MATEMÀTIQUES I

1r de Batxillerat

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

TEXTOS MAREA VERDE

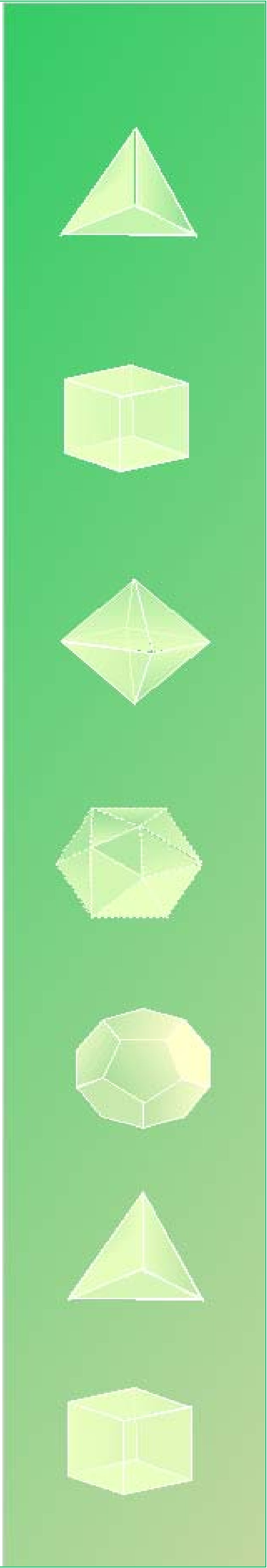
LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-606-9050-4

I.S.B.N. - 10: 84-606-9050-4

Textos Marea Verde



MATEMÀTIQUES I
1r Batxillerat
Capítol 1: Nombres reals i complexos

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz y Paco Moya

Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)

Revisora: Rosa María Herrera

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índex

Resum

La variable complexa permet resoldre problemes molt diferents dins d'àrees tan diverses com poden ser la hidràulica, l'aerodinàmica, l'electricitat, l'electromagnetisme, entre d'altres. Alguns d'ells només requereixen el coneixement dels nombres complexos, com passa en el càlcul dels valors propis associats a sistemes d'equacions diferencials lineals. D'altres, en canvi, requereixen la utilització de la teoria de les funcions analítiques complexes, com els problemes de contorn que apareixen, per exemple, en l'estudi dels fluxos de fluids, la conducció de la calor, l'elasticitat o el potencial electroestàtic. Sabies que la forma de l'ala dels avions es dissenya mitjanjant operacions amb nombres complexos? Es pot dir que l'ésser humà és capaç de volar gràcies a ells.

Molts problemes geomètrics poden resoldre's utilitzant les transformacions complexes. Per a resoldre molts d'aquests problemes n'hi ha prou amb conèixer el que estudiaràs en aquest capítol, però per alguns altres (transformacions, funcions analítiques) caldrà esperar a saber-ne més.

Si ens quedem només dins de les Matemàtiques, és interessant estudiar la variable complexa per estar estretament relacionada amb diferents àrees, de manera que el seu estudi pugui fer accessible part de l'àlgebra, de la trigonometria o proporcioni eines per al càlcul intregral.

Els antics algebristes van operar amb expressions on apareixia $\sqrt{-1}$. Leibniz, al segle XVII, encara deia que $\sqrt{-1}$ era *"una espècie d'amfibi entre l'ésser i el no-res"*. El 1777 Euler va anomenar i (per *imaginari*) el *"monstre"* $\sqrt{-1}$. Però atenció, que no us faci equivocar el nom, imaginari no vol dir il·lusori, inexistent o alguna cosa així. El l'actualitat aquesta notació es fa servir de manera gairebé universal, excepte en enginyeria elèctrica, on es fa servir *j* en lloc de i, ja que la lletra i es fa servir per indicar la intensitat del corrent.

Quan es va desenvolupar la teoria dels nombres complexos, l'electricitat era una matèria d'interès només de laboratori. Però abans del final del segle XIX els descobriments sobre electricitat i electromagnetisme van transformar el món, i en aquest procés els nombres complexos van ser una eina que va simplificar el càlcul amb corrents alterns. Això demostra que coneixements que són matemàtica pura per a una generació es converteixen en aplicats per a la següent.

1. NOMBRES REALS

1.1. Nombres racionals i irracionals

Recorda que:

Ja coneixes els diferents tipus de conjunts numèrics:

Naturals ➔ $\mathbb{N}$ = {0, 1, 2, 3, …}

Enters ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …}

Racionals ➔ $\mathrm{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$.

Els nombres racionals també contenen els nombres que tenen expressió decimal exacta (0'12345) i els que tenen expressió decimal periòdica (7'01252525...) Si el denominador (de la fracció irreductible) només té com a factors primers potències de 2 o 5 l'expressió decimal és exacta. Si el denominador (de la fracció irreductible) té algun factor primer que no sigui ni 2 ni 5 la fracció tindrà una expressió decimal periòdica.

Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica; i tota expressió decimal exacta o periòdica es pot escriure en forma de fracció.

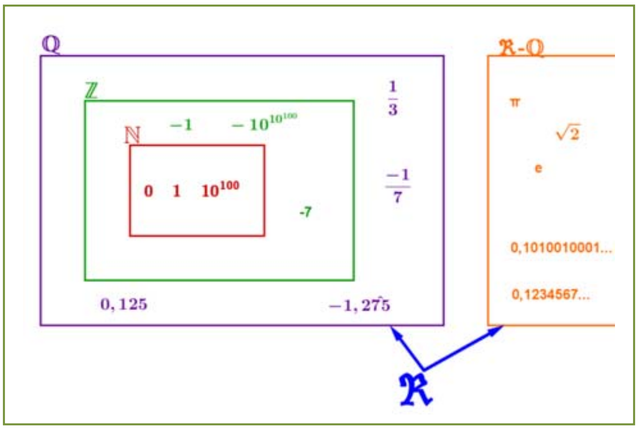
Però ja saps que existeixen nombres que no són racionals. Per exemple $\sqrt{2}$ **no** pot posar-se com a fracció. Tots aquest nombres, per exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, π ... juntament amb els nombres racionals formen el conjunt dels **nombres reals**. Als nombres reals que no són nombres racionals se'ls anomena **nombres irracionals**.

L'expressió decimal dels **nombres** irracionals és d'infinites xifres no periòdiques.

Per tant

Irracionals ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathrm{Q}$.

El conjunt dels **nombres** reals està format per la unió dels nombres racionals i dels nombres irracionals.



Reals ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

Tenim per tant que: $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re$.

$$\mathrm{I} \subset \Re$$

Activitats proposades

1. Decidiu mentalment quines de les següents fraccions tenen una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica:

a) 1/9 b) 7/5 c) 9/50 d) 2/25 e) 1/8 f) 3/22

2. Trobeu l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici 1 i comproveu si la vostra deducció era correcta.

3. Calculeu l’expressió decimal de les següents fraccions:

a) 1/5 b) 1/3 c) 5/9 d) 2/25 e) 11/400 1/11

4. Escriviu en forma de fracció les següents expressions decimals exactes i redueixles. Després comproveu-ho amb la calculadora:

a) 8’35; b) 791’297835; c) 0’47

5. Escriviu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, reduïu-les i comproveu-ho:

a) 9’464646….. b) 91’02545454…. c) 0’9999….. d) 3’267123123123…..

6. Podeu demostrar que 4,99999… és igual a 5? Calculeu quant val 2,5999…? *Ajuda*: Escriviu-los en forma de fracció i simplifiqueu.

7. Demostreu que $\sqrt[3]{7}$ és irracional.

8. Quantes xifres pot tenir com a màxim el període de $\frac{1}{47}$?

9. Quants decimals té $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$? Podeu dir per què?

10. Feu la divisió 999999:7 i després fes 1:7, és casualitat?

11. Ara dividiu 999 entre 37 i després 1:37, és casualitat?

1.2. La recta real

Densitat dels nombres reals

Els nombres reals són densos, és a dir, entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres.

Aquest fet és fàcil de deduir: si a, b són dos nombres amb $a < b$ sabem que $a < \frac{a+b}{2} < b$, és a dir, la mitjana és entre els dos nombres. Com que podem fer això tantes vegades com vulguem, d’aquí el resultat.

Curiosament els racionals també són densos, així com els irracionals.

Activitats proposades

12. Escriviu 3 nombres reals que estiguin entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i 1.

13. Escriviu 5 nombres racionals que estiguin entre $\sqrt{2}$ y 1’5.

14. Escriviu 5 nombres irracionals que estiguin entre 3’14 y π.

Representació a la recta real dels nombres reals

Un cop escollit l’origen de coordenades i la mida de la unitat (o, el que és el mateix, si col·loquem el 0 i l’1) tot nombre real ocupa una posició a la recta numèrica i a l’inrevés, tot punt de la recta es pot fer correspondre a un nombre real.

El curs passat vàreu estudiar com representar a la recta real fraccions i arrels.

Activitats proposades

15. Representeu a la recta numèrica els següents nombres:

a) $\frac{9}{5}$, b) $\frac{-13}{4}$, c) 1'342, d) –2'555555….

16. Representeu a la recta numèrica:

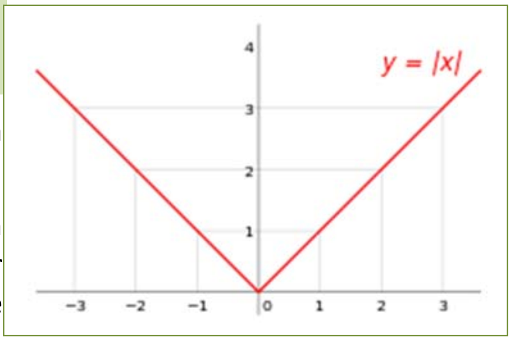
a) $\sqrt{10}$, b) $-\sqrt{6}$, c) $\sqrt{27}$, d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1.3. Valor absolut

El valor absolut o mòdul d'un nombre equival al valor del nombre ignorant el signe. Per exemple, el valor absolut de –1 és 1, i el valor absolut de +1, també és 1.

En llenguatge formal, el valor absolut es defineix de la següent forma:

$$|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



Si representem aquesta funció en uns eixos coordenats, resulta una gràfica com la del costat.

Com que el valor absolut és una funció molt important en matemàtiques, té el seu propi símbol. Per a escriure el valor absolut d'un nombre x, n'hi ha prou amb posar el nombre entre dues barres: $|x|$.

El valor absolut d'un nombre x s'obté suprimint el signe, i s'anota amb el símbol $|x|$.

Exemple:

- El valor absolut de –32 és 32, igual que el valor absolut de +32. Escrit en llenguatge seria:

$$|-32| = 32 = |+32|.$$

Activitats proposades

17. Trobeu el valor absolut dels següents nombres: a) 5 b) –5 c) –π

Per a què serveix?

El valor absolut es fa servir principalment per a definir quantitats i distàncies en el món real. Els nombres negatius són una construcció matemàtica que s'utilitza en el càlcul, però a la realitat no hi ha quantitats negatives. No podem viatjar una distància de –100 quilòmetres, o menjar–3 caramels. Això és degut a que el temps només transcorre en una direcció (positiva per convenció), però això no entra en l'àmbit de les matemàtiques sinó en el de la física.

El valor absolut es fa servir per a expressar quantitats o longituds vàlides en el món real, com la distància.

Exemple:

- Faig un viatge d'anada i tornada fins una ciutat que es troba a 40 km de casa meva. Després de fer el viatge, sóc al mateix punt, així que la meva posició no haurà canviat, això és

Posició = 40 km – 40 km = 0

Això no vol dir que no hagi recorregut una distància. Hi ha dues quantitats a tenir en compte, una distància d'anada i una altra de tornada, en total serà:

L = |40| km + |–40| km = 80 km

Les propietats del valor absolut són:

- No negativitat: $|a| \geq 0$.
- Simetria: $|a| = |-a|$
- Definició positiva: $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$.
- Valor absolut i producte: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- Desigualtat triangular: $|a + b| \leq |a| + |b|$

Activitats resoltes

- *Demostra que el valor absolut no pot ser mai negatiu.*

1 – No negativitat

Por definició, la funció valor absolut només canvia el signe quan l'operand és negatiu, així que no pot existir un valor absolut negatiu.

Demostra que el valor absolut d'un nombre i el seu oposat coincideixen.

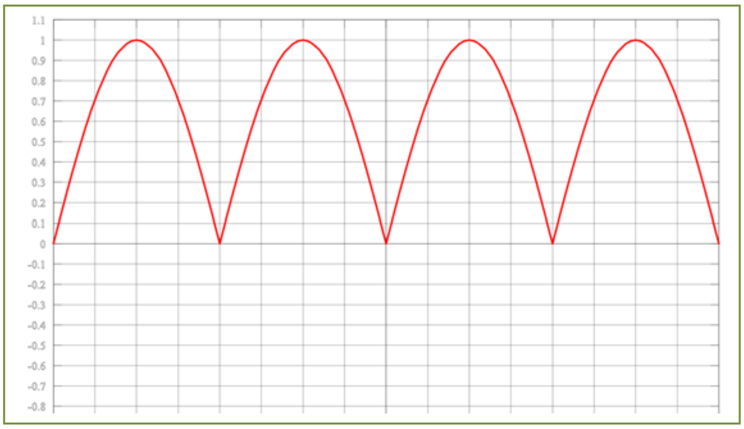
2 - Simetria.

Si $a > 0 \Rightarrow |a| = a$

Si $a < 0 \Rightarrow |-a| = -a$

En qualsevol cas $|a| = |-a|$

- *Representa la funció* $f(x) = |sin(x)|$



Activitats proposades

18. Representa les següents funcions:

a) $f(x) = |x^2|$

b) $f(x) = |x^2 – 1|$

c) $f(x) = |cos\ x|$

d) $f(x) = |\sqrt{x}|$

1.4. Desigualtats

Ja sabeu que:

Una desigualtat és una expressió numèrica o algebraica unida per un dels quatre símbols de desigualtat: $<, >, \leq, \geq$.

Per exemple:

- $-4 < 2$, $7 \geq x + 1$, $x^2 - 14 \geq x$, $2x + 3y \geq 7$.

Una **inequació** és una desigualtat algebraica en què apareixen una o més incògnites.

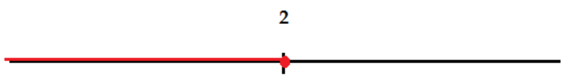
El **grau** d'una inequació és el més gran dels graus a què estan elevades les seves incògnites.

Per exemple:

- $7 \geq x + 1$ és una inequació de primer grau, mentre que $x^2 - 14 \geq x$ és de segon grau.

Resoldre una inequació consisteix a trobar els valors que la verifiquen. Aquests s'anomenen **solucions** de la inequació.

Per exemple:

- $7 \geq x + 5 \Leftrightarrow x \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \Leftrightarrow$ 

Inequacions equivalents:

Dues inequacions són equivalents si tenen la mateixa solució.

A vegades, per resoldre una inequació, resulta convenient trobar-ne una altra d'equivalent més senzilla. A tal efecte, es poden realitzar les següents transformacions:

1. Sumar o restar la mateixa expressió als dos membres de la inequació.
2. Multiplicar o dividir els dos membre per un nombre **positiu**.
3. Multiplicar o dividir els dos membres per un nombre **negatiu** i canviar el signe de la desigualtat.

Recordeu que:

1. Per a tot c, si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. Si $c > 0$ y $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
3. Si $c < 0$ y $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Exemples

- $3x + 6 < 12 \Leftrightarrow 3x + 6 - 6 < 12 - 6 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x : 3 < 6 : 3 \Leftrightarrow x < 2$.
- $7 \geq x + 1 \Leftrightarrow 7 - 1 \geq x + 1 - 1 \Leftrightarrow 6 \geq x$.
- $-x < 5 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -5$

Activitats proposades

19. Donada la següent inequació $3 + 2x < 5x^2 + 1$, determineu quins dels següents valors en són solució:

0, 1, –1, 2, –2, 3, –4, 6, –7, 12, –15

20. Escriviu una desigualtat que sigui certa per a $x = 5$ i falsa per a $x = 5'5$.

1.5. Distància a la recta real

Una **distància** és una mesura que té unes determinades propietats:

1) No negativitat.

2) Simetria.

3) Propietat triangular.

La distància entre dos nombres reals x i y es defineix com:

$$\mathbf{Dist}(x, y) = |x - y|$$

Verifica les propietats indicades abans ja que:

1) A l'estar definida amb el valor absolut sempre és un nombre no negatiu. La distància entre dos punts te valor zero només si els dos punts són coincidents:

$$0 = \mathrm{Dist}(x, y) = |x - y| \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y.$$

2) Simetria: $\mathrm{Dist}(x, y) = |x - y| = |y - x| = \mathrm{Dist}(y, x)$.
3) Propietat triangular: $\mathrm{Dist}(x, y) \leq \mathrm{Dist}(x, z) + \mathrm{Dist}(z, y)$.

Exemple:

- $\mathrm{Dist}(3, 8) = |8 - 3| = 5$
- $\mathrm{Dist}(-2, -9) = |-9 - (-2)| = |-9 + 2)| = |-7| = 7$
- $\mathrm{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6$
- $\mathrm{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14$

Exemple:

- *Si som al soterrani 9è y pugem al pis* 5è, *quants pisos hem pujat?*

Com hem vist a l'exemple anterior, hem pujat en total 14 pisos.

$$\mathrm{Dist}(-9, 5) = |5 - (-9)| = |5 + 9)| = |14| = 14.$$

- *Si el termòmetre marca* –1 ºC *i després marca* ºC, quants graus ha pujat la temperatura*?*

Com hem vist en l'exemple anterior, la temperatura ha pujat 6 ºC. Fixeu-vos que l'escala termomètrica que hem fet servir és la Celsius. N'hi ha d'altres, que ja estudiareu a física.

$$\mathrm{Dist}(-1, 5) = |5 - (-1)| = |5 + 1)| = |6| = 6.$$

Activitats proposades

21. Representeu a la recta real i calculeu la distància entre els nombres següents:

a) $\mathrm{Dist}(5,\ 9)$ b) $\mathrm{Dist}(-2'3,\ -4'5)$

c) $\mathrm{Dist}(-1/5,\ 9/5)$ d) $\mathrm{Dist}(-3'272727\ldots,\ 6'27272727\ldots)$.

1.6. Intervals i entorns

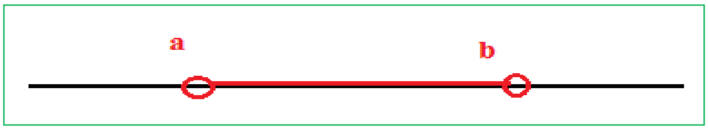
Recordeu que:

Un interval de nombres reals és un conjunt de nombres corresponents a una part de la recta numèrica i, en conseqüència, un interval és un subconjunt del conjunt dels nombres reals.

Tipus d'intervals

Interval obert: és l'interval en què els extrems no en formen part, és a dir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems formen part de l'interval, excepte els propis extrems.

En altres paraules $\mathrm{I} = (a, b) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x < b\}$, observeu que es tracta de desigualtats estridctes.

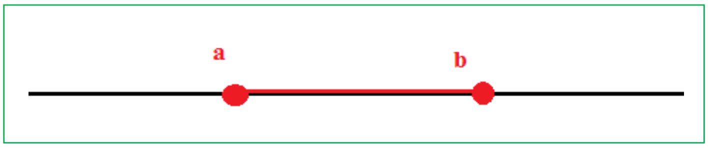


Gràficament ho representem a la recta real de la següent forma:

Interval tancat: és l'interval en què els extrems sí en formen part, és adir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems, incloent-los, formen part de l'interval.

En altres paraules $\mathrm{I} = [a, b] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \le x \le b\}$, observeu que ara no es tracta de desigualtats estrictes.

Gràficament:



Interval semiobert: és l'interval en què només un dels extrems en forma part, és a dir, tots els punts de la recta compresos entre els extrems, incloent-hi un d'ells, formen part de l'interval.

Interval semiobert per l'esquerra, l'entrem inferior no forma part de l'interval peró sí el superior, en altres paraules,

$$\mathrm{I} = (a, b] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x \le b\},$$

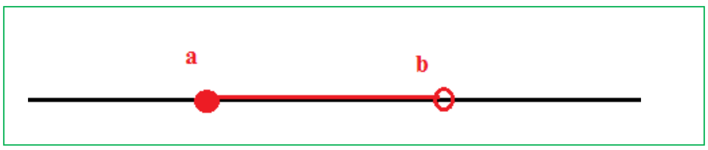
observeu que l'extrem que queda fora de l'interval va associat a una desigualtat estricta.

Interval semiobert per la dreta, l'extrem superior no forma part de l'interval però l'inferior sí, en altres paraules

$\mathrm{I} = [a, b) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \le x < b\}$

observeu que l'extrem que queda fora de l'interval va associat a una desigualtat estricta.

Gràficament:



Semirectes reals

Semirecta dels nombres positius $S^+ = (0, \infty)$, és a dir, de zero a infinit.

Semirecta dels nombres negatius $S^- = (-\infty, 0)$, és a dir, de menys infinit, l'infinit negatiu, fins a zero.

Amb la qual cosa tota la recta dels nombres reals és $\Re = (-\infty, \infty) = (S+) \cup (S-) \cup \{0\}$.

A una semirecta se la pot considerar com un interval infinit.

Entorns

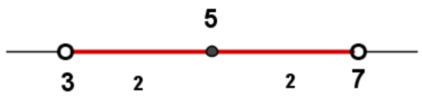
És una forma especial d'expressar els intervals oberts.

Es defineix l'entorn de centre a i radi r i es nota $\boldsymbol{E(a, r)}$ (una altra forma usual és $E_r(a)$) com el conjunt de nombres que són a una **distància d'*a* menor que *r*.**

S'entén millor amb un exemple:

Exemple:

- L'entorn de centre 5 i radi 2 són els nombres que són a una distància de 5 menor que. Si ho pensem una mica, seran els nombres entre 5 – 2 i 5 + 2, és a dir, l'interval (3,7). És com agafar el compàs i amb centre 5 marcar amb obertura 2.

$E(5,2) = (3,7) \Rightarrow$ 

Fixeu-vos que el 5 és al centre i la distància del 5 al 7 i al 3 és 2.

$$\boldsymbol{E(a, r) = (a - r, a + r)}$$

Exemple:

- $E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$

És molt fàcil passar d'un entorn a un interval. Fem-ho a l'inrevés.

Exemple:

- *Si tinc l'interval obert* (3, 10), com es posa en forma d'entorn?

Trobem el punt mitjà $\frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$ = 6'5 que serà el centre de l'entorn. Ens falta trobar el radi:

(10 – 3) : 2 = 3'5 és el radi (la meitat de l'amplada). Per tant (3, 10) = E(6'5, 3'5)

En general:

L'interval $(b,\ c)$ és l'entorn $E\left(\dfrac{b+c}{2}, \dfrac{c-b}{2}\right)$.

Exemple:

- *L'interval* (–8, 1) = $E\left(\dfrac{-8+1}{2}, \dfrac{1-(-8)}{2}\right) = E(-3'5,\ 4'5)$

També existeixen els entorns tancats però són d'ús menys freqüent.

Activitats proposades

22. Escriviu els següents intervals mitjançant conjunts i representeu-los a la recta real:

a) [1, 7) b) (–3, 5) c) (2, 8] d) (–∞, 6)

23. Representeu a la recta real i escriviu en forma d'interval:

a) $2 < x < 5$ b) $4 < x$ c) $3 \leq x < 6$ d) $x \leq 7$

24. Expresseu com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representeu gràficament:

a) Un percentatge superior al 26 %.

b) Edat inferior o igual a 18 anys.

c) Nombres el cub dels quals sigui superior a 8.

d) Nombres positius la part entera dels quals té 3 xifres.

e) Temperatura inferior a 25 ºC.

f) Nombres per als quals existeix l'arrel quadrada (és un nombre real).

g) Nombres que siguin a una distància de 5 inferior a 4.

25. Expresseu en forma d'interval els següents entorns:

a) E(1, 5)

b) E(–2, $\frac{8}{3}$)

c) E(–10, 0'001)

26. Expresseu en forma d'entorn els següents intervals:

a) (4, 7)

b) (–7, –4)

c) (–3, 2)

27. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com un interval de nombres reals? ****Pista***: 600,222333€ pot ser un sou?

1.7. Aproximacions i errors

Recordeu que:

Sovint cal fer aproximacions per motius pràctics o treballar amb nombres aproximats ja que per exemple no es coneixen els valors exactes. Així, per exemple, si ens pesem en una bàscula i marca 54'4 Kg, quant pesem exactament? No es pot saber, el màxim que podem dir és que el nostre pes és entre 54'3 i 54'5 si l'error màxim és de 100 g.

Error Absolut

Es defineix Error Absolut (EA) com $EA = |valor\ real - valor\ aproximat|$.

Exemple:

Si aproximem $\pi \approx$ 3'1416 tindrem que EA = $|\pi$ – 3'1416$|$ ≈ $|$–00000073$|$ ≈ 0'0000073 unes 7 milionèssimes. Observeu que si no es coneix el valor real no podem calcular exactament el valor absolut, però sí aproximar-lo calculant una cota de l'error.

Cota de l'Error Absolut:

Podem conèixer una cota de l'error absolut tenint en compte l'ordre d'aproximació. Així, si hem arrodonit a les deumil·lèssimes (com en l'exemple) sempre podem afirmar que EA ≤ 0'00005, és a dir, menor o igual que la meitat del valor de la xifra d'arrodoniment o 5 unitats de la següent (5 centmil·lèssimes), que és el mateix.

Activitats resoltes

- *Calcula la cota de l'error absolut de N ≈ 3'7* → $EA \leq$ 0'05. I la cota de l'error de *N* ≈ 300 és $EA \leq$ 50 si suposem que hemos arrodonit a les centenes.

Error Relatiu

Per comparar errors de diferents magnituds o nombres es defineix l'Error Relatiu(ER) com:

$$ER = \frac{EA}{|Valor\ real|}$$

que sol multiplicar-se per 100 per parlar del % d'error relatiu.

Si no es coneix el valor real se substitueix pel valor aproximat (la diferència és normalment petita).

Activitats resoltes

- Si aproximem l'arrel de 3 per 1'73, l'error relatiu comès és:

$$\sqrt{3} \approx 1'73 \to EA \approx 0'0021 \to ER = \frac{0'0021}{\sqrt{3}} \approx \frac{0'0021}{1'73} = 0'00121387 \to 0'12\ \%$$

- En les aproximacions A = 7'4 amb $EA \leq$ 0'05 i B = 970 amb $EA \leq$ 5, en quina estem cometent proporcionalment menys error?

Calculem els error relatius:

$$\text{A} \rightarrow ER \leq \frac{0'05}{7'4} \approx 0'00675 \rightarrow ER \leq 0'68\ \%$$

$$\text{B} \rightarrow ER \leq \frac{5}{970} \approx 0'00515 \rightarrow ER \leq 0'52\ \%$$

És millor aproximació la de B.

Control de l'error comès

Recordeu que:

En cada suma o resta l'error absolut és la suma dels errors absoluts. Per tant pot augmentar perillosament si fem diverses sumes i restes.

Els errors relatius se sumen al multiplicar dos nombres.

Activitats resoltes

- Mesurem el radi d'una circumferència amb un regle mil·limetrat i marca 7'0 *cm*. Volem calcular l'àrea del cercle. L'error màxim en el radi és de 0'05 cm i per tant pot estar entre 6'95 i 7'05. Si apliquem la fórmula πr^2 per a aquests valors obtenim 151'7 y 156'1, que són els valors mínim i màxim. La diferència és 4'4 i la seva meitat 2'2 que és la cota de l'error absolut. Diem que A = 153'9 $\pm$ 2'2 *cm*^{2}.

$$\text{A} \rightarrow ER \leq \frac{2'2}{153'9} \approx 0'0143 \rightarrow ER \leq 1'43\ \%$$

$$r \rightarrow ER \leq \frac{0'05}{7} \approx 0'00714 \rightarrow ER \leq 0'71\ \%$$

El radi tenia una cota de 0'71 %, per tant hem perdut precisió.

Si operem amb nombres aproximats, i pitjor encara, si ho fem en repetides ocasions, els errors es van acumulant fins al punt de poder fer-se intolerables.

Activitats proposades

28. Arrodoneix $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a fins les dècimes i troba els errors absolut i relatiu comesos.

29. Troba una fita de l'error absolut en les següents aproximacions:

a) 5'8 b) 417 c) 417'00

30. Una balança té un error en les seves mesures inferior a 40g. Fem servir aquesta balança per elaborar un lot de 5 paquets de cafè de mig quilogram cadascun. Determina el pes mínim i màxim del lot. Quina és la cota de l'error absolut per al lot?

1.8. Notació científica

Recordeu que:

La notació científica es fa servir per escriure nombre molt grans o molt petits.

Un nombre posat en notació científica $N = a'bcd...\cdot 10^n$ consta de:

- ✓ Una part entera formada per una sola xifra que no és zero (***a***).
- ✓ La resta de xifres significatives posades com a part decimal (*b c d...*).
- ✓ Una potència de base 10 que dona l'ordre de magnitud del nombre (10^n).

Si *n* es positiu, el nombre *N* és "gran"

Si *n* es negatiu, aleshores *N* és "petit"

Exemples:

- $3'45 \cdot 10^{14}$ (= 346000000000000): Nombre gran.
- $6'789 \cdot 10^{-18}$ (= 0'000000000000000006789): Nombre petit.

Operacions amb notació científica

Recordeu que:

Per operar amb nombres donats en notació científica es procedeix de forma natural, tenint en compte que cada nombre està format per dos factors: l'expressió decimal i la potència de base 10.

- ✓ Per **multiplicar** nombres en notació científica, es multipliquen les parts decimals i se sumen els exponents de la potència de base 10.
- ✓ Per **dividir** nombres en notació científica, es divideixen les parts decimals i es resten els exponents de la potència de base 10.
- ✓ Si cal es multiplica o divideix el nombre resultats per una potència de 10 per deixar amb una sola xifra la part entera.

Exemples:

a) $(3'7 \cdot 10^6) \cdot (4'2 \cdot 10^8) = (3'7 \cdot 4'2) \cdot 10^{6+8} = 15'54 \cdot 10^{14} = 1'554 \cdot 10^{15}$

b) $\dfrac{3'7 \cdot 10^6}{4'2 \cdot 10^{-8}} = \dfrac{3'7}{4'2} \cdot 10^{6-(-8)} = 0'8809 \cdot 10^{14} = 8'809 \cdot 10^{13}$

- ✓ Per **sumar o restar** nombres en notació científica, s'han de posar el nombres amb la mateixa potència de base 10, multiplicant o dividint per potències de base 10.
- ✓ Es treu factor comú la potència de base 10 i després se sumen o resten els nombres decimals quedant un nombre decimal multiplicat per la potència de 10.
- ✓ Finalment si fa falta es multiplica o es divideix el nombre resultant per una potència de 10 per deixar a la part entera una sola xifra..

Exemples:

c) $3'7 \cdot 10^9 + 4'2 \cdot 10^{12} = 3'7 \cdot 10^9 + 4200 \cdot 10^9 = (4203'7) \cdot 10^9 = 4'2037 \cdot 10^{12}$

Activitats proposades

31. Calcula i expressa el resultat en notació científica:

a) $(8'91 \cdot 10^{-3}) \cdot (3'67 \cdot 10^{11})$ b) $(4'8 \cdot 10^{-5}) : (6'9 \cdot 10^{-8})$

32. Calcula i expressa el resultat en notació científica:

a) $(5'81 \cdot 10^{-12}) \cdot (4'79 \cdot 10^{9}) + 7'23 \cdot 10^{-4}$ b) $(5'44 \cdot 10^{-7}) : (2'5 \cdot 10^{7}) + 3'1 \cdot 10^{-10}$

MATERIALS PER A L'AULA A INTEF (Banc d'Imatges i Sons)

- ✓ Anàlisi geomètric de la **divisió àuria**. Donat un segment *a* es construeix amb regle i compàs el segment *b* tal que *a/b* estan en proporció àuria.

  183241_am_1.swf

  183241_aa_1.fla

- ✓ Construcció, amb escaire i compàs, d'un **rectangle auri**. Donat un segment *a* es construeix un rectangle auri amb un dels seus costats igual a *a*.

  183279_am_1.swf

  183279_aa_1.fla

- ✓ Construcció, amb escaire i compàs, d'una **espiral àuria**. Donat un rectangle auri es construeixen altres rectangles auris i l'espiral.

  183245_am_1.swf

  183245_aa_1.fla

- ✓ Estudi **auri de la Gioconda** de Leonardo Da Vinci, amb autor José Ángel López Mateos. Sobre el rostre del quadre de la Gioconda es construeixen rectangles auris.

  195440_am_1.swf

  195440_aa_1.fla

2. NOMBRES COMPLEXOS

2.1. Necessitat dels nombres complexos. El nombre i

En el camp real l'equació $x^2 + 1 = 0$ no té solució. El quadrat d'un nombre real és sempre positiu i al sumar-li 1 és impossible que ens doni 0.

Però si es denomina **i** l'arrel quadrada de –1, aleshores

$\mathbf{i}^2 = -1$, per la qual cosa és una solució de l'esmentada equació.

$$\mathbf{i}^2 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{i} = \sqrt{-1}$$

Però no només això. Resulta que introduint únicament aquest nou element, es pot demostrar el que es denomina el *Teorema Fonamental de l'Àlgebra*, que va ser demostrat per Gauss (1799), i ensenya que tota equació polinòmica de grau *n* té exactament *n* arrels (en el camp complex). Anem doncs a estudiar aquests nombres complexos.

Carl Friedrich Gauss (1 777 – 1 855)

2.2. Nombres complexos en forma binòmica. Operacions

Un ***nombre complex*** es defineix com una expressió de la forma:

$$z = x + \mathrm{i}y$$

on x i y són nombres reals.

Aquest tipus d'expressió, $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, s'anomena ***forma binòmica***.

S'anomena ***part real*** de $z = x + \mathrm{i}y$ el nombre real x, que es denota $\mathbf{Re(z)}$, i ***part imaginària*** de $z = x + \mathrm{i}y$, el nombre real y, que es denota $\mathbf{Im(z)}$, per la qual cosa es té que: $z = Re(z) + \mathrm{i}Im(z)$.

El ***conjunt dels nombres complexos*** és, per tant,

$$\mathbf{C} = \{z = x + \mathrm{i}\cdot y;\ x, y \in \Re\};\ \mathrm{Re}(z) = x;\ \mathrm{Im}(z) = y.$$

Aquesta construcció permet considerar els nombres reals com un subconjunt dels nombres complexos, essent ***real*** aquell nombre complex de part imaginària nul·la. Així, els nombres complexos de la forma $z = x + \mathrm{i}\cdot 0$ són nombres reals i es denominen nombre ***imaginaris*** els de la froma $0 + \mathrm{i}\cdot y$, és a dir, amb la part real nul·la.

Dos nombres complexos $z_1 = x + \mathrm{i}y$ i $z_2 = u + \mathrm{i}v$ són ***iguals*** si, i només si, tenen iguals les seves parts reals i les seves parts imaginàries: $x = u$, $y = v$.

Operacions en forma binòmica

Les operacions de suma i producte definides en els nombres reals es poden estendre als nombres complexos. Per a la suma i el producte de dos nombres complexos escrits en forma binòmica: $x + \mathrm{i}y$, $u + \mathrm{i}v$ es tenen en compte les propietats usuals de l'Àlgebra, amb la qual cosa es defineixen:

Suma: $(x + \mathrm{i}y) + (u + \mathrm{i}v) = (x + u) + \mathrm{i}\,(y + v)$

Producte: $(x + \mathrm{i}y)\,(u + \mathrm{i}v) = (x\,u - y\,v) + \mathrm{i}\,(x{\cdot}v + y{\cdot}u)$

Es comprova, de nou, que el quadrat del nombre complex i és un nombre real negatiu, –1, ja que:

$$(0 + \mathrm{i}) \cdot (0 + \mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i}\cdot(0) = -1.$$

Si els nombres complexos són nombres reals, és adir, nombres complexos amb la seva part imaginària nul·la, aquestes operacions es redueixen a les usuals entre nombre reals ja que:

$$(x + \mathrm{i}0) + (u + \mathrm{i}0) = (x + u) + \mathrm{i}\,(0) \qquad (x + \mathrm{i}\cdot 0)\,(u + \mathrm{i}0) = (x\ \square\ u) + \mathrm{i}\,(0)$$

Això permet considerar el cos de nombres reals $\mathfrak{R}$ como un subconjunt dels nombres complexos, $\boldsymbol{C}$. El conjunt dels nombres complexos també té estructura algebraica de cos.

El ***conjugat*** del nombre complex $z = x + y\mathrm{i}$ es defineix com: $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$.

Activitats resoltes

- *Calcula* (2 – i) · (1 + 2i)

Per calcular (2 – i) · (1 + 2i) es procedeix amb les regles usuals de l'Àlgebra tenint en compte que $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$(2 - \mathrm{i})\cdot(1 + 2\mathrm{i}) = 2 + 4\mathrm{i} - \mathrm{i} - 2\mathrm{i}^2 = 2 + 4\mathrm{i} - \mathrm{i} + 2 = 4 + 3\mathrm{i}.$$

- *El conjugat del nombre complex $z = 3 + 5i$, és* $\bar{z} = 3 - 5\mathrm{i}$.

- *Per dividir nombres complexos es multiplica numerador i denominador pel conjugat del denominador, de manera que s'aconsegueix que el denominador sigui un nombre real:*

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1(1-i)}{1^2-(i)^2} = \frac{2(1-i)}{1-(-1)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i\,.$$

- *Per elevar a potències la unitat imaginària es té en compte que $i^2 = -1$, i per tant:*

$$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \qquad \mathrm{i}^4 = 1: \qquad \mathrm{i}^6 = -1, \qquad \mathrm{i}^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{1\cdot i}{(-i)(i)} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i.$$

- *Calculeu* $(1 + \mathrm{i})^4$.

Utilitzant el binomi de Newton s'obté:

$$(1+\mathrm{i})^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}\mathrm{i} + \binom{4}{2}\mathrm{i}^2 + \binom{4}{3}\mathrm{i}^3 + \binom{4}{4}\mathrm{i}^4 = 1 + 4\mathrm{i} - 6 - 4\mathrm{i} + 1 = -4.$$

Activitats proposades

33. Comproveu que:

a) $(1 - \mathrm{i})^4 = -4$

b) $\dfrac{5+10\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \dfrac{2-\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -2$

c) $(1 + \mathrm{i})^5 = -4 - 4\mathrm{i}$

34. Realitzeu les següents operacions amb nombres complexos:

a) $\dfrac{68}{(1-\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})\cdot(3-\mathrm{i})}$

b) $(2 + \mathrm{i}) - \mathrm{i}\,(1 - 2\mathrm{i})$

c) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} + \dfrac{3+\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$

d) $(3 - 2\mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})$

35. Calculeu: (*Ajuda*: substituïu z per $x + \mathrm{i}y$)

a) $Im\,\dfrac{\bar{z}}{z}$

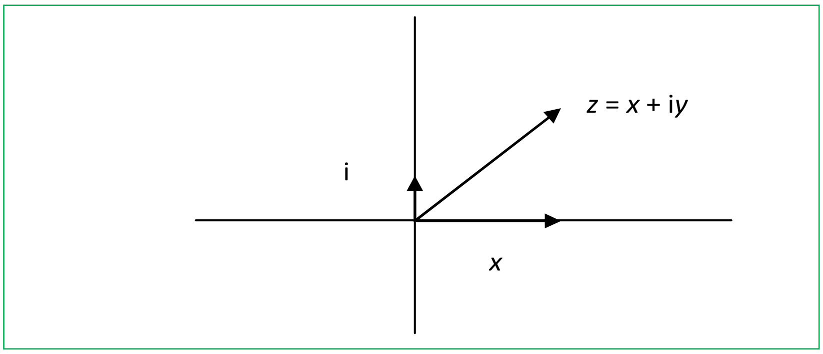
b) $Re(z^4)$

c) $(Re(z))^4$

Representació dels nombres complexos al pla

El desenvolupament modern dels nombres complexos començà amb el descobriment de la seva interpretació geomètrica, que fou exposada indistintament per *John Wallis* (1685) i ja de forma completament satisfactòria per *Caspar Wessel* (1799). El treball de *Wessel* no va rebre cap atenció, i la interpretació geomètrica dels nombres complexos fou redescoberta per *Jean Robert Argand* (1806) i de nou per *Carl Friedrich Gauss* (1831).

El conjunt dels nombres complexos amb les operacions de suma i producte per un nombre real té estructura d'espai vectorial de dimensió dos i és, per tant, isomorf a $\mathfrak{R}^2$. Una base d'aquest espai està formada pel conjunt $\{1, \mathrm{i}\}$.



Igual que els nombres reals representen els punts d'una recta, els nombres complexos poden ser posats en correspondència biunívoca amb els punts d'un pla. Els nombres reals es representen el l'eix d'abscisses o eix real, i els múltiples de $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ se'ls representa com a punts de l'eix imaginari, perpendicular a l'eix real a l'origen. A aquesta representació geomètrica se la coneix com el ***Diagrama d'Argand***. L'eix $y = 0$ es denomina **eix real** i l'$x = 0$,**eix imaginari**.

Com que la condició necessària i suficient per tal que $x + \mathrm{i}y$ coincideixi amb $u + \mathrm{i}v$ és que $x = u$, $y = v$, el conjunt dels nombres complexos s'identifica amb $\mathfrak{R}^2$, i els nombres complexos es poden representar com a punts del "pla complex". El nombre complex $z = x + \mathrm{i}y$ es correspon amb l'abscissa i l'ordenada del punt del pla associat al parell (x , y). A vegades es fa referència al nombre complex z com el punt z i en altres ocasions com el vector z.

La suma de nombres complexos es correspon gràficament amb la suma de vectors. No obstant això, el producte de nombres complexos no és ni el producte escalar de vectors ni el producte vectorial.

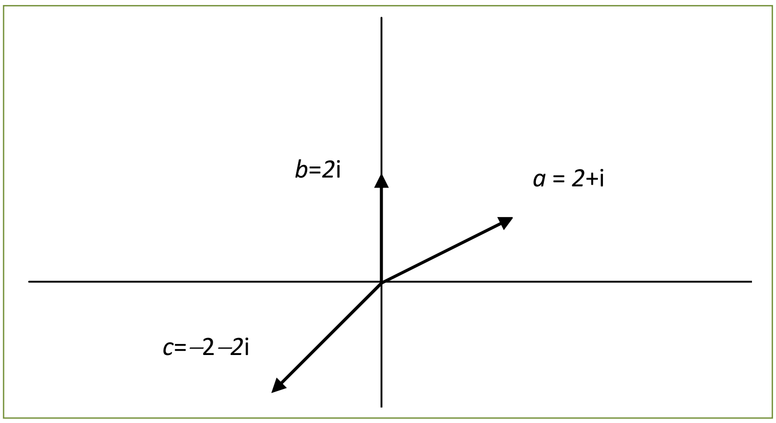
El conjugat de z, $\bar{z}$, és simètric a z respecte l'eix d'abscisses.

Activitats resoltes

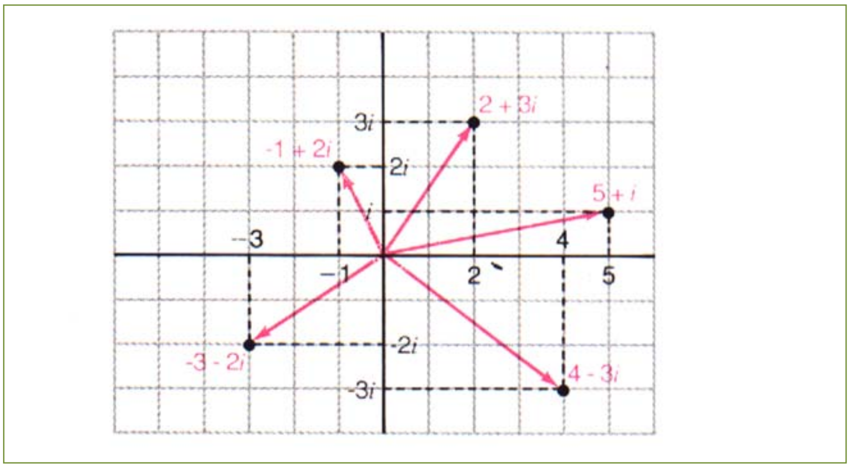
- *Representeu en el pla els nombres complexos:*

  a = 2 + i, b = 2i i c = –2 – 2i.

Els nombres complexos a = 2 + i, b = 2i *i* c = –2 – 2i es representen:



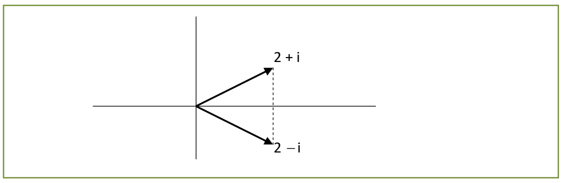
- *Representeu al pla els nombres complexos:* 2 + 3i, –1 + 2i, –3 –2i, 5 + i i 4 – 3i.



- *Representeu el nombre complex conjugat de* a = 2 + i.

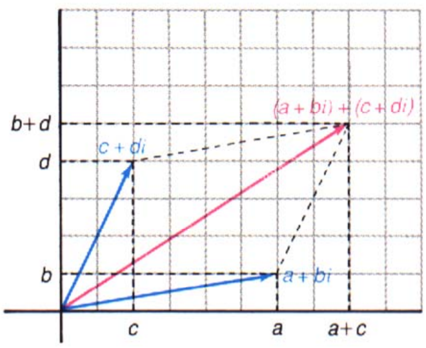
El conjugat de a = 2 + i, 2 – i, es representa:

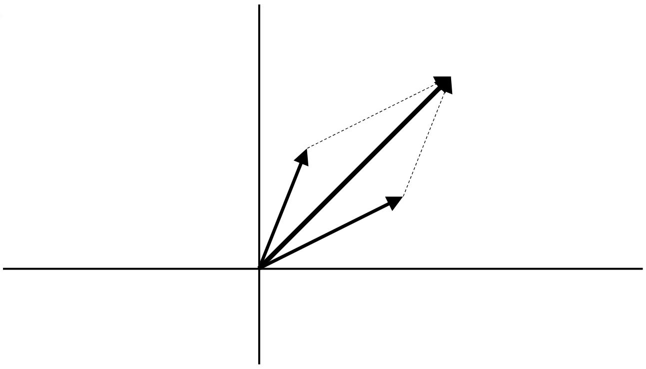
S'observa que és el simètric d'a respecte l'eix d'abscisses.



- *Representeu la suma de dos nombres complexos.*

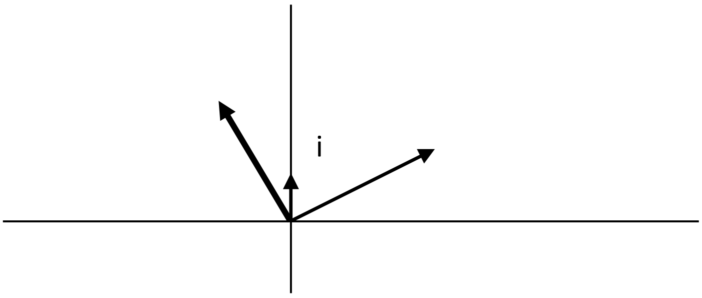
La suma es representa igual que la suma vectorial. Observeu els dos gràfics inferiors, en la quadrícula la suma de nombres complexos i al costat una suma vectorial.





Representeu el producte del nombre complex $2 + \mathrm{i}$ *per la unitat imaginària:* i.

El producte de $2 + \mathrm{i}$ per i és igual a $-1 + 2\mathrm{i}$, i al representar-lo s'observa que multiplicar per la unitat imaginària és girar 90º.



Activitats proposades

Per als següents nombres complexos:

$$a = 3\mathrm{i};\ b = -2\mathrm{i};\ c = 5;\ d = 1 + \mathrm{i};\ e = -1 - \mathrm{i}$$

36. Representeu-los gràficament.

37. Representeu gràficament el conjugat de cadascun d'ells.

38. Representeu gràficament les sumes:

$a + b \qquad a + c \qquad b + d \qquad d + e$

39. Representeu gràficament els productes:

$a \cdot \mathrm{i} \qquad b \cdot \mathrm{i} \qquad c \cdot \mathrm{i} \qquad \mathrm{d} \cdot \mathrm{i} \qquad e \cdot \mathrm{i}$

Analitzeu el resultat. Comproveu que multiplicar per i suposa girar 90º el nombre complex.

2.3. Forma trigonomètrica dels nombres complexos. Operacions

Mòdul

El ***mòdul*** d'un nombre complex es defineix com $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, i representa la distància de z a l'origen, és a dir, la longitud del vector lliure (x, y) de $\Re^2$.

Per tant, el mòdul no pot ser mai un nombre real negatiu. El mòdul d'un nombre real coincideix amb el seu valor absolut.

Recordeu, l'arrel quadrada (sense signes davant) és sempre positiva.

Encara que no tingui sentit dir si $z_1 < z_2$, llevat que siguin nombres reals, sí té sentit la desigualtat $|z_1| < |z_2|$ i significa que z_1 és més pròxim a l'origen que z_2.

Una altra forma d'expressar el mòdul d'un nombre complex és mitjançant l'expressió $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ on $\bar{z}$ és el conjugat de z, essent el producte d'un nombre pel seu conjugat igual a:

$$(x + \mathrm{i}\cdot y)\cdot(x - \mathrm{i}\cdot y) = x^2 + y^2$$

un nombre real i positiu.

Argument

L'***argument*** d'un nombre complex z, si $z \neq 0$, representa l'angle, en radiants, que forma el vector de posició amb el semieix de les abscisses positives.

És per tant qualsevol nombre real θ tal que *cos* $\theta = \dfrac{x}{|z|}$, *sin* $\theta = \dfrac{y}{|z|}$. Es té aleshores que cada nombre complex no nul té una infinitat d'arguments, positius i negatius, que es diferencien entre sí per múltiples enters de 2π.

Si z és igual a zero, el seu mòdul és zero però el seu argument no està definit.

Si es vol evitar la multiplicitat dels arguments es pot seleccionar per a θ un interval semiobert de longitud 2π, la qual cosa s'anomena escollir una branca de l'argument; per exemple, si s'exigeix que $\theta \in (-\pi, \pi]$, (o per a altres autors $[0, 2\pi)$), s'obté l'***argument principal*** de z, que es denota $Arg(z)$. Si z és un nombre real negatiu el seu argument principal val π. A vegades és preferible utilitzar arguments multiavaluats:

$$\boldsymbol{arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\}}$$

on $\mathbf{Z}$ representa el conjunt dels nombres enters.

Si es defineix $Arg(z)$ com $arctg(y/x)$ es té una nova ambigüitat, ja que existeixen dos angles en cada interval de longitud 2π dels quals només un és vàlid. Por tot això, les afirmacions amb arguments s'han de fer amb una certa precaució, ja que per exemple l'expressió:

$$arg(z\cdot w) = arg(z) + arg(w)$$

és certa només si s'interpreten els arguments com a multiavaluats.

Si z és diferent de zero, $\bar{z}$ verifica que $|\bar{z}| = |z|$ i que $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$.

Propietats del mòdul, del conjugat i de l'argument d'un nombre complex

Algunes propietats del conjugat i del mòdul d'un nombre complex són:

1. $\forall\, z, w \in \boldsymbol{C}$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$.

2. $\forall\, z \in \boldsymbol{C}$, $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$, $arg(\bar{z}) = -arg(z)$.

3. $z \in \Re \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

4. $\forall\, z, w \in \boldsymbol{C}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|\bar{z}| = |z|$, $|zw| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

5. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

6. $\forall\, z \in \boldsymbol{C}$, $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

7. $\forall\, z \in \boldsymbol{C}$, $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

8. $\forall\, z, w \in \boldsymbol{C}$, $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$

S'observa que les desigualtats 7 i 8 són sempre entre nombre reals, no entre complexos, per la qual cosa sí té sentit escriure una desigualtat.

La segona part de la propietat 8 es coneix amb el nom de desigualtat triangular.

Les propietats del mòdul demostren que és una distància a l'espai vectorial $\boldsymbol{C}$.

Forma polar i forma trigonomètrica

Si ρ és igual al mòdul del nombre complex no nul z i θ és un argument de z, aleshores (ρ, θ) són les ***coordenades polars*** del punt z. El nombre complex z en forma polar s'escriu: ρ_θ.

La *conversió* de coordenades polars en cartesianes i viceversa es fa mitjançant les expressions:

$$x = \rho \cdot cos\ \theta,\ y = \rho \cdot sen\ \theta, \text{ per la qual cosa } z = x + iy = \rho \cdot (cos\ \theta + i \cdot sen\ \theta).$$

Aquesta darrera expressió és vàlida fins i tot si $z = 0$, ja que aleshores $\rho = 0$, i per tant es verifica per a tot θ.

Activitats resoltes

- *Calculeu el mòdul dels següents nombres complexos:* –2 + 3i *y* 4 + i.

Al calcular $|-2+3\mathrm{i}| = \sqrt{13}$ y $|4+i| = \sqrt{17}$ se sap que el primer dista menys de l'origen que el segon.

- *Calculeu l'argument dels següents nombres complexos:* 5i, –7i, 3 *y* –3.

L'argument principal de 5i és igual a $\frac{\pi}{2}$, el de –7i és $\frac{3\pi}{2}$, el de 3 val 0 y el –3 és π.

- *Escriviu en forma binòmica el nombre complex de mòdul 2 i argument* $\frac{\pi}{3}$.

El nombre complex de mòdul 2 i argument principal $\frac{\pi}{3}$ és $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, ja que:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \text{ e } y = 2\,sen\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

- *Calculeu el mòdul i l'argument de:* –1 – i.

El nombre complex –1 – i té mòdul $\rho = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

Un dels seus arguments és $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, i el seu argument principal és $\frac{-3\pi}{4}$, per tant

$$arg(-1-\mathrm{i}) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi.$$

- *Comproveu si es verifica que* $Arg(z\cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$.

Es verifica que $arg(z\cdot w) = arg(z) + arg(w)$ considerant aquests arguments com a conjunts, i en general no es verifica que $Arg(z\cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$, ja que per exemple:

$$Arg((-\mathrm{i})^2) = Arg(-1) = \pi, \text{ mentre que } Arg(-\mathrm{i}) + Arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Activitats proposades

40. Calculeu el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\sqrt{3}-i$ b) $-2-2\mathrm{i}$

c) $1-\sqrt{3}\,i$ d) $-4\mathrm{i}$

41. Expresseu en forma polar els següents nombres complexos:

a) i b) –i c) 4 + 4i d) –4

2.4. Fórmula de *Moivre*

En aplicar la fórmula obtinguda d'una potència al nombre complex de mòdul u s'obté que:

$(cos\ \theta + i \cdot sin\ \theta)^n = cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta)$, sigui quin sigui el nombre enter n.

Aquesta expressió, que permet conèixer $sin(nx)$ o $cos(nx)$ en funció de $\cos x$ i $\sin x$ desenvolupant la potència mitjançant el binomi de Newton i separant parts reals i imaginàries, es coneix com a *fórmula de Moivre*.

Operacions entre nombres complexos en forma trigonomètrica

Per a ***multiplicar*** nombres complexos expressats en forma trigonomètrica n'hi ha prou amb multiplicar els seus mòduls i sumar els seus arguments:

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}.$$

La relació entre nombres complexos i transformacions geomètriques, on multiplicar per i correspon a girar 90º, i multiplicar per $a + bi$ és girar l'argument de tal nombre i aplicar una homotècia de raó el seu mòdul, és molt útil en la Mecànica i en altres parts de la Física.

Per ***dividir*** nombres complexos, n'hi ha prou amb dividir els seus mòduls i restar els seus arguments:

$$r_\alpha : s_\beta = (r/s)_{\alpha-\beta}.$$

L'***invers*** d'un nombre complex diferent de zero té, com a mòdul, l'invers del mòdul, i com a argument, l'oposat de l'argument.

Per a elevar un nombre complex a una ***potència***, s'eleva el mòdul a la potència, i es multiplica l'argument per l'exponent:

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{\alpha \cdot n}.$$

Per a calcular l'***arrel n-èssima*** d'un nombre complex, $w = \sqrt[n]{z}$, es té en compte que el mòdul r ha de ser igual a $r = \sqrt[n]{\rho}$, però al tenir un nombre complex molts arguments, ara l'argument no és únic, sinó que es tenen n arguments diferents, i iguals a $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, on k pren els valors des de 0 fins a $n - 1$ abans que els valors comencin a repetir-se.

Per tant, la funció arrel n-èssima és una funció multivalorada, amb n valors que es poden representar gràficament en els vèrtexs d'un n-àgon regular de centre l'origen i radi el mòdul $r = \sqrt[n]{\rho}$, ja que totes les arrels estan situades en la circumferència de radi $r = \sqrt[n]{\rho}$ uniformement espaiades cada $\frac{2\pi}{n}$ radiants.

Com a exemple demostrarem la fórmula del producte de nombres complexos.

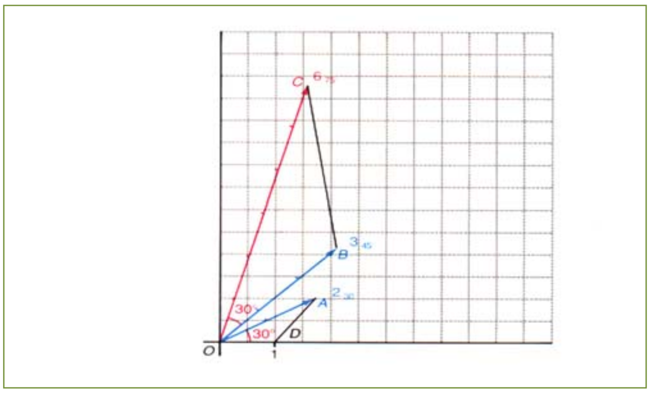
Demostració:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho \cdot (cos\ \theta + i \cdot sin\ \theta) \cdot r \cdot (cos\ \alpha + i \cdot sin\ \alpha)$$

$$= (\rho \cdot r) \cdot [cos\ \theta \cdot cos\ \alpha - sin\ \theta \cdot sin\ \alpha] + i \cdot [cos\ \theta \cdot sin\ \alpha + sin\ \theta \cdot cos\ \alpha] = (\rho \cdot r) \cdot (cos\ (\theta+\alpha) + i \cdot sin\ (\theta+\alpha)).$$

Activitats resoltes

- *Representeu gràficament el producte dels nombres complexos* 2(cos(π/6) + isin(π/6)) i de 3(cos(π/4) + i sin(π/4)).



- *Calculeu:* $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$

Per dividir $\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ es poden escriure els nombres complexos en forma polar i dividir els mòduls i restar els arguments. El mòdul de –2 és 2 i el seu argument és π. El mòdul de $1+\sqrt{3}i$ és 2 i el seu argument és π/3. Per tant el mòdul del quocient és 1 i el seu argument és π – π/3 =2π/3. El nombre complex de mòdul 1 i argument 2π/3 escrit en forma binòmica és:

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Dir que el seu mòdul és 1 és dir que és sobre la circumferència de centre l'origen i radi 1.

- *Calculeu:* $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$

Per a calcular una potència, en general és molt més senzill fer servir la forma polar enlloc d'aplicar la fórmula del binomi de Newton. per exemple, si es vol calcular $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$, és molt més pràctic calcular el mòdul i l'argument de $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)^{60}$ que ja sabem de l'activitat anterior que és: 1 i 2π/3, per la qual cosa elevem 1 a la potència 60 i obtenim 1, i multipliquem 2π/3 per 60 i obtenim 40π. Escrivim en forma binòmica el nombre complex de mòdul 1 i un argument que és múltiple de 2π, pel que la solució és 1.

- *Calculeu l'arrel cúbica de* –1.

Per a calcular una arrel n-èssima s'ha de recordar que es tenen *n* arrels diferents:

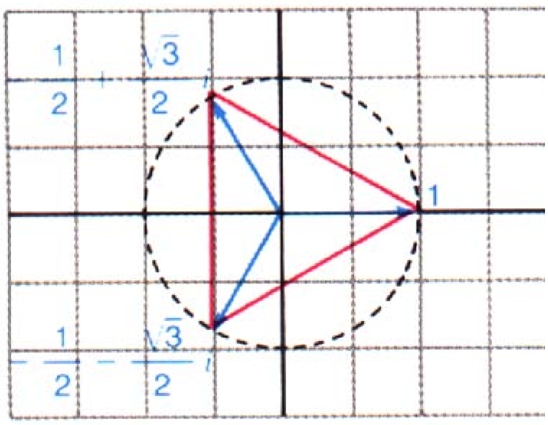
$$\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1_{\pi}}=\left\{\begin{array}{l} 1_{\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}}=1_{\pi}=-1 \\ 1_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\pi}{3}}=1_{5\pi/3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right\}$$

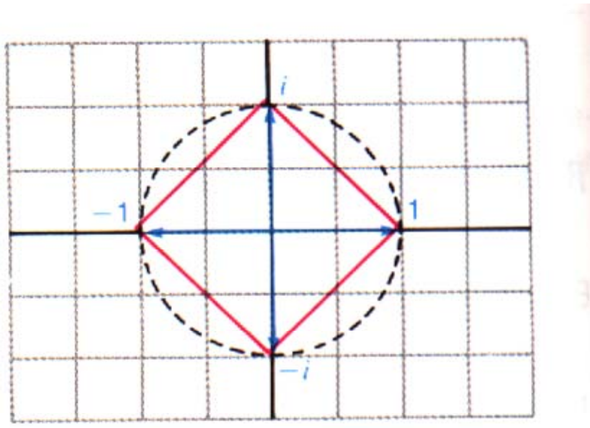
Resoleu $z^3 = -1$.

Això permet resoldre equacions. Així, les solucions de l'equació cúbica $z^3 = -1$ són tres:

l'arrel real –1, i les arrels complexes conjugades: $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Representeu gràficament les arrels cúbiques i quartes de la unitat.





Activitats proposades

42. Comproveu els resultats següents:

a) $(1 + \mathrm{i})^{16} = 2^8 = 256$.

$$b)\ \sqrt[3]{27i} = \begin{Bmatrix} 3_{\pi/6} \\ 3_{5\pi/6} \\ 3_{9\pi/6} \end{Bmatrix}$$

43. Realitzeu les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma exponencial:

a) $\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{i}}{-2-2\mathrm{i}}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^{30}$

44. Resoleu les següents equacions, obtenint les arrels reals i complexes:

a) $x^2 = -1$

b) $x^3 = -8$

c) $x^4 + 16 = 0$

45. Calculeu les arrels *n*-èssimes de la unitat, per a n = 2, 3 y 4. Representeu-les gràficament i comproveu que són sobre la circumferència de radi 1, i en els vèrtexs d'un polígon regular.

MATERIALS PER A L'AULA A INTEF (Banc d'imatges i sons)

- Interpretació geomètrica de la **suma** de nombres complexos, d'autor José Ángel López Mateos. Es representen gràficament els nombres complexos 6 + 2i i –1 + 4i, se sumen gràficament i es comprova que les coordenades del nombre complex suma són la suma de les coordenades. 183287_am_1.swf 183287_aa_1.fla
- Interpretació geomètrica de la **diferència** de nombres complexos, d'autor José Ángel López Mateos. Es representen gràficament els nombres complexos 6 + 2i i 1 + 4i, s'obté gràficament l'oposat del segon i se suma amb el primer. Es comprova que les coordenades del nombre complex diferència són la diferència de les coordenades. 183240_am_1.swf 183240_aa_1.fla
- Interpretació geomètrica dels nombres complexos, d'autor José Ángel López Mateos. Es representa gràficament el nombre complex 4 + 3i i s'obté el seu mòdul i el seu **argument.** 183264_am_1.swf 183264_aa_1.fla
- **Producte d'un nombre complex per la unitat imaginària i**, d'autor José Ángel López Mateos. Es multiplica el nombre complex 4 + 2i per i de forma gràfica i es comprova que suposa girar el nombre complex 90º. 185441_am_1.swf 185441_aa_1.fla
- Producte de diversos nombres complexos per la unitat imaginària i, d'autor José Ángel López Mateos. Es multipliquen els nombres complexos s 6 + 3i, 3 + 3i i 3 + 6i que formen un triangle, per i de forma gràfica i es comprova que suposa girar aquests nombres complexos 90º. 185437_am_1.swf 185437_aa_1.fla

CURIOSITATS. REVISTA

Nombres complexos

Gauss

Nombres imaginaris

Un miracle de les Matemàtiques

Stiillwell

Nombres impossibles

Una espècie d'amfibi entre l'ésser i el no-res

Monstre

Euler

Resoldre l'equació $x^2 + 1 = 0$ és impossible

Totes les equacions polinòmiques de grau *n* tenen exactament *n* arrels en el camp complex.

Teorema Fonamental de l'Àlgebra

Un acudit

- Em diuen que el número de telèfon no existeix, que és imaginari.

- Intenta girar 90º el telèfon.

L'has entès? Els acudits no s'expliquen, però com que és un acudit matemàtic...

Pensa en un nombre imaginari, per exemple, –2i. Si el gires 90º es converteix en 2, i ja és real.

La resolució de la paradoxa de $\sqrt{-1}$ *fou molt poderosa, inesperada i bella per la qual cosa únicament la paraula "miracle" sembla adequada per descriure-la.*

Stillwel

Utilitat

Els nombres complexos i la variable complexa s'utilitza per estudiar electricitat, magnetisme i en la teoria del potencial, entre molts d'altres camps

Una fórmula meravellosa

En l'Exposició Universal de París de 1937, la mateixa per a la qual Picasso pintà el guernica, a l'entrada del pavelló de Matemàtiques hi havia un enorme cartell que deia:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Una igualtat que relaciona nombres com el 0 i l'1, amb nombres irracionals com e i π, i amb el nombre complex i.

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Vols saber d'on surt?

Euler expressà, mitjançant la fórmula que porta el seu nom, que:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}.$$

Ja coneixes que un nombre complex de mòdul *m* i argument α s'escriu de forma trigonomètrica com: $m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, i per tant utilitzant la fórmula d' *Euler* s'obté la seva **expressió exponencial**:

$$m(\cos\alpha + i\sin\alpha) = me^{i\alpha}.$$

El nombre –1 té mòdul 1 i argumento π, i per tant la seva expressió exponencial és:

$$-1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$$

Una mica d'història dels nombres complexos

El desenvolupament de les Matemàtiques està íntimament relacionat amb la història del nombre. Com que el producte d'un nombre real per si mateix és sempre positiu és clar que es necessita ampliar el camp numèric per donar solució a determinades equacions.

Els nombres complexos es comencen a utilitzar per obtenir solucions d'equacions algebraiques i culminen, en aquest sentit, quan es demostra el teorema fonamental de l'Àlgebra.

Usualment es diu que els nombres complexos neixen de la necessitat de resoldre l'equació quadràtica $x^2 + 1 = 0$, amb la dificultat que no té sentit geomètric que un quadrat tingui àrea negativa. No obstant això, no és del tot cert.

Moltes equacions quadràtiques, com cercles o paràboles, estan ja implícites en la geometria dels **grecs** i aleshores es va analitzar si tenia o no solució real, per exemple, la intersecció d'una recta amb aquestes figures.

Els **babilonis**, cap a l'any 2000 abans de Crist, coneixien el mètode per resoldre equacions quadràtiques, i *Heró d'Alexandria* (100 a. C.) va utilitzar $\sqrt{-63}$, encara que algebraicament, sense preguntar-se pel seu significat, ja que en aquells temps no s'especulava sobre la natura de les arrels imaginàries.

No obstant això quan el 1545 *Girolamo Cardano* va escriure:

$$40 = (5 + \sqrt{-15})\cdot(5 - \sqrt{-15})$$

aquests nombres van ser considerats sense sentit i se'ls va aplicar el qualificatiu de *"imaginaris"*.

Fins i tot quan apareixen les equacions quadràtiques, amb *Diofant* o els àrabs, no hi ha raó per admetre que no tinguin solució.

Es necessiten quan *Del Ferro, Tartaglia* i *Cardano* intenten resoldre l'equació cúbica $x^3 = p \cdot x + q$ en la fórmula de la qual apareixen nombres complexos (quan $(q/2)^2 - (p/3)^2 < 0$) i no obstant això té sempre una solució real.

Bombelli el 1572 va treballar formalment amb l'àlgebra dels nombres complexos i implícitament va introduir les funcions complexes, encara que malgrat això els nombres complexos encara van ser considerats com a impossibles.

Al final del sigle XVIII ja es tenia una gran mestria en la manipulació dels nombres complexos i això no obstant no es tenia la noció d'un nombre complex com un parell de nombres reals format per la seva part real i la seva part imaginària.

C. Wessel, el 1799, associà tot nombre complex amb un vector del pla amb origen en *O*, i reinterpretà amb aquests vectors les operacions elementals dels nombres complexos. *R. Argand* el 1806 interpretà geomètricament els nombres complexos. El nombre i, per exemple, el va representar com una rotació d'angle recte al voltant de l'origen. A partir d'aquesta interpretació van començar a usar-se sense dificultats aquests nombres.

RESUM

Nombres reals	Està format per la unió dels nombres racionals i dels nombres irracionals	5, –4, 2/3, 7'5, π, e, Φ…
Densitat dels Nombres Reals	El conjunt dels nombres reals és dens, és a dir, entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres.	Entre 0 i 1 calculat el punt mitjà obtenim infinits punts: 0, 0'5, 0'25, 0'125, 0'0625,…, 1
Valor absolut	$\lvert x\rvert = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$	|–32| = 32 = |+32|
Distància a la recta real	Dist(*x*, *y*) = |*x* – y|	Dist(3, 8) = |8 – 3| = 5. Dist(–2, –9) = |–9 – (–2)| = |–9 + 2)| = |–7| = 7
Intervals	Obert : $(a, b) = \{x \in \Re \mid a < x < b\}$ Tancat: $[a, b] = \{x \in \Re \mid a \leq x \leq b\}$ Semiobert (esquerra): $(a, b] = \{x \in \Re \mid a < x \leq b\}$ Semiobert (dreta): $[a, b) = \{x \in \Re \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
Entorns	És una forma particular d'expressar els intervals oberts. Es defineix com el conjunt de nombres que són a un distància de *a* menor que *r*: E(*a* , *r*)	*E*(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2, 6)
El nombre i	$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$	
Forma binòmica	$z = x + i\cdot y$	
Suma de complexos	$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i\cdot(y + v)$	(2 + 3 i) + (4 + 5i) = 6 + 8i
Producte de complexos	$(x + iy) \cdot (u + iv) = (x\cdot u - y\cdot v) + i\cdot (x\cdot v + y\cdot u)$	$(2 - i)\cdot(1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$
División de complexos	Es multiplica numerador i denominador pel conjugat del denominador. Així s'aconsegueix que el denominador sigui un nombre real.	$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$
Forma trigonomètrica	$z = r\,(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)$	$z = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3})$
Producte de complexos	Es multipliquen els seus mòduls i se sumen els seus arguments	$z\cdot z = 4\cdot(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})$
Divisió de complexos	Es divideixen els seus mòduls i es resten els seus arguments	*z*/*z*=1·(cos 0 + i·sin 0) = 1
Fórmula de Moivre	$(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\cdot\sin(n\theta)$	

EXERCICIS I PROBLEMES

Nombres reals

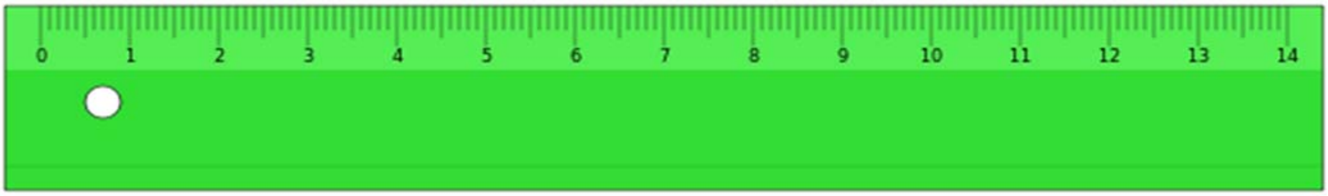
1. Calculeu els valors exactes de $a + b$, $c - a$ i $a \cdot c$ per als nombres: (pista: racionalitzar)

$a = 2'7$ $b = 3'292929...$ $c = 0'01030303...$

2. Esbrineu quin d'aquests nombres és irracional:

a) 3'1416 b) $\sqrt{4}$ c) π

3. Podem trobar nombres irracionals en les marques d'una regla graduada? Hi ha algun punt de la regla (encara que no tingui marca) que es correspongui amb un nombre irracional? Justifiqueu la vostra resposta.



4. Classifiqueu els següents nombres en ordre de major a menor i després representeu-los a la recta:

a) 7 b) 25/4 c) $\sqrt{45}$ d) $2\cdot\pi$

5. Escriviu una successió infinita de nombres reals dins de l'interval $(-1, 1)$.

6. Calculeu el valor absolut dels següents nombres:

a) $|-5|$ b) $|4 - 4|$ c) $|3\cdot 2+9|$ d) $\sqrt{7}$ e) $\sqrt{7^2}$

7. Calculeu x en les següents equacions: (*pista*: x pot tenir dos valors)

a) $|x| = 5$ b) $|x - 4| = 0$ c) $|3x + 9| = 21$

8. Dibuixeu les següents funcions en un gràfic:

a) $f(x) = |x| - 5$ b) $f(x) = |x - 4|$ c) $f(x) = |3x + 9|$

9. Trieu un dia i calculeu la distància que heu recorregut en total, i compareu-la amb la distància entre els punts inicial (al principi del dia) i final (en acabar el dia).

10. Un artesà fabrica dos productes. El primer (a) li costa 2 hores i 3 euros en material, i el segon (b) li costa 6 hores i 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de treball, i els ven per (a) 30 i (b) 90 euros, esbrineu quin és més rendible per al seu negoci.

11. Entre Kroflite i Beeline hi ha altres cinc ciutats. Les set es troben al llarg d'una carretera recta, separades unes d'altres per una distància entera de quilòmetres. Les ciutats es troben espaiades de tal manera que si un coneix la distància que una persona ha recorregut entre dues d'elles, pot identificar-les sens dubte. Quin és la distància mínima entre Kroflite i Beeline perquè això sigui possible?

12. Representeu a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:

a) $|x| < 1$ b) $|x| \le 1$ c) $|x| > 1$ d) $|x| \ge 1$

13. Trobeu dos nombres que distin 6 unitats de 3, i uns altres dos que distin 3,5 unitats de -2, calculeu després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.

14. Escriviu l'interval $[-3, 5] \cap (3, 8)$.

15. Escriviu l'interval format pels nombres reals x que compleixen $|x - 8| \leq 3$.

16. Determineu els conjunts $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ i $-A$ en els casos següents:

a) $A = [-11, -9]$; $B = (-1, 6)$

b) $A = [-5, 5]$; $B = (3, 4)$

Nombres complexos

17. Comproveu si: a) $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$. b) $|\cos\alpha + i\,sen\,\alpha| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$.

18. Calculeu: a) $(2 + i)^5$ b) $\frac{13}{|2-3i|}$ c) $\frac{(3+2i)^2}{(2+3i)^3}$ d) $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)$ e) $(1 + i)^8$

f) $(1 + i)^{-1}$ g) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$.

19. Demostreu que z és real si i només si $z = \bar{z}$.

20. Verifiqueu que l'invers de z , z^{-1}, és igual a = $\frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ $\frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$. Calculeu l'invers de $2 + 3i$.

21. Calculeu el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $-3 + 3i$ b) -3 c) $-3i$ d) $3 - 3i$.

22. Expresseu en forma polar i trigonomètrica els següents nombres complexos:

a) $5i$

b) $-7i$

c) $5 - 5i$

d) $\sqrt{3} + i$.

23. Expresseu en forma binòmica els següents nombres complexos en forma polar:

a) De mòdul 2 i argument $\pi/3$

b) De mòdul 3 i argument $-\pi/4$

c) De mòdul 1 i argument $\pi/2$

d) De mòdul 5 i argument $2\pi/3$

24. Realitzeu les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma trigonomètrica:

a) $(\sqrt{3} + i)^{60}$

b) $(4 - 4i)^{-11}$

c) $\frac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^8}$.

25. Utilitzeu la fórmula de Moivre per expressar en funció de sin α i *cos* α:

a) $\cos 2\alpha$

b) $\sin 2\alpha$

c) $\cos 3\alpha$

d) $\sin 3\alpha$.

26. Calculeu l'argument principal dels següents nombres complexos:

a) $\frac{-3}{\sqrt{3}+i}$

b) $\frac{-i}{1-i}$

c) $(1-i\sqrt{3})^7$.

27. Calculeu, representeu en el pla complex i escriviu en forma binòmica:

a) $\sqrt{-3i}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[3]{1-i}$

e) $\sqrt[4]{-81}$.

28. Resoleu les equacions:

a) $x^3 = -27$.

b) $x^4 = -81$.

c) $x^5 - 32 = 0$.

d) $x^3 - 8 = 0$.

29. Calculeu tots els valors de z pels quals:

a) $z^6 + 64 = 0$.

b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$.

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

30. Calculeu les arrels cinquenes de la unitat i representeu-les en el pla. Calculeu també les arrels cinquenes de –1, representeu-les també. Generalitzeu aquest resultat.

31. Calculeu les quatre arrels de $z^4 + 9 = 0$ i utilitzeu-les per factoritzar $z^4 + 9$ en dos polinomis quadràtics amb coeficients reals.

32. Resoleu l'equació: $z^2 + 3z - 1 = 0$.

33. Calculeu *a* per tal que el nombre complex $\frac{a+i}{3-i}$ tingui la seva part real igual a la seva part imaginària.

AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyaleu quin dels següents nombres és irracional:

a) 6’3333333….. b) 7/3 c) i d) 5’98234234234….

2. La solució de l'equació $|3x + 9| = 21$ és:

a) $x = 10, x = -4$ b) $x = 10$ c) $x = -10, x = 4$ d) $x = -4$

3. Determineu el conjunt A – B si A = [–11, 9]; B = (–1, 6):

a) $[-11, -1) \cup [6, 9]$ b) $[-11, -1) \cup (6, 9]$ c) $[-11, -1] \cup (6, 9]$ d) $[-11, -1] \cup [6, 9]$

4. Calculeu $\dfrac{(3+2i)\cdot(3-2i)}{(2+3i)^3}$

a) –46 + 9i b) 62 + 63i c) –46 + 63i d) 62 + 9i

5. Resoleu l'equació $x^4 = 1$.

a) $x = 1$ b) $x = 1, x = -1$ c) $x = \pm i$ d) $x = \pm 1, x = \pm i$

6. Expresseu en forma binòmica el següent nombre complex de mòdul 2 i argument π/3

a) $1 + \sqrt{3}\,i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $1 - \sqrt{3}\,i$ d) $1/2 + \sqrt{3}/2\ i$

7. Calculeu $(1 + i)^6$

a) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ b) –8 c) 1 – i d) –8i

8. Expresseu en forma trigonomètrica el següent nombre complex 5i:

a) 5(*cos*(π/2) + i*sin*(π/2)) b) (5, π/2) c) 5(*cos*(3π/2) + i*sin*(3π/2)) d) 5(*sin*(90º)+i*cos*(90º))

9. Calculeu el mòdul i l'argument principal del següent nombre complex –3 + 3i:

a) 18, 135º b) $3\sqrt{2}$, 3π/4 c) $3\sqrt{2}$, 7π/4 d) 3, 5π/4

10. Calculeu: $x = \sqrt{-1}$

a) $x = i$ b) $x = -i$ c) $x = i, x = -i$ d) No té solució

MATEMÀTIQUES I:
1r BATXILLERAT
Capítol 2: Àlgebra

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autors: José Antonio Encabo de Lucas i Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)

Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Índex

Resum

En aquest capítol sobre Àlgebra repassarem conceptes relacionats amb polinomis, equacions i inequacions, per a endinsar-nos en els sistemes d'equacions, la seva resolució i representacions gràfiques, basant-nos en el *"Mètode de Gauss"*, mètode de resolució de sistemes d'equacions, matemàtic molt important en Àlgebra ja que fou el primer en donar una demostració del teorema fonamental de l'Àlgebra: *"Tota equació algebraica de grau n té n solucions".*

Seguirem amb les inequacions i sistemes d'inequacions que tenen interessants aplicacions.

Karl Friedrich Gauss

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1. POLINOMIS

1.1. Definició. Termes. Grau. Valor numèric

Recordeu que:

Un **monomi** ve donat pel producte de nombres reals i indeterminades. Anomenarem **coeficient** d'un monomi al nombre real que multiplica a la indeterminada o indeterminades; la indeterminada o indeterminades conformen la **part literal** del monomi.

Un **polinomi** és una expressió construïda a partir de la suma de monomis. El **grau d'un polinomi** vindrà donat pel grau més gran dels seus monomis.

Exemples:

- $\frac{1}{7} \cdot x^2 - 32 \cdot x^3 + 8$ *és un polinomi de grau 3 en la variable* x.
- $-5 \cdot y^4 + 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x$ *és un polinomi de grau 4 en les indeterminades* x *i* y.
- $3 \cdot x^2 \cdot y^3 - 2 + 5 \cdot y^2$ *és un polinomi de grau 5 en* x *i* y.
- $8x - 9 \cdot y + 3 \cdot z$ *és un polinomi de grau 1 en* x, *y ¡ z.*

Tant en aquesta secció com en la següent ens limitarem, bàsicament, a considerar polinomis amb una única variable.

L'aspecte genèric d'un polinomi en la variable x és

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

on els coeficients a_k són nombres reals.

Diem que un polinomi és **mònic** quan el coeficient del seu terme de grau més gran és igual a 1.

Els termes d'un polinomi venen determinats pel nombre de monomis que tingui el polinomi.

Recordeu que:

Monomi: *mono: un, nomi: terme*: 1 terme.

Binomi: *bino: 2 dos, nomi: terme:* 2 termes.

Trinomi: *trino: tres, nomi: terme* : 3 termes.

Quadrinomi: *quadri: quatre, nomi: terme*: quatre termes.

A partir de quadrinomi se'ls denomina polinomis. *Poli: diversos, nomi: termes.*

Així per exemple:

- $4y^3 + 3y - 7$ està format per 3 monomis $4y^3$, $3y$, -7 i per tant té **tres termes.**
- $-3y^4 + 8x^2 + 5x$ està format per 3 monomis, $-3y^4$, $8x^2$ y $5x$, i per tant té 3 termes.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Si fixem, o triem, un valor concret per a la variable d'un polinomi apareix un nombre real el **valor numèric** del polinomi per a aquest valor determinat de la variable.

Si hem anomenat p un polinomi, l'avaluació de p en, per exemple, el nombre –5 la denotem per $p(-5)$, i llegim *"p de menys cinc"* o *"p en menys cinc"*. Amb aquest criteri, si p és un polinomi la indeterminada del qual és la variable x, podem referir-nos-hi com p o $p(x)$ indistintament.

D'aquesta forma apreciem que un polinomi pot ser entès com una manera concreta d'assignar a cada nombre real un altre nombre real.

Exemples:

- *Si avaluem el polinomi* $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ *en* $x = 5$ *ens trobem amb el nombre*

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- *El valor del polinomi* $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ *per a* $y = -1$ *és*

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

1.2. Operacions amb polinomis

Ja sabeu que:

Suma de polinomis

Com que un polinomi és una suma de monomis, la suma de dos polinomis és un altre polinomi. A l'hora de sumar dos polinomis procedirem a sumar els monomis d'igual part literal.

Exemples:

- *La suma dels polinomis* $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ *i* $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ *és el polinomi*

$$\left(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2\right) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) = (-3x^4 - x^4) + \left(\frac{1}{5}x^2 + 4x^2\right) - 5x + (2 - 6) =$$
$$= (-3 - 1) \cdot x^4 + \left(\frac{1}{5} + 4\right) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) = -4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(7x^2 - 5x + 3) + (2x^2 + 9x - 8) = (7x^2 + 2x^2) + (-5x + 9x) + (3 - 8) = 9x^2 + 4x - 5$
- En el següent exemple sumarem dos polinomis disposant-los, adequadament, un sobre l'altre.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & 2x^5 & +6x^4 & +3x^3 & -11x^2 & +5x & +6 \\
+ & -9x^5 & & +4x^3 & +11x^2 & -9x & -7 \\
\hline
 & -7x^5 & +6x^4 & +7x^3 & & -4x & -1
\end{array}$$

Propietats de la suma de polinomis

Propietat commutativa. Si p i q són dos polinomis, no importa l'ordre en què els col·loquem a l'hora de sumar-los:

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

$$p+q \equiv q+p$$

Exemple:

- $(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$
  $(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden sumar tres o més polinomis. N'hi ha prou amb agrupar-los de dos en dos:

$$(p+q)+r \equiv p+(q+r)$$

Exemple:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x+6)=(2x^3-2x^2+2+x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=$
  $=(x^4+2x^3+5x^2+5x+2)+(x+6)=x^4+2x^3+5x^2+6x+8$

També:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2+x+6)=$
  $=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+6x+8)=x^4+2x^3+5x^2+6x+10$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat peculiar: el resultat de sumar-lo amb qualsevol altre sempre és aquest darrer. Es tracta del polinomi donat pel nombre 0, el ***polinomi zero.***

Exemple:

- $(5x^3+4x^2-3x+1)+0=0+(5x^3+4x^2-3x+1)=(5x^3+4x^2-3x+1)$
- $0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$

Element oposat. Cada polinomi en té associat un altre, al que anomenarem el seu ***polinomi oposat***, tal que la suma de tots dos és igual al polinomi zero. Trobem el polinomi oposat a un de donat, simplement, canviant el signe de cada monomi.

Exemple:

- El polinomi oposat a $p\equiv-3x^4+5x^3+2x-7$ és $3x^4-5x^3-2x+7$, que denotarem com "$-p$". Ratifiquem que la seva suma és el polinomi zero:

$$(-3x^4+5x^3+2x-7)+(3x^4-5x^3-2x+7)=(-3x^4+3x^4)+(5x^3-5x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Resta de polinomis

Recordem que el polinomi *oposat* a un altre s'obté simplement canviant el signe de cada monomi. Aquesta acció es correspon amb multiplicar pel nombre "-1" el polinomi original. D'aquesta forma el polinomi oposat a p és

$$-p \equiv (-1)\cdot p$$

En aquest moment apareix de manera natural la **operació diferència**, o **resta**, de polinomis. La definim amb l'ajuda del polinomi oposat a un de donat:

$$p-q \equiv p+(-q) \equiv p+(-1)\cdot q$$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

La resta consisteix a sumar a un polinomi l'oposat d'un altre.

Exemple:

- Donat el polinomi: $p \equiv 2x^4 - 3x^2 + 6$ i el polinomi: $q \equiv -7x^4 + 6x^2 + 7$.

Anem a restar $p - q$:

El procés és el mateix que per a la suma, l'únic que canvia és que a p li sumem l'oposat de q.

És a dir, canviem q de signe i el sumem a p:

$$(2x^4 - 3x^2 + 6) - (-7x^4 + 6x^2 + 7) = (2x^4 - 3x^2 + 6) + (7x^4 - 6x^2 - 7) = 9x^4 - 5x^2 - 1.$$

Recordem que l'oposat a q és $-q$, $(7x^4 - 6x^2 - 7)$.

Exemple:

- $$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$
$$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Activitats proposades

1. Feu la suma i resta dels següents polinomis:

a) $x^2 - 2$ b) $3x^4 + x^3 - 1$

2. Feu les següents sumes de polinomis:

a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$

b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$

3. Escriviu el polinomi oposat a cadascun dels següents polinomis:

a) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

b) $-7x^3 - 6x + 5$

c) $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$

4. Considereu els polinomis $p \equiv +x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, així com el polinomi suma $s \equiv p + q$. Trobeu els valors que pren cadascun d'ells en $x = -2$, és a dir, calculeu $p(-2)$, $q(-2)$ i $s(-2)$. Estudieu si existeix alguna relació entre aquests tres valors.

5. Obtingueu el valor del polinomi $p \equiv -x \ \ -5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. Quin valor pren el polinomi oposat a p en $x = 3$?

6. Realitzeu les següents diferències de polinomis:

a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Producte de polinomis

Una altra operació que podem fer amb polinomis és la multiplicació.

El resultat del producte de polinomis sempre serà un altre polinomi. Encara que en un polinomi tenim una indeterminada, o variable, com que aquesta pren valors en els nombres reals, a l'hora de multiplicar polinomis utilitzarem les propietats de la suma i el producte de nombres reals, en particular la propietat distributiva del producte respecte la suma; així, tot queda en funció del producte de monomis, qüestió que resolem amb facilitat:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Exemples:

a) $6x^2 \cdot (-2x^4) = 6 \cdot (-2) \cdot x^{2+4} = -12x^6$

b) $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$

c) $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$

d) $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$

e) $(3x - 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
$= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$

f)
$(x + 6) \cdot (x^2 - 2x) = (x + 6) \cdot x^2 + (x + 6) \cdot (-2x) = (x^3 + 6x^2) + (-2x^2 + 12x) = x^3 + 6x^3 - 2x^2 + 12x$

Exemple:

- *També podem materialitzar el producte de polinomis tal i como multipliquem nombres enters:*

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
\times & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}$$

Activitats proposades

7. Efectueu els següents productes de polinomis:

a) $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$

b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

c) $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$

d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

8. Multipliqueu cadascun dels següents polinomis per un nombre de manera que obtingueu polinomis mònics:

a) $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$ b) $-2x^3 + x^2 - 1$ c) $-x^2 + x - 7$

9. Calculeu i simplifiqueu els següents productes:

a) $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$ c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Propietats del producte de polinomis

Propietat commutativa. Si p i q són dos polinomis, no importa l'ordre en què els col·loquem a l'hora de multiplicar-los:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Exemple:

- $(2x^2-7)\cdot(-x^4+x^2)=2x^2\cdot(-x^4+x^2)-7\cdot(-x^4+x^2)=-2x^6+2x^4+7x^4-7x^2=-2x^6+9x^3-7x^2$

$$(-x^4+x^2)\cdot(2x^2-7)=-x^4\cdot(2x^2-7)+x^2\cdot(2x^2-7)=-2x^6+7x^4+2x^4-7x^2=-2x^6+9x^4-7x^2$$

Propietat associativa. Ens assenyala com es poden multiplicar tres o més polinomis. N'hi ha prou agrupant-los de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Exemple:

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

També:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Element neutre. Hi ha un polinomi amb una propietat particular: al multiplicar-lo per qualsevol altre ens dona aquest darrer. Es tracta del polinomi donat pel nombre 1, el *polinomi unitat.*

Exemple:

- $1\cdot(-8x^2-2x+3)=(-8x^2-2x+3)\cdot 1=-8x^2-2x+3$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte la suma. Quan en una multiplicació de polinomis un dels factors ve donat com la suma de dos polinomis com, per exemple,

$$(8x^2 - x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenim dues opcions per conèixer el resultat:

a) fer la suma i, després, multiplicar

$$(8x^2 - x)\cdot\left((-2x+11)+(x^3-4x)\right) = (8x^2 - x)\cdot\left(x^3-6x+11\right) =$$
$$= 8x^5 - 48x^3 + 88x^2 - x^4 + 6x^2 - 11x = 8x^5 - x^4 - 48x^3 + 94x^2 - 11x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicació a cadascun dels sumands i, després, sumar:

$$(8x^2 - x)\cdot\left((-2x+11)+(x^3-4x)\right) = (8x^2 - x)\cdot(-2x+11) + (8x^2 - x)\cdot(x^3-4x) =$$
$$= (-16x^3 + 88x^2 + 2x^2 - 11x) + (8x^5 - 32x^3 - x^4 + 4x^2) = 8x^5 - x^4 - 48x^3 + 94x^2 - 11x$$

Comprovem que obtenim el mateix resultat.

En general, la **propietat distributiva** de la multiplicació respecte la suma ens diu que

$$p\cdot(q+r) \equiv (p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Convé comentar que l'anterior propietat distributiva llegida en sentit contrari, de dreta a esquerra, és el que comunament es denomina **treure factor comú**.

Exemple:

$$6x^6 - 10x^4 - 22x^3 + 2x^2 = (3x^4 - 5x^2 - 11x + 1)\cdot 2x^2$$

Activitats proposades

10. Feu els següents productes de polinomis:

a) $x^2\cdot(-5x^4 - 3x^2 + 1)\cdot 2x^3$

b) $(2x^2 - 3)\cdot(-3x^2 - 5x + 4)\cdot(-x)$

11. De cadascun dels següents polinomis extraieu algun factor que sigui comú als seus monomis:

a) $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$

b) $24x^4 - 30x^2$

Productes notables de polinomis

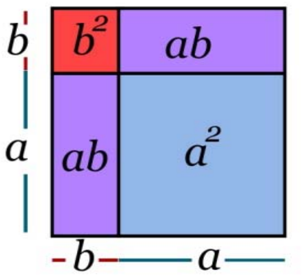
En aquest apartat destacarem una sèrie de productes concrets de polinomis que sorgeixen freqüentment. Podem exposar-los de moltes formes. Tal i com ho farem, apareixerà més d'una indeterminada; hem de ser capaços d'apreciar que si, en algun cas concret, alguna indeterminada passa a ser un nombre concret això no farà més que particularitzar una situació més general.

Potències d'un binomi. Les següents igualtats s'obtenen, simplement, a l'efectuar els càlculs oportuns:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El quadrat d'una suma és igual al quadrat del primer, més el doble del producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

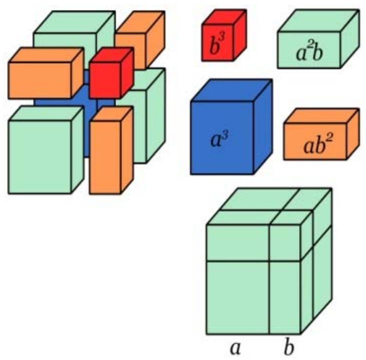
Comproveu la igualtat a partir dels quadrats i rectangles de la figura.



- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

El quadrat d'una diferència és igual al quadrat del primer, menys el doble del producte del primer pel segon, més el quadrat del segon.

Observeu la figura i connecteu-la amb la igualtat..



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifiqueu la igualtat amb els cubs i primes de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podem observar que, en cadascun dels desenvolupaments, l'exponent del binomi coincideix amb el grau de cadascun dels monomis.

Exemples:

a) $(a+2)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

c) $(7x+5)^2 = (7x)^2 + 2\cdot 7x\cdot 5 + (5)^2 = 49x^2 + 70x + 25$

d) $(x-3y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3y + (3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$

e) $(4x-5)^3 = (4x)^3 - 3\cdot(4x)^2\cdot 5 + 3\cdot(4x)\cdot 5^2 - 5^3 = 64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$

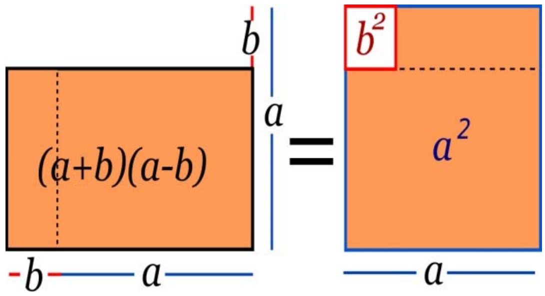
Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Suma per diferència. De nou la següent igualtat s'obté a l'efectuar el producte assenyalat:

- $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Suma per diferència és igual a diferència de quadrats.

Observeu les figures i connecteu-les amb la igualtat.



Exemples:

a) $(a+5)\cdot(a-5)=a^2-5^2=a^2-25$

b) $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$

c) $(3x+4)\cdot(3x-4)=(3x)^2-4^2=9x^2-16$

d) $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$

$=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Activitats proposades

12. Realitzeu els càlculs:

a) $(2+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x+2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x^2+2)^3$

13. Obtingueu les fórmules dels quadrats dels següents trinomis:

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

14. Desenvolupeu les següents potències:

a) $(2x - 5y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x^2 – 5/x)^2$

d) $(3a – b)^2$ e) $(a^2 + b^2)^2$ f) $(3/5y – 2/y)^2$

15. Expresseu com a quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a) $a^4 + 6a^2 + 9$ b) $9x^2 – 6x + 1$ c) $b^2 – 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 – 2a^2 +1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

16. Efectueu aquests productes:

a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$ b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$ c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Divisió de polinomis

Ja sabeu que:

Analitzem detingudament la divisió de dos nombres enters positius. Quan dividim dos nombres, D (dividend) entre d (divisor, diferent de 0), en sorgeixen uns altres dos, el quocient (c) i el residu (r). Tots quatre estan lligats per l'anomenada *prova de la* divisió:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativament:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

A més, diem que la divisió és exacta quan $r = 0$.

El conegut algoritme de la divisió persegueix trobar un nombre enter, el quocient *c*, tal que el residu *r* sigui un nombre menor que el divisor *d*, i major o igual a zero. Fixem-nos que, sense aquesta exigència per al residu *r*, podem triar arbitràriament un valor per al quocient *c* el qual ens subministra el valor associat com a residu *r*.

En efecte, si tenim com a dividend $D = 672$ i como a divisor $d = 12$, "si volem" que el quocient sigui $c = 48$ el seu residu associat és

$$r = D - d \cdot c = 672 - 12 \cdot 48 = 672 - 576 = 96$$

I la connexió entre aquests quatre nombres és

$$672 = 12 \cdot 48 + 96$$

Aquesta última "lectura" de la divisió de nombres enters ens guiarà a l'hora de dividir polinomis.

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, la divisió de $p(x)$, polinomi dividend, entre $q(x)$, polinomi divisor, ens proporcionarà uns altres dos polinomis, el polinomi quocient $c(x)$ i el polinomi residu $r(x)$. També aquí pesarà una exigència sobre el polinomi residu: el seu grau caldrà que sigui menor que el grau del polinomi divisor. La relació entre els quatre serà, naturalment,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

També escriurem

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Tal i com passa amb l'algoritme de la divisió entera, l'algoritme de la divisió de polinomis consta de diverses etapes, de caràcter repetitiu, en cadascuna de les quals apareixen uns polinomis quocient i residu "provisionals" de forma que el grau d'aquests polinomis residu va descendint fins que ens topem amb un el grau del qual és inferior al grau del polinomi divisor, la qual cosa indica que hem acabat. Vegem aquest procediment amb un exemple concret.

Exemple:

- Anem a dividir el polinomi $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$. Com que el polinomi divisor, $q(x)$, és de grau 2, hem de trobar dos polinomis, un polinomi quocient $c(x)$, i un polinomi residu $r(x)$ de grau 1 o 0, tals que

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

- *Primera etapa:*

Par poder aconseguir la igualtat $p\equiv q\cdot c+r$, com que el grau de $r(x)$ serà 1 o 0, el terme de grau més gran de $p(x)$, $6x^4$, sorgirà del producte $q(x)\cdot c(x)$. Així obtenim la primera aproximació de $c(x)$, el seu monomi e grau més gran:

$$c_1(x)=3x^2$$

i, de manera automàtica, també un primer residu $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2}\qquad\quad & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

Com que aquest polinomi $r_1(x)$ és de grau 3, més gran que 2, el grau del polinomi divisor $q(x)$, aquest polinomi residu no és el definitiu; cal continuar.

- *Segona etapa:*

Aquesta segona etapa consisteix a dividir el polinomi $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, sorgit com a residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. És a dir, repetim el que hem fet abans però considerant un nou polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Igual que abans, el grau de $r(x)$ hauria de ser 1 o 0. Com que el terme de grau més gran de $r_1(x)$, $8x^3$, surt del producte $q(x)\cdot c_2(x)$, és necessari que el polinomi quocient contingui el monomi

$$c_2(x)=4x$$

Això ens porta a un segon residu $r_2(x)$:-4x²-9x-2

Com que aquest polinomi $r_2(x)$ és de grau 2, igual que el grau del polinomi divisor $q(x)$, aquest polinomi residu no és el definitiu; cal continuar.

- *Primera i segona etapa:*

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2}\qquad\quad & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x}\quad\ \ & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

- *Tercera etapa:*

Aquesta tercera etapa consisteix a dividir el polinomi $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el residu de l'etapa anterior, entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nou repetim l'algoritme però amb un altre polinomi dividend: el polinomi residu del pas anterior.

Perseguim que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Com en cada pas el grau de $r(x)$ hauria de ser 1 o 0. El terme de grau més gran de $r_2(x)$, $-4x^2$, sorgeix del producte $q(x) \cdot c_3(x)$, per la qual cosa

$$c_3(x) = -2$$

I el tercer residu $r_3(x)$ és: -11x+4

Com que aquest polinomi $r_3(x)$ és de grau 1, menor que 2, grau del polinomi divisor $q(x)$, aquest polinomi residu sí és el definitiu. Hem acabat:

- *Les tres etapes:*

$$\begin{array}{rrrrrl|l}
6x^4 & +5x^3 & +x^2 & +3x & -2 & & \underline{\;2x^2 - x + 3\;} \\
\underline{-6x^4} & \underline{+3x^3} & \underline{-9x^2} & & & & 3x^2 + 4x - 2 \\
 & 8x^3 & -8x^2 & +3x & -2 & & \\
 & \underline{-8x^3} & \underline{+4x^2} & \underline{-12x} & & & \\
 & & -4x^2 & -9x & -2 & & \\
 & & \underline{4x^2} & \underline{-2x} & \underline{+6} & & \\
 & & & -11x & +4 & &
\end{array}$$

Conclusió: Al dividir el polinomi $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomi $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenim com a polinomi quocient $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ i com a polinomi residu $r(x) = -11x + 4$.

Activitats proposades

17. Dividiu els següents polinomis:

a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

18. Trobeu dos polinomis tals que al dividir-los aparegui $q(x) = x^2 - x - 3$ com a polinomi quocient i $r(x) = -3x^2 - 1$ com a residu.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Regla de *Ruffini*. Teorema del residu

Paolo Ruffini

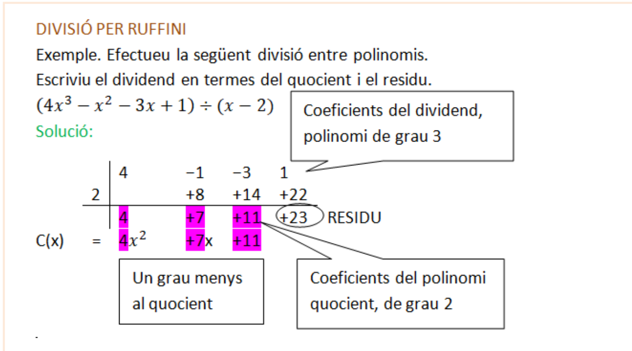
Donada la importància que té la divisió de polinomis quan el polinomi divisor és de la forma $x-\alpha$, és convenient agilitzar tals divisions.

Som davant l'anomenada **regla de *Ruffini***, un algoritme que ens proporciona tant el quocient como el residu que resulten de dividir un polinomi qualsevol entre un altre de la forma $x-\alpha$.

Vegem-ho amb un exemple:

Considerem el polinomi $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Anem a dividir-lo entre $x+2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & x+2 \\
\cline{5-5}
-3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2-10x+21 \\
\cline{1-2}
 & -10x^2 & +x & +3 & \\
 & 10x^2 & +20x & & \\
\cline{2-3}
 & & 21x & +3 & \\
 & & -21x & -42 & \\
\cline{3-4}
 & & & -39 &
\end{array}
$$



Vegem com han sorgit tant el polinomi quocient com el residu. Que el grau del dividend sigui tres i que el divisor sigui de grau u imposa que el quocient tingui grau dos i que el residu sigui un nombre real. El quocient consta de dels monomis $3x^2$, $-10x$ i 21, els quals coincideixen amb els monomis de grau més gran de cadascun dels dividends després de disminuir els seus graus en una unitat: $3x^2$ procedeix de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividend inicial), $-10x$ ve de $-10x^2+x+3$ i, per últim, 21 de $21x+3$. Aquest fet, coincidència en el coeficient i disminució del grau en una unitat, es deu a que el divisor, $x+2$, és mònic i de grau u.

Seguidament, anem a tenir en compte únicament els coeficients del dividend, per ordre de grau, 3, –4, 1 y 3; quant al divisor, com que és mònic i de grau u, n'hi ha prou amb considerar el seu terme independent, +2, però com que el resultat de multiplicar els monomis que van conformant el quocient pel divisor hem de restar-lo a cadascun dels dividends, atenent a aquest canvi de signe, en lloc del terme independent, +2, operarem amb el seu oposat, –2, nombre que, a la vegada, és l'arrel del divisor $x+2$ i sobre el qual pesa la pregunta de si és o no arrel de $p(x)$.

Aquest darrer concepte el veurem més endavant de manera detallada quan definim arrel d'un polinomi.

Anem a comparar-lo amb el procés de la divisió convencional i veurem que és igual:

- *Primer pas de la divisió:*

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2 \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & & \\ \hline
 & 3 & -10 & & \\
\end{array}$$

Apareix en el quocient el monomi $3x^2$ (coeficient 3), el qual provoca la "desaparició" de $3x^3$ en el dividend i l'aparició del monomi $-6x^2$ (coeficient $-6=(-2)\cdot 3$). Després d'operar (sumar) ens trobem amb $-10x^2$ (coeficient $-10=(-4)+(-6)$) i, en el quocient $-10x$.

- *Segon pas. El dividend passa a ser* $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 & \\
\quad \underline{10x^2+20x} & \\
\qquad\qquad 21x+3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & 20 & \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & \\
\end{array}$$

La irrupció en el quocient del monomi $-10x$ (coeficient -10) provoca la "desaparició" de $-10x^2$ en el dividend i l'aparició del monomi $20x$ (coeficient $20=(-2)\cdot(-10)$). Després d'operar (sumar) ens trobem amb $21x$ (coeficient $21=1+20$) i, en el quocient 21.

- *Tercer pas. El dividend passa a ser* $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x+2 \\ \hline
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\
\quad -10x^2+\ x\ +3 & \\
\quad \underline{10x^2+20x} & \\
\qquad\qquad 21x+3 & \\
\qquad\quad \underline{-21x-42} & \\
\qquad\qquad\quad -39 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & -39 \\
\end{array}$$

Tenim en el quocient el terme independent 21. Aquest provoca l'eliminació de $21x$ en el dividend i l'aparició del terme $-42=(-2)\cdot 21$. Després d'operar (sumar) ens trobem amb el residu $-39=3-42$.

En cadascun dels passos figura, a la part dreta, el mateix que s'ha fet en la divisió convencional, però amb l'avantatge que tot és més àgil degut a que únicament es fan servir nombres reals: els coeficients dels diversos polinomis que intervenen.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Exemple:

- *Dividim el polinomi* $p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4$ *entre* $x + 3$*:*

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\
-3 & & +3 & -15 & +45 & -150 \\
\hline
 & -1 & +5 & -15 & +50 & -146
\end{array}$$

Activitats proposades

19. Useu la regla de *Ruffini* per fer les següents divisions de polinomis:

a) $-3x^2 + x + 1$ entre $x - 1$

b) $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ entre $x - 2$

c) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x + 1$

d) $x^3 - 9x + 1$ entre $x - 3$

20. Estudieu si és possible usar la regla de *Ruffini*, d'alguna forma, per dividir $x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ entre $2x + 3$.

Teorema del residu

El teorema del residu és molt útil per trobar els valors numèrics dels polinomis sense necessitat de substituir directament en ells la incògnita pel nombre que es tracti. Fent ús d'aquest teorema podem trobar les arrels dels polinomis, procés que s'haurà de fer amb molta freqüència en el que segueix.

L'enunciat del teorema és el següent:

Teorema del residu. El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ al particularitzar-lo en $x = \alpha$ coincideix amb el residu que apareix al dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

D'aquesta forma podrem saber prèviament si una divisió serà exacta sense necessitat d'efectuar-la.

Demostració:

Tal i com vam veure en l'apartat de la divisió de polinomis, al dividir un polinomi $D(x)$ entre un altre, $d(x)$, la relació que s'estableix és:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

on $c(x)$ i $r(x)$ són respectivament, el quocient i el residu de la divisió. En aquest cas estem dividint entre $x - a$, és a dir, el divisor és $d(x) = x - a$. Per tant

$$D(x) = (x - a) \cdot c(x) + r(x)$$

Trobem el valor numèric del polinomi $D(x)$ per a $x = a$, substituïm la x per a:

$$D(a) = (a - a) \cdot c(a) + r(a)$$

I, per tant, $D(a) = r(a) = r$, que és precisament el que volíem demostrar.

Exemple:

- *Dividim el polinomi* $p(x) = -x^4 + 3x^3 - 5x + 4$ *entre* $x + 3$*:*

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -1 & +3 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & & +3 & -18 & +51 & -168 \\ \hline & -1 & +6 & -18 & +56 & -164 \end{array}$$

El quocient és $-x^3 + 6x^2 - 18x + 56$ i el residu -164

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4 = (x+3) \cdot (-x^3 + 6x^2 - 18x + 56) + (-164)$$

Si avaluem $p(x)$ en $x = -3$ no pot donar zero, però quin valor resulta?

$$p(-3) = (-3+3) \cdot (-3)^3 - 6.(-3)^2 - 18 \cdot (-3) + 56) + (-164) = 0 + (-164) = -164$$

Naturalment hem obtingut el residu anterior, que veiem que coincideixen, el valor numèric del polinomi i el residu de la divisió.

Activitats proposades

21. Utilitzeu la regla de *Ruffini* per conèixer el valor del polinomi $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ en $x = 5$.

1.4. Arrels d'un polinomi

Donat un polinomi $p(x)$ direm que un número real concreto α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi p, si a l'avaluar p en $x = \alpha$ obtenim el número 0, això és, si

$$p(\alpha) = 0$$

Exemple:

- *Considerem el polinomi* $s(x) = 2x^3 + 2x^2 - 8x - 8$.
  - El número 2 és una arrel de $s(x)$, ja que
  $$s(2) = 2\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 8\cdot 2 - 8 = 2\cdot 8 + 2\cdot 4 - 16 - 8 = 16 + 8 - 16 - 8 = 0$$
  - Una altra arrel de $s(x)$ és el número -1:
  $$s(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 - 8\cdot(-1) - 8 = 2\cdot(-1) + 2\cdot(+1) + 8 - 8 = -2 + 2 + 8 - 8 = 0$$
  - En canvi, el número 1 no és una arrel de $s(x)$:
  $$s(1) = 2\cdot 1^3 + 2\cdot 1^2 - 8\cdot 1 - 8 = 2 + 2 - 8 - 8 = 4 - 16 = -12 \neq 0$$
  - Tampoc és arrel de $s(x)$ el número 0:
  $$s(0) = 2\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2 - 8\cdot 0 - 8 = 0 + 0 - 0 - 8 = -8 \neq 0$$

Càlcul de les arrels d'un polinomi

Exemples:

- *Comprovem, mitjançant la regla de Ruffini, que* $\alpha = \frac{1}{2}$ *és arrel del polinomi* $2x^2 - 3x + 1$*:*

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- *Per conèixer les arrels del polinomi* $x^2 - 2$ *hem d'estudiar si hi ha algun nombre real* α *tal que l'anul·li, és a dir, per al qual es tingui que*

$$\alpha^2 - 2 = 0$$
$$\alpha^2 = 2$$
$$\alpha = \pm\sqrt{2}$$

Així, el polinomi de grau dos $x^2 - 2$ té dues arrels diferents, que són nombres irracionals.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

- *Ja sabem que hi ha polinomis sense arrels, com per exemple* x^2+4.

Per tal de facilitar la comprensió dels conceptes i resultats d'aquest assumpte la majoria dels nombres que han aparegut fins ara, coeficients, arrels, etc., han estat nombres enters. Per descomptat que podem trobar-nos amb polinomis amb coeficients racionals, o irracionals, o amb polinomis amb arrels donades per una fracció o un nombre irracional. També existeixen polinomis sense arrels.

Apreciem que la regla de *Ruffini* ens informa sobre si un nombre concret és o no arrel d'un polinomi. Naturalment, quan som davant d'un polinomi, i ens interessa conèixer les seves arrels, no és possible efectuar una prova amb cada nombre real per a determinar quins són arrel del polinomi. En el pròxim paràgraf destacarem certs "nombres candidats" a ser arrel d'un polinomi.

A l'hora de buscar les **arrels enteres d'un polinomi** disposem del següent resultat:

Donat un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seves **arrels enteres,** si en tingués, es troben necessàriament entre els divisors enters del seu terme independent a_0.

Procedim a la seva demostració. Suposem que un cert nombre enter α és una arrel del polinomi. Tal nombre ha d'anul·lar-lo:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$
$$\alpha\cdot(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$
$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la darrera igualtat, el nombre del costat esquerre és enter, perquè està expressat com una suma de productes de nombres enters. Per tant, el nombre del costat dret, $\frac{-a_0}{\alpha}$, també és enter. Al ser també enters tant $-a_0$ com α, deduïm que α és un divisor de a_0.

Exemples:

- Determinem, d'acord amb l'anterior resultat, quins nombres enters són candidats a ser arrels del polinomi $7x^3+23x^2-2x-6$:

  Tals nombres enters candidats han de ser divisors de -6, el terme independent del polinomi. Per tant, els únics nombres enters que poden ser arrel del polinomi són:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

- Les úniques possibles arrels enteres del polinomi $2x^3+3x^2-11x-6$ també són:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

En aquest cas 2 i –3 són arrels enteres del polinomi.

Podem afirmar un resultat més general sobre classes de nombres i arrels d'un polinomi:

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Donat un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

els coeficients del qual són tots nombres enters, les seves **arrels racionals**, si en té, tenen necessàriament per numerador algun divisor del terme independent, a_0, i per denominador algun divisor del coeficient del terme de grau més gran, a_n.

Exemples:

- En el polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ els nombres racionals candidats a ser les seves arrels tenen per numerador un divisor de -6 i per denominador un divisor de 2. Per tant, els únics nombres racionals que poden ser arrel del polinomi són:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

A més de 2 i -3, també és arrel $\frac{-1}{2}$; els altres no ho són.

- Les úniques possibles arrels racionals del polinomi $2x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 4x - 3$ són:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

En aquest cas cap d'aquests nombres és arrel del polinomi.

Activitats proposades

22. Feu servir la regla de Ruffini per dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis citats:

a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$

b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$

d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

23. Per a cadascun dels següents polinomis assenyaleu, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ser-ne arrels i, després, determineu quins ho són:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

24. Comproveu que $\frac{-1}{2}$ és arrel del polinomi $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

25. Per a cadascun dels següents polinomis indiqueu quins nombres racionals són candidats a ser-ne arrels i, després, determineu quins ho són:

a) $3x^2 + 4x - 5$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

1.5. Factorització de polinomis

Tot polinomi de grau n té com a molt n arrels reals, alguna de les quals pot aparèixer repetida entres aquests no més de n nombres reals.

Basant-nos en el càlcul de les arrels d'un polinomi anem a realitzar el procés de descomposició d'un polinomi en forma de producte d'altres polinomis més senzills (Factorització d'un polinomi):

Ens basarem en el següent enunciat:

La *condició necessària i suficient* per tal que un polinomi $P(x)$ sigui divisible per $(x - a)$ és que a sigui una arrel de $P(x)$.

Podem reescriure aquest resultat de la següent forma:

Un polinomi $P(x)$ és divisible per $(x - a) \Leftrightarrow a$ és una arrel de $P(x)$.

Demostrem-ho:

Si $P(x)$ és divisible per $(x - a) \Rightarrow a$ es una arrel de $P(x)$: ***Condició necessària***

En efecte: $P(x)$ divisible per $(x - a) \Rightarrow r = 0 \Rightarrow P(a) = 0$ (pel teorema del residu) $\Rightarrow a$ és arrel de $P(x)$

Si a és una arrel de $P(x) \Rightarrow (x - a)$ divideix $P(x)$: ***Condició suficient***

En efecte: a arrel de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$ (pel teorema del residu).

El residu de la divisió de $P(x)$ entre $(x - a)$ és $0 \Rightarrow (x - a)$ divideix $P(x)$ per la definició d'arrel.

Com a conseqüència immediata es té: si a és una arrel de $P(x) \Rightarrow P(x) = c(x)\,(x - a)$

El polinomi donat queda descompost en forma de producte de dos factors. Repetint el procés per a $c(x)$, aquest es pot descompondre de nou i així successivament.

Arribem al resultat general: donat el polinomi $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ les n arrels del qual són x_1, x_2, …, x_n, el polinomi es pot descompondre factorialment de la següent forma:

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Diem que un polinomi és **reductible** si admet una factorització mitjançant polinomis de grau inferior al seu. En cas contrari el polinomi serà **irreductible.**

Exemple:

- Descompondre factorialment el polinomi: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Com que el coeficient de x^3 és 1, tal i com vam veure en l'apartat de càlcul d'arrels d'un polinomi, les possibles arrels racionals, si existeixen, han de ser divisors de 2. Per tant poden ser: $+1, -1, +2, -2$.

Comprovem si 1 és arrel. Apliquem el teorema de *Ruffini*:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Per tant, 1 és arrel i tenim:

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x^2-3x+2)$$

Resolem ara l'equació $x^2-3x+2=0$,i resulta $x=1$ y $x=2$.

Per tant, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ i en definitiva, el polinomi tindrà la següent descomposició factorial: $x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-1)(x-2)=(x-1)^2(x-2)$ essent les seves arrels $x_1=1$, doble i $x_2=2$.

Hi ha polinomis que no admeten arrels, és a dir, que no s'anul·len mai.

Exemples:

- El polinomi $t(x)=x^2+4$ no té arrels donat que a l'avaluar-lo en qualsevol nombre real α sempre ens dona un valor estrictament positiu i, per tant, diferent de 0:

$$t(\alpha)=\alpha^2+4>0$$

  A més, aquest polinomi de grau dos, $t(x)=x^2+4$, és un polinomi irreductible perquè, al no tenir arrels, no podem expressar-lo com a producte de polinomis de grau més petit.

- Un altre polinomi sense arrels reals és $u(x)=(x^2+1)^2=(x^2+1)\cdot(x^2+1)=x^4+2x^2+1$.

Activitats proposades

26. Suposem que tenim dos polinomis, $p_1(x)$ i $p_2(x)$, i un nombre real α.

a) Si α és una arrel de $p_1(x)$, és també arrel del polinomi suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α és una arrel de $p_1(x)$, és també arrel del polinomi producte $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi $p_1(x)$ i les del polinomi $4\cdot p_1(x)$?

27. Construïu un polinomi de grau 4 que tingui tres arrels diferents.

28. Determineu un polinomi de grau 4 tal que tingui, almenys, una arrel repetida.

29. Construïu un polinomi de grau 4 de forma que tingui una única arrel.

30. Conjectureu, i després demostreu, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$$

admet el número 0 com a arrel.

31. Demostreu una norma que assenyali quan un polinomi qualsevol

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_1x+a_0$$

Admet el número 1 com a arrel.

32. Determineu les arrels de cadascun dels següents polinomis:

a) $x+5$ b) $-x+3$ c) $7x-5$ d) $-3x-11$

e) $-7x$ f) x^2-8x g) $4x^2-x-3$ h) x^3-4x i) x^3+25x

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Fraccions algebraiques

Una **fracció algebraica** és una expressió de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

on tant $P(x)$ com $Q(x)$ són polinomis.

Exemples:

- *Així són fraccions algebraiques les següents expressions:*

$$\frac{7x^3 - 2x}{6x^2 + 5x - 9} \qquad \frac{4x^2 - 9x}{2x^2 + 33} \qquad \frac{3x^2y + 2xy^2}{7xy}$$

Són expressions algebraiques, són **fraccions algebraiques**. En general, no són un polinomi. Només ho és en el cas molt particular en què el denominador és un nombre real diferent de zero, això és, un polinomi de grau 0.

És senzill constatar que les expressions anteriors no són un polinomi: qualsevol polinomi pot tenir un valor numèric per a qualsevol nombre real x. No obstant això aquestes expressions no poden ser avaluades per als valors que anul·len el denominador.

- Podríem creure que la següent fracció sí que és un polinomi:

$$\frac{-3x^3 + 5x^2 - 3x}{x} = \frac{-3x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -3x^2 + 5x - 3$$

L'expressió de la dreta sí és un polinomi, ja que es tracta d'una suma de monomis, però la de l'esquerra no ho és ja que no pot ser avaluada en $x = 0$. No obstant això, aquesta fracció algebraica i el polinomi, quan són avaluades en qualsevol nombre diferent de zero, ofereixen el mateix valor.

Són **expressions equivalents** on ambdues tenen sentit.

Simplificació de fraccions algebraiques

De la mateixa manera que es fa amb les fraccions numèriques, per a simplificar fraccions algebraiques es descomponen numerador i denominador en factors, simplificant, posteriorment, aquells que són comuns.

Exemple:

- *Una fracció algebraica com* $\frac{x^4 - 8x^2 - 9}{x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6}$ pot ser simplificada gràcies a que el numerador i el denominador admeten factoritzacions en què algun polinomi és present en totes dues.

$$\frac{x^4 - 8x^2 - 9}{x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6} = \frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Com ja hem apuntat en d'altres ocasions, les expressions final i inicial no són idèntiques però sí que són equivalents en tots aquells valors per als quals ambdues tenen sentit, això és, per a aquells en què no s'anul·la el denominador.

Operacions amb fraccions algebraiques

Les operacions amb fraccions algebraiques es realitzen de la mateixa forma que les respectives operacions amb fraccions numèriques.

Donat que les fraccions algebraiques obtingudes a partir de dos polinomis són, en potencia, nombres reals, operarem amb tals expressions seguint les propietats dels nombres reals.

- **Suma o resta.** Per a sumar o restar dues fraccions algebraiques hem d'aconseguir que tinguin el mateix denominador. Una manera segura d'aconseguir-ho, encara que pot no ser la més adequada, és aquesta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producte.** N'hi ha prou amb multiplicar els numeradors i denominadors enter sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **Divisió.** Segueix la coneguda regla de la divisió de fraccions numèriques:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Exemple:

- *En una suma de fraccions algebraiques como aquesta*

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podem trobar un denominador comú en les fraccions a partir de la descomposició de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$
$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Convé destacar que en el resultat final s'ha optat per deixar el denominador factoritzat. D'aquesta forma, entre d'altres qüestions, s'aprecia ràpidament per a quins valors de la indeterminada aquesta fracció algebraica no admet ser avaluada.

Activitats proposades

33. Simplifiqueu, si és possible, les següents expressions:

a) $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

34. Simplifiqueu les següents fraccions algebraiques:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

35. Realitzeu les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

36. Efectueu els següents càlculs:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}+\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$ c) $\dfrac{-x}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}:\dfrac{x-2}{x+3}$

37. Realitzeu les següents operacions alterant, en cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{3x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{8}{x+3}$

38. Comproveu les següents identitats simplificant l'expressió del costat Esquerra de cada igualtat:

a) $\dfrac{8a^4b^3}{2a^2b^2}=4a^2b$ b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$ d) $\dfrac{6a^2b^2+8a^2b-10ab}{2ab^2+16a^2b}=\dfrac{3ab+4a-5}{b+8a}$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

2. EQUACIONS I INEQUACIONS DE PRIMERI SEGON GRAU

En aquest aparat anem a centrar-nos en la resolució d'equacions i inequacions de primer i segon grau i en la seva interpretació gràfica, per a exposar seguidament els sistemes d'equacions i inequacions i la seva aplicació a les Ciències i a les Ciències Socials.

Ja sabeu que:

2.1. Resolució d'equacions de primer grau

Recordeu que:

La tècnica per a resoldre una equació de primer grau consisteix sempre en transformar l'equació inicial en una altra d'equivalent fins a aconseguir aïllar la incògnita en el primer membre:

Exemple:

- Resoldre l'equació: $\frac{7(x-1)}{3}+\frac{5x}{6}=1-\frac{x}{2}$
- *Primer pas: Suprimir els denominadors*.

El mínim comú múltiple dels denominadors és 6, multipliquem per 6 tota l'equació.

$$\frac{6.7(x-1)}{3}+\frac{6.5x}{6}=6.1-\frac{6.x}{2}\Rightarrow 14(x-1)+5x=6-3x$$

- *Segon pas: Efectuar els parèntesis:*

$$14x-14+5x=6-3x$$

- *Tercer pas: Transposar termes i simplificar:*

$$14x+5x+3x=6+15\Rightarrow 22x=20$$

- *Quart pas: aïllar la incògnita, i simplificar el resultat.*

$$x=\frac{20}{22}=\frac{10}{11}$$

- *Cinquè pas: Comprovar la solució.*

Substituïm el resultat obtingut a l'equació donada i comprovem que es verifica la igualtat.

Recordeu que:

Les equacions permeten resoldre molts tipus de problemes.

El tractament habitual davant d'un problema concret és el següent:

1. **Plantejar una equació que concordi amb l'enunciat.**
2. **Resoldre l'equació**
3. **Comprovar el resultat i interpretar-lo**

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Exemple:

- La suma de tres nombres enters consecutius és 108. Quins són aquests nombres?

Anomenem x al menor. Els tres nombres, al ser consecutius, seran:

1r nombre: x

2n nombre: $x+1$

3r nombre: $x+2$

Plantegem ara l'equació corresponent a l'enunciat: la suma ha de ser 108. Per tant:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 108$$

Els parèntesis, en aquest cas, no són necessaris per la propietat associativa de la suma de nombres reals. S'hi han posat, exclusivament, per fer més clara l'equació que estem escrivint.

Eliminem els parèntesis i agrupant termes ens queda:

$$x + x + 1 + x + 2 = 108 \Rightarrow x + x + x = 108 - 1 - 2 = 105 \Rightarrow 3x = 105$$

Aïllant la incògnita:

$$x = \frac{105}{3} = 35.$$

Per tant els nombres són 35, 36 i 37, la suma dels quals és 108.

2.2. Equacions de segon grau

Ja sabeu que:

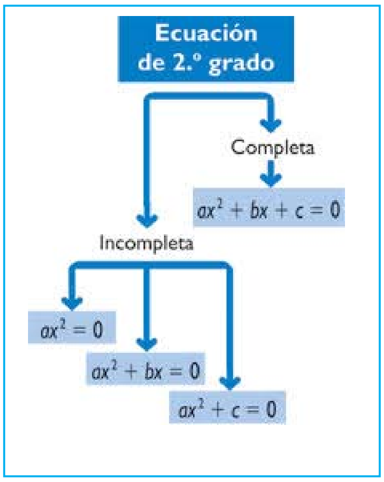
Una equació de segon grau és la que té com a forma general la següent:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}, \text{ con } \boldsymbol{a \neq 0}.$$

Una equació té tantes solucions com el seu grau.

Ja sabeu que al ser de grau 2 tindrà 2 solucions o 1 o cap en els nombres reals.

Segons com sigui l'equació de segon grau les seves solucions es poden trobar:



Cas 1: El coeficient de x és 0: b = 0:

En aquest cas l'equació és de la forma: $ax^2 + c = 0$.

Per trobar les solucions n'hi ha prou amb aïllar x:

$$ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Exemple:

- Resoldre l'equació: $2x^2 - 8 = 0$

S'aïlla x^2: $$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2$$

Cas 2: El terme independent és 0: $c = 0$

L'equació és ara de la forma:

$$ax^2 + bx = 0\,.$$

Per resoldre-la n'hi ha prou amb treure x factor comú:

$$ax + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; ax + b = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}$$

En aquest cas sempre una de les dues solucions serà $x = 0$.

Els casos 1 i 2 són **equacions de segon grau incompletes,** que també es poden resoldre aplicant la fórmula general. Això no obstant és més ràpid resoldre-les de la manera que acabem d'exposar.

Cas 3: Resolució analítica d'una equació de segon grau completa:

Solució gràfica d'una equació de son grau: Considerem la funció

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

La seva representació gràfica és una paràbola, on les solucions de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ són els dos punts de tall d'aquesta amb l'eix d'abscisses.

*Solució analítica d'una **equació de segon grau completa:*** Partint de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ anem a obtenir el valor de x:

Passem el terme independent al segon membre quedant expressat de la següent forma:

$$ax^2 + bx = -c$$

Multipliquem tota l'equació per $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Sumem b^2 a ambdós membres:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer membre és el quadrat del binomi $2ax + b$. Per tant:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Extraiem l'arrel quadrada $$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Passem b al segon membre i dividim entre $2a$, amb què obtenim el següent resultat:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per tant:

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

És la fórmula general per calcular les dues solucions de l'equació de segon grau.

Particularitats:

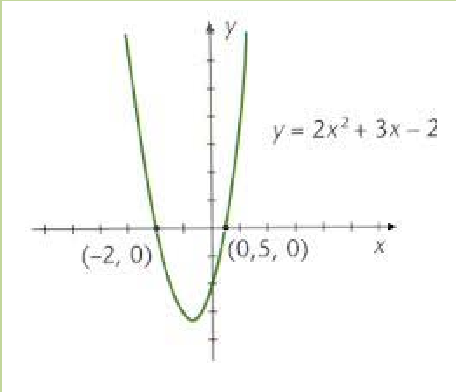
El radicand, $b^2 - 4ac$, rep el nom de **discriminant** de l'equació. Es representa amb la lletra grega Δ. Segons el signe del discriminant poden donar-se tres casos:

- $\mathbf{\Delta > 0}$: L'equació té les dues solucions x_1 i x_2
- $\mathbf{\Delta = 0}$: L'equació té una única **solució doble**, les dues solucions de l'equació són iguals:

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

- $\mathbf{\Delta < 0}$**:** El radicand és negatiu, l'equació no té arrels reals (l'arrel dona lloc a un nombre complex no real).

Exemple:



- Resoldre l'equació:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

La seva solució gràfica és una paràbola amb el vèrtex cap avall al tenir positiu el coeficient de x^2, como hem representat aquí.

Anem a veure que les seves solucions analítiques són els punts de tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses.

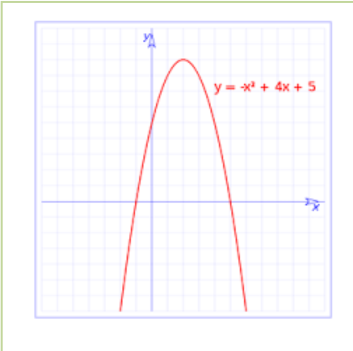
Comprovem-ho:

$2x^2 + 3x - 2 = 0$. Aplicant la fórmula general de resolució d'una equació de segon grau completa.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.2.(-2)}}{2.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -2,$$

que coincideixen amb els punts de tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses.

Exemple:



- Anem a considerar ara un exemple d'una equació de segon grau amb el coeficient de x^2 negatiu $-x^2 + 4x + 5$ la representació gràfica del qual és una paràbola amb el vèrtex cap amunt:

Como en l'exemple anterior apliquem la fórmula general de resolució d'equacions de segon grau, l'equació és:

$$-x^2 + 4x + 5$$

La solució de la qual és:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-1).5}}{2.(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2} = \frac{-4 \pm 6}{-2} \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 5,$$

que coincideixen amb el tall de la paràbola amb l'eix d'abscisses.

Suma i producte de les solucions en una equació de segon grau

Anem a calcular ara a què és igual la suma i el producte de les dues arrels d'una equació de segon grau..

Anomenem:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

les dues solucions o arrels.

Vegem en primer lloc a què és igual la suma d'ambdues:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}+-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

És a dir:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Vegem ara el producte:

$$x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} . \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

És a dir: $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$

Fórmula de *Cardano*: $x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Les igualtats anteriors ens permeten resoldre el problema invers a l'habitual: enlloc de trobar les solucions o arrels donada una equació, podrem, sabent quines són les solucions d'una equació, trobar l'expressió de l'equació.

En efecte, considerem l'equació de segon grau de sempre, de solucions x_1 i x_2:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividint tota l'equació pel coeficient de x^2:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Equació equivalent a la donada.

Fixant-nos en aquesta equació, veiem que el coeficient de la x és igual a la suma de les dues arrels amb el signe contrari, mentre que el terme independent és igual al producte de les arrels..

Com a conseqüència: si les dues arrels d'una equació de segon grau són x_1 i x_2, l'equació és:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1.x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0$$

Exemple:

- Les dues arrels d'una equació de segon grau són $x_1 = 1/2$ i $x_2 = 2/3$. Quina és l'equació?

Sumant les dues arrels tenim: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$. L'anomenem s.

Multipliquem les dues arrels i tenim: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. L'anomenem p.

Per la fórmula anterior obtenim que l'equació és: $x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$.

Si traiem denominadors l'equació queda: $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

- Una altra forma de resoldre aquest tipus de problemes és fer ús de la factorització de polinomis que hem estudiat en pàgines anteriors.

Considerem l'equació de segon grau completa $ax^2+bx+c=0$ de solucions x_1 i x_2.

Sabem que aquesta primera equació és equivalent a aquesta altra: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

En conseqüència, el polinomi corresponent a la mateixa és: $p(x)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$

Té com a arrels els nombres x_1 i x_2 i la seva descomposició factorial és:

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)$$

Si efectuem el producte, podem escriure l'equació corresponent:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Es poden plantejar múltiples problemes de la vida real i d'aplicació a altres ciències.

Les pautes a seguir són les mateixes que les de les equacions de primer grau.

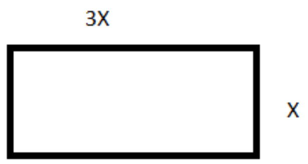
Vegem-ne un exemple:

Exemple:

- Volem sembrar de gespa una parcel·la rectangular de 27 m^2, de manera que un dels costats de la mateixa sigui el triple de l'altre. Quines són les dimensions de la parcel·la?

Anomenant x al costat més petit del rectangle, l'altre, al ser el triple, mesurarà $3x$.

Donat que l'àrea del rectangle és igual al producte de la base per l'altura:



$$3x\cdot x=27\Rightarrow 3x^2=27\Rightarrow x^2=9$$

Per tant les dues solucions d'aquesta equació són $x = 3$ y $x = -3$.

Però donat que no té sentit que una longitud sigui negativa per a una parcel·la, la única solució vàlida és $x = 3$ m. Segons això les dimensions de la parcel·la són 3 m i 9 m.

Equacions biquadrades

S'anomenen equacions **biquadrades** a les equacions del següent tipus:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Són equacions de quart grau, en què la incògnita apareix elevada únicament a potències parells. Al ser de quart grau, tindrà 4 solucions.

El procés general per a resoldre aquest tipus d'equacions és fer un canvi de variable.

Fent $t=x^2$ tindrem l'expressió següent:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow at^2 + bt + c = 0$$

Aconseguim convertir l'equació de quart grau en una equació de segon grau fàcil de resoldre, d'aquí que l'haguem inclòs com una equació de segon grau particular.

Es resol l'equació de segon grau com a tal i una vegada resolta cal realitzar un darrer pas:

Hem trobat el valor de t, però la incògnita és x. Amb la qual cosa hem de desfer el canvi efectuat:

Si $x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$

Exemple:

- Resoldre l'equació $3x^4 + x^2 - 4 = 0$

Efectuant el canvi $x^2 = t$, l'equació es converteix en:

$$3t^2 + t - 4 = 0$$

Que resolem per a t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.3.(-4)}}{2.3} = \frac{-1 \pm 7}{6} \Rightarrow t_1 = 1; t_2 = -\frac{4}{3}$$

És a dir, les dues solucions d'aquesta equació són $t_1 = 1$ i $t_2 = -4/3$, desfem el canvi:

$$x^2 = t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 = t = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Aquesta darrera solució no és un nombre real, ja que una arrel quadrada d'un negatiu no té solució real. Es troba dins dels nombres imaginaris que ja coneixem del capítol anterior..

En definitiva, les quatre solucions de l'equació biquadrada són:

$$x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = \frac{2\sqrt{3}}{3}i; x_4 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}i$$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats proposades

39. Resoleu les següents equacions:

a) $\frac{2x-4}{3x-2}=\frac{4}{7}$

b) $\frac{x+8}{x-1}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{12x}{x^2-1}$

c) $\frac{3(2x+1)}{4}-\frac{5x+3}{6}+4x+\frac{x+1}{3}=x+\frac{151}{12}$

40. Resoleu:

a. $\frac{x^2}{25}+\frac{(x+3)^2}{9}=1$

b. $\frac{x^2}{16}=1+\frac{3/4x}{9}$

c. $4x^4+8x^2-12=0$

d. $80x^4-48x^2-12=0$

41. Sumant set unitats al doble d'un nombre més les 3/2 del mateix obtenim com a resultat el sèxtuple del nombre menys 23. De quin nombre es tracta?

42. Les dimensions d'un rectangle són 54 i 36 metres. Traceu una paral·lela al costat que mesura 36 m de manera que es formi un rectangle semblant al primer. Quines són les longituds dels segments en què la paral·lela divideix al costat de 54 m?

43. Volem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300 000 €. Si la finca val 4 vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca, quant val cada cosa?

2.3. Resolució d' inequacions de primer grau i la seva interpretació gràfica

Una **inequació** és una desigualtat algebraica en què apareixen una o més incògnites.

El **grau** d'una inequació és el major dels graus a què estan elevades les seves incògnites.

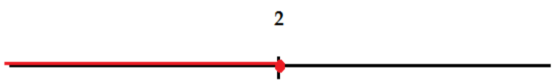
Així,

- $4 \geq x + 2$ i $x + y \geq 2$ són inequacions de primer grau, mentre que $x^2 - 5 \geq x$ és de segon grau.

Resoldre una inequació consisteix a trobar els valors que la verifiquen. Aquests es denominen **solucions** de la inequació.

Per exemple:

- $4 \geq x + 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2]$ $\Leftrightarrow$



Inequacions equivalents

Dues inequacions són **equivalents** si tenen la mateixa solució.

A vegades, per a resoldre una inequació, resulta convenient trobar-ne una altre d'equivalent més senzilla.

A tal efecte, es poden realitzar les següents transformacions:

- Sumar o restar la mateixa expressió als dos membres de la inequació.

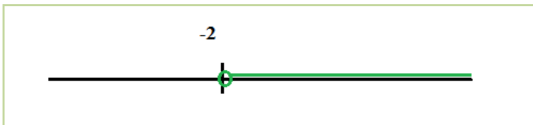
$$5x + 4 < 9 \Leftrightarrow 5x + 4 - 4 < 9 - 4 \Leftrightarrow 5x < 5$$

- Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre positiu.

$$5x < 5 \Leftrightarrow 5x : 5 < 5 : 5 \Leftrightarrow x < 1$$

- Multiplicar o dividir ambdós membres per un nombre negatiu i canviar l'orientació del signe de la desigualtat.

$x < 2 \Leftrightarrow (-x) \cdot (-1) > 2 \cdot (-1) \Leftrightarrow x > -2 \Leftrightarrow (-2, +\infty) \Leftrightarrow$



Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Inequacions de primer grau amb una incògnita

Una inequació de primer grau amb una incògnita es pot escriure de la forma:

$$ax > b,\ ax \geq b,\ ax < b \quad \text{o bé} \quad ax \leq b.$$

Per a resoldre la inequació en la majoria de casos convé seguir el següent procediment:

1r) **Treure denominadors**, si n'hi ha. A tal efecte, es multipliquen els dos membres de la inequació pel m.c.m. dels denominadors.

2n) **Treure els parèntesis**, si n'hi ha.

3r) **Transposar** els termes amb una x a un membre i els nombres a l'altre.

4t) **Reduir** termes semblants.

5è) **Aïllar** x.

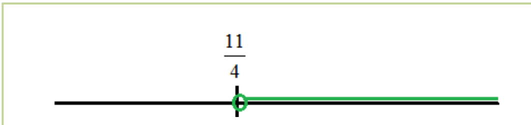
Exemple:

$$\frac{x-5}{3} - \frac{(x-8)}{6} > \frac{3-x}{2} \Leftrightarrow \frac{2(x-5)-(x-8)}{6} > \frac{3(3-x)}{6} \Leftrightarrow 2(x-5)-(x-8) > 3(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 10 - x + 8 > 9 - 3x \Leftrightarrow 2x - x + 3x > 10 - 8 + 9 \Leftrightarrow$$

$$4x > 11 \Leftrightarrow x > \frac{11}{4}$$

$$x \in \left(\frac{11}{4}, +\infty\right)$$



Activitats proposades

44. Resoleu les següents inequacions i representeu la solució a la recta real:

a) $5 + 3x < 2x + 4$ b) $3 + 4x \leq 8x + 6$ c) $5 + 4x > 3x + 2$ d) $1 + 3x \geq 5x + 7$

45. Resoleu les següents inequacions i representeu la solució a la recta real:

a) $4(3 + 2x) < -(6x + 8)$ b) $7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3)$ c) $9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$

46. Resoleu les següents inequacions i representeu la solució a la recta real:

a) $6 + 3x < x/3 + 1$ b) $5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$ c) $(2 + 5x)/3 > 4x + 1$ d) $(1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$

47. Escriviu una inequació la solució de la qual sigui el següent interval:

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(4, \infty)$ d) $(-\infty, 2)$

48. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible calcular les següents arrels:

a) $\sqrt{2x-3}$ b) $\sqrt{-x-9}$ c) $\sqrt{2-7x}$ d) $\sqrt{-2x+7}$

2.4. Resolució d'inequacions lineals de segon grau

Una inequació de segon grau amb una incògnita es pot escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

fent servir qualsevol dels quatre signes de desigualtat.

Per a resoldre-la, calculem les solucions de l'equació associada, les representem sobre la recta real, quedant per tant la recta dividida en tres, dos o un interval, depenent del fet que l'equació tingui dos, una o cap solució.

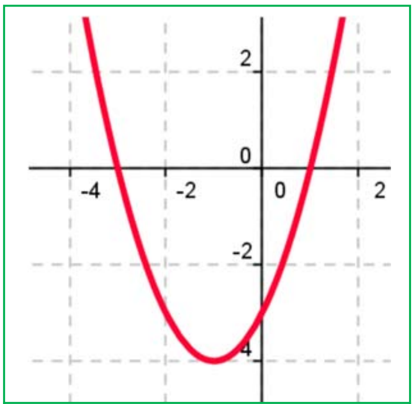
En cadascun d'ells, el signe del polinomi es manté constant, i per tant bastarà determinar el signe que té el polinomi per a un valor qualsevol de cadascun dels intervals. Per saber si les solucions de l'equació verifiquen la inequació, bastarà amb substituir-la en la mateixa i comprovar-ho..

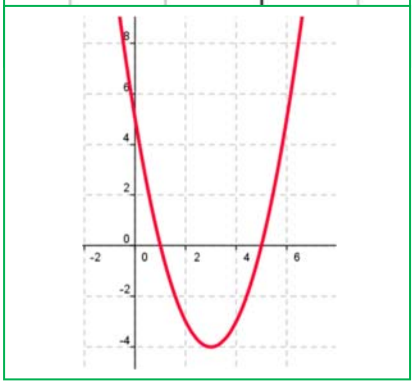
Exemple:

- *Representeu gràficament la paràbola*

$$y = x^2 + 2x - 3$$

i indiqueu en quins intervals és $x^2 + 2x - 3 > 0$.





Observeu en la gràfica que la paràbola pren valors negatius entre –3 i 1. La solució de la inequació és:

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty).$$

El punt –3 no és solució, ni tampoc el punt 1, ja que el problema té una desigualtat estricta, >.

Si tingués la desigualtat $\geq$, $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, la solució seria:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty).$$

Si fos $x^2 + 2x - 3 < 0$, la solució seria: $x \in (-3, 1)$.Si fos $x^2 + 2x - 3 \leq 0$, la solució seria: $x \in [-3, 1]$.

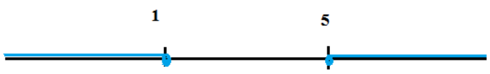
Exemple:

- $x^2 - 6x + 5 \geq 0$

Les arrels de $x^2 - 6x + 5 = 0$ són $x = 1$ y $x = 5$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1,\ 5)$	5	$(5, +\infty)$
Signe de $x^2 - 6x + 5$	+		–		+
$x^2 - 6x + 5 \geq 0$	si		no		si

Per tant, la solució és $x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$



Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats proposades

49. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 - 1 \geq 0$ b) $x^2 - 4 \leq 0$ c) $x^2 - 9 > 0$ d) $x^2 + 4 \geq 0$
e) $2x^2 - 50 < 0$ f) $3x^2 + 12 \leq 0$ g) $5x^2 - 45 > 0$ h) $x^2 + 1 \geq 0$

50. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 + x \leq 0$ b) $x^2 - 5x > 0$ c) $x^2 \leq 8x$
d) $x^2 \leq 3x$ e) $2x^2 - 3x > 0$ f) $5x^2 - 10x < 0$

51. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

b) $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

c) $x^2 + 9x + 14 > 0$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$

f) $x^2 + 8x + 16 > 0$

g) $x^2 + x + 3 \geq 0$

h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

52. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $x^2 + x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 12 \leq 0$

c) $x^2 - \mathrm{x} - 20 < 0$

d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$

h) $2x^2 + x - 15 < 0$

53. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible obtenir les següents arrels:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$ b) $\sqrt{-x^2 + 4}$ c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$ d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

54. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$ b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$ c) $\dfrac{3x-2}{x} \leq \dfrac{5-2x}{x+3}$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Els sistemes d'equacions lineals és un sistema d'equacions en què totes les incògnites estan elevades a la unitat, no podent aparèixer el producte de dues d'elles.

És un conjunt d'equacions que s'han de verificar per als mateixos valors de les incògnites, anomenats **solucions.**

Resoldre un sistema és trobar els valors que, substituïts en les incògnites, compleixin totes les equacions a la vegada.

Es classifiquen atenent a criteris diversos: nombre d'equacions o d'incògnites, tipus de les solucions …

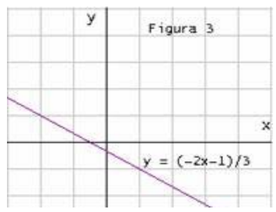
Els sistemes d'equacions lineals atenent al tipus de solució es classifiquen segons si tenen solució o no. Els que tenen solució s'anomenen *compatibles* i els que no en tenen, *incompatibles.* Els compatibles poden ser

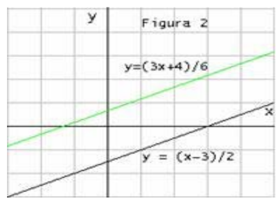
- **Compatible determinat:** si té una sola solució
- **Compatible indeterminat:** si té més d'una solució (en tenen infinites)

Sistemes d'equacions i possibles rectes en el pla:

Sistema Compatible
- Determinat
  - Solució única
  - Rectes secants
- Indeterminat
  - Infinites solucions
  - Rectes coincidents

Sistema Incompatible
- No té solució
- Rectes paral·leles





Anem a repassar els tres mètodes elementals de resolució de sistemes lineals amb dues equacions i amb dues incògnites, que són:

Exemple

- Resoldrem el següent sistema:

$5x - y = 3$

$2x + 3y = 8$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

♦ Mètode de substitució

El procés consisteix en aïllar una de les incògnites d'una de les equacions i substituir-la en l'altra..

Aïllem, per exemple, la y de la primera equació:

$$y = 5x - 3$$

I la substituïm en la segona:

$$2x + 3\,(5x - 3) = 8 \;\Rightarrow x = 1$$

I, per tant $y = 2$

♦ Mètode d'igualació

S'aïlla la mateixa incògnita de les dues equacions, igualant posteriorment ambdues expressions.

Aïllem, per exemple, la y en ambdues equacions:

$$5x - y = 3$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow y = 5x - 3$$

$$y = \frac{8 - 2x}{3}$$

Igualant:

$$5x - 3 = \frac{8 - 2x}{3} \Rightarrow x = 1$$

Posteriorment, per trobar $\boldsymbol{y}$ es substitueix el valor trobat de x en una de les dues equacions inicials, i es calcula el corresponent valor *de* $\boldsymbol{y}$.

♦ Mètode de reducció

Aquest mètode consisteix a transformar alguna de les equacions en d'altres d'equivalents de manera que al sumar-les o restar-les s'elimini una de les incògnites.

Multiplicant la primera equació per 3, obtenim el sistema equivalent següent:

$$\left.\begin{aligned} 5x - y &= 3 \\ 2x + 3y &= 8 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 15x - 3y &= 9 \\ 2x + 3y &= 8 \end{aligned}\right\}$$

I sumant les dues equacions s'obté $17x = 17$ i per tant $x = 1$.

Posteriorment, per trobar *y* es substitueix el valor trobat de x en una de les dues equacions inicials, i es calcula el corresponent valor *de y*:

$$2x + 3y = 8 \quad \Rightarrow \quad 2(1) + 3y = 8 \Rightarrow y = 2.$$

Gràficament les equacions amb dues incògnites representen una recta al pla.

En el cas anterior, l'equació: $y = 5x - 3$ i l'equació: $y = \dfrac{8-2x}{3}$ són dues rectes al pla.

Exemple:

Resoleu analíticament i gràfica el sistema d'equacions $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\}$

Dues rectes són secants si tenen només un punt en comú. Al resoldre el sistema que formen les seves equacions obtenim una solució que es correspon amb les coordenades del punt de tall.

Resolució analítica:

Resolem el sistema per reducció:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} 1^a \\ 2^a(2) \end{array}\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 7x = 7 \\ x = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 3\cdot 1 + 2y = 7 \\ y = 2 \end{array} \quad \text{Sol: } (1, 2)$$

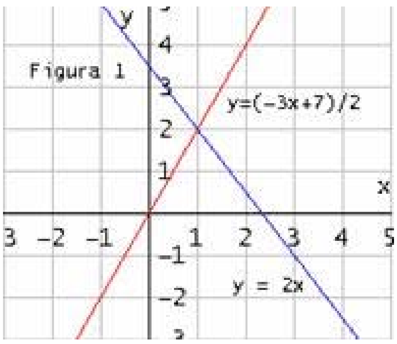
Resolució gràfica:

Fem la taula de valors de cadascuna de les equacions.

Representem les dues rectes que formen el sistema d'equacions:

$$1^a \quad 3x + 2y = 7 \rightarrow y = \frac{-3x + 7}{2} \rightarrow \begin{array}{ccc} x & 0 & 1 \\ y & 3,5 & 2 \end{array}$$

$$2^a \quad y = 2x \rightarrow \begin{array}{ccc} x & 0 & 1 \\ y & 0 & 2 \end{array}$$



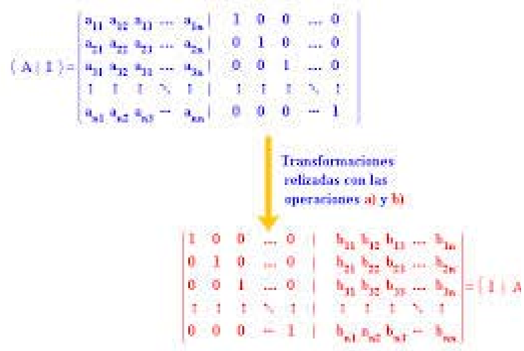
Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

3.1. Resolució pel mètode de Gauss

GAUSS: Font Google

El mètode de Gauss està basat en el mètode de reducció, també anomenat de cascada o de triangulació..

L'avantatge que té aquest mètode és que és fàcilment generalitzable a sistemes amb qualsevol nombre d'equacions i d'incògnites..



Aquest mètode consisteix a obtenir, per a un sistema de tres equacions amb tres incògnites, un sistema equivalent la primera equació del qual tingui tres incògnites; la segona, dues; i la tercera, una. S'obté així un sistema triangular de la forma següent:

Recordeu que:

Un sistema és equivalent a un altre si ambdós tenen les mateixes solucions.

Donat un sistema amb equacions complicades, el canviem per un altre que tingui les mateixes solucions que el donat (sistema equivalent) i que tingui equacions més senzilles

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ 0 + B'y + C'z = D' \\ 0 + 0 + C''z = D'' \end{cases}$$

La resolució del sistema és immediata; en la tercera equació calculem sense dificultat el valor de z, portem aquest valor de z a la segona equació i obtenim el valor de y, i amb ambdós valors calculem el valor de x amb la primera equació.

Exemple:

- Resoleu, aplicant el mètode de Gauss, el sistema:

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ 2x - 3y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

El procés és el següent:

1. S'elimina la incògnita x a la segona i tercera equació, sumant a aquestes la primera equació multiplicada per 2 i per 1, respectivament, quedant el sistema:

$$\begin{array}{ll} & x + 4y + 3z = -1 \\ E2 - 2E1 & 0 - 11y - 8z = 3 \\ E3 + E1 & 0 + 6y + 7z = 1 \end{array}$$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

2. Suprimim la incògnita y de la tercera equació sumant-li, prèviament multiplicada per 11, la segona equació multiplicada per 6:

$$\begin{array}{rl} & x + 4y + 3z = -1 \\ & 0 - 11y - 8z = 3 \\ 11E3 + 6E2 & 0 + 0 + 29z = 29 \end{array}$$

3. Es resol el sistema esglaonat començant per la tercera equació:

$$29z = 29 \Rightarrow z = \frac{29}{29} \Rightarrow z = 1$$

Ara, a la segona equació:

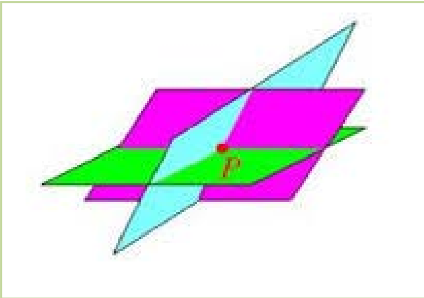
$$-11y - 8\,(1) = 3 \Leftrightarrow -11y = -11 \Leftrightarrow y = -1$$

I, finalment, a la primera:

$$x + 4\,(-1) + 3.1 = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0$$

La solució del sistema és:

$$x = 0,\ y = -1,\ z = 1$$



Geomètricament, com que cada equació lineal amb tres incògnites representa un pla, podem dir que els tres plans es tallen en el punt (0, –1, 1), que és l’únic punt comú a tots tres.

És un sistema **compatible determinat.**

3.2. Discussió de sistemes aplicant el mètode de Gauss

Discutir un sistema consisteix a explicar raonadament les seves possibilitats de solució depenent del valor dels seus coeficients i termes independents. En els sistemes esglaonats la discussió es fa a partir de l'equació més senzilla, que suposarem que és la última.

Partim del sistema inicial

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \qquad (E1)\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \qquad (E2)\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \qquad (E3)\end{aligned}$$

que transformem en un altre d'equivalent, de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \qquad (E1)\\ 0 + a'_{22}y + a'_{23}z &= b'_2 \qquad (E'2)\\ 0 + 0 + a''_{33}z &= b''_3 \qquad (E''3)\end{aligned}$$

A tal efecte s'elimina la incògnita x de la segona (*E*2) i les incògnites x i y de la tercera equació (*E*3).

Així, estudiant la tercera equació del segon sistema, $a''_{33}z = b''_3$, es determinen les possibilitats de solució del sistema inicial, verificant-se:

- Si $a_{33}'' \neq 0$ el sistema és **compatible determinat**, ja que sempre es pot trobar una solució única començant a resoldre el sistema per la tercera equació.
- Si $a_{33}'' = 0$ i $b''_3 = 0$ el sistema és **compatible indeterminat,** ja que l'equació *E*3 desapareix (queda $0z = 0$, que es verifica per a qualsevol valor de z resultant així un sistema amb dues equacions i tres incògnites), el sistema anterior queda:

$$\begin{matrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & & a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & & a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z \\ a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow & a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2 & \Leftrightarrow & a'_{22}y = b'_2 - a'_{23}z \\ 0z = 0 & & & & \end{matrix}$$

Per resoldre aquest sistema hem de suposar coneguda la incògnita z i trobar les altres en funció d'ella. (A la pràctica, sol fer-se $z = k$.)

- Si $a_{33}'' = 0$ i $b''_3 \neq 0$ el sistema es **incompatible**, ja que l'equació E3 queda $0z = b''_3 \neq 0$, que evidentment és absurda, ja que qualsevol valor de z multiplicat per 0 ha de donar 0.

Exemple:

- Discutiu i trobeu la solució del sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ -x + 3y - z &= -2 \\ 2x - y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

Fent servir el mètode de Gauss es té:

$$\begin{array}{lcccccccc} x + 2y + 3z = 4 & & & & x + 2y + 3z = 4 & & & x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 & \Leftrightarrow & E2 + E1 & \Leftrightarrow & 5y + 2z = 2 & \Leftrightarrow & & 5y + 2z = 2 \\ 2x - y + 4z = 6 & & E3 - 2E1 & & -5y - 2z = -2 & & E3 + E2 & 0z = 0 \end{array}$$

Com que l'equació E3 s'ha anul·lat el sistema és **compatible indeterminat**, ja que té menys equacions que incògnites. Tindrà infinites solucions, podent-les expressar totes en funció d'una d'elles.

El sistema és equivalent a:

$$\begin{array}{lcl} x + 2y + 3z = 4 & & x + 2y = 4 - 3z \\ 5y + 2z = 2 & \Leftrightarrow & 5y = 2 - 2z \end{array}$$

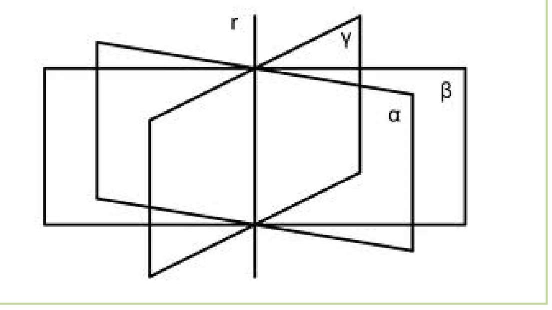
Aïllant y en $E2$, resulta $y = \frac{2-2z}{5}$. Substituint en $E1$:

$$x + 2.\left(\frac{2-2z}{5}\right) = 4 - 3z \Leftrightarrow x = 4 - \frac{4-4z}{5} - 3z \Leftrightarrow x = \frac{16-11z}{5}$$

Fent $z = k$, la solució és:

$$x = \frac{16-11k}{5}; y = \frac{2-2k}{5}; z = k$$

Geomètricament, les solucions del sistema anterior representen tres plans amb infinits punts comuns alineats segons una recta.



Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats resoltes:

- Resoleu pel mètode de *Gauss* el següent sistema d'equacions:

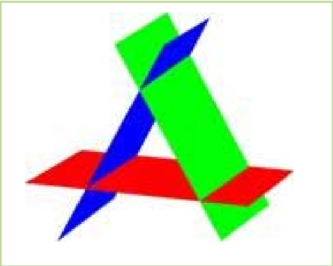
$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + y + 4z = 5 \end{cases}$$

Eliminen x a la 2a i 3a equació. A tal efecte fem: E2 – 2E1 y E3 - 3E1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -5y + z = -5 \\ -5y + z = -4 \end{cases}$$

Eliminem y a la 3a equació, a tal efecte fem: E3 - E2:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -5y + z = -5 \\ 0 = 1 \end{cases}$$



La última equació $0 = 1$ és un absurd que ens diu que el sistema és **incompatible, sense solució**.

Geomètricament, els plans que representen les equacions no tenen cap punt en comú.

- Resoleu, aplicant el mètode de Gauss, el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

El procés és el següent:
1. S'elimina la incògnita x a les equacions segona i tercera, sumant a aquestes la primera equació multiplicada per -2 i 1, respectivament: *E*2 - 2*E*1; *E*3 + *E*1, quedant el sistema:

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 0 - 11y - 8z = 3 \\ 0 + 6y + 7z = 1 \end{cases}$$

2. Suprimim la incògnita y de la tercera equació sumant a aquesta, prèviament multiplicada per 11, la segona multiplicada per 6: 11*E*3 + 6*E*2.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -1 \\ 0 - 11y - 8z = 3 \\ 0 + 0 + 29z = 29 \end{cases}$$

3. Es resol el sistema esglaonat començant per la tercera equació:

$$29z = 29 \Rightarrow z = 1.$$

Ara, a la segona equació:

$$-11y - 8\,.\,1 = 3 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1$$

I finalment, a la primera:

$$x + 4\,.\,(-1) + 3\,(1) = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 1 = 0.$$

La solució del sistema és:

$$x = 0,\ y = -1,\ z = 1.$$

Activitats proposades

55. Resoleu pel mètode de Gauss els sistemes:

a) $\begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$

56. Discutiu i resoleu, si és possible, el següent sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

57. Discutiu i resoleu quan sigui possible, els següents sistemes lineals d'equacions.

a) $\begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ x + 8y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 6z - 4t = 6 \\ 3x + 2y - 3z + 8t = -7 \\ 3x - y - 6z - 4t = 2 \\ 4x - y + 3z + 12t = 0 \end{cases}$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Problemes d'equacions lineals

Es poden plantejar problemes de la vida diària que es poden resoldre aplicant el mètode de *Gauss*, ja que donen lloc a sistemes de més de dues equacions i incògnites.

Abans de resoldre un problema donarem uns consells que aniran bé per a una resolució ràpida i eficaç.

Recordeu que
En la resolució del problema no importa tant arribar a obtenir la solució del problema com el **procés** seguit en la mateixa, que és el que realment ens ajuda a potenciar la nostra forma de pensar. Per començar hem de familiaritzar-nos amb el problema, comprenent l'enunciat i adquirint una idea clara de les dades que hi intervenen, les relacions entre ells i el que es demana.
En la fase de familiarització amb el problema s'han de tenir en compte les pautes següents:
Abans de fer tracteu d'entendre.
Preneu-vos el temps necessari.
Actueu sense presses i amb tranquil·litat.
Imagineu-vos els elements del problema i jugueu-hi.
Poseu en clar la situació de partida, la intermèdia i a la que heu d'arribar..
Busqueu estratègies per resoldre el problema i una vegada trobada dueu-la a terme.
Reviseu el procés i traieu-ne conclusions: el resultat que hem obtingut, fem la comprovació i observem que verifica les condicions imposades pel problema.

Exemple:

- Esbrina quants homes, dones i nens hi ha en una reunió sabent que: si hi hagués un nen més, hi hauria el mateix nombre de nens que d'homes i dones junts. Si hi hagués 8 dones més, el nombre d'aquestes doblaria a la suma d'homes, homes i nens. El triple del nombre d'homes més el nombre de dones és igual al nombre de dones més 5.

Si anomenem x el nombre d'homes, y el nombre de dones i z el nombre de nens, obtindrem el sistema següent:

$$\begin{cases} z+1=x+y \\ y+8=2(x+z) \\ 3x+y=z+5 \end{cases}$$

Passem les incògnites al primer membre i obtenim el següent sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+2z=8 \\ 3x+y-z=5 \end{cases}$$

Anem a resoldre'l aplicant el mètode de *Gauss*:

Eliminem x a la 2a i 3a equació. Fem E2-2E1; E3-3E1

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0 - 3y + 4z = 6 \\ 0 - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

La 3a equació és simplificable, la dividim entre 2, quedant E3/2:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 4z = 6 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

Eliminem y a la 3a equació. Fem -3E3+E2:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 4z = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

Obtenim així un sistema en forma esglaonada molt senzill de resoldre. De la 3a equació obtenim el valor de z: $z = 3$. Substituint $z = 3$ a la 2a equació:

$$-3y + 4(3) = 6 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

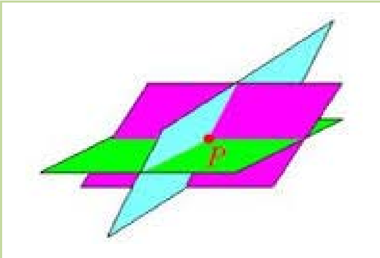
Substituint els valors de y i de z obtinguts a la 1a equació:

$$x + 2 - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$$

És un sistema **compatible determinat** amb solució única:

x =2 homes, y = 2 dones, z= 3 nens.

Comprovem el resultat. En efecte un nen més, 4, és igual al nombre de dones més homes, 2 + 2. 8 dones més, 10, dobla el nombre de dones i nens: 2(2 + 3). El triple del nombre d'homes, 6, més el nombre de dones, 6 + 2 = 8, és igual al nombre de nens més, 3 + 5.



Geomètricament són tres plans que es tallen en el punt (2, 2, 3), que és l'únic punt comú als tres.

Activitats proposades

58. Comprem 8 kg de cafè natural i 5 kg de cafè torrefacte, pagant 66 €. Calculeu el preu del quilo de cada tipus de cafè, sabent que si mesclem meitat i meitat el quilo resulta a 5 €.

59. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la del seu germà. La suma de les edats dels nens i de la mare és 45 anys. Quines edats tenen?

60. Volem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000 €. Si la finca val quatre vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca, quant val cada cosa?

61. Les tres xifres d'un nombre sumen 18.Si a aquest número se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 594; la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica de les altres dues. trobeu el nombre en qüestió.

3.4. Sistemes d'inequacions lineals

Un sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites és un conjunt de dues o més inequacions, que s'han de satisfer alhora.

Per a la seva resolució, es pot procedir de la següent forma:

- Es resol cada inequació per separat.
- **El conjunt solució** del sistema, també anomenat **regió factible**, està formada per les solucions comuns a totes les inequacions.

Exemple:

- Prenem com a exemple el sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 3 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$

1r Representem la regió solució de la primera inequació.

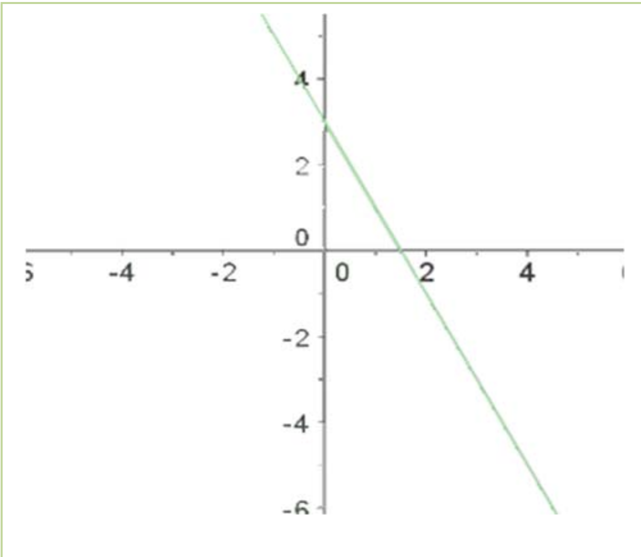
Transformem la desigualtat en igualtat.

$$2x + y = 3$$

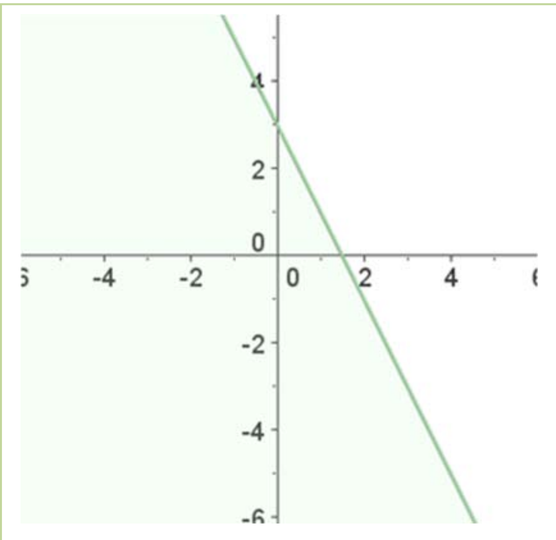
Donem a una de les dues variables dos valors, amb el que obtenim dos punts.

$x = 0; \quad 2 \cdot 0 + y = 3; \quad y = 3; \qquad (0,\ 3)$

$x = 1; \quad 2 \cdot 1 + y = 3; \quad y = 1; \qquad (1,\ 1)$



Al representar i unir aquests punts obtenim una recta.



Prenem un punt, per exemple el (0, 0), el substituïm a la desigualtat. Si es compleix, la solució és el semiplà on es troba el punt, si no la solució serà l'altre semiplà.

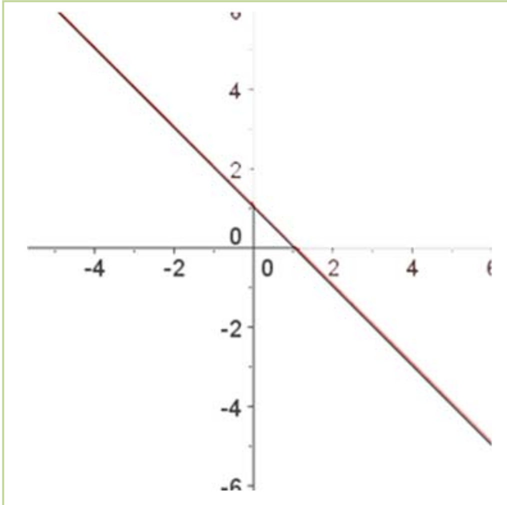
$2x + y \leq 3$

$2 \cdot 0 + 0 \leq 3 \qquad 0 \leq 3 \qquad$ **Sí**

El semiplà que està ombrejat és la solució de la primera inequació.

Fem el mateix amb la segona inequació:

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF



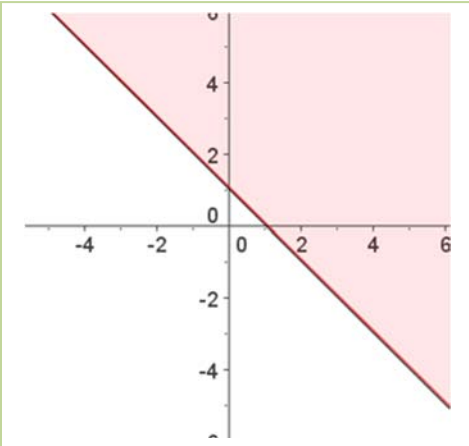
2n Representem la regió solució de la segona inequació.

$x + y = 1$

$x = 0; \quad 0 + y = 1; \quad y = 1; \quad (0, 1)$

$x = 1; \quad 1 + y = 1; \quad y = 0; \quad (1, 0)$

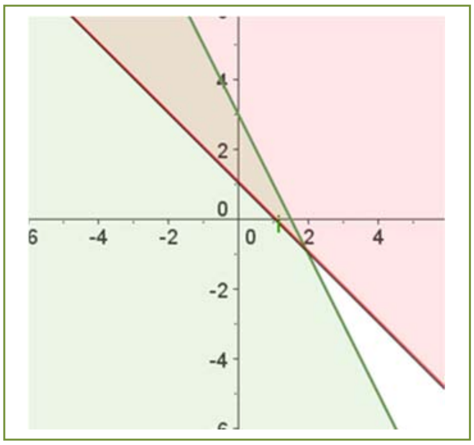
Prenem un punt, el (0, 0) per exemple i el substituïm a la inequació, com que no es compleix la desigualtat serà el semiplà on no hi ha el punt.



$x + y \geq 1$

$0 + 0 \geq 1$ **No**

3r La solució és la intersecció de les regions solució.



Activitats resoltes:

- Resoleu el següent sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} 2x - y \geq -3 \\ x + y < 2 \end{cases}$$

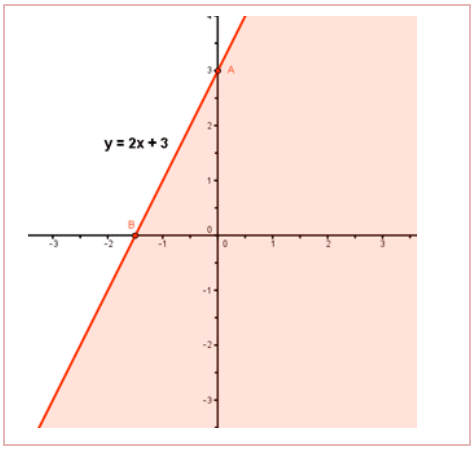
Conjunt de solucions de la primera inequació:

$2x - y = -3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 3.$

Punts de tall de la recta amb els eixos:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad A = (0, 3)$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad x = -3/2 \quad \Rightarrow \quad B = (-3/2, 0)$



Provem amb punts a ambdós costats de la recta per veure quin compleix la inequació:

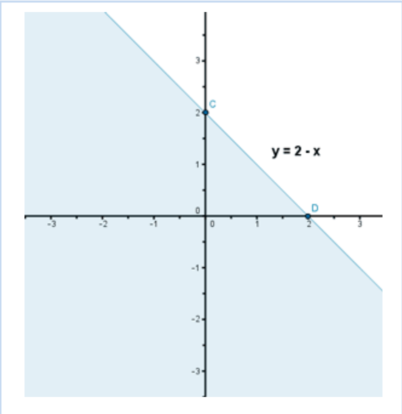
$(0, 0), \quad 2x - y \geq -3 \quad \Rightarrow \quad 0 \geq -3$ Sí

Com que es compleix la desigualtat per al punt proposat la regió factible és el semiplà al qual pertany el punt referit.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Conjunt de solucions de la segona inequació:

$$x + y = 2 \quad y = 2 - x$$



Punts de tall de la recta amb els eixos:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - x = 2 \quad \Rightarrow \quad C = (0,\ 2)$$

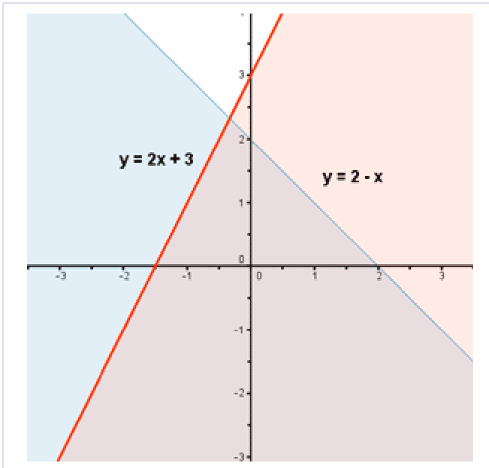
$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad D = (2,\ 0)$$

Provem amb punts a ambdós costats de la recta per veure quina regió verifica la inequació:

$$(0,\ 0), \quad x + y < 2 \quad \Rightarrow \quad 0 < 2$$

Com que es compleix per al punt donat el semiplà escollit és en el qual hi ha el punt.

El conjunt de solucions del sistema, o regió factible, està format per aquells punts que compleixin ambdues equacions, per tant, la solució és la intersecció d'ambdós semiplans:



Activitats proposades

62. Trobeu la regió factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

63. Resoleu els següents sistemes d'inequacions:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x - 2y + 3}{3} \geq \dfrac{x - y + 1}{2} \\ 1 - \dfrac{2x - 4 - y}{3} + \dfrac{2x + 3y}{2} \geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$

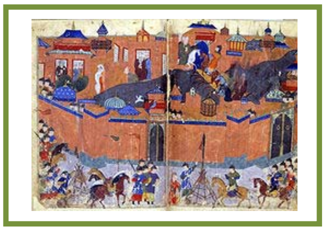
d) $\begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

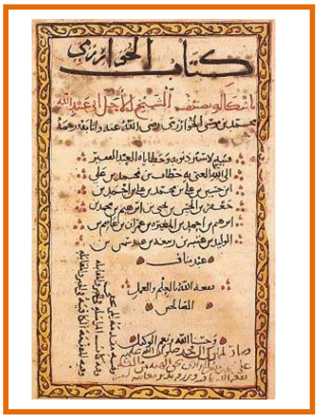
CURIOSITATS. REVISTA

L'origen de l'Àlgebra

L'origen de l'Àlgebra no és a Grècia, és a Bagdad, cap a l'any 773, amb la seva Casa de la Saviesa, un observatori i una biblioteca. Els llibres arribaven en diverses llengües i calgué traduir-los a l'àrab. Llibres de tot tipus, científics, filosòfics... En aquella època Bagdad era la nova Alexandria governada pel califa *Harún al-Raschid*, que promogué la cerca de manuscrits.



El matemàtic més important fou al-Khwarizmi. Si llegiu en veu alta aquest nom us sonarà semblant a algoritme, paraula que se'n deriva. Nasqué en el que avui és Uzbekistan. Va escriure el primer llibre d'Àlgebra (الجبر, al-jbr) paraula que en àrab significa col·locar, recompondre.



Pretenia convertir l'obscur en clar i el complex en simple.

Cervantes, al Quixot, parla d'un *algebrista* que arreglava ossos trencats o dislocats.

Fins aleshores s'havia treballat amb nombres coneguts, però al-Kwarizmi diu "*aquella cosa que busco, l'anomenaré, però com que no la conec, l'anomenaré cosa*". I cosa en àrab es diu شيء *xay*. El que es fa en àlgebra és utilitzar la cosa, la incògnita, com si es conegués, i s'intenta descobrir-la.

La noció d'equació es deu a al-Khwarizmi. Amb elles no resol un problema numèric concret sinó una família de problemes. És una igualtat entre dues expressions on almenys en una d'elles hi ha una incògnita.

Ell i els seus seguidors van resoldre equacions de primer, segon i tercer grau.

Àlgebra elemental és la part de l'àlgebra que s'ensenya generalment als cursos de Matemàtiques, resolent equacions i com a continuació de l'aritmètica.

Àlgebra abstracta és el nom donat a l'estudi de les estructures algebraiques.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Història de l'Àlgebra a Europa

Al segle XIII *Leonardo de Pisa*, fill de Bonaccio, ***Fibonacci***, aprengué àrab. Va escriure *Liber abaci*, i va portar les xifres àrabs (o hindús) a Europa.

En 1494 ***Luca Pacioli*** va escriure la primera obra d'àlgebra impresa. No aporta coneixements nous però recull els coneguts. Anomenava ***cosa*** a la incògnita.

Fins a ***Tartaglia*** (1499 – 1557) no es torna sobre problemes com la solució de les equacions de **tercer** grau.

En un desafiament es proposen problemes com aquests:

- *"Troba un nombre que sumat a la seva arrel cúbica doni 6"*
- *"Reparteix 100 monedes entre dues persones sabent que a la primera li correspon l'arrel cúbica de la segona"*
- *"Es presta un capital amb la condició que es torni al final d'un any amb uns interessos de l'arrel cúbica del capital. Es tornen 800 monedes, quant es va prestar"*

En 1572 *Raffaelle Bombelli* publica *Àlgebra*, on comença a fer servir els nombres complexos.

Euler (1707 – 1783) anomena *i* la unitat imaginària.

Es resolen equacions per radicals (com sabeu resoldre l'equació de segon grau). Són equacions formades per polinomis de primer, segon, tercer... grau. Es discuteix sobre el nombre de solucions, trobant estrany que una equació de tercer grau pogués tenir més d'una solució.

Fou *Karl* ***Gauss*** (1777 – 1855) qui, amb el **teorema fonamental de l'àlgebra**, va deixar resolt el problema del nombre de solucions d'una equació algebraica: ***Una equació algebraica de grau n té sempre n arrels en els complexos***.

Niels Henrik ***Abel*** (1802 – 1829) demostrà la impossibilitat de resoldre per radicals l'equació general de **cinquè grau**.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

RESUM

Polinomi	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3+4x^2+8x+6$ Grau 3
Grau d'un polinomi	El grau més gran dels seus monomis	
Suma, resta i producte de polinomis	El resultat sempre és un altre polinomi	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
Divisió de dos polinomis	S'obtenen dos altres polinomis, el polinomi quocient ($c(x)$) i residu ($r(x)$), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend ($p(x)$) i divisor ($q(x)$)	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$ grau(r(x))<grau(q(x))
Regla de Ruffini	Ens pot ajudar a l'hora de factoritzar un polinomi i conèixer les seves arrels	
Teorema del residu	El valor numèric que adopta un polinomi $p(x)$ al particularitzar-lo en $x=\alpha$ coincideix amb el residu que apareix al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.	
Arrel d'un polinomi	Un nombre real concret α és **una arrel**, o **un zero**, del polinomi p, si a l'avaluar p en $x=\alpha$ obtenim el nombre 0, és a dir, si $p(\alpha)=0$	2 és arrel de $-3x + 6$. 1 i -3 són arrels de x^2+2x-3
Factorització d'un polinomi	Consisteix a expressar-lo com a producte de dos altres polinomis de grau més petit	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Fraccions algebraiques	És una fracció d'expressions polinòmiques	$\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$
Resolució d'equacions de 1r grau	Són igualtats algebraiques amb una sola incògnita i de grau u.	$\dfrac{7(x-1)}{3}+\dfrac{5x}{6}=1-\dfrac{x}{2}$
Resolució d'equacions de 2n grau	Igualtats algebraiques amb una sola incògnita i elevada al quadrat.	$-x^2+4x+5$ La solució és: x_1=-1; x_2=5
Resolució d'inequacions de 1r grau	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnita de grau u.	$\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{(x-7)}{6}>\dfrac{4-x}{2}$
Resolució d'inequacions de 2n grau	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnita, elevada al quadrat.	$x^2 - 6x + 5 > 0$ La solució és l'interval (1, 5).
Sistemes d'equacions lineals, pel mètode de Gauss	Els sistemes d'equacions lineals són equacions en què totes les incògnites estan elevades a la unitat, no podent aparèixer el producte d'elles. Resolució pel mètode de Gauss.	$x + 4y + 3z = -1$ $2x - 3y - 2z = 1$ $-x + 2y + 4z = 2$
Sistemes d'inequacions lineals	Els sistemes d'inequacions lineals són inequacions en què totes les incògnites estan elevades a la unitat.	

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

EXERCICIS I PROBLEMES

Polinomis:

1. Estudieu si hi ha nombres reals en què les següents expressions no poden ser avaluades:

a) $\frac{7x-9}{(x+3)\cdot(2x-16)}$ b) $\frac{-5x+7}{x^2-5x+6}$

c) $\frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$ d) $\frac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

2. Calculeu quant ha de valer la lletra m per tal que el valor numèric de l'expressió algebraica següent sigui -2 per a $x=0$.

$$\frac{x^3-mx+4}{(x^4-1)(mx+2)}$$

3. Considerem els polinomis $p(x)=-3x^3+2x^2-5x-4$, $q(x)=2x^4+3x^3-4x^2+5x+6$ y $r(x)=3x^2+5x-7$. Realitzeu les següents operacions:

a) $p+q+r$ b) $p-q$

c) $p\cdot r$ d) $p\cdot r-q$

4. Efectueu les divisions de polinomis:

a) $3x^4-2x^3-5x^2+7x-9$ entre $3x^2+2x-5$

b) $6x^5-7x^4+8x^3+9x^2-10x-5$ entre x^3+3x+5

5. Assenyaleu sense fer la divisió, si les següents divisions són exactes o no:

a) $\frac{x^5+7x^4-13x^3+5x^2-17x+5}{x-3}$

b) $\frac{x^5+x^4-3x^3+3x^2-4x+4}{x-2}$

c) $\frac{9x^5+7x^4-3x^3+5x^2-17x-1}{x-1}$

6. Construïu un polinomi de grau 2 tal que el nombre 4 en sigui arrel.

7. Escriviu dos polinomis de graus diferents i que tinguin en comú les arrels 2 i 3..

8. Construïu un polinomi de grau 4 tal que tingui únicament dues arrels reals.

9. Trobeu un polinomi $q(x)$ tal que al dividir $p(x)=x^6+x^4+x^2+x+1$ entre $q(x)$ s'obtingui com a polinomi residu $r(x)=5x^4+5x^2+1$.

10. Trobeu les arrels enteres o racionals dels següents polinomis:

a) $4x^3 + 11x^2 + 6x - 3$

b) $3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

c) $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

11. Descomponeu els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:

$3x^3 + 11x^2 + 5x + 3$

$5x^3 + 5x^2 + x - 1$

$2x^3 + x^2 + 6x - 3$

$3x^3 - 6x^2 + x - 2$

12. Realitzeu les operacions entre fraccions algebraiques:

$$\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x^2}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x+2}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

$$\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$$

13. Analitzeu si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o del producte *suma per diferència*. En tal cas expresseu la seva procedència.

$x^2 - 6x + 9$

$x^4 + 8x^2 + 16$

$x^2 + \sqrt{20}\,xy + 5y^2$

$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 36$

$5x^2 + 1$

$5x^2 - 11$

$x^4 - 3y^2$

14. Efectueu les següents operacions i simplifiqueu tant com es pugui:

a) $\frac{2}{x(5-x)} + \frac{6}{2(5-x)}$ b) $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ c) $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

15. Efectueu les següents operacions i simplifiqueu tant com es pugui:

a) $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$ b) $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x-a} : \frac{x+a}{x-a}$ c) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a-b}$

16. Efectueu les següents operacions i simplifiqueu tant com es pugui:

a) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{x-y}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x+y}}:\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a+y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a-y}}$ b) $\left(1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right):\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}\right)$ c) $\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}}\cdot\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}}$

Equacions, inequacions i sistemes

17. Resoleu les següents equacions:

a) $\dfrac{3x-1}{2x-4}=\dfrac{5}{9}$ b) $\dfrac{x}{2}+5=\dfrac{3x}{6}-7$ c) $\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{5x}{x-1}-2$

18. Resoleu les següents equacions indicant quantes solucions tenen i quines són:

a) $\dfrac{16x^3-7}{2x^2-3}=5+8x$ b) $x^4+8x^2-12=0$

c) $80x^4-48x^2+7=0$ d) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(x+5)^2}{25}=1$

19. El catet més gran d'un triangle rectangle és una unitat més gran que el catet més petit. La hipotenusa és tres unitats més gran que el catet més petit. Es demana:

a) Escriviu l'expressió algebraica que resulta d'aplicar el teorema de Pitàgores.
b) Calculeu la hipotenusa i els catets.

20. En una competició de bàsquet a doble volta participen dotze equips. Cada partit guanyat val 2 punts i els partits perduts, 1 punt (no hi pot haver empats). Al final de la competició, un equip té 36 punts. Quants partits ha guanyat?

21. Una capsa de forma cúbica s'omple amb un cert nombre de cubets d'un centímetre cúbic i sobren 71 cubets; però si tots els cubets que hi ha es posen en una altra capsa que té un centímetre més per cada aresta, en falten 200 per omplir-la. Calculeu les longituds de les arestes de les dues capses i el nombre de cubets que hi ha.

22. Les tres xifres d'un nombre sumen 24. Si a el nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 198; la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica de les altres dues. Trobeu el nombre.

23. Volem trobar les edats d'una família formada pels pares i dos fills. Si sumem les edats de tres en tres obtenim 100, 73, 74 i 98 anys, respectivament. Quina és l'edat de cadascú?

24. Resoleu:

a) $\dfrac{x}{3}-9<2$ b) $\dfrac{5x}{7}-7\le -5x$ c) $4(2x-3)>1-7x$

d) $\dfrac{3(x+4)}{5}<2x$ e) $\dfrac{2x-4}{3}+1>\dfrac{9x+6}{6}$ f) $\dfrac{7x}{2}-1<x-\dfrac{3x+5}{4}$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

25. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible calcular les següents arrels:

a) $\sqrt{3x-6}$ b) $\sqrt{-x+3}$

c) $\sqrt{15-3x}$ d) $\sqrt{-6x-24}$

26. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $2x^2 - 8 < 0$ b) $-x^2 + 25 \leq 0$ c) $-x^2 + 49 \geq 0$

d) $5x^2 - 45 \geq 0$ e) $9x^2 - 1 > 0$ f) $16x^2 - 9 < 0$

g) $49x^2 - 36 < 0$ h) $121x^2 + 100 \leq 0$

27. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $-2x^2 + 50x \leq 0$ b) $7x^2 + 3x \geq 0$ c) $2x^2 < 8x$

d) $-2x^2 - 24x \geq 0$ e) $-7x^2 + 14x < 0$ f) $-5x^2 - 30x \geq 0$

28. Resoleu les següents inequacions de segon grau:

a) $5x^2 \leq 0$ b) $7x^2 > 0$

c) $-2x^2 < 0$ d) $6x^2 \geq 0$

29. Calculeu els valors de x per tal que sigui possible obtenir les següents arrels:

a) $\sqrt{2x^2+x-3}$ b) $\sqrt{x^2+2x+1}$ c) $\sqrt{-1+2x-x^2}$

d) $\sqrt{x^2+3x+5}$ e) $\sqrt{-x^2+12x+36}$ f) $\sqrt{x^2+6x-27}$ g) $\sqrt{1-4x^2}$

30. Resoleu els següents sistemes pel mètode de *Gauss* i discutiu el resultat:

a) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x+y=2 \\ y+z=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y+t=3 \\ x+z-t=1 \\ y+z+t=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y+5z=13 \\ x+y-4z=-6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x+4y-z=6 \\ 6x-6y+2z=2 \\ x-y+2x=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+4y-8z=-8 \\ 4x+8y-2z=-2 \\ 8x-y-4z=-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x-2y+3z+4t=6 \\ 2x-y+z-t=1 \\ x-y+3z+2t=5 \\ 3x-y+2z-3t=1 \end{cases}$

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOAVALUACIÓ

1. El valor numèric de l'expressió $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2,\ y=-1,\ z=-1$ és:

a) 17 b) 15 c) –3 d) –5

2. Al dividir el polinomi $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomi residu resultant:

a) ha de ser de grau 2. b) pot ser de grau 2.

c) ha de ser de grau menor que 2. d) cap de les anteriors.

3. Tot polinomi amb coeficients enters de grau tres

a) té tres arrels reals b) té més de tres arrels reals

c) té tres arrels complexes d) té alguna arrel real.

4. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre, tingui exactament tres arrels reals, ja siguin diferents o amb alguna múltiple?

5. Té com a solució $x = 2$ la següent inequació:

a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \le 2$ d) $x + 3 < 5$

6. La inequació $x^2 \le 4$ té per solució:

a) $x \in (-2, 2)$ b) $x \in [-2, 2]$ c) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, +\infty)$ d) $x \in (-\infty,-2] \cup [2, +\infty)$

7. La solució de la inequació $|-x+7| \le 8$ és:

a) [–1, 15] b) (–∞, –1] c) (–1, 1) d) [1, ∞)

8. Els valors possibles de x en l'expressió $\sqrt{5x-9}$ són:

a) $x < 9/5$ b) $x > 9/5$ c) $x \le 9/5$ d) $x \ge 9/5$

9. La solució de la inequació $\frac{2x-3}{x-2} < 1$ és:

a) (1, 2) b) (–∞, 1) c) $x < 1 \cup x > 2$ d) (–1, 2)

10. Justifiqueu la veracitat o falsedat de cadascuna de les següents afirmacions:

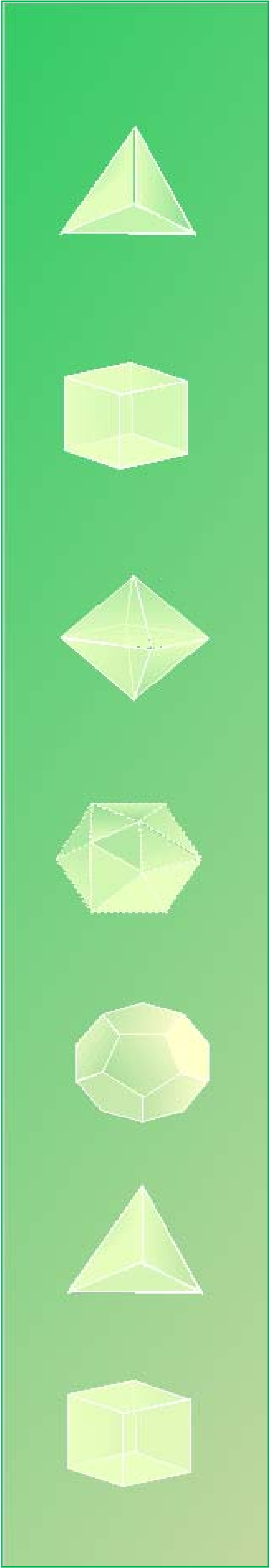
a) La regla de Ruffini serveix per a dividir dos polinomis qualssevol.

b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.

c) La regla de Ruffini només és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.

d) La regla de Ruffini és un algoritme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.

Autors: José Antonio Encabo i Eduardo Cuchillo. Revisora: Nieves Zuasti
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF



MATEMÀTIQUES I
1r Batxillerat
Capítol 3: Successions

LibrosMareaVerde.tk
www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez
Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Índex

Resum

Què tenen en comú conceptes tan dispars com el nombre de conills engendrats per una parella de conills, l'estructura d'un floc de neu o l'interès que obtenim al dipositar una determinada quantitat de diners en una entitat financera?

Darrere d'aquests casos ens trobem amb el concepte de successió. Les successions numèriques tenen gran importància i utilitat en moltíssims aspectes de la vida real, algun dels quals anireu descobrint al llarg d'aquest capítol.

A més reflexionem sobre l'infinit, què s'entén per límit d'una successió? Ja els grecs es preguntaven si alguna cosa amb un nombre infinit de sumands podria donar lloc a un resultat finit, com en la cèlebre Paradoxa d'Aquil·les i la tortuga.

En el capítol de nombres reals hem mencionat el nombre e. Ara anem a definir-lo i analitzarem algunes de les seves aplicacions. L'utilitzarem per treballar amb els logaritmes i les seves propietats.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1. SUCCESSIONS DE NOMBRES REALES

1.1. Definicions

Una **successió** de nombres reals és una seqüència ordenada de nombres.

Exemple:

- Les següents seqüències són successions:
  - a) 1, 2, 3, 4, 5, 6,…
  - b) 2, 4, 6, 8, 10, 12,…
  - c) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$

Definició:

Una successió de nombres reals és una aplicació entre els nombres naturals i els nombres reals:

$$f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to a_n$$

Exemple:

- En l'exemple anterior, la successió 2, 4, 6, 8, 10, 12,… la podem veure com:

$$1 \to 2$$
$$2 \to 4$$
$$3 \to 6$$
$$4 \to 8$$
$$n \to 2n$$

encara que la notació que fem servir normalment per a dir que a n li correspon $2n$ és utilitzar el terme general d'una successió: $b_n = 2n$.

$$f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to b_n = 2n$$

de la mateixa forma la successió $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$ es pot escriure com:

$$f: \mathrm{N} \to \mathrm{R}$$
$$n \to c_n = 1/n$$

S'anomena **terme d'una successió** a cadascun dels elements que constitueixen la successió.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Exemple:

- *En la successió a) tenim que:* $a_5 = 5$*, ja que és el terme de la successió que ocupa el cinquè lloc.*
- *En la successió b), el tercer terme es denota* b_3 *i correspon al 6*
- *En la successió c), per exemple* $c_2 = \frac{1}{2}$

El que realment és important a l'hora d'anomenar els termes d'una successió és el subíndex perquè denota el lloc que ocupen en la successió. Les lletres amb què es designa la successió són diferents per a successions diferents i solen ser lletres minúscules.

Encara que una successió és un funció, usualment no s'utilitza la notació de funció sinó que únicament s'escriu el seu terme general.

S'anomena **terme general d'una successió** al terme que ocupa el lloc n-è i s'escriu amb la lletra que denota la successió (per exemple *a*) amb subíndex n: (a_n)

Exemple:

- En els casos que estem considerant, els termes generals de les successions són:

$$a_n = n,\ b_n = 2n \text{ y } c_n = 1/n.$$

Activitats resoltes

- *En les successions anteriors, observem que:* $a_{105} = 105$, $b_{23} = 46$ *y* $c_{37} = \frac{1}{37}$

Activitats proposades

1. Escriviu els deu primers termes de les següents successions:

a) 7, 10, 13, 16, …

b) 2, 5, 10, 17,…

c) 1, 3, 5, 7,…

d) 0, 3, 8, 15, 24…

2. Escriviu el terme que ocupa el lloc 100 de cadascuna de les successions anteriors.

3. Sabem que un cos amb densitat suficient que cau lliurement sobre la Terra te una velocitat que augmenta 9'8 m/s. Si en el primer segon la seva velocitat és de 10 m/s, escriviu en el vostre quadern la velocitat en els segons indicats a la taula. Observeu alguna regla que us permeti conèixer la velocitat al cap de 30 segons? Representeu gràficament aquesta successió.

Temps en segons	1	2	3	30	n
Velocitat en m/s	10				

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.2. Formes de definir una successió

Existeixen diverses formes de definir una successió:

1. **Donant una propietat que compleixen els termes de la successió**

Exemple:

- *Successió dels nombres parells:* 2, 4, 6, 8, 10,…
- *Successió dels nombres primers:* 2, 3, 5, 7, 11,..
- *Successió dels nombres naturals acabats en* 7: 7, 17, 27, 37, ...
- *Successió dels quadrats dels nombres naturals:* 1, 4, 9, 16,…
- *Successió dels cubs dels nombres naturals:* 1, 8, 27, 64,…

2. **Donant el seu terme general o terme n-èssim**:

És una expressió algebraica en funció de n.

Exemple:

- $a_n = n^2 + 5$

Sabent això, podem construir els termes de la successió tan sols substituint n pels nombres naturals. Així, tindríem:

$$a_1 = 1^2 + 5 = 6$$
$$a_2 = 2^2 + 5 = 9$$
$$a_3 = 3^2 + 5 = 14$$
$$a_4 = 4^2 + 5 = 21$$

…..

- $d_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

$$d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1$$
$$d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. Per una llei de recurrència:

És una expressió que permet obtenir un terme a partir dels anteriors.

Exemple:

- *La successió:*

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…

coneguda com a *Successió de Fibonacci* s'obté amb la següent llei de recurrència:

$$a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

És a dir, cada terme, llevat dels dos primers, s'obté com a suma dels dos anteriors.

4. No sempre es pot definir la successió pels mètodes anteriors

Exemple:

- *La successió formada per les xifres decimals de* π*:*

1, 4, 1, 5, 9, 2, …

Formen una successió però ignorem la propietat, la fórmula del terme general o la llei de recurrència que ens permeti, per exemple, conèixer la xifra que ocupa el lloc un trilió. Avui, amb l'ajuda d'ordinadors, ja sabeu que s'han aconseguit conèixer moltes de les xifres de π, en 2011 més de dos bilions.

Activitats resoltes

- *Sigui la successió de terme general:* $a_n = 2n + 4$.

Els seus primers cinc termes són: $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$, $a_4 = 12$, $a_5 = 14$.

- *Donada la successió en forma recurrent:* $a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2$

Els seus primers quatre termes són:

$a_1 = 1$ (ja ve donat),

$a_2 = 1 + 2 = 3$,

$a_3 = 3 + 2 = 5$,

$a_4 = 5 + 2 = 7$…

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats proposades

4. Escriviu els quatre primers termes de les següents successions:

a) $a_n = 3n^2 + 3$

b) $b_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$

c) $c_1 = 1,\ c_n = 2c_{n-1} + 4$

d) $d_1 = 2,\ d_2 = 5,\ d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$

5. Escriviu l'expressió del terme general de les següents successions:

a) {–2, 2, –2, 2, –2, 2, –2, 2,…}

b) {0, 3, 8, 15, 24, 35,…}

c) {2, 4, 6, 8, 10,…}

d) $\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{5}{10}, \dfrac{7}{17}, \dfrac{9}{26}, \ldots\right\}$

6. En una successió el primer terme és 5 i la resta s'obtenen sumant 3 al terme anterior. Trobeu els 10 primers termes de la successió.

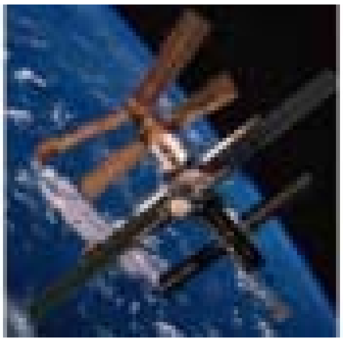
7. Escriviu el terme general de les successions:

a) 6, 18, 54, 162, …

b) 3, 2, 5/3, 6/4, 7/5, …

c) 7, 0'7, 0'07, 0,007, …

d) 2, 5, 8, 11, 15, …



8. Un satèl·lit artificial es va posar en òrbita a les 10 hores i 30 minuts. Triga 90 minuts a donar una volta completa a la seva òrbita. A) Completeu en el vostre quadern la taula adjunta. B) Escriviu una expressió general que us permeti conèixer l'hora en què ha completat la volta *n*-èssima. C) Busqueu una expressió que us permeti conèixer l'hora en què completa una òrbita en funció de l'hora en què completa l'òrbita anterior. D) Busqueu una expressió que us permeti conèixer l'hora en què completa una òrbita en funció de l'hora en què completa la primera òrbita. E) Quantes voltes completes haurà donat 30 dies més tard a les 9 hores?

Nombre d'òrbites	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Hora en què l'ha completada						

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Progressions aritmètiques i geomètriques

Ja coneixeu de cursos anteriors dos tipus de successions, les progressions aritmètiques i les progressions geomètriques.

Recordeu que:

Una **progressió aritmètica** és una successió de nombres reals en què la diferència entre dos termes consecutius de la successió és constant. A aquesta constant se l'anomena **diferència de la progressió** i se sol denotar amb la lletra d.

És a dir, cada terme s'obté sumant a l'anterior la diferència, d:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$$

Exemple:

- *Si $a_1 = 2$ y $d = 3$ els cinc primers termes de la progressió aritmètica són*:

$$a_1 = 2,$$
$$a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$
$$a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$
$$a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$
$$a_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14$$

Una **progressió geomètrica** és una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. Aquesta constant es denomina **raó de la progressió** i se sol denotar amb la lletra r. És a dir, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ essent n un nombre natural i sempre que a_n sigui diferent de zero.

O, el que és el mateix, cada terme s'obté multiplicant l' anterior per la raó r:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n \cdot r}$$

Exemple:

- *Un pare planeja posar en una guardiola € el dia que el seu fill faci un any i duplicar la quantitat en cada aniversari. Quant haurà de posar a la guardiola el dia que el fill faci 5 anys?*

La successió els termes de la qual són els diners que posa a la guardiola cada any és:

{1, 2, 4, 8, 16,…}.

Quan faci 5 anys haurà de posar a la guardiola 16 euros.

Observem que els termes de la successió van augmentant de forma que cada terme és l'anterior multiplicat per 2. Aquest tipus de successions s'anomenen progressions geomètriques.

Recordeu que:

El terme general d'una progressió aritmètica és:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d$$

El terme general d'una progressió geomètrica és:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

La **suma** dels n primers termes d'una **progressió aritmètica** ve donada per:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

El **producte** dels n primers termes d'una progressió **geomètrica** ve donat per:

$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$$

La **suma** dels n primers termes d'una progressió **geomètrica** ve donada per:

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$ sempre que $r \neq 1$.

Activitats resoltes

- *El terme 5 de la progressió aritmètica amb* $a_1 = 7$ *i* $d = 3$ *és:*

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)\, d = 7 + 4 \cdot 3 = 7 + 12 = 19.$$

- *La suma dels 5 primers termes de la progressió anterior és:*

$$S_5 = \frac{5 \cdot (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5(7+19)}{2} = 65.$$

- *El terme 5 de la progressió geomètrica* $\{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ *és:*

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 1 \cdot 2^4 = 16$$

- *El producte dels 5 primers termes de la progressió anterior és:*

$$P_5 = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(1 \cdot 16)^5} = 16^2\sqrt{16} = 16^2 \cdot 4 = 1024$$

- *La suma dels 5 primers termes de la progressió anterior és:*

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{2 \cdot 16 - 1}{2-1} = \frac{32-1}{1} = 31.$$

Activitats proposades

9. Escriviu els 4 primers termes de les successions següents i indiqueu si són progressions aritmètiques, progressions geomètriques o d'un altre tipus.

a) $a_n = 3 \cdot 3^n$

b) $a_n = 5n + 7$

c) $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n + 2n}{3n}$

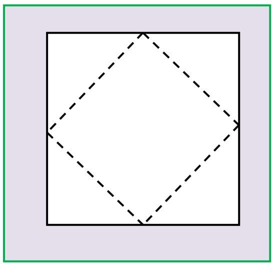
10. En les successions del problema anterior que siguin progressions aritmètiques, calculeu la suma dels 6 primers termes.

11. En les que siguin progressions geomètriques, calculeu el producte dels 6 primers termes i la suma dels 6 primers termes.

1.4. Tipus de successions: convergents, divergents i oscil·lants

Activitat resolta

- *Tenim a la mà un quadrat de paper d'àrea 1. Tallem les quatre cantonades pels punts mitjans dels costats. El nou quadrat, quina àrea té? Deixem els retalls sobre la taula. Quina àrea de retalls hi ha sobre la taula? Amb el nou quadrat que tenim a la mà fem la mateixa operació de retallar les quatre cantonades i deixar-les sobre la taula, i així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? I els retalls que queden sobre la taula? Troba la suma de les infinites àrees de retalls així obtingudes.*



L'àrea del primer quadrat ens diuen que és 1 u^2.

Al tallar les quatre cantonades el nou quadrat té una àrea de 1/2 u^2. Deixem sobre la taula les quatre cantonades, pel que estem deixant sobre la taula una àrea de 1/2 u^2.

Tornem a tallar les quatre cantonades i així successivament.

A la mà tenim les següents àrees: 1, 1/2, 1/4, 1/8, … Tenim cada vegada menys paper a la mà.

En algun moment ens arribem a trobar sense paper a la mà? Si sempre tallem la meitat del que ens queda, mai arribem a tenir 0.

Sobre la taula anem deixant les següents àrees:

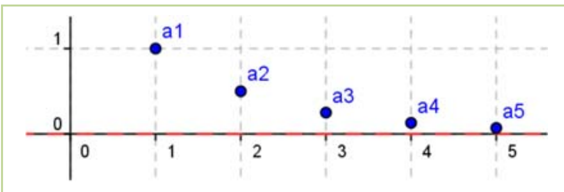
1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8 + …

I la quantitat de paper que tenim sobre la taula? Sumem i sumem trossos de paper, però mai en tindrem més de l'inicial, 1, i ni tan sols arribarem mai a tenir-ne 1.

Activitats resoltes

- Hi ha successions com la progressió geomètrica 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … de raó 1/2, amb terme general:

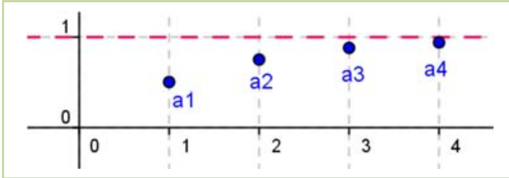
$$a_n = (1/2)^{n-1}$$

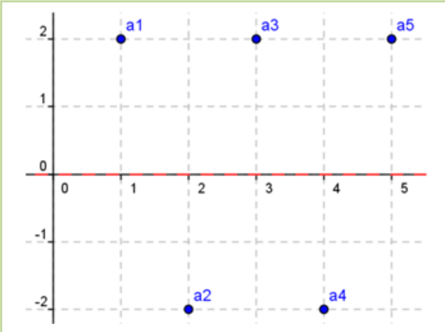


que s'apropen a un cert nombre real, encara que pot passar que mai hi arribin. Aquesta progressió tendeix a 0. Diem aleshores que és **convergent,** que convergeix a 0, o que el seu límit és 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$$

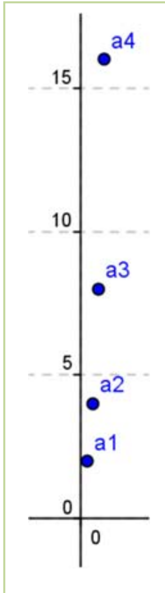
- La successió $a_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ és convergent, té com a límit 1, o convergeix a 1.





$$\underset{n\to\infty}{lím}\; a_n = \underset{n\to\infty}{lím} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

- D'altres successions com la progressió geomètrica 2, –2, 2, –2, 2, –2, … de raó –1, amb terme general a_n = $2\cdot(-1)^{n+1}$ no s'apropen a un únic valor, sinó que oscil·la entre 2 i –2. No té límit. Es diu que és una successió **oscil·lant**.



- D'altres successions, com la progressió geomètrica 2, 4, 8, 16, 32… de raó 2, amb terme general a_n = 2^n no s'apropen a un nombre real, sinó que creixen i creixen indefinidament. No tenen límit. No és convergent. A l'augmentar els valors de n els valors de la successió poden superar qualsevol nombre per gran que sigui. Es diu que el seu límit és infinit i que la successió és **divergent**.

$$\underset{n\to\infty}{lím}\; a_n = \underset{n\to\infty}{lím}\,(2)^n = \infty .$$

Recordeu que:

Les successions poden ser convergents, si tenen com a límit un nombre L, divergents, si tendeixen a infinit, i oscil·lants.

1.5. Monotonia i acotació

Activitats resoltes

- La successió 2, 4, 8, 16, 32,… és monòtona creixent però no està acotada.
- La successió 2, –2, 2, –2, 2, –2,… no és monòtona, però sí està acotada.
- La successió 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,… és monòtona decreixent i està acotada.
- La successió 1/2, 1/2 + 1/4, 1/2 + 1/4 + 1/8 + … és monòtona creixent i està acotada.

A la vista d'aquests exemples anem a definir quan una successió és monòtona i quan està acotada.

Definició:

Una successió a_n està acotada si existeix $k \in \Re$ tal que $|\, a_n \,| < k$ per a tot n.

Definició:

Una successió a_n és monòtona creixent en sentit estricte si per a tot n es verifica que $a_n < a_{n+1}$.

Una successió a_n es monòtona decreixent en sentit estricte si per a tot n es verifica que $a_n > a_{n+1}$.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica

Activitats resoltes

- A l'activitat resolta de l'apartat anterior vam veure que la quantitat de paper que deixàvem sobre la taula: $a_n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n$, s'aproximava a 1 tant com volguéssim, però mai arribava a ser 1.

Aquesta és una idea difícil! Els grecs van trigar a comprendre-la. Pots llegir a l'apartat Revista la Paradoxa de Zenó Aquil·les i la tortuga. No comprenien com una suma infinita, és a dir, amb infinits sumands, podia donar un resultat finit, en el nostre cas 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=1.$$

Recordeu que:

Aquest resultat ja el coneixeu de 3r d'ESO. Anem a revisar el que ja coneixeu:

A) Suma d'0un nombre <u>il·limitat</u> de termes consecutius d'una progressió geomètrica

Depenent del valor de r serà possible o no obtenir la suma d'un nombre il·limitat de termes:

a) <u>Si $r = 1$</u>, la progressió és la progressió constant formada pel primer terme: $\{a_1, a_1, a_1, a_1\ldots\}$ i si a_1 és positiu la suma dels termes serà cada vegada més gran. Si a_1 fos negatiu seria la suma cada vegada més gran en valor absolut, però negativa. Per tant, si el nombre de termes és il·limitat, aquesta suma és infinita. És **divergent**.

b) <u>Si $|r| > 1$</u>,els termes creixen indefinidament i el valor de la suma per a un nombre il·limitat de termes també és infinit. És divergent..

c) <u>Si $|r| < 1$,</u> la suma dels seus termes s'aproxima, quan n és gran, a

$$S_n \approx \frac{a_1}{1-r}.$$

Observem que la suma no depèn del nombre de termes, ja que al fer-se cada vegada més petits, arriba un moment en què no es consideren. És **convergent**.

d) <u>Si $r = -1$</u>, els termes consecutius són oposats: $\{a_1, -a_1, a_1, -a_1,\ldots\}$ i S_n és igual a zero si n és parell, i igual a a_1 si n és senar. La suma de la sèrie **oscil·la** entre aquests dos valors per a un nombre finit de termes. Per a un nombre il·limitat no sabem si aquest nombre és parell o senar, amb què la suma no es pot fer a no ser que sigui $a_1 = 0$, cas en què $S = 0 = \frac{a_1}{1-r}$. En la resta de casos diem que la suma dels infinits termes no existeix ja que el seu valor és **oscil·lant**.

e) <u>Si $r < -1$</u>, els termes oscil·len entre valors positius i negatius, creixent en valor absolut. La suma dels seus infinits termes no existeix ja que el seu valor també és **oscil·lant**.

En resum,

La **suma** d'un nombre **il·limitat** de termes d'una **progressió geomètrica** de primer terme no nul només preen un valor finit si $|r| < 1$, i aleshores ve donada per:

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

En la resta de casos, o val infinit i és divergent, o no existeix ja que oscil·la.

Activitats resoltes

- *Calculeu la suma de tots els termes de la progressió geomètrica el primer terme de la qual és* 4 *i la raó* 1/2.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

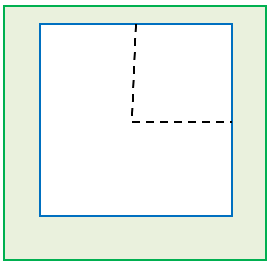
- *En una progressió geomètrica la raó és* 1/4 *i la suma de tots els seus termes és 8. Quant val el primer terme?*

Aïllem a_1 de: $S = \frac{a_1}{1-r}$ i: $a_1 = S(1-r)$ = 8 · (1 – 1/4) = 6

Activitats proposades

12. Calculeu la suma dels infinits termes de la successió: 6, 3, 3/2, 3/4,...

13. Tenim un quadrat d'àrea 1 a la mà i el tallem per les línies de punts com indica la figura. El tros més gran el deixem sobre la taula i ens quedem a la mà amb el quadrat, que tornem a tallar de la mateixa manera. I així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? Creix o decreix? Escriu el terme general de la successió de les àrees que tenim a la mà. I els retalls que queden sobre la taula? Creix l'àrea sobre la taula o decreix? Anem sumant àrees, calculeu la suma d'aquestes àrees si haguéssim fet infinits retalls.



14. ***L'error d'Euler***: *Euler* fou un gran matemàtic, però es va trobar amb el següent problema. Potser siguis capaç d'ajudar-lo a resoldre'l. Va fer la següent suma, on r és un nombre positiu:

$$\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots$$

Primer va sumar la primera part, aplicant la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r}$:

$$\ldots + \frac{1}{r^n} + \ldots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r-1}{r}} = \frac{1}{r-1}$$

I després la segona:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n + \ldots = \frac{1}{1-r}$$

Al sumar totes dues va obtenir: $\frac{1}{r-1} + \frac{1}{1-r} = 0$, que evidentment és incorrecte ja que la suma d'infinits nombres positius no pot ser 0. On és l'error?

1.7. Aplicacions de les progressions geomètriques

Fracció generatriu

El curs passat vas estudiar com passar d'un decimal periòdic pur o periòdic mixt a una fracció. Ara farem servir les progressions geomètriques per a que comprengueu millor el procés.

Exemple:

- Si tenim un **nombre decimal periòdic *pur***, *el podem escriure com*:

$$2,\widehat{37} = 2 + 0'37 + 0'0037 + 0'000037\ldots$$

O, el que és el mateix:

$$2 + \frac{37}{100} + \frac{37}{100\cdot 100} + \frac{37}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita de la qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$2 + \frac{\frac{37}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{\frac{37}{100}}{\frac{99}{100}} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

- Si tenim un **nombre decimal periòdic mixt**, s'utilitza un procés similar:

$$1'32\hat{8} = 1'32 + 0'008 + 0'0008 + \ldots$$

O, el que és el mateix:

$$1'32 + \frac{8}{1000} + \frac{8}{1000\cdot 10} + \frac{8}{1000\cdot 10\cdot 10} + \ldots$$

En aquest cas, els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{10} < 1$. Per tant:

$$1'32 + \frac{\frac{8}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1 + 0'32 + \frac{8}{900} = 1 + \frac{32}{100} + \frac{8}{900} = 1 + \frac{296}{900}$$

Nota

Amb aquest procés estem il·lustrant el concepte de fracció generatriu com a aplicació de les progressions geomètriques, però a efectes pràctics és més còmode efectuar-lo segons el procés que ja coneixeu.

Capitalització composta

Ja coneixeu l'interès compost però anem a revisar-lo a la vista de les progressions geomètriques.

Si dipositem en una entitat financera una quantitat de diners C_0 durant un temps t i un rèdit r donat en tant per u, obtindrem un benefici $I = C_0 \cdot r \cdot t$ anomenat **interès.**

La principal característica de la capitalització composta és que els interessos que es generen en un any passen a formar part del capital inicial i produeixen interessos en els períodes següents

Aleshores:

- Al final del *primer any*, el capital serà el capital inicial C_0 juntament amb els interessos produïts durant aquell any. És a dir:

$$C_1 = C_0 + I = C_0 + C_0 \cdot r \cdot 1 = C_0 \cdot (1 + r)$$

- Al final del *segon any*, el capital que tindrem serà el capital que teníem al finalitzar el primer any més els interessos produïts aquell segon any. És a dir:

$$C_2 = C_1 + C_1 \cdot r \cdot 1 = C_1 \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r) \cdot (1 + r) = C_0 \cdot (1 + r)^2$$

Observant els capitals obtinguts: $C_1, C_2, \ldots, C_n$ concloem que es tracta d'una progressió geomètrica de raó $(1 + r)$. Por tant:

- L'*any n-èssim*, tindrem:

El capital final obtingut després de n anys donat un capital inicial C_0 i un rèdit r donat en tant per u, és:

$$\boldsymbol{C_n = C_0 \cdot (1 + r)^n}$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats resoltes

- *Vegem la fracció generatiu de $23,\widehat{45}$ com a aplicació de les progressions geomètriques.*

$$23,\widehat{45} = 23 + 0{,}45 + 0{,}0045 + 0{,}000045 + \ldots$$

O, el que és el mateix:

$$23 + \frac{45}{100} + \frac{45}{100\cdot 100} + \frac{45}{100\cdot 100\cdot 100} + \ldots$$

on els sumands a partir del segon formen una progressió geomètrica de raó $r = \frac{1}{100} < 1$, la suma infinita de la qual val: $S = \frac{a_1}{1-r}$. Per tant:

$$23 + \frac{\frac{45}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 23 + \frac{\frac{45}{100}}{\frac{99}{100}} = 23 + \frac{45}{99} = \frac{2277}{99} + \frac{45}{99} = \frac{2322}{99} = \frac{258}{11}.$$

- *Dipositem en un banc 1500 € al 3'5 % de capitalització composta durant tres anys. Quants diners tindríem al finalitzar el tercer any?*

Utilitzem l'expressió: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ on C_0= 1500 €, r = 0,035 ja que és el tant per u i t = 3 anys. Per tant: $C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t$ = 1500(1 + 0'035)^3 = 1663'08 €.

Activitats proposades

15. Calculeu la fracció generatriu del nombre del número $4{,}5\widehat{61}$

16. Un empresari acudeix a una entitat financera per a informar-se sobre com invertir els 6000 € de beneficis que ha obtingut en un mes. Li plantegen dues opcions: mantenir aquest capital durant 5 anys al 3'5 % anual o rebre el 5 % del capital durant els dos primers anys i el 3% els tres anys restants.

Quina opció li interessa més?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

2. LÍMIT D'UNA SUCCESSIÓ

2.1. Reflexions sobre l'infinit

"Quan en l'ús dels principis de l'enteniment no ens limitem a aplicar la nostra raó a objectes de l'experiència, sinó que ens atrevim a estendre-la més enllà dels seus límits, s'originen demostracions que no esperen confirmació en l'experiència ni poden tenir refutació"

"L'infinit, com cap altre problema, sempre ha commogut profundament l'ànima dels éssers humans. L'infinit, com cap altra idea, ha tingut una influència estimulant i fèrtil en la ment. Però l'infinit necessita, més que cap altre concepte, aclarir-se"

David Hilbert

Anem a reflexionar una mica sobre l'infinit matemàtic.

Reflexió 1: Un joc

- *Dos amics una mica avorrits, en Daniel i en Jordi, decideixen jugar a un joc que consisteix que en Daniel escrigui nombres i en Jordi els esborri. El procediment proposat per en Daniel és:*
  - ✓ A les cinc menys un minut jo escric els nombres 1 i 2, i tu esborres l'1.
  - ✓ A las cinc menys mig minut jo escric 3 i 4, i tu esborres el 2.
  - ✓ A las cinc menys un terç de minut jo escric el 5 i el 6 i tu esborres el 3.
  - ✓ I així successivament. Naturalment juguen amb la imaginació.
  - ✓ En Daniel li pregunta a en Jordi: A les cinc menys una centèsima de minut, quants nombres et queden per esborrar?
  - ✓ I a les cinc menys una milionèsima de minut
  - ✓ En quin moment esborraràs el número 1000?
  - ✓ Hi ha algun nombre que no puguis esborrar abans de les cinc?

  Ajudeu en Jordi a respondre.

Reflexió 2: L'hotel infinit

- *Per a l'amo d'un hotel és un disgust haver de dir a un client que no li queden habitacions. Però, què passaria si l'hotel tingués infinites habitacions numerades 1, 2, 3, 4,…? Imagineu que l'hotel està complet i arriba un nou client, com l'allotjaríeu?*

Molt fàcil. L'amo passa el client de l'habitació 1 a la 2, el de la 2 a la 3, el de la 3 a la 4... i d'aquesta forma queda lliure l'habitació 1.

I si arriben 100 clients més? I si n'arriben 1000?

Molt fàcil, passa el client 1 a l'habitació 101... deixant lliures les 100 primeres habitacions. En el segon cas passa el client de l'habitació 1 a l'habitació 1001... deixant lliures les primeres 1000 habitacions.

I si arriben tants clients com habitacions hi ha?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

En aquest cas ha de pensar una mica més. Ja ho te! Passa el client 1 a l'habitació 2, el 2 a l'habitació 2·2 = 4, el 3 a l'habitació 2·3 = 6, i així successivament. Li queden ocupades les habitacions parells i lliures totes les senars.

Reflexió 3: La taula de Caratheodory

- *Tenim la següent taula infinita:*

0	1/2	1/4	1/8	1/16	…
–1/2	0	1/2	1/4	1/8	…
–1/4	–1/2	0	1/2	1/4	…
–1/8	–1/4	–1/2	0	1/2	…
–1/16	–1/8	–1/4	–1/2	0	
…	….	…	…	…	…

Sabem que, si sumem primer totes les files i després per columnes, ens ha de donar el mateix que si sumem primer totes les columnes i després per files. Però aquesta taula és infinita. Mireu què surt!

- Al sumar per files, ja sabem que la primera fila suma 1. Aneu sumant les altres files i després els resultats de les sumes per files
- Ara comenceu a sumar per columnes. I després els resultats de les sumes per columnes.
- Finalment sumeu per diagonals. Us sorprèn el resultat?

Conjunts finits i conjunts infinits

Els conjunts finits tenen propietats que no tenen els conjunts infinits

Al reflexionar sobre les qüestions anteriors us haureu adonat que propietats molt evidents dels conjunts finits no les compleixen els conjunts infinits.

Un conjunt A és finit si no és possible establir una correspondència biunívoca entre A i una part d'A, diferent del propi A. Al nombre d'elements d'un conjunt finit l'anomenem el seu cardinal.

Però com hem vist en l'hotel amb infinites habitacions, en un conjunt infinit podem establir una correspondència biunívoca entre el conjunt dels nombres naturals, N, i el conjunt dels nombres parells, P, que és una part dels naturals i distinta de N.

Amb l'"*Hotel infinit*" hem vist que $\infty + 1 = \infty$, $\infty + 100 = \infty$, $\infty + 1000 = \infty$ i fins i tot $\infty + \infty = \infty$.

El cardinal dels nombres naturals es denomina "*infinit numerable*" i és el mateix que el dels nombres enters, Z, i el dels nombres racionals, Q. Això no obstant, l'infinit dels nombres irracionals i el dels nombres reals és molt més gran, és la "*potència del continu.*" No és possible establir una correspondència biunívoca entre els nombres racionals i els nombres reals de l'interval (0, 1).

Amb la *Taula de Caratheodory* hem comprovat que hi ha d'altres propietats que no es verifiquen. No es verifica la propietat associativa, i a l'agrupar els nombres de maneres diferents s'obtenen resultats diferents

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

2.2. Càlcul d'alguns límits

No hi ha cap procediment general i infal·lible que permeti conèixer si una successió és convergent i calcular el seu límit. En el capítol dedicat al límit de funcions aprendreu amb major rigor el concepte de límit d'una funció (les successions són funcions) i nous procediments que podran servir-vos per a calcular el límit de les successions, però haureu d'anar amb compte amb les successions que **no són funcions contínues**. La representació gràfica d'una successió, al ser una aplicació dels nombres naturals als nombres reals, està formada per punts discrets.

Ja hem calculat alguns límits com:

- La successió 1/2, 1/4, 1/8, … , $1/2^n$, … té un nombre infinit de termes, però té límit, s'apropa a 0 tant com vulguem, i aquest límit és un nombre finit, 0.
- La successió 2, 4, 8, …, 2^n, … té un nombre infinit de termes, però no té límit, podem trobar termes de la successió tan grans com vulguem. És divergent. Tendeix a infinit.
- La suma 1/2 + 1/4 + 1/8 … + $1/2^n$ … és una suma d'infinits termes. Què vol dir sumar infinits termes? El que volem dir és que aquesta suma convergeix a 1 (en el cas de la quantitat de paper que teníem sobre la taula, això vol dir que podem tenir sobre la taula una quantitat de paper tan pròxima a 1 com vulguem).

Anem ara a calcular alguns límits senzills.

Activitats resoltes

- *La successió* $a_n = \dfrac{3+n}{2n-5}$ *té com a límit* $1/2$.

Per comprovar-ho donem a n valors molt grans i observem que podem apropar-nos a 1/2 tant com vulguem:

n	10^3	10^6	10^8
a_n	$\dfrac{3+10^3}{2\cdot 10^3-5} = 0'502767$	$\dfrac{3+10^6}{2\cdot 10^6-5} = 0'50000275$	$\dfrac{3+10^8}{2\cdot 10^8-5} = 0'5000000275$

És natural que per a valors molt grans de n el 3 del numerador i el 5 del denominador ja influeixin molt poc comparats amb n i amb $2n$. És per això que podem dir que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+n}{2n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Activitats proposades

17. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{n^2+2}{3n^2}$ b) $a_n = \dfrac{2n+2}{3(n+1)}$

c) $a_n = \dfrac{7}{5^n}$ d) $a_n = 4 + \dfrac{n+2}{n-3}$.

Activitats resoltes

- *Comprovem, fent servir la calculadora i donant valors grans a n que:*

La successió $a_n = \frac{4}{n}$ té com a límit 0.

La successió $a_n = 3 - \frac{4}{n}$ té com a límit 3.

La successió $a_n = n + \frac{4}{n}$ no és convergent, tendeix a infinit.

La successió $a_n = \sqrt{n^2+1}$ no és convergent, és la successió: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{26}$, … i tendeix a infinit.

Activitats proposades

18. Calculeu el límit de les successions següents, si és que en tenen:

a) $a_n = \frac{5n^3 + 2n}{n - 6}$

b) $a_n = \frac{1 - 2n}{1 + 2n}$

c) $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$

d) $a_n = 6 + \frac{5n + 2}{2n - 3}$

19. Escriviu una successió el límit de la qual sigui 2, i una altra de límit 0.

20. Calculeu el límit de les successions següents, si en tenen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2 - 6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - 2n}{1 + 2n + 7n^3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(6 - \frac{7}{n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n + 2}{n - 3} - 3\right)$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. El nombre e

Definirem el nombre e com el límit d'una successió, però abans analitzarem situacions que ja coneixes que ens ajudin a comprendre'l.

Situació 1: Creixement d'unes algues

- Els residus vegetals dels carrers i jardins de Madrid es porten a la planta de compostatge de Migas Calientes, on s'obté compost que, de nou, s'utilitza per abonar aquests jardins. A la planta s'investiga sobre la forma en què els microorganismes es reprodueixen i actuen més ràpidament transformant les restes de poda en compost. Imagineu que si sotmeten una quantitat C de microorganismes (bacteris i fongs) a un determinat procés durant un mes aquests s'han incrementat i s'obté una quantitat doble, $C + C = 2C$ de microorganismes. Acceleren el procés, afegint per exemple més oxigen, de forma que duri només mig mes, però se n'obté només la meitat, $C + C/2 = C(1 + 1/2)$ encara que llavors es realitzen dos cicles en un mes per la qual cosa al final del mes s'obté una quantitat de microorganismes de $C(1 + 1/2) + (1/2)(C(1 + 1/2)) = C(1 + 1/2)^2$ de microorganismes al final del mes. Y si realitzen cinc cicles al mes, obtenint en cada cicle la cinquena part?

Planta de compostaje de Migas Calientes, Madrid

Primer cicle: $C + C/5 = C(1 + 1/5)$

Segon cicle: $C(1 + 1/5) + (1/5)\,C(1 + 1/5) = C(1 + 1/5)^2$

Tercer cicle: $C(1 + 1/5)^2 + (1/5)\,C(1 + 1/5)^2 = C(1 + 1/5)^3$

Quart cicle: $C(1 + 1/5)^3 + (1/5)\,C(1 + 1/5)^3 = C(1 + 1/5)^4$

Cinquè cicle: $C(1 + 1/5)^4 + (1/5)\,C(1 + 1/5)^4 = C(1 + 1/5)^5$

En general si es fan n cicles al mes obtenint en cada cicle $1/n$ de la quantitat tractada, al final del mes tenim una quantitat $C(1 + 1/n)^n$ de microorganismes.

Observeu que a l'augmentar el nombre de cicles, augmenta la quantitat de microorganismes, però hi ha un límit o creix fins a l'infinit?

Situació 2: Interès compost

- Ja hem estudiat l'interès compost. Si un capital C es posa a un interès del 5 % anual durant un any, al final de l'any s'obté $C + 0'05\cdot C = C(1 + 0'05)$. Si els interessos s'acumulen cada mig any al cap de l'any s'obté $C(1 + 0'05/2)^2$, i és cada quart d'any (cada trimestre) es té $C(1 + 0'05/4)^4$. En general si l'any es divideix en n intervals s'obtindrà:

$$C(1 + 0'05/n)^n$$

Es podria fer un milionari en un any invertint 200 euros en aquestes condicions?

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Situació 3: L'espiral

- La figura del marge és una clova del *Nautilus*. Forma una espiral que s'anomena espiral equiangular, logarítmica, geomètrica… Dibuixeu-ne una tenint en compte que quan els seus angles centrals estan en progressió aritmètica, els seus radis estan en progressió geomètrica.

Marqueu un punt O. Preneu una unitat OA = 1. Marqueu els angles centrals de AOB = 40°; AOC = 80°, AOD = 120°…

Sobre la recta que conté O i B, marqueu B a una distància de 1'2. OB = 1'2·OA. Marqueu C (sobre OC) a una distància de OC = 1'2·OB = 1'44·OA…

Però si l'angle fos 40°/2, el radi hauria de multiplicar-lo per 1'2/2. D'aquesta forma obtindríem nous punts.

Estem veient que en diferents situacions apareixen successions semblants:

$$C(1 + 1/n)^n,\ C(1 + 0'05/n)^n.$$

Definició:

Es defineix el nombre e com $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

És el límit d'una successió!

Si donem a n valors (amb una calculadora o un ordinador) podem aproximar-lo: 2, 2'25, 2'37, 2'44, 2'5, 2'52… Per a n = 100 obtenim 2'7048… Per a n = 1000 obtenim 2'716... Per a n igual a un milió, 2'71828…

Utilitzem el desenvolupament d'un binomi de Newton.

Recordeu:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Com que $a = 1 \rightarrow a^n = 1$, i $b = 1/n$, tenim que:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \ldots =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Prenem límits

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Resulta que e també és la suma d'una sèrie. Ara el valor d'e l'obtenim d'una manera molt més ràpida. Ens basta la suma de 8 termes per obtenir cinc xifres decimals d'e, mentre que amb la successió els obteníem amb n igual a un milió.

$$e \approx 2'71828\ldots$$

e és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques.

Ara ja sabem resoldre les situacions de partida: la quantitat de microorganismes de la planta de compostatge si s'augmenta el nombre de cicles en un mes, tendeix a $Ce \approx C\cdot 2'71828\ldots$ Mai arribaria a triplicar la quantitat C de microorganismes.

En la situació d'un interès compost, ens preguntàvem si un es podria fer milionari invertint 200 euros en aquelles condicions. Hem de calcular el límit:

$$\lim_{n\to\infty} 200\cdot\left(1+\frac{0'05}{n}\right)^n = 200\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0'05}{n}\right)^n = 200e^{0'05}$$

No ens farem milionaris. Però aprendrem a calcular aquests límits.

Límits tipus e

En general per calcular el límit: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n$

Anem completant la definició d'e, dividint primer per A. El denominador n/A tendeix a infinit, i el completem en l'exponent, multiplicant i dividint per n/A.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{A}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{A}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{A}}\right)^{\frac{n}{A}}\right)^A = e^A$$

Aquesta tècnica la podem fer servir si tenim un límit amb un exponent que tendeixi a infinit la base del qual tendeixi a 1, el que anomenem una indeterminació de tipus 1^∞.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Activitats resoltes

- *Calculeu el límit:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}$

Primer comprovem que és un límit tipus e, l'exponent $2n-1$ tendeix a infinit, i la base:

$$\frac{3n-3}{3n+1}\to\frac{3n}{3n}\to 1, \text{ tendeix a 1.}$$

Volem completar el primer 1 de la definició d'e, per la qual cosa hem de dividir:

$$\frac{3n-3}{3n+1}=\frac{3n+1-3-1}{3n+1}=1+\frac{-4}{3n+1}$$

Per aconseguir el segon 1, dividim entre -4

$$1+\frac{-4}{3n+1}=1+\frac{1}{\frac{3n+1}{-4}}.$$

Fem que l'exponent coincideixi amb $\dfrac{3n+1}{-4}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{-4}}\right)^{\frac{3n+1}{-4}\cdot\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+1}{-4}}\right)^{\frac{3n+1}{-4}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)}$$

El límit de la base hem aconseguit que sigui e. El límit de l'exponent sabem calcular-lo:

$$\frac{-4}{3n+1}\cdot(2n-1)\to\frac{-8n}{3n}\to\frac{-8}{3}$$

Per tant:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-3}{3n+1}\right)^{2n-1}=e^{\frac{-8}{3}}=\frac{1}{e^{\frac{8}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e^8}}.$$

Activitats proposades

21. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n=\left(\dfrac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n}$

b) $a_n=\left(\dfrac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2}$

c) $a_n=\left(1+\dfrac{7}{n+3}\right)^{n^2}$

d) $a_n=\left(\dfrac{2n+2}{2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n}}$

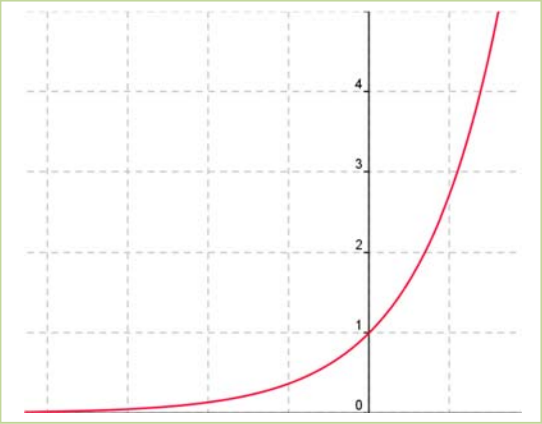
Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

2.4. Funció exponencial i funció logaritme

Funció exponencial

A 4t d'ESO ja heu estudiat la funció exponencial i la funció logaritme, però ara que coneixeu millor el nombre e sembla interessant que analitzem alguna cosa sobre elles, i resolguem nous problemes.

La funció exponencial de base e es defineix com $y = e^x$. Ara ja sabeu bé què és el que significa. Algunes de les seves propietat són:



1. $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$
2. $e^0 = 1$, i $e^x > 0$ per a tot x.
3. És sempre estrictament creixent, la qual cosa permet resoldre equacions exponencials
4. Quan x tendeix + ∞, e^x tendeix a + ∞, però
5. Quan x tendeix a – ∞, e^x tendeix a 0.

Activitats resoltes

- Resoleu l'equació: $e^{x+1} = e^{2x-3}$.

Per resoldre equacions exponencials hem d'aconseguir que les bases siguin iguals i n'hi ha prou, aleshores, amb igualar els exponents:

$$e^{x+1} = e^{2x-3} \to x+1 = 2x - 3 \to x = 4.$$

Activitats proposades

22. Calculeu $1/e$ amb tres xifres decimals exactes.

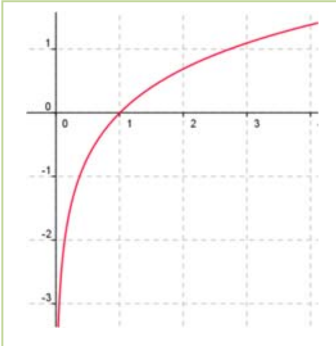
23. Calculeu $\sqrt{e}$ amb tres xifres decimals exactes.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Funció logaritme

La **funció logaritme** en base e, és a dir, **logaritme neperià**, se defineix como:

$$\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$$



Aplicant aquesta definició es demostra que:

- ✓ El logaritme d'1 és cero (en qualsevol base).
- ✓ El logaritme de la base és 1.
- ✓ Només els nombres positius tenen logaritme, és adir, $\text{Dom}(\ln) = \Re^+$.
- ✓ Quan x tendeix a $+\infty$, $\ln x$ tendeix a $+\infty$.
- ✓ Quan x tendeix a 0, $\ln x$ tendeix a $-\infty$.
- ✓ És sempre estrictament creixent, la qual cosa permet resoldre equacions logarítmiques.

Propietats dels logaritmes

- ✓ El logaritme (en qualsevol base) d'un **producte** és igual a la suma dels logaritme dels seus factors.

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

- ✓ El logaritme (en qualsevol base) d'un **quocient** és igual al logaritme del dividend menys el logaritme del divisor.

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$

- ✓ El logaritme (en qualsevol base) d'una **potència** (en qualsevol base) és igual a l'exponent multiplicat pel logaritme de la base de la potència.

$$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

Activitats resoltes

- *Resoleu les equacions: a)* $e^{x+2} = e^4$. *b)* $\ln(2x-1) = \ln(3)$.

Per resoldre equacions logarítmiques aïllem el logaritme en ambdós membres, i després igualem.

a) $e^{x+2} = e^4 \rightarrow x + 2 = 4 \rightarrow x = 2$.

b) $\ln(2x-1) = \ln(3) \rightarrow 2x - 1 = 3 \rightarrow x = 4/2 = 2$.

Activitats proposades

24. Calculeu el logaritme neperià de $1/e$ i de $\sqrt{e}$.

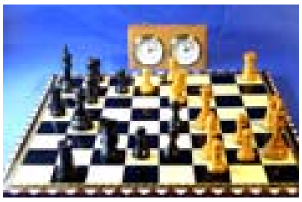
25. Resoleu l'equació $\ln(x + 2) + \ln(3x) = 1$

26. Resoleu l'equació: $8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2$.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

CURIOSITATS. REVISTA

A) L'inventor dels escacs



Ja vam veure en el capítol sobre potències la llegenda sobre els escacs. Ara podeu fer servir els vostres coneixements sobre progressions per fer els càlculs:

Conta la llegenda com l'inventor dels escacs va presentar el seu invent a un príncep de l'Índia. El príncep va quedar tan impressionat que va voler premiar-lo generosament, per la qual cosa li va dir: "Demana'm el que vulguis, que et serà concedit".

L'inventor dels escacs va formular la seva petició de la manera següent:

"Vull que m'entreguis un gra de blat per la primera casella del tauler, dos per la segona, quatre per la tercera, vuit per la quarta, setze per la cinquena, i així successivament fins a la casella 64".

La sorpresa fou quan el secretari del príncep va calcular la quantitat de blat que representava la petició de l'inventor, per què tota la Terra sembrada de blat era insuficient per obtenir el blat que demanava.

Quin tipus de progressió s'utilitza? Aritmètica o geomètrica? Quina n'és la raó? Quants trilions de grans de blat demanava aproximadament?

Podries trobar el total de grans de blat fent servir fórmules i la calculadora?

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$$

Potències de 2 al tennis

Les potències de 2 també apareixen als tornejos de tennis. En molts tornejos s'enfronten els jugadors de la següent forma: A la final juguen dos jugadors; a la semifinal n'hi ha quatre; a quarts de final n'hi ha vuit. Així, a cada ronda addicional la quantitat de jugadors es duplica, tal i com passava amb els grans de blat en el tauler d'escacs. Si el torneig tingués 25 rondes, t'imagines quants jugadors hi hauria? Doncs, podrien participar gairebé tots els habitants de l'Estat Espanyol! I amb 33 rondes, podrien participar-hi tots els habitants del planeta!

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

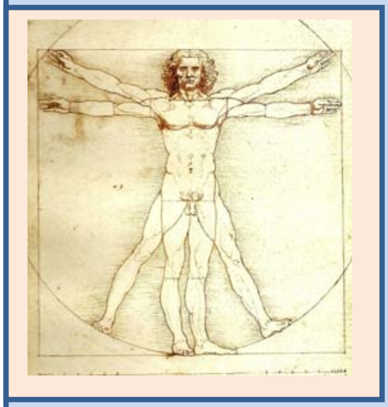
Successió de *Fibonacci*

Per als que penseu que és impossible veure Matemàtiques fora de l'aula i molt menys a la natura, us presentem un dels conceptes matemàtics més bells relacionats amb la natura i l'art.

Es tracta d'una successió molt simple, en què cada terme és la suma dels dos anteriors.

- La successió comença pel nombre 1,
- I segueix amb 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584…, ja que 1 = 0 + 1; 2 = 1 + 1; 3 = 1 + 2; 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 13 = 5 + 8; 21 = 8 + 13… etc.

Una de les propietats més curioses és que el quocient de dos nombres consecutius de la successió s'aproxima a l'anomenada **"secció àuria" o "divina proporció"**, que ja coneixeu, el nombre d'or descobert pels renaixentistes, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1'61803…, que es denota amb la lletra grega ϕ (phi). La successió formada pels quocients de nombres consecutius de la successió de *Fibonacci* s'apropa ràpidament al nombre d'or. Els grecs i renaixentistes estaven fascinats amb aquest nombre i el consideraven l'ideal de la bellesa.



De fet, *Leonardo da Vinci* en la seva obre "L'home del *Vitrubi*" utilitza aquest nombre per aconseguir les perfectes proporcions de la seva obra.

Com pot ser que el quocient de dos nombres d'una seqüència inventada per l'home es relacioni amb la bellesa? Dons perquè la successió de *Fibonacci* està estretament relacionada amb la natura. Es creu que *Leonardo* va troba aquests nombres quan estudiava el creixement de les poblacions de conills. Suposem que una parella de conills triga un mes a arribar a l'edat fèrtil, i a partir d'aquell moment cada vegada engendra una altra parella de conills, que a la vegada engendraran cada mes una altra parella de conills.

Quants conills hi haurà al cap d'un determinat nombre de mesos?

Doncs sí, cada mes hi haurà un nombre de conills que coincideix amb cadascun dels termes de la successió de *Fibonacci*. Sembla màgia, oi?

De fet moltes plantes, com les pinyes o les margarides segueixen una disposició relacionada també amb la successió de *Fibonacci*, la qual cosa il·lustra la famosa frase de *Galileu* **"La natura està escrita en llenguatge matemàtic".**

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Els grecs i l'infinit

El concepte d'infinit ha costat temps i esforç a la humanitat entendre'l. Els grecs opinaven que el nombre de grans de sorra del món era infinit, fins que *Arquimedes* va escriure l'*Arenari,* tractat en què estimava aquest nombre, que en efecte és molt gran però no infinit.

Paradoxa d'Aquil·les i la tortuga

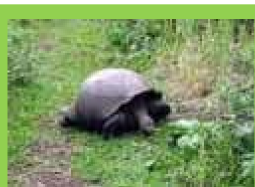
En aquest mateix sentit, els grecs no podien comprendre que si sumaven infinites quantitats els pogués donar una quantitat finita.

Així apareix la paradoxa de *Zenó* d'"Aquil·les i la tortuga". Aquil·les, el dels peus lleugers, fa una curs amb una tortuga. Dona a la tortuga un gran avantatge, posem de L estadis. En poc tems Aquil·les recorre els s L estadis, però a l'arribar-hi descobreix que la tortuga ha avançat un cert tros, suposem que $L/10$. Avança de nou fins on es trobava la tortuga, però a l'arribar-hi aquesta de nou ha avançat. D'aquesta forma Aquil·les mai guanyarà la cursa, ja que a l'arribar a la posició on es trobava la tortuga aquesta ja s'haurà mogut.

L'experiència els deia que Aquil·les sí que atrapava la tortuga, però no aconseguien comprendre-ho. Vosaltres ja els podríeu ajudar, ja que ja sabeu sumar sèries infinites en progressió geomètrica de raó menor que 1:

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

$$S = L + L/10 + L/10^2 + \ldots = \frac{L}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10L}{9}$$



Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

RESUM

Successió	Funció entre els nombres naturals, N, i els reals, $\Re$.	3, 1, 4, 1, 5, 9, 2....
Progressió aritmètica	Successió de nombres reals en què la diferència d entre dos termes consecutius de la successió és constant.	2, 5, 8, 11, 14, 17, …
	Terme general: $a_n = a_k + (n - k)\, d$ **Suma dels *n* primers termes:** $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$a_n = 2 + 3n$ S_8 = (8/2)·(2 + (2 + 3·8)) = 112
Progressió geomètrica	És una successió de nombres reals en què el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$.	3, 6, 12, 24, … 1, 1/2, 1/4, 1/8…
	Terme general: $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ **Suma:** $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r-1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$, per a $r \neq 1$ **Suma infinita**: $S = \frac{a_1}{1-r}$, per a $0 < \lvert r \rvert < 1$. **Producte:** $P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow$ $S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2-1} = 765$ $P_9 = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$ $a_n = (\frac{1}{2})^n \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
El nombre e	$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques: $e \approx 2'71828…$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

EXERCICIS I PROBLEMES

Successions

1. Calculeu el terme que ocupa el lloc 1000 d'una progressió aritmètica el primer terme de la qual és igual a 2 i la diferència és 3.

2. El vuitè terme d'una progressió aritmètica és 5 i la diferència ½. Trobeu el primer terme i el terme 100.

3. Calculeu els costats d'un triangle rectangle sabent que les seves longituds, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 2.

4. Calculeu la suma dels múltiples de 42 compresos entre 1000 i 2000.

5. La suma de 16 nombres en progressió aritmètica és 548 i el terme 16 és 60'5. Trobeu el primer terme.

6. El producte de 4 termes en una progressió aritmètica és 5184 i el primer terme és 3. Escriviu la resta de termes.

7. Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 700 euros al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer en 30 euros mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 10 anys?

8. El cinquè terme d'una progressió geomètrica és 48 i el primer és 3. Trobeu els cinc primers termes de la progressió.

9. Trobeu x per tal que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estiguin en progressió geomètrica.

10. A una corda de 350 m de longitud se li fan dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 50 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determineu la longitud de cada tros.

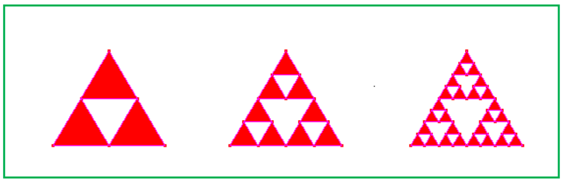
11. Trobeu la fracció generatriu del nombre decimal 0'12121212..., com a suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada.

12. Es té una bota de vi que conté 512 litres. L'1 de desembre se'n va buidar la meitat del contingut; l'endemà se'n va tornar a buidar la meitat del que quedava i així successivament cada dia. Quina quantitat de vi es va treure el dia 15 de desembre?

13. Donat un quadrat d'1 m de costat, unim els punts mitjans dels seus costats; obtenim així un nou quadrat, en què tornem a efectuar la mateixa operació, i així successivament. trobeu la suma de les infinites àrees així obtingudes.

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

14. *Triangle de Sierpinski:* Anem a construir un fractal. Es parteix d'un triangle equilàter. S'uneixen els punts mitjans dels costats i es formen quatre triangles. S'elimina el triangle central. En cadascun dels altres tres triangles es repeteix el procés. A la figura formada per iteració infinita se la denomina *Triangle de Sierpinski*, i és un fractal. A) Imagineu que el primer triangle té una àrea A. Quan apliquem la primera iteració, l'àrea és (3/4)A. I a la segona? Escriviu la successió de les àrees. És creixent o decreixent? B) Imagineu ara que la longitud de cada costat del triangle inicial és L. Escriviu la successió de la longitud del perímetre de cada figura. És creixent o decreixent?



Límits de successions

15. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{2n^3+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^2-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^{10}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{n-3}{n+7}$

16. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{2n^2+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^7+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{-3}{n+7}$

17. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{2n^5+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^7-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \dfrac{5n^{12}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{n^2-3}{n+7}$

18. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{2n^5+2n}}{2n^3-6}$ b) $a_n = \dfrac{5n^7-4}{\sqrt{n^2-6n}}$ c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^{12}+2n^2}}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2-3}}{n+7}$

19. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \left(1+\dfrac{3}{2n^3-6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(1-\dfrac{4}{5n^7-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

20. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \left(\dfrac{2n^3+2n}{2n^3-6}\right)^{2n+1}$ b) $a_n = \left(\dfrac{5n^7-4}{5n^7-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

21. Calculeu el límit de les successions següents:

a) $a_n = \left(\dfrac{n^2+2n}{n^2-6}\right)^{2n-3}$ b) $a_n = \left(\dfrac{n^2-4}{n^2-6n}\right)^{n-2}$ c) $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

Exponencial i logarítmica

22. La població de peixos d'una piscifactoria segueix un model de creixement exponencial i ha passat de 100 exemplars a 1500 en 60 dies. Quina població tindrà en 100 dies?

23. Ingressem en un banc 20.000 euros al 3% d'interès compost anual. En quant de temps haurem duplicat els nostres diners?

24. La Vanessa ha comprat un cotxe per 17.000 euros. S'estima que el preu es devalua un 10% cada any. A quant el podrà vendre al cap de 5 anys? Si té un accident en què el cotxe queda destrossat quan té 7 anys, quant li pagarà la companyia d'assegurances?

25. L'escala de Richter relaciona la intensitat d'un terratrèmol, x, amb la seva energia y (en ergs): $\log y = 11'4 + 1'5\,x$. Calculeu l'energia d'un terratrèmol: a) d'una intensitat 5 en l'escala de Richter, i b) d'una intensitat 7.

26. En Joan ha vist escarabats a casa. Mira de quin tipus és i descobreix que es tripliquen cada mes, seguint un model exponencial. Estima que en aquest moment en podria tenir 20. Si no fes res, quants escarabats tindria al cap de 5 mesos?

27. A la fórmula del terme n–èssim d'una progressió geomètrica, aïlla n, aplicant logaritmes.

28. La Neus té un gran pot de perfum molt concentrat d'un litre. N'extreu amb la pipeta 10 cm^3 que substitueix per aigua. Torna a treure de la mescla amb una pipeta 10 cm^3 que torna a substituir per aigua. Així fins aconseguir una mescla del 75% de la inicial. Quantes operacions ha hagut de fer?

29. Resoleu, prenent logaritmes l'equació exponencial: $(0'99)^n = 0'75$.

30. Utilitzeu la calculadora per a estimar el valor de 2^{63}. Estimeu també $2^{64} - 1$.

31. Resoleu les equacions:

a) $3^{2x-4} = 81$

b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[7]{5}$

c) $\sqrt[x-1]{8} = 2$

d) $3^{\frac{1}{5}x} = 27$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF

AUTOAVALUACIÓ

1. Quina és la raó de la següent progressió aritmètica: $a_n = 7\cdot 4^{n-1}$?

a) 7 b) 4 c) –1 d) No és una progressió aritmètica

2. A la successió de múltiples d'11, el 121 ocupa el lloc:

a) 1 b) 2 c) 11 d) 121

3. La suma dels deu primers termes de la progressió aritmètica: 5, 10, 15, 20,… és:

a) 220 b) 275 c) 55 d) 250

4. La successió 1, 1/5, 1/25, 1/125,...:

a) És una progressió geomètrica de raó 5 b) És una progressió aritmètica de diferència 5

c) És una progressió geomètrica de raó 1/5 d) És una progressió aritmètica de diferència 1/5.

5. La solució de l'equació $5^{\frac{1}{5}x} = 625$ és:

a) 40 b) 8 c) 10 d) 20

6. La progressió aritmètica el primer terme de la qual és 3 i la seva diferència 5, té com a terme general:

a) $a_n = 5n$ b) $a_n = 5n + 2$ c) $a_n = 5n - 1$ d) $a_n = 5n - 2$

7. La Pepa està preparant l'examen de selectivitat. Per a no deixar tota la matèria per al final ha decidit estudiar cada dia el doble de pàgines que el dia anterior. Si el primer dia va estudiar dues pàgines, quantes n'haurà estudiat al cap de 5 dies?

a) 62 b) 32 c) 1024 d) 128

8. A en Lluís li han tocat 6000 € en la loteria i decideix dipositar-los al banc a un tipus d'interès compost del 4%. Quants diners tindrà al cap de 5 anys?

a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €

9. La successió $a_n = \dfrac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$ té per límit:

a) 0 b) ∞ c) –3/2 d) 7

10. La successió $a_n = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$ té per límit:

a) e^2 b) ∞ c) e^{-2} d) $-e$

Autora: Fernanda Ramos Rodríguez. Revisor: Javier Rodrigo
Traducció al català: Institut La Bisbal (Girona)
Il·lustracions: Banco de Imágenes de INTEF