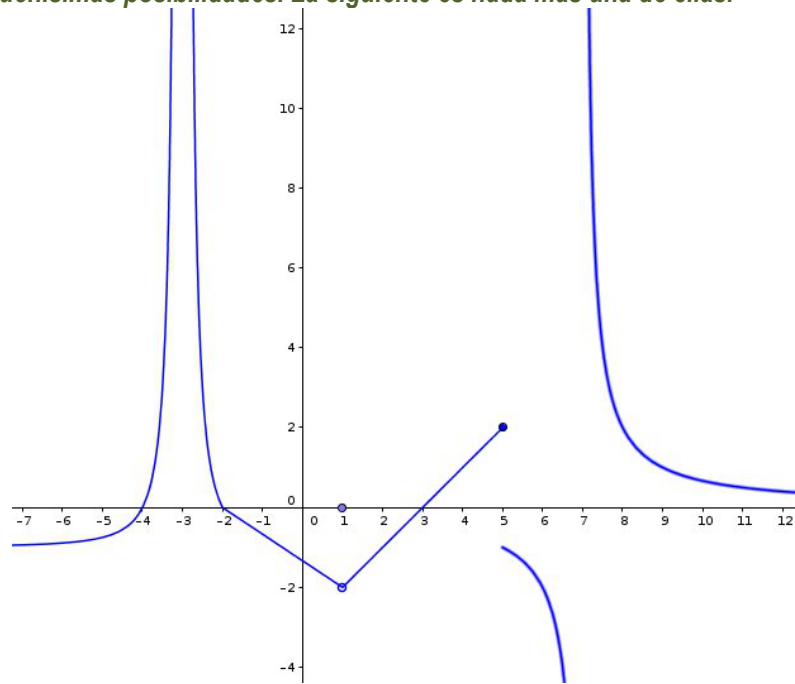
Solución: g es continua en $[-3, 2]$ (diferencia de continuas), $g(-3) = f(-3) - 2 < 0$, $g(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 > 0$, por lo que g tiene al menos una raíz en el intervalo $[-3, 2]$ (Teorema de Bolzano).

45. – Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

Continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1, 5, 7\}$ $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $f(1) = 0$

Discontinuidad de salto finito en $x=5$ y de salto infinito en $x=7$ $f(-2) = 0$

Solución abierta: Hay muchísimas posibilidades. La siguiente es nada más una de ellas.

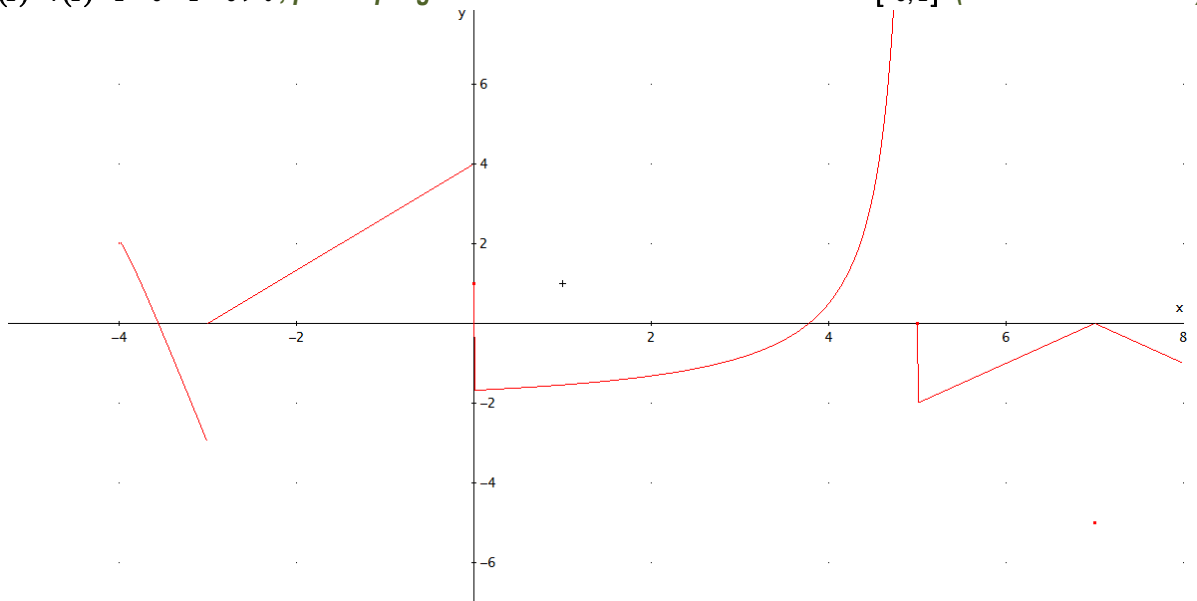


46. – Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que:

- $\text{Dom} f(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$
- $f(-4) = 2$, $f(0) = 1$, $f(5) = 0$, $f(7) = -5$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -3 & \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4 & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -2 & \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

Solución: g es continua en $[-3, 2]$ (diferencia de continuas), $g(-3) = f(-3) - 2 < 0$,

$g(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 > 0$, por lo que g tiene al menos una raíz en el intervalo $[-3, 2]$ (Teorema de Bolzano).



AUTOEVALUACIÓN

1. Los límites de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 7x^2 + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ a la izquierda de 0 y a la derecha de 0 valen:

a) 0, 0 b) 3, 7 c) 2, 3 d) No existen pues $f(x)$ no está definida en 0

Solución: c).

2. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3^x - 3^2}{3^{x+1}} \right)$ es:

a) 0 b) 1 c) $+\infty$ d) $1/3$.

Solución: d).

3. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x - 5}{x - x^2 + 2} \right)$ es:

a) -3 b) 3 c) ∞ d) $-5/2$

Solución: a).

4. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})$ es:

a) 0 b) 3 c) ∞ d) 7

Solución: a)

5. El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4}}{x}$ es:

a) 0 b) 4 c) ∞ d) $-1/4$

Solución: d)

6. Para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + a & \text{si } x < 3 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ sea continua a debe valer:

a) 3 b) -1 c) 17 d) $1/2$

Solución: c)

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

a) $f(x) = \log(x-2)$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ c) $f(x) = \sqrt{x-2}$ d) $f(x) = \sin(\cos(x-2))$

Solución: a)

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal $y = 2$.

a) $f(x) = \log(x-2)$ b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 2}$ c) $f(x) = \sqrt{x-2}$ d) $f(x) = \tan(\cos(x-2))$

Solución: b)

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{27} + 5}{e^x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2}}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3}}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^x - 5}$

Solución: d)

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x) = |x^2 - 9|$ son:

a) 0 y 3 b) 3 y -3 c) Ninguno d) 0, 3 y 9

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadesol.pdf

<http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examen selectividad A4.pdf>

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

1.- Calcula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 8}{2^{n+1}} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 1}{x^4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{9x}$$

Solución: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 8}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 8}{2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2},$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^4 + 1} - 1)(\sqrt{x^4 + 1} + 1)}{x^4 (\sqrt{x^4 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 (\sqrt{x^4 + 1} + 1)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2 (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - \sqrt{-x+9}}{9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9} - \sqrt{-x+9})(\sqrt{x+9} + \sqrt{-x+9})}{9x (\sqrt{x+9} + \sqrt{-x+9})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{9x (\sqrt{x+9} + \sqrt{-x+9})} = \frac{1}{27}$$

2.- Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ Determina los valores de a para los que la

función es continua.

Solución: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x - 3} = \frac{12 - 9a}{-0}$. Para que el límite sea finito ha de ser $12 - 9a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$

En ese caso:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x - 3a}{1} = 12 - 3a = 8 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 1) = 8 = f(3)$$

Entonces f es continua en 3 y por tanto en $\mathbb{R}$ (en los demás puntos no hay problema)

3.- Dada la función $F(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, responde razonadamente a las siguientes cuestiones.

a) ¿Para qué valores de a la función $F(x)$ es continua en $x = 1$?

b) Si $F(x)$ es continua cuando $x \rightarrow x_0$ entonces no existe $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$, ¿es cierto?

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3-ax^2) = 3-a \Leftrightarrow a=1$

b) No, ha de existir el $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$

4.- Se ha investigado el tiempo (T , en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de

entrenamiento de los deportistas (x , en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-5) \cdot (x-15)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿y en menos de 2?

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 30^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 30^-} \frac{300}{x+30} = 5 = \lim_{x \rightarrow 30^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} \left(\frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 \right) = 5 = T(30)$

Entonces T es continua en 30 y por tanto en su dominio (en los demás puntos es cociente de polinomios y no se anula el denominador)

b) Como T es decreciente al estar las x en el denominador y $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 \right) = 0 + 2 = 2$,

nunca podrá hacer la prueba en menos de 2 minutos ni de 1 minuto.

5.- El rendimiento de un estudiante en un examen de una hora de duración viene dado por la siguiente expresión ($f(x)$

representa el rendimiento, en tanto por ciento, en el instante x , medido en horas): $f(x) = \begin{cases} 300x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 0,6 \\ 180(1-x) & \text{si } 0,6 < x \leq 1 \end{cases}$

a) ¿Es el rendimiento una función continua del tiempo?

b) ¿En qué momentos aumenta y en qué momentos disminuye el rendimiento? ¿Cuándo obtiene el mayor rendimiento y cuál es ese rendimiento?

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}^-} 300x(1-x) = 300 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = 72 = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}^+} 180(1-x) = 180 \cdot \frac{2}{5} = 72 = f\left(\frac{3}{5}\right)$

Entonces f es continua en $\frac{3}{5}$ y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es polinómica)

b) Si $x < \frac{3}{5}$, $f'(x) = 300(1-x) - 300x = 300(1-2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, con $f'(x) = 300(1-2x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Si $x > \frac{3}{5}$, $f'(x) = -180 < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente si $x < \frac{1}{2}$ (rendimiento aumenta),

f es estrictamente decreciente si $x > \frac{1}{2}$ (rendimiento disminuye) y tiene el máximo absoluto en $\frac{1}{2}$

(momento de mayor rendimiento), que vale: $300 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 75$ (rendimiento máximo).

6.- La energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que

amanece ($f(x)$ es la energía producida a las x horas de haber amanecido): $f(x) = \begin{cases} 10x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{1024}{x^2} & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$

a) Estudia la continuidad de la función f en su dominio.

b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánto produce en ese momento?

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^-} (10x - x^2) = 80 - 64 = 16 = \lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1024}{x^2} = \frac{1024}{64} = 16 = f(8)$

Entonces f es continua en 8 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es cociente de polinomios y no se anula el denominador)

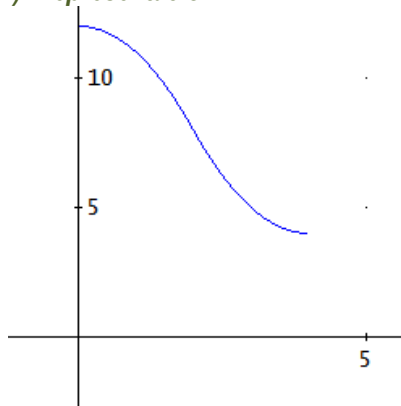
b) Si $x < 8$, $f'(x) = 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} = 5$, con $f'(x) = 10 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > 5$.

Si $x > 8$, $f'(x) = -1024 \cdot \frac{2}{x^3} < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente si $x < 5$,

f es estrictamente decreciente si $x > 5$ y tiene el máximo absoluto en 5 (momento de mayor producción), que vale: $50 - 5^2 = 25$ (producción máxima).

- 7.- El tiempo que un empleado tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia del operario es $f(x)$ representa el tiempo, en horas, que tarda en realizar la tarea un empleado que lleva contratado un tiempo x , medido en meses): $f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x-4)^2 + 4 & \text{si } 2 < x \leq 4 \end{cases}$. a) Representa gráficamente la función f . ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de experiencia? b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo? ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea en ese instante? ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los primeros cuatro meses de contrato?

Solución: a) Si $x < 2$, f es una parábola con las ramas hacia abajo y vértice $(0, 12)$, si $x > 2$, f es una parábola con las ramas hacia arriba y vértice $(4, 4)$. Representación:



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (12 - x^2) = 12 - 4 = 8 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ((x-4)^2 + 4) = (-2)^2 + 4 = 8 = f(2)$$

Entonces f es continua en 2 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es polinómica)

b) Si $0 < x < 2$, $f'(x) = -2x < 0$. Si $2 < x < 4$, $f'(x) = 2(x-4) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente (como se ve en el dibujo) y tiene el mínimo absoluto en 4 (momento en que tarda menos tiempo), que vale: $(4-4)^2 + 4 = 4$ (tiempo mínimo). Como el tiempo mínimo es 4, nunca puede realizar la tarea en menos de 3 horas.

- 8.- Un proveedor cobra el aceite según el volumen del pedido. Así, la función que relaciona el importe del pedido con el volumen del mismo es $f(x)$ (en euros), de un pedido de x litros de aceite): $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 < x < 30 \\ 2x + 30 & \text{si } 30 \leq x \end{cases}$. a) ¿Es el importe una función continua del volumen del pedido? b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y represéntala gráficamente.

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^-} 3x = 3 \times 30 = 90 = \lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} (2x + 30) = 60 + 30 = 90 = f(30)$

Entonces f es continua en 30 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es polinómica).

b) Si $x < 30$, $f'(x) = 3 > 0$, si $x > 30$, $f'(x) = 2 > 0$, por lo que f es estrictamente creciente en su dominio al ser continua en 30.

Si $x < 30$, f es recta de pendiente 3 que pasa por el origen, si $x > 30$, f es una recta de pendiente 2 que pasa por el: $(30, 90)$. Representación:

- 9.- La velocidad de un coche de carreras viene dada por la siguiente expresión: $f(x) = \begin{cases} 110 + 12x + 6x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 350 - \frac{450}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ donde

x representa el tiempo, en segundos, y $f(x)$ representa la velocidad del coche, en km/h. a) ¿Es la velocidad una función continua del tiempo? b) ¿Disminuye la velocidad del coche en algún instante?, ¿se podrían alcanzar los 350 km/h de velocidad con este coche?

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (110 + 12x + 6x^2) = 110 + 36 + 54 = 200 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (350 - \frac{450}{x}) = 350 - 150 = 200 = f(3)$

Entonces f es continua en 3 y por tanto en su dominio (cerca de los demás puntos es cociente de polinomios y no se anula el denominador); b) Si $x < 3$, $f'(x) = 12 + 12x > 0$, si $x > 3$, $f'(x) = \frac{450}{x^2} > 0$, por lo que

f es estrictamente creciente en su dominio al ser continua en 3 y nunca disminuye la velocidad. La velocidad máxima es $f(3) = 350 - \frac{450}{3} < 350$, por lo que no se alcanzan los 350 km/h.

CAPÍTULO 6: DERIVADAS

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. $C(x) = x^2 + 5x + 1$ es la función de costes donde $C(x)$ indica el coste de fabricación de x unidades. Calcula la tasa de variación media entre 0 y 500 unidades, y la tasa de variación media entre 200 y 800 unidades.

Solución: $C(0) = 1$; $C(500) = 250\,000 + 2\,500 + 1$; $TVM(0, 500) = 252500/500 = 505$; $TVM(200, 800) = 1\,005$.

2. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: $B(x) = x^2 + 3x + 2\sqrt{x}$, donde $B(x)$ indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 10 y 50 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 100 y 400 unidades.

Solución: $TVM(10, 50) = 63,2$; $TVM(100, 400) = 503,07$.

3. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = 2x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por $I(x) = 3x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 400 y 4 000 trabajadores.

Solución: $TVM(4\,000, 400) = 4\,400$ aproximadamente;

4. Calcula la derivada de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$ teniendo en cuenta la definición de dicha función:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ y comprueba que no es derivable.}$$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1. \text{ La función no es derivable en } x = 0.$$

5. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

a) $f(x) = x^3$ en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 12$.

b) $g(x) = x + 2$ en $x = a \Rightarrow g'(a) = 1$.

Solución: a) $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$.

b) $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x + 2 - (a + 2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1$.

6. Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de $f(x) = |x^3|$.

(Selectividad)

Solución: $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^3}{x} = 0. \text{ La función es derivable en } x = 0.$$

7. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

(Selectividad)

Solución: Para $x = 5$ y para $x = -1$, la derivada vale -15 . $f(5) = 35$; $f(-1) = 7$; luego en $(5, 35)$ y en $(-1, 7)$ la recta tangente es paralela a $y = -15x$.

8. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

(Selectividad)

Solución: a) $m = a^2$; b) $a = 1/2$, $m = 1/4$.

9. Comprueba que la derivada n -ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$$f(x) = \frac{1}{x+a} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Solución: Comprobado

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

10. Si f y g son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = 6$, $f'(6) = 4$, $g'(1) = 1$, $g'(2) = 3$, $g'(5) = 1$. Determina el valor de: a) $(f \circ g)'(2)$; b) $(g \circ f)'(1)$; c) $(g \circ f)'(2)$; d) $(f \circ f)'(1)$.

Solución: a) $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2) = f'(6) \cdot 3 = 12$;

b) $(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = g'(2) \cdot 3 = 9$;

c) $(g \circ f)'(2) = g'(f(2)) \cdot f'(2) = g'(5) \cdot 6 = 6$;

d) $(f \circ f)'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1) = f'(2) \cdot 3 = 18$.

11. Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables en un punto x . Pruébese que su producto $u(x) \cdot v(x)$ es derivable obteniendo la expresión de su derivada:

$$D[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

(Selectividad)

Solución: $D[u(x) \cdot v(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x+h) - u(x))v(x+h) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u(x+h) - u(x))}{h} \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(v(x+h) - v(x))}{h} = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log(x^5 - 7x^3)^{12}$ b) $y = \log_2(3x^3 - 5x^2)^7$ c) $y = \ln \sqrt{\frac{(4x^5 - 8x^3)^5}{3x - 2}}$ d) $y = \ln \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$

Solución: a) $y' = \frac{12(5x^4 - 21x^2) \log(e)}{x^5 - 7x^3}$;

b) $y' = \frac{7(9x^2 - 10x) \log_2(e)}{3x^3 - 5x^2}$;

c) $y' = \frac{5}{2} \cdot \frac{20x^4 - 24x^2}{4x^5 - 8x^3} - \frac{3}{2(3x - 2)}$;

d) $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{4 + 28x^5}{x - 2x^6}$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[6]{5x^{11}}$; b) $y = \frac{\sqrt[4]{3x^2} \cdot \sqrt{x}}{3x^3 + 7}$; c) $y = \frac{(3x^4 - 4) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}$; d) $y = \frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x + 5}$.

Solución: a) $y' = \frac{11\sqrt[6]{5x^5}}{6}$;

b) $y' = \frac{\sqrt[4]{3}(-6x^3 + 7)}{(3x^3 + 7)^2}$;

c) $y' = \frac{(27x^4 - 4)\sqrt[3]{7x^5} - (10/3)\sqrt[3]{7x^3}\sqrt{x^2}(3x^4 - 4)}{2\sqrt{x}\sqrt[3]{49x^{10}}}$;

d) $y' = \frac{(7/3)\sqrt[3]{x^4}(2x + 5) - 2\sqrt[3]{x^7}}{(2x + 5)^2}$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = \sqrt{\frac{2x^3 - 7x^9}{4x^5 + 6}} (3x^7 - 5x^5)^3 \quad b) y = \sqrt{\frac{(x^3 + 5x)(4x^3 - 6x)}{2x^4 - 5x}} \quad c) y = \sqrt{\left(\frac{3x^4 + 5x^2}{4x^2 - 6x^5}\right)^4} \quad d) y = \sqrt[3]{5 + \sqrt{5x - \frac{5}{x^5}}}$$

Solución: a) $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x^3 - 7x^9}{4x^5 + 6}} (3x^7 - 5x^5)^3 \left[\frac{6 - 63x^6}{2x - 7x^7} + \frac{63x^2 - 75}{3x^3 - 5x} - \frac{20x^4}{4x^5 + 6} \right]$

b) $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2x^3 - 5}{4x^5 - 14x^3 - 30x}} \left[\frac{16x^7 - 100x^4 + 120x^3 - 210x^2 + 150}{(2x^3 - 5)^2} \right]$

c) $y' = \frac{-27x^6 - 180x^4 - 36x^3 - 225x^2 - 60x}{(4 - 6x^3)^3}$

d) $y' = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{5 + \sqrt{5x - \frac{5}{x^5}}}} \right)^2 \sqrt{\frac{x^5}{5x^6 - 5}} \left[\frac{5x^6 + 25}{x^6} \right]$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log \frac{1 + e^{3x}}{1 - e^{3x}}$ b) $f(x) = (2 - 3x) \log(2 - 3x)$

c) $f(x) = \log \frac{\sqrt{4 - 9\operatorname{sen} x}}{3 + 2 \cos x}$ d) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{\cos x + x \operatorname{sen} x}$

Solución: a) $y' = \frac{6e^{3x} \log(e)}{1 - e^{6x}};$ b) $y' = -3(\log(2 - 3x) + \log(e));$

c) $y' = \frac{-9\cos(x) \log(e)}{2(4 - 9\operatorname{sen}(x))} + \frac{2\operatorname{sen}(x) \log(e)}{3 + 2\cos(x)};$ d) $y' = \frac{x^2}{(\cos x + x \operatorname{sen} x)^2}$

16. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (3x)^{x^5 - 9x^3}$ b) $y = ((2x + 7)^{5x^3 - 6x^2})$ c) $y = (x + e)^{(4x^5 - 8x^3)^5}$ d) $f(x) = (x^x)^x$

Solución: a) $y' = (3x)^{x^5 - 9x^3} ((5x^4 - 27x^2) \ln(3x) + x^4 - 9x^2);$

b) $y' = (2x + 7)^{5x^3 - 6x^2} \left((15x^2 - 12x) \ln(2x + 7) + \frac{2(5x^3 - 6x^2)}{2x + 7} \right);$

c) $y' = (x + e)^{(4x^5 - 8x^3)^5} \left(5(4x^5 - 8x^3)^4 (20x^4 - 24x^2) \ln(x + e) + \frac{(4x^5 - 8x^3)^5}{x + e} \right)$

d) $y' = (x^x)^x (\ln x^x + x(\ln x + 1)) = (x^x)^x (2x \ln x + x)$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log_2 \sqrt{\frac{4 + \operatorname{sen} x}{4 - \operatorname{sen} x}}$ b) $y = e^{\sqrt{6x+8}}$ c) $y = \operatorname{sen} \left(\ln \frac{7x}{\sqrt{1 - 2x^2}} \right)$ d) $y = \ln \frac{5x}{\sqrt{16 - x^2}}$

Solución: a) $y' = \frac{4\cos(x) \log_2(e)}{16 - \operatorname{sen}^2(x)};$

b) $y' = \frac{3e^{\sqrt{6x+8}}}{\sqrt{6x+8}};$

c) $y' = \cos \left(\ln \frac{7x}{\sqrt{1 - 2x^2}} \right) \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{1 - 2x^2} \right);$

d) $y' = \frac{1}{x} + \frac{x}{16 - x^2}.$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

18. a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 27x$. b) ¿Cómo son en $x = 0$? c) ¿Y en $x = 3$? ¿Y en $x = -3$?

Solución: La función es decreciente en $(-3, 3)$ y creciente en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$; En $x = 0$ es decreciente, y creciente en $x = 3$ y $x = -3$.

19. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son $C(x) = x + \sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas, también por trabajador contratado, vienen dados por $I(x) = 3x + x^2$. Por tanto los beneficios $B(x)$ por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios $B(x)$ respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

Solución: $B(x) = x^2 + 2x - \sqrt{x}$; $B'(x) = 2x + 2 + 1/\sqrt{x}$; Es creciente.

20. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = x^4 - 1$; b) $y = 3x^3 + 9$; c) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$; d) $y = 9x^3 - 3x^2$.

Solución: a) $y' = 4x^3$; $y' = 0$ si $x = 0$; $y'' = 12x^2$; $y''' = 24x$; $y^{iv} = 24 > 0$. Tiene un mínimo relativo y absoluto en $(0, -1)$;
 b) $y' = 9x^2$; $y' = 0$ si $x = 0$; $y'' = 18x$; $y''' = 18$; Tiene en $(0, 9)$ un punto de inflexión de tangente vertical creciente. No tiene ni máximos ni mínimos relativos;
 c) $y' = 16x^3 - 4x = 0$ si $x = 0$, $x = 1/2$, $x = -1/2$; $(0, 5)$ es un máximo relativo; No tiene máximos absolutos; $(1/2, 19/4)$ y $(-1/2, 19/4)$ son mínimos relativos y absolutos.
 d) $y' = 27x^2 - 6x = 0$ si $x = 0$, $x = 2/9$; $(0, 0)$ es un máximo relativo; $(2/9, -4/81)$ es un mínimo relativo. No hay máximos o mínimos absolutos.

21. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

Solución: $xy = k$; $y = k/x$; $s = x + k/x$; $s' = 0$ si $x = \pm\sqrt{k}$; $s'' = 2k/x^3$; $s''(\pm\sqrt{k}) = 2/k^2 > 0$; Para $x = \sqrt{k}$, $y = \sqrt{k}$ la suma es mínima.

22. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo $[-5, 5]$ y en el intervalo $[1, 4]$.

Solución: La función es siempre creciente; En $[-5, 5]$ el mínimo absoluto se alcanza para $x = -5$, $y(-5) = -685$ y el máximo absoluto en $x = 5$, con $y(5) = 535$; En $[1, 4]$ el mínimo se alcanza en $x = 1$, $(1, 71)$ y el máximo en $x = 4$, $(4, 368)$.

23. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = |x - 9|$; b) $y = |x + 2| + |x - 3|$.

Solución: a) La función continua y derivable en $\mathbb{R} - \{9\}$; es decreciente en $(-\infty, 9)$ y creciente en $(0, +\infty)$, luego tiene un mínimo relativo en $(9, 0)$ que es también un mínimo absoluto;
 b) La función continua y derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$; La función es decreciente en $(-\infty, -2)$, constante en $(-2, 3)$, y creciente en $(3, +\infty)$. La función no tiene máximos ni relativos ni absolutos. Alcanza mínimo absoluto y relativo para $x \in [-2, 3]$ con $y = 5$.

24. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

Solución: Mínimo absoluto y relativo: $(-2, 0)$. Máximo absoluto: $(4, 6)$; Máximo relativo: $(-4, 2)$.

25. Se considera la función:
- $$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Contesta, razonadamente, a las siguientes preguntas:

- a) ¿Es continua en el punto $x = 0$?
 b) ¿Es derivable en el punto $x = 0$?
 c) ¿Alcanza algún extremo?

(Selectividad)

Solución: a) Es continua en $x = 0$, pues por ambas ramas se acerca a 0;

b) $f'(x) = -e^{-x} < 0$, para $x < 0$, luego es decreciente; $f'(x) = 2x + 1 > 0$ para $x > 0$, luego es creciente. No es derivable, pues la derivada se acerca a 1 por la derecha y a -1 por la izquierda;

c) En $(0, 0)$ tiene un mínimo relativo y absoluto.

26. Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada $f'(x) = (x - 4)^2(x^2 - 8x + 7)$,

- a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f
 b) Halla los máximos y mínimos relativos de f
 c) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f ? Justifica razonadamente la respuesta.

(Selectividad)

Solución: Se anula la derivada en $x = 4$, $x = 6$ y $x = 2$; a) $(-\infty, 2)$ la función es creciente, en el intervalo $(2, 4)$ es decreciente, en el intervalo $(4, 6)$ es decreciente y en $(6, +\infty)$ es creciente;

b) En $x = 2$ tiene un máximo relativo, en $x = 6$ tiene un mínimo relativo;

c) En $x = 4$ hay un punto de inflexión de tangente horizontal, pues la función es creciente a ambos lados del punto, y si se calcula la derivada tercera, $f'''(x) = 12x^2 - 96x + 174$ y $f'''(4) = -18 \neq 0$.

27. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

- a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$; c) $y = x^5 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

Solución: a) La derivada primera no se anula en ningún punto, luego no tiene máximos ni mínimos relativos: El punto $(1, 15)$ es un punto de inflexión;

b) Máximo relativo: $(-\sqrt{\frac{7}{3}}, 8 + \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})$; Mínimo relativo: $(\sqrt{\frac{7}{3}}, 8 - \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})$; Punto de inflexión: $(0, 8)$;

c) No tiene máximos ni mínimos relativos; Punto de inflexión: $(0, 2)$;

d) Mínimo relativo: $(0, -3)$; No tiene puntos de inflexión.

28. Determina el dominio de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, b) $f(x) = \cotg x$, c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$,

- d) $f(x) = \sqrt{x+5}$, e) $f(x) = 2^{\frac{x+2}{x-3}}$, f) $f(x) = \log(x+1)$.

Solución: a) R ;

b) $R - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

c) $R - \{2, -2\}$

d) $\{x \in R; x \geq -5\}$;

e) $R - \{3\}$;

f) $\{x \in R; x > -1\}$.

29. Determina el conjunto imagen (o recorrido) de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$, c) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Solución: a) $\{y \in R; y \geq -4\}$;

b) R ;

c) $\{y \in R; y \geq 0\}$;

30. Analiza la simetría de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Solución: a) Función par;

b) Función impar;

c) No es ni par ni impar, es simétrica respecto de la recta $x = 3$.

31. Estudia las asíntotas y el comportamiento en el infinito de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, b) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$, c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{x - 2}}$

Solución: a) Asíntota horizontal: $y = 0$; b) Asíntota vertical: $x = 2$; Asíntota oblicua: $y = x + 2$;

c) Asíntota vertical: $x = 2$; Asíntota oblicua: $y = x/8 + 2.34$ si $x \rightarrow +\infty$

32. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y la concavidad de:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$, b) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$

Solución: a) *Creciente:* $x < 1$, $2 < x$; *Decreciente:* $1 < x < 2$; *Mínimo:* (2, 9); *Máximo:* (1, 10); *Cóncava:* $(-\infty, 1)$; *Convexa:* $(1, +\infty)$; b) *Siempre creciente;* *cóncava:* $x < 0$; *convexa:* $x > 0$; c) *Creciente:* $0,76 < x < 2$, $2 < x < 5,24$; *Decreciente:* $x < -2$; $-2 < x < 0,76$; $x > 5,24$; *Mínimo:* $x = 0,76$; *Máximo:* $x = 5,24$; *Cóncava:* $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; *Convexa:* $(-2, 2)$.

33. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$

a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas
b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

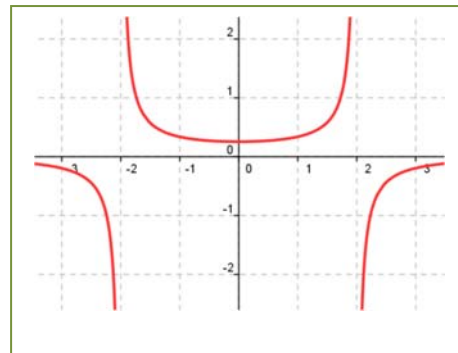
c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo $[-1, 1]$. (Selectividad)

Solución: a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2, -2\}$; *Asíntotas verticales:* $x = 2$, $x = -2$;

Asíntota horizontal: $y = 0$;

b) *Mínimo relativo:* (0, 1/4); *Cóncava:* $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; *Convexa:* $(-2, 2)$; *Ni tiene puntos de inflexión;*

c) *Mínimo absoluto:* (0, 1/4) *que en ese intervalo coincide con el mínimo relativo;* *Máximos absolutos:* $(-1, 1/3)$, $(1, 1/3)$, *se alcanzan en los extremos del intervalo.*

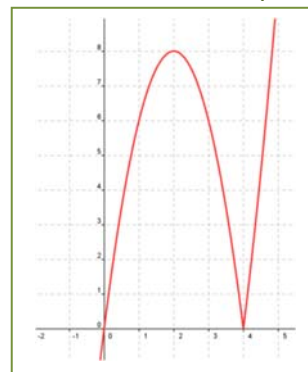


34. Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$

a) Estudia su continuidad y derivabilidad
b) Dibuja su gráfica. (Selectividad)

Solución: *La función es continua en todo $\mathbb{R}$ incluso en $x = 4$, y derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$. No es derivable en $x = 4$, pues la derivada a la izquierda vale -8 y la derivada a la derecha, $+8$, son distintas.*

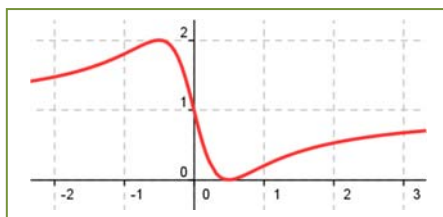
Tiene un máximo relativo en (2, 8) y un mínimo relativo en (4, 0).



35. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo

absolutos de la función $f(x)$. Selectividad Junio 04. Opción A

Solución: *La función no tiene asíntotas verticales, su dominio es todo $\mathbb{R}$. Tiene de asíntota horizontal: $y = 0$; La derivada se anula si $16x^2 - 4 = 0$; es decir, si $x = 1/2$ o $x = -1/2$. El punto $(-1/2, 2)$ es un máximo relativo y absoluto, el punto $(1/2, 0)$ es un mínimo relativo y absoluto.*



36. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.

Solución: *Es el cubo de lado $\sqrt[3]{2} \text{ dm}^3$.*

37. Determina las dimensiones de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio $R = 5 \text{ cm}$. (Ayuda: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).

Solución: *Buscamos los extremos de la función $V = (\pi/3)(25 - x^2)(5 + x)$, cuya derivada se hace nula para $x = -5$, $x = 5/3$; La solución negativa no nos sirve;*

Para $x = 5/3$, se tiene un máximo, con radio $= \frac{10}{3}\sqrt{2} \text{ u}$; altura $= 20/3 \text{ u}$.

38. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima. (Selectividad)

Solución: *Es el triángulo equilátero de lado 8/3.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Concepto de derivada

1. Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Solución: La función valor absoluto: $|x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5, \dots$ ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

Solución: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}, \text{ si } a \neq 0.$

La derivada en $x = 0$ no está definida, se anula el denominador.

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en $x = 1$, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en $x = 1$ ni derivable en dicho punto

(Selectividad)

Solución: La función no es continua en $x = 1$, para $x < 1$, tiende a 0, y para $x > 1$, tiende a 2. Por lo tanto la función ni es continua en $x = 1$, ni derivable en dicho punto.

4. ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta. (Selección Junio 1995)

Solución: La función es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$ al estar formada por funciones polinómicas. Continuidad: Es continua en todo $\mathbb{R}$; En ambas ramas tiende a 0; Derivabilidad: La derivada a la derecha de -4 , es 2 y a la izquierda es -2 , luego no es derivable en $x = -4$; La derivada a la derecha de -2 , es -2 y a la izquierda es 2, luego no es derivable en $x = -2$.

5. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 5$.

Solución: $y = 138 + 53(x - 5)$

6. Un vehículo espacial despegue de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 30x - 0.5x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

Solución: $y = 26x + 8$.

7. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3 + 5$ en $x = 2$.

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en $x = 1$.

c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en $x = 0$.

Solución: a) $y = 13 + 12(x - 2)$; b) $y = 8 + 13(x - 1)$; c) $y = 4$, recta tangente es horizontal.

8. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 2x$.

Solución: a) $(-1, 4), (1, 0)$; b) $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 2), (\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 2)$

9. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt[2]{4x^3}$ en $x = 0$.

Solución: La función no es derivable en $x = 0$, pero existe la recta tangente que es la recta vertical $x = 0$.

10. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

Solución: a) $y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2})$ y $y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2})$; b) La mínima pendiente se obtiene para $x = 0$, y es -12 .

11. Determina los coeficientes a , b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto $A(1, 2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

Solución: $a = 1, b = 1, c = 0$.

12. Determina los coeficientes a , b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + a$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto $A(1, 0)$.

Solución: $a = 3, b = -4, c = 1$.

13. Determina el coeficiente a , para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta $y = x$.

Solución: $a = 3/4$.

Cálculo de derivadas

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$

b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

c) $y = 6x^2 - 4x + 7$

d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$

Solución: a) $y' = 6x + 5$;

b) $y' = 15x^2 - 8x + 3$;

c) $y' = 12x - 4$;

d) $y' = 63x^6 - 24x^5 - 6x^2$.

15. Calcula:

a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x)$

b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)$

c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)$

d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)$

Solución: a) $y' = 6x + 24x^3 - 9$;

b) $y' = 35x^4 - 10x + 6x^2$;

c) $25x^4 - 16x^3 + 9x^2$;

d) $y' = 21x^2 - 48x^5 - 72x^7$.

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - 3/x$

b) $y = 7x^3 - 5x^2 + 4\sqrt{x}$

c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2) \cdot (x^2 - 3x + 1)}$

d) $y = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+3)}{(x^2 - 3)}$

Solución: a) $y' = 10x + 4 + \frac{3}{x^2}$;

b) $y' = 14x^2 - 10x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

c)
$$y' = \frac{\frac{3}{\sqrt{x}}(x+2)(x^2 - 3x + 1) - 6\sqrt{x}(x^2 - 3x + 1 + (x+2)(2x - 3))}{(x+2)^2(x^2 - 3x + 1)^2} =$$

$$= \frac{3(x^3 - x^2 - 5x + 2) - 6x(3x^2 - 2x - 5)}{\sqrt{x}(x+2)^2(x^2 - 3x + 1)^2} = \frac{-15x^3 + 9x^2 + 15x + 6}{\sqrt{x}(x+2)^2(x^2 - 3x + 1)^2}$$

d)
$$y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+3) + \sqrt{x}\right)(x^2 - 3) - \sqrt{x}(x+3)2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{(3x+3)(x^2 - 3) - 4x^2(x+3)}{2\sqrt{x}(x^2 - 3)^2} = \frac{-x^3 + 9x^2 + 9x + 9}{2\sqrt{x}(x^2 - 3)^2}$$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{(x-3) \cdot (2x-4)}{x+5}$

b) $y = \frac{(2x^2 + 5) \cdot (7x-3)}{5x-8}$

c) $y = \frac{(2x+3x^2) \cdot (4x^5 - 5)}{6x+7}$

d) $y = \frac{5(x+2) \cdot (4x-6)}{2(x+5) \cdot (6x+3)}$

Solución: a) $y' = \frac{2(x^2 + 10x - 31)}{(x+5)^2}$;

b) $y' = \frac{140x^3 - 366x^2 + 96x - 205}{(5x-8)^2}$

c) $y' = \frac{2(216x^7 + 174x^6 - 168x^3 - 45x^2 - 105x + 35)}{(6x+7)^2}$

d) $y' = \frac{5(20x^2 + 44x + 71)}{3(x+5)^2(2x+1)^2}$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^3 + 5) \cdot (8x^6 - 7)$;

b) $y = (9x^3 - 3) \cdot (7x^4 + 6)$;

c)

Solución: a) $y' = 3x^2(8x^6 - 7) + (x^3 + 5)48x^5 = 72x^8 + 240x^5 - 21x^2$;

b) $y' = 27x^2(7x^4 + 6) + (9x^3 - 3)28x^3 = 441x^6 - 84x^3 + 162x^2$;

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-2}{x+2}$;

b) $y = \sqrt{x-2} \cdot (6x^3 - 3x)$;

c) $y = \frac{4x^3 - 7x^2}{8x^4 - 4x^3}$;

d) $y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}$

Solución: a) $y' = \frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$

b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} (6x^3 - 3x) + \sqrt{x-2} (18x^2 - 3) = \frac{6x^3 - 3x + 2(x-2)(18x^2 - 3)}{2\sqrt{x-2}} =$
 $= \frac{42x^3 - 72x^2 - 9x + 12}{2\sqrt{x-2}}$

c) $y' = \frac{(12x^2 - 14x)(8x^4 - 4x^3) - (4x^3 - 7x^2)(32x^3 - 12x^2)}{(8x^4 - 4x^3)^2} =$

$= \frac{96x^6 - 160x^5 + 56x^4 - (128x^6 - 272x^5 + 84x^4)}{(8x^4 - 4x^3)^2} = \frac{-32x^6 + 112x^5 - 28x^4}{(8x^4 - 4x^3)^2}$

d) $y' = \frac{\frac{3x^2}{\sqrt{x^3}}(3x+4) - 6\sqrt{x^3}}{(3x+4)^2} = \frac{3x^2(3x+4) - 6x^3}{x\sqrt{x}(3x+4)^2} = \frac{3x^2 + 12x}{\sqrt{x}(3x+4)^2}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^6 - 5x^2)^9$

b) $y = (2x^4 - 7x^6)^5$

c) $y = \sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}$

d) $y = \sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}$

Solución: a) $y' = 9(x^6 - 5x^2)^8 (6x^5 - 10x)$;

b) $y' = 5(2x^4 - 7x^6)^4 (8x^3 - 42x^5)$

c) $y' = \frac{3(2x^7 - 6x^5)^2 (14x^6 - 30x^4)}{2\sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}} = \frac{3x^{14}(2x^2 - 6)^2(7x^2 - 15)}{\sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}}$

d) $y' = \frac{7(3x^4 + 6x^9)^6 (12x^3 + 54x^8)}{5\left(\sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}\right)^4} = \frac{2 \cdot 3^{\frac{7}{5}} x^{27} (1 + 2x^5)^6 (2 + 9x^5)}{5\left(\sqrt[5]{(x^4 + 2x^9)^7}\right)^4}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{2x^3 + 3} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{3x + 4}$

c) $y = (7x^3 + 3)^5 \cdot (4x^5 - 8x^8)$

d) $y = \frac{(5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^2}$

Solución: a) $y' = \frac{3x^2(4x^7 + 6x^2)^6}{\sqrt{2x^3 + 3}} + 6\sqrt{2x^3 + 3} (28x^6 + 12x) (4x^7 + 6x^2)$

b) $y' = \frac{15x^2 + 14x}{3(3x + 4)\sqrt[3]{(5x^3 + 7x^2 - 2)^2}} - \frac{3\sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{(3x + 4)^2}$

c) $y' = 5(7x^3 + 3)^4 (21x^2) (4x^5 - 8x^8) + (7x^3 + 3)^5 (20x^4 - 64x^7)$

d) $y' = \frac{9(15x^2 - 14x)(5x^3 - 7x^2)^8 (9x^4 - 3x^3)^4 - 4(5x^3 - 7x^2)^9 (9x^4 - 3x^3)^3 (36x^3 - 9x^2)}{(9x^4 - 3x^3)^4}$

22. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $y = (5x)^{x^5 - 3x^3}$ b) $y = (3x+6)^{(4x^3 + 2x^2)}$ c) $y = e^{(3x^5 - 6x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{(3x^4 - 4x^5)^3}}$

Solución: a) $\log y = (x^5 - 3x^3) \log(5x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (5x^4 - 9x^2) \log(5x) + \frac{x^5 - 3x^3}{x} = (5x^4 - 9x^2) \log(5x) + x^4 - 3x^2$

$$\Rightarrow y' = ((5x^4 - 9x^2) \log(5x) + x^4 - 3x^2)(5x)^{x^5 - 3x^3}$$

$\log y = (4x^3 + 2x^2) \log(3x+6) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (12x^2 + 4x) \log(3x+6) + \frac{4x^3 + 2x^2}{x+2} \Rightarrow$

b) $\Rightarrow y' = \left((12x^2 + 4x) \log(3x+6) + \frac{4x^3 + 2x^2}{x+2} \right) (3x+6)^{4x^3 + 2x^2}$

c) $\log y = (3x^5 - 6x^3)^5 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 5(3x^5 - 6x^3)^4 (15x^4 - 18x^2) \Rightarrow y' = 15x^{14} (3x^2 - 6)^4 (5x^2 - 6) e^{(3x^5 - 6x^3)^5}$

$\log y = \frac{(3x^4 - 4x^5)^3}{3} \log(5x+1) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (3x^4 - 4x^5)^2 (12x^3 - 20x^4) \log(5x+1) + \frac{5(3x^4 - 4x^5)^3}{3(5x+1)} \Rightarrow$

d) $\Rightarrow y' = \left((3x^4 - 4x^5)^2 (12x^3 - 20x^4) \log(5x+1) + \frac{5(3x^4 - 4x^5)^3}{3(5x+1)} \right) (5x+1)^{\frac{(3x^4 - 4x^5)^3}{3}}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5 + 7x^3}$ b) $y = (e^{3x^3 - 5x^2})^7$ c) $y = e^{(4x^5 + 8x^3)^5}$ d) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5 - 3x^8)^2}}$

Solución: a) $y' = e^{x^5 + 7x^3} (5x^4 + 21x^2);$ **b)** $y' = e^{(3x^3 - 5x^2)^7} 7(3x^3 - 5x^2)^6 (9x^2 - 10x);$

c) $y' = e^{(4x^5 + 8x^3)^5} 5(4x^5 + 8x^3)^4 (20x^4 + 24x^2);$

d) $y' = \frac{1}{3 \left(\sqrt[3]{e^{(5x^5 - 3x^8)^2}} \right)^2} e^{(5x^5 - 3x^8)^2} 2(5x^5 - 3x^8)(25x^4 - 24x^7) = \frac{2}{3} e^{\frac{(5x^5 - 3x^8)^2}{3}} x^9 (5 - 3x^3)(25 - 24x^3);$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \ln((5x^5 - 3x^3)^{12} (3x + 1))$ b) $y = \ln \sqrt{(2x^3 + 5x^2)^3}$

c) $y = \ln \sqrt{\frac{7x^5 - 5x}{2x - 3}}$

d) $y = \ln \sqrt[3]{(3x^4 - 5x^5)^2}$

Solución: a) $y' = \frac{12(5x^5 - 3x^3)^{11} (25x^4 - 9x^2)(3x+1) + 3(5x^5 - 3x^3)^{12}}{(5x^5 - 3x^3)^{12} (3x+1)} = \frac{12(25x^4 - 9x^2)(3x+1) + 3(5x^5 - 3x^3)}{(5x^5 - 3x^3)(3x+1)}$

b) $y = \frac{3}{2} \ln(2x^3 + 5x^2) \Rightarrow y' = \frac{3}{2} \frac{6x^2 + 10x}{2x^3 + 5x^2} = \frac{9x + 15}{2x^2 + 5x}$

c) $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{7x^5 - 5x}{2x - 3} \right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)^2 (35x^4 - 5) - (7x^5 - 5x)2}{(7x^5 - 5x)(2x-3)} = \frac{70x^6 - 14x^5 - 105x^4 + 15}{2(2x-3)(7x^5 - 5x)}$

d) $y = \frac{2}{3} \ln(3x^4 - 5x^5) \Rightarrow y' = \frac{2}{3} \frac{12x^3 - 25x^4}{3x^4 - 5x^5} = \frac{24 - 50x}{9x - 15x^2}$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \ln \frac{5 + 3e^{3x}}{5 - 3e^{3x}}$$

$$b) f(x) = (2x - 3x^2) \ln(5x - 7x^2)$$

$$c) f(x) = \ln \frac{\sqrt{16 - 9\sin x}}{4 + 3x}$$

$$d) y = \sqrt{\ln(5x)}$$

Solución: a) $y' = \frac{9e^{3x}}{5 + 3e^{3x}} + \frac{9e^{3x}}{5 - 3e^{3x}};$

b) $y' = (2 - 6x) \ln(5x - 7x^2) + \frac{(5 - 14x)(2x - 3x^2)}{5x - 7x^2};$

c) $y' = \frac{-9\cos(x)}{2(16 - 9\sin(x))} - \frac{3}{4 + 3x};$

d) $y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(5x)}}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$$

$$b) y = \ln(7e^{2x-3})$$

$$c) f(x) = 5 \ln \frac{3\sin x + 5}{5 - 3\sin x}$$

$$d) y = \ln(\ln \sqrt[3]{4x - 5})$$

Solución: a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\arccos(5x))}} \cdot \frac{-5}{\sqrt{1-25x^2} \arccos(5x)} = -\frac{5}{2\sqrt{\ln(\arccos(5x))}(1-25x^2)\arccos(5x)};$ b) $y' = 2;$

c) $y' = \frac{15\cos(x)}{25 - 9\sin^2(x)};$

d) $y' = \frac{1}{\ln(\sqrt[3]{4x-5})} \cdot \frac{4}{3(4x-5)}$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = \log(x^3 - 5x^5)^8$$

$$b) y = \log_2(8x^2 - 3x^3)^2$$

$$c) y = \ln \sqrt{\frac{(3x^6 - 7x^2)^4}{2x - 1}}$$

$$d) y = \ln \sqrt[4]{(3x^3 + 5x^9)^7}$$

Solución: a) $y = 8 \log(x^3 - 5x^5) \Rightarrow y' = 8 \frac{3x^2 - 25x^4}{x^3 - 5x^5} = \frac{24 - 200x^2}{x - 5x^3}$ (entendiendo log como logaritmo neperiano)

b) $y = 2 \log_2(8x^2 - 3x^3) \Rightarrow y' = 2 \frac{16x - 9x^2}{8x^2 - 3x^3} \log_2 e = \frac{32 - 18x}{8x - 3x^2} \log_2 e$

c) $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3x^6 - 7x^2}{2x - 1} \right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^2 \frac{18x^5 - 14x}{(3x^6 - 7x^2)^2} - (3x^6 - 7x^2) \frac{2}{(2x-1)^2}}{(2x-1)^2} = \frac{15x^6 - 9x^5 - 7x^2 + 7x}{(2x-1)(3x^6 - 7x^2)}$

d) $y = \frac{7}{4} \ln(3x^3 + 5x^9) \Rightarrow y' = \frac{7}{4} \frac{9x^2 + 45x^8}{3x^3 + 5x^9} = \frac{63 + 315x^6}{12x + 20x^7}$

Aplicaciones de la derivada

28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 1/(x-2)^2$.

Solución: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$; $(-\infty, 2)$ creciente; $(2, +\infty)$ decreciente.

29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = (x+3)/(x-4)$.

Solución: Es siempre decreciente en todo su dominio, que es toda la recta real salvo para $x = 4$.

30. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

Solución: La primera derivada se anula para $x = 0$ y $x = 1$;

$(-\infty, 0)$ creciente; $(0, 1)$ decreciente; $(1, +\infty)$ creciente;

Máximo relativo: $(0, 5)$; Mínimo relativo: $(1, 4)$.

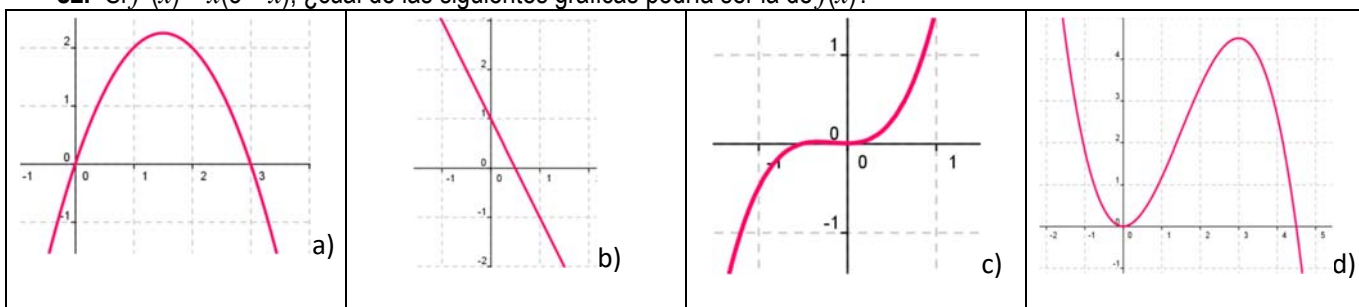
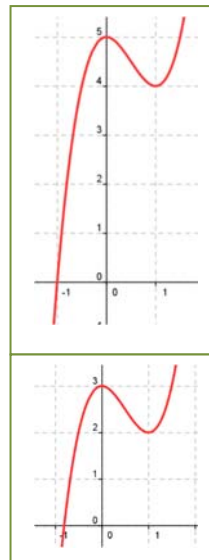
31. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución: Coinciden los intervalos con el problema anterior:

$(-\infty, 0)$ creciente; $(0, 1)$ decreciente; $(1, +\infty)$ creciente;

Máximo relativo: $(0, 3)$; Mínimo relativo: $(1, 2)$. La gráfica es igual a la anterior trasladada 2 unidades:

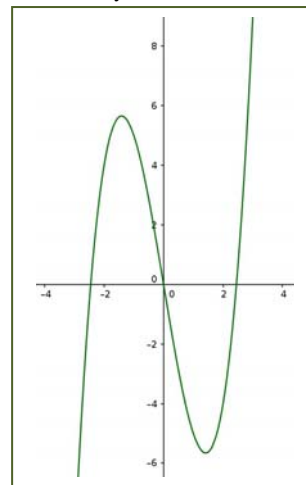
32. Si $f'(x) = x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



Solución: d)

33. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Solución: Crece de $(-\infty, -\sqrt{2})$ y en $(\sqrt{2}, +\infty)$. Decrece en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. En $x = -\sqrt{2}$ tiene un máximo relativo: $(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ y en $x = \sqrt{2}$ tiene un mínimo relativo: $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$. No hay máximos ni mínimos absolutos. Su gráfica es



34. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-5, 3]$ y en el intervalo $[1, 5]$.

Solución: La función es creciente en todo $\mathbb{R}$; No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

El mínimo absoluto en $[-5, 3]$ es $(-5, f(-5)) = (-5, -1010)$;

El máximo absoluto en $[-5, 3]$ es $(3, f(3)) = (3, 270)$

El mínimo absoluto en $[1, 5]$ es $(1, f(1)) = (1, 70)$;

El mínimo absoluto en $[1, 5]$ es $(5, f(5)) = (5, 710)$.

35. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x+4|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

Solución: La función no es derivable en $x = -4$;

El mínimo absoluto en $[-4, 4]$ es $(-4, f(-4)) = (-4, 0)$;

El máximo absoluto en $[-4, 4]$ es $(4, f(4)) = (4, 8)$

Problemas

36. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0.3t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

Solución: $v(0) = 8 \text{ m/s}$; $v(3) = 9,8 \text{ m/s}$; $t = 43 \text{ segundos}$.

37. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

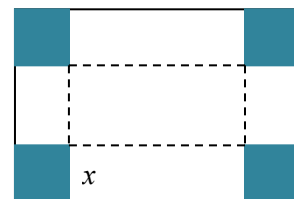
Solución: Respectivamente 570, 1 150 y 2 740 m/s.

38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0.3 m^3 por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

Solución: $v(2) = 0.012 \text{ m/min}$; $v(5) = 0.012 \text{ m/min}$.

39. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x , y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x , recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Ayuda: Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x .

Solución: $x \approx 3.7 \text{ cm}$.



40. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

Solución: $r = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}$; $h = \frac{20}{\sqrt[3]{10\pi}}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La tasa de variación media de la función $y = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$ en el intervalo $[0, 3]$ es:
 a) 15 b) 70 c) 35 d) -35

Solución: c)

2. La derivada de la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$ en $x = 1$

a) no existe b) 0 c) -1 d) 1

Solución: d)

3. La derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ en $x = 1$ es

a) $e/2$ b) no existe c) $-e/2$ d) e

Solución: a)

4. La función $\begin{cases} -bx & x \leq 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

a) $b = -6, d = 3$ b) $b = 3, d = -1$ c) $b = 6, d = -3$ d) $b = -3, d = 2$

Solución: a)

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

a) $y = 2x$ b) $y = x - 6$ c) $y = 0$ d) $y = 2 + 6x$

Solución: c)

6. La función $y = -7x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal
 c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

Solución: a)

7. La función $y = 3x^3 + 3x^2 - x + 5$ en $x = 0$ es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

Solución: b)

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x - 4)(x + 2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente b) $x < -2$, decreciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
 c) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente d) $x < -2$, creciente; $-2 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

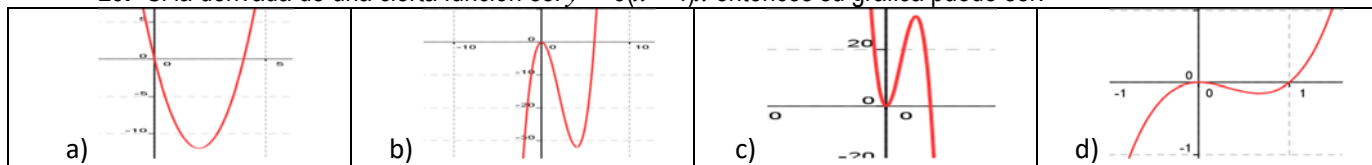
Solución: d)

9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

a) $x = 1/2$ b) $x = -1/2$ c) $x = 1$ d) $x = 0$

Solución: a)

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x - 4)x$ entonces su gráfica puede ser:



Solución: b)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadesol.pdf

<http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examen selectividad A4.pdf>

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

1. La rampa de un tobogán, de esos que descienden los niños en los parques infantiles, está fabricado empalmando dos tramos, dos piezas metálicas. ¿Qué precaución hay que tomar al empalmar las dos piezas para que el descenso no ofrezca dificultad a los niños?

Solución: *Es imprescindible que la función sea continua, porque si no hay una caída (al suelo si la discontinuidad va hacia arriba y al tobogán si va hacia abajo). Y es muy recomendable que sea derivable, pues en caso contrario hay un punto anguloso (un "pico") y allí los niños pueden hacerse daño.*

En este caso concreto es $a = 1/4$, $b = -1$, y $c = 1$.

2. Se sabe que un tal tobogán tiene un tramo recto en su parte alta y un segundo tramo curvo. El tramo recto es el segmento AB , donde $A(-3, 4)$ y $B(0, 1)$. El tramo curvo empieza en B y desciende hasta el suelo ($y = 0$) al que llega con tangente horizontal. Si este tramo curvo es una parábola $y = ax^2 + bx + c$, hallar ésta. (Selectividad)

Solución: *La solución no es única.* $y(0) = c = 1$, $b^2 - 4ac = b^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{b^2}{4}$. **Parábola:** $y = \frac{b^2}{4}x^2 + bx + 1$

3. Demuéstrese que si $f(x)$ es una función derivable en un punto $x = a$, entonces también es derivable en a la función $F(x) = f(x)^2$, y su derivada es $F'(a) = 2f(a) \cdot f'(a)$. (Se pide una demostración directa, no deberá recurrirse a resultados similares, como la derivada de un producto) (Selectividad)

Solución: $F'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^2(x) - f^2(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + f(a)) = 2f(a)f'(a)$. (Ya que f es continua en a al ser derivable)

4. Se sabe que $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son dos curvas crecientes en $x = a$. Analícese si la curva $y = f(x) - g(x)$ ha de ser entonces creciente en $x = a$. (Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme). (Selectividad)

Solución: *No necesariamente: $f(x) = e^x$ es creciente, $g(x) = e^x + x$ es creciente (suma de crecientes), pero $f(x) - g(x) = e^x - (e^x + x) = -x$ es estrictamente decreciente*

5. Defina derivada de una función f en un punto a . Aplicando la definición de derivada, demostrar que si f es derivable y periódica, de periodo T , entonces su derivada f' también es periódica de periodo T . (Selectividad)

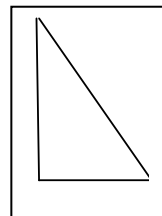
Solución: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Se cumple que: $f'(x+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ (en la penúltima igualdad hemos aplicado que f es periódica, de periodo T). Entonces f' también es periódica de periodo T

6. En la figura se representa una escalera AB , cuyo extremo inferior A recorre el suelo (recta OA) y cuyo extremo superior B recorre una pared vertical (recta OB). La longitud de la escalera es $AB = 1$. El punto A se aleja de O con velocidad constante c . Se pide: a) Sin hacer ningún cálculo, indicar cuánto vale la velocidad de B en el momento en el que $OA = OB$. b) Hallar la velocidad v del punto B en función de la distancia x (OA) c) La velocidad con la que B llega al punto O .

(Selectividad)

Solución: a) $a = -c$; b) $\frac{-cx}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $-\infty$



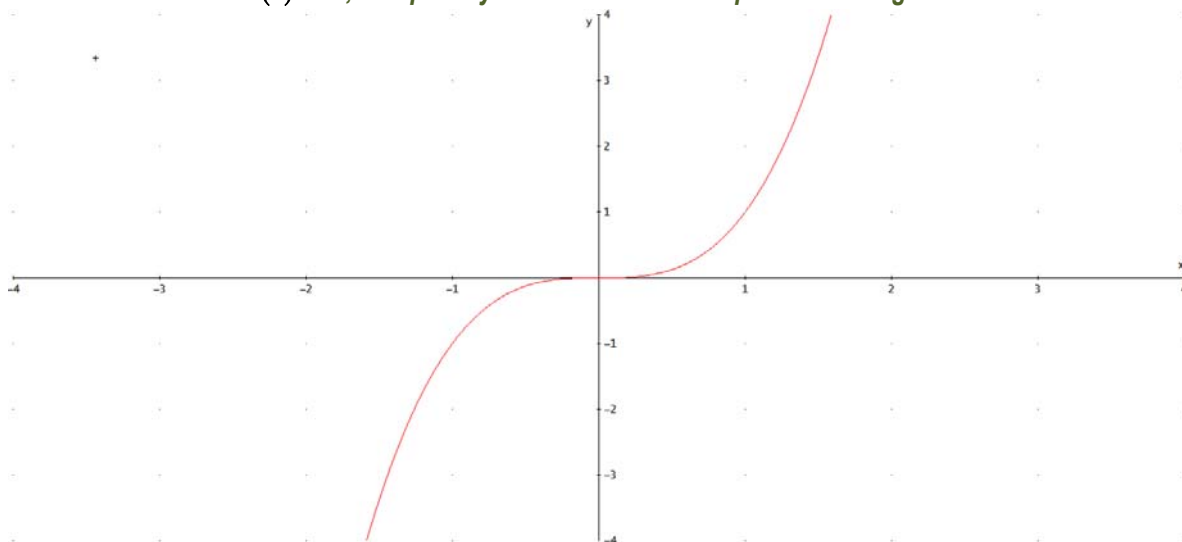
7. Dibújese la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, que cumpla las siguientes condiciones:

$$f'(0) = 0. \quad f'(x) > 0 \quad \text{para } -1 < x < 0 \quad f'(x) > 0 \quad \text{para } 0 < x < \frac{1}{2}$$

Señálense otras propiedades de la curva que se dibuje.

(Selectividad)

Solución abierta: Puede ser $f(x) = x^3$, aunque hay otras soluciones. Representación gráfica:



Es cóncava hacia abajo si $x < 0$, cóncava hacia arriba si $x > 0$ y tiene un punto de inflexión en 0.

8. Dos líneas férreas se cortan perpendicularmente. Por cada línea avanza una locomotora (de longitud despreciable) dirigiéndose ambas al punto de corte; sus velocidades son 60 km/h y 120 km/h y han salido simultáneamente de estaciones situadas, respectivamente a 40 y 30 km del punto de corte. a) Hallar la distancia a la que se encuentran las locomotoras, en función del tiempo que pasa desde que inician su recorrido. b) Hallar el valor mínimo de dicha distancia.

(Selectividad)

Solución: a) Suponemos que el punto de corte es el origen, que la primera línea es el eje Y y la segunda el eje X. Entonces el espacio recorrido por cada una en un tiempo t es $s_1 = v_1 t = 60t$, $s_2 = v_2 t = 120t$ y en un tiempo t

están en los puntos $(0, 40 - 60t)$, $(30 - 120t, 0)$ y su distancia es: $d(t) = \sqrt{(30 - 120t)^2 + (40 - 60t)^2}$;

b) Minimizamos $f(t) = d^2(t) = (30 - 120t)^2 + (40 - 60t)^2$; se cumple que:

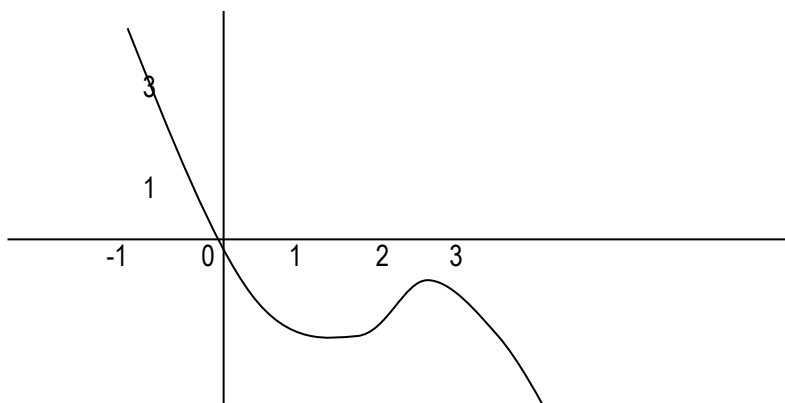
$$f'(t) = -2(30 - 120t)120 - 2(40 - 60t)60 = -120(100 - 300t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}, \text{ con: } f'(t) = -120(100 - 300t) < 0 \Leftrightarrow t < \frac{1}{3}. \text{ Por tanto}$$

f es estrictamente decreciente si $t < \frac{1}{3}$, f es estrictamente creciente si $t > \frac{1}{3}$ y en $t = \frac{1}{3}$ tiene el mínimo

absoluto, por lo que la distancia mínima es $d\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\left(30 - \frac{120}{3}\right)^2 + \left(40 - \frac{60}{3}\right)^2} = \sqrt{500}$

9. La gráfica de la figura corresponde a la primera derivada de una función $f(x)$. ¿Qué puede decirse sobre los posibles máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$? Razonar la respuesta.

(Selectividad)



Solución: Como $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$, tenemos que f es estrictamente creciente si $x < 0$, f es estrictamente decreciente si $x > 0$ y f tiene un máximo relativo en $x = 0$

10. Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = e^{x^2}$. (Selectividad)

Solución: $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, con $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$; entonces f es estrictamente decreciente si $x < 0$, f es estrictamente creciente si $x > 0$ y f tiene un mínimo relativo en $x = 0$

11. La aceleración de un móvil que describe una trayectoria rectilínea es (formulada en función del tiempo t)

$a(t) = 4 - \frac{t}{8}$. Se sabe que para $t = 0$ el móvil está parado en la posición $x = 5$. a) ¿Para qué valores de t es 0 la velocidad del móvil? b) Hallar la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo $[4, 8]$ y el espacio recorrido en ese intervalo. c) Hallar la función de posición de este móvil. (Selectividad Septiembre 1995)

Solución: a) $t = 32$; b) aproximadamente 86.67; c) $2t^2 - \frac{t^3}{48}$.

12. Sea $f(x)$ la función definida por las expresiones $f(x) = \begin{cases} 3\sin x - \cos x & \text{si } x \geq 0 \\ mx + n & \text{si } x < 0 \end{cases}$. a) Calcular n para que $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$. b) Calcular m y n para que $f(x)$ sea derivable en el punto $x = 0$. (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3\sin(x) - \cos(x)) = 3\sin(0) - \cos(0) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + n) = n$.

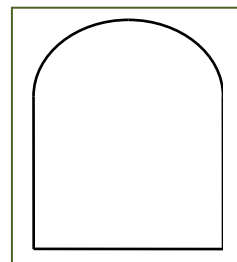
b) Para $n = -1$, tenemos que si $x < 0$: $f(x) = 3\sin(x) - \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 3\cos(x) + \sin(x) \Rightarrow f'_-(0) = 3\cos(0) + \sin(0) = 3$, si $x > 0$: $f(x) = mx + n \Rightarrow f'(x) = m \Rightarrow f'_+(0) = m$, luego f es derivable en 0 si $f'_+(0) = m = f'_-(0) = 3$

13. Se considera una caja sin tapadera (consta de cuatro caras laterales y el fondo). Sabiendo que el fondo es un cuadrado y conociendo que el área total (de las cinco caras) es de 12 cm^2 , hallar sus dimensiones para que tenga la mayor capacidad posible. (Selectividad)

Solución: Hay que hallar el máximo de $x^2 y$ sujeto a $x^2 + 4xy = 12 \Rightarrow y = \frac{12 - x^2}{4x}$, luego hay que hallar el máximo de

$f(x) = x^2 \frac{12 - x^2}{4x} = 3x - \frac{x^3}{4}$. Se cumple que $f'(x) = 3 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (ya que $x > 0$), con $f'(x) = 3 - \frac{3x^2}{4} < 0 \Leftrightarrow x > 2$, por lo que f es estrictamente creciente si $x < 2$, f es estrictamente decreciente si $x > 2$ y f tiene el máximo absoluto en $x = 2$. Dimensiones: $x = 2, y = \frac{12 - 2^2}{8} = 1$

14. Se considera una ventana como la que se indica en la figura (La parte inferior es rectangular, la superior una semicircunferencia). El perímetro de la ventana mide 6 m. Hallar las dimensiones x e y para que la superficie de la ventana sea máxima. (Expresar los resultados en función de π) (Selectividad)



Solución: Hay que hallar el máximo de $xy + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = xy + \frac{1}{8}\pi x^2$ sujeto a:

$x + 2y + \frac{1}{2}\pi x = 6 \Rightarrow y = \frac{6 - \frac{\pi+2}{2}x}{2} = \frac{12 - (\pi+2)x}{4}$, luego hay que hallar el máximo de:

$f(x) = x \frac{12 - (\pi+2)x}{4} + \frac{1}{8}\pi x^2 = -\left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\right)x^2 + 3x$.

Se cumple que: $f'(x) = -\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{\frac{\pi}{4} + 1} = \frac{12}{\pi + 4}$, con $f'(x) = -\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{12}{\pi + 4}$, por lo que: f

es estrictamente creciente si $x < \frac{12}{\pi + 4}$, f es estrictamente decreciente si $x > \frac{12}{\pi + 4}$ y f tiene el máximo

absoluto en $x = \frac{12}{\pi + 4}$. Dimensiones: $x = \frac{12}{\pi + 4}, y = \frac{12 - \frac{12(\pi+2)}{\pi+4}}{4} = \frac{6}{\pi + 4}$

15. Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$. (Selectividad)

Solución: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = 3, 2$, con $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$. Entonces:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 5x + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Si $x \neq 2, 3$ **f es derivable (polinomio).**

Si $x < 2$, $f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'_-(2) = 4 - 5 = -1$.

Si $2 < x < 3$, $f(x) = -x^2 + 5x - 6 \Rightarrow f'(x) = -2x + 5 \Rightarrow f'_+(2) = -4 + 5 = 1$, por lo que **f no es derivable en 2 (derivadas laterales distintas).**

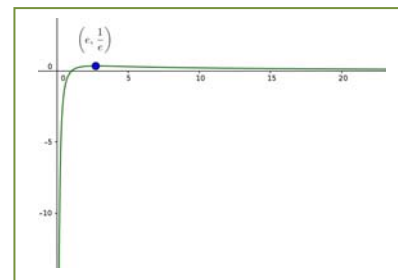
Si $2 < x < 3$, $f(x) = -x^2 + 5x - 6 \Rightarrow f'(x) = -2x + 5 \Rightarrow f'_-(3) = -6 + 5 = -1$, **si** $x > 3$:

$f(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'_+(3) = 6 - 5 = 1$ **por lo que f no es derivable en 3 (derivadas laterales distintas. Podemos hallar las derivadas laterales así al ser f continua: composición de valor absoluto y polinomio).**

16. Sea la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$. Estudiar el dominio, las asíntotas, los posibles puntos de máximo y mínimo y hacer un dibujo aproximado de la gráfica de la función. (Selectividad)

Solución: Dominio $(0, +\infty)$. Asíntota vertical en $x = 0$, asíntota horizontal en $y = 0$ para x tendiendo a más infinito.

Tiene un máximo relativo (y absoluto) en $y = e$, y no tiene mínimos relativos ni absolutos:

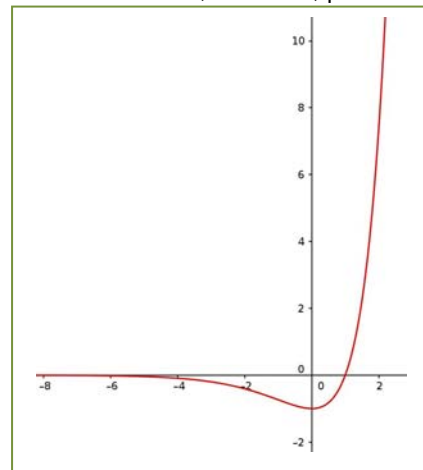


17. Sea la función $f(x) = (x - 1)e^x$. Representar la gráfica de la función $f(x)$ indicando monotonía, extremos, puntos de inflexión y ramas asíntóticas.

Solución: Es decreciente hasta $x = 1$, donde tiene un mínimo absoluto, creciente a partir de allí. No hay máximos relativos ni absolutos.

Cóncava hasta $x = -1$, donde tiene un punto de inflexión $(-1, -2/e)$ y convexa a partir de allí.

Tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$ y ninguna para x tendiendo a $+\infty$. No hay asíntotas verticales ni oblicuas.



18. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$; sean a y b dos raíces de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

- 1.- Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$
- 2.- Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$
- 3.- Entre a y b existen dos o más raíces de $f(x)$.

(Selectividad)

Solución: 1.- Puede ocurrir, por ejemplo $f(x) = x^2(x-1)^2 + 1$ entre 0 y $\frac{1}{2}$

2.- Puede ocurrir, por ejemplo $f(x) = x^2(x-1)^2 - \frac{1}{100}$ entre 0 y $\frac{1}{2}$;

3.- No puede ocurrir, ya que existiría una raíz de $f'(x)$ entre a y b por el teorema de Rolle.

19. Sea la función $f(x) = x|x-1|$. Se pide:

- Hacer un dibujo aproximado de la función.
- Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 1$.

(Selectividad)

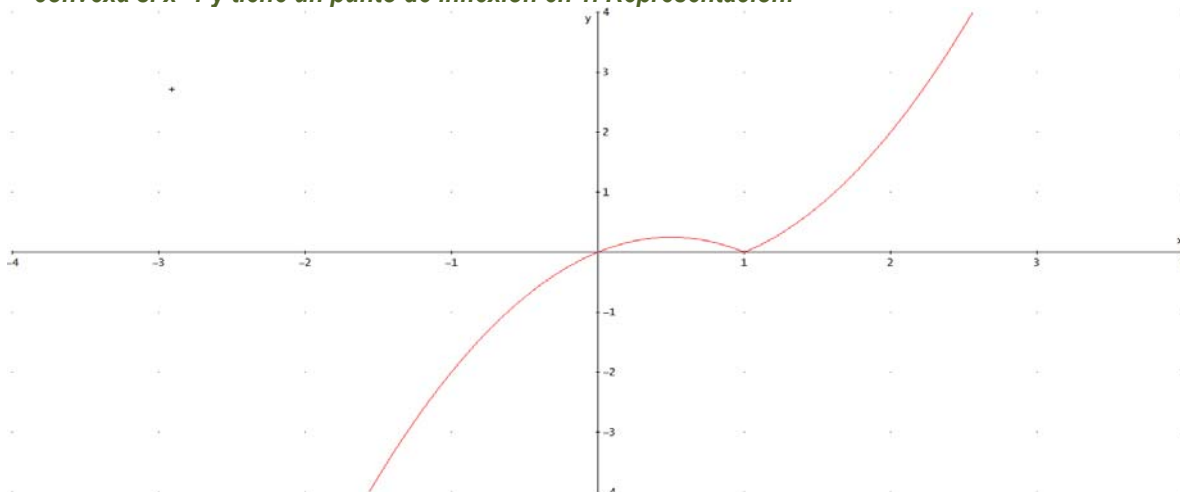
Solución: a) $f(x) = \begin{cases} x(1-x) & \text{si } x < 1 \\ x(x-1) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} x-x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}; D(f) = \mathbb{R}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = 0 - 0^2 = 0 : (0, 0)$.

Otro corte con el eje X: $f(x) = x|x-1| = 0 \Rightarrow x = 1 : (1, 0)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ **luego no hay asíntota**

horizontal. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (x-1) = \infty$ **luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales.**

Si $x < 1$, $f'(x) = 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $f'(x) = 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Si $x > 1$, $f'(x) = 2x - 1 > 2 - 1 = 1 > 0$. Entonces f es estrictamente creciente si $x < \frac{1}{2}$, estrictamente decreciente si $\frac{1}{2} < x < 1$ y estrictamente creciente si $x > 1$, tiene un máximo relativo en $\frac{1}{2}$ y un mínimo relativo en 1 (ya que es continua en 1 al ser composición de polinomio y valor absoluto). Si $x < 1$, $f''(x) = -2 < 0$, si $x > 1$, $f''(x) = 2 > 0$; Entonces f es cóncava si $x < 1$, convexa si $x > 1$ y tiene un punto de inflexión en 1. Representación:



b) Si $x < 1$, $f'(x) = 1 - 2x \Rightarrow f'_-(1) = 1 - 2 = -1$, si $x > 1$, $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'_+(1) = 2 - 1 = 1$. Por tanto f no es derivable en 1 (derivadas laterales distintas. Por eso f puede tener a la vez un mínimo y un punto de inflexión en 1).

20. Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 12 cm de diámetro.

(Selectividad)

Solución: Centramos la circunferencia en el origen, un vértice del triángulo en $(0, 6)$ y llamamos al inferior izquierda: (x, y) , que cumplirá

$$x^2 + y^2 = 36 \Rightarrow x = \sqrt{36 - y^2}.$$

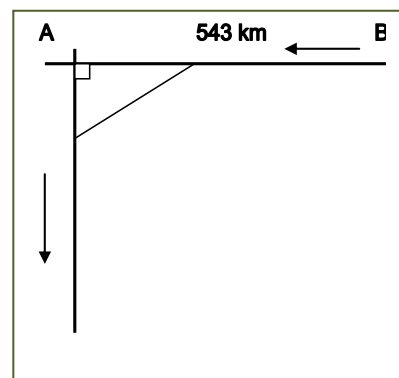
Entonces $A = \frac{Bh}{2} = \frac{2\sqrt{36-y^2}(6-y)}{2} = \sqrt{36-y^2}(6-y) = f(y)$, con $y \in [-6, 6]$.

Se cumple que:

$$f'(y) = \frac{-y}{\sqrt{36-y^2}}(6-y) - \sqrt{36-y^2} = -\frac{6y-y^2+36-y^2}{\sqrt{36-y^2}} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 6y - 36 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{9 \times 36}}{4} = 6, -3$$

En los extremos del intervalo el área es 0, luego en -3 está el máximo. Dimensiones: $B = 2\sqrt{27}$, $h = 9$



21. Dos avionetas se encuentran situadas a las 9 de la mañana a una distancia de 543 kilómetros, en las posiciones que se indican en la figura. La avioneta A se mueve hacia el sur a una velocidad de 270 km/h, mientras que la avioneta B se dirige hacia el oeste (en dirección a A), a 300 km/h.

- a) (1 punto) Escribir las funciones que indican las posiciones de A y B en cada instante, así como la distancia entre ambas.
b) (1 punto) ¿A qué hora será mínima dicha distancia? (Selectividad)

Solución: a) $f_A(t) = (0, 0 - v_A(t)t) = (0, -270t)$, $f_B(t) = (543 - v_B(t)t, 0) = (543 - 300t, 0)$, $d(t) = \sqrt{(543 - 300t)^2 + (270t)^2}$

$$b) d'(t) = \frac{-300(543 - 300t) + 270^2 t}{\sqrt{(543 - 300t)^2 + (270t)^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{181t - 181}{\sqrt{(543 - 300t)^2 + (270t)^2}} = 0 \Leftrightarrow 181t - 181 = 0 \Leftrightarrow t = 1, \text{ con:}$$

$$d'(t) = \frac{-300(543 - 300t) + 270^2 t}{\sqrt{(543 - 300t)^2 + (270t)^2}} < 0 \Leftrightarrow 181t - 181 < 0 \Leftrightarrow t < 1, \text{ por lo que } f \text{ es estrictamente decreciente si: } t < 1, f \text{ es}$$

estrictamente creciente si } t > 1 \text{ y } f \text{ tiene el mínimo absoluto en 1. Hora: } 9+1=10

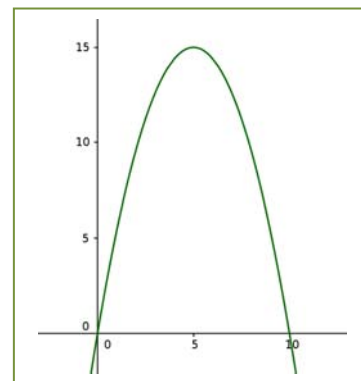
22. Se considera un triángulo isósceles cuya base (el lado desigual) mide 10 cm y cuya altura mide 6 cm. En él se inscribe un rectángulo, cuya base está situada sobre la base del triángulo.

- a) Expresar al área A de dicho rectángulo en función de la longitud x de su base.
b) Escribir el dominio de la función $A(x)$ y dibujar su gráfica.
c) Hallar el valor máximo de dicha función. (Selectividad)

Solución: a) $A(x) = x \left(6 - \frac{3}{5}x \right)$

b) Realmente el dominio de la función es todos los reales pero obviamente no tienen sentido considerar áreas negativas. Por tanto hay que restringirse al intervalo $[0, 10]$. La gráfica (mostrando un poco más que el intervalo) es la del margen:

c) El máximo se alcanza en $x = 5$ que da un área de 15 cm^2 .



23. Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm^3 . Averiguar las dimensiones de la caja para que la superficie exterior sea mínima. (Selectividad)

Solución: Hay que hallar el mínimo de $2x^2 + 4xy$ sujeto a $x^2y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x^2}$, luego hay que hallar el mínimo de

$f(x) = 2x^2 + 4x \frac{8}{x^2} = 2x^2 + \frac{32}{x}$. Se cumple que $f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$, con $f'(x) = 4x - \frac{32}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x < 2$, por lo que f es estrictamente decreciente si $x < 2$, f es estrictamente creciente si $x > 2$ y f tiene el mínimo absoluto en $x = 2$. Dimensiones: $x = 2, y = \frac{8}{4} = 2$ (caja cúbica)

24. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + 2 & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$. a) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$? b) ¿Hay

algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$? c) Determinar sus asíntotas.

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + 2 = 3 = f(0) = k$

b) Para $k = 3$ (único valor para el que puede ser derivable):

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + 2 - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = 0, \text{ luego } f \text{ es derivable.}$$

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \right) = 0 + 2 = 2$, por lo que $y = 2$ es asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no hay asíntota oblicua.

Tampoco hay asíntotas verticales porque la única posible es $x = 0$ y no lo es como vimos en a).

25. Dados tres números cualesquiera r_1 , r_2 y r_3 , hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

(Selectividad)

Solución: Se cumple que $D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$, con:

$$D'(x) = -2(r_1 - x) - 2(r_2 - x) - 2(r_3 - x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}, \text{ por lo que } f \text{ es estrictamente decreciente si:}$$

$$x < \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}, \text{ } f \text{ es estrictamente creciente si } x > \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \text{ y } f \text{ tiene el mínimo absoluto en } x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}.$$

26. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

a) Determinar a , b , c y d . b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

(Selectividad)

Solución: a) $a = 1/3$, $b = -3/2$, $c = 2$ $d = -5/2$; b) $x = 1$ es máximo, $x = 2$ es mínimo.

27. a) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$

b) Si la función fuese polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

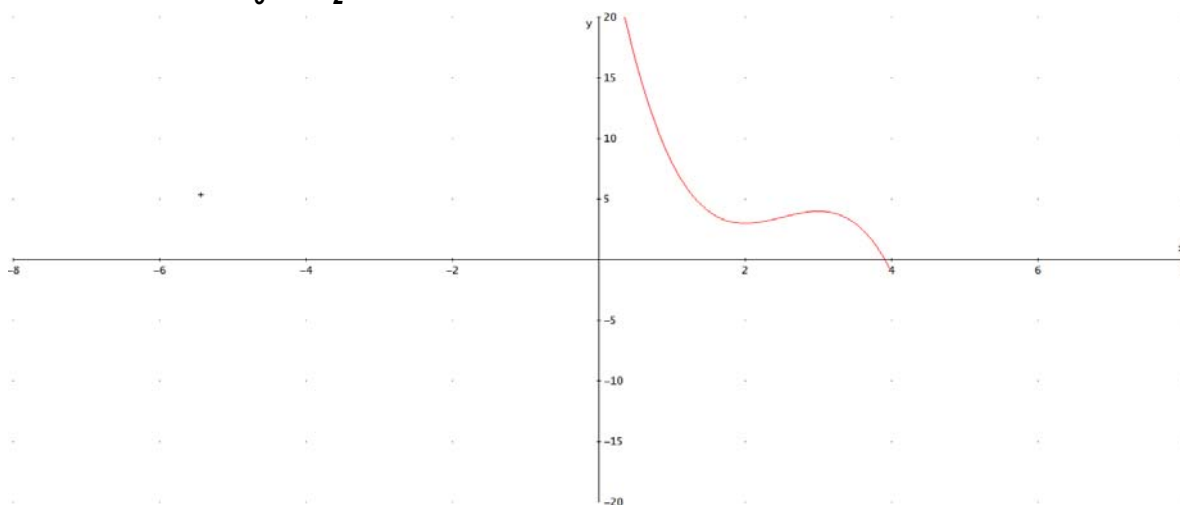
(Selectividad)

Solución: a) $f'(x) = a(2-x)(x-3) = -ax^2 + 5ax - 6a \Rightarrow f(x) = \int -ax^2 + 5ax - 6a = -a\frac{x^3}{3} + 5a\frac{x^2}{2} - 6ax + C$

$$f'(x) = a(2-x)(x-3) = -ax^2 + 5ax - 6a \Rightarrow f(x) = \int -ax^2 + 5ax - 6a = -a\frac{x^3}{3} + 5a\frac{x^2}{2} - 6ax + c \text{ (2ª-1ª)}$$

$$a\frac{1}{6} = 1 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow C = 3 + 6\frac{14}{3} = 31$$

Entonces $f(x) = -6\frac{x^3}{3} + 30\frac{x^2}{2} - 36x + 31 = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 31$. Representación:



- c) 3, ya que si fuera de grado 1 sería una recta oblicua, que no tiene extremos, y si fuera de grado 2 sería una parábola, que tiene un solo extremo (no puede ser de grado 0 ya que sería una constante, luego no podría tener las imágenes 3 y 4).

28. Sea la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$

a) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

b) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos

(Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \operatorname{sen} x) = 2\infty = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \operatorname{sen} x) = 2(-\infty) = -\infty$, por lo que no hay asíntota

$$\text{horizontal; } m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \operatorname{sen} x}{x} = 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \operatorname{sen} x - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{sen} x \text{ no existe, por lo que no hay asíntota oblicua.}$$

Tampoco hay verticales porque f es continua en $\mathbb{R}$

b) Se cumple que $f'(x) = 2 + \cos x \geq 2 - 1 = 1 > 0$, por lo que f es estrictamente creciente y no tiene extremos relativos.

29. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

- a) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Esbozar la gráfica de la función

(Selectividad)

Solución: a) y b) $D(f) = \mathbb{R}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = 0 - 0^3 + 0^2 + 0 = 0 : (0, 0)$.

Otros cortes con el eje X: $f(x) = x(x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 2, x = 3 : (-1, 0), (2, 0), (3, 0)$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = \infty$, **luego no hay asíntota horizontal.**

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$, **luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales.**

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 2(x-1)(2x^2 - 4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{4 \pm \sqrt{16+24}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2};$$

$$f'(x) = 2(x-1)(2x^2 - 4x - 3) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{2+\sqrt{10}}{2} \text{ ó } x < \frac{2-\sqrt{10}}{2}.$$

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < \frac{2-\sqrt{10}}{2}$, estrictamente creciente si $\frac{2-\sqrt{10}}{2} < x < 1$,

estrictamente decreciente si $1 < x < \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ y estrictamente creciente si $x > \frac{2+\sqrt{10}}{2}$, tiene un mínimo relativo

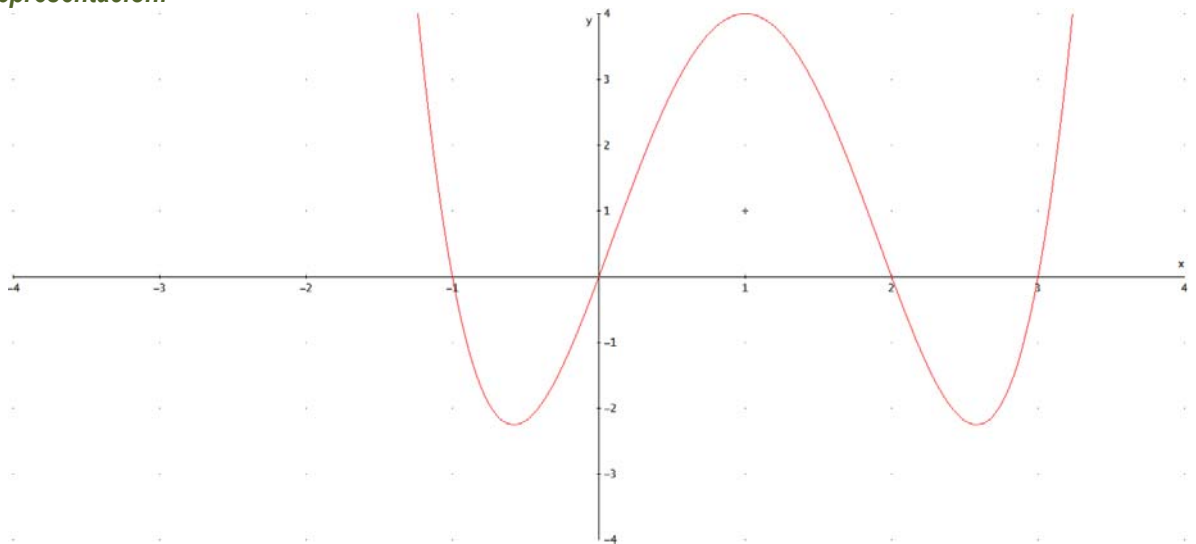
en: $\frac{2-\sqrt{10}}{2}$, $\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ y un máximo relativo en 1;

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 2 = 2(6x^2 - 12x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 24}}{12} = \frac{6 \pm \sqrt{30}}{6},$$

$$f''(x) = 2(6x^2 - 12x + 1) < 0 \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{6} < x < \frac{6+\sqrt{30}}{6}; \text{ Entonces } f \text{ es convexa si } x < \frac{6-\sqrt{30}}{6}, \text{ cóncava si:}$$

$$\frac{6-\sqrt{30}}{6} < x < \frac{6+\sqrt{30}}{6}, \text{ convexa si } x > \frac{6+\sqrt{30}}{6}, \text{ y tiene puntos de inflexión en } \frac{6-\sqrt{30}}{6}, \frac{6+\sqrt{30}}{6}.$$

Representación:



30. Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Razonar si la función es continua en toda la recta real.
b) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

(Selectividad)

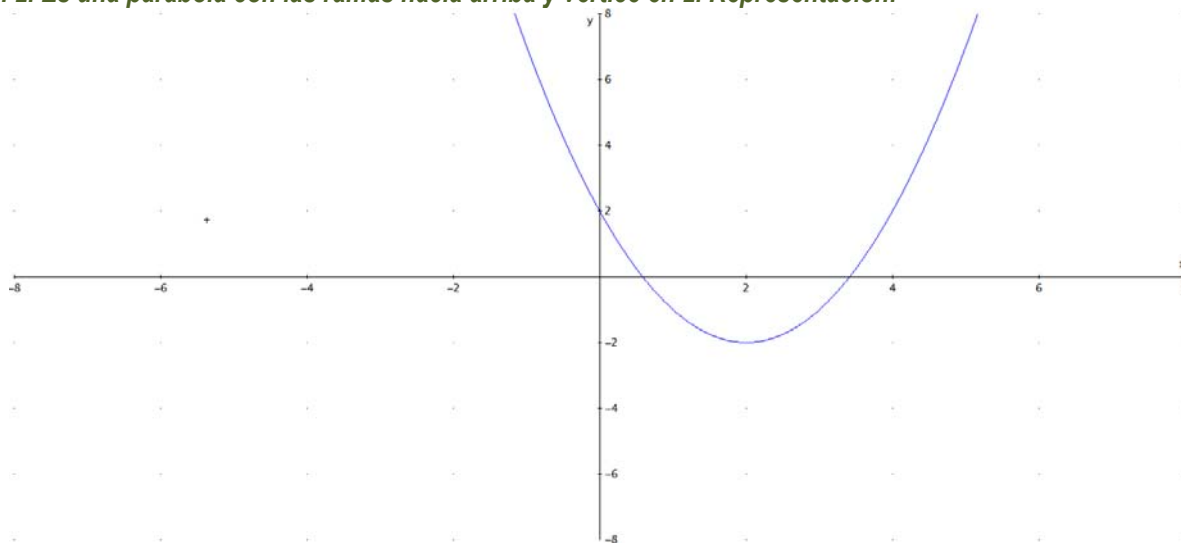
Solución: a) *Sí. Es continua en toda la recta real;* b) *No. Falla la derivabilidad en $x = 1$.*

31. a) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica. b) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

(Selectividad)

Solución: a) $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$; $f'(x) = 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < 2$, estrictamente creciente si $x > 2$ y tiene un mínimo relativo en 2. Es una parábola con las ramas hacia arriba y vértice en 2. Representación:



b) *Recta tangente a f en a : $y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 - 4a + 2 + (2a - 4)(x - a)$; para que pase por $(3, -5)$:*

$$-5 = a^2 - 4a + 2 + (2a - 4)(3 - a) = a^2 - 4a + 2 - 2a^2 + 10a - 12 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5, 1.$$

Rectas pedidas: $y = 7 + 6(x - 5) = 6x - 23$, $y = -1 - 2(x - 1) = -2x + 1$

32. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- i) $P(x)$ es una función par.
- ii) Dos de sus raíces son $x = 1$, $x = \sqrt{5}$
- iii) $P(0) = 5$

Se pide: Hallar sus puntos de inflexión. Dibujar su gráfica.

(Selectividad)

Solución: Como es par y pasa por $(0, 5)$, será $P(x) = ax^4 + bx^2 + 5$, con:

$$\left. \begin{aligned} P(1) &= a + b + 5 = 0 \\ P(\sqrt{5}) &= a(5)^2 + b(5) + 5 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a + b &= -5 \\ 25a + 5b &= -5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a + b &= -5 \\ 5a + b &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1, b = -5 - 1 = -6$$

Entonces $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$; $D(f) = \mathbb{R}$. Corte con el eje Y: $f(0) = 0^4 - 0^2 + 5 = 5$: $(0, 5)$.

Cortes con el eje X: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = 5, 1 \Rightarrow x = \pm 1, x = \pm \sqrt{5}$: $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - 6x^2 + 5) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = \infty$, luego no hay asíntota horizontal.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 6x^2 + 5}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty$, luego no hay asíntota oblicua. Tampoco hay verticales.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3};$$

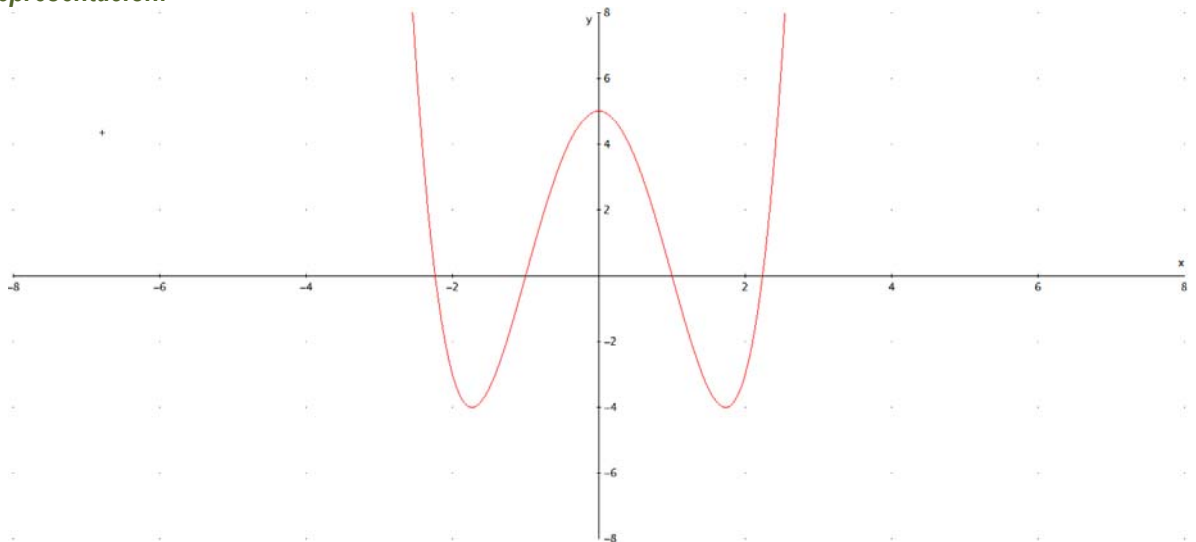
$$f'(x) = 4x(x^2 - 3) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{3} \text{ ó } x < -\sqrt{3}.$$

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < -\sqrt{3}$, estrictamente creciente si $-\sqrt{3} < x < 0$, estrictamente decreciente si $0 < x < \sqrt{3}$ y estrictamente creciente si $x > \sqrt{3}$, tiene un mínimo relativo en: $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ y un máximo relativo en 0;

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

$f''(x) = 12(x^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$; Entonces f es convexa si $x < -1$, cóncava si: $-1 < x < 1$, convexa si $x > 1$, y tiene puntos de inflexión en -1 , 1 .

Representación:



33. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$. Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva de la gráfica de f . (Selectividad)

Solución: $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$;

$$f''(x) = -2 \frac{(x^2 + 3)^2 - 4x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^4} = -2 \frac{x^2 + 3 - 4x^2}{(x^2 + 3)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

$$f''(x) = 2 \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 3)^3} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1; \text{Entonces } f \text{ es convexa si } x < -1, \text{ cóncava si:}$$

$-1 < x < 1$, **convexa si** $x > 1$, **y tiene puntos de inflexión en** $-1, 1$.

Recta pedida: $y = f(1) + f'(1)(x - 1) = \frac{1}{4} - \frac{2}{4^2}(x - 1) = -\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}$

34. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$. A) Estudiar su continuidad y su derivabilidad. B) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$. (Selectividad)

Solución: a) **Continua en toda la recta real, derivable excepto en** $x = 2$; b) **$y = (1/3)x$.**

35. Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que: $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$. Se pide: a) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x+f(0))$. B) Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}.$$

(Selectividad)

Solución: a) $g(x) = f(x+1) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) \Rightarrow g'(0) = f'(1) = 4$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x)f'(x) - f'(x+1)}{e^x} = 4f(0)f'(0) - f'(1) = 8$

36. Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real $f(x) = A \sin x + B x^2 + C x + D$ tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3 \sin x - 10$. (Selectividad)

Solución: $f(0) = D = 4$, $f'(x) = A \cos x + 2Bx + C \Rightarrow f'(0) = A \cos 0 + C = A + C = 0$,
 $f''(x) = -A \sin x + 2B = 3 \sin x - 10 \Rightarrow A = -3, B = -5, C = -A = 3$

37. Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$. Se pide:

- Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas
- Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente horizontal
- Representar gráficamente la función

(Selectividad)

Nota: Para obtener las asíntotas puede utilizarse la igualdad: $A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$

Solución: a), b) y c) $D(f) = \mathbb{R}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = \sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{0} = 1: (0, 1)$.

Cortes con el eje X: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x+1 = x$: No hay

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1-x}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} = 0$, luego $y = 0$ **asíntota horizontal en:**

$\pm\infty$ **y no existe asíntota oblicua. Tampoco hay asíntotas verticales.**

$f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+1})^2} - \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1})^2 = (\sqrt[3]{x})^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = -\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$: **único punto de tangente horizontal**

Si $x < -1$, $f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+1})^2} - \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} < 0 \Leftrightarrow |\sqrt[3]{x}| = -\sqrt[3]{x} < |\sqrt[3]{x+1}| = -\sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > \sqrt[3]{x+1}$: **no se cumple.**

Si $-1 < x < 0$: $f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+1})^2} - \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} < 0 \Leftrightarrow |\sqrt[3]{x}| = -\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-x} < |\sqrt[3]{x+1}| = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow -x < x+1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Si $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x+1})^2} - \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} < 0 \Leftrightarrow |\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{x} < |\sqrt[3]{x+1}| = \sqrt[3]{x+1}$: **se cumple.**

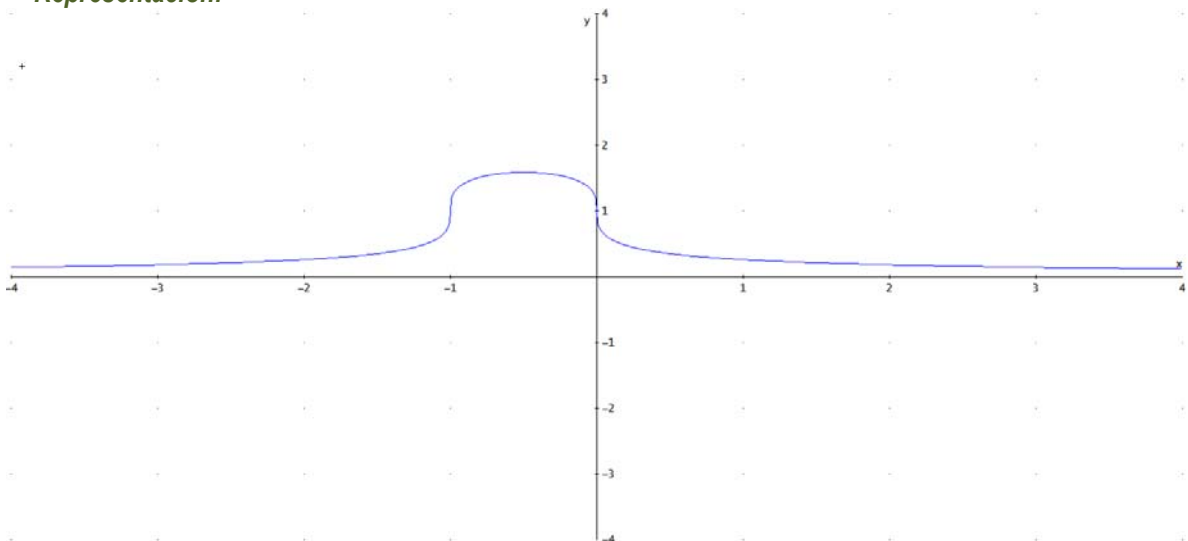
Entonces f es estrictamente creciente si $x < -\frac{1}{2}$, estrictamente decreciente si $x > -\frac{1}{2}$ y f tiene un máximo relativo en $-\frac{1}{2}$.

$f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^{-\frac{5}{3}} = x^{-\frac{5}{3}}$, **imposible.**

Si $x < -1$, $f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0 \Leftrightarrow (x+1)^{\frac{5}{3}} < x^{\frac{5}{3}}$, **no se cumple. Si $-1 < x < 0$:**

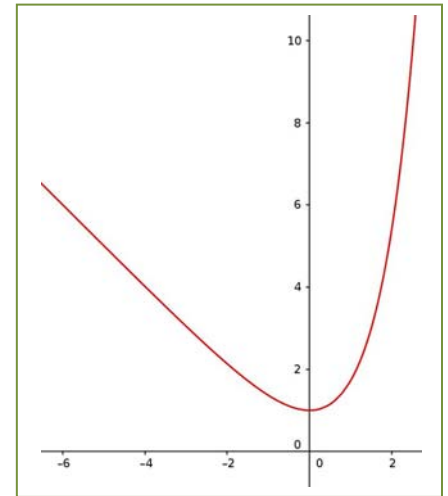
$f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0$, **si $x > 0$,** $f''(x) = -\frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0 \Leftrightarrow (x+1)^{\frac{5}{3}} < x^{\frac{5}{3}}$: **no se cumple.**

Entonces f es cóncava si $x < 0$, cóncava si $0 < x < 1$, convexa si $x > 1$ y no tiene puntos de inflexión.
Representación:



38. a) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$. b) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \frac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento cuando x tiende a ∞ y cuando tiende a $-\infty$. Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición. (Selectividad)

Solución: a) *La gráfica del margen:*



b) Su dominio son todos los números reales. Sus límites en mas y menos infinito son ambos cero por lo que tiene a como asíntota horizontal en mas y menos infinito.
c) Tiene un mínimo absoluto en $x = 0$. No hay máximos relativos ni absolutos.

39. Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
b) Halla los puntos A y B en la que la recta hallada en el apartado a) corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
c) Determina el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$. (Selectividad)
d) 4. Opción B

Solución: a) $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(a) = -2a$;

Recta pedida: $y = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 - a^2 - 2a(x - a) = 1 + a^2 - 2ax$

b) **Corte con el eje Y:** $y = 1 + a^2 - 0 = 1 + a^2 : (0, 1 + a^2)$. **Corte con el eje X:**

$$y = 1 + a^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x = \frac{1 + a^2}{2a} : \left(\frac{1 + a^2}{2a}, 0\right);$$

$$\begin{aligned} \text{c) } d\left(a, 1 - a^2, (0, 1 + a^2)\right) &= \sqrt{a^2 + (2a^2)^2} = a\sqrt{1 + 4a^2} = 2d\left(a, 1 - a^2, \left(\frac{1 + a^2}{2a}, 0\right)\right) = 2\sqrt{\left(\frac{1 + a^2}{2a} - a\right)^2 + (1 - a^2)^2} = \\ &= \frac{1 - a^2}{a}\sqrt{1 + 4a^2} \Leftrightarrow a = \frac{1 - a^2}{a} \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

40. Sea la función $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$. A) Halla sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. B) Dibuja la gráfica de la función utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abscisas son $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1}{2}$, $x_3 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

(Selectividad)

Solución: A) y B) $D(f) = \mathbb{R}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = \frac{1}{1^2} = 1: (0, 1)$.

Cortes con el eje X: $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x+1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}: (-\frac{1}{2}, 0)$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^4} = 0$, luego $y = 0$ **asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no existe asíntota oblicua.**

Tampoco hay verticales.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x+1)^2 - (2x+1)2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^4} = \frac{2((x^2+x+1) - (4x^2+4x+1))}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = 0.$$

Con $f'(x) = \frac{-6(x^2+x)}{(x^2+x+1)^3} < 0 \Leftrightarrow x^2+x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0$:

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < -1$, estrictamente creciente si $-1 < x < 0$, estrictamente decreciente si $x > 0$, f tiene un mínimo relativo en -1 y f tiene un máximo relativo en 0 .

$$f''(x) = -6 \frac{(2x+1)(x^2+x+1)^3 - (x^2+x)^3(2x+1)(x^2+x+1)^2}{(x^2+x+1)^6} = -6 \frac{(2x+1)((x^2+x+1) - (x^2+x)^3)}{(x^2+x+1)^4} =$$

$$= -6 \frac{(2x+1)(-2x^2-2x+1)}{(x^2+x+1)^4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

(Según enunciado).

$$f''(x) = -6 \frac{(2x+1)(-2x^2-2x+1)}{(x^2+x+1)^4} < 0 \Leftrightarrow (2x+1)(-2x^2-2x+1) > 0 \Leftrightarrow$$

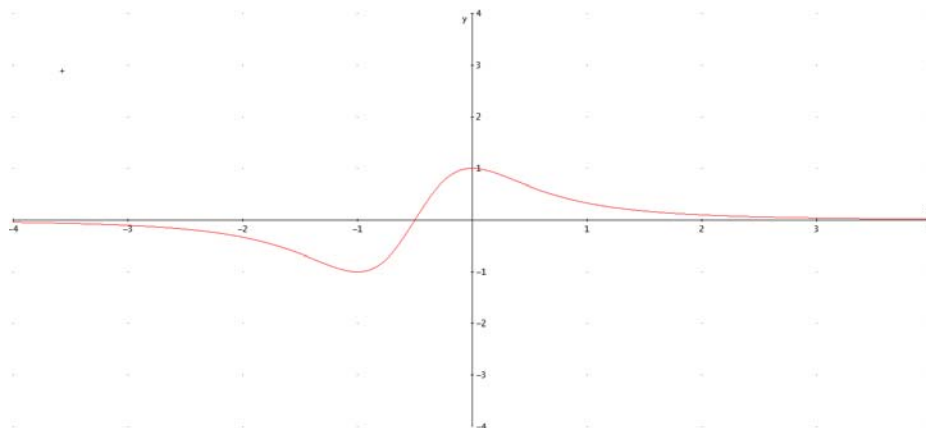
Con

$$\Leftrightarrow x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ ó } \frac{-1}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

. Entonces f es cóncava si $x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$,

convexa si $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < x < -\frac{1}{2}$, cóncava si $-\frac{1}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, convexa si $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, y tiene los puntos de inflexión indicados en el enunciado.

Representación:



41. Se considera la función $f(x) = \ln(1+x^2)$, donde $\ln$ significa Logaritmo Neperiano. A) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad. B) Dibuja la gráfica de f . C) Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

(Selectividad)

Solución: A) y B) $D(f) = \mathbb{R}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = \ln 1 = 0$ $(0, 0)$. **Cortes con el eje X:**

$$f(x) = \ln(1+x^2) = 0 \Rightarrow 1+x^2 = 1 \Rightarrow x = 0 : (0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(x^2 + 1) = \ln(\infty) = \infty, \text{ luego no hay asíntota horizontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \text{ y no existe asíntota oblicua. Tampoco hay verticales.}$$

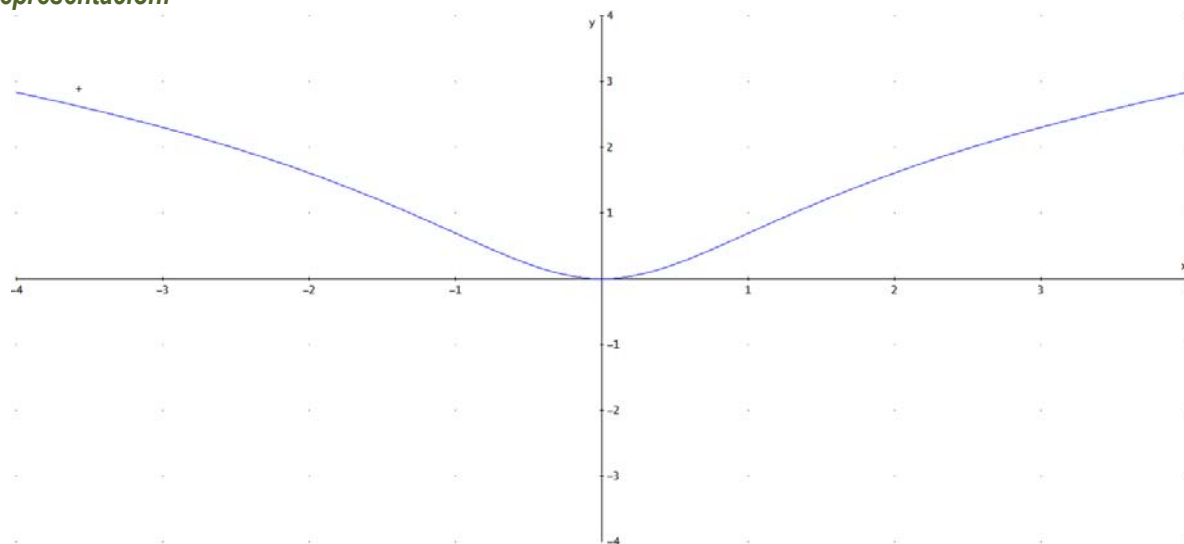
$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ con } f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow x < 0. \text{ Entonces } f \text{ es estrictamente decreciente si:}$$

$x < 0$, estrictamente creciente si $x > 0$ y f tiene un mínimo relativo en 0.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = 2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, \text{ con } f''(x) = 2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ó } x > 1$$

Entonces f es cóncava si $x < -1$, convexa si $-1 < x < 1$, cóncava si $x > 1$ y tiene puntos de inflexión en ± 1 .

Representación:



C) Recta tangente en 1: $y = f(1) + f'(1)(x-1) = \ln 2 + \frac{2}{1^2 + 1}(x-1) = x + \ln 2 - 1$. **Recta tangente en -1:**

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1) = \ln 2 - \frac{2}{1^2 + 1}(x+1) = -x + \ln 2 + 1$$

42. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se pide: a) Halla la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$. B)

Halla los puntos de corte de la recta tangente del apartado a) con los ejes de coordenadas. C) Halla el valor de $a > 0$ que hace que la distancia entre los dos puntos hallados en el apartado b) sea mínima.

(Selectividad)

Solución: A) Recta tangente: $y = (2/a) - x/a^2$; b)

B) Puntos de corte con los ejes: $(2a, 0)$ con OX y $(0, 2/a)$ con OY.

C) $a = 1$.

43. Se considera la función $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x)$. (Selectividad)

Solución: $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = e^x \frac{1+e^x - 2e^x}{(1+e^x)^3} = 0 \Leftrightarrow x=0$, con:

$f'(x) = e^x \frac{1-e^x}{(1+e^x)^3} < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Entonces f es estrictamente creciente si: $x < 0$, estrictamente decreciente si $x > 0$ y f tiene un máximo relativo en 0, que será absoluto.

44. Dada la función: $f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$. Halla sus máximos y mínimos locales y/o globales. (Selectividad)

Solución: $f'(x) = -4 \frac{(1+x^2)^2 - x 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = -4 \frac{1+x^2-4x^2}{(1+x^2)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, con:

$f'(x) = -4 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} < 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Entonces f es estrictamente creciente si: $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

estrictamente decreciente si $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, estrictamente creciente si: $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, f tiene un máximo relativo en

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ y un mínimo relativo en $\frac{1}{\sqrt{3}}$, que serán absolutos ya que: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = 0$.

45. a) Halla el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones: $f(x) = \frac{2}{x}$ $g(x) = +\sqrt{x^2-3}$. b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demuestra que son perpendiculares. (Selectividad)

Solución: a) $f(x) = \frac{2}{x} = g(x) = \sqrt{x^2-3} \Rightarrow \frac{4}{x^2} = x^2-3 \Rightarrow x^4-3x^2-4=0 \Rightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = 4, -1 \Rightarrow x=2$

(Nos quedamos con la solución positiva ya que x es no negativo al serlo g): $P=(2,1)$

b) Recta tangente a f : $y=f(2)+f'(2)(x-2)$, con $f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -\frac{2}{2^2} = -\frac{1}{2}$, por lo que es:

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{1}{2}x$. Recta tangente a g : $y=g(2)+g'(2)(x-2)$, con:

$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} \Rightarrow g'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2$, por lo que es $y = 1 + 2(x-2) = 2x-3$. Son perpendiculares porque la

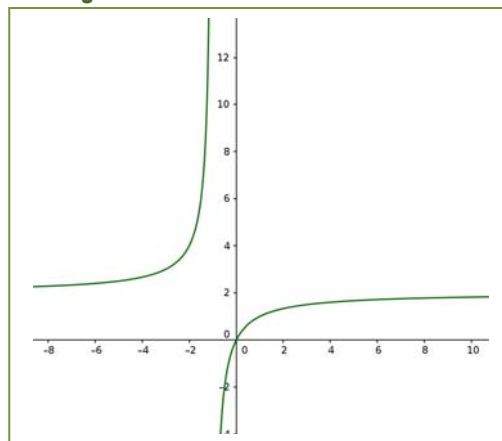
pendiente de la primera es menos el recíproco de la pendiente de la segunda.

46. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución: Dominio $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$;

Creciente (estrictamente) en todo su dominio.

Asíntota vertical $x = -1$, asíntota horizontal $y = 2$ (tanto hacia infinito como hacia menos infinito).



47. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ (Selectividad)

Solución: $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = \frac{1}{(0-2)^2} = \frac{1}{4} : (0, \frac{1}{4})$. **Cortes con el eje X:** $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \neq 0$. No hay

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$, luego $y = 0$ **asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no existe asíntota oblicua.**

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{+0} = \infty$, luego $x = 2$ **asíntota vertical.**

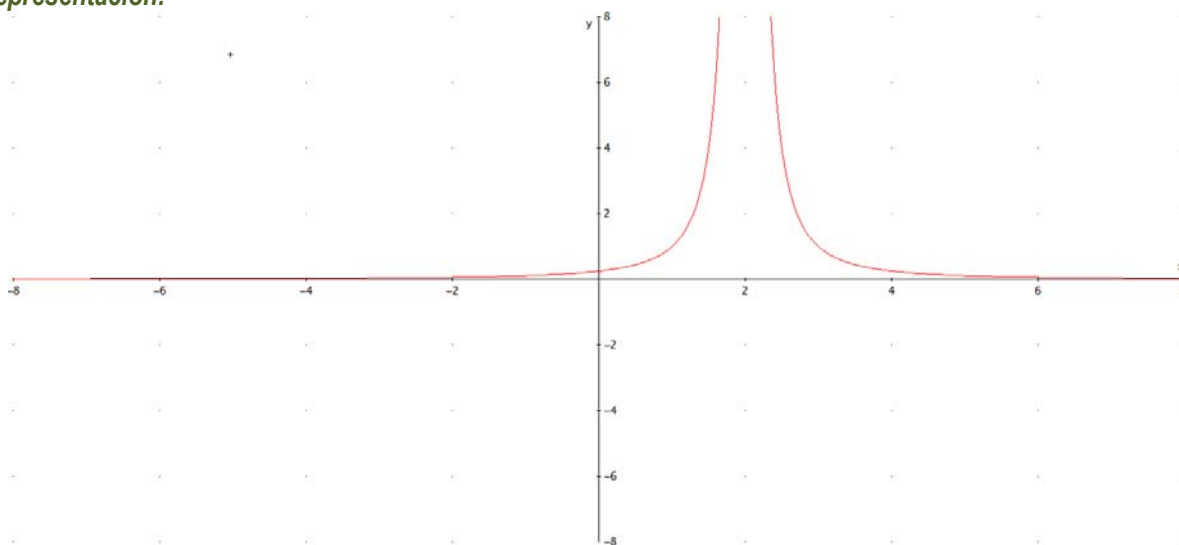
$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3} < 0 \Leftrightarrow x > 2$. Entonces f es estrictamente creciente si: $x < 2$, estrictamente decreciente si $x > 2$

y f no tiene extremos relativos (cambia de crecimiento en la asíntota vertical).

$$f''(x) = \frac{6}{(x-2)^4} > 0$$

Entonces f es convexa si $x < 2$ y si $x > 2$ y no tiene puntos de inflexión.

Representación:



48. a) Calcular los valores de a y b para que la función: $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$ sea continua para todo valor de x .

b) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior. Selectividad: Septiembre 06. Opción A

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x+2) = 3(0)+2 = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2a \cos x) = 2a \Rightarrow a = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x^2 + 2a \cos x) = (\pi^2 + 2a \cos \pi) = \pi^2 - 2 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x^2 + b) = \pi^2 + b \Rightarrow b = -2$$

b) Si $x < 0$, $f(x) = 3x+2 \Rightarrow f'(x) = 3 \Rightarrow f'_-(0) = 3$, si $x > 0$, x cerca de 0: $f'(x) = 2x - 2a \sin x \Rightarrow f'_+(0) = 0 - 0 = 0$. Por tanto f no es derivable en 0 (derivadas laterales distintas).

Si $x < \pi$, x cerca de π , $f(x) = x^2 + 2a \cos x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2a \sin x \Rightarrow f'_-(\pi) = 2\pi$, si $x > \pi$:

$f'(x) = 2ax \Rightarrow f'_+(\pi) = 2a\pi = 2\pi$. Por tanto, f es derivable en π (derivadas laterales iguales).

49. Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

(Selectividad)

Solución: $D(f) = \mathbb{R}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = 0e^0 = 0 : (0, 0)$.

Cortes con el eje X: $f(x) = xe^{2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 : (0, 0)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{2x} = \infty \cdot \infty = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = 0$ luego $y = 0$ es **asíntota horizontal**

en $-\infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} = e^\infty = \infty$ **y no existe asíntota oblicua. Tampoco existe asíntota vertical.**

$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1+2x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, con $f'(x) = e^{2x}(1+2x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

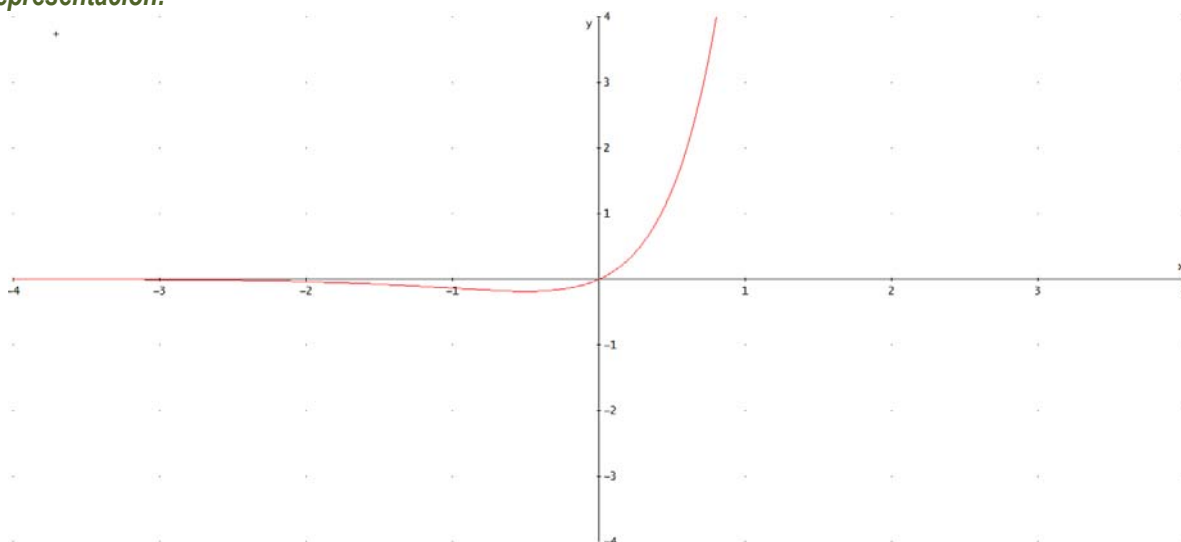
Entonces f es **estrictamente decreciente** si $x < -\frac{1}{2}$, **estrictamente creciente** si $x > -\frac{1}{2}$ y f tiene **mínimo**

relativo en: $-\frac{1}{2}$

$f''(x) = 2e^{2x}(1+2x) + 2e^{2x} = 4e^{2x}(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, con $f''(x) = 4e^{2x}(1+x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Entonces f es **cóncava** si $x < -1$, **convexa** si $x > -1$ y **tiene punto de inflexión** en $x = -1$.

Representación:



50. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

(Selectividad)

Solución: **Dominio** $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

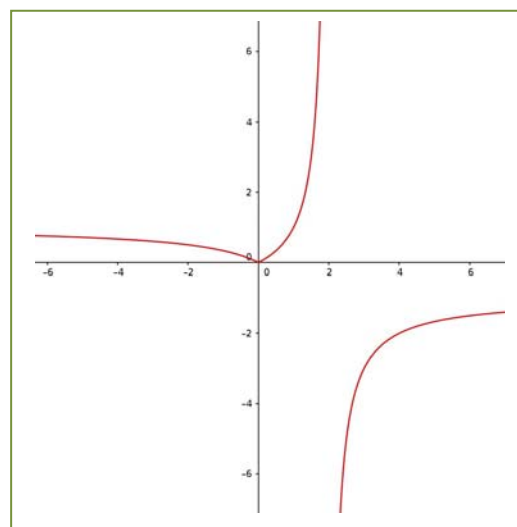
Decreciente (estrictamente) en $(-\infty, 0)$;

Creciente (estrictamente) en $(0, 2) \cup (2, \infty)$

Asíntota vertical $x = 2$;

Para $-\infty$, asíntota horizontal $y = 1$.

Para $+\infty$, asíntota horizontal $y = -1$.



51. Halla los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función: $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$.

(Selectividad)

Solución: Máximo: (1, 7/2); Mínimo: (-1, 5/2); Punto de inflexión: (0, 3).

52. Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x , de la que se conoce la siguiente información:

i) $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$

ii) $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

iii) $g(-1) = 0$, $g(0) = 2$, $g(2) = 1$.

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$.

Teniendo en cuenta estos datos se pide:

a) Analiza razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

b) Dibuja de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

(Selectividad)

Solución: a) Como $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 3$. $y = 3$ asíntota horizontal en ∞ y g no tiene asíntota oblicua en ∞ . Como g es

continua en $\mathbb{R}$, g no tiene asíntotas verticales. No podemos decir si g tiene asíntota oblicua en $-\infty$

b) $D(g) = \mathbb{R}$. Corte con el eje Y: $g(0) = 2$: (0, 2).

Cortes con el eje X: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$: (-1, 0) (por el estudio del crecimiento veremos que no puede haber más raíces)

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Entonces g es estrictamente creciente si $x < 0$, estrictamente decreciente si $0 < x < 2$, estrictamente creciente si $x > 2$, g tiene máximo relativo en 0 y mínimo relativo en 2, donde es positiva.

$g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$. Entonces g es cóncava si $x < 1$, convexa si $1 < x < 3$, cóncava si $x > 3$ y tiene puntos de inflexión en $x = 1$ y en $x = 3$.

Representación abierta.

53. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$. a) Halla sus asíntotas y sus extremos locales. b) Calcula los puntos de inflexión de $f(x)$

y dibuja la gráfica de $f(x)$.

(Selectividad)

Solución: a) Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{+\infty} = -\infty$. $y = 0$ asíntota horizontal en ∞ y f no tiene asíntota oblicua en ∞ . Como f es continua en $\mathbb{R}$, f no tiene asíntotas verticales.

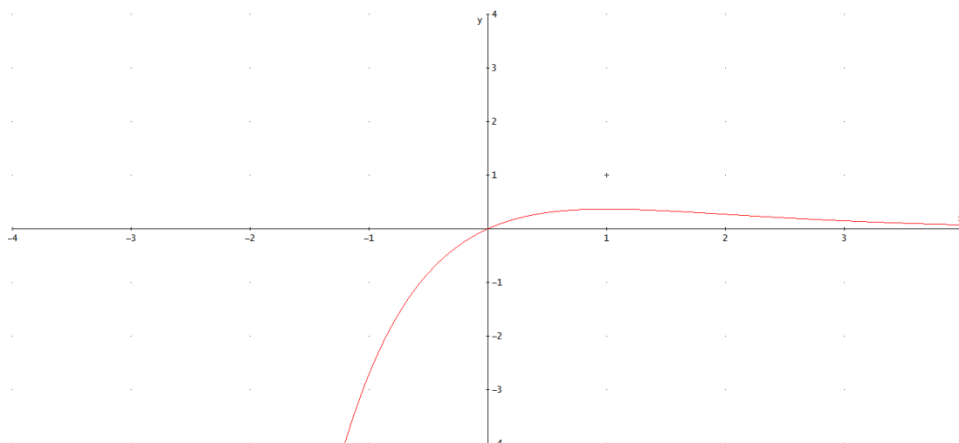
$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$, luego f no tiene asíntota oblicua en $-\infty$;

$f(x) = x e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, con $f''(x) = (1-x)e^{-x} < 0 \Leftrightarrow x > 1$; entonces f es estrictamente creciente si $x < 1$, f es estrictamente decreciente si $x > 1$ y f tiene un máximo relativo en 1; b) $D(f) = \mathbb{R}$. Corte con el eje Y: $f(0) = 0$: (0, 0).

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$: (0, 0); $f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f''(x) = (x-2)e^{-x} < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Entonces f es cóncava si $x < 2$, convexa si $x > 2$ y tiene punto de inflexión en $x = 2$.

Representación



54. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } |x| < 2 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$ Se pide: Calcula a y b para que f sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Sel

Solución: $a = -1/16, b = 1/2$

55. Obtén los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$f(x) = x (\ln(x))^2$, siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x .

(Selectividad)

Solución: Máximo relativo: $(1/e^2, 4/e^2)$; Mínimo relativo y absoluto: $(1, 0)$; No tiene puntos de inflexión.

56. Dada la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$. Se pide:

Dibuja la gráfica de f , estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

(Selectividad)

Solución: $D(f) = \mathbb{R}$. Corte con el eje Y : $f(0) = 1$: $(0, 1)$.

Cortes con el eje X : $f(x) = e^{-x}(x^2 + 1) > 0$: No hay; Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = \infty \cdot \infty = \infty$. $y = 0$ asíntota horizontal en ∞ , f no tiene asíntota horizontal en $-\infty$ y f no tiene asíntota oblicua en ∞ . Como f es continua en $\mathbb{R}$, f no tiene asíntotas verticales.

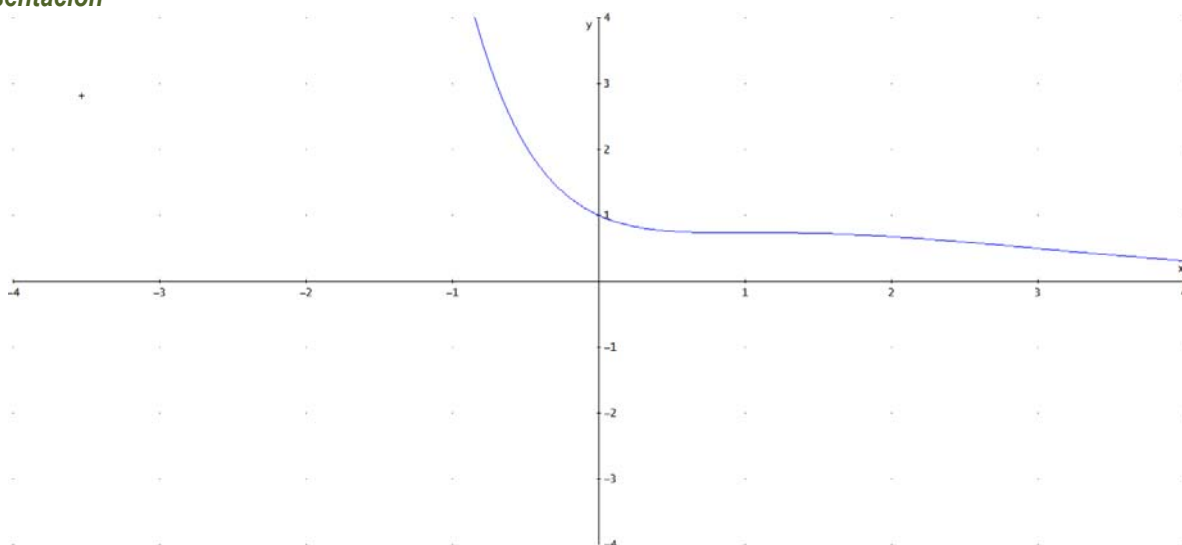
$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} e^{-x} = (-\infty)\infty = -\infty$, luego f no tiene asíntota oblicua en $-\infty$;

$f'(x) = 2x e^{-x} - (x^2 + 1)e^{-x} = -(x-1)^2 e^{-x} \leq 0$; entonces f es decreciente y no tiene extremos relativos

$f''(x) = -2(x-1)e^{-x} + (x-1)^2 e^{-x} = (x-1)(x-3)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$

$f''(x) = (x-1)(x-3)e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$. Entonces f es convexa si $x < 1$, cóncava si $1 < x < 3$, convexa si $x > 3$ y tiene punto de inflexión en $x=1, x=3$.

Representación



57. Sea: $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{4} & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$. A) Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$. B) Halla los máximos y mínimos locales de $f(x)$. C) Dibuja la gráfica de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: A) Si $x < \frac{3}{2}$, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1 - \frac{\frac{9}{4}}{4} = \frac{7}{16}$, si $x > \frac{3}{2}$:

$$f(x) = \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) = \frac{7}{12}\left(1 - \left(\frac{3}{2} - 2\right)^2\right) = \frac{7}{16}; \text{ por tanto:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \frac{7}{16} = f\left(\frac{3}{2}\right) \text{ y } f \text{ es continua en } \frac{3}{2}; \text{ si } x < \frac{3}{2}, f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow f'_-\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}, \text{ si}$$

$$x > \frac{3}{2}, f(x) = \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) \Rightarrow f'(x) = -\frac{7}{6}(x-2) \Rightarrow f'_+\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{6}\left(\frac{3}{2} - 2\right) = \frac{7}{12}; \text{ por tanto: } f'_-\left(\frac{3}{2}\right) \neq f'_+\left(\frac{3}{2}\right) \text{ y } f \text{ no}$$

$$\text{es derivable en } \frac{3}{2}; \text{ B) Si } x < \frac{3}{2}, f'(x) = -\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ con: } f'(x) = -\frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}, \text{ si } x > \frac{3}{2},$$

$$f'(x) = -\frac{7}{6}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2, \text{ con: } f'(x) = -\frac{7}{6}(x-2) < 0 \Leftrightarrow x > 2; \text{ entonces } f \text{ es estrictamente creciente si}$$

$$x < 0, \text{ estrictamente decreciente si } 0 < x < \frac{3}{2}, \text{ estrictamente creciente si } \frac{3}{2} < x < 2, \text{ estrictamente}$$

$$\text{decreciente si } x > 2, \text{ tiene un máximo relativo en } 0, \text{ un mínimo relativo en } \frac{3}{2} \text{ y un máximo relativo en } 2; \text{ C)}$$

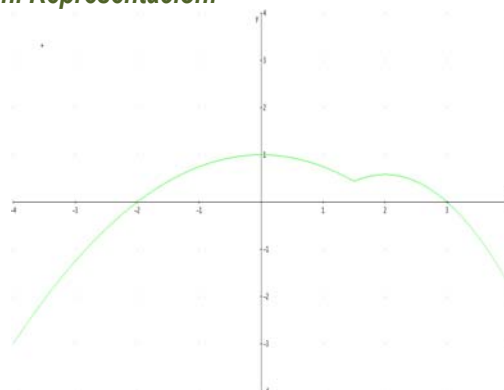
$$D(f) = \mathbb{R}. \text{ Corte con el eje Y: } f(0) = 1: (0, 1). \text{ Cortes con el eje X: Si } x < \frac{3}{2}, f(x) = 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x = -2:$$

$$(-2, 0); \text{ Si } x > \frac{3}{2}: f(x) = \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 3: (3, 0).$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{12}(1 - (x-2)^2) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = -\infty$, f no tiene asíntotas horizontales. Como f es continua en $\mathbb{R}$, f no tiene asíntotas verticales.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{x^2}{4}}{x} = -\infty, \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{12}(1 - (x-2)^2)}{x} = -\infty \text{ luego } f \text{ no tiene asíntotas}$$

oblicuas. Si $x < \frac{3}{2}$, $f''(x) = -\frac{1}{2} < 0$, si $x > \frac{3}{2}$, $f''(x) = -\frac{7}{6} < 0$. Entonces f es cóncava si $x < \frac{3}{2}$ y si $x > \frac{3}{2}$, y no tiene puntos de inflexión. Representación:



58. Si la derivada de la función $f(x)$ es: $f'(x) = (x-1)^3(x-5)$, obtén:
- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .
 - Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
 - La función f sabiendo que $f(0) = 0$.

(Selectividad)

Solución: a) **Creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$, decreciente en $(1, 5)$.**

b) **Máximo relativo en $x = 1$, mínimo relativo en $x = 5$, punto de inflexión en $x = 4$.**

$$c) f(x) = \frac{x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 25x}{5}$$

59. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si } 1+ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$ se pide: a) Halla los valores de los

parámetros a y b para los cuales la función f es continua en $x = 0$. b) Para $a = b = 1$, estudia si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

(Selectividad)

Solución: a) Si $a < 0$, 0 es un punto aislado del dominio de f , por lo que f es continua en 0 para todo valor de b .

$$\text{Si } a \geq 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax} - b}{2x} = \frac{a-b}{0}. \text{ Para que el límite sea real ha de ser:}$$

$a - b = 0 \Rightarrow a = b$. En ese caso:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+ax} - a}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{a^2}{(1+ax)^2}}{2} = -\frac{a^2}{2} = f(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$b) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2} + 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6} = \frac{1}{3}$$

Por tanto f es derivable en 0 .

60. a) Dada la función $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, halla el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$. c) Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demuestra que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

(Selectividad)

Solución: a) $f'(x) = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+1 = (1-x^2)^2 = 1-2x^2+x^4 \Leftrightarrow x^4-3x^2 = x^2(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

b) $y = f(0) + f'(0)x = \frac{0}{1-0^2} + x = x;$

c) Como $h(x) = g(x) - x$ tiene raíces en 0 y 2 , existe al menos un c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $h'(c) = g'(c) - 1 = 0 \Leftrightarrow g'(c) = 1$ (Rolle)

61. Dada la función: $f(x) = x^3 - x$. a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(-1, f(-1))$. b) Determina los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f .

(Selectividad)

Solución: a) $f(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$, $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 2$

Recta tangente: $y = f(-1) + f'(-1)(x+1) = 2(x+1) = 2x+2;$

b) $x^3 - x = 2x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = -1, x = 2;$

62. Dada la función $f(x) = e^x + a e^{-x}$, siendo a un número real, estudia los siguientes apartados en función de a : a) Halla los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f . b) Estudia para qué valor, o valores, de a la función tiene alguna asíntota horizontal.

(Selectividad)

Solución: a) Hay dos casos. Si $a \leq 0$ es siempre creciente y no tiene extremos relativos. Si $a > 0$ es decreciente en $(-\infty, \ln(a)/2)$ y creciente en $(\ln(a)/2, +\infty)$ siendo $x = \ln(a)/2$ un mínimo relativo.

b) Sólo tiene una asíntota horizontal cuando $a = 0$. Es asíntota en $-\infty$ y corresponde a la recta $y = 0$.

63. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$. Se pide: a) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$. b) Halla los puntos de inflexión de la gráfica de $f(x)$. c) Halla las asíntotas y dibuja la gráfica de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: a) $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, **con:** $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$

Entonces f es estrictamente creciente si $x < 0$, estrictamente decreciente si $x > 0$ y tiene un máximo relativo en 0.

b) $f''(x) = -\frac{2(x^2+1)^2 - 4x(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = -\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, **con:**

$f''(x) = -\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

Entonces f es convexa si $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, f es cóncava si $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, f es convexa si $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ y f tiene

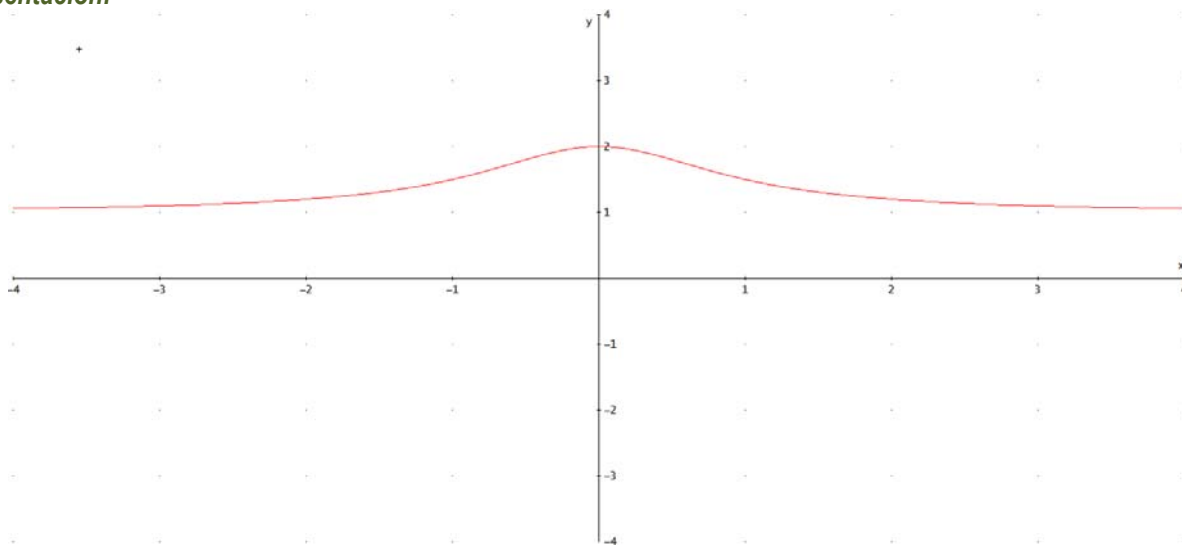
puntos de inflexión en $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$. c) $D(f) = \mathbb{R}$. Corte con el eje Y: $f(0) = \frac{0^2+2}{1} = 2: (0, 2)$.

Cortes con el eje X: $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-2}$: No hay

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2+1} = 1$, luego $y = 1$ asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no hay asíntotas oblicuas.

Tampoco hay asíntotas verticales.

Representación:



64. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} & \text{si } x > 0 \\ x + k & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ (ln significa logaritmo neperiano de x), se pide: a) Determina el valor de k para que la función sea continua en $\mathbb{R}$. b) Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas. c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$. (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + k) = 0 + k = k = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = \frac{0}{1} = 0$

(Ya que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$).

b) Corte con el eje Y: $f(0) = k = 0$: $(0, 0)$.

Otros cortes con el eje X: Si $x < 0$, $f(x) = x = 0 \Leftrightarrow x = 0$: no hay, si $x > 0$, $f(x) = \frac{\sqrt{x} \ln x}{2^x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$: $(1, 0)$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x}\right) 2^x - \sqrt{x} \ln x 2^x \ln 2}{2^{2x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{1}} \ln 1 + \sqrt{1} \frac{1}{1}\right) 2^1 - \sqrt{1} \ln 1 2^1 \ln 2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

Recta tangente: $y = f(1) + f'(1)x = \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$;

65. Dada la función: $f(x) = \ln(x^2 + 4x - 3)$, donde ln significa logaritmo neperiano de x , se pide:
a) Determina el dominio de definición de $f(x)$ y las asíntotas verticales de su gráfica.
b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4x - 3 > 0\}$; $x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2} = -2 \pm \sqrt{7}$. **Entonces:**

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4x - 3 > 0\} = (-\infty, -2 - \sqrt{7}) \cup (-2 + \sqrt{7}, \infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow -2 - \sqrt{7}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2 - \sqrt{7}^-} \ln(x^2 + 4x - 3) = \ln 0 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2 + \sqrt{7}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2 + \sqrt{7}^+} \ln(x^2 + 4x - 3) = \ln 0 = -\infty$$

Por tanto $x = -2 - \sqrt{7}$, $x = -2 + \sqrt{7}$ son asíntotas verticales.

$$\text{b) } f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 3} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \notin D(f), \text{ con: } f'(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 3} < 0 \Leftrightarrow x < -2$$

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < -2 - \sqrt{7}$, estrictamente creciente si $x > -2 + \sqrt{7}$

66. Los puntos $P(1, 2, 1)$, $Q(2, 1, 1)$ y $A(a, 0, 0)$ con $a > 3$, determinan un plano π que corta a los semiejes positivos de OY y OZ en los puntos B y C respectivamente. Calcula el valor de a para que el tetraedro determinado por los puntos A , B , C y el origen de coordenadas tenga volumen mínimo. (Selectividad)

Solución: $a = 9/2$

67. Dada la función $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5}$, se pide a) Estudia y obtén las asíntotas. b) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad. c) Representa gráficamente la función. (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = -\infty$ **luego no hay asíntota horizontal;**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x^2 + 5x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-10x - 20}{x + 5} = -10$$

Por tanto $y = 3x - 10$ es asíntota oblicua; $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = \frac{75 - 25 - 20}{+0} = \infty$ **Entonces**

$x = -5$ **es asíntota vertical.**

b) $f'(x) = \frac{(6x + 5)(x + 5) - (3x^2 + 5x - 20)}{(x + 5)^2} = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 60}}{2} = -5 \pm \sqrt{10},$ **con**

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 10x + 15)}{(x + 5)^2} < 0 \Leftrightarrow -5 - \sqrt{10} < x < -5 + \sqrt{10}$$

Entonces f es estrictamente creciente si $x < -5 - \sqrt{10}$, estrictamente decreciente si $-5 - \sqrt{10} < x < -5 + \sqrt{10}$, estrictamente creciente si $x > -5 + \sqrt{10}$, tiene un máximo relativo en $-5 - \sqrt{10}$ y un mínimo relativo en $-5 + \sqrt{10}$.

$$f''(x) = 3 \frac{(2x + 10)(x + 5)^2 - (x^2 + 10x + 15)2(x + 5)}{(x + 5)^4} = 3 \frac{(2x + 10)(x + 5) - (x^2 + 10x + 15)2}{(x + 5)^3} = \frac{60}{(x + 5)^3}$$
 Con

$$f''(x) = \frac{60}{(x + 5)^3} < 0 \Leftrightarrow x < -5$$

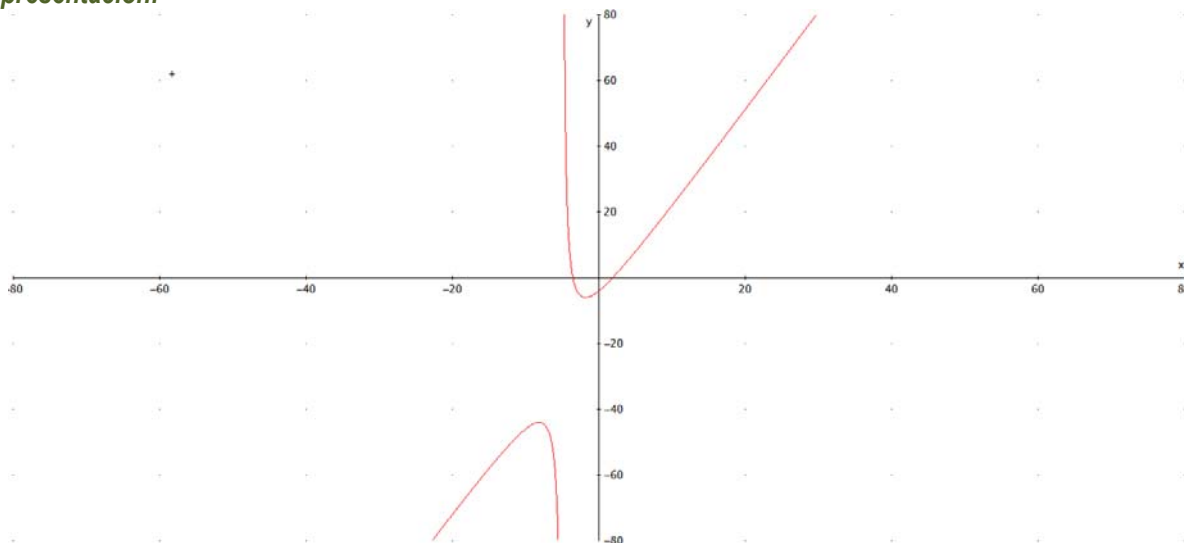
Entonces f es cóncava si $x < -5$, f es convexa si $x > -5$ y f no tiene puntos de inflexión

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$. **Corte con el eje Y:** $f(0) = \frac{-20}{5} = -4$: (0, -4).

Cortes con el eje X: $f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 20}{x + 5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 240}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{265}}{6}$:

$$\left(\frac{-5 + \sqrt{265}}{6}, 0 \right), \left(\frac{-5 - \sqrt{265}}{6}, 0 \right)$$

Representación:



68. Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide: Obtén, si existen, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas de f .

(Selectividad)

Solución: $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - (x-1)2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{3-x}{(x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 3$, **con:**

$$f'(x) = \frac{3-x}{(x+1)^3} < 0 \Leftrightarrow 3-x < 0, x+1 > 0 \text{ ó } 3-x > 0, x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ó } x > 3$$

Entonces f es estrictamente decreciente si $x < -1$, estrictamente creciente si $-1 < x < 3$, estrictamente decreciente si $x > 3$ y tiene un máximo relativo en 3

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$, **luego $y = 0$ es asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no hay asíntota oblicua;**

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{+0} = -\infty$ **Entonces $x = -1$ es asíntota vertical.**

69. Halla los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = \sqrt{12-3x^2}$

(Selectividad)

Solución: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / 12-3x^2 \geq 0\} = [-2, 2]$; $f'(x) = \frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{12-3x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(\pm 2) = \sqrt{12-12} = \sqrt{0} = 0$, $f(0) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. **Entonces el máximo absoluto es $2\sqrt{3}$ (se alcanza en 0), el mínimo absoluto es 0 (se alcanza en ± 2)**

70. Demuestra que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real cualquiera que sea el número m . Justifica la respuestas indicando qué teoremas usas.

Selectividad: Junio 11.1. Opción A

Solución: **La derivada de la función es $y' = 20x^4 + 3$, por lo que la función es estrictamente creciente. Eso significa que de existir una solución, debe ser única.**

Por otro lado, la función tiende a infinito cuando x tiende a infinito y a menos infinito cuando x tiende a menos infinito, cualquiera que sea m .

Eso significa que, para cualquier m , hay al menos un valor positivo y un valor negativo. Por el teorema de Bolzano, existe una raíz. Y ya hemos visto que es única.

71. Dada la función $f(x) = \frac{ax^4 + 1}{x^3}$, se pide: a) Determina el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x = 1$. Para ese valor de a , obtén los otros puntos en que f tiene un extremo relativo. b) Obtén las asíntotas de la gráfica de $y = f(x)$ para $a = 1$. c) Esboza la gráfica de la función para $a = 1$. (Selectividad)

Solución: a) $f'(x) = \frac{4ax^3x^3 - (ax^4 + 1)3x^2}{x^6} = \frac{ax^4 - 3}{x^4} \Rightarrow f'(1) = \frac{a-3}{1} = 0 \Leftrightarrow a = 3$, con: $f'(x) = \frac{3(x^4 - 1)}{x^4} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, por lo que f es estrictamente creciente si $x < -1$, f es estrictamente decreciente si $-1 < x < 1$, f es estrictamente creciente si $x > 1$, f tiene un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 1 ;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$ luego no tiene asíntotas horizontales;

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ e $y = x$ es asíntota oblicua;

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \frac{1}{+0} = \infty$ Entonces $x = 0$ es asíntota vertical;

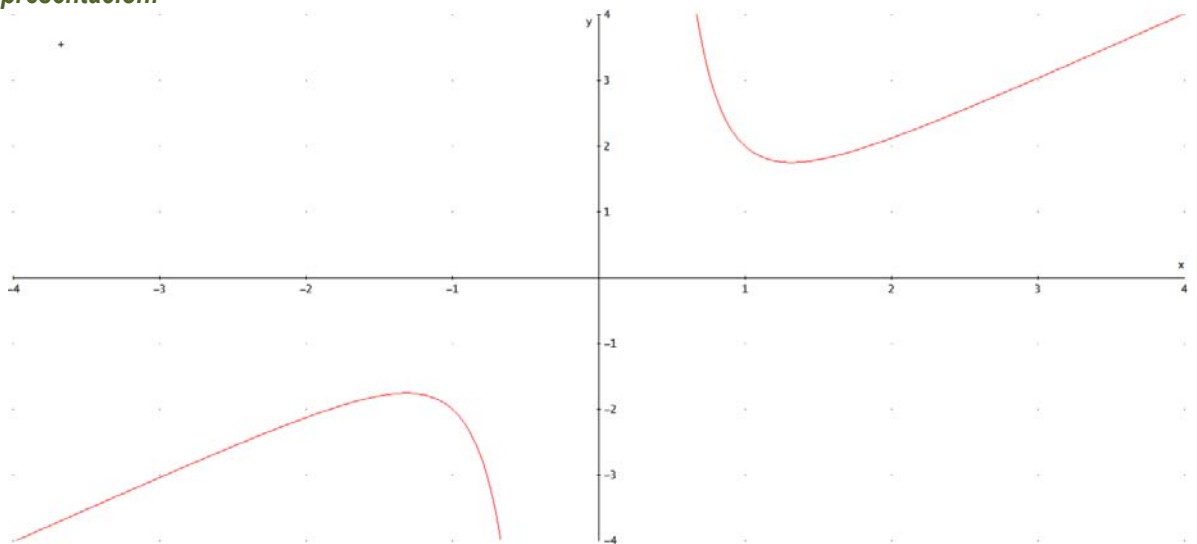
c) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. Corte con el eje Y: No hay (no está definida en 0). Cortes con el eje X:

$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{-1} \notin \mathbb{R}$: No hay. $f'(x) = \frac{4x^3x^3 - (x^4 + 1)3x^2}{x^6} = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$, con:

$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} < 0 \Leftrightarrow -\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$, por lo que f es estrictamente creciente si $x < -\sqrt[4]{3}$, f es estrictamente decreciente si $-\sqrt[4]{3} < x < \sqrt[4]{3}$, f es estrictamente creciente si $x > \sqrt[4]{3}$, f tiene un máximo relativo en $-\sqrt[4]{3}$

y un mínimo relativo en $\sqrt[4]{3}$. $f''(x) = \frac{4x^3x^4 - (x^4 - 3)4x^3}{x^8} = \frac{12}{x^5}$, con: $f''(x) = \frac{12}{x^5} < 0 \Leftrightarrow x < 0$, por lo que f es cóncava si $x < 0$, f es convexa si $x > 0$ y no tiene puntos de inflexión (cambia de concavidad en la asíntota vertical).

Representación:



72. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3}$, se pide: a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función $y = f(x)$. b) Halla los intervalos donde f crece y aquellos en que f decrece. Determina todos los máximos y mínimos locales. c) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3} = \infty$ **luego no tiene asíntotas horizontales;**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x - 7}{x^2 + 3x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 7}{x + 3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x - 7}{x + 3} = -5 \text{ y:}$$

$y = 2x - 5$ **es asíntota oblicua;** $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3} = \frac{8}{+0} = \infty$. **Entonces $x = -3$ es asíntota vertical;**

$$b) f'(x) = \frac{(4x+1)(x+3) - (2x^2 + x - 7)}{(x+3)^2} = \frac{2(x^2 + 6x + 5)}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = -1, -5, \text{ con:}$$

$f'(x) = \frac{2(x^2 + 6x + 5)}{(x+3)^2} < 0 \Leftrightarrow -5 < x < -1$, **por lo que f es estrictamente creciente si $x < -5$, f es estrictamente decreciente si $-5 < x < -1$, f es estrictamente creciente si $x > -1$, f tiene un máximo relativo en -5 y un mínimo relativo en -1 ;**

$$c) D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}. \text{ Corte con el eje Y: } f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 + 0 - 7}{0 + 3} = -\frac{7}{3}:$$

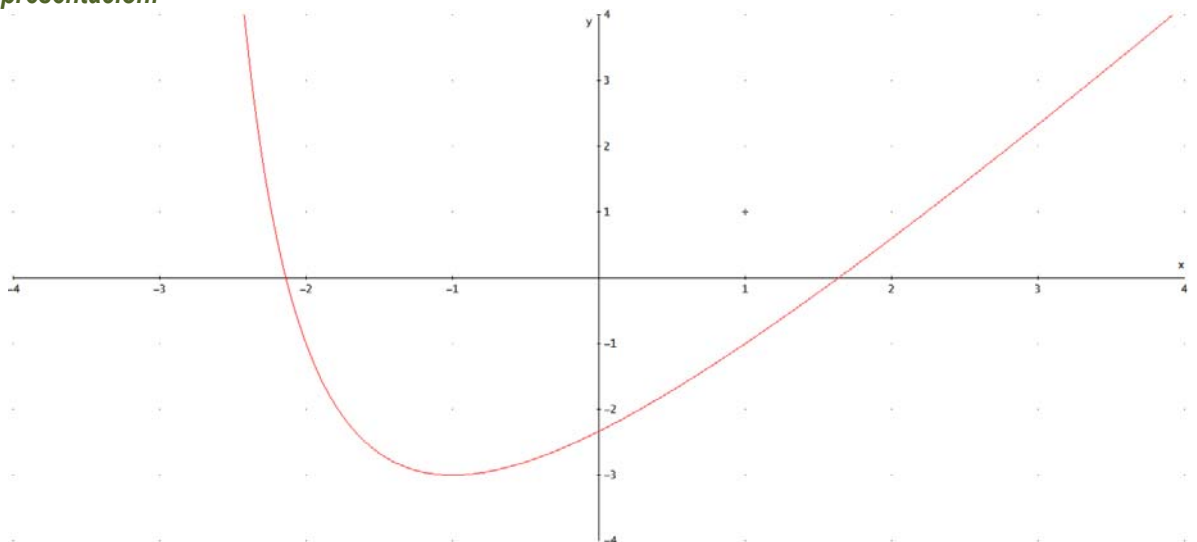
$$\left(0, -\frac{7}{3}\right). \text{ Cortes con el eje X: } f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x + 3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 56}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2};$$

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{57}}{2}, 0\right), \left(\frac{-1 + \sqrt{57}}{2}, 0\right).$$

$$f''(x) = 2 \frac{(2x+6)(x+3)^2 - (x^2 + 6x + 5)2(x+3)}{(x+3)^4} = 2 \frac{(2x+6)(x+3) - (x^2 + 6x + 5)2}{(x+3)^3} = \frac{16}{(x+3)^3}, \text{ con:}$$

$f''(x) = \frac{16}{(x+3)^3} < 0 \Leftrightarrow x < -3$, **por lo que f es cóncava si $x < -3$, f es convexa si $x > -3$ y no tiene puntos de inflexión (cambia de concavidad en la asíntota vertical).**

Representación:



73. Hallar el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 14}$. Hallar el conjunto de puntos en los que la función f tiene derivada (Selectividad).

Solución: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9x + 14 \geq 0\}$; $x^2 - 9x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = 2, 7$. **Entonces:**

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9x + 14 \geq 0\} = (-\infty, 2] \cup [7, \infty); \text{f es derivable en:}$$

$$\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 9x + 14 > 0\} = (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$$

74. Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, obtener los valores de a , b y c de modo que se verifiquen las condiciones siguientes: El polinomio $P(x)$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas $x = -1/3$, $x = -1$. La recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en el punto $(0; P(0))$ sea $y = x + 3$. (Selectividad).

Solución: $a = 2, b = 1, c = 3$

75. Hallar a ; b ; c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión. (Selectividad)

Solución: $f(1) = 1^3 + a + b + c = 2 \Rightarrow a + b + c = 1$ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 3 + 2a + b = 0$,

$$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(3) = 18 + 2a = 0 \Rightarrow a = -9, b = -3 - 2a = 15, c = 1 - a - b = -5.$$

Es un máximo relativo porque $f''(1) = 6 + 2a = -12 < 0$ **y es un punto de inflexión porque** $f'''(x) = 6 \neq 0$

76. Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}$, $g(x) = (\ln x)^x$, $h(x) = \sin(\pi - x)$ se pide: a) Hallar el dominio de $f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. b) Calcular $g'(e)$. c) Calcular, en el intervalo $(0; 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$. (Selectividad)

Solución: a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 > 0, x^2 - 3 > 0\} = (\sqrt{3}, \infty)$;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{1} = 3;$$

$$b) \ln(g(x)) = x \ln(\ln(x)) \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln(\ln(x)) + x \cdot \frac{1}{\ln(x)} \Rightarrow g'(x) = \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)} \right) \ln(x)^x;$$

$$c) h(x) = \sin(\pi - x) = 0 \Leftrightarrow \pi - x = 0 \Leftrightarrow x = \pi : (\pi, 0);$$

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = 0 \Leftrightarrow \pi - x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} : \left(\frac{\pi}{2}, 1 \right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1 \right);$$

Son extremos relativos porque son el valor máximo y mínimo que puede alcanzar un seno.

77. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3x + A & \text{si } x \leq 3 \\ -4 + 10x - x^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$, se pide a) Halla el valor de A para que $f(x)$ sea continua.

¿Es derivable para ese valor de A ? b) Halla los puntos en los que $f'(x) = 0$. c) Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[4, 8]$. (Selectividad: Septiembre 12. Opción A)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x + A) = 9 + A = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-4 + 10x - x^2) = -4 + 30 - 9 = 17 \Rightarrow A = 8$.

$$\text{Si } x < 3, f(x) = 3x + A \Rightarrow f'(x) = 3 \Rightarrow f'_-(3) = 3.$$

Si $x > 3, f(x) = -4 + 10x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 10 - 2x \Rightarrow f'_+(3) = 4$, **luego f no es derivable en 3 (derivadas laterales distintas);**

$$b) \text{ Si } x < 3, f'(x) = 3 \neq 0. \text{ Si } x > 3, f'(x) = 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5;$$

c) $f(4) = -4 + 40 - 4^2 = 20$, $f(5) = -4 + 50 - 25 = 21$, $f(8) = -4 + 80 - 64 = 12$, luego el máximo absoluto es 21 (se alcanza en 5), el mínimo absoluto es 12 (se alcanza en 8)

78. Dada la función $f(x) = x^2 \sin x$, se pide:

a) Determina, justificando tu respuesta, si la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo abierto $(\pi/2, \pi)$.

b) Obtén la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(\pi, f(\pi))$. (Selectividad)

Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Solución: a) **No tiene ninguna solución. Quiere decir $x^2 \sin(x) = 0$, y eso sólo se cumple si $x = 0$ o $\sin(x) = 0$, y ninguna de las dos funciones se anula en dicho intervalo;** b) $y = x/\pi^2 - 1/\pi$.

79. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$; se pide: a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.

b) Para ese valor de a , estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$. c) Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$. Selectividad

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 3x}{x-1} = 0 = f(0) = a$. Para ese valor es continua ya que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+3}{x-1} = -3 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{t}{e^t} = 0$, luego f no es derivable

en 0;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ luego $y = 1$ asíntota horizontal;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x-1} = 5$ y:

$y = 2x + 5$ es asíntota oblicua. No hay asíntotas verticales;

80. Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \infty$ luego no hay asíntotas horizontales;

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x-2)^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 4x}{(x-2)^2} = 2$ y:

$y = x + 2$ es asíntota oblicua. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{(x-2)^2} = \infty$, luego $x = 2$ es asíntota vertical;

b) No se puede hallar la tangente a f en 2 porque la función no está definida en ese punto

81. Dada la función $f(x) = 2 \cos^2 x$ se pide: a) Determinar los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. b) Determinar los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. (Selectividad)

Solución: a) $f'(x) = 4 \cos x (-\sin x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $f(0) = 2 \cos^2 0 = 2$, luego el

máximo absoluto es 2 (se alcanza en 0), el mínimo absoluto es 0 (se alcanza en $\pm \frac{\pi}{2}$)

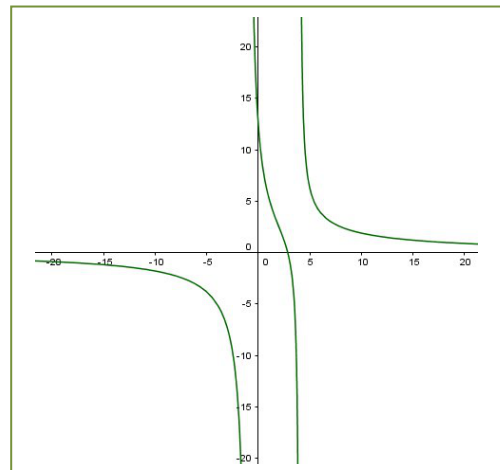
b) $f'(x) = -2 \sin(2x) \Rightarrow f''(x) = -4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4}$, con:

$f'''(x) = 8 \sin(2x) \Rightarrow f'''\left(\pm \frac{\pi}{4}\right) = 8 \sin\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 8 \neq 0$, luego f tiene punto de inflexión en $\pm \frac{\pi}{4}$;

82. Dada la función $f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$, se pide: a) Halla las asíntotas de su gráfica. b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcula sus puntos de inflexión. c) Esboza la gráfica de la función.

(Selectividad)

Solución: a) **Asíntotas verticales:** $x = 4$ y $x = -1$; **Asíntota horizontal:** $y = 0$ en $+\infty$ y $-\infty$; b) **La función es decreciente en todo su dominio, es decir, en $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$; Tiene un punto de inflexión en $x = 2$**
c) **Gráfica al margen.**



83. Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, se pide: Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$. Selectividad:

Solución: $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 1$. **Recta tangente:** $y = f(0) + f'(0)x = x$;

84. Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, se pide: a) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y estudia la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. b) Esboza la gráfica de $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Sel

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$, **luego no existe el:**
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. **Cortes con el eje X:** $f(x) = e^{\frac{1}{x}} > 0$: **No hay.**

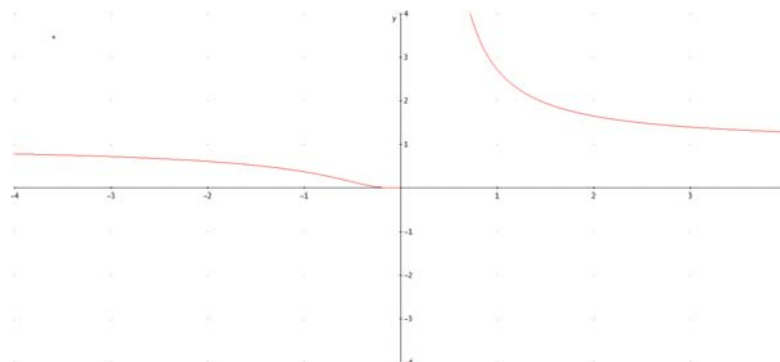
Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ **asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no hay asíntota oblicua;**

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $x = 0$ **es asíntota vertical;**

$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) < 0$, **por lo que f es estrictamente decreciente si $x < 0$ y si $x > 0$ y no tiene extremos**

relativos; $f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} \right) = e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x^4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, **con:** $f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{2x+1}{x^4} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$, **por lo que f es cóncava si $x < -\frac{1}{2}$, f es convexa si $x > -\frac{1}{2}$ y tiene punto de inflexión en $x = -\frac{1}{2}$.**

Representación:



85. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, se pide: a) Estudiar su continuidad. b) Estudiar la existencia de

asíntotas de su gráfica y, en su caso, calcularlas. c) Hallar los extremos relativos y esbozar de su gráfica.

Selectividad:

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2+6}{x-1} = -6 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{x+1} = -1$. **Por tanto f no es continua en 0. En los demás puntos es continua al ser el cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.**

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+6}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \infty$ **luego no hay asíntotas horizontales;**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+6}{x^2-x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+6}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+6}{x-1} = 2$ **y:**

$y = 2x + 2$ **es asíntota oblicua en $-\infty$;**

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-1}{x+1} = -1$ **y:**

$y = x - 1$ **es asíntota oblicua en ∞ (se ve también porque, si $x > 0$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$)**

No hay asíntotas verticales; c) $D(f) = \mathbb{R}$. **Cortes con el eje Y:** $f(0) = -\frac{1}{1} = -1$: $(0, -1)$. **Cortes con el eje X:**

Si $x < 0$, $f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1} \neq 0$, **si $x > 0$,** $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$: $(1, 0)$.

Si $x < 0$, $f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x-1) - (2x^2+6)}{(x-1)^2} = 2 \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} = 3, -1$, **con:**

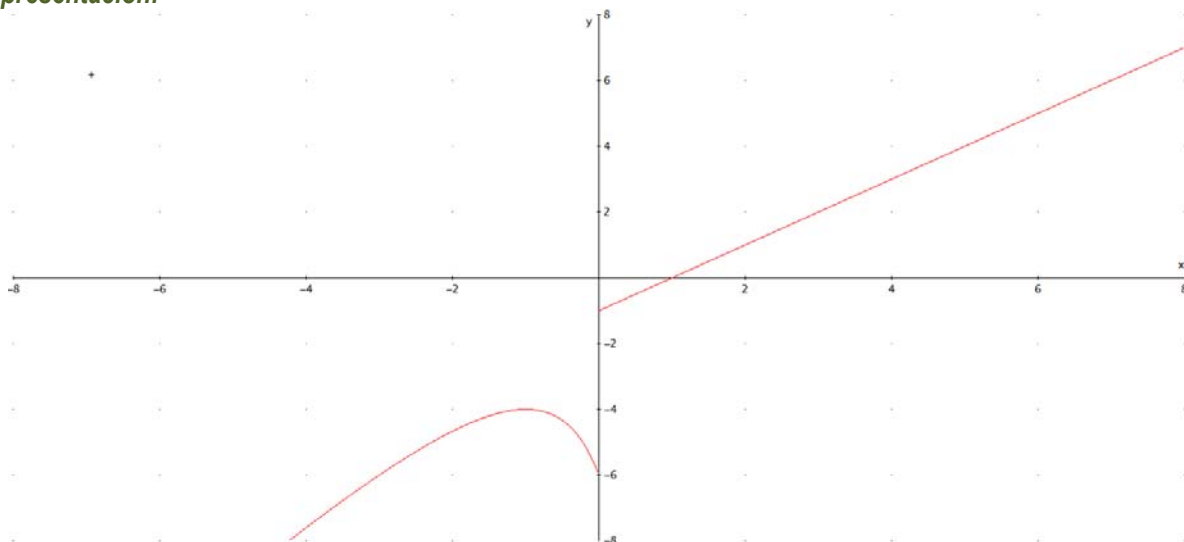
$f'(x) = 2 \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. **Si $x > 0$,** $f(x) = x - 1 \Rightarrow f'(x) = 1 > 0$.

Por tanto f es estrictamente creciente si $x < -1$, f es estrictamente decreciente si $-1 < x < 0$, f es estrictamente creciente si $x > 0$, f tiene un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 0 ; Si $x < 0$:

$f''(x) = 2 \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-3)2(x-1)}{(x-1)^4} = 2 \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x-3)2}{(x-1)^3} = \frac{16}{(x-1)^3} < 0 \Leftrightarrow x < 1$, **Por tanto f**

es cóncava si $x < 0$, y si $x > 0$ (en este caso es una recta) y no tiene puntos de inflexión.

Representación:



86. a) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determina: $f(-2)$; $f'(-2)$ y $f''(-2)$. (Selectividad)

Solución: $f(-2) = -16$, $f'(-2) = 16$, $f''(-2) = 0$

87. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}$, se pide: a) Determina el dominio de f y sus asíntotas. b) Calcula $f'(x)$ y determina los extremos relativos de $f(x)$. (Selectividad)

Solución: a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-4, -1\}$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) = 1$, luego $y = 1$ es asíntota horizontal en $\pm\infty$ y no

hay asíntotas oblicuas;

$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) = \infty$, luego $x = -4$, $x = -1$ son

asíntotas verticales;

$$b) f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+4)^2} = \frac{4(x+1)^2 - (x+4)^2}{(x+1)^2(x+4)^2} = \frac{(2(x+1) - (x+4))(2(x+1) + x+4)}{(x+1)^2(x+4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2, \text{ con:}$$

$$f'(x) = 3 \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x+4)^2} < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Por tanto f es estrictamente creciente si $x < -2$, f es estrictamente decreciente si $-2 < x < 2$, f es estrictamente creciente si $x > 2$, f tiene un máximo relativo en -2 y un mínimo relativo en 2 ;

88. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, se pide: a) Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea

continua. b) Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a . (Selectividad)

Solución: a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5\sin x}{2x} + \frac{1}{2} = 3 = f(0) = a$. Para ese valor es continua ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + 3) = 3$$

CAPÍTULO 7: INTEGRALES

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula el área de la región limitada por cada una de las funciones i) $f(x) = a$, ii) $g(x) = a \cdot x$ y iii) $h(x) = a \cdot x + b$ (con a y $b \in \mathbb{R}$) entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x .

Solución gráfica: Al dibujar las funciones se comprueba que las áreas son: i) ax ; ii) $ax^2/2$; iii) $ax^2/2 + bx$.

1. PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN. LA INTEGRAL INDEFINIDA

2. Calcula las siguientes primitivas: a) $\int 4x^3 dx$ b) $\int 3x^2 dx$ c) $\int 5x^4 dx$ d) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2) dx$

Solución: a) $x^4 + C$; b) $x^3 + C$; c) $x^5 + C$; d) $x^5 - x^4 + x^3 + C$.

3. Dada $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$, calcula la primitiva de $f(x)$ que verifica $F(0) = 4$.

Solución: $F(x) = x^4/4 - x^3 + x^2 + x$.

4. Comprueba si $F(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 5$ es una primitiva de $f(x) = 12x^2 + 4x + 3$. En caso negativo, explica por qué.

Solución: $F'(x) = 12x^2 + 4x - 1$. No lo es pues la derivada de $-x$ es -1 , no 3 .

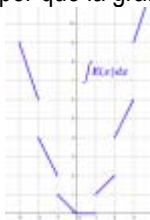
5. Determina los valores de a , b , c y d para los que $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una primitiva de la función $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$.

Solución: $F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = f(x)$ luego $3a = 4$, $a = 4/3$; $2b = -5$ luego $b = -5/2$, $c = 3$.

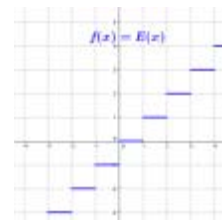
6. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio. Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

Solución: La función primitiva de una función no es única. Las distintas primitivas difieren en una constante

7. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función “parte entera de x ”, $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):



Solución: La gráfica está formada por tramos de rectas, cuya derivada es constante.

3. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

8. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$ haciendo $x = t^{12}$.

b) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}} dx$ haciendo $1+2x = t^2$

d) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ haciendo $x + \sqrt{x^2 - 1} = t$

e) $\int (2\sin^3 x + 3\sin^2 x - \sin x + 3) \cos x dx$ haciendo $\sin x = t$

Solución: a) $(4/5)x^{5/4} - (12/13)x^{13/12} + C$; b) $\arctg(e^x) + C$; c) $((1+2x)^{1/2}(35x^4 - 20x^3 + 12x^2 - 8x + 8)/65 + C$;

d) $\frac{\ln(\sqrt{x^2+1}+1) + x\sqrt{x^2-1} + x^2}{2} + C$;

e) $\sin^4(x)/2 + \sin^3(x) - \sin^2(x)/2 + 3\sin(x) + C$

9. Elige el cambio de variable que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3 + 1}{(x^4 + 2x)^3} dx$ b) $\int \frac{e^{\lg x}}{\cos^2 x} dx$ c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} dx$ d) $\int 2x^3 \sqrt{x^4 - 49} \cdot dx$ e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2} dx$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

Solución: a) $t = x^4 + 2x$; $I = -1/(4(x^4 + 2x)) + C$; b) $t = \lg(x)$; $I = e^{\lg(x)} + C$; c) $t = \ln(x)$; $I = \ln^2(\ln(x))/2 + C$;

d) $t = x^4 - 49$; $I = (x^4 - 49)^{3/2}/3 + C$; f) $t = 1 - 4x^2$; $I = (-1/2)(1 - 4x^2)^{1/2}$.

e) $t = x + 1$; $I = (3/5)(x + 1)^{5/3} - (3/2)(x + 1)^{4/3} + 4(x + 1) - 12(x + 1)^{2/3} + (16/3)(x + 1)^{1/3} - \ln((x + 1)^{1/3} + 2)$;

10. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int \left(4x^3 + 3x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$ b) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ c) $\int \sin x \cos x dx$ d) $\int \frac{\ln(x+1)}{x} dx$

e) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ f) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$ g) $\int x^2 \cdot e^{x^2} dx$ h) $\int e^{x^2} dx$

Solución: a) Si, $\int \left(4x^3 + 3x^3 - \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx = x^4 + 3x^4/4 + 1/x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + C$;

b) Si, $\int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2/2 + C$;

c) Si, $\int \sin x \cos x dx = (\sin x)^2/2 + C$; d) No; e) Si; f) Si, $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} dx = x^3/3 - x + C$; g) No; h) No.

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (e^{3x} + e^{2x} + e^x) e^x dx$; b) $\int x \cdot \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} dx$; c) $\int \ln(\cos x) \lg x dx$; d) $\int \frac{x dx}{1+x^4}$; i) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; j) $\int (\ln x + 2) \frac{dx}{x}$

Solución: a) $e^{4x}/4 + e^{3x}/3 + e^{2x}/2 + C$; b) $(1/2)\sin(e^{x^2}) + C$; c) $-(1/2)\ln^2(\cos x) + C$;

d) $(1/2)\arctg(x^2) + C$;

i) $\arctg(e^x) + C$;

j) $\ln^2(x) + 2\ln(x) + C$

12. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (x^2 + x + 1)e^x dx$ b) $\int \ln x dx$ c) $\int x \cos x dx$ d) **Curiosidad - idea feliz:** Resuelve la primitiva $\int \cos(\ln x) dx$

Para ello, multiplica y divide el integrando por x : $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \cdot x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = \dots \\ dv = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \rightarrow v = \dots \end{array} \right.$

Solución: a) $(x^2 - x + 2)e^x + C$;

b) $x \ln(x) - x + C$;

c) $x \sin(x) + \cos(x) + C$;

d) $(1/2)(x \cdot \sin(\ln(x)) + x \cdot \cos(\ln(x))) + C$

13. Sea $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 8$, justifica si es primitiva de alguna de las siguientes funciones: $g(x) = e^{2x} - 4x + 8$, $h(x) = 2e^{2x} - 4x$.

Solución: Es una primitiva de $h(x) = 2e^{2x} - 4x$, pues su integral es: $e^{2x} - 2x^2 + C$.

14. Dada la función $f(x) = (x+1) \cdot (3x-2)$. a) Calcula una primitiva de $f(x)$. b) Justifica que la función $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ no es primitiva de $f(x)$.

Solución: a) $F(x) = x^3 + x^2/2 - 2x + C$; b) No puede ser una primitiva, pues no se diferencian en una constante.

15. Dada la función $f(x) = (x+a)\cos x$, donde a es una constante, a) Encuentra una primitiva de f . b) Si F es una primitiva de f , ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?

Solución: $F(x) = (x+a)\sin(x) + \cos(x) + C$; b) $G(x)$ no es una primitiva de $f(x)$ pues no se diferencia de $F(x)$ en una constante, sino en $2x$.

16. Sea $f(x) = x^2 + bx$ donde b es una constante. Encuentra b , sabiendo que hay una primitiva F de f con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de F .

Solución: $b = 1$; $F(x) = x^3/3 + x^2 + 2$.

17. Dada la función $f(x) = 25 - x^2 + \frac{a}{x^2}$ ($x \neq 0$), donde a es una constante, encuentra una primitiva de f . Posteriormente, encuentra a para que si f' es la derivada de f , entonces $f'(1) = -2$.

Solución: $F(x) = 25x - x^3/3 - a/x + C$; $a = 0$.

4. EL PROBLEMA DEL CÁLCULO DEL ÁREA

18. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 (x^2 + x + 1) dx$; b) $\int_{-1}^1 (x^2 + x + 1) dx$; c) $\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt{x^2 + 1} dx$; d) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} dx$; e) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; f) $\int_1^e \ln x dx$

Solución: a) 60; b) 8/3; c) 7/3; d) $\ln(2)/2$; e) 2; f) $2e - 1$.

19. Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1) dx = f(c) \cdot (5-0)$ y razona su interpretación geométrica.

Solución: $c = 5/2$; Se interpreta geométricamente mediante el teorema del valor medio.

20. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula $f'(x)$ si $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{\ln t}$

Solución: $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{\ln t} = e^x - 2$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. - Sabiendo que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ y $\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, calcula:

Solución:

$$1) \int x^5 dx = x^6/6 + C; \quad 2) \int \frac{4}{x^5} dx = -1/x^4 + C; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2} = -1/x + C; \quad 4) \int 37 dx = 37x + C; \quad 5) \int 6x^7 dx = 6x^8/8 + C$$

$$6) \int 5x^{1/4} dx = 4\sqrt[4]{x^5} + C; \quad 7) \int 5\sqrt{x^3} dx = 2\sqrt{x^5} + C; \quad 8) \int (3-2x-x^4) dx = 3x - x^2 - x^5/5 + C;$$

$$9) \int (2x^5 - 5x + 3) dx = x^6/3 - 5x^2/2 + 3x + C; \quad 10) \int (2+3x^3)^2 dx = 4x + 3x^4 + 9x^7/7 + C;$$

$$11) \int 2(x^2 + 2)^3 dx = 2x^7/7 + 12x^5/5 + 8x^3 + 8x + C; \quad 12) \int (1-x^3)^2 dx = x - x^4/2 + x^7/7 + C;$$

$$13) \int \frac{x^3 - x + 2}{x^3} dx = x + 1/x - 1/x^2 + C; \quad 14) \int \left(-4x^{2/3} + 2x \right) dx = -12x^{5/3}/5 + x^2 + C;$$

$$15) \int \left(3a - \frac{1}{3e^2} + 2x^a \right) dx = (3a - 1/3e^2)x + 2x^{a+1}/(a+1) + C; \quad 16) \int \left(-\frac{3}{x^3} + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = 3/(2x^2) + 2x - 6\sqrt{x} + C;$$

$$17) \int \left(3x^5 - \frac{4}{3x^2} + 2\sqrt{x^2} \right) dx = x^6/2 + 4/(3x) + 10x^{7/2}/7 + C; \quad 18) \int (1-x)\sqrt{x} dx = 2x^{3/2}/3 - 2x^{5/2}/5 + C;$$

$$19) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx = x^2/2 + 5x + 4/x + C; \quad 20) \int \left(5e^x + \frac{2x^3 - 3x^2 + 5}{4x^2} \right) dx = 5e^x + x^2/4 - 3x/4 - 5/(4x) + C;$$

$$21) \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + C; \quad 22) \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x^2/4 + 4\sqrt{x} + C;$$

$$23) \int \sqrt{x}(x^3 + 1) dx = \frac{2\sqrt{x^9}}{9} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C; \quad 24) \int \left(\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x}} \right) dx = x^{7/2} - 4\sqrt{x}/3 + C;$$

$$25) \int \sqrt{x}(3-5x) dx = 2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x^5} + C; \quad 26) \int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}} dx = -\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \frac{2\sqrt{x^5}}{5} - 4\sqrt{x} + C;$$

$$27) \int (3x+4)^2 dx = x^3/3 + 12x^2 + 16x + C; \quad 28) \int (3x-7)^4 dx = 81x^5/5 - 567x^4/4 + 264x^3/3 - 3087x^2/2 + 2401x + C;$$

$$29) \int x(x^2 - 4)^3 dx = x^8/8 - 2x^6 + 12x^4 - 32x^2 + C; \quad 30) \int 3x(x^2 + 2)^3 dx = 3x^8/8 + 3x^6 + 12x^3 + 12x^2 + C;$$

$$31) \int (x^3 + 2)^2 x^2 dx = (x^3 + 2)^3/9 + C; \quad 32) \int (x^3 + 3)x^2 dx = (x^3 + 3)^2/6 + C;$$

$$33) \int (x-2)^{3/2} dx = (2/5)(x-2)^{5/2} + C; \quad 34) \int (a+x)^3 dx = (a+x)^4/4 + C;$$

$$35) \int [(x+2)^3 - (x+2)^2] dx = (x+2)^4/4 - (x+2)^3/3 + C; \quad 36) \int \sqrt{3x+12} dx = \frac{2\sqrt{3}\sqrt{(x+4)^3}}{3} + C;$$

$$37) \int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} + C; \quad 38) \int \frac{dx}{(x-1)^3} = -1/(2(x-1)^2) + C;$$

$$39) \int (x^2 - x)^4 (2x-1) dx = (x^2 - x)^5/5 + C; \quad 40) \int \frac{1}{\sqrt{x}} (1 + \sqrt{x})^2 dx = \frac{2(1 + \sqrt{x})^3}{3} + C;$$

$$41) \int \frac{x^3}{(x^4 - 1)^2} dx = -1/(x^4 - 1) + C; \quad 42) \int \frac{x dx}{(x^2 + 4)^3} = -1/(4(x^2 + 4)^2) + C;$$

$$43) \int x\sqrt{x^2 - 7} dx = \frac{\sqrt{(x^2 - 7)^3}}{3} + C; \quad 44) \int (x-1)(x^2 - 2x + 3)^4 dx = (x^2 - 2x + 3)^5/10 + C;$$

$$45) \int \frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}} dx = \frac{3\sqrt{1+7x^2}}{7} + C; \quad 46) \int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^2} dx = -8/(3(x^3 + 2)) + C;$$

$$47) \int \frac{3x dx}{\sqrt[3]{x^2+3}} = \frac{3\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}{2} + C;$$

$$49) \int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}} dx = \frac{4\sqrt[4]{(x^3+5)^3}}{9} + C;$$

$$51) \int \sqrt{x^2-2x^4} dx = -(1-2x^2)^{3/2}/6 + C;$$

$$53) \int \sin^3 x \cos x dx = \sin^4 x/4 + C;$$

$$55) \int \frac{x \ln(x^2+3)}{x^2+3} dx = \ln^2(x^2+3)/4 + C;$$

$$57) \int \frac{e^x}{2e^x-3} dx = \ln(2e^x-3)/2 + C;$$

$$59) \int \frac{\sec^2 3x}{\tan 3x} dx = \ln(\tan 3x)/3 + C;$$

$$48) \int x \cdot \sqrt[3]{1-x^2} dx = \frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{8} + C;$$

$$50) \int x^2 (x^3-1)^{3/5} dx = \frac{5\sqrt[5]{(x^3-1)^8}}{24} + C;$$

$$52) \int (e^x+1)^3 e^x dx = (e^x+1)^4/4 + C;$$

$$54) \int x \cos^4 x^2 \sin x^2 dx = -\cos^5 x^2/10 + C;$$

$$56) \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = 1/(2\cos^2 x) + C;$$

$$58) \int \tan^5 x \cdot \sec^2 x dx = \tan^6 x/6 + C;$$

$$60) \int \frac{\ln x}{3x} dx = \ln^2 x/6 + C.$$

2. - Sabiendo que $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ y $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, calcula:

Solución:

$$1) \int \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| + C;$$

$$2) \int \frac{dx}{2x-3} = \ln|2x-3|/2 + C;$$

$$3) \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C;$$

$$4) \int \frac{x dx}{x^2-1} = \ln|x^2-1|/2 + C;$$

$$5) \int \frac{x^2}{1-2x^3} dx = -\ln|1-2x^3|/6 + C;$$

$$6) \int \frac{x^2}{1-x^3} dx = -\ln|1-x^3|/3 + C;$$

$$7) \int \frac{3x dx}{x^2+2} = 3\ln|x^2+2|/2 + C;$$

$$8) \int \frac{4}{3x+5} dx = 4\ln|3x+5|/3 + C;$$

$$9) \int \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \ln|x^2+2x+2|/2 + C;$$

$$10) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + \ln|x| + C;$$

$$11) \int \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} + \sqrt{x} \right) dx = \frac{-3}{x} + 2\ln|x| + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$$

$$12) \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln|\ln|x|| + C;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = -2\ln|1-\sqrt{x}| + C;$$

$$14) \int \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) dx = \ln \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}} + C$$

$$15) \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln(e^x+1) + C;$$

$$16) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \ln \sqrt{e^{2x}+3} + C;$$

$$17) \int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$18) \int \cotg x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$19) \int \frac{5}{x \ln x} dx = 5 \ln|\ln|x|| + C;$$

$$20) \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + x + C;$$

$$21) \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \ln|1 + \sin^2 x| + C;$$

$$22) \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\ln|\sin x + \cos x| + C;$$

$$23) \int x \cotg x^2 dx = \ln \sqrt{\sin x^2} + C$$

3. - Si $\int e^x dx = e^x + C$, $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ y $\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$, calcula:

Solución:

- 1) $\int 3^x dx = 3^x / \ln 3 + C$; 2) $\int a^{4x} dx = a^{4x} / 4 \ln a + C$; 3) $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$;
 4) $\int 4e^{3x} dx = 4e^{3x} / 3 + C$; 5) $\int 3x^2 e^{x^3+2} dx = e^{x^3+2} + C$; 6) $\int 4e^{4-x} dx = -4e^{4-x} + C$;
 7) $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$; 8) $\int (e^x + 1)^2 dx = e^{2x}/2 + 2e^x + 1 + C$; 9) $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = e^{2x}/2 + 2x - e^{-2x}/2 + C$;
 10) $\int (e^x + x^6)^2 dx = e^{2x}/2 + 2x^6 - 12x^5 e^x + 60x^4 e^x - 240x^3 e^x + 720x^2 e^x - 1440x e^x + 1440e^x + x^{13}/13 + C$;
 11) $\int e^{-x^2+2} x dx = \frac{-e^{-x^2+2}}{2} + C$; 12) $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx = e^{\ln|x|} + C$; 13) $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx = -\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{2} + C$;
 14) $\int x e^{\sin x^2} \cos x^2 dx = \frac{e^{\sin x^2}}{2} + C$; 15) $\int e^{3\cos 2x} \cdot \sin 2x dx = -e^{3\cos 2x} / 6 + C$;
 16) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}} dx = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{5} + C$; 17) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx = -e^{\cos x} + C$;
 18) $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x+3} \right) dx = \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x+3} + C$; 19) $\int e^{\lg 2x} \sec^2 2x dx = e^{\lg 2x} / 2 + C$;
 20) $\int \frac{2x}{3} \cdot 3^{3+5x^2} dx = \frac{3^{3+5x^2}}{10 \ln 3} + C$; 21) $\int \frac{x}{2} \cdot 2^{3-5x^2} dx = \frac{2^{3-5x^2}}{-20 \ln 2} + C$.

4. - Sabiendo que $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int f'(x) \cdot \sin f(x) dx = -\cos f(x) + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$ y $\int \cos f(x) f'(x) dx = \sin f(x) + C$ calcula:

Solución:

- 1) $\int \sin(2x+8) dx = -\cos(2x+8) / 2 + C$; 2) $\int \sin \frac{x}{2} dx = -2\cos(x/2) + C$; 3) $\int \cos 3x dx = \sin 3x / 3 + C$;
 4) $\int x \sin x^2 dx = -\cos(x^2) / 2 + C$; 5) $\int \left(\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{4} \right) dx = -3\cos(x) / 4 - \sin x / 2 + C$;
 6) $\int \sin 2x dx = -\cos(2x) / 2 + C$; 7) $\int e^x \cos e^x dx = \sin(e^x) + C$;
 8) $\int x \cos(2x^2) \cdot \sin(2x^2) dx = -\cos^2(2x^2) / 8 + C$; 9) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = -\cos(\ln|x|) + C$;

5. - Si $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tg^2 x) dx = \tg x + C$ y $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \int [1 + \tg^2 f(x)] \cdot f'(x) dx = \tg f(x) + C$, calcula:

- 1) $\int x(1 + \tg x^2) dx$ 2) $\int (1 + \tg x)^2 dx$ 3) $\int \tg^2 3x dx$

Solución:

- 1) $\int x(1 + \tg x^2) dx = x^2/2 - \ln |\cos x^2| / 2 + C$; 2) $\int (1 + \tg x)^2 dx = -\ln |\cos^2 x| + \tg x + C$; 3) $\int \tg^2 3x dx = \tg 3x / 3 - x + C$.

6. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

Solución:

$$1) \int (2+5x)^4 dx = (2+5x)^5 / 5 + C; \quad 2) \int (3+4x)^6 dx = \frac{(3+4x)^7}{28} + C; \quad 3) \int 6x(3+x^2)^5 dx = \frac{3(3+x^2)^6}{6} + C$$

$$4) \int \left[\frac{3}{5+4x} + \frac{3}{(5+4x)^3} \right] dx = \frac{3 \ln|5+4x|}{4} - \frac{3}{4(5+4x)} + C; \quad 5) \int (\sqrt{3+2x} + \sqrt[3]{3+2x}) dx = \frac{\sqrt{(3+2x)^3}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{(3+2x)^4}}{8} + C$$

$$6) \int \left(\frac{e^x - 4}{e^{2x}} \right) dx = e^{-x} + 2e^{-2x} + C; \quad 7) \int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx = -\sin^2 x / 2 + C; \quad 8) \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$9) \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx = \frac{-1}{3\sin^3 x} + C; \quad 10) \int x\sqrt{x^2+4} dx = \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{3} + C;$$

$$11) \int \left(\frac{e^x + 3}{e^{2x}} \right) dx = -1/e^x - 3/(2e^2)^x + C; \quad 12) \int \left(\frac{e^{-x} + 2}{e^{3x}} \right) dx = -e^{-4x}/4 - 2e^{-3x}/3 + C;$$

7. – Halla el valor de las siguientes integrales, usando el método de integración por partes:

Solución:

$$1) \int 3x \cos x dx = 3x \sin x + 3 \cos x + C; \quad 2) \int x^2 \cdot \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C;$$

$$3) \int x^2 \ln x dx = x^3 \ln x / 3 - x^3 / 9 + C; \quad 4) \int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2\sqrt{x^3} \ln x}{3} - \frac{4\sqrt{x^3}}{9} + C;$$

$$5) \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x} + C; \quad 6) \int 2e^x \cdot \cos x \cdot dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C;$$

8. – Halla el valor de las siguientes integrales definidas:

Solución:

$$1) \int_1^3 \frac{dx}{2x} = \ln \sqrt{3}; \quad 2) \int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \ln 8/2 - \ln 3/2; \quad 3) \int_{\pi/3}^{5\pi/4} \sin x dx = -\cos(5\pi/4) + \cos(\pi/4);$$

$$4) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 3x dx = -\cos(3\pi/4) / 3; \quad 5) \int_{-4}^4 |x| dx = 16; \quad 6) \int_{-1}^1 \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx = 3;$$

$$7) \int_{-1}^2 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-3} \right) dx = 2 \ln 4 + 3 \ln 4; \quad 8) \int_{-2}^2 \left(\frac{3a}{5} - \frac{x}{2} \right) dx = 12a/5;$$

$$9. - \text{Halla el valor de } b \text{ para que se cumpla } \int_{-1}^b (2bx - 3x^2) dx = -12.$$

Solución: $b = 11$

10. – Halla el área entre la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 6$.

Solución: $43/3 u^2$.

11. – Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abscisas.

Solución: $253/12 u^2$.

12. – Halla el área delimitada por las gráficas: a) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ e $y - x - 1 = 0$.

$$b) f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = x^2; \quad c) f(x) = x^2 + x + 4 \text{ y } g(x) = -x^2 + 2x + 5$$

Solución:

$$a) 64/3 u^2; \quad b) 1/3 u^2; \quad c) 13/12 u^2.$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores de a , b y c para los que $F(x) = ax^3 + be^x + c \operatorname{sen} x$ es una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5 \cos x$ son:

a) 1, -7, 5; b) 3, 7, -5; c) 1, -7, -5; d) 3, -7, 5

Solución: a)

1. La integral inmediata $\int x\sqrt{2x^2 + 3} \, dx$ vale:

a) $\frac{\sqrt{(2x^2 + 3)^3}}{6} + C$; b) $\frac{\sqrt{(2x^2 + 3)^3}}{6} + C$ c) $\frac{\sqrt{(2x^2 + 3)^3}}{4} + C$; d) $\frac{\sqrt{(2x^2 + 3)^2}}{6} + C$

Solución: b)

2. La integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ es:

a) $\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$; b) $\ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$ c) $\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$; d) $\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

Solución: c)

3. Al integrar por partes $\int x \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx$ se obtiene:

a) $x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x + C$; b) $x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x + C$ c) $-x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C$; d) $-x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x + C$

Solución: c)

4. La integral $\int (x^2 + 4x + 13) dx$ es:

a) $(x^2 + 4x + 13) + C$; b) $x^3 + 4x^2 + 13x + C$; c) $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 13x$; d) $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 13x + C$

Solución: d)

5. La integral $\int e^x \operatorname{cose}^x dx$ es:

a) $\operatorname{sen} e^x + C$; b) $-\operatorname{sen} e^x + C$ c) $\frac{\operatorname{sen} e^x}{e^x} + C$; d) $e^x \cdot \operatorname{sen} e^x + C$

Solución: b)

6. La integral definida $\int_0^\pi \cos x \, dx$ vale:

a) 1; b) π c) 0; d) -1

Solución: c)

7. El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$ vale:

a) 128/3; b) 32/3 c) 64/2; d) 64/3

Solución: b)

8. El área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$ vale:

a) 9/2; b) 19/3 c) 27/2; d) 3

Solución: a)

9. La regla de Barrow sirve para...:

a) ...calcular determinantes de orden 3; b) ...resolver sistemas de ecuaciones;
c) ...resolver integrales definidas; d) ...calcular la probabilidad de sucesos.

Solución: c)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

<http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examen selectividad A4.pdf>

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

(1) Calcula una primitiva de la función $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt[3]{x}}$

Solución:

(2) Calcula haciendo el cambio de variable $e^x = t$:
 a) $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx$ b) $\int \frac{e^x - 4e^{2x}}{1 + e^x} dx$

Solución:

(3) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x} + x \cos x) dx$

Solución:

(4) Considera la función $y = x^3 - 3x^2 + 1$. a) Determina la recta tangente en el punto en que la función alcanza su máximo relativo. b) Dibuja el recinto limitado por la curva y la recta tangente anterior. c) Halla el área del recinto del apartado (b).

Solución:

(5) Considera la función $f(x) = \frac{1}{2} - \sin x$. a) Dibuja el recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$. b) Calcula el área del recinto anterior.

Solución:

(6) a) Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y = 4x - x^2$ y las tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje de abscisas. b) Halla el área del recinto dibujado en (a).

Solución:

(7) Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 4x + 12 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$. a) Haz un dibujo aproximado de la gráfica de la función f . b) Calcula el área del recinto limitado por la función f , el eje de abscisas y la recta $x = 2$.

Solución:

(8) Sea la parábola $y = x^2 - 3x + 6$. a) Halla la ecuación de la tangente a la gráfica de esa curva en el punto de abscisa $x = 3$. b) Haz un dibujo aproximado del recinto limitado por la gráfica de la parábola, el eje OY y la recta tangente hallada anteriormente. c) Calcula el área del recinto anterior.

Solución:

(9) Considera las curvas $f(x) = x^2 - 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$. a) Encuentra sus puntos de intersección. b) Representa el recinto limitado que encierran entre ellas. c) Encuentra el área del recinto limitado por las dos curvas.

Solución:

(10) Dada la función $f(x) = (x - a) \cos x$, busca el valor del número real a sabiendo que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} - 2$

Solución:

(11) Las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.

Solución:

- (12) Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + x$. a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa curva en el origen. b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la curva y la recta hallada. c) Calcula el área de ese recinto.

Solución:

- (13) La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = (x+2) \cdot (x^2 - 9)$. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$. b) Determina la función f sabiendo que $f(0) = \frac{1}{5}$.

Solución:

- (14) La gráfica de la parábola $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$ y $D(0,2)$ en dos recintos planos. a) Dibuja la gráfica de la función y los recintos. b) Calcula el área de cada uno de ellos.

Solución:

- (15) a) Calcula la función $f(x)$ sabiendo que su derivada es $f'(x) = (x-1)e^x$ y que $f(2) = e$.
b) Demuestra que $f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto del eje de abscisas y razona si es máximo o mínimo.
- (16) Las gráficas de la curva $y = x^3$ y de la parábola $y = x^2 + 2x$ encierran un recinto plano. a) Dibuja ese recinto. b) Calcula su área.

- (17) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$. a) Calcula m y n para que f sea continua en todo su dominio. b) Para esos valores hallados, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y = 1$.

- (18) Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. a) Dibuja la gráfica de la función. b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

- (19) La curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.
- (20) La parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.
- (21) La curva $y = x^2 + 3$ y la recta $y = 2x + 3$ limitan un recinto finito en el plano. a) Dibuja un esquema del recinto. b) Calcula su área.
- (22) Se considera la parábola $y = 6x - x^2$. a) Calcula la ecuación de las rectas tangentes a la gráfica de la parábola en los puntos de corte con el eje OX . b) Dibuja un esquema del recinto limitado por la gráfica de la parábola y las rectas halladas anteriormente. c) Calcula el área de ese recinto.
- (23) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ e^{x-2} + k^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. a) Determina el valor de $k > 0$ para que la función sea continua en el intervalo $[0,4]$. b) Suponiendo que $k=1$, halla la recta tangente en $x=3$. c) Suponiendo que $k=1$, halla el área que la función determina con el eje OX , para $x \in [0,4]$.
- (24) a) Resuelve por partes la siguiente integral: $\int x(1 - \ln x) dx$
b) De todas las primitivas de $f(x) = x(1 - \ln x)$ calcula la que pasa por el punto $(1,3)$.
- (25) La gráfica de la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$ encierran un recinto plano. a) Dibuja aproximadamente dicho recinto. b) Calcula el área de ese recinto.
- (26) La gráfica de la curva $f(x) = \frac{4}{2-x}$ y las rectas $y = 4$ y $x = 0$ encierran un recinto plano. a) Dibuja aproximadamente dicho recinto. b) Calcula el área de ese recinto.
- (27) Esboza la gráfica de la parábola $y = -x^2 + x + \frac{7}{4}$ y halla el área de la región del plano determinada por la parábola y la recta que pasa por los puntos $(0, \frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{6}, 0)$.

- (28) Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y = -x^2 + 4$ y la recta $y = 1$. a) Representa gráficamente la chapa y calcula su área. b) Determina las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$.
- (29) Representa gráficamente las parábolas $y^2 - 4x = 0$ y $x^2 - 4y = 0$ y calcula el área que encierran.
- (30) Se considera la función $f(x) = 2 - \frac{x}{x^2 + 1}$. a) Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión. b) Para $x \in [0, 5]$, esboza la gráfica de la función y calcula el área comprendida entre ella y el eje X .
- (31) Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. a) Halla sus asíntotas, máximos y mínimos. b) Representa gráficamente la función. c) Halla el área delimitada por la función y el eje OX , para $-1 \leq x \leq 1$.
- (32) Si x representa el volumen de producción de una fábrica, el coste marginal de la misma viene dado por la función $f(x) = 3 + 8x + 15x^2$. Se pide: a) Encuentra la función del coste total F , si se sabe que dicha función viene dada por la primitiva F de f que verifica que $F(0) = 100$. b) Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.
- (33) La función de costes marginales de una empresa es $f(x) = \frac{10}{(x+1)^2}$. Se pide: a) Encuentra la primitiva F de f verificando que $F(4) = 0$. b) Estudia y representa gráficamente la función f . Calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 0$ y $x = 1$.
- (34) Sea la función $f(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$). Si f' representa su derivada, a) Calcula $f'(2)$. b) Dibuja la función f . Halla el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

- (35) Dada la función $f(x) = \frac{a}{x^2} + x^2$ ($x > 0$), donde a es una constante, a) Si se supiera que $f'(2) = 1$ donde f' es la derivada de f , ¿cuánto valdría a ? b) Dibuja la función f si $a = 16$ y halla el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 2$ y $x = 3$.
- (36) Sea la función $f(x) = 3x^2 - 6x$. Si f' representa su derivada, a) Encuentra una primitiva F de f verificando $F(2) = f'(3)$. b) Dibuja la función f . Calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 3$.
- (37) Dada la función $f(x) = x^3 - 8 \ln x^2$, A) Si f' representa la derivada de f , encuentra una primitiva F de f tal que $F(4) = f'(4)$. B) Dibuja la función f . Halla el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -4$ y $x = 4$.
- (38) a) Dada la función $f(x) = 25 - x^2 + \frac{a}{x^2}$ ($x \neq 0$), donde a es una constante, encuentra una primitiva de f y halla el valor de a para que si f' es la derivada de f , entonces $f'(1) = -2$. b) Dibuja la función $f(x) = 25 - x^2$, y halla el área limitada por la curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 6$.
- (39) Determina la función primitiva y el área bajo la curva en el intervalo $[1, e]$ de la función $f(x) = \ln x$.
- (40) Enuncia la regla de Barrow y aplícala a la función $f(x) = e^x(x+1)$ en el intervalo $[0, 1]$.

CAPÍTULO 8: PROBABILIDAD

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. PROBABILIDAD

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:
 - a) El número de habitantes de las provincias españolas.
 - b) El área de un cuadrado del que se conoce el lado.
 - c) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos.
 - d) Saber si el próximo año es bisiesto.

Solución: Son fenómenos aleatorios: c); No lo son: a), b), d).

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "Escribir en seis tarjetas cada una de las letras de la palabra MONEDA y sacar una al azar".

Solución: {M, O, N, E, D, A}

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "Sacar una bola de una bolsa que tiene bolas negras, rojas y blancas".

Solución: {negra, roja, blanca}.

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: Tirar dos dados.

Solución abierta: Por ejemplo: 1) La suma de las caras superiores sea 5; 2) El primero sea un 2.

5. Comprueba, utilizando el ejemplo anterior, que se verifican las 10 propiedades del Álgebra de Sucesos.

Solución: Por ejemplo: Vamos a comprobar la Ley de Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$:

$$A \cap B = \{6\} \rightarrow (A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

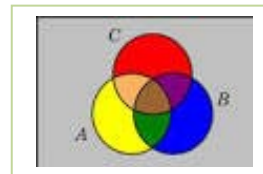
$$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow A^c = \{1, 3, 5\}; B = \{3, 6\} \rightarrow B^c = \{1, 2, 4, 5\}; A^c \cup B^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

6. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un oro y A al suceso sacar un rey. Escribe los sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, A^c , $(A \cup B)^c$, $A^c \cup B^c$.

Solución: $A \cup B$ = Sacar un rey o un oro, $A \cap B$ = Rey de oros, $A - B$ = Los oros menos el rey, A^c = Todas las cartas menos los reyes, $(A \cup B)^c$ = Todas las cartas que no son ni oro ni rey, $A^c \cup B^c$ = Todas las cartas menos el rey de oros.

7. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.

Solución gráfica: $A \cup B \cup C = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B - A \cap B \cap C) \cup (A \cap C - A \cap B \cap C) \cup (B \cap C - A \cap B \cap C) \cup (A - A \cap B - A \cap C) \cup (B - A \cap B - B \cap C) \cup (C - C \cap A - C \cap B).$



8. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.

- A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas?
- B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?
- C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman té. d) Toman té y no toman café.
- D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B .
- E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.
- F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.

Solución: A) Hay 9 personas que toman café y té; B) 6 y 18; C) a) $A \cap B$: 9; b) $(A \cup B)^c$: 2; c) $A \cup B$: 33; d) $(A - A \cap B)$: 6 21; D) A/B : 9; E) 33; 2; $33 + 2 = 35$.

9. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

Solución: 1/4.

10. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

Solución: Estudiaría las frecuencias relativas.

11. Calcula la probabilidad de, al tirar un dado dos veces, sacar un 6 doble.

Solución: 1/36.

12. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3.

Solución: $4/6 = 2/3$.

13. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un múltiplo de 2 y además un múltiplo de 3.

Solución: $1/6$.

14. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 o bien un número mayor que 2.

Solución: 1 .

15. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2.

Solución: $2/6 = 1/3$.

16. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea 7.

Solución: $6/36 = 1/6$.

17. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores menor que 7.

Solución: $15/36$.

18. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 6 al tirar un dado? ¿Y de sacar un 7? ¿Y de sacar un número menor que 5 o bien un número mayor que 3?

Solución: $5/6$; 0 ; 1 .

19. Al tirar una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Solución: $1/8$; $7/8$. $1/8 + 7/8 = 1$.

20. En tu cuaderno, dibuja un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B : A = sacar un oro en la primera extracción, $\bar{A}$ = no sacar oro, y B = sacar un oro en la segunda extracción, $\bar{B}$ = no sacar oro en la segunda extracción. A) ¿Cuál es la probabilidad de sacar oro en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? B) ¿Y la de no sacar oro en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? C) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos oros? D) ¿Y la de sacar un solo oro? E) ¿Y la de sacar al menos un oro?

Solución gráfica: A) $0/39$; B) $29/39$; C) $9/156$; D) $60/156 = 5/13$; E) $23/52$.

21. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de “no salen 2 oros” y la de “no sale ningún oro”.

Solución: $49/52$ y $29/52$.

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. Ayuda: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de *no* sacar ningún 6, y utilizar el suceso contrario.

Solución: $P(\text{ningún } 6) = 25/36$. $P(\text{al menos un } 6) = 1 - 25/36 = 11/36$.

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 10, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$. b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap \bar{B})$; $P(\bar{A} \cap B)$; $P(\bar{A} \cap \bar{B})$. c) Calcula $P(A|B)$; $P(A|\bar{B})$; $P(\bar{A}|B)$.

Solución: a) $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$, $P(A) = 3/36$; $P(B) = 8/36$; b) $P(A \cap B) = 2/36$ ($(4, 6)$ y $(6, 4)$); $P(A \cup B) = 9/36$; $P(A \cap \bar{B}) = 1/36$; $P(\bar{A} \cap B) = 6/36$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 29/36$; c) $P(A|B) = 2/8$; $P(A|\bar{B}) = 1/28$; $P(\bar{A}|B) = 6/8$.

24. La probabilidad del suceso A es $2/3$, la del suceso B es $3/4$ y la de la intersección es $5/8$. Halla: La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. La probabilidad de que no ocurra B . La probabilidad de que no se verifique ni A ni B . La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B . Selectividad.

Solución: $P(A \cup B) = 19/24$; $P(\bar{B}) = 1/4$; $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 9/24$; $P(A|B) = 5/6$.

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compren tres productos A , B y C . Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B . Además, un 4 % compra A y B , un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B . ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B ? Sabiendo que un cliente ha comprado A , ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B ? Selectividad.

Solución: Compran sólo B 8 % de clientes; $P((C \text{ y no } B)|A) = 2/100$.

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ y $P(A \cup B) = 7/15$, hallar: La probabilidad de que se verifique A y B . La probabilidad de que se verifique A y no B . La probabilidad de que no se verifique ni A ni B . La probabilidad de que no se verifique A , si no se ha verificado B . Selectividad.

Solución: $P(A \cap B) = 1/15$; $P(A \cap \bar{B}) = 4/15$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 8/15$; $P(\bar{A} | \bar{B}) = 14/15$.

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$

Calcular: $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} | B)$, $P(\bar{B} | A)$.

Selectividad.

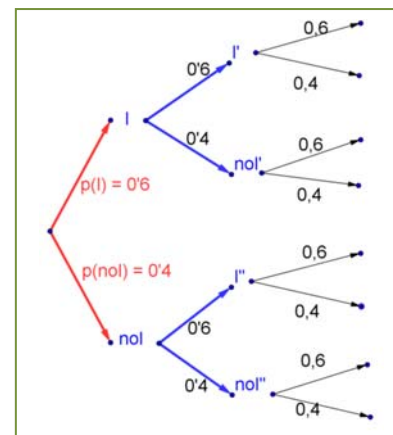
Solución: $P(A \cup B) = 19/20$; $P(A \cap B) = 3/10$; $P(\bar{A} | B) = 2/5$; $P(\bar{B} | A) = 3/5$.

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B|A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Calcula razonadamente: (a) $P(A \cap B)$. (b) $P(B)$. (c) $P(\bar{B} | A)$. (d) $P(\bar{A} | \bar{B})$. Nota. $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S . $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T . Selectividad.

Solución: a) $P(A \cap B) = 1/12$; (b) $P(B) = 1/4$; (c) $P(\bar{B} | A) = 3/4$; (d) $P(\bar{A} | \bar{B}) = 2/3$.

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo $P(N) = 0.4$.

Solución gráfica: $P(\text{al menos uno intencionado}) = 1 - P(\text{ninguno intencionado}) = 1 - 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.936$.



30. Una fábrica de móviles desecha normalmente el 0.02 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos móviles al azar haya que desechar ambos. b) Al coger dos móviles al azar haya que desechar sólo uno. c) Al coger dos móviles al azar no haya que desechar ninguno. d) Verificamos 3 móviles, calcula la probabilidad de desechar los tres. e) Calcula la probabilidad de al verificar 3 móviles rechazar sólo el tercero.

Solución: a) $0.0002 \cdot 0.0002 = 0.00000004$; b) $2 \cdot 0.0002 \cdot 0.9998 = 0.00039992$;
c) $0.9998 \cdot 0.9998 = 0.99960004$; d) $0.0002 \cdot 0.0002 \cdot 0.0002 = 0.000000000008$;
e) $0.9998 \cdot 0.9998 \cdot 0.0002 = 0.00019992$.

31. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A , B y C . Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C . Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.99$; $P(B) = 0.96$ y $P(C) = 0.97$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

Solución: a) $P(\text{fallo}) = 0.04 \cdot 0.03 \cdot 0.01 = 0.000012$; $P(\text{todo bien}) = 1 - P(\text{fallo}) = 1 - 0.000012 = 0.999988$.

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).

Solución: A) $1/4 + 1/4 = 1/2$; B) $2(1/8) = 1/4$; C) $2(1/16) = 1/8$; D) $1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$.

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0.3		0.4
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0.7		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$.

c) Calcula $P(U|V)$; $P(C|V)$; $P(V|U)$; $P(V|C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

Solución:

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0.3	0.1	0.4
Accidente con sólo daños materiales (M)	0.4	0.2	0.6
Totales	0.7	0.3	1

b) $P(V \cap C) = 0.3$; $P(V \cap U) = 0.1$; $P(M \cap C) = 0.4$; $P(M \cap U) = 0.2$; $P(V) = 0.4$; $P(M) = 0.6$; $P(C) = 0.7$ y $P(U) = 0.3$.

c) $P(U|V) = 0.1/0.4 = 1/4$; $P(C|V) = 0.3/0.4 = 3/4$; $P(V|U) = 0.1/0.3 = 1/3$; $P(V|C) = 0.3/0.7 = 3/7$. Los sucesos V y C son dependientes pues $P(V) = 0.4 \neq P(V|C) = 3/7 = 0.43$.

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) o mortales (M). Observa que lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

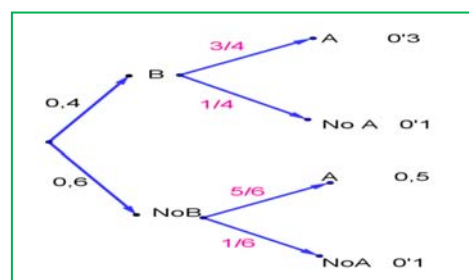
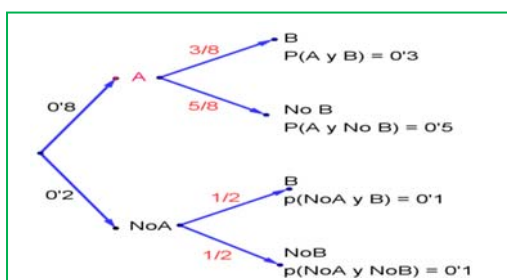
Solución abierta: Debe ser similar a la del problema anterior, pero en lugar de V y M se añaden tres filas con leves (L), graves (G) y mortales (M).

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Leves (L)			
Graves (G)			
Mortales (M)			

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

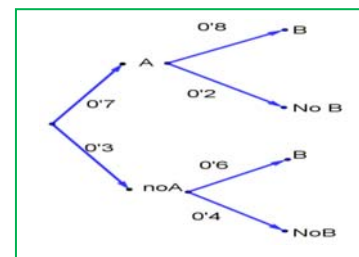
	A	No $A = \bar{A}$	
B	0.3	0.1	0.4
No $B = \bar{B}$	0.5	0.1	0.6
	0.8	0.2	1

Solución gráfica:



36. Dado el diagrama de árbol del margen, complétalo calculando las probabilidades de las intersecciones, construye la tabla de contingencia asociada, y después el otro diagrama de árbol.

Solución gráfica:



37. Se sabe que en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

- (a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.
 (b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.
 (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

Selectividad

Solución:

	H	M	
D	$1/12$	$1/25$	$37/300$
D^c	$5/12$	$23/50$	$263/300$
	$1/2$	$1/2$	1

a) $P(D^c) = 263/300$; b) $P(D/M) = 2/25$; c) $P(D) = 37/300$.

38. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

- a) El segundo caramelo sea de fresa.
 b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

Selectividad

Solución: $P(2^o \text{ fresa}) = (7/17)(12/18) + (10/17)(9/16) \approx 0,6$; b) $P(\text{igual sabor}) = (7/17)(6/18) + (10/17)(9/16) \approx 0,47$.

39. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar. a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés. b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

Selectividad

Solución: $P(\text{inglés}) = 3/5$; $P(\text{turista/inglés}) = 4/9$.

40. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre *A* no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre *B* ni el 10 % de los atendidos por el sastre *C*. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre *A*, el 30 % al *B* y el 15 % restante al *C*. Calcúlese la probabilidad de que: a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo. b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre *A*. Selectividad

Solución: $P(\text{no satisfecho}) = 0.0665$; $P(A/\text{no satisfecho}) = 55/133$.

41. Tenemos dos urnas, *A* y *B*. La primera con 10 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda con 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna *A*?

Solución: $P(A/\text{negra}) = 32/59$.

42. En un proceso de fabricación de bombillas se detecta que el 1 % salen defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que resulta que detecta el 95 % de las bombillas defectuosas, pero señala como defectuosas un 2 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcta una bombilla que el dispositivo ha calificado como defectuosa. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuosa una bombilla que el dispositivo ha calificado como correcta. Ayuda: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia. Selectividad

Solución:

	Fabricado Correcto (FC)	Fabricado Defectuoso (FD)	
Dispositivo Correcto (DC)	198/10 ⁴	95/10 ⁴	293/10 ⁴
Dispositivo Defectuoso (DD)	99*98/10 ⁴	5/10 ⁴	9707/10 ⁴
	0.99	0.01	1

A) $P(FC/DD) = 198/293$; B) $P(FD/DC) = 99*98/9707$.

43. Se tienen 3 cajas, *A*, *B* y *C*. La caja *A* tiene 20 bolas de las cuales 5 son negras. La caja *B* tiene 10 bolas con una bola negra. La caja *C* tiene 15 bolas con 10 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar, y es negra. Calcula la probabilidad de que se haya sacado de la caja *C*.

Solución: $P(C/\text{negra}) = 40/61$.

44. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 0.4. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 10, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 5. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar. Selectividad

Solución: $P(\text{impar}) = 0.56$.

45. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista. Selectividad

Solución: $P(\text{deportista y no lector}) = 0.25$; $P(\text{deportista} / \text{lector}) = 0.5$.

46. Tres máquinas *A*, *B* y *C* fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina *A* sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en *B* es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en *C* es 0.03. En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina *A*, 30 de la *B* y 75 de la *C*.

a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina *B*? Selectividad

Solución: a) $P(\text{no D}) = 67/120$; $P(B/D) = 3/265$.

47. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso: Selectividad

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Solución: a) $200/480$; b) $280/480$; c) $P(\text{perfeccionamiento/benjamín}) = 90/160$; d) $P(\text{benjamín/iniciación}) = 70/200$.

48. En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A , 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C . La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A , el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C . Selectividad

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

(b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B ?

Solución: a) $P(\text{superado}) = 3/5$; $P(B/\text{no superado}) = 7/120$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:
a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

Solución: b)

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:
a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: c)

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:
a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

Solución: a)

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:
a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

Solución: b)

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:
a) $P(A) + P(\text{no}A) = 1$; $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Solución: a)

6. El enunciado del teorema de Bayes es:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A_i / C) &= \frac{P(C / A_i) \cdot P(A_i)}{P(C)} = \frac{P(C / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(C / A_k) \cdot P(A_k)} & \text{b) } P(A_i / B) &= \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B / A_k) \cdot P(A_k)} \\ \text{c) } P(A_i / B) &= \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} & \text{d) } P(A_i / A) &= \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B / A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B / A_k) \cdot P(A_k)} \end{aligned}$$

Solución: a)

7. En una urna hay 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se sacan dos bolas. Llamamos A al suceso sacar una bola roja, y B a sacar una bola negra. Los sucesos A y B son:
a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

Solución: b)

8. Sacamos una carta de una baraja. Llamamos A al suceso sacar un rey y B a sacar una sota. Los sucesos A y B son:
a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

Solución: b)

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Exámenes_selectividad_A4.pdf

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

1. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

Solución: $P(\{\text{salga múltiplo de 3}\}) = P(\{\text{salga 3, 6, 9 o 12}\}) = P(\{\text{salga 3}\}) + P(\{\text{salga 6}\}) + P(\{\text{salga 9}\}) + P(\{\text{salga 12}\})$
 $= P(\{\text{salga un 1 y luego un 2}\}) + P(\{\text{salga un 2 y luego un 1}\}) +$
 $+ P(\{\text{salga un 1 y luego un 5}\}) + P(\{\text{salga un 2 y luego un 4}\}) + P(\{\text{salga un 3 y luego un 3}\}) +$
 $+ P(\{\text{salga un 4 y luego un 2}\}) + P(\{\text{salga un 5 y luego un 1}\}) +$
 $+ P(\{\text{salga un 3 y luego un 6}\}) + P(\{\text{salga un 4 y luego un 5}\}) + P(\{\text{salga un 5 y luego un 4}\}) +$
 $+ P(\{\text{salga un 6 y luego un 3}\}) + P(\{\text{salga un 6 y luego un 6}\}) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

2. En cierto instituto se ofrece informática y teatro como asignaturas optativas. El grupo A consta de 30 estudiantes, y los grupos B y C tienen 35 cada uno. El 60 por ciento del grupo A ha elegido teatro, así como el 20 por ciento del grupo B y el 40 por ciento del resto han elegido informática. A) Si se pregunta a un estudiante elegido al azar, hallar la probabilidad de que haya optado por informática. B) Si un estudiante ha elegido teatro, calcular la probabilidad de que pertenezca al grupo B.

Solución: A) $P(I) = \frac{40 + 80 + 40}{300} = \frac{8}{15}$ B) $P(B) = \frac{20}{60 + 20 + 60} = \frac{1}{7}$

3. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan es 0.12, la probabilidad de que salga una copa es 0.08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84. A) Hallar la probabilidad de que la carta extraída sea as o copa. B) Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

Solución: A) $P(\text{ni as ni copa}) = P(\text{as}' \cap \text{copa}') = P((\text{as} \cup \text{copa})') = 1 - P(\text{as} \cup \text{copa}) = 0.84 \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(\text{as} \cup \text{copa}) = 1 - 0.84 = 0.16$

B) $0.16 = P(\text{as} \cup \text{copa}) = P(\text{as}) + P(\text{copa}) - P(\text{as} \cap \text{copa}) = 0.12 + 0.08 - P(\text{as} \cap \text{copa}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow P(\text{as de copas}) = P(\text{as} \cap \text{copa}) = 0.2 - 0.16 = 0.04$

Como la probabilidad de que salga es positiva, se puede afirmar que no se ha eliminado.

4. En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres, hay una epidemia. El 6 % de los hombres y el 11 % de las mujeres están enfermos. Se elige al azar un individuo. Calcular la probabilidad de: a) que sea hombre. b) que esté enfermo. c) que sea hombre, sabiendo que está enfermo.

Solución: a) Si x es el número de mujeres, el número de ciudadanos es $2x+x=3x$, por lo que $P(\text{hombre}) = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad P(\{\text{está enfermo}\}) &= P(\{\text{está enfermo}\} \cap \{\text{hombre}\}) + P(\{\text{está enfermo}\} \cap \{\text{mujer}\}) = \\ &= P(\{\text{está enfermo}\}/\{\text{hombre}\})P(\{\text{hombre}\}) + P(\{\text{está enfermo}\}/\{\text{mujer}\})P(\{\text{mujer}\}) = \frac{6}{100} \frac{2}{3} + \frac{11}{100} \frac{1}{3} = \\ &= \frac{23}{300} \end{aligned}$$

$$\text{c)} P(\{\text{hombre}\}/\{\text{está enfermo}\}) = \frac{P(\{\text{hombre}\} \cap \{\text{enfermo}\})}{P(\{\text{está enfermo}\})} = \frac{\frac{12}{300}}{\frac{23}{300}} = \frac{12}{23}$$

5. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de: a) que los calcetines sean negros. b) que los dos calcetines sean del mismo color. c) que al menos uno de ellos sea rojo. d) que uno sea negro y el otro no.

Solución: a) $P(\{\text{dos calcetines negros}\}) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{\frac{8 \times 7}{2}}{\frac{18 \times 17}{2}} = \frac{28}{153}$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad P(\{\text{calcetines mismo color}\}) &= P(\{\text{dos calcetines negros}\}) + P(\{\text{dos calcetines azules}\}) + \\ &+ P(\{\text{dos calcetines rojos}\}) = \frac{28}{153} + \frac{\binom{6}{2}}{\binom{18}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{18}{2}} = \frac{28}{153} + \frac{15}{153} + \frac{6}{153} = \frac{49}{153} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad P(\{\text{al menos uno rojo}\}) &= P(\{\text{uno rojo}\}) + P(\{\text{dos calcetines rojos}\}) = \\ &= P(\{\text{el primero rojo}\})P(\{\text{el segundo no rojo}/\{\text{el primero rojo}\}) + \\ &+ P(\{\text{el primero no rojo}\})P(\{\text{el segundo rojo}/\{\text{el primero no rojo}\}) + P(\{\text{dos calcetines rojos}\}) = \\ &= \frac{4}{18} \frac{14}{17} + \frac{14}{18} \frac{4}{17} + \frac{6}{153} = \frac{62}{153} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad P(\{\text{uno negro}\}) &= P(\{\text{el primero negro}\})P(\{\text{el segundo no negro}/\{\text{el primero negro}\}) + \\ &+ P(\{\text{el primero no negro}\})P(\{\text{el segundo negro}/\{\text{el primero no negro}\}) = \\ &= \frac{8}{18} \frac{10}{17} + \frac{10}{18} \frac{8}{17} = \frac{80}{153} \end{aligned}$$

6. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto, a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día. b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

Solución: a)

$$\begin{aligned}
 &P(\{\text{uno celebre cumpleaños}\}) = \\
 &= P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero no celebre}\}) \\
 &\quad + P(\{\text{el primero no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero no celebre}\}) \\
 &\quad + P(\{\text{el primero no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\}) = \\
 &= \frac{1}{365} \frac{364}{365} \frac{364}{365} + \frac{364}{365} \frac{1}{365} \frac{364}{365} + \frac{364}{365} \frac{364}{365} \frac{1}{365} = 3 \frac{364^2}{365^3}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 &P(\{\text{al menos dos celebren cumpleaños}\}) = \\
 &= P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero no celebre}\}) \\
 &\quad + P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\}) \\
 &\quad + P(\{\text{el primero no celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\}) \\
 &\quad + P(\{\text{el primero celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el segundo celebre cumpleaños}\} \cap \{\text{el tercero celebre}\}) \\
 &= \frac{1}{365} \frac{1}{365} \frac{364}{365} + \frac{1}{365} \frac{364}{365} \frac{1}{365} + \frac{364}{365} \frac{1}{365} \frac{1}{365} + \frac{1}{365} \frac{1}{365} \frac{1}{365} = 3 \frac{364}{365^3} + \frac{1}{365^3}
 \end{aligned}$$

7. En una bolsa hay siete bolas numeradas de 1 al 7, y en otra bolsa B hay cinco bolas numeradas del 8 al 12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en tomar una bola al azar de A, anotar su paridad e introducirla posteriormente en la bolsa B, a continuación, se extrae al azar una bola de B y se anota también su paridad. A) Calcular la probabilidad de que las dos bolas extraídas tengan la misma paridad. B) Hallar la probabilidad de que la bola extraída de B corresponda a un número impar.

Solución: A)

$$\begin{aligned}
 &P(\{\text{las dos tengan la misma paridad}\}) = \\
 &= P(\{\text{la primera par}\} \cap \{\text{la segunda par}\}) + P(\{\text{la primera impar}\} \cap \{\text{la segunda impar}\}) = \\
 &= P(\{\text{la primera par}\})P(\{\text{la segunda par}\} | \{\text{la primera par}\}) + \\
 &\quad + P(\{\text{la primera impar}\})P(\{\text{la segunda impar}\} | \{\text{la primera impar}\}) = \frac{3}{7} \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \frac{3}{6} = \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

B)

$$\begin{aligned}
 &P(\{\text{la segunda impar}\}) = \\
 &= P(\{\text{la primera impar}\})P(\{\text{la segunda impar}\} | \{\text{la primera impar}\}) + \\
 &\quad + P(\{\text{la primera par}\})P(\{\text{la segunda impar}\} | \{\text{la primera par}\}) = \frac{4}{7} \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \frac{2}{6} = \frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

8. Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 negras una segunda urna B contiene 5 bolas blancas y 2 negras. Se selecciona una urna al azar y de ella se extraen 2 bolas sin reposición. Calcular la probabilidad de que:

a) Las dos bolas sean blancas. (b) Las dos bolas sean del mismo color. (c) Las dos bolas sean de distinto color.

Solución: a)

$$\begin{aligned} P(\{\text{las dos sean blancas}\}) &= \\ &= P(\{\text{coja la primera urna}\} \cap \{\text{saque dos blancas}\}) + P(\{\text{coja la segunda urna}\} \cap \{\text{saque dos blancas}\}) = \\ &= P(\{\text{coja la primera urna}\})P(\{\text{saque dos blancas}\} / \{\text{ha cogido la primera urna}\}) + \\ &+ P(\{\text{coja la segunda urna}\})P(\{\text{saque dos blancas}\} / \{\text{ha cogido la segunda urna}\}) = \frac{1}{2} \frac{6}{10} \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \frac{5}{7} \frac{4}{6} = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{21} = \frac{17}{42} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\{\text{las dos sean del mismo color}\}) &= P(\{\text{las dos sean blancas}\}) + P(\{\text{las dos sean negras}\}) = \\ &= \frac{17}{42} + P(\{\text{coja la primera urna}\} \cap \{\text{saque dos negras}\}) + P(\{\text{coja la segunda urna}\} \cap \{\text{saque dos negras}\}) = \\ &= \frac{17}{42} + P(\{\text{coja la primera urna}\})P(\{\text{saque dos negras}\} / \{\text{ha cogido la primera urna}\}) + \\ &+ P(\{\text{coja la segunda urna}\})P(\{\text{saque dos negras}\} / \{\text{ha cogido la segunda urna}\}) = \frac{17}{42} + \frac{1}{2} \frac{4}{10} \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \frac{2}{7} \frac{1}{6} = \\ &= \frac{17}{42} + \frac{5}{21} = \frac{52}{105} \end{aligned}$$

c)

$$P(\{\text{las dos sean de distinto color}\}) = 1 - P(\{\text{las dos sean del mismo color}\}) = 1 - \frac{52}{105} = \frac{53}{105}$$

9. De una baraja de 40 cartas se eligen al azar simultáneamente 4 cartas. Hallar: a) Probabilidad de que se halla elegido al menos un rey. b) Probabilidad de que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

Solución: a)

$$\begin{aligned} P(\{\text{al menos se elija un rey}\}) &= \\ &= P(\{\text{se elija un rey}\}) + P(\{\text{se elijan dos reyes}\}) + P(\{\text{se elijan tres reyes}\}) + P(\{\text{se elijan 4 reyes}\}) = \\ &= \frac{4 \binom{36}{3} + \binom{4}{2} \binom{36}{2} + \binom{4}{3} \binom{36}{1} + 1}{\binom{40}{4}} = \frac{4 \frac{36 \times 35 \times 34}{6} + 6 \frac{36 \times 35}{2} + 4 \times 36 + 1}{\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{4 \times 6}} = \frac{6497}{18278} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\{\text{3 del mismo palo}\}) &= \\ &= P(\{\text{3 oros}\}) + P(\{\text{3 bastos}\}) + P(\{\text{3 copas}\}) + P(\{\text{3 espadas}\}) = \\ &= 4 \frac{\binom{10}{3} \binom{30}{1}}{\binom{40}{4}} = \frac{4 \frac{10 \times 9 \times 8 \times 30}{6}}{\frac{40 \times 39 \times 38 \times 37}{24}} = \frac{160}{1071} \end{aligned}$$

10. La cuarta parte de las participantes en un congreso son españolas. La probabilidad de que una congresista desayune té si es española es un octavo y la probabilidad de que tome té si es extranjera, es un tercio. Si se elige una congresista al azar: a) ¿cuál es la probabilidad de que desayune té? b) ¿cuál es la probabilidad de que no sea española si desayuna té? c) ¿cuál es la probabilidad de que sea española si no desayuna té?

$$P(\{\text{desayuneté}\}) =$$

$$= P(\{\text{desayuneté}\} \cap \{\text{sea española}\}) + P(\{\text{desayuneté}\} \cap \{\text{sea extranjera}\}) =$$

Solución: a) $= P(\{\text{desayuneté}\} / \{\text{sea española}\}) P(\{\text{sea española}\}) +$

$$+ P(\{\text{desayuneté}\} / \{\text{sea extranjera}\}) P(\{\text{sea extranjera}\}) = \frac{1}{8} \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$$

$$b) P(\{\text{sea extranjera}\} / \{\text{desayuneté}\}) = \frac{P(\{\text{desayuneté}\} \cap \{\text{sea extranjera}\})}{P(\{\text{desayuneté}\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{8}{9}$$

$$P(\{\text{sea española}\} / \{\text{no desayuneté}\}) = \frac{P(\{\text{no desayuneté}\} \cap \{\text{sea española}\})}{P(\{\text{no desayuneté}\})} =$$

$$c) = \frac{P(\{\text{sea española}\}) - P(\{\text{desayuneté}\} \cap \{\text{sea española}\})}{\frac{23}{32}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - (P(\{\text{desayuneté}\}) - P(\{\text{desayuneté}\} \cap \{\text{sea extranjera}\}))}{\frac{23}{32}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{9}{32}}{\frac{23}{32}} = \frac{7}{23}$$

11. Para realizar un control de calidad de un producto se examinan 3 unidades del producto extraídas al azar y sin reemplazamiento de un lote de 100 unidades. Las unidades pueden tener defectos de dos tipos, A y B. Si en el lote de 100 unidades existen 10 unidades con defectos del tipo A únicamente, 8 unidades con defecto del tipo B únicamente, y dos unidades con ambos tipos de defecto, se desea determinar la probabilidad de que en la muestra de tres unidades extraídas se obtengan en total: a) Cero defectos. b) Una unidad con defecto del tipo A y otra con defecto del tipo B, o bien una unidad con ambos tipos de defecto.

Solución: a) $P(\{0 \text{ defectos}\}) = \frac{\binom{80}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{80 \times 79 \times 78}{100 \times 99 \times 98} = \frac{4108}{8085}$

$P(\{ \text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \} \cup \{ \text{una defectos } A \text{ y } B \}) =$
b) $= P(\{ \text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \}) + P(\{ \text{una defectos } A \text{ y } B \}) -$
 $- P(\{ \text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \text{ y una defectos } A \text{ y } B \})$

Como los cambios de orden no afectan a la probabilidad, tenemos que:

$P(\{ \text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \}) =$

$= 6 P(\{ \text{la primera defecto } A \text{ y la segunda defecto } B \text{ y la tercera sin defectos} \}) = 6 \frac{1}{10} \frac{8}{99} \frac{80}{98} = \frac{64}{1617}$

$P(\{ \text{una defectos } A \text{ y } B \}) =$

c) $= 3 P(\{ \text{la primera defectos } A \text{ y } B \text{ y las otras dos sin defectos} \}) = 3 \frac{2}{100} \frac{\binom{80}{2}}{\binom{99}{2}} = \frac{3}{50} \frac{80 \times 79}{99 \times 98} = \frac{316}{8085}$

$P(\{ \text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \text{ y una defectos } A \text{ y } B \}) =$

$= 6 P(\{ \text{la primera defecto } A \text{ y la segunda defecto } B \text{ y la tercera defectos } A \text{ y } B \}) = 6 \frac{1}{10} \frac{8}{99} \frac{2}{98} = \frac{8}{8085}$

Entonces $P(\{ \text{una defecto } A \text{ y una defecto } B \} \cup \{ \text{una defectos } A \text{ y } B \}) = \frac{64}{1617} + \frac{316}{8085} - \frac{8}{8085} = \frac{628}{8085}$

12. Se realiza la experiencia compuesta consistente en lanzar al aire un dado y a continuación introducir una nueva bola en una urna que contiene 2 bolas blancas y 4 negras de modo que si el número obtenido en el dado es par, se introduce en la urna una bola blanca, y si es impar, se introduce una bola negra. A) Calcula la probabilidad de obtener, al azar, bolas blancas al realizar dos extracciones sucesivas y sin reemplazamiento de la urna, sabiendo que al lanzar el dado hemos obtenido un número par. B) Si se sacan simultáneamente dos bolas al azar de la urna después de haber lanzado el dado, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
13. Tras un estudio realizado sobre los taxistas de una ciudad española, se ha observado que el 70 tiene más de 40 años y de estos el 60 % es propietario del vehículo que conduce. También se ha averiguado que el porcentaje de taxistas que no superando los 40 años, es propietario del vehículo que conduce se reduce al 30 %. Se pide: a) La probabilidad de que un taxista, elegido al azar, sea propietario del vehículo que conduce. b) Se elige un taxista al azar, y se comprueba que es propietario del vehículo que conduce, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 40 años?
14. En dos urnas A y B, se introducen dos bolas blancas y una negra, y tres bolas negras y una blanca, respectivamente. Se selecciona una urna al azar, y se extrae también una bola de dicha urna. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna escogida sea la A, si la bola escogida resultó ser blanca?

15. Se dispone de dos urnas A y B , de idéntico aspecto externo. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 amarillas, mientras que B contiene 5 bolas rojas y 3 amarillas. Un individuo se dirige a una de las urnas y extrae sin reposición, dos bolas de la misma. Hallar la probabilidad de que: a) Ambas bolas sean rojas. b) Las dos bolas sean del mismo color.

Solución:

16. Se lanza un dado de seis caras, numeradas del 1 al 6, dos veces consecutivas.
 (a) Calcúlese la probabilidad de que la suma de los resultados sea igual a 4.
 (b) Calcúlese la probabilidad de que en el primer lanzamiento haya salido un 1, sabiendo que la suma es 4.
17. En un examen hay 3 temas de máxima dificultad, 5 de dificultad media y 2 de escasa dificultad, de los cuales se elige uno al azar. La probabilidad de que un alumno apruebe el examen si el tema es de máxima dificultad es de $1/3$, si es de dificultad media, $2/5$, y si es de escasa dificultad, $3/4$. A) Hállese la probabilidad de que el alumno apruebe el examen. B) Hállese la probabilidad de que el tema elegido haya sido de máxima dificultad, si el alumno lo aprobó.
18. De una urna con cinco bolas, dos blancas y tres negras, extraemos dos bolas sin reposición. Calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: a) A = Las dos bolas extraídas son del mismo color. b) B = Extraemos al menos una bola blanca.
19. Tomamos cuatro cartas diferentes de una baraja, dos cincos, un seis y un siete. Las cartas se ponen boca abajo sobre una mesa y las mezclamos al azar. Determina la probabilidad de que al darles la vuelta, todas las cartas estén ordenadas en orden creciente, si los dos cincos son indistinguibles.
20. Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?
21. Se considera una célula en el instante $t = 0$. En el instante $t = 1$ la célula puede: o bien reproducirse, dividiéndose en dos, con probabilidad $3/4$; o bien morir, con probabilidad $1/4$. Si la célula se divide, entonces, en el tiempo $t = 2$ cada uno de sus dos descendientes puede también subdividirse o morir, con las mismas probabilidades de antes, independientemente uno de otro.
 a) ¿Cuántas células es posible que haya en el tiempo $t = 2$? b) ¿Con qué probabilidad?
22. Se lanzan dos dados. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
 (a) A = Se obtiene cinco en alguno de los dados. (b) B = Se obtiene un doble (los dos dados presentan la misma puntuación).
 (c) $A \cap B$ (d) $A \cup B$
23. Se dispone de tres urnas, la A que contiene dos bolas blancas y cuatro rojas, la B con tres blancas y tres rojas, y la C con una blanca y cinco rojas. (a) Se elige una urna al azar y se extrae una bola de ella, ¿cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca? Si la bola extraída resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B ?
24. Si se escoge un número al azar de cierta ciudad española, la probabilidad de que figure a nombre de un hombre es 0.7 y de que figure a nombre de una mujer es 0.3. En dicha ciudad, la probabilidad de que un hombre trabaje es 0.8 y de que lo haga una mujer es 0.7. Se elige un número de teléfono al azar. A) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda una persona que trabaja? B) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a un hombre, sabiendo que pertenece a una persona que trabaja?
25. Un examen consiste en elegir al azar dos temas de entre los diez del programa y desarrollar uno. A) ¿Qué probabilidad tiene un alumno, que sabe seis temas de aprobar el examen? B) ¿Qué probabilidad tiene el mismo alumno de saberse uno de los dos temas elegidos y el otro no?
26. De una urna con 4 bolas blancas y 2 negras se extraen al azar, sucesivamente y sin reposición, dos bolas.
 (a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean blancas?
 (b) Si la segunda bola ha resultado ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo haya sido?
27. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.6$; $P(B) = 0.2$ y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.7$
 (a) Calcúlese $P(A \cap B)$ y razónese si los sucesos A y B son independientes.
 (b) Calcúlese $P(A \cup B)$
28. La probabilidad de que en un mes dado un cliente de una gran superficie compre un producto A es 0.6; la probabilidad de que compre un producto B es 0.5. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre el producto B no habiendo comprado el producto A es 0.4.
 a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado sólo el producto B ?
 b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los productos?
29. Una empresa emplea tres bufetes de abogados para tratar sus casos legales. La probabilidad de que un caso se deba remitir al bufete A es 0.3; de que se remita al bufete B es 0.5 y de que se remita al bufete C es 0.2. La probabilidad de que un caso remitido al bufete A sea ganado en los tribunales es 0.6; para el bufete B esta probabilidad es 0.8 y para el bufete C es 0.7.
 a) Calcúlese la probabilidad de que la empresa gane un caso.
 b) Sabiendo que un caso se ha ganado, determínese la probabilidad de que lo haya llevado el bufete A .

30. En una ciudad, la probabilidad de que uno de sus habitantes censados vote al partido A es 0.4; la probabilidad de que vote al partido B es 0.35 y la probabilidad de que vote al partido C es 0.25. Por otro lado, las probabilidades de que un votante de cada partido lea diariamente algún periódico son, respectivamente, 0.4; 0.4 y 0.6. Se elige una persona de la ciudad al azar:
- Calcúlese la probabilidad de que lea algún periódico.
 - La persona elegida lee algún periódico, ¿cuál es la probabilidad de que sea votante del partido B ?
31. Una urna contiene 7 bolas blancas, 3 bolas rojas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer tres bolas de la urna, de forma sucesiva y sin reemplazamiento. Sean los sucesos $B1$: La primera bola es blanca, $B2$: La segunda bola es blanca y $B3$: La tercera bola es blanca. a) Exprésese con ellos el suceso Las bolas extraídas en primer y tercer lugar son blancas, y la extraída en segundo lugar no. b) Calcúlese la probabilidad del suceso Las tres bolas son del mismo color.
32. Una fábrica produce tres modelos de coche: A , B y C . Cada uno de los modelos puede tener motor de gasolina o diesel. Sabemos que el 60 % de los modelos son de tipo A y el 30 % de tipo B . El 30 % de los coches fabricados tienen motor diesel, el 30 % de los coches del modelo A son de tipo diesel y el 20 % de los coches del modelo B tienen motor diesel. Se elige un coche al azar. Se piden las probabilidades de los siguientes sucesos: (a) El coche es del modelo C . (b) El coche es del modelo A , sabiendo que tiene motor diesel. (c) El coche tiene motor diesel, sabiendo que es del modelo C .
33. Tres máquinas A , B y C fabrican tornillos. En una hora, la máquina A fabrica 600 tornillos, la B 300 y la C 100. Las probabilidades de que las máquinas produzcan tornillos defectuosos son, respectivamente, de 0.01 para A , de 0.02 para B y de 0.03 para C . Al finalizar una hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. (a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la máquina A , sabiendo que no es defectuoso?
34. En un videoclub quedan 8 copias de la película A , 9 de la B y 5 de la C . Entran tres clientes consecutivamente y cada uno elige una copia al azar. Calcúlese la probabilidad de que: (a) Los tres escojan la misma película. (b) Dos escojan la película A y el otro la C .
35. Con el objetivo de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de un instituto realizan una rifa con 500 números. Un alumno compra dos números. (a) Si sólo hay un premio, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque a él? (b) Si hay dos premios, ¿qué probabilidad tiene el alumno de que le toque al menos uno de ellos?
36. Un proveedor suministra lotes de materia prima y el 5 % de ellos resulta defectuoso. Seleccionando al azar 3 lotes (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos? (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de lotes defectuosos sea 2?
37. Una prueba para determinar cierta contaminación en el agua presenta los siguientes resultados en probabilidad: 0.05 de falsos positivos, esto es, casos en los que estando el agua libre de contaminación, el test dice que el agua se encuentra contaminada. Si el agua está contaminada, el test lo detecta con probabilidad 0.99. El agua está libre de contaminación con probabilidad 0.99. Si se realizar una nueva prueba y el test indica que hay contaminación, calcular la probabilidad de que el agua esté libre de contaminación.
38. Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas, 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera 4 blancas y 3 negras. a) Se elige una caja al azar y luego se extrae una bola, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea negra? b) Si se extrae una bola negra de una de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la segunda caja?
39. Se lanzan dos dados equilibrados de seis caras tres veces consecutivas: a) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga el seis doble. b) Calcular la probabilidad de que en los tres lanzamientos salga un doble distinto del seis doble.
40. Una persona desea jugar en una atracción de feria, donde regala un peluche, si al tirar un dardo se acierta en un blanco. Si solo se permite tirar tres dados y la probabilidad de acertar en cada tirada es 0.3. A) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche? B) ¿Cuál es la probabilidad de llevarse el peluche exactamente en el tercer lanzamiento? C) ¿Y de llevárselo exactamente en el segundo?
41. Un día determinado, en una tienda de ropa joven, se han realizado 400 ventas pagadas con la tarjeta de crédito V y 350 ventas pagadas con la tarjeta MC . Las ventas restantes del día han sido abonadas en metálico. Se comprueba que 150 de las ventas pagadas con la tarjeta de crédito V superan los 150 euros, mientras que 300 de las compras pagadas con MC superan esa cantidad. Se extrae al azar un comprobante de las ventas del día pagadas con tarjeta de crédito. A) ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda a una compra superior a 150 euros? B) Si la compra es inferior a 150 euros, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido pagada con la tarjeta MC ?

42. Un rosal no está en buen estado y, por tanto, si se riega tiene la misma probabilidad de mantenerse que de secarse. La probabilidad de que se mantenga si no se riega es 0.25. La probabilidad de no regar el rosal es $\frac{2}{3}$. Si el rosal se ha secado, ¿cuál es la probabilidad de no haberlo regado?
43. Sobre los sucesos A y B se conocen las siguientes probabilidades: $P(A) = 0.7$ $P(B) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.45$.
Calcular a) $P(B/A)$, b) $P(A^c \cap B^c) = A^c$ representa el suceso complementario del suceso A .
44. El 45 % del censo de cierta ciudad vota al candidato A , el 35 % al candidato B y el resto se abstiene. Se elige al azar tres personas del censo. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos: (a) Las tres personas votan al candidato A . (b) Dos personas votan al candidato A y la otra al candidato B . (c) Al menos una de las tres personas se abstiene.
45. De una baraja española de cuarenta cartas se extraen sucesivamente tres cartas al azar. Determinar la probabilidad de obtener: (a) Tres reyes. (b) Una figura con la primera carta, un cinco con la segunda y un seis con la tercera. (c) Un as, un tres y un seis, en cualquier orden.
46. Un test para detectar una sustancia contaminante en el agua, presenta los siguientes resultados: si el agua no está contaminada, suceso que ocurre con una probabilidad igual a 0.99, el resultado del test es que el agua está contaminada con una probabilidad igual a 0.05. Cuando el agua está contaminada, el test lo detecta con una probabilidad igual a 0.99. Se ha realizado una prueba y el test indica que hay contaminación. Calcular la probabilidad de que el agua no esté realmente contaminada. Interpretar el valor numérico obtenido.
47. En un I.E.S. hay 156 alumnos matriculados en segundo de Bachillerato, de los cuales 120 utilizan el transporte escolar. De estos últimos, la mitad hace uso del comedor del centro, mientras que sólo 12 de los que no utilizan el transporte escolar acuden al comedor. (a) Se elige al azar un alumno de segundo de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que no asista al comedor? (b) Si el alumno elegido utiliza el transporte escolar, ¿cuál es la probabilidad de que asista al comedor?
48. En una clase, el 20% de los alumnos aprueba lengua, el 30% aprueba matemáticas y el 40% aprueba lengua extranjera. Se sabe además que el 12% aprueba matemáticas y lengua extranjera y el 7% aprueba lengua y lengua extranjera. ¿Son independientes los sucesos "aprobar lengua extranjera" y "aprobar lengua"? ¿Son independientes los sucesos "aprobar matemáticas" y "aprobar lengua extranjera"?
49. Dos expertos, E_1 y E_2 , realizan peritaciones para una cierta compañía de seguros. La probabilidad de que una peritación haya sido realizada por E_1 es 0.55 y por E_2 es 0.45. Si una peritación ha sido realizada por E_1 , la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.98 y si ha sido realizada por E_2 , la probabilidad de que dé lugar al pago de una indemnización es 0.90. Un siniestro ha supuesto a la compañía el pago de una indemnización. Hallar la probabilidad de que la peritación haya sido realizada por E_2 .
50. En una empresa se producen dos tipos de bombillas: halógenas y de bajo consumo, en una proporción de 3 a 4, respectivamente. La probabilidad de que una bombilla halógena sea defectuosa es 0.02 y de que una de bajo consumo sea defectuosa es 0.09. Se escoge al azar una bombilla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea halógena?
51. Una cierta señalización de seguridad tiene instalados dos indicadores. Ante una emergencia los indicadores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer indicador es 0.95 y de que se active el segundo es 0.90. (a) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active sólo uno, de los indicadores. (b) Hallar la probabilidad de que ante una emergencia se active al menos uno de los indicadores.
52. En una población, el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. En esa población el 80 % de los hombres y el 20 % de las mujeres son aficionados al fútbol. (a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar sea aficionada al fútbol. (b) Elegida al azar una persona resulta ser aficionada al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
53. En un centro de enseñanza hay 240 estudiantes matriculados en 2º curso de Bachillerato. La siguiente tabla recoge su distribución por sexo y por opción que se cursa:

	Chicas	Chicos
Tecnológica	64	52
Humanidades y C. Sociales	74	50

Si se elige un estudiante al azar de entre los que cursan 2º de Bachillerato en ese centro, calcular la probabilidad de que:

- (a) No curse la opción Científico-Tecnológica.
(b) Si es chico, curse la opción de Humanidades y Ciencias Sociales.
54. Un ajedrecista gana una partida con probabilidad 0.6, la empata con probabilidad 0.3 y la pierde con probabilidad 0.1. El jugador juega dos partidas. (a) Describir el espacio muestral y la probabilidad de cada uno de los resultados de este experimento aleatorio. (b) Calcular la probabilidad de que gane al menos una partida.
55. Una caja con una docena de huevos contiene dos de ellos rotos. Se extraen al azar sin reemplazamiento (sin devolverlos después y de manera consecutiva) cuatro huevos. (a) Calcular la probabilidad de extraer los cuatro huevos en buen estado. (b) Calcular la probabilidad de extraer de entre los cuatro, exactamente un huevo roto.

56. En un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres dados equilibrados de seis caras, se pide calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos: "Obtener tres uno", "Obtener al menos un dos", "Obtener tres números distintos" y "Obtener una suma de 4".
57. En un colectivo de inversores bursátiles, el 20 % realiza operaciones vía Internet. De los inversores que realizan operaciones vía Internet, un 80 % consulta InfoBolsaWeb. De los inversores bursátiles que no realizan operaciones vía Internet sólo un 20 % consulta InfoBolsaWeb. Se pide: (a) Obtener la probabilidad de que un inversor bursátil elegido al azar en este colectivo consulte InfoBolsaWeb. (b) Si se elige al azar un inversor bursátil de este colectivo y resulta que consulta InfoBolsaWeb, ¿cuál es la probabilidad de que realice operaciones por Internet?
58. Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(\bar{B}) = \frac{2}{5}$ $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{4}$ Calcular:
- (a) $P(B/A)$. (b) $P(\bar{A}/B)$ Nota: $\bar{A}$ representa el suceso complementario del suceso A .
59. Se dispone de la siguiente información relativa a los sucesos A y B : $P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.2$ $P(A \cap B) = 0.12$.
(a) Calcular las probabilidades de los sucesos $(A \cup B)$ y $(A/(A \cup B))$. (b) ¿Son incompatibles? ¿Son independientes?
60. Una urna contiene dos bolas. La urna se llenó tirando una moneda equilibrada al aire dos veces y poniendo una bola blanca por cada cara y una bola negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser blanca. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.
61. Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar el jardín es $2/3$. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se le riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se le riega es de 0.25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?
62. Se considera el experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada y un dado equilibrado. Se pide: a) Describir el espacio muestral de este experimento. b) Determinar la probabilidad del suceso: Obtener una cara en la moneda y un número par en el dado.
63. Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0.2 %, mientras que dicha proporción es 0.5 % en la segunda y 0.1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?
64. Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?
65. Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?
66. Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman al 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente. Se selecciona un pianista al azar. (a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso. (b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).
67. En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0.01 para la marca A; 0.02 para la marca B y 0.03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar. (a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado. (b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?
68. En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane. b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?
69. Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, tales que: $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$, $P(A \cup B) = 1/2$
a) ¿Son A y B sucesos independientes? Razónese. b) Calcúlese $P(\bar{A}/\bar{B})$. Nota.- La notación $\bar{A}$ representa al suceso complementario de A .
70. Se consideran dos actividades de ocio: A = ver televisión y B = visitar centros comerciales. En una ciudad, la probabilidad de que un adulto practique A es igual a 0.46; la probabilidad de que practique B es igual a 0.33 y la probabilidad de que practique A y B es igual a 0.15. a) Se selecciona al azar un adulto de dicha ciudad. ¿Cuál es la probabilidad de que no practique ninguna de las dos actividades anteriores? b) Se elige al azar un individuo de entre los que practican alguna de las dos actividades. ¿Cuál es la probabilidad de que practique las dos actividades?

71. Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad $3/7$ y una raya con probabilidad $4/7$. Los errores en la transmisión pueden hacer que cuando se envíe un punto se reciba una raya con probabilidad $1/4$ y que cuando se envíe una raya se reciba un punto con probabilidad $1/3$. a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una raya? b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-ray?
72. Se consideran tres sucesos A , B , C de un experimento aleatorio tales que: $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/3$; $P(C) = 1/4$; $P(A \cup B \cup C) = 2/3$; $P(A \cap B \cap C) = 0$; $P(A/B) = P(C/A) = 1/2$. (a) Calcúlese $P(C \cap B)$. (b) Calcúlese $P(\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C})$.
73. Para la construcción de un luminoso de ferias dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0.01 si la bombilla es blanca, es igual a 0.02 si la bombilla es azul e igual a 0.03 si es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor. (a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione. (b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea azul.
74. En un cierto banco el 30 % de los créditos concedidos son para vivienda, el 50 % se destinan a empresas y el 20 % son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10 % resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20 % y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10 %. a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado. b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?
75. La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0.55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0.40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0.25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste: a) Al menos uno de los dos tipos de música. b) La música clásica y también la música moderna. c) Sólo la música clásica. d) Sólo la música moderna.
76. Una bolsa contiene diez monedas equilibradas. Cinco de dichas monedas tienen cara y cruz otras tres son monedas con dos caras y las dos restantes son monedas con dos cruces. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza. a) Calcúlese la probabilidad de que salga cara en dicho lanzamiento. b) Si en el lanzamiento ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida tenga cara y cruz?
77. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.2$ y $P(B) = 0.4$. a) Si A y B son mutuamente excluyentes, determínese $P(A \cap B)$. ¿Son además A y B independientes? Razónese. b) Si A y B son independientes, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B además mutuamente excluyentes? Razónese. c) Si $P(A/B) = 0$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B mutuamente excluyentes? ¿Son A y B independientes? Razónese. d) Si $A \subset B$, calcúlese $P(A \cap B)$. ¿Son A y B independientes? Razónese.
78. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.4$; $P(A \cap B) = 0.1$. Calcúlese cada una de las siguientes probabilidades: a) $P(A \cup B)$ b) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ c) $P(A/B)$ d) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.
- Nota. $\bar{A}$ representa al suceso complementario de A .
79. Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes: a) Obtener al menos un seis en el total de los seis lanzamientos. b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.
80. Se consideran tres sucesos A , B y C de un experimento aleatorio, tales que: $P(A/C) \geq P(B/C)$, $P(A/\bar{C}) \geq P(B/\bar{C})$. Razónese cuál de las siguientes desigualdades es siempre cierta: a) $P(A) < P(B)$; b) $P(A) \geq P(B)$.
81. Se consideran los siguientes sucesos: Suceso A: La economía de un cierto país está en recesión. Suceso B: Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión. Se sabe que $P(A) = 0.005$; $P(B/A) = 0.95$; $P(\bar{B}/\bar{A}) = 0.96$. a) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión. b) Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.
82. En una residencia universitaria viven 183 estudiantes, de los cuales 130 utilizan la biblioteca. De estos últimos 70 estudiantes hacen uso de la lavandería, mientras que sólo 20 de los que no usan la biblioteca utilizan la lavandería. Se elige un estudiante de la residencia al azar. a) ¿Cuál es la probabilidad de que utilice la lavandería? b) Si el estudiante elegido no utiliza la lavandería, ¿cuál es la probabilidad de que utilice la biblioteca?
83. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0.6$. Calcúlese $P(A \cap \bar{B})$ en cada uno de los siguientes casos: a) A y B son mutuamente excluyentes. b) $A \subset B$. c) $B \subset A$ y $P(B) = 0.3$. d) $P(A \cap B) = 0.1$.
84. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente es igual a $1/6$ y la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es igual a $7/12$. Se sabe además que $P(A/B) = 1/2$. a) Calcula la probabilidad de que ocurra A o B . b) Calcula la probabilidad de que ocurra A .

85. En una cierta población, la probabilidad de que un habitante elegido al azar siga una dieta de adelgazamiento es igual a 0.2. Entre los habitantes que siguen dieta de adelgazamiento, la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0.6. Entre los habitantes que no siguen dieta de adelgazamiento la probabilidad de que uno de ellos elegido al azar practique deporte regularmente es igual a 0.3. Se elige al azar un habitante de la población. a) Calcula la probabilidad de que practique deporte regularmente. b) Si se sabe que dicho habitante practica deporte regularmente, ¿cuál es la probabilidad de que esté siguiendo una dieta de adelgazamiento?
86. En un edificio inteligente dotado de sistemas de energía solar y eólica, se sabe que la energía suministrada cada día proviene de placas solares con probabilidad 0.4, de molinos eólicos con probabilidad 0.26 y de ambos tipos de instalaciones con probabilidad 0.12. Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que la energía sea suministrada al edificio: a) por alguna de las dos instalaciones, b) solamente por una de las dos.
87. En un cierto punto de una autopista está situado un radar que controla la velocidad de los vehículos que pasan por dicho punto. La probabilidad de que el vehículo que pase por el radar sea un coche es 0.5, de que sea un camión es 0.3 y de que sea una motocicleta es 0.2. La probabilidad de que cada uno de los tres tipos de vehículos supere al pasar por el radar la velocidad máxima permitida es 0.06 para un coche, 0.02 para un camión y 0.12 para una motocicleta. En un momento dado un vehículo pasa por el radar. A) Calcula la probabilidad de que este vehículo supere la velocidad máxima permitida. B) Si el vehículo en cuestión ha superado la velocidad máxima permitida, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una motocicleta.
88. Se supone que la probabilidad de que nazca una niña es 0.49 y de nazca un niño es 0.51. Una familia tiene dos hijos: ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque el segundo sea niño? ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean niños, condicionada porque al menos uno sea niño?
89. Se disponen de tres urnas A , B y C . La urna A contiene 1 bola blanca y 2 bolas negras, la urna B contiene 2 bolas blancas y 1 bola negra y la urna C contiene 3 bolas blancas y 3 bolas negras. Se lanza un dado equilibrado y si sale 1, 2 o 3 se escoge la urna A , si sale el 4 se escoge la urna B y si sale 5 o 6 se elige la urna C . A continuación, se extrae una bola de la urna elegida. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca? b) Se sabe que la bola extraída ha sido blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la bola haya sido extraída de la urna C ?
90. La probabilidad de que el jugador A de baloncesto consiga una canasta de tres puntos es igual a $7/9$, y la probabilidad de que otro jugador B consiga una canasta de tres puntos es $5/7$. Cada uno de estos jugadores realiza un lanzamiento de tres puntos. a) Calcúlese la probabilidad de que solamente uno de los dos jugadores consiga un triple. b) Calcúlese la probabilidad de que al menos uno de los dos jugadores consiga un triple.
91. Los datos de la tabla siguiente se han extraído de las estadísticas oficiales de la prueba de acceso a estudios universitarios (fase general) de la convocatoria del curso 2009/2010, en el Distrito único de Madrid:

	Chico	Chica
Apto	12109	9863
No apto	1717	1223

Se elige un alumno al azar de entre los que se presentaron a dicha prueba. 1. ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido sea chica o haya resultado apto? 2. Si el alumno elegido es chico, ¿Cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

92. Una bolsa contiene dos monedas equilibradas. Una de las monedas tiene cara y cruz y la otra tiene dos caras. Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces consecutivas con independencia, observándose dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda elegida sea la moneda de dos caras?
93. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que: $P(A \cap B) = 0.1$ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6$ $P(A|B) = 0.5$. Calcula: (a) $P(B)$. (b) $P(A \cup B)$. (c) $P(A)$. (d) $P(\overline{B} / \overline{A})$
94. Se disponen de 5 cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada previamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde. (a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane. (b) Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?
95. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(\overline{B}) = \frac{3}{4}$ $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. a) Determinése si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B . b) Determinése si son dependientes o independientes los sucesos A y B . Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S .

CAPÍTULO 9: ESTIMACIÓN. INTERVALOS DE CONFIANZA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. MUESTREO ESTADÍSTICO

1. Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:

- a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
- b) La altura de un grupo de seis amigos.

Solución: a) *Muestra pues sería muy costoso medir toda los tornillos de la producción;*
b) *Población, ya que ésta sólo tiene 6 elementos.*

2. Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: “La nota media de los alumnos de 2º de Bachillerato de la Comunidad de Madrid es de 7.9”. ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las mujeres, ¿sería representativo su valor?

Solución: *Probablemente se ha calculado la media tomando una muestra, aunque la Comunidad tiene las calificaciones de toda la población. Si sólo se seleccionan a las mujeres no sería una muestra representativa.*

3. Para estudiar el número de accidentes de una población de mil conductores, de los cuales la mitad tiene carnet de conducir entre 5 y 20 años, la cuarta parte lo tiene más de 20 años y la otra cuarta parte lo tiene menos de 5 años. Se quiere elegir por muestreo aleatorio estratificado proporcional, 50 conductores, ¿cuántos seleccionarías de cada grupo?

Solución: *Seleccionamos 25 con carnet entre 5 y 20 años, 12 o 13 con más de 20, y 13 o 12 con menos de 5 años de carnet.*

4. Los parámetros de una distribución son $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 3$. Se extrae una muestra de 400 individuos. Calcula $P(19.9 < \bar{x} < 20.3)$.

Solución: *$P(19.9 < \bar{x} < 20.3) = 0.7226$.*

5. Los pesos de las ovejas de una cierta ganadería tienen una media de 50 kg con una desviación típica de 4. Elegimos al azar una muestra aleatoria simple de 100 ovejas. A) Determina la probabilidad de que su media sea superior a 51 kg. B) Sea inferior a 56 kg. C) Sea superior a 48 kg. D) Esté entre 48 kg y 52 kg.

Solución: *A) $P(\bar{x} > 51) = 0.0062$; B) $P(\bar{x} < 56) = 1$; C) $P(\bar{x} > 48) = 1$; D) $P(48 < \bar{x} < 52) = 1$.*

6. Una población tiene una media $\mu = 400$ y una desviación típica $\sigma = 20$. Extraemos una muestra de 1000 individuos. Halla el intervalo característico, para una probabilidad de 0.95, de la media muestral. Lo mismo para una probabilidad del 0.99.

Solución: *$P(399.2 \leq \bar{x} \leq 400.77) \geq 0.95$; $P(398.8 \leq \bar{x} \leq 401.17) \geq 0.99$.*

7. El peso de una población se estima que tiene de media $\mu = 70$ kg y una desviación típica $\sigma = 10$. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 individuos y se pesan todos juntos. Calcula la probabilidad de que dicho peso sea superior a 7010 kg.

Solución: *$P(\text{Suma} > 7010) = 0.4602$.*

8. En los exámenes de selectividad la proporción de aprobados es del 98 %. Un centro escolar presenta a 78 estudiantes al examen.

- a) ¿Qué distribución sigue la proporción de aprobados?
- b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 3 suspensos.
- c) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya más de 10 suspensos.
- d) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida no haya ningún suspenso.

Solución: *a) $N(0.98, 0.00029)$; b) $P(x < 3) = 0.7764$; c) $P(x > 10) = 0$; d) $P(x = 0) = 0.1949$.*

9. En una fábrica de bombillas de bajo consumo hay que rechazar por defectos al 2 % de la producción. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 bombillas.

- a) ¿Qué distribución sigue la proporción de bombillas defectuosas?
- b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 5 bombillas defectuosas.

Solución: *a) $N(0.02, 0.014)$; b) $P(x < 5) = 0.9625$.*

2. INTERVALOS DE CONFIANZA

10. Determina la eficiencia de la media muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la desviación típica poblacional es 2.

Solución: *Eficiencia = 25.*

11. Determina la eficiencia de la proporción muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la proporción poblacional es 50 %.

Solución: *Eficiencia = 400.*

12. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95 % de una $N(5, 0.01)$. Determina el margen de error.

Solución: *$P(4.98 \leq x \leq 5.02) \geq 0.95$; Margen de error = 0.0392.*

13. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99 % de una $N(100, 4)$. Determina el margen de error.

Solución: *$P(89.68 \leq x \leq 110.32) \geq 0.995$; Margen de error = 20.64.*

14. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95 % de una población de desviación típica conocida, $\sigma = 2$, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50.5.

Solución: *$P(50.304 \leq \bar{x} \leq 50.696) \geq 0.95$; Margen de error = 0.392.*

15. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 98 % de una población de desviación típica conocida, $\sigma = 2$, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50.5. Compara con el anterior intervalo de confianza.

Solución: *$P(50.267 \leq \bar{x} \leq 50.733) \geq 0.99$; Margen de error = 0.466; El intervalo es algo mayor.*

16. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 16 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

280; 285; 295; 330; 290; 350; 360; 320; 295; 310; 300; 305; 295; 280; 315; 305.

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34.5 días. Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.

Solución: *Media muestral = 307.19; (290.28, 324.09)*

17. ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 0.1 unidades, con un nivel de confianza del 95 %, sabiendo que la desviación típica poblacional es conocida y vale 4?

Solución: *$n \geq 62$.*

18. Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.02 años con un nivel de confianza del 90 % sabiendo que la población se distribuye según una normal de desviación típica 0.4.

Solución: *$n \geq 1083$.*

19. En el estudio anterior se toma una muestra de 49 individuos. Queremos que el error máximo admisible sea de 0.02. ¿Cuál será el nivel de confianza?

Solución: *63.68 %.*

20. Determina el intervalo de confianza para la proporción de árboles enfermos en Madrid con un nivel de confianza del 95 %, si se ha elegido una muestra aleatoria simple de 100 árboles de los que hay 20 enfermos.

Solución: *(0.1216, 0.2784).*

21. Se quiere estudiar la proporción de estudiantes que hacen actividades extraescolares. Para ello se ha seleccionado una muestra de 400 estudiantes de los cuales 100 hacen actividades extraescolares. Determina el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 95 %.

Solución: *(0.21, 0.29)*

22. ¿Cuántas veces se debe lanzar una moneda para que la proporción de caras no se aparte de la teórica, $1/2$, más de una centésima, con un grado de certeza no inferior al 95 %? ¿Cuántas, con el mismo margen de error y una certeza no inferior al 99 %? ¿Lo mismo con 99.9 % de certeza? (Soluciones: $n \geq 9\,504$, $n \geq 16\,412$, $n \geq 26\,632$)

Solución: $n \geq 9\,504$, $n \geq 16\,412$, $n \geq 26\,632$

23. Rehaz los cálculos de la actividad anterior para un nivel de confianza del 99 %

Solución: Como $700/2000 = 35$, una primera respuesta podría ser que $0.35 \cdot 8000000 = 2800000$ votos.

Fijamos un nivel de significación α , o un grado de confianza, $1 - \alpha = \gamma$. Sea $\alpha = 0.01$ y $\gamma = 1 - \alpha = 0.99$.

Sea p la proporción de votantes al partido estudiado. Tenemos una distribución binomial de media $\mu = np = 2000 \cdot p$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot p(1-p)}$. Calculamos la probabilidad de que el número de votantes al partido estudiado de la muestra sea:

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) \geq 0.99$$

Pasamos de la distribución binomial a la normal para calcular k y p :

$$P(\mu - k\sigma - 0.5 \leq X \leq \mu + k\sigma + 0.5) \geq 0.99$$

Tipificamos:

$$P\left(\frac{-k\sigma - 0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{k\sigma + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.99$$

Obtenemos que $z = \frac{k\sigma + 0.5}{\sigma} \geq 2.58$, por lo que $k\sigma + 0.5 \geq 2.58\sigma$.

24. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %.

Solución: $P(1\,198\,642 \leq x \leq 1\,201\,358) \geq 0.995$;

3. CONTRASTE DE HIPÓTESIS

25. Repite los cálculos de una actividad anterior para comprobar si una moneda no está trucada, con un nivel de significación del 5 %. Para ello lanzamos la moneda al aire 100 veces y obtenemos 65 caras. ¿Se puede asegurar que sea una moneda de probabilidad $1/2$?

Solución: Tenemos las siguientes hipótesis:

H_0 = la moneda tiene una probabilidad de salir cara de $1/2$.

H_1 : La moneda está trucada, la probabilidad de cara es distinta de $1/2$.

Es una distribución binomial de media $\mu = 100 \cdot (1/2) = 50$, y varianza $\sigma^2 = 100 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 25 \rightarrow \sigma = 5$.

La hipótesis H_1 indica que p podría ser mayor que $1/2$ o menor que $1/2$, por lo que debemos considerar tanto que se obtengan más de 50 caras como que se obtengan menos. Hemos obtenido 65 caras, que supera en 15 al valor medio, 50, luego vamos a calcular: $P(x - 50 > 15)$, es decir,

$$P(x - 50 > 15) + P(x - 50 < -15)$$

De nuevo aproximamos la binomial con la normal:

$$P(x > 65.5) + P(x < 34.5) = P(z > 3.1) + P(z < -3.1) = (1 - P(z \leq 3.1)) + (1 - P(z \leq 3.1)) = 2 \cdot (1 - P(z \leq 3.1)) = 2 \cdot (1 - 0.999) = 2(0.001) = 0.002$$

Como $0.2 < 5$, podemos rechazar la hipótesis de que la moneda esté equilibrada (tenga una probabilidad de $1/2$, sea de Laplace...) al nivel de significación del 1 %.

26. Se ha calculado que entre los deportistas que juegan al fútbol hay un porcentaje de accidentes del 22 %. Se han estudiado el número de accidentes entre 400 personas que practican la natación y han resultado accidentadas 36 personas. ¿Es la natación igual de peligrosa que el fútbol?

Solución: No es igual de peligrosa.

27. La tasa de natalidad de una región ha sido del 8.7 por mil habitantes durante un cierto año. Suponemos que la tasa de natalidad es la misma al año siguiente, ¿hasta qué número de nacimientos entre 3 000 habitantes estarías dispuesto a confirmar dicha hipótesis?

Solución:

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza las tablas de la normal estándar y comprueba las probabilidades siguientes:

- a) $P(z < 1) = 0.8413$; b) $P(z \leq 0.7) = 0.7580$; c) $P(z > 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$; d) $P(z \geq 1.86) = 0.0314$;
 e) $P(-1.83 < z < -1) = 0.1251$; f) $P(z > 1.38) = 0.0838$; g) $P(-1.83 \leq z < 0.75) = 0.7398$.

Solución: Comprobado

2. Utiliza las tablas de la normal estándar para calcular las probabilidades siguientes:

- a) $P(z < 0.72) =$; b) $P(z \leq 1.21)$; c) $P(z > 0.93)$; d) $P(z \geq -1.86)$;
 e) $P(-1.02 < z < -0.85)$; f) $P(0.65 < z < 1.42)$; g) $P(1.76 > z > 0.72)$; h) $P(-0.9 > z > -0.51)$.

**Solución: a) $P(z < 0.72) = 0.7642$; b) $P(z \leq 1.21) = 0.8869$; c) $P(z > 0.93) = 0.1762$; d) $P(z \geq -1.86) = 0.9686$;
 e) $P(-1.02 < z < -0.85) = 0.0438$; f) $P(0.65 < z < 1.42) = 0.1800$; g) $P(1.76 > z > 0.72) = 0.1966$;
 h) $P(-0.9 > z > -0.51) = 0.1244$.**

3. Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 0.5. Calcula las siguientes probabilidades:

- a) $P(X < 6)$; b) $P(X \leq 4)$; c) $P(X > 3)$; d) $P(X \geq 5.5)$;
 e) $P(-3 < X < -1)$; f) $P(X > 2)$; g) $P(3 \leq X < 7)$; h) $P(6 > X > 2)$.

**Solución: a) $P(X < 6) = 0.9772$; b) $P(X \leq 4) = 0.0228$; c) $P(X > 3) = 1$; d) $P(X \geq 5.5) = 0.1587$;
 e) $P(-3 < X < -1) = 0$; f) $P(X > 2) = 1$; g) $P(3 \leq X < 7) = 1$; h) $P(6 > X > 2) = 0.9772$.**

4. En un centro escolar hay 900 estudiantes, que son 600 de ESO y 300 de Bachillerato. Se quiere tomar una muestra aleatoria por muestro estratificado proporcional de tamaño 50. ¿Cuántos estudiantes se deben escoger de forma aleatoria de ESO y cuántos de bachillerato?

Solución: Unos 17 de Bachillerato y 33 de ESO.

5. El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por un grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil se aproxima por una distribución normal con media 4 Mb y desviación típica igual a 1.5 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestra sea inferior a 3.5 Mb?
 b) ¿Sea superior a 4.5 Mb?
 c) Se supone ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestra toma el valor 3.7 Mb. Obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población. Obtén también un intervalo de confianza al 99 % para la media de la población. ¿Es mayor o menos que el anterior? Explica este resultado

Solución: a) 0.0039; b) 0.0039; c) (3.3325, 4.0675); d) (3.22, 4.18) Es un intervalo mayor.

6. La duración en horas de un cierto tipo de bombillas de bajo consumo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 3600 horas. Se toma una muestra aleatoria simple.

- a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\bar{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 horas?
 b) Si el tamaño de la muestra es 121 y la duración media observada $\bar{X}$ es de 4000 horas, obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional μ .

Solución: a) 4979; b) (3358, 4641)

7. La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada plantación de mejillones se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.

- a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 mejillones y se obtiene una media muestral igual a 70 mm. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 99 %. Determina también un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 95 %.
 b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 5 mm con un nivel de confianza del 95 %.

Solución: a) Para 99 %: (69.03, 70.97); Para 95 %: (69.27, 70.74).

8. El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros.
- Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16; 20) para estimar μ , con un nivel de confianza del 95 %. Calcula la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
 - Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 81. Calcula el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Solución: a) *Media muestral = 18; Tamaño = 9; b) $E = 0.65333...$*

9. El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu = 6.3$ kW y desviación típica 0.9 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcula:
- La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW.
 - El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza (6.1; 6.6) para la media del consumo familiar diario.

Solución: a) *0.9990; b) 0.9863; 98 %.*

10. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para trastornos digestivos que sufren. Los resultados han sido:

100 98 75 103 84 95 105 82 107

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 9 días.

- Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ .
- ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95 %?

Solución: *Media muestral = 94.333... (92.4, 96.3); b) Tamaño mayor o igual a 13.*

11. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0.2 años.
- Se toma una muestra aleatoria simple de 81 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1.8 años. Determina un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil.
 - Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.03 años con un nivel de confianza del 95 %.

Solución: a) *(1.76, 1.84); b) 171.*

12. Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1.2. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 elementos.
- Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 4.
 - Determina un intervalo de confianza del 90 % para μ ; si la media muestral es igual a 50.

Solución: a) *b) (49.8, 50.21)*

13. La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ cm.
- Se toma una muestra aleatoria simple de 100 individuos obteniéndose una media muestral $\bar{x} = 174$ cm. Determina un intervalo de confianza al 95 % para μ .
 - ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 5 cm, con un nivel de confianza del 90 %?

Solución: a) *(171.06, 176.94); b) 25.*

14. El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ , con un error máximo de 2.27 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 1000 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 5.23. Expresa los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcula la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.

Solución: *$n_{90} = 0.525 \sigma^2$; $n_{95} = 0.14 \sigma^2$; $\sigma^2 = 2605.68$; $\sigma = 51.04$; $n_{90} = 1368$; $n_{95} = 368$.*

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de los siguientes motivos no es por el que se recurre a una muestra:
- El proceso de medición es destructivo
 - La población es muy numerosa
 - La población es imposible o difícil de controlar
 - La población tiene mal carácter

Solución: d)

2. Una ganadería tiene diez mil ovejas de diferentes razas. Queremos extraer una muestra de 100 ovejas. Indica el tipo de muestreo más adecuado:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) muestreo aleatorio sistemático | b) muestreo aleatorio estratificado |
| c) muestreo no aleatorio | d) muestreo aleatorio por conglomerados |

Solución: b)

3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa en una distribución $N(0, 1)$:

- | | | | |
|-------------------|---------------------|------------------------|---------------------|
| a) $P(z < 0) = 1$ | b) $P(z < 0) = 0.5$ | c) $P(z = \sigma) = 0$ | d) $P(z > 0) = 0.5$ |
|-------------------|---------------------|------------------------|---------------------|

Solución: a)

4. De una población de media 69 y desviación típica 8 se toma una muestra de tamaño 12. La probabilidad de que un individuo de la muestra tenga un valor mayor que 93 es:

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $P(x > 93) = 0.9987$ | b) $P(x > 93) = 0.6501$ | c) $P(x > 93) = 0.1293$ | d) $P(x > 93) = 0.0013$ |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|

Solución: d)

5. Los parámetros de una distribución son $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = 20$. Se extrae una muestra de 100 individuos. El valor de $P(8 < \bar{x} < 12)$ es:

- | | | | |
|------------------------|-----------|-----------|------------|
| a) $P(z < 1) = 0.8416$ | b) 0.6838 | c) 0.3168 | d) 0.1584. |
|------------------------|-----------|-----------|------------|

Solución: b)

6. En el control de calidad de una fábrica de chocolate, se envasan tabletas de 100 gramos con una desviación típica de 2 gramos. Se toma una muestra de 50 tabletas. Calcula la probabilidad de que el peso medio de las tabletas sea menor que 99 gramos:

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|------------|
| a) 0.0002 | b) 0.9998 | c) 0.3541 | d) 0.0023. |
|-----------|-----------|-----------|------------|

Solución: a)

7. En el control de calidad de una envasadora de estuches de jamón, se envasan en estuches de 100 gramos con una desviación típica de 2 gramos. La probabilidad de que un lote de 400 estuches pese más de 40100 gramos es de:

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| a) 0.9938 | b) 0.0062 | c) 0.0002 | d) 0.9998 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|

Solución: b)

8. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 0.95 de una $N(2, 0.1)$:

- | | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| a) $P(1.8 < X < 2.2) = 0.95$; | b) $P(1.9 < X < 2.1) = 0.95$; | c) $P(1.8 < X < 2.2) = 0.99$; | d) $P(1 < X < 2) = 0.90$ |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------|

Solución: a)

9. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 1000 componentes y en ella se ha obtenido que la proporción de defectuosos es del 3.7 %. Determina el intervalo de confianza al 99 % para la proporción de componentes defectuosos que se producen en una fábrica:

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) (0.0371, 0.0375) | b) (0.0258, 0.0351) | c) (0.0216, 0.0524) | d) (0.0111, 0.0222) |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|

Solución: c)

10. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra en una población de 8 millones de votantes para conocer si tienen la intención de votar a un determinado partido político con una probabilidad de acierto del 0.95 y un margen de error inferior a 0.02?:

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| a) 2401 | b) 1959 | c) 2502 | d) 3026 |
|---------|---------|---------|---------|

Solución: a)

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, $N(0, 1)$

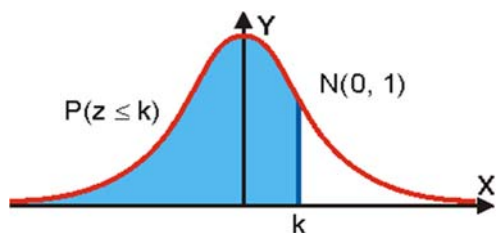


Tabla de la uam: Universidad Autónoma de Madrid

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

APÉNDICE: PROBLEMAS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD

En la web de Marea Verde puedes encontrar problemas resueltos de los propuestos en selectividad, en 2019, en todas las comunidades autónomas. En:

<http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/Selectividad.htm>

Otras webs con problemas resueltos son:

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Exámenes_selectividad_A4.pdf

<http://pedroreina.net/pau/>

<http://www.orientacionandujar.es/2013/05/29/examenes-resueltos-selectividad-y-pau-matematicas-ii-y-mas-recursos/>

<http://www.segundoperez.es/>

<https://www.ehu.eus/es/web/sarrera-acceso/batxilergotik-unibertsitatera-sartzeko-probaren-ariketak>

2. El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por un grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil con la tarifa AA se puede aproximar por una distribución normal con media 3.5 Mb y desviación típica igual a 1.5 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49. A) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestra sea inferior a 3.37 Mb? B) Supóngase ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestra toma el valor 3.42 Mb. Obténgase un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población.

Solución:

3. La duración en horas de un cierto tipo de bombillas se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 1940 horas. Se toma una muestra aleatoria simple. A) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada $\bar{X}$ de esas bombillas sea inferior a 100 horas? B) Si el tamaño de la muestra es 225 y la duración media observada $\bar{X}$ es de 12415 horas, obténgase un intervalo de confianza al 90 % para μ .

Solución:

4. La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada colonia de gusanos de seda se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm. A) Se toma una muestra aleatoria simple de 48 gusanos de seda y se obtiene una media muestral igual a 36 mm. Determinése un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los gusanos de seda con un nivel de confianza del 95 %. B) Determinése el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 1 mm con un nivel de confianza del 90 %.
5. El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ litros. A) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16.33; 19.27) para estimar μ , con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida. B) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.
6. El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica 1.2 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50. Calcúlese: a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW, si $\mu = 6.3$ kW. b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza (6.1; 6.9) para la media del consumo familiar diario.
7. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido: 290; 275; 290; 325; 285; 365; 375; 310; 290; 300. Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 34.5 días. a) Determinése un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ . b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 10 días, con un nivel de confianza del 95 %?
8. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0.4 años. a) Se toma una muestra aleatoria simple de 400 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1.75 años. Determinése un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil. b) Determinése el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.02 años con un nivel de confianza del 90 %.
9. Se considera una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 210. Se toma una muestra aleatoria simple de 64 elementos. a) Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 22. b) Determinése un intervalo de confianza del 99 % para μ ; si la media muestral es igual a 1532.

10. La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 16$ cm. a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 625 individuos obteniéndose una media muestral $\bar{x} = 169$ cm. Hállese un intervalo de confianza al 98 % para μ . b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 4 cm, con un nivel de confianza del 90 %?
11. El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ , con un error máximo de 3.290 y un nivel de confianza del 90 %, supera en 7500 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95 % y el error máximo fuera de 7.840: Exprésense los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcúlense la desviación típica de la población y los tamaños muestrales respectivos.

Nota: Utilícese $z_{0,05} = 1.645$.