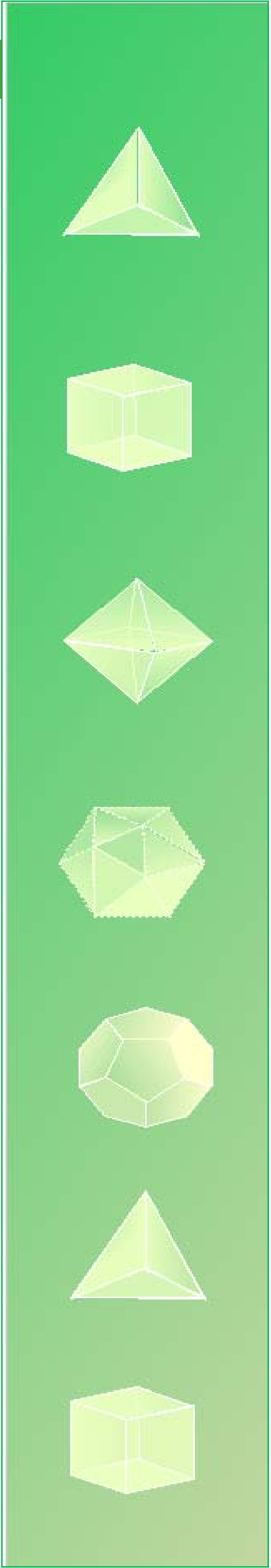

Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 1: Matrices

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido 1000 lechugas, 2000 Kg de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1000 y 400. Por cada lechuga recibe 1 céntimo, por cada Kg de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias en el año de 2014.

Solución:

	LECHUGAS	**NARANJAS (KG)**	**MELONES**
CANTIDAD 2014	1000	2000	500
CANT. ANTES	500	1000	400
DINERO (CENTS)	1	3	5
GANANCIAS 2014 (CENTS)	1000	3000	5000

2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no.

Solución:

Son matrices a) y g); b), c) y f) se pueden representar como matrices intercambiando por números los datos; y d), e), h) e i) podrían representarse como matrices, aunque no sean numéricos, teniendo en cuenta que se disponen en filas y columnas.

3. Propón otros elementos de tu entorno que sean matrices o puedan representarse como matrices.

Solución: Respuesta libre. Ejemplos: Podrían representarse como matrices la cuadrícula de un cuaderno, un tablero de ajedrez, un casillero de tres en raya, las caras laterales de un cubo de Rubik... etc.

4. Escribe tres matrices fila

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$A = (7\ 1); \quad B = (8 \quad 4 \quad -3); \quad C = (9 \quad 20 \quad -12 \quad 0)$$

5. Escribe tres matrices columna

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

calcula: a) $A + 3B$, b)$2A + B - 5C$.

Solución:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \\ -9 & 9 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2+3 & 1+3 & 0+3 \\ 9+6 & 0+6 & -3-6 \\ -2-9 & 0+9 & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & -9 \\ -11 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

b) $$2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 18 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & -25 \\ 35 & 15 & -15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1-5 & 2+1-0 & 0+1-0 \\ 18+2-10 & 0+2-20 & -6-2+25 \\ -4-3-35 & 0+3-15 & 14+3+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 10 & -18 & 17 \\ -42 & -12 & 32 \end{pmatrix}$$

10. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$ calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$ ¿es el producto conmutativo?

Solución:

a) $A\cdot B\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&0\\18&0&0\\-23&19&19\end{pmatrix}$

b) $B\cdot A\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1&4\\26&2&-20\\15&-3&12\end{pmatrix}$

Podemos observar que el producto no es commutativo.

11. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}\text{ y }B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$$

calcula $3\cdot A^t-B^2$.

1. Calculamos la matriz traspuesta de A: $A^t=\begin{pmatrix}2&9&-2\\1&0&0\\0&-3&7\end{pmatrix}$
2. Calculamos $B^2: B\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6&2\\12&0&-8\\-6&12&0\end{pmatrix}$
3. Calculamos la operación propuesta: $3\cdot\begin{pmatrix}2&9&-2\\1&0&0\\0&-3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6&2\\12&0&-8\\-6&12&0\end{pmatrix}=$
4. $=\begin{pmatrix}6&27&-6\\3&0&0\\0&-9&21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6&2\\12&0&-8\\-6&12&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&21&-8\\-9&0&8\\6&-21&21\end{pmatrix}$
5. Respuesta: $\begin{pmatrix}6&21&-8\\-9&0&8\\6&-21&21\end{pmatrix}$

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

- Inversa de A $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{7}{57} & \frac{1}{19}\\ 1 & -\frac{14}{57} & -\frac{2}{19}\\ 0 & \frac{2}{57} & \frac{3}{19}\end{pmatrix}$

- Inversa de B: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to \begin{matrix}-2F_1+F_2\\ 3F_1+F_3\end{matrix};\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 6 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\to$

$F_3+F_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 6 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\to\frac{1}{6}F_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 6 & 6 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\to -6F_2+F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1\end{array}\right)\to\frac{1}{4}F_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)$

$\to\begin{matrix}-\frac{1}{3}F_3+F_2;\\ -F_3+F_1\end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)\to$

$-F_2+F_1\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{array}\right)\qquad \mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

- Inversa de C: $\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\frac{1}{2}F_1\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to -F_1+F_2$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right)\to F_2+F_1\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{array}\right)\to -\frac{2}{3}F_2\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -\frac{2}{3}\end{array}\right)$

  - $\boldsymbol{C^{-1}}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{3} & -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\end{pmatrix}$

- Inversa de D: ∄, ya que siempre nos dará como resultado (al hacer gauss-jordan) 0 en las filas 2 y 3

13. Resuelve la ecuación matricial $M\cdot X+N=P$ siendo:

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 9 & 0 & -3\\ -2 & 0 & 7\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 3\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

1. Despejamos X: $M \cdot X = P - N$, $X = M^{-1}(P-N)$
2. Restamos las matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Calculamos la inversa de M: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{57} & \frac{1}{19} \\ 1 & -\frac{14}{57} & -\frac{2}{19} \\ 0 & \frac{2}{57} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$
4. Resolvemos: $X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{57} & \frac{1}{19} \\ 1 & -\frac{14}{57} & -\frac{2}{57} \\ 0 & \frac{2}{57} & \frac{3}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{19} & 0 & \frac{28}{57} \\ -\frac{4}{19} & 0 & -\frac{56}{57} \\ \frac{18}{19} & 0 & \frac{8}{57} \end{pmatrix}$

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Rango de A: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to F_1 + F_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to 9F_1 - 2F_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Por lo que r(A)=2

- Rango de B: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 2F_1 + F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to$

  $3F_1 + F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \quad F_2 \leftrightarrow F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ Por lo que r(B)= 3
- Rango de C: $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad -2F_1 + F_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Por lo que r(C)=1
- Rango de D: $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 2F_1 + F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to -3F_1 + F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Por lo que r(D)=1

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. **Dadas las matrices**

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Calcula:

a) A + B= $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\-1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & -1+0\\0-1 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

b) A-B-C= $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\-1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4+1 & -1-0-2\\0+1+2 & 3+2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}$

c) 3·A+5·B-6·C=3· $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\-1 & -2\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\0 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}20 & 0\\-5 & -10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6 & 12\\-12 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+20+6 & -3+0-12\\0-5+12 & 9-10-18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}29 & -15\\7 & -19\end{pmatrix}$$

2. Para las matrices

A= $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\\mathbf{2} & \mathbf{3}\\\mathbf{0} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y\ B=}\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\\mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$ **Calcula A·B y B·A. ¿Es el producto conmutativo?**

A·B= $\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\0 & 5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot4-1\cdot0 & 1\cdot(-1)-1\cdot5 & 1\cdot2-1\cdot3\\2\cdot4+3\cdot0 & 2\cdot(-1)+3\cdot5 & 2\cdot2+3\cdot3\\0\cdot4+4\cdot0 & 0\cdot(-1)+4\cdot5 & 0\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3 & -6 & -1\\8 & 13 & 13\\0 & 20 & 12\end{pmatrix}$$

B·A= $\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\0 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot1-1\cdot2+2\cdot0 & 4\cdot(-1)-1\cdot3+2\cdot4\\0\cdot1+5\cdot2+3\cdot0 & 0\cdot(-1)+5\cdot3+3\cdot4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}4 & 1\\10 & 27\end{pmatrix}$$

A·B$\neq B\cdot A$ El producto no es conmutativo

3. Calcula los productos posibles entre las matrices:

A= $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\ \boldsymbol{y\ C}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\\mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5}\end{pmatrix}$

$$-\ A_{3x3}\cdot B_{3x1}=M_{3x1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1\\1\cdot1+1\cdot2+1\cdot1\\0\cdot1+1\cdot2-1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$$

$-\ B_{3x1}\cdot A_{3x3}$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de B con las filas de A

$-\ A_{3x3}\cdot C_{2x3}$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A con las filas de C.

$$-\ C_{2x3}\cdot A_{3x3}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot1+0\cdot0&2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1&2\cdot3+1\cdot1+0\cdot(-1)\\3\cdot1+4\cdot1+5\cdot0&3\cdot2+4\cdot1+5\cdot1&3\cdot3+4\cdot1+5\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&5&7\\12&15&8\end{pmatrix}$$

-$B_{3x1}\cdot C_{2x3}=$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de B con las filas de C.

$$-C_{2x3}\cdot B_{3x1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&4&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot1\\3\cdot1+4\cdot2+5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\16\end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{4}\end{pmatrix}\ \mathbf{y}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{-6}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Calcula $3\cdot A^t - B^2$.

$$3\cdot\begin{pmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}^t-\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}^2=$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\3&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\9&12&9\\9&9&12\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-6)&1\cdot1+1\cdot0+2\cdot(-1)&1\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot0\\2\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot(-6)&2\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot(-1)&2\cdot2+0\cdot(-1)+(-1)\cdot0\\(-6)\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot(-6)&(-6)\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot(-1)&(-6)\cdot2+(-1)\cdot(-1)+0\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 9 & 12 & 9\\ 9 & 9 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9 & -1 & 1\\ 8 & 3 & 4\\ -8 & -6 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 4 & 2\\ 1 & 9 & 5\\ 17 & 15 & 23\end{pmatrix}$$

5. Para las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3}\end{pmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}\ \mathbf{y}\ \mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones si es posible:

a) A+B = $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1+0 & -1+3 & 2+4\\ 4+(-1) & 0+(-2) & (-3)+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

b) $3\cdot A-4\cdot B=3\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3 & -3 & 6\\ 12 & 0 & -9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -12 & -16\\ 4 & 8 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -15 & -10\\ 16 & 8 & -21\end{pmatrix}$$

c) **A · B =** No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A con las filas de B

d) **A · D =** $\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 3}\\ \mathbf{4\cdot 2+0\cdot 1+(-3)\cdot 3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}$

e) **B · C =** $\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0\cdot 2+3\cdot(-5)+4\cdot 1} & \mathbf{0\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 0} & \mathbf{0\cdot 0+3\cdot 4+4\cdot 0} & \mathbf{0\cdot 1+3\cdot(-2)+4\cdot(-3)}\\ \mathbf{(-1)\cdot 2+(-2)\cdot(-5)+3\cdot 1} & \mathbf{-1\cdot 3+(-2)\cdot 1+3\cdot 0} & \mathbf{(-1)\cdot 0+(-2)\cdot 4+3\cdot 0} & \mathbf{(-1)\cdot 1+(-2)\cdot(-2)+3\cdot(-3)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{-11} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{-18}\\ \mathbf{11} & \mathbf{-5} & \mathbf{-8} & \mathbf{-6}\end{pmatrix}$$

f) **C · D =** · $\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de C con las filas de D.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

g) $\mathbf{A^t \cdot C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ = No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A^t con las filas de C.

6. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas pueda existir A·B y B·A?

SÍ es posible, ejemplo:

$A_{mxn} \cdot B_{nxm} = C_m$

$B_{nxm} \cdot A_{mxn} = D_n$

7.

a) Calcula $A^{50}\ y\ A^{97}$

Para resolver este ejercicio hay que ir haciendo las potencias de la matriz hasta ver que patrón siguen.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Ahora resolvemos:

$A^{50} = A^{12\cdot 4+2} = A^{12\cdot 4} \cdot A^2 = (A^4)^{12} \cdot A^2 = I^{12} \cdot A^2 = A^2$

$A^{97} = A^{24\cdot 4+1} = A^{24\cdot 4} \cdot A^1 = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = A$

b) Encuentra los valores a y b para que la matriz A conmute con la matriz B= $\begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Que conmuten significa que $A * B = B * A$ entonces primero realizamos las multiplicaciones.

$$\left\{\begin{matrix} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -b = 0 \\ a = 1 \\ -1 = -a \\ 0 = -b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a = 1 \\ b = 0 \end{matrix} \text{ luego } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

Hay que ir calculando potencias hasta encontrar el patrón

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}\Big\}$ $\quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big\}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left.A^4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\quad A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

9. *Se dice que dos matrices A y B conmutan si*:

$A\cdot B=B\cdot A$. *Dada la matriz A halla las matrices B que comuten con A.*

$$\left\{\begin{matrix}A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\c&d\end{pmatrix}\\ B\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2a+b\\c&2c+d\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}a+2c=a\\b+2d=2a+b\\c=c\\d=2c+d\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}a=a\\b=b\\c=0\\d=a\end{matrix}\right\}B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

10. encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con estas matrices.

a) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{matrix}A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}\\ B\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}a+c=a\\b+d=a+b\\c=c\\d=c+d\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}a=a\\b=b\\c=0\\d=a\end{matrix}\right\}B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

b) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{matrix}A*B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\a+d&b+e&c+f\end{pmatrix}\\ B*A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c&c&0\\e+f&f&0\\h+i&i&0\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}b+c=0\\c=0\\0\\a=e+f\\b=f\\c=0\\a+d=h+i\\b+e=i\\c+f=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}a=a\\b=0\\c=0\\d=d\\e=a\\f=0\\g=g\\e=d\\i=a\end{matrix}\right\}$$

$$B=\begin{pmatrix}a&0&0\\d&a&0\\g&d&a\end{pmatrix}$$

11.- Sean las matrices

$$\boldsymbol{A = 2\cdot\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix},\qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix},\qquad D = 10\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix},\qquad E = (3 \quad m)}$$

Calcula cada uno de los productos $\boldsymbol{A\cdot B, D\cdot E, E\cdot B, C\cdot E}$.

$A\cdot B$:

$A_{2\times\mathbf{2}},\ B_{\mathbf{2}\times 1} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$A = 2\cdot\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 4 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x+4y \\ 2my \end{pmatrix}$$

$D\cdot E$:

$D_{2\times\mathbf{1}},\ E_{\mathbf{1}\times 2} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$D = 10\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix}(3 \quad m) = \begin{pmatrix} 30 & 10m \\ 30m & 10m^2 \end{pmatrix}$$

$E\cdot B$

$E_{1\times\mathbf{2}},\ B_{\mathbf{2}\times 1} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$(3 \quad m)\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = (15my)$$

$C\cdot E$

$C_{2\times\mathbf{1}},\ E_{\mathbf{1}\times 2} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}(3 \quad m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30x & 10xm \end{pmatrix}$$

12.- Sean

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}\ \text{y}\ B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}}$$

dos matrices de orden $\boldsymbol{2\times 3}$, en las que $\boldsymbol{x, y, z}$ denotan valores numéricos desconocidos.

- **a) Determina, razonadamente, los valores de $\boldsymbol{x, y, z \in \mathbb{R}}$ de manera que $\boldsymbol{A = B}$.**
- **b) ¿Es posible el cálculo de $\boldsymbol{A\cdot B}$? Razona la respuesta.**

a) $x = 2;\ z = 3;\ y = 3$

Para que dos matrices sean iguales todos sus elementos tienen que ser iguales uno a uno.

b) No es posible el cálculo de $A\cdot B$ por que el número de columnas de A no es igual al número de filas de B, requisito necesario para multiplicar dos matrices.

13.- Sea la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X, tal que

$$\boldsymbol{X\cdot A}=(\mathbf{1}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{-1})$$

b) Una matriz Y, tal que

$$\boldsymbol{A\cdot Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

a) $X_{1\times 3},\ A_{3\times 3}\rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$X=(a\quad b\quad c)$$

$$(a\quad b\quad c)\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 0\end{pmatrix}=(1\quad 0\quad -1)$$

$$\left.\begin{array}{r}2a+2b-5c=1\\ a-c=0\\ 2a-b=-1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2a+2b-5c=1\\ a=c\\ 2a-b=-1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2a+2b-5a=1\\ 2a-b=-1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}-3a+2b=1\\ 2a-b=-1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}-3a+2b=1\\ 4a-2b=-2\end{array}\right\}$$

$a=-1\,;c=-1\,;b=2a+1=2(-1)+1=-1$

$$X=(-1\quad -1\quad -1)$$

b) No se pueden multiplicar, ya que el producto de dos matrices debe tener el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz, y en este caso, el producto solo tiene dos filas, no como la primera matriz (A) que tiene tres filas.

$$A_{3\times 3}\cdot Y_{x\times y}\neq B_{2\times 3}$$

Para poder multiplicar $A\cdot Y$, el resultado debería tener 3 filas

14.- Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{a)}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{b)}\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{8}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{c)}\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{d)}\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$a)\ \left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right);\ F_2=F_2+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);\ F_1=\frac{1}{2}F_2+F_1\rightarrow\ \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);$

$F_2=\frac{1}{2}F_2\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right);\ F_2=-1F_1+F_2\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{array}\right);\ F_2=-1F_2\rightarrow$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right);\ F_1=2F_1\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right);\ F_1=-3F_2+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right);\ F_1=\frac{1}{2}F_1\rightarrow$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$ $$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$b)\ \begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r}a+2c=1\\4a+8c=0\end{array}\right\}\ a=1-2c\rightarrow 4(1-2c)+8c=0;\ -8c+4+8c=0;\quad \mathbf{4=0}$

$\left.\begin{array}{r}b+2d=0\\4b+8d=1\end{array}\right\}\ b=-2d\rightarrow 4(-2d)+8d=1;\ -8d+8d=1;\quad \mathbf{0=1}$

No existe su matriz inversa.

$c)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&2&1&0&0\\1&0&3&0&1&0\\4&1&1&0&0&1\end{array}\right);\ \begin{array}{l}F_2=F_1+F_2\rightarrow\\F_3=4F_1+F_3\rightarrow\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&2&1&0&0\\0&1&5&1&1&0\\0&5&9&4&0&1\end{array}\right);\ F_3=-5F_2+F_3\rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&2&1&0&0\\0&1&5&1&1&0\\0&0&-16&-1&-5&1\end{array}\right);F_1=-1F_1\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-2&-1&0&0\\0&1&5&1&1&0\\0&0&-16&-1&-5&1\end{array}\right);F_3=-\frac{1}{16}F_3\rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-2&-1&0&0\\0&1&5&1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{16}&\frac{5}{16}&-\frac{1}{16}\end{array}\right);\ F_1=F_2+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&0&1&0\\0&1&5&1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{16}&\frac{5}{16}&-\frac{1}{16}\end{array}\right);$

$F_1=-3F_1+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{3}{16}&\frac{1}{16}&\frac{3}{16}\\0&1&5&1&1&0\\0&0&1&\frac{1}{16}&\frac{5}{16}&-\frac{1}{16}\end{array}\right);\ F_2=-5F_3+F_2\rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{3}{16}&\frac{1}{16}&\frac{3}{16}\\0&1&0&\frac{11}{16}&-\frac{9}{16}&\frac{5}{16}\\0&0&1&\frac{1}{16}&\frac{5}{16}&-\frac{1}{16}\end{array}\right)\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{16}&\frac{1}{16}&\frac{3}{16}\\\frac{11}{16}&-\frac{9}{16}&\frac{5}{16}\\\frac{1}{16}&\frac{5}{16}&-\frac{1}{16}\end{pmatrix}$

$d)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-1&0&1&0&0\\3&1&2&0&1&0\\4&0&1&0&0&1\end{array}\right);\ F_1=-1F_1+F_2\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&-1&1&0\\3&1&2&0&1&0\\4&0&1&0&0&1\end{array}\right);\ \begin{array}{l}F_2=-3F_1+F_2\rightarrow\\F_3=-4F_1+F_3\rightarrow\end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&-1&1&0\\0&-5&-4&3&-2&0\\0&-8&-7&4&-4&1\end{array}\right);\ F_2=-\frac{1}{5}F_2\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&-1&1&0\\0&1&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&-8&-7&4&-4&1\end{array}\right);$

$F_3=8F_2+F_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&-1&1&0\\0&1&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&0\\0&0&-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&-\frac{4}{5}&1\end{array}\right);\ F_3=-\frac{5}{3}F_3\rightarrow$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);\ F_2 = -\frac{4}{5}F_3 + F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);$$

$$F_1 = -2F_3 + F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);\ F_1 = -2F_2 + F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

15.- Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

calcula $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}}$ **y** $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}$**.**

$A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)^t$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 7a + 7c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{matrix}\right\} \ c = -3a \rightarrow 7a + 7(-3a) = 1;\ 7a - 21a = 1;\ -14a = 1;\ a = -\frac{1}{14};$$

$$\left.\begin{matrix} 7b + 7d = 0 \\ 3b + d = 1 \end{matrix}\right\} \ d = 1 - 3b \rightarrow 7b + 7(1 - 3b) = 0;\ \ 7b + 7 - 21b = 0;\ \ 7b - 21b = -7;$$

$$-14b = -7;\ \ b = \tfrac{7}{14}; \qquad c = -3\left(-\tfrac{1}{14}\right); c = \tfrac{3}{14} \qquad d = 1 - 3\left(\tfrac{7}{14}\right);\ d = 1 - \tfrac{3}{2};\ d = -\tfrac{1}{2}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & \frac{7}{14} \\ \frac{3}{14} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

16.- Dada la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$

b) Comprueba que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$

c) Halla una matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, siendo

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix}2a-c=1\\ a+c=0\end{matrix}\right\}\ a=-c\rightarrow\ 2(-c)-c=1;\ -2c-c=1;\ -3c=1; c=-\frac{1}{3}$

$\left.\begin{matrix}2b-d=0\\ b+d=1\end{matrix}\right\}\ b=1-d\rightarrow 2(1-d)-d=0;\ 2-2d-d=0;\ 2d+d=2;\ \ 3d=2;$

$d=\frac{2}{3}$ $\qquad a=-\left(-\frac{1}{3}\right);\ \ a=\frac{1}{3}$ $\qquad b=1-\frac{2}{3};\ \ b=\frac{1}{3}$ $\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $A\cdot X=B,\quad Sea\ B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix}2a-c=4\\ a+c=0\end{matrix}\right\}\ a=-c; 2(-c)-c=4;\ -2c-c=4;\ -3c=4; c=-\frac{4}{3}$

$\left.\begin{matrix}2b-d=2\\ b+d=-2\end{matrix}\right\}\ b=-2-d;\ 2(-2-d)-d=2;\ -4-2d-d=2;\ -3d=6;\ d=-\frac{6}{3}$

$a=-\left(-\frac{4}{3}\right); a=\frac{4}{3}$ $\qquad b=-2-\left(-\frac{6}{3}\right); b=-2+\frac{6}{3};\ b=4$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 4\\ -\frac{4}{3} & -2\end{pmatrix}$$

17. Calcula la matriz inversa de

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Procedimiento:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F3-F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&-1&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F3+F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&3&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F2-2F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&3&0&2&1&-2\\0&0&3&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{3F1-F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&1&-1&2\\0&3&0&2&1&-2\\0&0&3&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}\cdot F1\\\frac{1}{3}\cdot F2\\\frac{1}{3}\cdot F3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa es:

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

18. Dadas las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{-2}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$ **Obtén, si procede, $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1}$.**

Tenemos que hallar C^{-1} entonces, primero multiplicamos B·A=C= $\begin{pmatrix}3&-2\\3&8\end{pmatrix}$

Luego hallamos la inversa de C:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&-2&1&0\\3&8&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F2-F1}\left(\begin{array}{cc|cc}3&-2&1&0\\0&10&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{5F1+F2}\left(\begin{array}{cc|cc}15&0&4&1\\0&10&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{F1}{15}\\\frac{F2}{10}}}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{4}{15}&\frac{1}{15}\\0&1&-\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\end{array}\right)$$

$$(\mathrm{B}\cdot\mathrm{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{15}&\frac{1}{15}\\-\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

19. Sean las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de A·B

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

a) La matriz inversa de $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}$ = C^{-1}

Primero multiplicamos A·B=$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora obtenemos C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-2F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Tenemos que hallar la inversa de B y la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-2F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$:

$$\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que el resultado de multiplicar $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1} = \ \mathrm{C}^{-1}$

En el apartado "a" obtenemos la matriz inversa de C realizando este proceso: A · B = C y se halla su inversa.

En el apartado "b" también se obtiene la inversa de C, pero en lugar de multiplicar B · A, se multiplica directamente las inversas de B y A, es decir, $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$:

$\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1} = \ \mathrm{C}^{-1}$

La relación que existe entre la matriz de ambos apartados es que obtenemos el mismo resultado tanto si seguimos el proceso del apartado "a" como el del apartado "b", es decir,

$(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$

20. Sea

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Comprueba que $\mathbf{A^t}$ = $\mathbf{A^{-1}}$ y calcula $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A^t})^{\mathbf{2003}}$.

Primero hallamos la matriz traspuesta de A:

$$A^t=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Para comprobar que $A^t = A^{-1}$ nos falta obtener la matriz inversa de A, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F3\leftrightarrow F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{F3\leftrightarrow F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Efectivamente $A^t = A^{-1}$

Ahora tenemos que obtener $(A\cdot A^t)^{2003}$. Como $A^t = A^{-1}$, $(A\cdot A^t)^{2003}=(A\cdot A^{-1})^{2003}=(I)^{2003}=I$

21. Sean las matrices:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}&\mathbf{2}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) **Halla $\mathbf{C^{-1}}$ y $\mathbf{D^{-1}}$**
b) **Calcula la matriz inversa de C·D**
c) **Comprueba que $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{D})^{-1}$ = $\mathbf{D^{-1}}$· $\mathbf{C^{-1}}$.**
a) Hallamos la matriz inversa de C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&2&2&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{3F2+F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&2&2&1&0&0\\0&-1&2&1&3&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F3+F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&2&2&1&0&0\\0&-1&2&1&3&0\\0&0&2&1&3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2-F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&2&2&1&0&0\\0&-1&0&0&0&-1\\0&0&2&1&3&1\end{array}\right)\xrightarrow{F1-F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&2&0&0&-3&-1\\0&-1&0&0&0&-1\\0&0&2&1&3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1+2F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-3&0&0&0&-3&-3\\0&-1&0&0&0&-1\\0&0&2&1&3&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{F1}{-3}\ \frac{F2}{-1}\ \frac{F3}{2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Ahora hallamos la matriz inversa de D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+2F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F2}{3}]{\frac{F1}{6}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular la matriz inversa de C·D primero multiplicamos C·D=E = $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

A continuación, hallamos la matriz inversa de E:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F3+5F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{2F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -24 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F3}{8}]{\frac{F1}{-24},\ \frac{F2}{-6}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

c) Sabemos que $(C \cdot D)^{-1} = E^{-1}$, es decir, $(C \cdot D)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Ahora tenemos que comprobar si $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$, es decir, $D^{-1} \cdot C^{-1} = E^{-1}$
Para ello, multiplicamos $D^{-1} \cdot C^{-1}$:

Obtenemos $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, es decir, E^{-1}.

Por lo tanto, hemos comprobado que $(\mathrm{C}\cdot\mathrm{D})^{-1} = \mathrm{D}^{-1}\cdot\ \mathrm{C}^{-1}$

22.- Resuelve la ecuación matricial $M\cdot X + N = P$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M\cdot X + N = P\ ;\quad M\cdot X = P - N\ ;\quad M\cdot M^{-1} = M^{-1}\cdot(P-N)$

$X = M^{-1}\cdot(P-N)$

$M^{-1} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-a = 1;\quad -b = 0;\quad -c = 0;\quad -d = 1$

$M^{-1} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(P-N) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

23. - Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^{-1}\cdot(2\cdot B + 3\cdot I)$

b) Determina la matriz X para que $X\cdot A = A + I$

$a)\ A^{-1}\cdot(2\cdot B + 3\cdot I)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\ ,\quad 2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\quad 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\qquad (2B + 3I) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$A^{-1}\cdot(2b + 3I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$

$b)\ X\cdot A = A + I\quad ;\quad X\cdot A\cdot A^{-1} = (A+I)\cdot A^{-1}\quad ;\quad X = (A+I)\cdot A^{-1}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\quad ;\quad (A+I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = (A+I)\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

24. - Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $X\cdot A\cdot B - X\cdot C = 2\cdot C$

$$X\cdot A\cdot B - X\cdot C = 2\cdot C\ ;\qquad X\cdot(A\cdot B - C) = 2\cdot C\ ;$$

$$X\cdot(A\cdot B - C)\cdot(A\cdot B - C)^{-1} = 2\cdot C\cdot(A\cdot B - C)^{-1}\ ;\qquad X = 2\cdot C\cdot(A\cdot B - C)^{-1}$$

$$(A\cdot B - C)^{-1} = \left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$2\cdot C\cdot(A\cdot B - C)^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\qquad X = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a)}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad \text{b)}\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{c)}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) $rango\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} - 2F_1 + F_2 = F'_2 \to rango\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} = 2;\ R(A) = 2$

b) $rango\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\ C_2 \leftrightarrow C_1;\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}\ F_3 - 2F_1 = F'_3 \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};R(A) = 2$

c) $rango\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ F_3 \leftrightarrow F_2\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - 1F_1 +$
$F_2\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad R(C) = 4$

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

$$\text{a)}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ a & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{b)}\begin{pmatrix}2a & 1 & 1\\ 2 & a & 1\\ 2 & 1 & a\end{pmatrix}$$

$a)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ a & 1 & 3 & 2\end{pmatrix};C_4 \leftrightarrow C_1 \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3 & a\end{pmatrix}\ \begin{matrix}F'_2 = -F_1 + F_2\\ F'_3 = -2F_1 + F_3\end{matrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & -3 & a-4\end{pmatrix}$

$$F''_3 = F'_1 + F'_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}; \; C_4 \leftrightarrow C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}$$

$si\ a \neq 4; rango = 3 \qquad si\ a = 4;\ rango = 2$

$$b) \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} C_3 \leftrightarrow C_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}; \; \begin{matrix} F'_2 = -F_1 + F_2 \\ F'_3 = -aF_1 + F_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 1-a^2 & 2-2a^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2\cdot a \\ 0 & 1-a & 2\cdot(1-a) \\ 0 & 1-a^2 & 2\cdot(1-a^2) \end{pmatrix}; \; C_2 - 2C_3 \;\; \rightarrow \;\; \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $a \neq 1, \quad rango = 2$

2. $a = 1, \quad rango = 1$

27.- Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3A - 2B = C \\ 2A + B = D \end{cases}; \; E'_2 = E_1 + 2E_2; \; \begin{cases} 3A - 2B = C \\ 7A = C + 2D \end{cases}; A = \frac{1}{7}(2D + C); \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3A - 2B = C \\ 2A + B = D \end{cases}; \; E'_2 = -2E_1 + 3E_2; \begin{cases} 3A - 2B = C \\ 7B = -2C + 3D \end{cases}; B = \frac{1}{7}\cdot(3D - 2C); \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

28. *Obtén las matrices X e Y para que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.*

a)

$$\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1º Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$\boxed{C \rightarrow}$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\boxed{D \rightarrow}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de x e y en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$-\begin{cases} 2x - 3y = C \\ x - y = D \end{cases} \rightarrow$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -3 y la primera la dejamos como está.

$$\rightarrow \begin{array}{rrcr} 2X & -3Y & = & C \\ -3X & +3Y & = & -3D \\ \hline & -X = C - 3D & & \end{array} \rightarrow$$ *cambiamos el signo*

$$X = -C + 3D$$

3º Se resuelve.

$\cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo que sustituir.

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{array}{rrcr} 2X & -3Y & = & C \\ -2X & +2Y & = & -2D \\ \hline & -Y & = & C-2D \end{array} \to Y = -C + 2D \to \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{Bmatrix} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

1º; Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$C \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $D \to \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de x e y en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$\begin{Bmatrix} X + Y = C \\ X - Y = D \end{Bmatrix} \to$$

En este caso se deja como está

$$\to \begin{array}{rrcr} X & +Y & = & C \\ X & -Y & = & D \\ \hline & 2X & = & C+D \end{array} \to$$

Despejamos

$$\to X = \frac{1}{2} \cdot (C + D)$$

3º Se resuelve.

$$\cdot X \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo.

Multiplicamos la segunda ecuación por -1 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{array}{rrcr} X & +Y & = & C \\ -X & +Y & = & -D \\ \hline & 2Y & = & C-D \end{array} \to Y = \frac{1}{2} \cdot (C - D) \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{Bmatrix} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

1º; Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$C \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $D \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de *x* e *y* en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$\begin{Bmatrix} 2X + Y = C \\ X + 2Y = D \end{Bmatrix} \to$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{Bmatrix} \begin{array}{c} 2X+Y=C \\ -2X-4Y=-2D \\ \hline -3Y=C-2D \end{array} \end{Bmatrix} \to \quad Y = \frac{1}{-3} \cdot (C - 2D)$$

3º Se resuelve.

$$\cdot Y \to \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/-3 & 1/-3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo.

Multiplicamos la segunda ecuación por -1/2 y la primera la dejamos como está

$$\to \frac{\begin{array}{c} 2X+Y=C \\ -\frac{1}{2}X-Y=-\frac{1}{2}C \end{array}}{\frac{3}{2}X=C-\frac{1}{2}D} \to X = \frac{2}{3}\cdot\left(C-\frac{1}{2}D\right) \to \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

29. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1º Lo que hay que hacer en estos ejercicios es dejar en 0 todos los números debajo de la diagonal principal. Sumando, multiplicando en (positivo o negativo) las sumas… En este caso tenemos que multiplicar la $F_1 \cdot (-3)$ y sumársela a F_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to (-3 \quad -6) + (3 \quad 4) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{F1} + \mathrm{F2} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to 2\cdot\mathrm{F1} + \mathrm{F3} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to$

$-\frac{1}{2}\mathrm{F2} + \mathrm{F3} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to -3\cdot\mathrm{F1} + \mathrm{F2} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to -4\cdot\mathrm{F1} + \mathrm{F3} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix} \to$

$-1\cdot\mathrm{F2} + \mathrm{F3} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to 2\cdot\mathrm{F3} + \mathrm{F2} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \mathrm{F3}\cdot 3 + \mathrm{F4} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to -\mathrm{F2} + \mathrm{F4} \to$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\-1&1&2&1\\0&3&2&0\end{pmatrix}\rightarrow -F2+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\-1&1&2&1\\0&1&-3&-5\end{pmatrix}\rightarrow -\frac{1}{2}\cdot F2+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\-1&1&2&1\\0&0&-\frac{11}{2}&-\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F1+F3\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\0&2&0&2\\0&0&-\frac{11}{2}&-\frac{15}{2}\end{pmatrix}\rightarrow -F2+F3\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\0&0&-5&-3\\0&0&-\frac{11}{2}&-\frac{15}{2}\end{pmatrix}\rightarrow -\frac{11}{10}\cdot F3+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\0&0&-5&-3\\0&0&0&-\frac{21}{5}\end{pmatrix}$$

30. 30. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales. La matriz $A=\begin{pmatrix}130&160\\120&80\\210&130\\100&60\end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix}0.2&0.25&0.4&0.75\\0.8&0.75&0.6&0.25\end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\text{ing.} & \text{al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}1º\\2º\\3º\\4º\end{array} & \begin{pmatrix}130&160\\120&80\\210&130\\100&60\end{pmatrix}\end{array}\qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc}1º&2º&3º&4º\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{red.}\\\text{nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}0,2&0,25&0,4&0,75\\0,8&0,75&0,6&0,25\end{pmatrix}\end{array}$$

a) *Para obtener esta matriz debemos hacer un producto de matrices la cual se multiplicaría la matriz B por la A:* ***$B_{2x4}\cdot A_{4x2}$***

$$\begin{pmatrix}(130\cdot 0{,}2)+(120\cdot 0{,}25)+(210\cdot 0{,}4)+(100\cdot 0{,}75) & (130\cdot 0{,}8)+(120\cdot 0{,}75)+(210\cdot 0{,}6)+(100\cdot 0{,}25)\\ (160\cdot 0{,}2)+(80\cdot 0{,}25)+(130\cdot 0{,}4)+(60\cdot 0{,}75) & (160\cdot 0{,}8)+(80\cdot 0{,}75)+(130\cdot 0{,}6)+(60\cdot 0{,}25)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{Red.}\\\text{Nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}215&345\\149&281\end{pmatrix}\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc}\text{red.} & \text{nor.}\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\end{array}$$
$$\begin{pmatrix}30 & 20\end{pmatrix}\cdot\begin{array}{c}\text{red.}\\\text{nor.}\end{array}\begin{pmatrix}215&345\\149&281\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13350 & 10090\end{pmatrix}$$

Respuesta: *La academia de idiomas gana dando ingles un total de 13350€ y en alemán 10090€.*

31.

31. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T & C & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} T \\ C \\ V \end{array}\begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix} = (8525)$$

Respuesta: El editor se gasta 8525€

32.

32. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 en la *L* y 30 en la *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ N \\ L \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 200 & 100 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{Taller} \\ \text{Admn.} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N & L & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 30 & 33 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) *Debemos hacer el producto de B y A.*

$$B \cdot A = \cdot \begin{pmatrix} 25 & 30 & 33 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 200 & 100 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (400 \cdot 25) + (200 \cdot 30) + (50 \cdot 33) & (300 \cdot 25) + (100 \cdot 30) + (30 \cdot 33) \\ (400 \cdot 1) + (200 \cdot 1{,}2) + (50 \cdot 1{,}3) & (300 \cdot 1) + (100 \cdot 1.2) + (30 \cdot 1.3) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Taller} \\ \text{Admn.} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 17650 & 11490 \\ 705 & 459 \end{pmatrix} \end{array}$$

33.

33. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$. Justifica el resultado.

Dada una matriz $A \in E_{mxn}$, $A = (a_{ij})$ y $\alpha \in K$, se define el producto del escalar α por la matriz A y se denota por $\alpha \cdot A$ a la matriz $B \in E_{mxn}$, cuyos elementos $b_{ij} = \alpha \cdot aij$ se obtienen a partir de los elementos de A multiplicando a todos ellos por el escalar α.

Justificamos el resultado con la siguiente formula;

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \quad \rightarrow \quad \forall \alpha \in K \land \forall A, B \in E_{mxn}$$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

34. Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto $A{\cdot}B$. Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

$Si\ \ A = A^t\ \ y\ B =\ \ B^t\ \ \ tenemos\ que\ \ \ A \cdot B =\ \ A^t\, B^t$

$Sin\ embargo\ \ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t\ \ \ que\ no\ tiene\ que\ ser\ igual\ a\ A^t \cdot\ B^t$

Contraejemplo:

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

A·B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1\cdot2+1\cdot3+3\cdot4 & 1\cdot3+1\cdot4+3\cdot5 & 1\cdot4+1\cdot5+3\cdot6 \\ 1\cdot2+2\cdot3+4\cdot4 & 1\cdot3+2\cdot4+4\cdot5 & 1\cdot4+2\cdot5+4\cdot6 \\ 3\cdot2+4\cdot3+5\cdot4 & 3\cdot3+4\cdot4+5\cdot5 & 3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 22 & 27 \\ 24 & 31 & 38 \\ 38 & 50 & 62 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 18 & 24 & 38 \\ 22 & 31 & 50 \\ 27 & 38 & 62 \end{pmatrix}$ luego A·B no es simétrica.

35. Sea la matriz M=$\begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r{\cdot}s \neq 1$.

Calcula M^2, M^3, M^4 y M^{2k} para $k \in$ N.

M^2=M·M= $\begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot0+rs & 0\cdot r \\ s0+0s & s\cdot r+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs & 0 \\ 0 & sr \end{pmatrix}$

M^3=M^2·M=$\begin{pmatrix} rs & 0 \\ 0 & sr \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs\cdot0+0\cdot s & rs\cdot r+0\cdot0 \\ 0\cdot0+sr\cdot s & 0\cdot r+sr\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r^2s \\ rs^2 & 0 \end{pmatrix}$

M^4=$M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & r^2s \\ rs^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot0+r^2s\cdot s & 0\cdot r+r^2s\cdot0 \\ rs^2\cdot0+0\cdot s & rs^2\cdot r+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2s^2 & 0 \\ 0 & r^2s^2 \end{pmatrix}$

M^{2K}=$\begin{pmatrix} r^ks^k & 0 \\ 0 & r^ks^k \end{pmatrix}$

36. Sea el conjunto de matrices definido por: M=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R\right\}$

a) Comprueba que si *A*, *B* ∈ M, también *A* + *B* ∈ M y *A*·*B* ∈ M

b) Encuentra todas las matrices *C* ∈ M, tales que $C^2 = C$.

a) Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R$ y B=$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}; c, d \in R$

A+B=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$, efectivamente ∈ M

A·B=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+bd & bd+ac \end{pmatrix}$, efectivamente ∈ M

b) Sea la matriz C=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

C·C=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+ba \\ ba+ab & b^2+a^2 \end{pmatrix}$

C^2 = C

$$\begin{cases} a^2+b^2=a \\ ab+ba=b \\ ab+ba=b \\ a^2+b^2=a \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2=a \\ 2ab=b \\ 2ab=b \\ a^2+b^2=a \end{cases} \quad \boldsymbol{Si\ b \neq 0} \quad \begin{cases} \frac{1}{4}+b^2=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Si\ b=0} \quad \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

Las matrices son: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

37. Se dice que una matriz cuadrada *A* es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de *A* e *I* es la matriz identidad. Si *A* y *B* son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si *A*·*B* es una matriz ortogonal.

A ortogonal $A \cdot A^t = I$ B ortogonal $B \cdot B^t = I$

$$¿A \cdot B \cdot (A \cdot B)^t = I?$$

$$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Sí, A·B es ortogonal

38. Considera las matrices *A*, *B* y *C* definidas como: $A_{3\times3}$

$A_{3x3} = (a_{ij} = i+j)$, $\forall\, i, j=1, 2, 3$.

$B_{2x3} = (b_{ij} = i-j)$, $\forall i=1, 2; j=1, 2, 3$.

$C_{3x2} = (c_{ij} = 2i+j)$, $\forall i=1, 2, 3; j=1, 2$.

a) Construye las tres matrices.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) Halla las traspuestas A^t, B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.

A^t=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ A es simétrica, no lo son B, B^t=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ni C, C^t=$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

c) Analiza cuáles de los productos *A·A, A·B, A·C, B·A, B·B, B·C, C·A, C·B* o *C·C* pueden realizarse.

A·A: sí se puede, son dos matrices de orden 3

A·B: no se puede calcular ya que una matriz es de 3x3 y la otra es de 2x3

A·C: sí se puede, ya que una matriz es de 3x3 y la otra es de 3x2

B·A: sí se puede, ya que una matriz es de 2x3 y la otra es de 3x3

B·B: No se puede calcular porque una matriz es de 2x3 y la otra matriz también es de 2x3

B·C: sí se puede, ya que una matriz es de 2x3 y la otra es de 3x2

C·A: no se puede, ya que una matriz es de 3x2 y la otra de 3x3

C·B: sí se puede, ya que una matriz es de 3x2 y la otra es de 2x3

C·C: No se puede calcular porque una matriz es de 3x2 y la otra matriz también es de 3x2

d) Determina el rango de las tres matrices *A*, *B* y *C*

A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2F1+F3 \rightarrow F3 \\ 2F2-3F1 \rightarrow F2 \end{cases}$ = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \{2F2-3F1$=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$-F2$=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ →R(A)=2

B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F1 \leftrightarrow F2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ →R(B)=2

C=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow C1 \leftrightarrow C2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3F1+2F2 \\ -2F1+F3 \end{cases} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ →R(C)=2

39.Dada la matriz: M=$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ En la que se verifica $x^2+y^2+z^2=1$.

a) Calcula M^2.

b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprueba que $P^2 = P$.

d) Comprueba que $P \times M = M \times P = O$.

a)

M^2 = M·M = $\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{pmatrix}$

b) $P = M^2 + I$ = $\begin{pmatrix} -y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ =

$$\begin{pmatrix} -y^2-z^2+1 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2+1 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2+1 \end{pmatrix}$$

como $x^2+y^2+z^2 = 1$, sustituimos y nos queda $P = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$

c) $P^2 = P$

$$P \cdot P = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^4 + x^2y^2 + x^2z^2 & x^3y + xy^3 + xyz^2 & x^3z + xy^2z + xz^3 \\ x^3y + xy^3 + xyz^2 & x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 & x^2yz + zy^3 + z^3y \\ x^2z + xy^2z + xz^3 & x^2yz + y^3z + y^2z^2 & x^2z^2 + y^2z^2 + z^4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2(x^2+y^2+z^2) & xy(x^2+y^2+z^2) & xz(x^2+y^2+z^2) \\ xy(x^2+y^2+z^2) & y^2(x^2+y^2+z^2) & yz(x^2+y^2+z^2) \\ xz(x^2+y^2+z^2) & zy(x^2+y^2+z^2) & z^2(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

$d)\quad P \times M = M \times P = 0$

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & zy & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & zy & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix} \quad ;B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

1. La dimensión de la matriz A es:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

La matriz A es 2x3 porque está compuesta por 2 filas y 3 columnas.

La respuesta correcta es c) 2x3

2. La matriz A es:

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix} \rightarrow Matriz\ rectangular$$

La respuesta correcta es d) rectangular

3. La suma de las matrices $A\ y\ B$ es:

$$A+B=\begin{pmatrix}5+1 & -2+3 & 0+5\\ 3+0 & 4+1 & -7-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 5\\ 3 & 5 & -9\end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es b) $A+B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 5\\ 3 & 5 & -9\end{pmatrix}$

4. El producto $3A$ es:

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -21\end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es c) $3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -21\end{pmatrix}$

5. Indica qué afirmación es cierta:

La respuesta correcta es b) Las matrices $A\ y\ B$ no se pueden multiplicar.

Ya que el número de columnas de la matriz A **no es igual** al número de filas de matriz B.

Dadas las matrices:

C = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; E = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; F = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6. La matriz identidad es la matriz: D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

·Explicación: Ya que la matriz identidad o unidad es la matriz escalar en la que los elementos no nulos son iguales a 1.

7. El producto de las matrices E y F es:

$$E \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 3+0+3 & 1+2+12 \\ 4+0+0 & 12+0+1 & 4+0+4 \\ 2+0+0 & 6+0+4 & 2+3+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$$

- Respuesta: d) E·F = $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

8. La matriz inversa de la matriz F es:

$$F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boldsymbol{F_2 + F_3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boldsymbol{-F_2 + F_3} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-F_3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-5F_3 + F_2} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-F_3 + F_1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-3F_2 + F_1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 11 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

La respuesta es: a) $F^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

9. La matriz traspuesta de la matriz F es:

F = $\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ Matriz traspuesta→ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ d) $F^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

·Explicación: Dada una matriz A de dimensiones m x n, se llama matriz traspuesta de A y se representa por A^t a la matriz que se obtiene al cambiar las filas de A por sus columnas, por lo que la matriz, será de dimensión n x m.

10. El rango de la matriz C es:

C = $\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} -F_2 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} -F_1 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- Respuesta: La matriz es de rango 1, es c) 1.