Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato. Capítulo 1: Matrices

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-056427

Fecha y hora de registro: 2014-11-08 19:02:38.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

BOCM: Técnicas y uso de matrices para, al menos, modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales o **grafos**

Autores: Leticia González Pascual y Álvaro Valdés Menéndez

Revisora: Elena Ramírez

1. CONCEPTO DE MATRIZ

1.1. DEFINICIÓN

1.2. DIMENSIÓN DE UNA MATRIZ

1.3. IGUALDAD DE MATRICES

2. TIPOS DE MATRICES

3. OPERACIONES CON MATRICES

3.1. SUMA

3.2. PRODUCTO DE UN NÚMERO (ESCALAR) POR UNA MATRIZ

3.3. PRODUCTO DE MATRICES

3.4. MATRIZ INVERSA

3.4.1. Definición

3.4.2. Método de Gauss–Jordan

3.5. MATRIZ TRASPUESTA

3.6. RANGO DE UNA MATRIZ

4. GRAFOS Y MATRICES

Resumen

En la historia del Álgebra podemos encontrar etapas muy diferentes: el álgebra de la antigüedad de babilónicos, egipcios, griegos,… el álgebra árabe o el álgebra de la edad moderna, en que continúa tratándose la resolución de ecuaciones. En el siglo XVIII y XIX tiene su auge el Álgebra Abstracta que trata de las estructuras algebraicas. Surgen las matrices y los determinantes, aunque se puede pensar que su origen es mucho más antiguo si se piensa en los cuadrados mágicos que se conocen desde el año 650 a.C.

El cálculo matricial tiene importantes aplicaciones, como para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que estudiaremos este curso. Otras aplicaciones se encuentran al trabajar en Física Cuántica o en Teoría de Grafos, y se utilizan en computación por la simplicidad de su manipulación.

Las transformaciones geométricas, giros, simetrías…, se representan mediante matrices. Los vectores son un caso particular de matriz. La información se organiza usando matrices.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo

Textos Marea Verde

1. CONCEPTO DE MATRIZ

Actividad de introducción

En el IES "Virgen de Covadonga" de El Entrego se está desarrollando una actividad solidaria de recogida de juguetes. Se han repartido las tareas por cursos, de modo que los alumnos y alumnas de 1º de ESO recogen juguetes tradicionales, los de 2º de ESO juegos de mesa y los de 3º de ESO juegos electrónicos. Durante la primera semana se recogieron 35 juguetes en 1º de ESO, 24 en 2º y 33 en 3º; la segunda semana los estudiantes trajeron 28 juguetes en primero, 18 en segundo y 37 en tercero. Los profesores encargados, satisfechos por el resultado de la actividad, decidieron recompensar a los niños y niñas ofreciéndoles 4 caramelos por cada juguete tradicional, 2 morenitos por cada juego de mesa y un pincho por cada juego electrónico. Cuando se enteran el resto de grupos del instituto (4º de ESO, 1º y 2º de Bachiller), deciden participar, y la semana siguiente traen 18 juguetes tradicionales, 25 juegos de mesa y 16 electrónicos. El Equipo Directivo, muy orgulloso de la implicación de todos los estudiantes, decide duplicar los premios.

- ¿Cuántos juguetes de cada tipo se recogieron?
- ¿Cuántos pinchos, caramelos y morenitos deben comprar como premio?
- Si los caramelos cuestan un céntimo, los morenitos 5 céntimos y los pinchos 75 céntimos, ¿cuánto les costará a los profesores recompensar a sus alumnos?

Sugerencia: Organiza la información en forma de tablas.

Colecta	Juguetes tradicionales	Juegos de mesa	Juegos electrónicos
1ª semana			
2ª semana			
3ª semana			

Premios	Juguetes tradicionales	Juegos de mesa	Juegos electrónicos
Caramelos			
Morenitos			
Pinchos			

	Precio por unidad	Coste total
Caramelos		
Morenitos		
Pinchos		

Analiza:

- ¿Habrías sabido resolver el problema sin usar las tablas?
- ¿Te ha parecido más fácil con la información ordenada?
- ¿Conoces alguna situación de la vida cotidiana similar al problema planteado?
- Busca otros ejemplos donde la información tabulada es fundamental para entender mejor qué está ocurriendo.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Matrices Introducción. Conceptos básicos: Qué es una matriz, cuáles son sus elementos, cómo se nombran los elementos y qué es dimensión, orden o tamaño de una matriz y cuáles son las filas y las columnas de una matriz. Matemáticas profe Alex

https://www.youtube.com/watch?v=m6w5vLA3Lnw

1.1. Definición

Las matrices son una de las herramientas más usadas dentro del Álgebra Lineal y están asociadas a un conjunto de datos numéricos ordenados. Encontramos las matrices en muchas ciencias: Sociología, Economía, Demografía, Física, Biología, etc.

La idea intuitiva de matriz es muy sencilla, pudiéndose definir una matriz como un **tabla de números ordenados**, números que pueden provenir de experimentos, encuestas, análisis económicos, etc.
Por tanto:

Se llama **matriz** de orden $m \times n$ a un conjunto de números reales dispuestos en m **filas** y en n **columnas**, de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las matrices se representan por letras mayúsculas A, B, C,... Los elementos de la matriz (los números) se representan en general por $\boldsymbol{a_{ij}}$, donde los subíndices (i, j) nos dan la posición que ocupa el término:

$$\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \rightarrow fila \\ j = 1, 2, \dots, n \rightarrow columna \end{cases}$$

Así, el término a_{13} es el elemento que está en la primera fila y en la tercera columna.

1.2. Dimensión de una matriz

El número de filas (m) y el número de columnas (n) nos da la **dimensión de la matriz** $m \times n$.

- ***Ejemplo:*** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ ***es una matriz de dimensión*** 2×3.

1.3. Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los términos que ocupan la misma posición son iguales:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \qquad A = B \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11};\ a_{21} = b_{21} \\ a_{12} = b_{12};\ a_{22} = b_{22} \\ a_{13} = b_{13};\ a_{23} = b_{23} \end{cases} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

Ejemplo: ***Si*** $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 4 \\ 1 & y & -9 \end{pmatrix}$ ***y*** $B = \begin{pmatrix} 3 & b & 4 \\ x & 5 & z \end{pmatrix}$ ***, para que*** $A = B$ ***debe cumplirse que:***

$a = 3$, $b = -1$, $x = 1$, $y = 5$ y $z = -9$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Actividades resueltas

- *Indica la* dimensión *de las siguientes matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 4\\ 1 & 7 & -9\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -6 & 0\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix};\qquad D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Solución:

La matriz A es de dimensión 2×3 porque tiene dos filas y tres columnas.

La matriz B es de dimensión 1×4 porque tiene una fila y cuatro columnas.

La matriz C es de dimensión 3×1 porque tiene tres filas y una columna.

La matriz D es de dimensión 3×3 porque tiene tres filas y tres columnas.

- *Determina los valores de a, b y c para que las matrices A y B sean iguales*

$$A=\begin{pmatrix}3 & a & -6 & b\end{pmatrix}\quad ;\quad B=\begin{pmatrix}x & 2 & y & 0\end{pmatrix}$$

Solución:

Para que dos matrices sean iguales deben tener la misma dimensión, requisito que cumplen A y B. Además, han de ser iguales los términos que ocupan la misma posición. Por tanto debe ser $x = 3$, $a = 2$, $y = -6$, $b = 0$.

Actividades propuestas

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido mil lechugas, 2000 kilos de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1000 y 400 respectivamente. Por cada lechuga recibe un céntimo, por cada kilo de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias del año 2014.

2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no:

a. Un calendario.
b. La clasificación de la Liga de fútbol (o cualquier otro deporte).
c. El disco duro de un ordenador.
d. Un armario donde se guarda una colección de copas.
e. Los lineales de un supermercado.
f. Una pantalla de televisión.
g. El boleto de la Lotería Primitiva, de la Quiniela y del Euromillón.
h. Los buzones de una vivienda.
i. Los pupitres de una clase.

3. Propón otros elementos de tu entorno que sea matrices o puedan representarse mediante matrices.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

2. TIPOS DE MATRICES

Tipos de matrices. Explicación y ejemplos de algunos tipos de matrices, como la matriz fila o vector fila, la matriz o vector columna, la matriz nula, dentro del curso de Matrices. Matemáticas profe Alex

https://www.youtube.com/watch?v=GyrQmbxk7ds

Si el número de filas es distinto del número de columnas $(m \neq n)$ la matriz se llama **rectangular**. Dentro de las matrices rectangulares tenemos los siguientes tipos:

- **Matriz fila**: Es aquella que sólo tiene una fila.

  Ejemplo:

  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz fila.

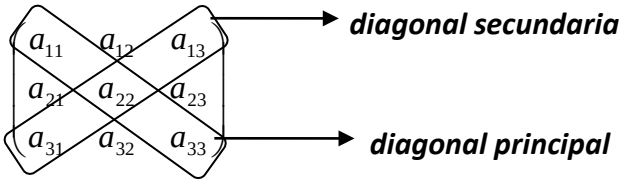
- **Matriz columna**: Es la que sólo tiene una columna.

  Ejemplo:

  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una matriz columna.

Si el número de filas es igual al número de columnas ($m = n$) se habla de una **matriz cuadrada.**

Dentro de las matrices cuadradas es importante destacar que los elementos a_{ij} en que los dos subíndices son iguales forman la ***diagonal principal***, y los elementos en que $i + j = n + 1$ (donde n es el orden de la matriz) forman la ***diagonal secundaria.***



En el conjunto M_n de las matrices cuadradas de orden n, cabe destacar los siguientes tipos de matrices:

- **Matriz triangular**: Es aquella matriz en la que los elementos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

  Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior *Matriz. Triangular Inferior*

- **Matriz Diagonal**: Es aquella matriz en la que los elementos que no están en la diagonal principal son nulos: $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

  Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

- **Matriz Escalar**: Es aquella matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos iguales.

  Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Unidad (Identidad)**: Es la matriz escalar en la que los elementos no nulos son iguales a 1. Se representa por $\boldsymbol{I}$.

  Ejemplo:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  En ocasiones se añade un subíndice que indica la dimensión de la matriz.

- **Matriz Nula**: Es aquella en la que todos sus elementos son cero.

  Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Matriz nula de tamaño 3.

Actividad resuelta

Clasifica las matrices siguientes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; La matriz A es rectangular de dimensión 2×3.

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; La matriz B es una matriz cuadrada de dimensión 3×3 o simplemente 3.

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; La C es cuadrada de dimensión 4.

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Es una matriz cuadrada 3×3, es la matriz nula de dicha dimensión

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ La matriz E es una matriz fila de dimensión 1×4.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

3. OPERACIONES CON MATRICES

Actividad de introducción

La siguiente tabla muestra los resultados de la Liga de fútbol española 2014/2015 cuando cada equipo juega como local y como visitante:

Equipo	En casa				Fuera				Total			
	PJ	G	E	P	PJ	G	E	P	PJ	G	E	P
F.C. Barcelona	19	16	1	2	19	14	3	2				
Real Madrid	19	16	2	1	19	14	0	5				
Atlético C. Madrid	19	14	3	2	19	9	6	4				
Valencia C.F.	19	15	3	1	19	7	8	4				
Sevilla C.F.	19	13	5	1	19	10	2	7				
Villarreal C.F.	19	12	1	6	19	4	11	4				
Athletic C. Bilbao	19	8	6	5	19	7	4	8				
R.C. Celta de Vigo	19	8	5	6	19	5	7	7				
C.D. Málaga	19	8	6	5	19	6	2	11				
R.C.D. Espanyol	19	8	6	5	19	5	4	10				
Rayo Vallecano	19	8	2	9	19	7	2	10				
R. Sociedad	19	9	5	5	19	2	8	9				
Elche C.F.	19	6	3	10	19	5	5	9				
Levante C.F.	19	6	6	7	19	3	4	12				
Getafe C.F.	19	6	5	8	19	4	2	13				
R.C. Deportivo	19	5	6	8	19	2	8	9				
Granada C.F.	19	4	10	5	19	3	4	12				
S.D. Eibar	19	5	3	11	19	4	5	10				
U.D. Almería	19	3	7	9	19	5	1	13				
Córdoba C.F.	19	1	6	12	19	2	5	12				

- Completa la tabla de la derecha, fijándote principalmente en:
  - Qué deberías haber hecho en caso de que los equipos hubieran estado ordenados de diferente forma en ambas tablas.
  - Cómo eliges trabajar con los números y por qué.
  - Qué dimensiones tienen las tablas con los datos "En casa"/"Fuera" y la que obtienes.
  - Cómo habrías resuelto el problema inverso: dados los resultados totales y los obtenidos "En casa", determinar los resultados de los equipos cuando jugaron como "Visitantes".
- El sistema de puntuación de la Liga da 0 puntos por jugar un partido, 3 puntos por victoria, 1 punto por empate y 0 puntos por derrota.
  - Escribe una matriz que represente estos datos sobre la puntuación
  - Utiliza dicha información para determinar los puntos logrados por cada equipo cuando juega como local, como visitante y en total.
  - Observa las dimensiones de las tablas de partida y de la matriz de puntuación, e intenta relacionarlas con las tablas de "Puntos" que acabas de obtener.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

3.1. Suma

Dadas dos matrices A y B de dimensión $m \times n$, se define la suma de matrices (A + B) como aquella matriz cuyos elementos son la suma de los elementos que ocupan la misma posición:

$$C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \quad C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices es una consecuencia de la suma de números reales, por lo que las propiedades de la suma de matrices serán las mismas que las de la suma de números reales:

- Propiedad Asociativa.
- Elemento neutro (la matriz nula).
- Elemento opuesto ($-A$): $A + (-A) = 0$
- Propiedad Conmutativa: $A + B = B + A$

3.2. Producto de un número (escalar) por una matriz

El producto de un número real k por una matriz $A = (a_{ij})$ es otra matriz de la misma dimensión cuyos elementos son los productos de los elementos de la matriz A por el número k:

$$kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, el producto de la matriz A por 5 es: $5A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ -5 & 15 & 10 \\ 0 & -10 & 5 \end{pmatrix}$

El producto de un número por una matriz tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad Distributiva respecto de la suma de matrices. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$
- Propiedad Distributiva respecto de la suma de números: $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$
- Propiedad Asociativa mixta: $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$
- $1 \cdot A = A$

El conjunto de matrices M_{mxn} respecto de las operaciones suma de matrices y producto por un número real (M_{mxn},+,·k) tiene estructura de **espacio vectorial**.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

3.3. Producto de matrices

El producto de matrices no es una operación tan sencilla como la suma de matrices o el producto de una matriz por un número real, que no necesitan de grandes condiciones. Para poder multiplicar dos matrices, sus dimensiones deben cumplir unas condiciones.

Sean las matrices A y B de dimensiones $m \times n$ y $n \times p$ (es decir, el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B). Se define el producto $A \cdot B$, y en ese orden, como una matriz C de dimensiones $m \times p$ cuyos elementos son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \\ B = (bij) \end{array}\right\} \rightarrow C = A \cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \Big| c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Es decir, el elemento c_{11} se obtiene multiplicando escalarmente los elementos de la primera fila de la matriz A por los elementos de la primera columna de la matriz B, y así sucesivamente.

Ejemplo:

Veamos un producto de matrices desarrollado paso a paso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 47 & 20 \end{pmatrix}$$

Dimensión $\quad 2 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad\qquad 2 \times 2$

El número de columnas de A es igual al número de filas de B, por lo tanto se pueden multiplicar en ese orden. La matriz producto tiene tantas filas como A y tantas columnas como B.

Que el producto $A \cdot B$ esté definido no implica que lo esté el producto $B \cdot A$.

Ejemplo:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} A \cdot B & \text{definido} \\ B \cdot A & \text{no definido} \end{cases}$

Para que estén definidos ambos productos tiene que cumplirse que si la dimensión de la matriz A es $m \times n$, la dimensión de la matriz B debe ser $n \times m$, siendo las dimensiones de las matrices producto:

$$\begin{cases} A \cdot B \rightarrow m \times m \\ B \cdot A \rightarrow n \times n \end{cases}$$

De aquí se concluye que el producto de matrices ***NO TIENE LA PROPIEDAD CONMUTATIVA***.

Si las matrices son cuadradas de orden n, el producto de matrices tiene las siguientes propiedades:

- Propiedad Asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- Elemento neutro (I): $A \cdot I = I \cdot A = A$
- Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

3.4. Matriz inversa

Matriz inversa, traspuesta y adjunta Hallaremos la MATRIZ INVERSA de una matriz a través de su matriz traspuesta y adjunta. Primero deberemos hallar el determinante de dicha matriz para comprobar si es invertible (su determinante no es nulo).

https://www.youtube.com/watch?v=3BpGef99HEs

Entre las propiedades de las matrices no se ha nombrado la existencia del elemento simétrico o elemento inverso, ya que no existe dicha propiedad. Sin embargo, hay matrices cuadradas para las cuales existe otra matriz que multiplicada por ellas nos da la matriz unidad (elemento neutro).

3.4.1. Definición

Si dada una matriz cuadrada A existe otra matriz B, también cuadrada, que multiplicada por la matriz A nos da la matriz unidad, se dice que la matriz A es una **matriz regular o inversible** y a la matriz B se le llama **matriz inversa** de A y se representa por A^{-1}: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Si una matriz cuadrada no tiene matriz inversa, se dice que la matriz es **singular**.

La matriz inversa verifica las siguientes propiedades:

- La inversa de la matriz inversa es la matriz original.
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$
- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando su orden.
$$\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
- La inversa de la traspuesta de una matriz es igual a la traspuesta de la matriz inversa.
$$\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$$

Para hallar una matriz inversa dispondremos de varios métodos distintos. En este tema veremos dos:

- Resolver un sistema de ecuaciones
- El método de Gauss – Jordan

Actividades resueltas

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Halla la matriz inversa A^{-1} mediante un sistema de ecuaciones.

Planteamos la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$$

Debe verificarse que $A \cdot A^{-1} = I$, por tanto:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 2a & 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 & d = 0 \\ 2a = 0 & 2b = 1 \end{cases}$$

Resolviendo para a, b, c y d: $\begin{cases} a = 0 & b = 1/2 \\ c = 1 & d = 0 \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

- Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, halla la matriz inversa A^{-1} mediante un sistema de ecuaciones.

  De nuevo, planteamos la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}$$

  Debe verificarse que $A\cdot A^{-1}=I$, por tanto:

$$A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=1 & b+2d=0\\ 3a+4c=0 & 3b+4d=1\end{cases}$$

  Resolviendo para a, b, c y d:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}a+2c=1\\ 3a+4c=0\end{cases}\xrightarrow[F_2-2F_1]{}\begin{cases}a+2c=1\\ a=-2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=3/2\\ a=-2\end{cases}\\[2ex]\begin{cases}b+2d=0\\ 3b+4d=1\end{cases}\xrightarrow[F_2-2F_1]{}\begin{cases}b+2d=0\\ b=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}d=-1/2\\ b=1\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

Como hemos visto, este método resulta laborioso (y sólo lo hemos utilizado con matrices de orden 2). Es simple imaginar que se complica enormemente si hay muchos términos no nulos y cuanto mayor es la dimensión de la matriz.

Además, debemos tener en cuenta que no siempre existe matriz inversa, por lo que podríamos haber estado trabajando en balde.

Ejemplo:

- Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, halla la matriz inversa A^{-1} mediante un sistema de ecuaciones.

  De nuevo, planteamos la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ y hallamos el producto:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+6c & 3b+6d\end{pmatrix}$$

  Debe verificarse que $A\cdot A^{-1}=I$, por tanto:

$$A\cdot A^{-1}=I\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+6c & 3b+6d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=1 & b+2d=0\\ 3a+6c=0 & 3b+6d=1\end{cases}$$

  Vemos que cualquiera de los dos pares de ecuaciones no tiene solución:

$$\begin{cases}a+2c=1\xrightarrow{\times 3} & 3a+6c=3\\ 3a+6c=0 & 3a+6c=0\end{cases}$$

  Que claramente no puede tener solución.

  Por tanto, la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ no tiene matriz inversa.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

3.4.2. Método de Gauss – Jordan:

El método de Gauss-Jordan para hallar la matriz inversa consiste en convertir la matriz inicial en la matriz identidad, utilizando **transformaciones elementales**.

Llamamos ***transformaciones elementales por filas*** a:

- Permutar dos filas i y j. Lo escribimos como $F_i \leftrightarrow F_j$
- Sustituir la fila i por el resultado de multiplicar o dividir todos sus elementos por un número $a \neq 0$. Lo escribimos como $F_i = a \cdot F_i$
- Sustituir la fila i por un múltiplo (no nulo) de ella más otra fila j multiplicada por un número b. Lo escribimos como $F_i = a \cdot F_i + b \cdot F_j$, con $a \neq 0$.

Ampliamos la matriz original, escribiendo junto a ella la matriz identidad, y aplicamos las transformaciones elementales de modo que la matriz inicial se transforme en la matriz identidad.

Actividad resuelta

- Calcula con el método de Gauss–Jordan la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

  Escribimos la matriz identidad junto a la matriz A:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Y vamos realizando transformaciones elementales a la izquierda, buscando convertirla en la matriz identidad:

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to \frac{1}{2}F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

  Por tanto:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comparando este método con el anterior, podemos ver que es mucho más simple y rápido.

Ejemplo 2:

- Halla la matriz inversa A^{-1} de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ con el método de Gauss–Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - 3F_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = -\frac{1}{2}F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 - 2F_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

  Por tanto, tenemos que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Ejemplo 3:

- Halla la matriz inversa de

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Escribimos la matriz identidad junto a la matriz A y operamos como se explicó antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2=F_2+F_1\\ F_3=F_3+4F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[F_3=F_3-5F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -16 & -1 & -5 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=-F_1\\ F_3=-\frac{1}{16}F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=F_2-5F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-3F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -3/16 & 1/16 & 3/16\\ 0 & 1 & 0 & 11/16 & -9/16 & 5/16\\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & 5/16 & -1/16\end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa queda:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/16 & 1/16 & 3/16\\ 11/16 & -9/16 & 5/16\\ 1/16 & 5/16 & -1/16\end{pmatrix}$$

3.5. Matriz traspuesta

Dada una matriz A de dimensiones $m\times n$, se llama **matriz traspuesta** de A y se representa por A^t, *a la matriz que se obtiene al cambiar las filas de A por sus columnas, por lo que la matriz A^t será de dimensión $n\times m$.*

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada se dice que es **simétrica** cuando coincide con su traspuesta: $A=A^t$.

Para que una matriz sea simétrica, los elementos simétricos respecto de la diagonal principal deben ser iguales.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Si una matriz cuadrada es igual a la opuesta de su traspuesta, $A=-A^t$, se dice que es **antisimétrica**.

Para que una matriz sea antisimétrica debe cumplirse que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal sean opuestos, y los elementos de la diagonal principal nulos.

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow -A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}=A$$

Con las matrices traspuestas se cumplen las siguientes propiedades:

- La traspuesta de una suma de matrices es igual a la suma de las matrices traspuesta:

$$(A+B)^t=A^t+B^t$$

- La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto en orden inverso de las matrices traspuestas:

$$(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$$

Actividad resuelta

- *Para las matrices:* $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *y* $D=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, *realiza el producto* $D^t\cdot A^t$.

Solución

El primer paso consiste en trasponer las matrices:

$$D^t\cdot A^t=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Es decir: $D^t\cdot A^t=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-1)+3\cdot 2 & 2\cdot 4+1\cdot 0+3\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix}$

Y podemos comprobar la propiedad anterior:

$$A\cdot D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-1)+3\cdot 2 \\ 2\cdot 4+1\cdot 0+3\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $(A\cdot D)^t=\begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix}=D^t\cdot A^t$

Galois y las matrices, ENCRIPTAN TUS DATOS EN INTERNET. Uno de los usos prácticos más comunes de las matemáticas, es la encriptación de datos, para que quien no queremos que vea nuestras conversaciones, claves, fotos..., pues sencillamente, no las vea ¿Y qué es lo que ve? Pues un montón de signos sin sentido para que no se entere de nada. Hoy vamos a hablar de cómo Galois y las matrices nos ayudan a encriptar nuestra información. Eduardo Sáenz de Cabezón

https://www.youtube.com/watch?v=XC4SX3iEeRM

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

3.6. Rango de una matriz

Se llama **rango** de una matriz al número de filas o columnas de la matriz que son **linealmente independientes**, es decir, que no pueden obtenerse a partir de las demás filas o columnas de la misma matriz.

Actividad resuelta

- *Determina el rango de las matrices*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La tercera fila de A se obtuvo sumando las dos primeras filas. Estas dos primeras filas son independientes, por lo que el rango de A es 2.

La tercera fila de B se obtuvo restando la segunda fila al doble de la primera. El rango de B es 2.

Para hallar el rango de una matriz se pueden usar las **transformaciones elementales** para intentar hacer el máximo número posible de ceros, intentando **triangular** la matriz (**método de Gauss**); sin embargo, será más fácil hallar el rango usando determinantes, como veremos en el capítulo siguiente.

Actividad resuelta

- *Calcula el rango de la siguiente matriz según los valores del parámetro a:*

$$A=\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

El rango de esta matriz será como máximo 2 pues es una matriz de dimensión 2 x 2. Vamos realizando transformaciones elementales hasta convertirla en una matriz triangular.

Intercambiamos filas para tener un 1 en la posición a_{11}.

$$A=\begin{pmatrix} a-2 & a+2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a-2 & a+2 \end{pmatrix}$$

Ahora tratamos de conseguir ceros, para lo que a la segunda fila le restamos la primera fila multiplicada por $(a-2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a-2 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-(a-2)F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ (a-2)-1\cdot(a-2) & (a+2)-2\cdot(a-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -a+6 \end{pmatrix}$$

Vemos que si $(-a+6=0)$ la segunda fila es nula, por lo que su rango sería 1. Por tanto:

$$-a+6=0 \Rightarrow a=6$$

De aquí:

$$\begin{cases} a=6 & \Rightarrow \quad \text{rg}(A)=1 \\ a\neq 6 & \Rightarrow \quad \text{rg}(A)=2 \end{cases}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Actividades propuestas

4. Escribe tres matrices fila.

5. Escribe tres matrices columna.

6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.

8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4.

9. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A + 3B$

b) $2A + B - 5C$

10. Para las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $A{\cdot}B$ y $B{\cdot}A$. ¿Es el producto conmutativo?

11. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $3A^t - B^2$.

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

13. Resuelve la ecuación matricial $M{\cdot}X + N = P$ siendo:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

4. GRAFOS Y MATRICES

Los grafos resultan de gran utilidad a la hora de afrontar problemas cotidianos, pues nos permiten organizar la información que disponemos en tablas de forma esquemática.

Por ejemplo:

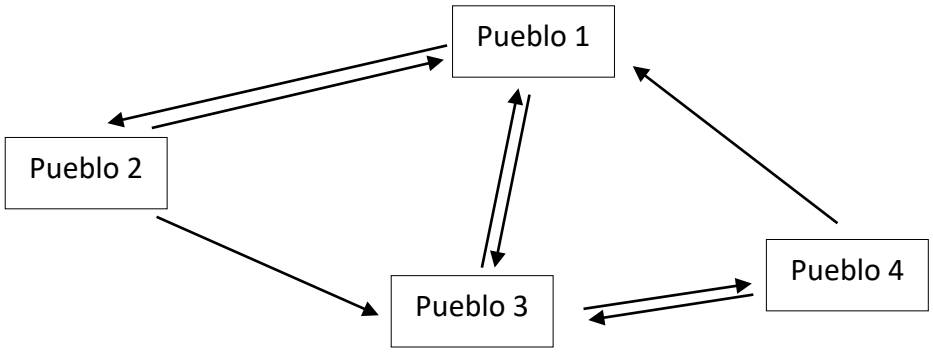
Vamos a considerar la siguiente situación:

- *Existen 4 pueblos situados en algún lugar de la geografía española. Dichos pueblos permanecen comunicados entre sí por una red de carreteras, algunas de un solo sentido, y otras de doble sentido, tal y como se recoge en la siguiente tabla:*

	Pueblo 1	Pueblo 2	Pueblo 3	Pueblo 4
Pueblo 1	NO	SÍ	SÍ	SÍ
Pueblo 2	SÍ	NO	NO	NO
Pueblo 3	SÍ	SÍ	NO	SÍ
Pueblo 4	NO	NO	SÍ	NO

*Donde hemos escrito «SÍ» si existe **carretera directa** que comunique dichos pueblos, y «NO» en caso contrario*.

Vemos que la información recopilada en la tabla la podemos representar de la siguiente forma:

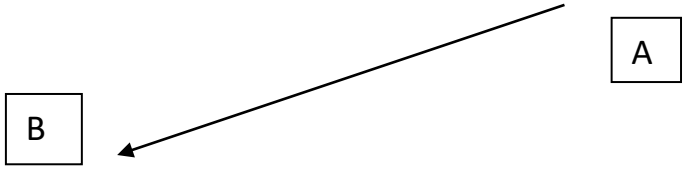


Este esquema recibe el nombre de **grafo**, y resulta muy conveniente porque nos permite visualizar la misma información que queda recopilada en la tabla pero de forma más sencilla, y nos resulta más conveniente a la hora de extraer conclusiones.

Con un **grafo** se representan las relaciones entre objetos.

Un grafo está formado por nodos que se relacionan con aristas.

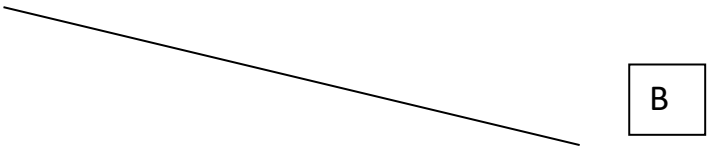
El grafo más sencillo que se me ocurre es una simple flecha que une el nodo A con el nodo B:



Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Podemos asociar a este grafo una matriz cuadrada de dimensión 2 x 2: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, que nos indica que sólo A se une con B.

El grafo dado por el segmento [A, B] une A con B, y B con A. luego la matriz asociada es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

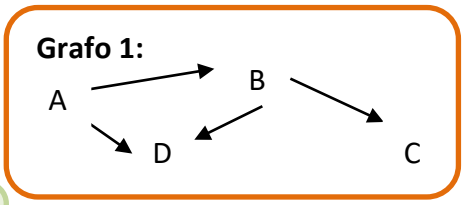


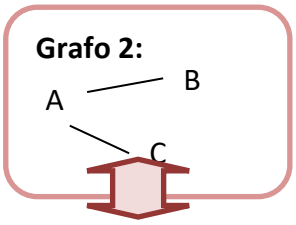
Hay grafos dirigidos, como el grafo 1, y grafos no dirigidos, como el grafo 2.

A cada grafo se le asocia una matriz ¡única!

Los vértices A, B, C y D son las filas de la matriz. Si A está relacionado con B ponemos un 1 en la fila 1, columna 2.

La matriz de un grafo no dirigido es simétrica.





$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Imagina que esos grafos están indicando personas que están conectadas por WhatsApp.

En el grafo 1, A está conectada con B y D. B con C y D.
En el grafo 2, A está con B y C. B con A y C con A.

Se pueden utilizar grafos para representar los caminos que unen unas casas, o unos pueblos, o los vuelos (u otro tipo de conexión) que unen las ciudades. En psicología se utilizan por ejemplo para visualizar las relaciones de dominio entre individuos.

Actividades propuestas

15. Dibuja un grafo que conecte al vértice A consigo mismo, con B y con C, dos veces. Conecte a B con C. Conecte a C con A, y con el mismo C. Escribe la matriz asociada a ese grafo.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Vamos a multiplicar estas matrices por sí mismas e interpretar el resultado

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A podría conectar con C y D (pidiendo a B que reenviara el WhatsApp).

Ahora un WhatsApp de A podría llegar a esa misma persona A por dos caminos distintos (a través de B y de C), pero sólo sus propios WhatsApp.

A la persona B le llegarían sus WhatsApp y los de C.

Y a C lo mismo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividades propuestas

16. Dibuja los grafos asociados a estas matrices producto.

Actividad resuelta

- *En un país A, existen tres aeropuertos internacionales (A_1, A_2 y A_3); en otro país B existen cuatro (B_1, B_2, B_3 y B_4); y en un tercer país C existen dos (C_1 y C_2). Desde el aeropuerto A_1 salen vuelos con destino a B_1, B_2, C_1 y dos vuelos con destino a B_3. Desde el aeropuerto A_2 salen vuelos con destino a B_2, B_3 y dos vuelos con destino a B_4. Desde el aeropuerto A_3 sólo sale un vuelo con destino a B_3. Desde cada aeropuerto del país B, salen dos vuelos a cada uno de los aeropuertos del país C.*

  Se pide, expresar mediante matrices:

  a) Los vuelos del país A al B.

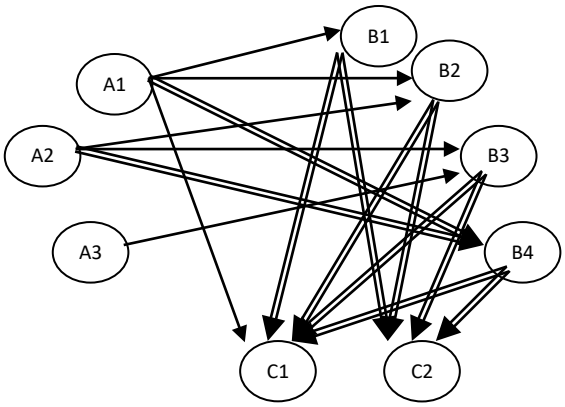
  b) Los vuelos del país B al C.

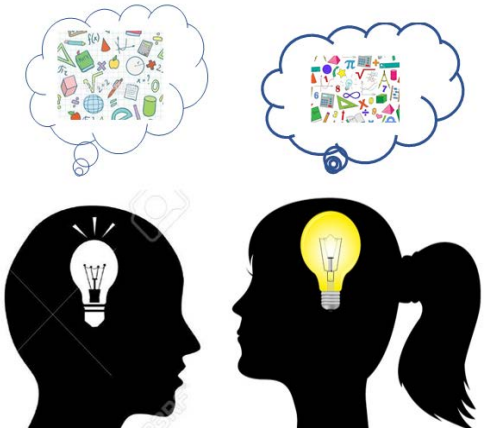
  c) Los vuelos del país A al C, necesiten o no efectuar trasbordo en el país B.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

Solución

El esquema de los vuelos es:





a) Representamos los vuelos desde *A* (filas) hasta *B* (columnas)

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Representamos los vuelos desde *B* (filas) hasta *C* (columnas)

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Representamos los vuelos directos desde *A* (filas) hasta *C* (columnas):

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vuelos desde A hasta C con o sin trasbordo serán:

$$X_1 \cdot X_2 + X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+0+4 & 2+2+0+4 \\ 0+2+2+4 & 0+2+2+4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

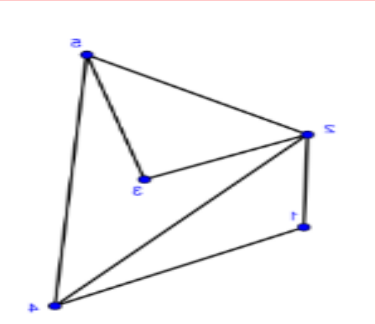
CURIOSIDADES Y REVISTA

LA MATRIZ DE ADYACENCIA

Las matrices están estrechamente relacionadas con los grafos.

Sin entrar en demasiado rigor, y con el objetivo de presentarte una idea intuitiva, vamos a considerar una matriz como un conjunto de números reales que se disponen en filas y columnas. Su definición es en realidad algo más compleja, pero esto nos puede servir.

Ahora vamos a considerar el grafo del margen:



Como vemos, está formado por un total de 5 vértices que se relacionan entre sí por un total de 7 aristas. Si ahora hacemos parejas de vértices (por ejemplo la pareja $(1,2)$) podemos asignar a cada pareja un valor en función de la existencia o no de una conexión entre ellos, o sea, una arista que los una (generalmente se asigna el 0, si no existe esa conexión; y el 1, si sí existe).

Ahora, vamos a considerar el grafo de la derecha.

Y esta información la podemos organizar fácilmente en una matriz, resultando fácil de ver y analizar.

De esta forma, podemos hacer la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5
1	NO	SÍ	NO	SÍ	NO
2	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ
3	NO	SÍ	NO	NO	SÍ
4	SÍ	SÍ	NO	NO	SÍ
5	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO

Donde hemos escrito «SÍ» en caso de que ambos vértices estén conectados por una arista, y «NO» en caso contrario.

Con ayuda de esta tabla, vamos a asignar los valores 0 y 1 según correspondan, en función del criterio establecido en el cuarto párrafo.

Tras realizar dicha asignación, podemos armar la siguiente matriz:

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal

La matriz de adyacencia resulta muy útil, pues de forma abreviada podemos extraer conclusiones sobre las relaciones entre los vértices del grafo. En este caso, la relación más notable puede ser que la diagonal principal de la matriz está compuesta en su totalidad por ceros, lo que indica la no existencia de ningún bucle.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

INTERPRETACIÓN DE LA MATRIZ DE ADYACENCIA

La matriz de adyacencia siempre será una matriz cuadrada (con el mismo número de filas que de columnas; y es este número, el de filas y columnas, el número de vértices del grafo). En grafos dirigidos, podemos notar como el valor que se asigne a una misma pareja puede cambiar en función del orden en el que consideremos a los vértices.

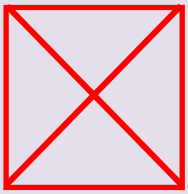
Por otro lado, para leer la relación que existe en un determinado entre los vértices 1 y 4, por ejemplo, bastará con dirigirse a la fila 1 y columna 4 (y viceversa; si es dirigido, sí importa el orden, no es lo mismo la fila 1 y columna 4 que la fila 4 y columna 1) e interpretar el resultado.

Las matrices de adyacencia también resultan útiles en el estudio de grafos ponderados.

EL IMPOSIBLE '*TREND*' DE TIKTOK

TikTok es actualmente la red social por excelencia entre el mundo adolescente, con récord de descargas.

En los últimos meses se ha difundido a través de esta red social un *reto* que se ha llegado a viralizar. Varios usuarios retaban de esta forma a sus seguidores a intentar dibujar la siguiente figura sin levantar el lápiz del papel (o el dedo de la pantalla).



Las redes se llenaron de millares de usuarios que trataban de dar solución al problema, y solo eran unos pocos los que acertaban en la respuesta: *es matemáticamente imposible*. Sin embargo, aquellos que contestaban bien argumentaban: "*lo dijo mi profesora de Matemáticas cuando le pregunté*"; ya… pero, ¿por qué?

La respuesta la tiene la Teoría de Grafos. Estamos buscando recorrer todas las aristas desde un vértice sin pasar dos veces por una misma arista y regresar al vértice inicial… *¿te suena de algo?* ¡Estamos buscando un ciclo euleriano! Sin embargo, debes notar cómo todos los vértices del grafo tienen grado impar, concretamente, grado 3. Recuerda que para que un grafo contenga al menos un ciclo euleriano el número de vértices con grado impar no debe exceder de 2, y el resto debe tener grado par.

Como esto no sucede, podemos decir que el grafo no contiene ningún ciclo euleriano y por tanto, la respuesta es: *no se puede hacer*.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

RESUMEN

Definición de matriz	Tabla de números ordenados	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
Dimensión de una matriz	El número de filas (m) y el número de columnas (n)	La dimensión de la matriz anterior es 2×3.
Igualdad de matrices	Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y si los términos que ocupan la misma posición son iguales	$A = B \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \ \forall\, i,j$
Tipos de matrices	Matriz fila: $\begin{pmatrix} 31 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ Matriz columna: $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ Matriz triangular de dimensión 2×2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Matriz diagonal: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz escalar: $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz unidad: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Suma de matrices	Se suman los elementos que ocupan la misma posición: $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
Producto de un real por una matriz	Es otra matriz de elementos los de la matriz multiplicados por el número: $kA = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$	$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$
Producto de matrices	$\left.\begin{matrix} A = (a_{ij}) \\ B = (bij) \end{matrix}\right\} \rightarrow C = A \cdot B = (a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}) \quad \Big\vert\, c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$
Matriz inversa	$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/13 & 3/13 \\ 5/13 & -2/13 \end{pmatrix}$
Matriz traspuesta	Se obtiene cambiando filas por columnas.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{t} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
Rango de una matriz	Número de filas o columnas de la matriz que son **linealmente independientes**, es decir, que no pueden obtenerse a partir de las demás filas o columnas de la misma matriz.	El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ es 1.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Vídeo de un problema de selectividad resuelto: Matrices Selectividad CCSS Matemáticas 2º Bachillerato Academia Usero Estepona

https://www.youtube.com/watch?v=oqXLhWk-WcU

1. - Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

calcula:

a) $A+B$ b) $A-B-C$ c) $3\cdot A+5\cdot B-6\cdot C$

2. - Para las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Es el producto conmutativo?

3. - Calcula los productos posibles entre las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

4.- Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

calcula $3\cdot A^t-B^2$.

5.- Para las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0 & 1\\ -5 & 1 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

realiza las siguientes operaciones si es posible:

a) $A+B$ b) $3\cdot A-4\cdot B$ c) $A\cdot B$ d) $A\cdot D$ e) $B\cdot C$ f) $C\cdot D$ g) $A^t\cdot C$

6. - ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas puedan existir $A\cdot B$ y $B\cdot A$?

7. - a) Calcula A^{50} y A^{97} para la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

b) Encuentra los valores de a y b para que la matriz A conmute con la matriz

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}.$$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

8. - Calcula A^n, para $n \in \mathbb{N}$, siendo A las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9.- Se dice que dos matrices A y B conmutan si $A \cdot B = B \cdot A$. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

halla las matrices B que conmuten con A.

10. - Encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. - Sean las matrices:

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix} \quad , \quad D = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 3 & m \end{pmatrix}$$

Calcula cada uno de los productos $A \cdot B$, $D \cdot E$, $E \cdot B$, $C \cdot E$.

12.- Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$ dos matrices de orden 2×3, en las que x, y, z denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

b) ¿Es posible el cálculo de $A \cdot B$? Razona la respuesta.

13.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X, tal que $X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Una matriz Y tal que $A \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. - Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15.- Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $(AB)^t$ y $(AB)^{-1}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

16.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz inversa de A
b) Comprueba que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
c) Halla una matriz X tal que $A \cdot X = B$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

17.- Calcula la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. - Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

obtén, si procede, $(B \cdot A)^{-1}$.

19.- Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de $A \cdot B$

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

20. – Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

comprueba que $A^t = A^{-1}$ y calcula $\left(A \cdot A^t\right)^{2003}$.

21.- Sean las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla C^{-1} y D^{-1}

b) Calcula la matriz inversa de $C \cdot D$

c) Comprueba que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

22.- Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

23. - Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$

b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

24. - Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $X \cdot A \cdot B - X \cdot C = 2 \cdot C$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

27.- Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

28. - Obtener las matrices X e Y que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.

a) $\begin{cases} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$

29. - Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

30. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales. La matriz $A=\begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75 \\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

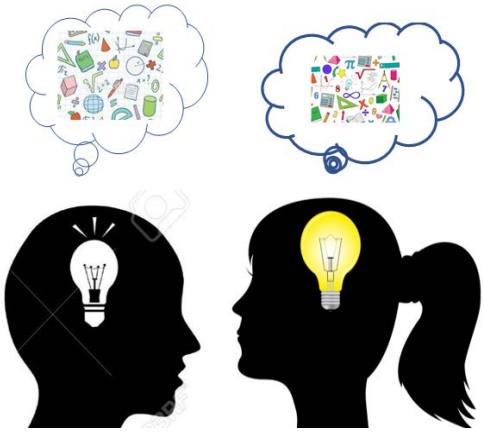
b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

31. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	**Conferencias dadas**	**Viajes**
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor *C*	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

32. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 en la *L* y 30 en la *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.



a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

33. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$. Justifica el resultado.

34. - Sean A y B dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si A y B son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto $A\cdot B$.
Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

35. - Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo r y s dos números reales tales que $r \cdot s \neq 1$.

Calcula M^2, M^3, M^4 y M^{2k} para $k \in \mathbb{N}$.

36. - Sea el conjunto de matrices definido por:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R \right\}$$

a) Comprueba que $A, B \in \mathbb{M}$, también $A + B \in \mathbb{M}$ y $A \cdot B \in \mathbb{M}$

b) Encuentra todas las matrices $C \in \mathbb{M}$, tales que $C^2 = C$.

37. - Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A \cdot B$ es una matriz ortogonal.

38. – Considera las matrices A, B y C definidas como:

$$A_{3\times3} = (a_{ij} = i + j), \forall i, j = 1,2,3$$

$$B_{2\times3} = (b_{ij} = i - j), \forall i = 1,2; j = 1,2,3$$

$$C_{3\times2} = (c_{ij} = 2i + j), \forall i = 1,2,3;, j = 1,2$$

a) Construye las tres matrices.

b) Halla las traspuestas A^t, B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.

c) Analiza cuáles de los productos $A \cdot A$, $A \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$, $B \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot A$, $C \cdot B$ o $C \cdot C$ pueden realizarse.

d) Determina el rango de las tres matrices A, B y C.

39. – Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

En la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Calcula M^2.

b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprueba que $P^2 = P$.

d) Comprueba que $P \times M = M \times P = O$.

Puedes ver muchos problemas de selectividad resueltos en SELECTIVIDAD, de distintos años y diferentes comunidades autónomas.

También en Problemas resueltos por el alumnado tienes problemas de matrices resueltos por estudiantes de un instituto

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$

1.- La dimensión de la matriz A es:

a) 3 b) 2 c) 2 x 3 d) 3 x 2

2.- La matriz A es:

a) una matriz fila b) cuadrada c) traspuesta d) rectangular

3.- La suma de las matrices A y B es:

$a)\ A+B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$ $b)\ A+B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 5\\ 3 & 5 & -9\end{pmatrix}$ $c)\ A+B=\begin{pmatrix}6 & -1 & 5\\ 3 & 4 & -5\end{pmatrix}$ $d)\ A+B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\ 3 & 4 & -9\end{pmatrix}$

4.- El producto $3A$ es:

$a)\ 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 3 & 4 & -7\end{pmatrix}$ $b)\ 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -9\end{pmatrix}$ $c)\ 3A=\begin{pmatrix}15 & -6 & 0\\ 9 & 12 & -21\end{pmatrix}$ $d)\ 3A+B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -21\end{pmatrix}$

5.- Indica qué afirmación es cierta

a) Las matrices A y B se pueden multiplicar b) Las matrices A y B no se pueden multiplicar

c) Ambas tienen matriz inversa d) Sus matrices traspuestas son iguales

Dadas las matrices $C=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$; $F=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$

6.- La matriz identidad es la matriz: a) C; b) D; c) E; d) F.

7.- El producto de las matrices E y F es:

$a)\ EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 0 & 13 & 8\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$ $b)\ EF=\begin{pmatrix}1 & 5 & 13\\ 0 & 12 & 8\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$ $c)\ EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 0 & 13 & 8\\ 2 & 13 & 9\end{pmatrix}$ $d)\ EF=\begin{pmatrix}1 & 6 & 15\\ 4 & 13 & 8\\ 2 & 10 & 21\end{pmatrix}$

8.- La matriz inversa de la matriz F es:

$a)\ F^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $b)\ F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 11 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $c)\ F^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $d)\ F^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 12 & 4 & 1\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$

9.- La matriz traspuesta de la matriz F es:

$a)\ F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $b)\ F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $c)\ F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $d)\ F^{t}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

10.- El rango de la matriz C es:

a) 3 b) 2 c) 1 d) no tiene

Autores: Leticia González y Álvaro Valdés
Revisores: Eduardo Cuchillo y Javier Rodrigo
Textos Marea Verde