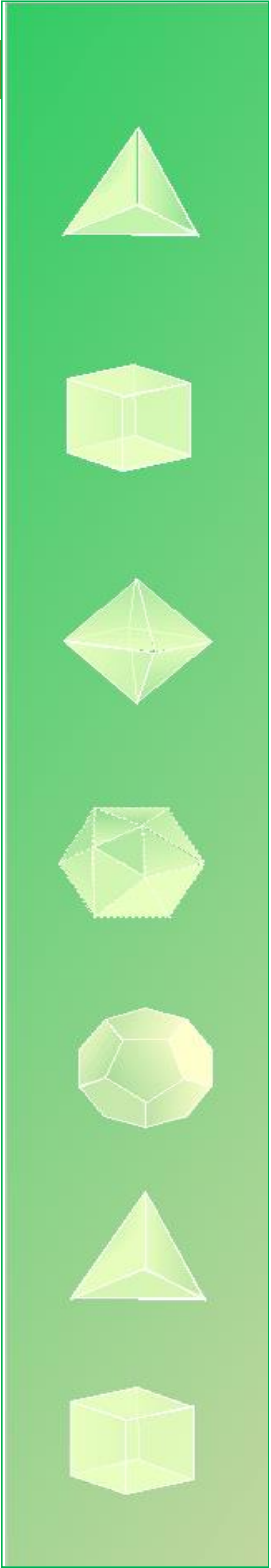


Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 9: Funciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $f(x)= x^3 - 3x^2 + 2$

Dominio: Dom f(x)= $\mathbb{R}$ (son todos los números reales)

Recorrido: $\mathbb{R}$ (todos los números reales)

Cortes con los ejes:

- Eje Y: x=0 Y=$0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$ (0, 2)
- Eje X: y=0   0=$x^3 - 3x^2 + 2$ (-0.7, 0)   (2.7, 0)   (1, 0)

Simetría:

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 + 2 = -x^3 - 3x^2 + 2 \neq f(x)$

$-f(-x) = -(-x^3 - 3x^2 + 2) = x^3 + 3x^2 - 2 \neq f(x)$

No tiene simetría.

Periodicidad:

No es periódica ya que es una función polinómica.

De modo que $f(x) \neq f(x+T) \forall x \epsilon \; Dom \; f$

Asíntotas:

Al ser una función polinómica no tiene asíntotas.

Crecimiento y Decrecimiento:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $3x^2 - 6x = 0$; $x(3x - 6) = 0$ x_1=0

$3x = 6; x = \frac{6}{3} = 2$; x_2=2

$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
$f'(-1 >)0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
crece	decrece	crece

0   2

Crece $(-\infty, 0) \cup (2 + \infty)$

Decrece (0,2)

Máximos y Mínimos:

$$x = 0 \quad hay \; máximo \; f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \, \max(0,2)$$

$$x = 2 \quad hay \; mínimo \; f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2 \, \min\,(2, -2)$$

Concavidad y Convexidad:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$; $6x - 6 = 0$; $6x = 6$; $x = 1$

$x = 0$	$x = 2$
$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Cóncava ∩	Convexa ∪

1

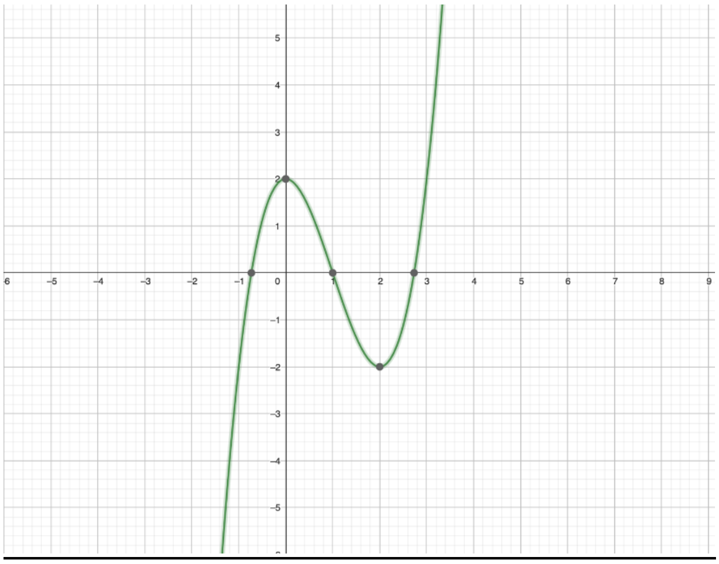
Puntos de inflexión:

$x = 1 \; P.I \; f(1) = 1^3 - 3 \cdot (1)^2 + 2 = 0$ (1, 0)

Continuidad:

Al ser una función polinómica su dominio son todos los números reales lo que significa que su continuidad seria de (-∞ , +∞). Por esa misma razón no tiene discontinuidad.

Representación gráfica



b) $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2x^3}$

Dominio: Al ser una función polinómica el dominio son todos los números reales, es decir, $\mathbb{R}$.

Recorrido: $\mathbb{R}$ (todos los números reales)

Puntos de corte:

- Eje Y $\quad x = 0 \quad y = 0^4 + 2 \cdot 0^3 \quad (0,0)$
- Eje X $\quad y = 0 \quad 0 = x^4 + 2x^3 \quad x1 = 0 \quad x2 = -2 \quad (0,0); \quad (-2,0)$

Simetría:

$f(-x) = (-x)^4 + (2(-x)^3) = x^4 - 2x^3 \neq f(x)$

$-f(-x) = -(x^4 - 2x^3) = (-x^4 + 2x^3) \neq f(x)$

No tiene simetrías

Periodicidad:

No es periódica porque es una función polinómica.

$$f(x) \neq f(x+T) \forall x \epsilon \ Dom\, f$$

Asíntotas:

Al ser una función polinómica no tiene asíntotas.

Continuidad:

Al ser el dominio todos los números reales podríamos decir que la continuidad va desde $(-\infty, +\infty)$.

Por esa misma razón no existe discontinuidad.

Crecimiento y Decrecimiento:

$f(x) = x^4 + 2x^3 \quad ; \quad f'(x) = 4x^3 + 6x^2$

$4x^3 + 6x^2 = 0 \quad ; \quad x^2(4x+6) = 0 \quad ; \quad x^2 = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad 4x + 6 = 0 \quad ; \quad x = -\frac{6}{4}$

$x = -2 > 0$	$x = -\frac{1}{2} > 0$	$x = 1 > 0$
Decrece	Crece	Crece

$-\frac{3}{2}$ $\qquad\qquad$ 0

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Decrece de $(-\infty, -\frac{3}{2})$ Crece $(-\frac{3}{2}, 0)$ $(0, +\infty)$

Máximos y Mínimos:

Mínimo en $(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$

Concavidad y Convexidad:

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$; $f''(x) = 12x^2 + 12x$

$12x^2 + 12x = 0$; $x(12x + 12) = 0$; $x1 = 0$; $12x = -12$;$x2 = -1$

$x = -2 > 0$	$x = -0.5 < 0$	$x = 1 > 0$
Convexa ∪	Cóncava ∩	Convexa ∪

-1 0

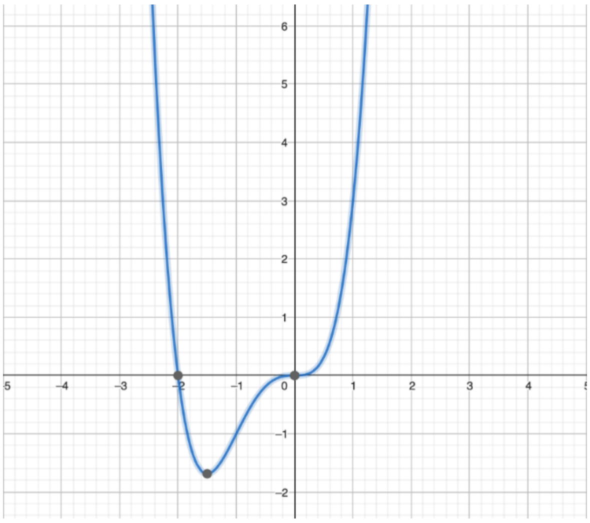
Punto de inflexión:

$x1 = 0; x2 = -1$

$P.I\ f(-1) = (-1^4) + 2 \cdot (-1)^3 = -1$ (-1, -1)

$P.I\ f(0) = 0^4 + 2 \cdot 0^3 = 0$ (0, 0)

Representación gráfica



d) f(x)= $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$

Dominio:

Al ser una ecuación racional el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador, al igualar el denominador a 0, obtenemos:

$$x = 0$$

$dom f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

Recorrido:

Todos los números reales.

Puntos de corte:

- Eje Y: $x = 0$ OY: $(0,0)$
- Eje X: $y = 0$; $0 = x - \frac{1}{x}$; $0 = x^2 - 1$; $x^2 = \sqrt{1} = \pm 1$;OX: $(1,0); (-1,0)$

Simetría:

$f(-x) = -x - \left(-\frac{1}{x}\right) = -x + \frac{1}{x} \neq f(x)$

$-f(-x) = -\left(-x + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} = f(x)$

Como podemos observar estamos en un caso de simetría impar.

Periodicidad:

No es periódica, ya que no es una función trigonométrica.

$$f(x) \neq f(x+T) \forall x \epsilon \quad Dom f$$

Asíntotas:

A. Verticales

$x - \frac{1}{x}$ $\qquad x = 0$(asíntota vertical)

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$

A. Horizontales

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$ no hay asíntota

El $Lim\ es\ \infty$ debido a que el grado del numerador es mayor que el del denominador.

A. Oblicua

$y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{1}{1} = 1 = m$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} - \frac{1\cdot x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} = 0 = n$$

$y = x$

Crecimiento y Decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{(2x\cdot x) - \left(1\cdot(x^2-1)\right)}{(x^2)} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$\frac{x^2+1}{x^2} = 0 \qquad x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = \sqrt{-1}$

De este modo, tenemos que coger el valor que anule el denominador.

$x = -2 > 0$	$x = 1 > 0$
Decrece	Crece

0

Máximos y Mínimos:

No tiene ni máximos ni mínimos.

Concavidad y Convexidad:

$$f''(x) = \frac{(2x\cdot x^2) - (2x)\cdot(x^2+1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$x = -2 > 0$	$x = 2 < 0$
Cóncava ∪	Convexa ∩

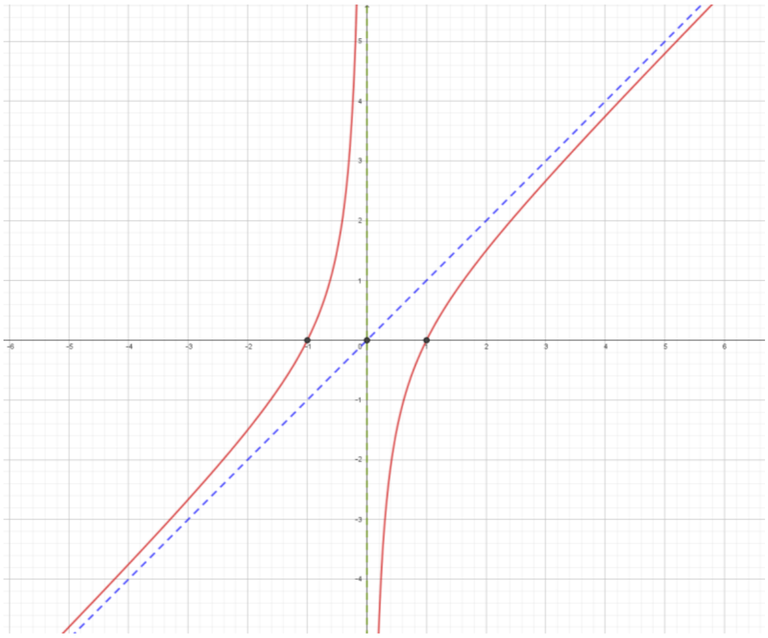
0

No tiene puntos de inflexión.

Continuidad:

La continuidad coincide con el dominio, es decir $\mathbb{R}-\{0\}$.

Representación gráfica



e) $\boldsymbol{f(x)=\frac{1+x}{1-x}}$

Dominio:

Al ser una ecuación racional el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador, al igualar el denominador a 0.

$1-x=0 \quad ; \quad x=1 \quad ; \quad Domf(x)=R-\{1\}$

Recorrido:

El recorrido son todos los números reales excepto el -1. $\quad Imf=R-\{-1\}$

Puntos de Corte:

- Eje Y: $x=0$ $\quad y=\frac{1+0}{1-0} \quad y=\frac{1}{1}=1 \quad$ OY: $(0,1)$
- Eje X: $y=0$ $\quad 0=\frac{1+x}{1-x} \quad 0=1+x \quad x=-1 \quad$ OX: $(-1,0)$

Simetría:

$f(-x)=\frac{(1-x)}{(1+x)}\neq f(x)$

$-f(-x)=-\frac{(1-x)}{(1+x)}\neq f(x)$

No tiene simetrías.

Periodicidad:

No es periódica, ya que no es una función trigonométrica.

$$f(x)\neq f(x+T)\forall x\epsilon\ Domf$$

Asíntotas:

Al ser una función racional sí puede tener asíntotas.

A. Vertical

$1 - x = 0$

$x = 1$ (asíntota vertical)

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$ $\lim_{x \to 1^+} \frac{1+x}{1-x} = -\infty$

A. Horizontal

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$y = -1$ (asíntota horizontal)

Crecimiento y Decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

No se hace 0, De este modo tenemos que coger el valor que anula el denominador, es decir, 1.

$x = 0 > 0$	X=2> 0
Crece	Crece

1

Crece: $(-\infty, 1)$ $(1, +\infty)$

Máximos y Mínimos:

No tiene ya que siempre crece.

Concavidad y Convexidad:

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (1-x)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot (1-x) \cdot 2}{(1-x)^4} = \frac{4 \cdot (1-x)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3} \neq 0$$

$x = 0 > 0$	$x = 2 < 0$
Convexa ∪	Cóncava ∩

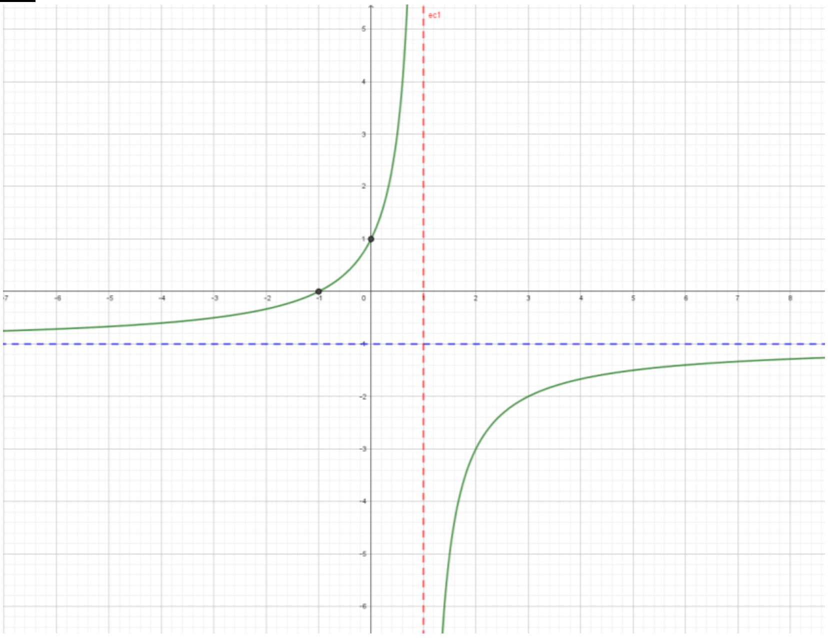
1

Continuidad:

Es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Es discontinua en x= 1

Representación gráfica



g) f(x)=$\frac{0,5x^3}{x^2-4}$

Paso 1: Dominio

Dom f(x)= x∊**R**- {2,-2}

x<-2 **o** -2<x<2 **o** x>2

(-∞, -2) ∪ **(-2,2)** ∪ **(2,** ∞)

Paso 2: Puntos de corte

-Cuando x=0; y=0

y=$\frac{0,5\cdot 0^3}{0^2-4}$=0

-Cuando y=0; x=0

0=$\frac{0,5x^3}{x^2-4}$; x=$\sqrt[3]{\frac{0}{0,5}}$=0

Paso 3: simetría

f(x)=f(-x) par;

f(-x) = $\frac{0,5(-x)^3}{(-x)^2-4}$ no es igual que f(x)= $\frac{0,5x^3}{x^2-4}$

-f(x)= f(-x) impar

-f(x) = $\frac{-0,5x^3}{x^2-4}$ es igual que f(-x) = $\frac{0,5(-x)^3}{(-x)^2-4}$

Por tanto, presenta una simetría impar

Paso 4: Asíntotas

Asíntotas verticales: $\frac{0,5x^3}{x^2-4}$: x=-2, x=2

; x^2-4=0 entonces x=-2, x=2

Asíntotas horizontales: $\frac{0,5x^3}{x^2-4}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{0,5x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0,5}{\frac{1}{x}}=\infty$

Asíntota oblicua: $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{0,5x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{0,5x^3}{x^3-4x}=0,5$ m = 0,5

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{0,5x^3}{x^2-4}-0,5x\right)=0$ y = 0,5x

Paso 5: Crecimiento y decrecimiento

Creciente: $(-\infty, -2\sqrt{3})$ y $(2\sqrt{3}, \infty)$

decreciente: $(-2\sqrt{3}, -2)$, (-2,-1), (1,2) y $(2, 2\sqrt{3})$

paso 6: Máximos y mínimos

$f'(x)=\frac{0,5(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^2}$; $0=\frac{0,5(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^2}$; x = 0 ; $x=2\sqrt{3}$ y $x=-2\sqrt{3}$,

Max: $(-2\sqrt{3}, -2,6)$

Min: $(2\sqrt{3}, 2,6)$

Paso 7: Concavidad y convexidad

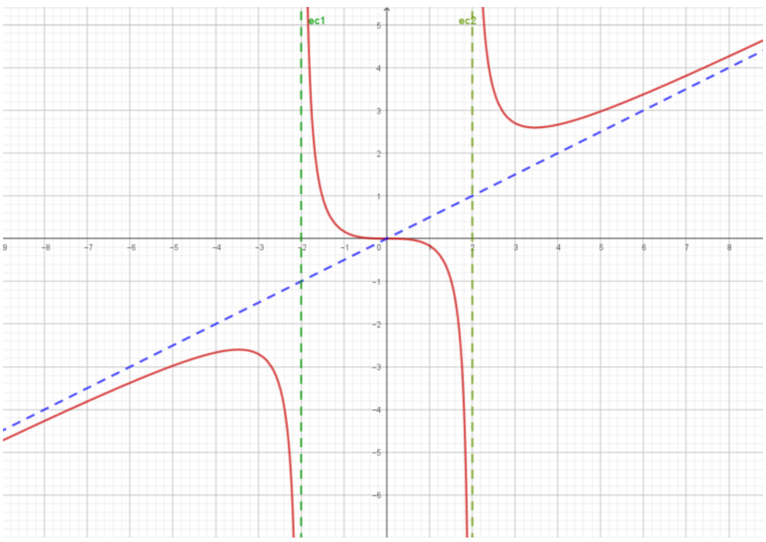
Cóncava: $(-\infty, 2)$ y (0,2)

Convexa: $(2,\infty)$ y (-2,0)

Paso 8: Puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$; $0=\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$; x=0

Punto de inflexión (0,0)



h) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}}$

1. Dom R - {-2, 2}

2. Cortes eje x; f(x)=0; 0=$\frac{x^2-1}{x^2-4}$

x=-1 y x= 1   (1, 0)   (-1, 0)

3. Cortes con el eje y; f(0)=$\frac{0-1}{0-4}$ (0, $\frac{1}{4}$)

4. Asíntotas verticales; haciendo los límites $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ y $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ x = -2 ; x = 2.

5. Asíntotas horizontales; haciendo límites $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$

y=1

6. Asíntotas oblicuas; No tiene.

7. Extremos relativos; f(x)=$\frac{x^2-1}{x^2-4}$; derivando;   f'(x)=$-\frac{6x}{(x^2-4)^2}$;   f'(x)=0;

$-\frac{6x}{(x^2-4)^2} = 0$; x = 0

Máximo relativo es (0, $\frac{1}{4}$)

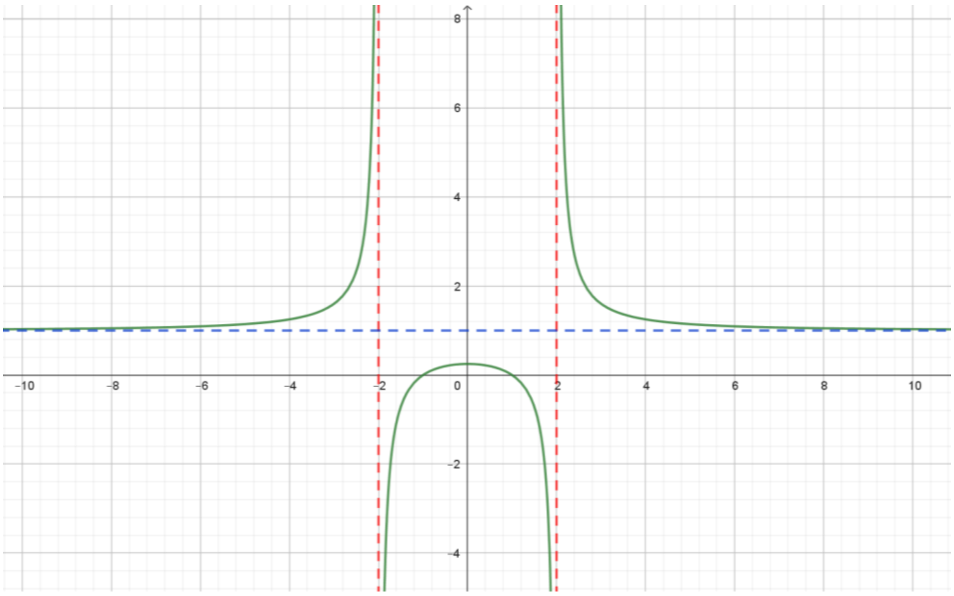
8. Puntos de inflexión; No tiene

9. Par

10. Es simétrica respecto al eje y.

No simétrico respecto al origen ni al eje x.

11. Función Racional



i) $\boldsymbol{f(x) = x^2 e^x}$

- <u>Tipo de función</u>: producto de polinómica por exponencial.

- <u>Dominio</u>: Es un polinomio por una exponencial, por tanto, Dom $f(x) = \mathrm{R}$

- <u>Continuidad</u>: es continua en todo R

- <u>Periodicidad</u>: No es periódica

- <u>Simetría:</u> x^2e^x no tiene simetría, luego *f(x) ni* par ni impar:

$f(-x) = (-x)^2\, e^{-x}\,;\;\; f(x) \neq f(-x) \quad ; \quad f(x) \neq -f(-x)$

- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene, porque x^2e^x es continua en todo R.
  - Horizontales: analizamos los límites en el infinito:

    $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,e^x = \infty \cdot 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\,e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$, como el orden de la exponencial es mayor que el del polinomio, el límite es 0

    $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$
  - Oblicuas: Como tiene horizontales, no tiene oblicuas.

- Corte con los ejes:
  - Eje X: hallamos las raíces de la función: $f(x) = x^2e^x = 0$, $x = 0$, corta al eje X en el punto (0,0)
  - Eje Y: sustituimos x por 0: $x = 0$, $0^2e^0 = 0$, corta al eje Y en (0,0)

- Regiones de existencia: Es positiva (+) en todo R.

- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = x^2e^x \to f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

Igualamos a 0:

$2xe^x + x^2e^x = 0 \to x = 0, x = -2$, $(2x + x^2)e^x = 0$ definimos lo intervalos (-∞,-2), (-2,0) y (0,∞)

Intervalo	(-∞,-2)	(-2,0)	(0,∞)
$f'(x_0)$	$f'(-3) = 0{,}1 > 0$	$f'(-1) = -0{,}3 < 0$	$f'(1) = 8{,}1 > 0$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

- Máximos y mínimos: A partir de la tabla anterior deducimos que la función tiene un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$

Comprobamos con la segunda derivada:

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x \to f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$

Entonces: $f''(-2) = -0{,}2 < 0$, se confirma el máximo en $x = -2$

$f''(0) = 2 > 0$, se confirma el mínimo en $x = 0$

- Curvatura: Igualamos a cero la segunda derivada

$f''(x) = 0; 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = 0, ; (2 + 4x + x^2)e^x = 0\;\; x = -2 + \sqrt{2}, x = -2 - \sqrt{2}$

Entonces:

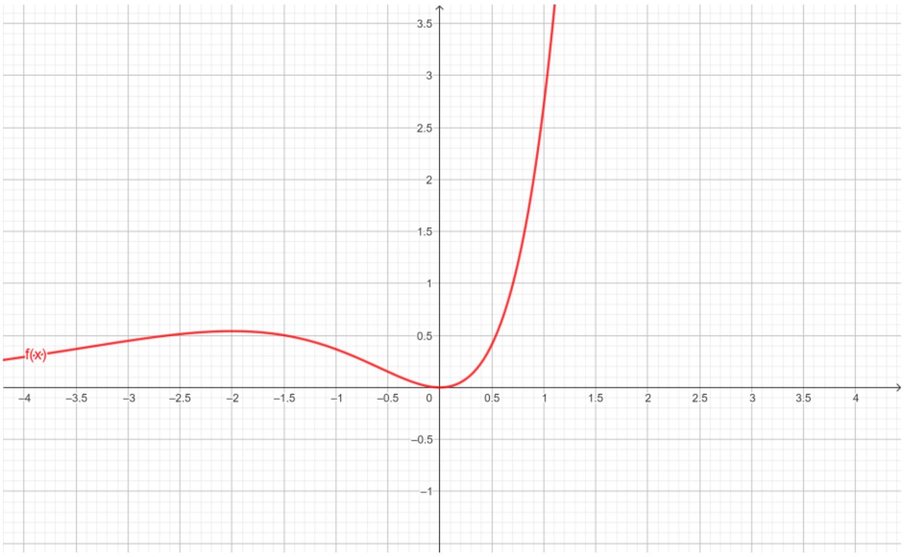
Intervalo	$(-\infty, -2-\sqrt{2})$	$(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$	$(-2+\sqrt{2}, \infty)$
$f''(x_0)$	$f''(-10) > 0$	$f''(-2) < 0$	$f''(2) > 0$

$f(x)$	Cóncava ∩	Convexa U	Cóncava ∩

- Puntos de inflexión: hay dos puntos de inflexión
  - $f\left(-2+\sqrt{2}\right)=0{,}191 \rightarrow \left(-2+\sqrt{2},\ 0.191\right)$
  - $f\left(-2-\sqrt{2}\right)=0{,}38 \rightarrow \left(-2-\sqrt{2},\ 0.38\right)$

- Recorrido o imagen: Im$f(x)=[0,\infty)$, ya que es positiva en todo R y corta al eje Y en (0,0)

Con toda la información recopilada podemos representar $f(x)$:



j) f(x)=$\frac{e^x}{x}$

Paso 1: Dominio

Dom f(x)= x ϵ **R**-{0}

Paso 2: Puntos de corte

-Cuando x=0

; $\frac{e^0}{0}$= no existe

-Cuando y=0;

0=$\frac{e^x}{x}$; tomando logaritmos $\log 0$=x que no existe

No hay puntos de intersección

Paso 3: simetría

f(x)=f(-x) par;

f(-x) = $\frac{e^{-x}}{-x}$ no es igual f(x)= $\frac{e^x}{x}$

-f(x)= f(-x) impar

-f(x)= $\frac{-e^x}{x}$ no es igual que f(-x) = $\frac{e^{-x}}{-x}$

No hay simetría

Paso 4: Asíntotas

Asíntotas verticales; x=0

Asíntotas horizontales:

; $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ y = 0

Paso 5: Crecimiento y decrecimiento

Creciente: (1,∞)

decreciente: (-1,0) y (0,1)

constante: (-∞, $1)$

paso 6: Máximos y mínimos

Max: no hay

Min: (1,e)

Paso 7: Concavidad y convexidad

Cóncava:

Convexa: (0,∞)

Paso 8: Puntos de inflexión

f''(x)=$\frac{e^x(x^2-2(x-1))}{x^3}$;$0 = \frac{e^x(x^2-2(x-1))}{x^3}$; x= no existe

por tanto, no hay punto de inflexión

k) $\boldsymbol{f(x) = x^2e^{-x}}$

1. Dom R
2. Cortes eje x; f(x)=0

x^2e^{-x}=0; x=0 (0, 0)

3.Corte con el eje y; f(0)=0

4.Asíntotas horizontales usando límites; $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$; y = 0 ; $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty$;

5. Asíntotas verticales; No tiene.
6. Asíntotas oblicuas; No tiene.
7. Simetrías.

f(x)=f(-x) par;

f(-x) = $\frac{(-x)^2}{e^{-x}}$ no es igual que f(x)= $\frac{x^2}{e^x}$

-f(x)= f(-x) impar

-f(x)= $\frac{-x^2}{e^x}$ no es igual que f(-x) = $\frac{(-x)^2}{e^{-x}}$

No hay simetría

8.Extremos relativos;

Derivando; f´(x)= $2xe^{-x} - x^2e^{-x}$; f´(0);

$2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0$; $(2x - x^2)e^{-x} = 0$ x=0 y x=2

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de f':	neg. (dec.)	pos. (crec.)	neg. (dec.)

f(0)=0 y f(2)=$\frac{4}{e^2}$

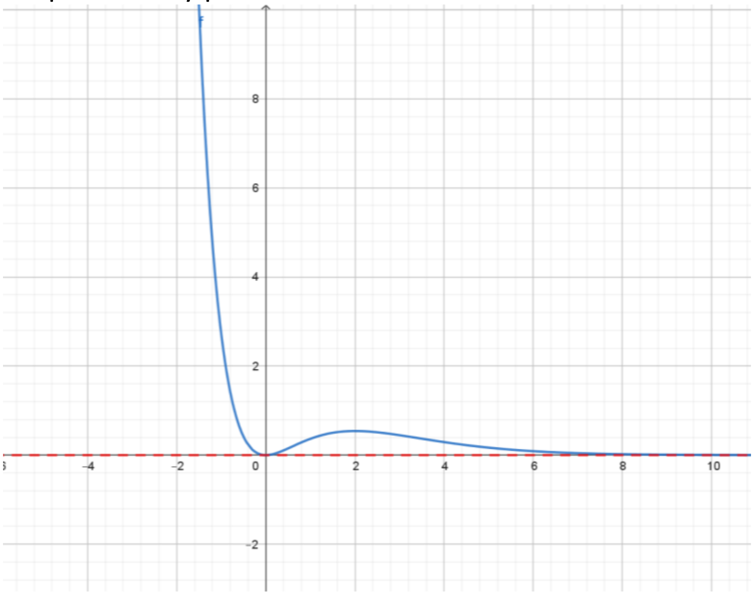
Mínimo relativo es (0, 0), y el máximo relativo es(2, $\frac{4}{e^2}$)

9.Puntos de inflexión

Derivando; f`(x)= $(2x - x^2)e^{-x}$; f``(x)= $(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$; resolvemos f``(x)=0

x=2-$\sqrt{2}$ x=2+$\sqrt{2}$ (2+$\sqrt{2}$, $\frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$) y (2-$\sqrt{2}$, $\frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$)

10.Función producto de exponencial y polinómica.



l) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

- <u>Tipo de función</u>: irracional

- <u>Dominio</u>: Al tener índice par, el radicando ha de ser mayor o igual que cero:

$x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow x \leq -1, x \geq 1$, por lo tanto $f(x)$ no existe en el intervalo (-1,1)

Luego Dom$f(x) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

- <u>Cortes con los ejes</u>:

  - Eje X: hallamos las raíces de la función: $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} = 0$, $x = \pm 1$, luego los puntos de corte con el eje X son $(-1,0), (1,0)$.
  - Eje Y: igualamos x a cero: $x = 0$ no pertenece al dominio, por lo que $f(x)$ no corta en el eje Y

- <u>Simetría</u>: $f(x)$ es par, ya que se cumple:

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} = f(x)$, par.

- <u>Regiones de existencia</u>: Como $f(x)$ es una raíz par, es siempre positiva en su dominio.

- <u>Asíntotas</u>:

  - Verticales: No tiene, ya que $x^2 - 1$ es continua en todo R
  - Horizontales: analizamos los límites en el infinito:

    $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales
  - Oblicuas:

    $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x}$, +1 si $x \to \infty$ y -1 si $x \to -\infty$

    $n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\sqrt{x^2 - 1} \pm x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} \pm x)(\sqrt{x^2-1} \pm x)}{(\sqrt{x^2-1} \pm x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x^2-1} \pm x)} = 0$;

    Entonces, hay dos asíntotas oblicuas:

    $y = x$ cuando $x \to \infty$ e $y = -x$ cuando $x \to -\infty$

- <u>Monotonía</u>: Hallamos la derivada:

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, y la anulamos: $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 0$, y obtenemos $x = 0$ que no pertenece al dominio, entonces:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(1, \infty)$
$f'(x_0)$	$f'(-2) = -1{,}1 < 0$	$f'(2) = 1{,}1 > 0$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

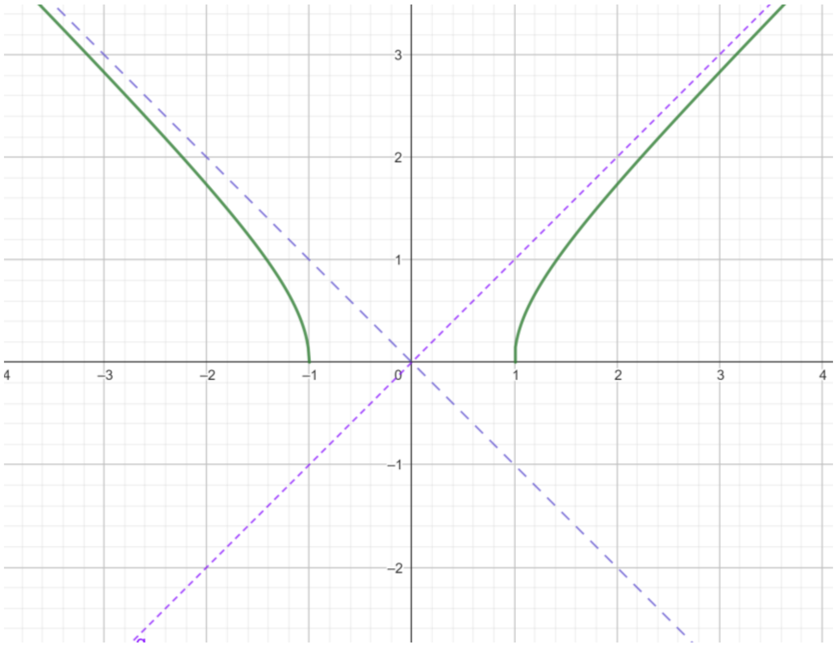
- <u>Máximos y mínimos</u>: Como la derivada no se anula en el dominio, no ha máximos ni mínimos relativos.

- <u>Curvatura</u>: Hallamos la segunda derivada:

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}$, que tampoco se anula en el dominio de la función, y es negativa, ya que el signo de la raíz cuadrada es positivo. Por tanto, $f(x)$ es cóncava

- Puntos de inflexión: Como la segunda derivada no se anula, no hay puntos de inflexión

- Recorrido o imagen: Im$f(x) = (0, \infty)$



6. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál sería ese beneficio?

Sea x el número de helados vendidos, precio de los helados 50 + x

1. Como hay que calcular el beneficio diario que obtiene el heladero, B(x), que sería igual al dinero ganado menos el coste que supone:
   ingresos= (200-2x)(50+x); coste= 40(200-2x), por lo que la función sería:
   $$B(x) = (200 - 2x)(50 + x) - 40(200 - 2x) = (200 - 2x)(10 + x)$$
   $$B'(x) = (-2)(10 + x) + (200 - 2x) = 180 - 4x \quad , \; 180 - 4x = 0 \, , \; x = 45$$

Entonces el precio de venta en el que el beneficio diario es máximo es: 50+45=95 céntimos

2. Calculamos el beneficio para x=45
   $$B(45) = (200 - 90)(10 + 45) = 115(45) = 6050 \; céntimos$$
   $$= 60 \; euros \; con \; 50 \; céntimos \; es \; el \; beneficio \; diario \; máximo$$

7. La producción de cierta hortaliza en un invernadero (Q(x), en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión $Q(x) = (x + 1)^2\,(32 - x)$
a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima para mantener en el invernadero.
b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

1) Se lleva a cabo la optimización de la función para calcular la temperatura óptima. Para eso primero se hace la derivada de la función y después se iguala a 0 para sacar soluciones.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$Q'(x) = 2(x + 1)(32 - x) - (x + 1)^2 = (x + 1)(64 - 2x - x - 1) =$
$= (x + 1)(63 - 3x);\ (x + 1)(63 - 3x) = 0;\quad x_1 = -1,\ \ x_2 = 21$
La temperatura óptima es 21°C, ya que es el máximo absoluto.

2) Sustituimos la x por 21 para calcular la producción de hortaliza (en kg) que se obtendría.

$Q(21) = 22^2 \cdot 11 = 4 \cdot 11^3 = 5324kg$ se obtendrían.

8. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Sea x el número de árboles nuevos

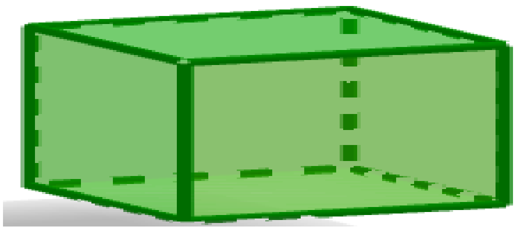
1) La producción de los árboles en función de x sería la siguiente:
2) $P(24 + x) = (600 - 15x)(24 + x);\ P(x) = \big(600 - 15(x - 24)\big)x =$
   $= (960 - 15x)x;\ P(x) = 960x - 15x^2$
3) Se hace la derivada de la función y se iguala a 0 para calcular el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima.

$P'(x) = 960 - 30x = 0;\ \ x = 32$ árboles

4) Calculamos la función cuando x= 32 para averiguar la producción máxima.

$P(32) = 960 \times 32 - 1532^2 = 32(960 - 15 \times 32) = 32 \times 480 = 15360$ frutos

9. Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?



x = largo = profundo / y = altura

V = 4000 litros = *4000dm³*

Volumen: 4000 = $x^2 \cdot y$ → y = $\frac{4000}{x^2}$

Superficie = 4xy + x^2 = 4x · $\frac{4000}{x^2} + x^2$

f (x)= $\frac{16000}{x} + x^2 = \frac{16000 + x^3}{x}$

f' (x) = $\frac{3x^2 \cdot x - 16000 - x^3}{x^2} = \frac{2x^3 - 16000}{x^2}$; $\frac{2x^3 - 16000}{x^2} = 0$; $2x^3$ = 16000; x = $\sqrt[3]{8000}$; x = 20

f'' (x) = $\frac{6x^2 \cdot x^2 - 2x(2x^3 - 16000)}{x^4} = \frac{2x^4 + 32000x}{x^4} = \frac{2x^3 + 32000}{x^3}$

$f''(20) = \frac{2 \cdot 20^3 + 32000}{20^3} > 0$ → *Por lo tanto tenemos un mínimo para x = 20*

y = $\frac{4000}{20^2}$ = 10 Lado de la base: 20 dm, altura: 10 dm

10. Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro. Calcula las medidas que debe tener la caja y cuál será su volumen.

x = ancho / 2x = largo / y = altura

2x+x+y = 1 → y = 1-3x

Volumen/V = 2x · x · y = $2x^2$ · y = $2x^2(1-3x)$

f (x) = $2x^2$ - $6x^3$

f' (x) = 4x - $18x^2$ → 4x - $18x^2$ = 0 → x$(4-18x)$ → $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{9}$

Tomamos el segundo resultado ya que 0 no es válido (las medidas de la caja no pueden ser 0).

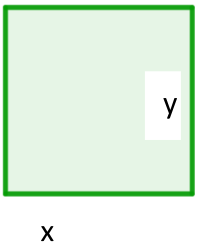
f''(x) = 4 – 36x $f''\left(\frac{2}{9}\right)$ = 4 – 36 · $\frac{2}{9}$ < 0 → *Hay un máximo para x =* $\frac{2}{9}$

y = 1 – 3 · $\frac{2}{9}$ = $\frac{1}{3}$ V = 2 · $\frac{2}{9}$ · $\frac{2}{9}$ · $\frac{1}{3}$ = $\frac{8}{243}$ Ancho: $\frac{2}{9}$ dm, Largo: $\frac{4}{9}$ dm, Altura: $\frac{1}{3}$ dm, Volumen: $\frac{8}{243}$ dm^3

11. Se desea construir el marco de una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,50 euros y el del tramo vertical 3 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



x = metros del tramo horizontal / y = metros del tramo vertical

precio metro tramo horizontal = 2,50 / precio metro tramo vertical = 3

Superficie: 6 = x · y → y = $\frac{6}{x}$

Perímetro = 2x + 2y = 2x + 2 · $\frac{6}{x}$

f (x) = 2x + $\frac{12}{x}$ = $\frac{2x^2+12}{x}$

f' (x) = $\frac{4x \cdot x-1(2x^2+12)}{x^2}$ = $\frac{4x^2-2x^2-12}{x^2}$ = $\frac{2x^2-12}{x^2}$ → $\frac{2x^2-12}{x^2}$ = 0 → $2x^2 - 12 = 0$ → $2x^2 = 12$ → $x_1 = +\sqrt{6}$ $x_2 = -\sqrt{6}$

La opción negativa no es válida

f''(x) = $\frac{4x \cdot x^2-2x(2x^2-12)}{x^4}$ = $\frac{4x^3-4x^3+24x}{x^4}$ = $\frac{24x}{x^4}$ = $\frac{24}{x^3}$; $f''(\sqrt{6})$ = $\frac{24}{\sqrt{6}^3}$ = $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ > 0 ; Hay un mínimo para x = $\sqrt{6}$

y = $\frac{6}{\sqrt{6}}$ = $\sqrt{6}$ Tramo horizontal = 2x = $2\sqrt{6}$ Tramo vertical = 2y = $2\sqrt{6}$

Metros del tramo horizontal (largo) = $\sqrt{6}$ m Metros tramo vertical (alto) = $\sqrt{6}\, m$

Coste mínimo = 2,5$(2\sqrt{6}) + 3(2\sqrt{6})$ = $11\sqrt{6}$ euros

12. Se quiere construir un recipiente cónico cuya generatriz mida 10 cm y que tenga capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

Como deseamos que tenga capacidad máxima, debemos optimizar el volumen,

$V(r,h)=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ con la condición $r^2+h^2=10^2$, $r^2=10^2-h^2$ podemos prescindir de $\frac{1}{3}$

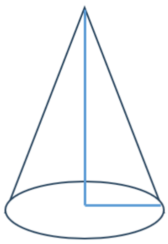
Sustituyendo en la fórmula del volumen obtenemos $f(h)=\pi(10^2-h^2)h=\pi(100h-h^3)$

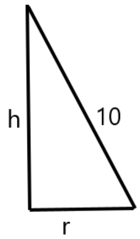
Derivamos $f'(h)=\pi(100-3h^2)$ $\pi(100-3h^2)=0$ $h^2=\frac{100}{3}$; $h=\mp\frac{10}{\sqrt{3}}$

Descartando la solución negativa, $h=\frac{10}{\sqrt{3}}$

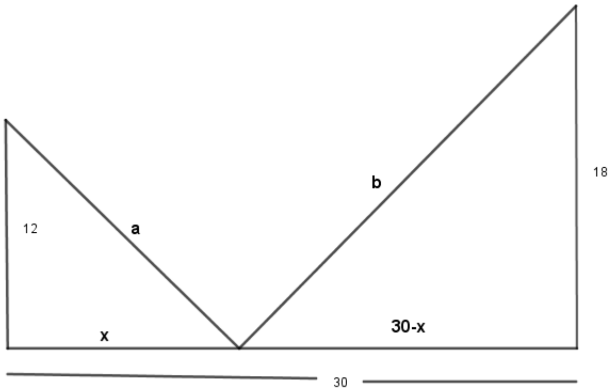
Derivando de nuevo $f''(h)=\pi(-6h)$ $f''\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)=\pi\left(-6\frac{10}{\sqrt{3}}\right)<0$ por tanto, es un máximo,

sustituimos en $r^2=10^2-h^2$ $r^2=100-\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{200}{3}$ $r=\sqrt{\frac{200}{3}}=10\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$cm





13. Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



Queremos que sea mínima la suma: a + b ; $a=\sqrt{12^2+x^2}$; $b=\sqrt{18^2+(30-x)^2}$

Tenemos $f(x)=\sqrt{12^2+x^2}+\sqrt{18^2+(30-x)^2}$

$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{12^2+x^2}}-\frac{2(30-x)}{2\sqrt{18^2+(30-x)^2}}=\frac{x}{\sqrt{12^2+x^2}}-\frac{(30-x)}{\sqrt{18^2+(30-x)^2}}$ Igualamos a 0

$\frac{x\cdot\sqrt{18^2+(30-x)^2}-(30-x)\cdot\sqrt{12^2+x^2}}{\sqrt{12^2+x^2}\cdot\sqrt{18^2+(30-x)^2}}=0$ tomamos sólo el numerador

$x\cdot\sqrt{18^2+(30-x)^2}-(30-x)\cdot\sqrt{12^2+x^2}=0$

$x\cdot\sqrt{18^2+(30-x)^2}=(30-x)\cdot\sqrt{12^2+x^2}$ elevamos al cuadrado los dos miembros

$x^2 \cdot (18^2 + (30-x)^2) = (30-x)^2 \cdot (12^2 + x^2)$ simplificando, nos queda

$x^2 \cdot 18^2 = (30-x)^2 \cdot 12^2$; $324x^2 = 144x^2 - 8640x + 900 \cdot 144$

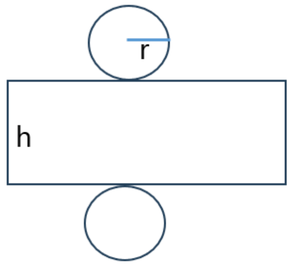
$180x^2 + 8640x - 900 \cdot 144 = 0$ dividiendo entre 180, $x^2 + 48x - 720 = 0$

Obtenemos x = 12 y x = -60, descartamos la negativa

Estudiamos crecimiento y decrecimiento en (0, 12) y (12, 30)

f'(1) < 0 y f'(20) > 0 , por tanto en x = 12 hay un mínimo.

14. Determina el radio de la base y la altura de un cilindro de 54 cm^2 de área total para que su volumen sea máximo.



Como deseamos que tenga capacidad máxima, debemos optimizar el volumen,

$V(r,h) = \pi r^2 h$ con la condición $2\pi r^2 + 2\pi r h = 54$

Despejamos h , $h = \frac{54-2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{27-\pi r^2}{\pi r}$ sustituimos en la fórmula del volumen y obtenemos

$f(h) = \pi r^2 \frac{27-\pi r^2}{\pi r} = r \cdot (27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$ derivamos

$f'(\mathrm{r}) = 27 - 3\pi \mathrm{r}^2$; $27 - 3\pi \mathrm{r}^2 = 0$; $\mathrm{r} = \mp\sqrt{\frac{27}{3\pi}} = \mp\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ descartamos la solución negativa

$f''(\mathrm{r}) = -6\pi \mathrm{r}$ $f''(\frac{3}{\sqrt{\pi}}) = -6\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}} < 0$ por tanto, es un máximo para

$\mathbf{r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,cm}$ y $\mathbf{h = \frac{27-\pi\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\,cm}$

15. En la oficina central de Correos de cierto país están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son las siguientes:

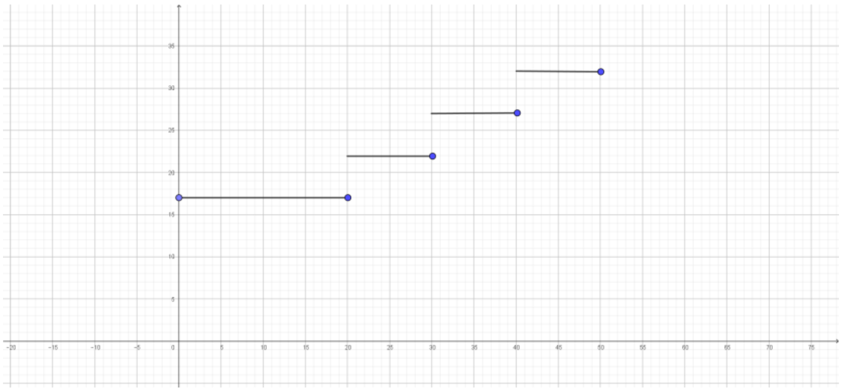
- **Cartas hasta 20 gramos de peso: 17 céntimos de euro.**
- **Por cada 10 g o fracción de exceso de peso hay que añadir 5 céntimos más.**

a) Escribe la fórmula de la función y = f (x) (donde x representa el peso de cada carta en gramos e y el precio que se tiene que pagar para enviarla), hasta 50 g.

b) Representa gráficamente la función e indica en qué puntos de su dominio es discontinua y por qué.

a) Si x ≤ 20 y = 17 ; si 20 < x ≤ 30 y = 22 ; si 30 < x ≤ 40 y = 27 ; si 40 < x ≤ 50 y = 32

$$f(x)=\begin{cases}17 & si\ x\le 20\\ 22 & si\ 20<x\le 30\\ 27 & si\ 30<x\le 40\\ 32 & si\ 40<x\le 50\end{cases}$$



Se trata de una función escalonada y por tanto, es discontinua en los extremos de los intervalos:

x = 20 ; x = 30 y x = 40

16. El coste total de producción de x unidades de un producto es $C(x)=\frac{1}{3}x^2+6x+192$. Se define la función coste medio por unidad como: $C_m(x)=\frac{C(x)}{x}$.

¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

$$C_m(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{\frac{1}{3}x^2+6x+192}{x}=\frac{1}{3}x+6+\frac{192}{x}\quad ;\quad C'_m(x)=\frac{1}{3}-\frac{192}{x^2}\quad ;\quad \frac{1}{3}-\frac{192}{x^2}=0$$

x = 24 y x = -24 como $C''_m(x)=\frac{576}{x^3}$ $C''_m(24)=\frac{576}{24^3}>0$

luego el coste es mínimo para x = 24

17. – Una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tienen en funcionamiento (n) de acuerdo con la expresión: $B(n)=-8n^3+60n^2-96n$ Determina razonadamente:

a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

a) $B(n)=-8n^3+60n^2-96n$

$B'(n)=-24n^2+120n-96$; $-24n^2+120n-96=0$ resolviendo, n= 1 y 4

$$(-\infty,1)\qquad(1,4)\qquad(4,+\infty)$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$B'(-2) = -24 \cdot (-2)^2 + 120 \cdot (-2) - 96 = \ -432,$ decreciente
$B'(2) = -24 \cdot 2^2 + 120 \cdot 2 - 96 = 48,$ creciente
$B'(6) = -24 \cdot 6^2 + 120 \cdot 6 - 96 = -240,$ decreciente
n=1 es un mínimo y n=4 es un máximo.
La franquicia ha de tener 4 tiendas para maximizar sus beneficios.

b) $B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4$
$B(4) = -512 + 960 - 384 = 64$
Se multiplica por 1000 porque los beneficios están en miles de euros

$$64 \cdot 1000 = 64000$$

El beneficio máximo será de 64000 euros.

18.- Sea la función: $y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1} = 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}$

a) Indica su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Realiza la representación gráfica de la misma.

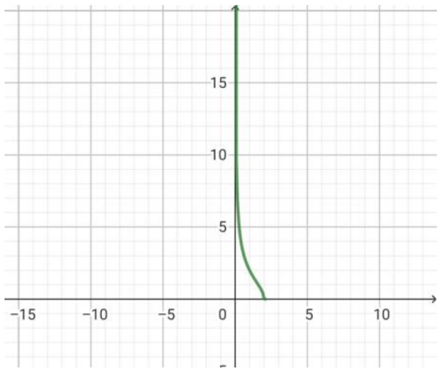
a)

- Dominio: $(0, 2]$
  2 – x = 0 , x = 2 ; x = 0

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo:	neg.	Pos.	neg.

- Monotonía:
  Crecimiento: no tiene
  Decrecimiento: $(0, 2)$
- No presenta ningún punto de inflexión.
- Asíntotas: x = 0.

b)



19. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 + 4 & si\ x < -2 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq -2 \end{cases}$

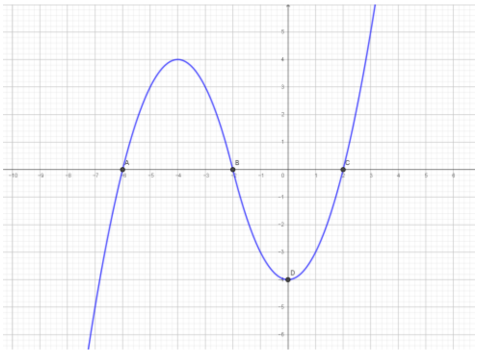
a) Dibuja su gráfica aproximada y analiza su continuidad y derivabilidad.

b) Calcula los máximos y mínimos absolutos y relativos de la función en el intervalo [-8, 8].

a) El primer trozo es una parábola abierta hacia abajo, $-(x+4)^2 + 4 = -x^2 - 8x - 12$

Los cortes con el eje X son, $-x^2 - 8x - 12 = 0$ x = -6 y x = -2 y el vértice está en x = -4

El segundo trozo es una parábola abierta hacia arriba con cortes en x = -2 y x = 2, vértice x = 0



Es continua y derivable en todos los números reales

b) En (-4, 4) hay un máximo relativo

En (0, -4) hay un mínimo relativo

En (-8, -12) hay un mínimo absoluto

En (8, 60) hay un máximo absoluto

20. Obtén y representa una función polinómica de tercer grado $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tenga un mínimo en el punto (1, 1) y un punto de inflexión en el punto (0, 3)

Si pasa por el punto (1, 1)... f(1) = 1

Mínimo en (1, 1) .... f'(1) = 0

Pasa por (0, 3) .... f(0) = 3

Punto de inflexión en (0, 3) .... f''(0) = 0

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad f''(x) = 6ax + 2b$

Sustituyendo: $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d = 1$

$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d = 3$

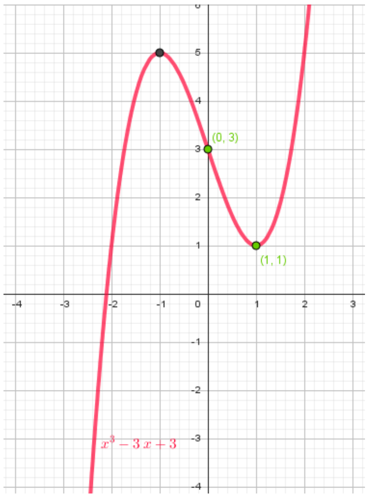
$f'(1) = 3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 3a + 2b + c = 0$

$f''(0) = 6 \cdot a \cdot 0 + 2b = 2b = 0$ de donde

d = 3 ; b = 0 ; a + c + 3 =1 ; 3a + c = 0

$\begin{cases} a + c = -2 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$ Multiplicando la E1 por (-1) y sumando $\begin{cases} a + c = -2 \\ 2a \ = 2 \end{cases}$ a = 1 y c = -3

Nos queda $f(x) = x^3 - 3x + 3$ su gráfica es:



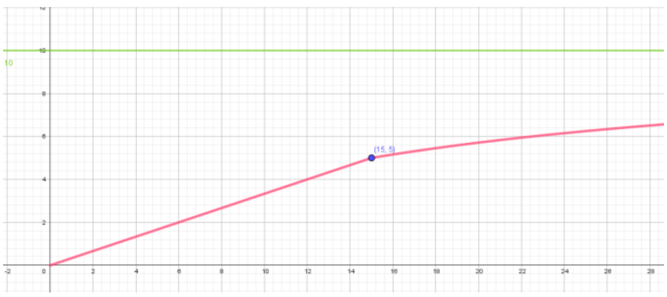
21. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

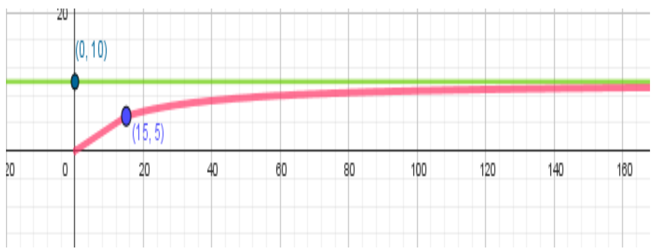
$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & si\ \ 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{2x}{0,2x + 3} & si\ x > 15 \end{cases}$$

a) Estudia y representa la función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.

b) Justifica que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

a)





Para valores menores de 15 la gráfica de la función es una recta, creciente y el máximo lo alcanza cuando x = 15 con un valor de 5, es decir, con menos de 15 horas no llega al 5.

b) Calculamos $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{0,2x+3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{0,2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{0,2} = 10$ por tanto, como máximo se puede obtener un 10.

AUTOEVALUACIÓN

1. El dominio de definición de la función $f(x) = 2^{\frac{\text{sen}(x+3)}{x^2-4}}$

Igualamos el denominador a 0: $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Dom $f = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$

La respuesta correcta es la a)

2. Los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)}$

Corte con el eje y; x=0

$$f(0) = \frac{(0-1)(0+4)}{(0-3)} = \frac{(-1)(4)}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

P(0, $4/3$)

Corte con el eje x; y=0

$$0 = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)} \to 0 \cdot (x-3) = (x-1)(x+4) \to (x-1)(x+4) = 0 \to$$

$\to x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\to x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

P(1, 0), (-4, 0)

La respuesta correcta es la c)

3. Indica cuál de las siguientes funciones no tiene ningún tipo de simetría:

a) $y = x^2$

$y = f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

Como $f(x) = f(-x)$ presenta una simetría par.

b) $y = x^3$

$y = f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$-f(x) = -(x^3) = -x^3$

Como $f(-x) = -f(x)$ presenta una simetría impar.

c) $\boldsymbol{y = e^x}$

$y = f(x) = e^x$
$f(-x) = e^{-x}$
$-f(x) = -(e^x) = -e^x$

Como $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ no tiene ningún tipo de simetría

d) $\boldsymbol{y = sen(x)}$

$y = f(x) = sen(x)$

$-f(x) = -sen(x)$
$f(-x) = sen(-x)$

Como $-f(x) = f(-x)$ presenta una simetría impar.

La c) no tiene ningún tipo de simetría

4. **Las asíntotas de la función** $\boldsymbol{f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(3-2)(3-1)}{0 \cdot (3-4)} = \frac{12}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{2}{0^+} = \infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Asíntota vertical x=3

$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(4-2)(4-1)}{(4-3) \cdot 0} = \frac{6}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{6}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to 4^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Asíntota vertical x=4

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{(\frac{x}{x}-\frac{2}{x})(\frac{x}{x}-\frac{1}{x})}{(\frac{x}{x}-\frac{3}{x})(\frac{x}{x}-\frac{4}{x})} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 1$$

Asíntota horizontal y=1

Como tiene asíntotas horizontales no tiene asíntotas oblicuas.

La respuesta correcta es la a)

5. La función $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x<0 \\ x^3-12x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ **tiene máximos y mínimos en los puntos de abscisa siguientes.**

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<0 \\ 3x^2-12 & x>0 \end{cases}$$

$$2x=0 \quad ; \quad x=0$$

$$3x^2-12=0 \quad ; \quad 3x^2=12 \quad ; \quad x=\sqrt{\frac{12}{3}}=2$$

Para x < 0 la función es decreciente, en (0, 2) también es decreciente y en (2, ∞) es creciente
Por tanto tiene un mínimo en x = 2

La respuesta correcta es la b).

6. La función $f(x)=\begin{cases} x^2-3 & x<0 \\ x^3-6x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa:

a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 3$ d) $x = -2$

Calculamos la segunda derivada

$f''(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ 6x & x>0 \end{cases}$ 6x = 0 ; x = 0, como para x > 0 f’’’(x) es distinta de 0, en x = 0 hay un punto de inflexión

La respuesta correcta es la b).

7. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) El dominio de las funciones polinómicas es siempre toda la recta real

b) Las funciones definidas a trozos nunca son continuas

c) Las funciones exponenciales están definidas en la misma región que su exponente

d) Las funciones: $y = e^x$; $y = sen(x)$; $y = cos(x)$ están definidas en toda la recta real

La respuesta correcta es la b).

Por ejemplo la función: $f(x)=\begin{cases} -(x+4)^2+4 & si\ x<-2 \\ x^2-4 & si\ x\geq -2 \end{cases}$ es continua

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

8. La función $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$ no está definida en los intervalos indicados:

a) (1, 2), (3, 4) b) [1, 2], [3, 4] c) [1, 2], (3, 4) d) (1, 2), [3, 4]

f(x) estará definida en los intervalos que sea positivo el valor de la expresión de dentro de la raíz y no anule el denominador, tomamos valores dentro de los intervalos y sustituimos,

(1, 2) negativo; (2, 3) positivo ; (3, 4) negativo ; (4, 5) positivo

La respuesta correcta es la a).

9. La función $f(x)=\ln(\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)})$ tiene como asíntota horizontal:

a) y = 0 b) y = 1 c) No tiene d) y = 1/6

$$\lim_{x\to\infty} ln\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = ln\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = ln\frac{1}{1} = ln1 = 0$$

La respuesta correcta es la a).

10. La función $f(x)=2\cdot\cos 3x$ tiene como amplitud y periodo:

a) A = 2, T = 2π/3 b) A = 3, T = π c) A = 4, T = 2π/3 d) A = 2, T = 2π

La respuesta correcta es la a).