

# Exercicis i Problemes.

## 1r Batxillerat de Ciències.

### Matemàtiques I

#### ÍNDEX:

1. Nombres reals i complexos	2
2. Àlgebra	10
3. Successions	20
4. Trigonometria	25
5. Geometria analítica	32
6. Funcions	41
7. Límits i continuïtat	55
8. Derivades	61
9. Estadística	71
10. Probabilitat i distribucions de probabilitat	82
Annexos: IES Binissalem	87

**Librosmareaverde.tk**

**[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)**

**Autors: Marea verda de Matemàtiques**

**Il·lustracions: Banc d'imatges d'INTEF i dels autors**

**Traducció: IES Binissalem (Balears)**

**Propiedad Intelectual**

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-069507

Fecha y hora de registro: 2015-07-09 13:48:48.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dnrights.com>



# CAPÍTOL 1: NOMBRES REALS I COMPLEXOS

## Matemàtiques I. Batxillerat de Ciències

### ACTIVITATS PROPOSADES

#### 1. NOMBRES REALS

- Mentalment decideix quines de les següents fraccions té una expressió decimal exacta (E) i quines la tenen periòdica (P):  
a)  $\frac{2}{3}$       b)  $\frac{3}{5}$       c)  $\frac{7}{30}$       d)  $\frac{6}{25}$       e)  $\frac{7}{8}$       f)  $\frac{9}{11}$
- Troba l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici 1 i comprova si la teva deducció era correcta.  
a)  $\frac{2}{3}$       b)  $\frac{3}{5}$       c)  $\frac{7}{30}$       d)  $\frac{6}{25}$       e)  $\frac{7}{8}$       f)  $\frac{9}{11}$
- Calcula l'expressió decimal de les fraccions següents:  
a)  $\frac{1}{3}$       b)  $\frac{1}{9}$       c)  $\frac{7}{80}$       d)  $\frac{2}{125}$       e)  $\frac{49}{400}$       f)  $\frac{36}{11}$
- Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals exactes i redueix-les, comprova amb la calculadora que està bé:  
a)  $7'92835$ ;      b)  $291'291835$ ;      c)  $0'23$
- Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals periòdiques, redueix-les i comprova que està bé:  
a)  $2'353535.....$       b)  $87'2365656565.....$       c)  $0'9999.....$       d)  $26'5735735735.....$
- Pots demostrar que  $4,99999... \text{ és igual a } 5$ ? Calcula quant val  $2,5999...?$  *Ajuda:* Escriu-los en forma de fracció i simplifica.
- Demostra que  $\sqrt[3]{7}$  és irracional.
- Quantes xifres pot tenir com a màxim el període de  $\frac{1}{47}$  ?
- Quants decimals té  $\frac{1}{2^7 \cdot 5^4}$  ?, t'atreveixes a donar un motiu?
- Fes la divisió  $999999:7$  i després  $1:7$ , és casualitat?
- Ara divideix  $999$  entre  $37$  i després  $1:37$ , és casualitat?
- Escriu 3 nombres reals que estiguin entre  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  i  $1$ .
- Escriu 5 nombres racionals que estiguin entre  $\sqrt{2}$  i  $1'5$ .
- Escriu 5 nombres irracionals que estiguin entre  $3'14$  i  $\pi$ .
- Representa a la recta numèrica els següents nombres:  
a)  $\frac{9}{5}$ ,      b)  $-\frac{13}{4}$ ,      c)  $1'342$ ,      d)  $-2'555555.....$
- Representa a la recta numèrica:  
a)  $\sqrt{10}$ ,      b)  $-\sqrt{6}$ ,      c)  $\sqrt{27}$ ,      d)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Troba el valor absolut dels següents nombres:  
a)  $5$       b)  $-5$       c)  $-\pi$
- Representa les següents funcions:  
a)  $f(x) = |x^2|$   
b)  $f(x) = |x^2 - 1|$   
c)  $f(x) = |\cos x|$   
d)  $f(x) = |\sqrt{x}|$
- Representa a la recta real i calcula la distància entre els nombres reals següents:  
a)  $\text{Dist}(5, 9)$   
b)  $\text{Dist}(-2'3, -4'5)$   
c)  $\text{Dist}(-1/5, 9/5)$   
d)  $\text{Dist}(-3'272727....., 6'27272727.....)$ .
- Escriu els següents intervals mitjançant conjunts i representa'ls a la recta real:

- a)  $[1, 7]$                       b)  $(-3, 5)$                       c)  $(2, 8]$                       d)  $(-\infty, 6)$
21. Representa a la recta real i escriu en forma d'interval:
- a)  $2 < x < 5$                       b)  $4 < x$                       c)  $3 \leq x < 6$                       d)  $x \leq 7$
22. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:
- a) Un percentatge superior al 26 %.
- b) Edat inferior o igual a 18 anys.
- c) Nombres el cub dels quals sigui superior a 8.
- d) Nombres positius la part sencera dels quals té 3 xifres.
- e) Temperatura inferior a 25 °C.
- f) Nombres pels quals existeix la seva arrel quadrada (és un nombre real).
- g) Nombres que estiguin de 5 a una distància inferior a 4.
23. Expressa en forma d'interval els següents entorns de centre i radi donats:
- a)  $E(1, 5)$                       b)  $E(-2, \frac{8}{3})$                       c)  $E(-10, 0'001)$
24. Expressa en forma d'entorn els següents intervals:
- a)  $(4, 7)$
- b)  $(-7, -4)$
- c)  $(-3, 2)$
25. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com a interval de nombres reals? \*Pista: 600,222333€ pot ser un sou?

## 2. NOMBRES COMPLEXOS

26. Comprova que:
- a)  $(1 - i)^4 = -4$
- b)  $\frac{5 + 10i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{i} = -2$
- c)  $(1 + i)^5 = -4 - 4i$
27. Realitza les següents operacions amb nombres complexos:
- a)  $\frac{68}{(1 - i) \cdot (2 - i) \cdot (3 - i)}$
- b)  $(2 + i) - i(1 - 2i)$
- c)  $\frac{2 + i}{4 - 3i} + \frac{3 + i}{5i}$
- d)  $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$
28. Calcula: (Ajuda: substitueix z per  $x + iy$ )
- a)  $Im \frac{\bar{z}}{z}$
- b)  $Re(z^4)$
- c)  $(Re(z))^4$

Per als següents nombres complexos:

$$a = 3i; \quad b = -2i; \quad c = 5; \quad d = 1 + i; \quad e = -1 - i$$

29. Representa'ls gràficament.
30. Representa gràficament el conjugat de cadascun d'ells.
31. Representa gràficament les sumes:
- $a + b$                        $a + c$                        $b + d$                        $d + e$
32. Representa gràficament els productes:

$a \cdot i$

$b \cdot i$

$c \cdot i$

$d \cdot i$

$e \cdot i$

Analitza el resultat. Comprova que multiplicar per  $i$  suposa girar  $90^\circ$  el nombre complex.

33. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

a)  $\sqrt{3} - i$

b)  $-2 - 2i$

c)  $1 - \sqrt{3}i$

d)  $-4i$

34. Expressa en forma polar els següents nombres complexos:

a)  $i$

b)  $-i$

c)  $4 + 4i$

d)  $-4$

35. Comprova els resultats següents:

a)  $(1 + i)^{16} = 2^8 = 256$ .

$$b) \sqrt[3]{27i} = \begin{cases} 3 e^{i \frac{\pi}{6}} \\ 3 e^{i \frac{5\pi}{6}} \\ 3 e^{i \frac{9\pi}{6}} \end{cases}$$

36. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma exponencial:

a)  $\frac{\sqrt{2}i}{-2 - 2i}$

b)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$

37. Resol les equacions, obtenint les arrels reals i complexos:

a)  $x^2 = -1$

b)  $x^3 = -8$

c)  $x^4 + 16 = 0$

38. Calcula les arrels  $n$ -èsimes de la unitat, per a  $n = 2, 3$  i  $4$ . Representar-les gràficament, i comprovar que estan sobre la circumferència de radi 1, i en els vèrtexs d'un polígon regular.

## EXERCICIS I PROBLEMES.

### Nombres reals

1. Calcula els valors exactes de  $a + b$ ,  $c - a$  i  $a \cdot c$  per als nombres: (pista: racionalitzar)

$a = 2\sqrt{7}$

$b = 3\sqrt{292929}\dots$

$c = 0,01030303\dots$

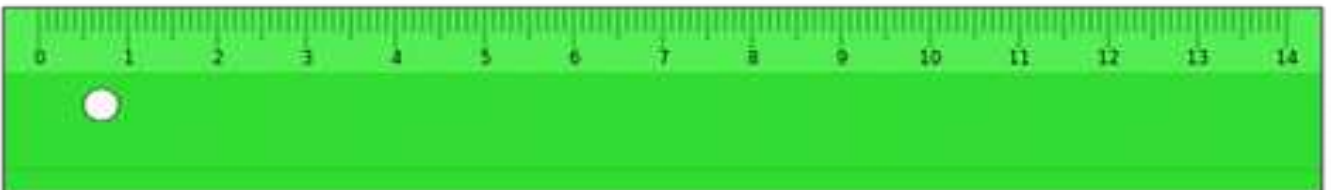
2. Esbrina quin d'aquests nombres és irracional:

a)  $3\sqrt{1416}$

b)  $\sqrt{4}$

c)  $\pi$

3. Podem trobar nombres irracionals en les marques d'una regla graduada? Hi ha algun punt de la regla (encara que no tingui marca) que es correspongui amb un nombre irracional? Justifica la teva resposta.



4. Classifica els següents nombres en ordre de major a menor i després representa'ls a la recta:

a)  $7$

- b)  $25/4$   
 c)  $\sqrt{45}$   
 d)  $2 \cdot \pi$

5. Escriu una successió infinita de nombres reals dins de l'interval  $(-1, 1)$ .
6. Calcula el valor absolut dels següents nombres:  
 a)  $|-5|$       b)  $|4 - 4|$       c)  $|3 \cdot 2 + 9|$       d)  $\sqrt{7}$       e)  $\sqrt{7^2}$
7. Calcula  $x$  en les següents equacions: (*pista*:  $x$  pot tenir dos valors)  
 a)  $|x| = 5$       b)  $|x - 4| = 0$       c)  $|3x + 9| = 21$
8. Dibuixa les següents funcions en un gràfic:  
 a)  $f(x) = |x| - 5$       b)  $f(x) = |x - 4|$       c)  $f(x) = |3x + 9|$
9. Tria un dia i calcula la distància que has recorregut en total, i compara-la amb la distància entre els punts inicial (al principi del dia) i final (en acabar el dia).
10. Un artesà fabrica dos productes. El primer (a) li costa 2 hores i 3 euros en material, i el segon (b) li costa 6 hores i 30 euros de material. Si valora en 10 euros cada hora de treball, i els ven per (a) 30 i (b) 90 euros, esbrina quin és més rendible per al seu negoci.
11. Entre Kroflite i Beeline hi ha altres cinc ciutats. Les set es troben al llarg d'una carretera recta, separades unes d'altres per una distància entera de quilòmetres. Les ciutats es troben espaiades de tal manera que si un coneix la distància que una persona ha recorregut entre dues d'elles, pot identificar-les sens dubte. Quin és la distància mínima entre Kroflite i Beeline perquè això sigui possible?
12. Representa a la recta real els nombres que verifiquen les següents relacions:  
 a)  $|x| < 1$   
 b)  $|x| \leq 1$   
 c)  $|x| > 1$   
 d)  $|x| \geq 1$
13. Troba dos nombres que distin 6 unitats de 3, i altres dues que distin 3,5 unitats de  $-2$ , calcula després la diferència entre el major i el menor de tots aquests nombres.
14. Escriu l'interval  $[-3, 5] \cap (3, 8)$ .
15. Escriu l'interval format pels nombres reals  $x$  que compleixen  $|x - 8| \leq 3$ .
16. Determina els conjunts  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A - B$  i  $-A$  en els casos següents:  
 a)  $A = [-11, -9]$ ;  $B = (-1, 6)$   
 b)  $A = [-5, 5]$ ;  $B = (3, 4)$

## Nombres complexos

17. Comprova si: a)  $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$ .      b)  $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = |e^{i\theta}| = 1$ .
18. Calcula: a)  $(2 + i)^5$       b)  $\frac{13}{|2 - 3i|}$       c)  $\frac{(3 + 2i)^2}{(2 + 3i)^3}$       d)  $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)$       e)  $(1 + i)^8$   
 f)  $(1 + i)^{-1}$       g)  $(\sqrt{3} + i)^{-9}$ .
19. Demuestra que  $z$  és real si i només si  $z = \bar{z}$ .
20. Verifica que l'invers de  $z$ ,  $z^{-1}$ , és igual a  $\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$ . Calcula l'invers de  $2 + 3i$ .
21. Calcula el mòdul i l'argument principal dels següents nombres complexos:

- a)  $-3 + 3i$
- b)  $-3$
- c)  $-3i$
- d)  $3 - 3i$ .

22. Expressa en forma polar i trigonomètrica els següents nombres complexos:

- a)  $5i$
- b)  $-7i$
- c)  $5 - 5i$
- d)  $\sqrt{3} + i$ .

23. Expressa en forma binòmica els següents nombres complexos en forma polar:

- a) De mòdul 2 i argument  $\pi/3$
- b) De mòdul 3 i argument  $-\pi/4$
- c) De mòdul 1 i argument  $\pi/2$
- d) De mòdul 5 i argument  $2\pi/3$

24. Realitza les següents operacions amb nombres complexos, expressant-los prèviament en forma trigonomètrica:

- a)  $(\sqrt{3} + i)^{60}$
- b)  $(4 - 4i)^{-11}$
- c)  $\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{12}}{(-2 - 2i)^8}$ .

25. Utilitza la fórmula de Moivre per expressar en funció de  $\sin \theta$  i  $\cos \theta$ :

- a)  $\cos 2\theta$
- b)  $\sin 2\theta$
- c)  $\cos 3\theta$
- d)  $\sin 3\theta$ .

26. Calcula l'argument principal dels següents nombres complexos:

- a)  $\frac{-3}{\sqrt{3} + i}$
- b)  $\frac{-i}{1 - i}$
- c)  $(1 - i\sqrt{3})^7$ .

27. Calcula, representa en el pla complex i escriu en forma binòmica:

- a)  $\sqrt{-3i}$
- b)  $\sqrt{1 + \sqrt{3}i}$
- c)  $\sqrt[3]{-27}$
- d)  $\sqrt[3]{1 - i}$
- e)  $\sqrt[4]{-81}$ .

28. Resol les equacions:

- a)  $x^3 = -27$ .
- b)  $x^4 = -81$ .
- c)  $x^5 - 32 = 0$ .
- d)  $x^3 - 8 = 0$ .

29. Calcula tots els valors de  $z$  pels quals:

a)  $z^6 + 64 = 0$ .

b)  $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$ .

c)  $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ .

30. Calcula les arrels cinques de la unitat i representa-les en el plànol. Calcula també les arrels cinques de  $-1$ , representa-les també. Generalitza aquest resultat.

31. Calcula les quatre arrels de  $z^4 + 9 = 0$  i utilitza-les per factoritzar  $z^4 + 9$  en dos polinomis quadràtics amb coeficients reals.

32. Resol l'equació:  $z^2 + 3z - 1 = 0$ .

33. Calcula  $a$  perquè el nombre complex  $\frac{a+i}{3-i}$  tingui la seva part real igual a la seva part imaginària.

## RESUM

		Exemples
<b>Nombres reals</b>	Està format per la unió dels nombres racionals i els nombres irracionals	5, -4, 2/3, 7'5, $\pi$ , i, $\Phi$ ...
<b>Densitat dels Nombres reals</b>	El conjunt dels nombres reals és dens, és a dir, entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres.	Entre 0 i 1 calculant el punt mitjà obtenim infinits punts: 0, 0'5, 0'25, 0'125, 0'0625, ..., 1
<b>Valor absolut</b>	$ x  = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$ -32  = 32 =  +32 $
<b>Distància a la recta real</b>	$\text{Dist}(x, y) =  x - y $	$\text{Dist}(3, 8) =  8 - 3  = 5$ . $\text{Dist}(-2, -9) =  -9 - (-2)  =  -9 + 2  =  -7  = 7$
<b>Intervals</b>	Obert: $(a, b) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x < b\}$ Tancat: $[a, b] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \leq x \leq b\}$ Semi-obert (esq): $(a, b] = \{x \in \mathfrak{R} \mid a < x \leq b\}$ Semi-obert (dreta): $[a, b) = \{x \in \mathfrak{R} \mid a \leq x < b\}$	(3, 5) [3, 5] (2, 8] [1, 7)
<b>Entorns</b>	És una forma especial d'expressar els intervals oberts. Es defineix com el conjunt de nombres que estan a una distància de a menor que r. $E(a, r)$	$E(2, 4) = (2 - 4, 2 + 4) = (-2, 6)$
<b>El nombre i</b>	$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$	
<b>Nombre complex Forma binòmica</b>	$z = x + i \cdot y$	
<b>Suma de complexos</b>	$(x + iy) + (o + iv) = (x + o) + i \cdot (y + v)$	$(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
<b>Producte de complexos</b>	$(x + iy) \cdot (o + iv) = (x \cdot o - y \cdot v) + i \cdot (x \cdot v + y \cdot o)$	$(2 - i) \cdot (1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$
<b>Divisió de complexos</b>	Es multiplica, numerador i denominador pel conjugat del denominador. Així s'aconsegueix que el denominador sigui un nombre real	$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1 - i$
<b>Forma trigonomètrica</b>	$z = r(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$	$z = 2 \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3})$
<b>Producte de complexos</b>	Es multipliquen els seus mòduls i se sumen els seus arguments	$z \cdot z = 4 \cdot (\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3})$
<b>Divisió de complexos</b>	Es divideixen els seus mòduls i es resten els seus arguments	$z/z = 1 \cdot (\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 1$
<b>Fórmula de Moivre</b>	$(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta)$	



### AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyala quin dels següents nombres és irracional:  
 a)  $6'33333333\dots$       b)  $7/3$       c)  $i$       d)  $5'98234234234\dots$
2. La solució de l'equació  $|3x + 9| = 21$  és:  
 a)  $x = 10, x = -4$       b)  $x = 10$       c)  $x = -10, x = 4$       d)  $x = -4$
3. Determina el conjunt  $A - B$  si  $A = [-11, 9]$ ;  $B = (-1, 6)$ :  
 a)  $[-11, -1) \cup [6, 9]$     b)  $[-11, -1) \cup (6, 9]$     c)  $[-11, -1] \cup (6, 9]$     d)  $[-11, -1] \cup [6, 9]$
4. Calcula  $\frac{(3 + 2i) \cdot (3 - 2i)}{(2 + 3i)^3}$   
 a)  $-46 + 9i$       b)  $62 + 63i$       c)  $-46 + 63i$       d)  $62 + 9i$
5. Resol l'equació  $x^4 = 1$ .  
 a)  $x = 1$       b)  $x = 1, x = -1$       c)  $x = \pm i$       d)  $x = \pm 1, x = \pm i$
6. Expressa en forma binòmica el següent nombre complex de mòdul 2 i argument  $\pi/3$   
 a)  $1 + \sqrt{3}i$       b)  $\sqrt{3} + i$       c)  $1 - \sqrt{3}i$       d)  $1/2 + \sqrt{3}/2i$
7. Calcula  $(1 + i)^6$   
 a)  $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$       b)  $-8$       c)  $1 - i$       d)  $-8i$
8. Expressa en forma trigonomètrica el següent nombre complex  $5i$ :  
 a)  $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$     b)  $(5, \pi/2)$       c)  $5(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$     d)  $5(\sin(90^\circ) + i\cos(90^\circ))$
9. Calcula el mòdul i l'argument principal del següent nombre complex  $-3 + 3i$ :  
 a)  $18, 135^\circ$       b)  $3\sqrt{2}, 3\pi/4$       c)  $3\sqrt{2}, 7\pi/4$       d)  $3, 5\pi/4$
10. Calcula:  $x = \sqrt{-1}$   
 a)  $x = i$       b)  $x = -i$       c)  $x = i, x = -i$       d) No té solució

## CAPÍTOL 2: ÀLGEBRA

### ACTIVITATS PROPOSADES

#### 1. POLINOMIS.

1. Realitza la suma i resta dels següents polinomis:

a)  $x^2 - 2$

b)  $3x^4 + x^3 - 1$

2. Realitza les següents sumes de polinomis:

a)  $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$

b)  $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$

3. Escribe el polinomi oposat de cadascun dels següents polinomis:

a)  $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

b)  $-7x^3 - 6x + 5$

c)  $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$

4. Considera els polinomis  $p \equiv x^3 - 6x + 2$ ,  $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$ , així com el polinomi suma  $s \equiv p + q$ . Troba els valors que adopta cadascun d'ells para  $x = -2$ , és a dir, calcula  $p(-2)$ ,  $q(-2)$  i  $s(-2)$ . Estudia si existeix alguna relació entre aquests tres valors.

5. Obtingues el valor del polinomi  $p \equiv -x - 5x^3 + 2x - 2$  en  $x = 3$ . Quin valor pren el polinomi oposat de  $p$  en  $x = 3$ ?

6. Realitza les següents diferències de polinomis:

a)  $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

b)  $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

c)  $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

7. Efectua els següents productes de polinomis:

a)  $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$

b)  $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

c)  $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$

d)  $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

8. Multiplica cadascun dels següents polinomis per un nombre de tal forma que sorgeixin polinomis monòmics:

a)  $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$

b)  $-2x^3 + x^2 - 1$

c)  $-x^2 + x - 7$

9. Calcula i simplifica els següents productes:

a)  $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$

b)  $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c)  $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2)$

d)  $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

10. Realitza els següents productes de polinomis:

a)  $x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3$

b)  $(2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

11. De cadascun dels següents polinomis extreu algun factor que sigui comú als seus monomis:

a)  $-16x^4 - 20x^3 + 10x^2$

b)  $24x^4 - 30x^2$

12. Realitza els càlculs:

a)  $(2 + 3a)^2$

b)  $(-x + 3)^2$

c)  $(-3x + 2)^2$

d)  $(x^2 - 1)^3$

e)  $(4x^2 + 2)^3$

13. Obtingues les fórmules dels quadrats dels següents trinomis:

a)  $(a + b + c)^2$

b)  $(a + b - c)^2$

14. Desenvolupa les següents potències:

a)  $(2x - 5y)^2$

b)  $(3x + y/3)^2$

c)  $(5x^2 - 5/x)^2$

d)  $(3a - b)^2$

e)  $(a^2 + b^2)^2$

f)  $(3/5y - 2/y)^2$

15. Expressa com quadrat d'una suma o d'una diferència les següents expressions algebraiques:

a)  $a^4 + 6a^2 + 9$

b)  $9x^2 - 6x + 1$

c)  $b^2 - 10b + 25$

d)  $4y^2 + 12y + 9$

e)  $a^4 - 2a^2 + 1$

f)  $y^4 + 6y^2 + 9$

16. Efectua aquests productes:

a)  $(4x^2 + 3y) \cdot (4x^2 - 3y)$       b)  $(2x^2 + 8) \cdot (2x^2 - 8)$       c)  $(-x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x)$

17. Divideix els següents polinomis:

a)  $2x^4 - x^2 - x + 7$  entre  $x^2 + 2x + 4$       b)  $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$  entre  $5x^3 - x^2 - x + 3$   
 c)  $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$  entre  $-2x^3 + x + 3$       d)  $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$  entre  $4x^3 + x^2 + x - 1$   
 e)  $-6x^5 + x^2 + 1$  entre  $x^3 + 1$

18. Troba dos polinomis tals que en dividir-los aparegui  $q(x) = x^2 - x - 3$  com a polinomi quocient i  $r(x) = -3x^2 - 1$  com a residu.

19. Usa la regla de *Ruffini* per realitzar les següents divisions de polinomis:

a)  $-3x^2 + x + 1$  entre  $x - 1$       b)  $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$  entre  $x - 2$   
 c)  $4x^3 - 3x^2 - 1$  entre  $x + 1$       d)  $x^3 - 9x + 1$  entre  $x - 3$

20. Estudia si és possible usar la regla de *Ruffini*, d'alguna forma, per dividir  $x^3 + 2x^2 + 5x + 7$  entre  $2x + 3$ .

21. Utilitza la regla de *Ruffini* per conèixer el valor del polinomi  $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$  en  $x = 5$ .

22. Empra la regla de *Ruffini* per dictaminar si els següents nombres són o no arrels dels polinomis citats:

a)  $\alpha = 3$  de  $x^3 - 4x^2 + 5$       b)  $\beta = -2$  de  $-x^3 - 2x^2 + x + 2$   
 c)  $\gamma = 1$  de  $-2x^4 + x + 1$       d)  $\vartheta = -1$  de  $2x^3 + 2x^2$

23. Per a cadascun dels següents polinomis assenyala, en primer lloc, quins nombres enters són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins el són:

a)  $x^3 - x^2 + 2x - 2$       b)  $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$   
 c)  $2x^3 + x^2 - 18x - 9$       d)  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

24. Comprova que  $\frac{-1}{2}$  és arrel del polinomi  $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ .

25. Per a cadascun dels següents polinomis indica què nombres racionals són candidats a ser arrels seves i, després, determina quins el són:

a)  $3x^2 + 4x - 5$       b)  $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

26. Suposem que tenim dos polinomis,  $p_1(x)$  i  $p_2(x)$ , i un nombre real  $\alpha$ .

- a) Si  $\alpha$  és una arrel de  $p_1(x)$ , també és arrel del polinomi suma  $p_1(x) + p_2(x)$  ?  
 b) Si  $\alpha$  és una arrel de  $p_1(x)$ , també és arrel del polinomi producte  $p_1(x) \cdot p_2(x)$  ?  
 c) Hi ha alguna relació entre les arrels del polinomi  $p_1(x)$  i les del polinomi  $4 \cdot p_1(x)$  ?

27. Construeix un polinomi de grau 4 tal que posseeixi tres arrels diferents.

28. Determina un polinomi de grau 4 tal que tingui, almenys, una arrel repetida.

29. Construeix un polinomi de grau 4 de manera que tingui una única arrel real.

30. Conjectura, i després demostra, una llei que ens permeti saber quan un polinomi qualsevol

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

admet al número 0 com a arrel.

31. Demostra una norma que assenyali quan un polinomi qualsevol  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  admet al número 1 com a arrel.

32. Determina les arrels de cadascun dels següents polinomis:

a)  $x + 5$       b)  $-x + 3$       c)  $7x - 5$       d)  $-3x - 11$   
 e)  $-7x$       f)  $x^2 - 8x$       g)  $4x^2 - x - 3$       h)  $x^3 - 4x$       e)  $x^3 + 25x$

33. Simplifica, si és possible, les següents expressions:

$$a) \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$$

$$b) \frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}$$

$$c) \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$$

34. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

$$a) \frac{3x^2 - 6x}{9x^2 + 15}$$

$$b) \frac{a^3 - 5a^2}{7a^3 + 4a^2}$$

$$c) \frac{x^2y + 3xy^2}{4xy}$$

$$d) \frac{2a^2b^2 + 3ab}{a^3b - ab}$$

35. Realitza les següents operacions tenint en compte les factoritzacions dels denominadors:

$$a) \frac{5}{-3x + 12} + \frac{x + 2}{x^2 - 4x}$$

$$b) \frac{-x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$$

36. Efectua els següents càlculs:

$$a) \frac{2x + 1}{x^2 + 1} + \frac{4}{x}$$

$$b) \frac{1}{x - 2} + \frac{3}{x + 1}$$

$$c) \frac{-x}{x^2 + 3x} \cdot \frac{1}{x - 1}$$

$$d) \frac{x - 2}{x^2 + 3x} : \frac{x - 2}{x + 3}$$

37. Realitza les següents operacions modificant, a cada apartat, únicament un dels denominadors, i el seu respectiu numerador:

$$a) \frac{-x^2 + x - 1}{x^3} - \frac{3x + 2}{x^2}$$

$$b) \frac{x - 2}{x^2 + 3x} - \frac{8}{x + 3}$$

38. Comprova les següents identitats simplificant l'expressió del costat esquerre de cada igualtat:

$$a) \frac{8a^4b^3}{2a^2b^2} = 4a^2b$$

$$b) \frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}y$$

$$c) \frac{3x^2 - 9x}{6x + 12} = \frac{x^2 - 3x}{x + 4}$$

$$d) \frac{6a^2b^2 + 8a^2b - 10ab}{2ab^2 + 16a^2b} = \frac{3ab + 4a - 5}{b + 8a}$$

## 2. EQUACIONS I INEQUACIONS DE PRIMER I SEGON GRAU:

39. Resoldre les següents equacions:

$$a) \frac{2x - 4}{3x - 2} = \frac{4}{7}$$

$$b) \frac{x + 8}{x - 1} - \frac{x + 4}{x + 1} = \frac{12x}{x^2 - 1}$$

$$c) \frac{3(2x + 1)}{4} - \frac{5x + 3}{6} + 4x + \frac{x + 1}{3} = x + \frac{151}{12}$$

40. Resol: a)  $\frac{x^2}{25} + \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$  b)  $\frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3/4x}{9}$  c)  $4x^4 + 8x^2 - 12 = 0$  d)  $80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$

41. Sumant set unitats al doble d'un nombre més els 3/2 del mateix obtenim com resultat el sèxtuple d'aquest nombre menys 23. De quin nombre es tracta?

42. Les dimensions d'un rectangle són 54 i 36 m. Traça una paral·lela al costat que mesura 36 m de manera que es formi un rectangle semblant al primer. Quines són les longituds dels segments en què aquesta paral·lela divideix al costat de 54 m?

43. Desitgem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000 €. Si la finca val 4 vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca. Quant val cada cosa?

44. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

$$a) 5 + 3x < 2x + 4$$

$$b) 3 + 4x \leq 8x + 6$$

$$c) 5 + 4x > 3x + 2$$

$$d) 1 + 3x \geq 5x + 7$$

45. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

$$a) 4(3 + 2x) < -(6x + 8) \quad b) 7(2 + 3x) \leq 5(6x + 3) \quad c) 9(2 + 4x) + 4(5x - 2) > 3(2x + 1)$$

46. Resol les següents inequacions i representa la solució a la recta real:

$$a) 6 + 3x < x/3 + 1$$

$$b) 5 + 5x/2 \leq 9x/2 + 1$$

$$c) (2 + 5x)/3 > 4x + 1$$

$$d) (1 + 5x)/2 + 1 \geq (3x + 6)/4$$

47. Escriu una inequació la solució de la qual sigui el següent interval:

$$a) [2, \infty)$$

$$b) (-\infty, 3)$$

$$c) (4, \infty]$$

$$d) (-\infty, 2)$$

48. Calcula els valors de  $x$  perquè sigui possible calcular les següents arrels:

a)  $\sqrt{2x-3}$

b)  $\sqrt{-x-9}$

c)  $\sqrt{2-7x}$

d)  $\sqrt{-2x+7}$

49. Resol les següents inequacions de segon grau:

a)  $x^2 - 1 \geq 0$

b)  $x^2 - 4 \leq 0$

c)  $x^2 - 9 > 0$

d)  $x^2 + 4 \geq 0$

e)  $2x^2 - 50 < 0$

f)  $3x^2 + 12 \leq 0$

g)  $5x^2 - 45 > 0$

h)  $x^2 + 1 \geq 0$

50. Resol les següents inequacions de segon grau:

a)  $x^2 + x \leq 0$

b)  $x^2 - 5x > 0$

c)  $x^2 \leq 8x$

d)  $x^2 \leq 3x$

e)  $2x^2 - 3x > 0$

f)  $5x^2 - 10x < 0$

51. Resol les següents inequacions de segon grau:

a)  $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

b)  $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$

c)  $x^2 + 9x + 14 > 0$

d)  $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

e)  $-x^2 - 4x - 5 < 0$

f)  $x^2 + 8x + 16 > 0$

g)  $x^2 + x + 3 \geq 0$

h)  $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$

52. Resol les següents inequacions de segon grau:

a)  $x^2 + x - 6 > 0$

b)  $x^2 - x - 12 \leq 0$

c)  $x^2 - x - 20 < 0$

d)  $x^2 + 5x - 14 \geq 0$

e)  $-2x^2 + 3x + 2 > 0$

f)  $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$

g)  $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$

h)  $2x^2 + x - 15 < 0$

53. Calcula els valors de  $x$  perquè sigui possible obtenir les següents arrels:

a)  $\sqrt{x^2 - 1}$

b)  $\sqrt{-x^2 + 4}$

c)  $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$

d)  $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$

54. Resol les següents inequacions de segon grau:

a)  $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$

b)  $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$

c)  $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+3}$

### 3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS :

55. Resol pel mètode de Gauss els sistemes:

a) 
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases}$$

56. Resol i discuteix si és possible el següent sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

57. Discutir i resoldre quan sigui possible, els següents sistemes lineals d'equacions.

a) 
$$\begin{cases} x - 6y - 4z = -7 \\ x + 8y + 4z = 6 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x + y - 6z - 4t = 6 \\ 3x + 2y - 3z + 8t = -7 \\ 3x - y - 6z - 4t = 2 \\ 4x - y + 3z + 12t = 0 \end{cases}$$

58. Comprem 8 kg de cafè natural i 5 kg de cafè torrefacte, pagant 66 €. Calcula el preu del quilo de cada tipus de cafè, sabent que si barregem meitat i meitat resulta el quilo a 5 €.

59. Una mare té el doble de la suma de les edats dels seus fills. L'edat del fill menor és la meitat de la de la seva germana i la suma de les edats dels nens i la de la mare és 45 anys. Quines edats tenen?

60. Desitgem vendre un cotxe, un pis i una finca per un total de 300000 €. Si la finca val quatre vegades més que el cotxe i el pis cinc vegades més que la finca, quant val cada cosa?

61. Les tres xifres d'un nombre sumen 18. Si a aquest nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 594; la xifra de les desenes és mitja aritmètica entre les altres dues. Troba aquest nombre.

62. Representa la regió factible del sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 5y \leq 30 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

63. Resol gràficament els següents sistemes d'inequacions:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x-2y+3}{3} \geq \frac{x-y+1}{2} \\ 1 - \frac{2x-4-y}{3} + \frac{2x+3y}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x+1) \cdot 10 + x \leq 6(2x+1) \\ 4(x-10) < -6(2-x) - 6x \end{cases}$$

## RESUM

Noció	Descripció	Exemples
<b>Polinomi</b>	Expressió construïda a partir de la suma de monomis	$-x^3 + 4x^2 + 8x + 6$
<b>Grau d'un polinomi</b>	El major grau dels seus monomis	Grau 3
<b>Suma, resta i producte de polinomis</b>	El resultat sempre és un altre polinomi	$p = -3x + 6; q = x^2 + 4.$ $p + q = x^2 - 3x + 10;$ $p - q = -x^2 - 3x + 2;$ $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24.$
<b>Divisió de dos polinomis</b>	S'obtenen altres dos polinomis, els polinomis quocient ( $q(x)$ ) i residu ( $r(x)$ ), lligats als polinomis inicials, els polinomis dividend ( $p(x)$ ) i divisor ( $d(x)$ )	$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$
<b>Regla de Ruffini</b>	Ens pot ajudar a l'hora de factoritzar un polinomi i conèixer les seves arrels	
<b>Teorema del residu</b>	El valor numèric que agafa un polinomi $p(x)$ al substituir $x = \alpha$ coincideix amb el residu que apareix en dividir $p(x)$ entre $x - \alpha$ .	
<b>Arrel d'un polinomi</b>	Un nombre real concret $\alpha$ és <b>una arrel</b> , o <b>un zero</b> , del polinomi $p$ , si en avaluar $p$ en $x = \alpha$ obtenim el número 0, és a dir, si $p(\alpha) = 0$	2 és arrel de $-3x + 6$ . 1 i $-3$ són arrels de $x^2 + 2x - 3$
<b>Factorització d'un polinomi</b>	Consisteix a expressar-ho com a producte d'altres polinomis de menor grau	$x^5 - 3x^3 - x^2 + 3 =$ $= (x^2 - 3) \cdot (x^3 - 1)$
<b>Fracions algebraiques</b>	És una fracció d'expressions polinòmiques	$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$
<b>Resolució d'equacions de 1r grau</b>	Són igualtats algebraiques amb una sola incògnita i de grau un.	$\frac{7(x-1)}{3} + \frac{5x}{6} = 1 - \frac{x}{2}$
<b>Resolució d'equacions de segon grau</b>	Igualtats algebraiques amb una sola incògnita i elevada al quadrat.	$-x^2 + 4x + 5$ La solució és: $x_1 = -1; x_2 = 5$
<b>Resolucions d'inequacions de 1º grau</b>	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnites de grau 1	$\frac{x-3}{3} - \frac{(x-7)}{6} > \frac{4-x}{2}$
<b>Resolució d'inequacions de 2º grau</b>	Desigualtats algebraiques amb una sola incògnita, elevades al quadrat.	$x^2 - 6x + 5 > 0$ la seva solució és l'interval (1, 5).
<b>Sistemes d'equacions lineals, pel mètode de Gauss</b>	Resolució pel mètode de Gauss.	$x + 4y + 3z = -1$ $2x - 3y - 2z = 1$ $-x + 2y + 4z = 2$

## EXERCICIS I PROBLEMES

**Polinomis:**

1. Estudia si hi ha nombres reals en els quals les següents expressions no poden ser avaluades:

a)  $\frac{7x-9}{(x+3) \cdot (2x-16)}$

b)  $\frac{-5x+7}{x^2-5x+6}$

c)  $\frac{9x^3-2x}{-2x^4-3x^2-4}$

d)  $\frac{2x-3y+5}{x^2+y^2}$

2. Calcular quant ha de valer la lletra  $m$  perquè el valor numèric de l'expressió algebraica següent sigui  $-2$  per a  $x = 0$ .

$$\frac{x^3 - mx + 4}{(x^4 - 1)(mx + 2)}$$

3. Considerem els polinomis  $p(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x - 4$ ,  $q(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$  i  $r(x) = 3x^2 + 5x - 7$ . Realitza les següents operacions:

a)  $p + q + r$

b)  $p - q$

c)  $p \cdot r$

d)  $p \cdot r - q$

4. Efectua les divisions de polinomis:

a)  $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 9$  entre  $3x^2 + 2x - 5$

b)  $6x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 10x - 5$  entre  $x^3 + 3x + 5$

5. Assenyala sense efectuar la divisió, si les següents divisions són exactes o no:

a)  $\frac{x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 17x + 5}{x - 3}$

b)  $\frac{x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

c)  $\frac{9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1}{x - 1}$

6. Construeix un polinomi de grau 2 tal que el número 4 sigui arrel seva.

7. Escribe dos polinomis de graus diferents i que tinguin en comú les arrels 2 i 3.

8. Construeix un polinomi de grau 4 tal que tingui únicament dues arrels reals.

9. Troba un polinomi  $q(x)$  tal que en dividir  $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$  entre  $q(x)$  s'obtingui com a polinomi residu  $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$ .

10. Troba les arrels enteres o racionals dels següents polinomis:

a)  $4x^3 + 11x^2 + 6x - 3$

b)  $3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

c)  $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$

d)  $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

11. Descompon els següents polinomis com a producte de polinomis irreductibles:

a)  $3x^3 + 11x^2 + 5x + 3$

b)  $5x^3 + 5x^2 + x - 1$

c)  $2x^3 + x^2 + 6x - 3$

d)  $3x^3 - 6x^2 + x - 2$

12. Realitza les operacions de fraccions algebraiques:

a)  $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-6x+9}$

b)  $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x^2}{x^2-6x+9}$

c)  $\frac{x+2}{x^2-3x} \cdot \frac{2x}{x^2-6x+9}$

d)  $\frac{x-1}{x^2-3x} : \frac{2x}{x^2-6x+9}$

13. Analitza si els següents polinomis han sorgit del desenvolupament de potències de binomis, o trinomis, o d'un producte *suma per diferència*. En cas afirmatiu expressa la seva procedència.

a)  $x^2 - 6x + 9$

b)  $x^4 + 8x^2 + 16$

c)  $x^2 + \sqrt{20}xy + 5y^2$

d)  $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

e)  $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

f)  $x^2 - 36$

g)  $5x^2 + 1$

h)  $5x^2 - 11$

e)  $x^4 - 3y^2$

14. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a)  $\frac{2}{x(5-x)} + \frac{6}{2(5-x)}$

b)  $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

c)  $\frac{2x+1}{4x^2-1}$

15. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

a)  $\left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$

b)  $\frac{x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3}{x-a} : \frac{x+a}{x-a}$

c)  $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a-b}$



16. Efectua les següents operacions i simplifica tot el possible:

$$a) \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x-y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a-y}}$$

$$b) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$c) \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{3}{x} + \frac{5}{y}}$$

## Equacions, inequacions i sistemes:

17. Resoldre les equacions següents:

$$a) \frac{3x-1}{2x-4} = \frac{5}{9}$$

$$b) \frac{x}{2} + 5 = \frac{3x}{6} - 7$$

$$c) \frac{5}{x+1} = \frac{5x}{x-1} - 2$$

18. Resoldre les següents equacions indicant quantes solucions tenen i quines són:

$$a) \frac{16x^3 - 7}{2x^2 - 3} = 5 + 8x$$

$$b) x^4 + 8x^2 - 12 = 0$$

$$c) 80x^4 - 48x^2 + 7 = 0$$

$$d) \frac{x^2}{16} + \frac{(x+5)^2}{25} = 1$$

19. El catet major d'un triangle rectangle és una unitat major que el catet menor. La hipotenusa és tres unitats major que el catet menor. Es demana:

a) Escriure l'expressió algebraica que resulta d'aplicar el Teorema de Pitàgores.

b) Calcula la hipotenusa i els catets.

20. En una competició de bàsquet a doble volta participen dotze equips. Cada partit guanyat val 2 punts i els partits perduts, 1 punt (no pot haver-hi empats). Al final de la competició, un equip té 36 punts. Quants partits ha guanyat?

21. Una caixa de forma cúbica s'omple amb cert nombre de glaçons d'un centímetre cúbic i sobren 71 glaçons; però si tots els glaçons que hi ha es posen en una altra caixa que té un centímetre més per cada aresta, falten 200 per omplir-la. Calcula les longituds de les arestes de les dues caixes i el nombre de glaçons que hi ha.

22. Les tres xifres d'un nombre sumen 18. Si a aquest nombre se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obtenen 594; la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica entre les altres dues. Troba el nombre.

23. Volem esbrinar les edats d'una família formada pels pares i els dos fills. Si sumim les seves edats de tres en tres, obtenim 100, 73, 74 i 98 anys, respectivament. Quina és l'edat de cadascun d'ells?

24. Resol:

$$a) \frac{x}{3} - 9 < 2$$

$$b) \frac{5x}{7} - 7 \leq -5x$$

$$c) 4(2x-3) > 1-7x$$

$$d) \frac{3(x+4)}{5} < 2x$$

$$e) \frac{2x-4}{3} + 1 > \frac{9x+6}{6}$$

$$f) \frac{7x}{2} - 1 < x - \frac{3x+5}{4}$$

25. Calcula els valors de  $x$  perquè sigui possible calcular les següents arrels:

$$a) \sqrt{3x-6}$$

$$b) \sqrt{-x+3}$$

$$c) \sqrt{15-3x}$$

$$d) \sqrt{-6x-24}$$

26. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) 2x^2 - 8 < 0$$

$$b) -x^2 + 25 \leq 0$$

$$c) -x^2 + 49 \geq 0$$

$$d) 5x^2 - 45 \geq 0$$

$$e) 9x^2 - 1 > 0$$

$$f) 16x^2 - 9 < 0$$

$$g) 49x^2 - 36 < 0$$

$$h) 121x^2 + 100 \leq 0$$

27. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) -2x^2 + 50x \leq 0$$

$$b) 7x^2 + 3x \geq 0$$

$$c) 2x^2 < 8x$$

$$d) -2x^2 - 24x \geq 0$$

$$e) -7x^2 + 14x < 0$$

$$f) -5x^2 - 30x \geq 0$$

28. Resol les següents inequacions de segon grau:

$$a) 5x^2 \leq 0$$

$$b) 7x^2 > 0$$

$$c) -2x^2 < 0$$

$$d) 6x^2 \geq 0$$

29. Calcula els valors de  $x$  perquè sigui possible obtenir les següents arrels:

$$a) \sqrt{2x^2+x-3}$$

$$b) \sqrt{x^2+2x+1}$$

$$c) \sqrt{-1+2x-x^2}$$

$$d) \sqrt{x^2+3x+5}$$

$$e) \sqrt{-x^2+12x+36}$$

$$f) \sqrt{x^2+6x-27}$$

$$g) \sqrt{1-4x^2}$$

30. Resol els següents sistemes pel mètode de Gauss i discuteix el resultat:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + t = 3 \\ x + z - t = 1 \\ y + z + t = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y + 5z = 13 \\ x + y - 4z = -6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 6 \\ 6x - 6y + 2z = 2 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - 2z = -2 \\ 8x - y - 4z = -4 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x - 2y + 3z + 4t = 6 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ x - y + 3z + 2t = 5 \\ 3x - y + 2z - 3t = 1 \end{cases}$$

## AUTOAVALUACIÓ

1. El valor numèric de l'expressió  $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$  en  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $z = -1$  és:
  - a) 17
  - b) 15
  - c) 13
  - d) 15
2. En dividir el polinomi  $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$  entre  $q(x) = x^2 + x + 1$  el polinomi residu resultant:
  - a) ha de ser de grau 2.
  - b) pot ser de grau 2.
  - c) ha de ser de grau menor que 2.
  - d) cap de les opcions precedents.
3. Tot polinomi amb coeficients enters de grau tres
  - a) té tres arrels reals.
  - b) té més de tres arrels reals
  - c) té tres arrels complexes
4. És possible que un polinomi, amb coeficients enters, de grau quatre tingui exactament tres arrels reals, ja siguin diferents o amb alguna múltiple?
5. Té com a solució  $x = 2$  la inequació següent:
  - a)  $x < 2$
  - b)  $x > 2$
  - c)  $x \leq 2$
  - d)  $x + 3 < 5$
6. L'equació  $x^2 \leq 4$  té de solucions:
  - a)  $x \in (-2, 2)$
  - b)  $x \in [-2, 2]$
  - c)  $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
  - d)  $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
7. La solució de la inequació  $|-x + 7| \leq 8$  és:
  - a)  $[-1, 1]$
  - b)  $(-\infty, -1]$
  - c)  $(-1, 1)$
  - d)  $[1, \infty)$
8. Les solucions possibles de  $\sqrt{5x-9}$  són:
  - a)  $x < 9/5$
  - b)  $x > 9/5$
  - c)  $x \leq 9/5$
  - d)  $x \geq 9/5$
9. La solució de la inequació  $\frac{2x-3}{x-2} < 1$  és:
  - a)  $(1, 2)$
  - b)  $(-\infty, 1)$
  - c)  $x < 1 \cup x > 2$
  - d)  $(-1, 2)$
10. Justifica la veracitat o falsedat de cadascuna de les següents frases:
  - a) La regla de Ruffini serveix per dividir dos polinomis qualssevol.
  - b) La regla de Ruffini permet dictaminar si un nombre és arrel o no d'un polinomi.
  - c) La regla de Ruffini solament és vàlida per a polinomis amb coeficients enters.
  - d) La regla de Ruffini és un algorisme que ens proporciona totes les arrels d'un polinomi.

## CAPÍTOL 3: SUCCESIONS

### ACTIVITATS PROPOSADES

#### 1. SUCCESIONS DE NOMBRES REALS

1. Escriu els deu primers termes de les següents successions:

- a) 7, 10, 13, 16, ...      b) 2, 5, 10, 17, ...      c) 1, 3, 5, 7, ...      d) 0, 3, 8, 15, 24, ...

2. Escriu el terme que ocupa el lloc 100 de cadascuna de les successions anteriors.

3. Sabem que un cos amb densitat suficient que cau lliurement sobre la Terra té una velocitat que augmenta 9'8 m/s. Si en el primer segon la seva velocitat és de 10 m/s, escriu en el teu quadern la velocitat en els segons indicats en la taula. Observes alguna regla que et permeti conèixer la velocitat al cap de 30 segons? Representa gràficament aquesta successió.

Temps en segons	1	2	3	30	$n$
Velocitat en m/s	10				

4. Escriu els quatre primers termes de les següents successions:

- a)  $a_n = 3n^2 + 3$       b)  $b_n = \frac{2n-1}{n+3}$       c)  $c_1 = 1, c_n = 2c_{n-1} + 4$       d)  $d_1 = 2, d_2 = 5, d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$

5. Escriu l'expressió del terme general de les següents successions:

- a)  $\{-2, 2, -2, 2, -2, 2, \dots\}$       b)  $\{0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$       c)  $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$       d)  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{10}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \dots\right\}$

6. En una successió el primer terme és 5 i els altres s'obtenen sumant 3 al terme anterior. Trobar els 10 primers termes de la successió.

7. Escriu el terme general de les successions:

- a) 6, 18, 54, 162, ...      b) 3, 2, 5/3, 6/4, 7/5, ...      c) 7, 0'7, 0'07, 0,007, ...      d) 2, 5, 8, 11, 15, ...

8. Un satèl·lit artificial es va posar en òrbita a les 10 hores i 30 minuts. Triga a fer un volta completa a la seva òrbita 90 minuts. A) Completa en el teu quadern la taula adjunta. B) Escriu una expressió general que et permeti conèixer l'hora en què ha completat la tornada  $n$ -èsima. C) Busca una expressió que et permeti conèixer l'hora en funció de l'hora de l'òrbita anterior. D) Busca una expressió que et permeti conèixer l'hora en funció de la primera. e) Quantes voltes completes haurà donat 30 dies més tard a les 9 hores?

Nº d'òrbites	1	2	3	4	5	6
Hora en la qual l'ha completat						

9. Escriu els 4 primers termes de les successions següents i indica si són progressions aritmètiques, progressions geomètriques o d'un altre tipus.

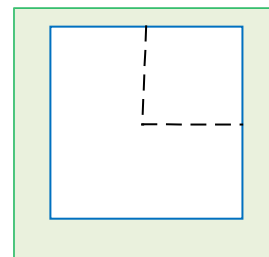
- a)  $a_n = 3 \cdot 3^n$       b)  $a_n = 5n + 7$       c)  $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$       d)  $a_n = \frac{(-1)^n + 2n}{3n}$

10. En les successions del problema anterior que siguin progressions aritmètiques, calcula la suma dels 6 primers termes.

11. En les quals siguin progressions geomètriques, calcula el producte dels 6 primers termes i la suma dels 6 primers termes.

12. Calcula la suma dels infinits termes de la successió: 6, 3, 3/2, 3/4, ...

13. Tenim un quadrat d'àrea 1 en la mà, i ho tallem per les línies de punts com indica la figura. El tros major ho deixem sobre la taula i ens quedem a la mà amb el quadrat, al que tornem a tallar de la mateixa forma. I així successivament. Quina àrea tenen els successius quadrats que tinc a la mà? Creix o disminueix? Escriu el terme general de la successió d'àrees que tenim a la mà. I les retallades que queden sobre la taula? Creix l'àrea sobre la taula o disminueix? Anem sumant àrees, calcula la suma d'aquestes àrees si haguéssim fet infinits talls.



14. **L'errada d'Euler:** Euler va ser un gran matemàtic, però es va trobar amb el següent problema. Potser tu siguis capaç d'ajudar-li a resoldre-ho. Va fer la següent suma, on  $r$  és un nombre positiu:

$$\dots + \frac{1}{r^n} + \dots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$$

Primer va sumar la primera part, aplicant la fórmula  $S = \frac{a_1}{1-r} : \dots + \frac{1}{r^n} + \dots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r-1}{r}} = \frac{1}{r-1}$

Després la segona:  $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r}$

I en sumar ambdues va obtenir:  $\frac{1}{r-1} + \frac{1}{1-r} = 0$ , que evidentment està malament, doncs la suma d'infinits nombres positius no pot ser 0. On està l'error?

15. Calcula la fracció generatriu del número  $4,5\widehat{6}1$ .

16. Un empresari acudeix a una entitat financera per informar-se sobre com invertir els 6000 € de beneficis que ha tingut en un mes. Li plantegen dues opcions: Mantenir aquest capital durant 5 anys al 3'5 % anual o rebre el 5 % del capital durant els dos primers anys i el 3 % els tres anys restants. Quina opció li interessa més?

## 2. LÍMIT D'UNA SUCCESIÓ

17. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \frac{n^2 + 2}{3n^2}$       b)  $a_n = \frac{2n + 2}{3(n + 1)}$       c)  $a_n = \frac{7}{5^n}$       d)  $a_n = 4 + \frac{n + 2}{n - 3}$ .

18. Calcula el límit de les successions següents, si és que ho tenen:

a)  $a_n = \frac{5n^3 + 2n}{n - 6}$       b)  $a_n = \frac{1 - 2n}{1 + 2n}$       c)  $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$       d)  $a_n = 6 + \frac{5n + 2}{2n - 3}$

19. Escribe una successió el límit de la qual sigui 2, i una altra de límit 0.

20. Calcula el límit de les successions següents, si és que ho tenen:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2 - 6}$       b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n}{1 + 2n + 7n^3}$       c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{7}{n}\right)$       d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 2}{n - 3} - 3\right)$

21. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \left(\frac{5n^3 + 2n}{5n^3 - 6}\right)^{2n}$       b)  $a_n = \left(\frac{3 + 2n}{5 + 2n}\right)^{3n+2}$       c)  $a_n = \left(1 + \frac{7}{n+3}\right)^{n^2}$       d)  $a_n = \left(\frac{2n + 2}{2n - 3}\right)^{\frac{n^3 + 1}{n}}$

22. Calcula  $1/e$  amb tres xifres decimals exactes.

23. Calcula  $\sqrt{e}$  amb tres xifres decimals exactes.

24. Calcula el logaritme neperià d' $1/e$  i de  $\sqrt{e}$ .

25. Resol l'equació  $\ln(x + 2) + \ln(3x) = 1$  on  $\ln$  denota el logaritme neperià.

26. Resol l'equació:  $8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2$ .

## EXERCICIS I PROBLEMES

### Successions

- Calcula el terme que ocupa el lloc 1000 d'una progressió aritmètica el primer terme de la qual és igual a 2 i la diferència és 3.
- El terme vuitè d'una progressió aritmètica és 5 i la diferència 1/2. Troba el primer terme i el terme 100.
- Calcula els costats d'un triangle rectangle sabent que les seves mesures, expressades en metres, estan en progressió aritmètica de diferència 2.
- Calcula la suma dels múltiples de 42 compresos entre 1000 i 2000.
- La suma de 16 nombres en progressió aritmètica és 548 i el terme 16 és 60'5. Troba el primer terme.
- El producte de 4 termes en progressió geomètrica és 5184 i el primer terme és 3. Escribe la resta de termes.

7. Pel lloguer d'una casa s'acorda pagar 700 euros al mes durant el primer any, i cada any s'augmentarà el lloguer en 30 euros mensuals. Quant es pagarà mensualment al cap de 10 anys?
8. El cinquè terme d'una progressió geomètrica és 48 i el primer és 3. Troba els cinc primers termes d'aquesta progressió.
9. Troba  $x$  perquè  $x - 1$ ,  $x + 1$ ,  $2(x + 1)$  estiguin en progressió geomètrica.
10. A una corda de 350 m de longitud se li fan dos talls, de manera que un dels trossos extrems té una longitud de 50 m. Sabent que les longituds dels trossos estan en progressió geomètrica, determina la longitud de cada tros.
11. Troba la fracció generatriu del nombre decimal  $0'12121212\dots$ , com la suma dels termes d'una progressió geomètrica il·limitada.
12. Es té una bota de vi que conté 512 litres. L'1 de desembre es va buidar la meitat del contingut; l'endemà es va tornar a buidar la meitat del que quedava, i així successivament tots els dies. Quina quantitat de vi es va treure el dia 15 de desembre?
13. Donat un quadrat d'1 m de costat, unim dos a dos els punts mitjans dels seus costats; obtenim un nou quadrat, en el qual tornem a efectuar la mateixa operació, i així successivament. Troba la suma de les infinites àrees així obtingudes.
14. *Triangle de Sierpinski*: Anem a construir un fractal. Es parteix d'un triangle equilàter. S'uneixen els punts mitjans dels costats i es formen quatre triangles. S'elimina el triangle central. En cadascun dels altres tres triangles es repeteix el procés. I així successivament. A la figura formada per iteració infinita la hi denomina *Triangle de Sierpinski*, i és un fractal. A) Imagina que el primer triangle té un àrea  $A$ . Quan apliquem la primera iteració, l'àrea és  $(3/4)A$ . I en la segona? Escriu la successió de les àrees. És creixent o decreixent? B) Imagina ara que la longitud de cada costat del triangle inicial és  $L$ . Escriu la successió de les longituds. És creixent o decreixent?



## Límit de successions

15. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \frac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6}$

b)  $a_n = \frac{5n^2 - 4}{n^2 - 6n}$

c)  $a_n = \frac{5n^{10} + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$

d)  $a_n = \frac{n - 3}{n + 7}$

16. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \frac{2n^2 + 2n}{2n^3 - 6}$

b)  $a_n = \frac{5n - 4}{n^2 - 6n}$

c)  $a_n = \frac{5n^7 + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$

d)  $a_n = \frac{-3}{n + 7}$

17. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \frac{2n^5 + 2n}{2n^3 - 6}$

b)  $a_n = \frac{5n^7 - 4}{n^2 - 6n}$

c)  $a_n = \frac{5n^{12} + 2n^2}{3n^{10} + 8n}$

d)  $a_n = \frac{n^2 - 3}{n + 7}$

18. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \frac{\sqrt{2n^5 + 2n}}{2n^3 - 6}$

b)  $a_n = \frac{5n^7 - 4}{\sqrt{n^2 - 6n}}$

c)  $a_n = \frac{\sqrt{n^{12} + 2n^2}}{3n^{10} + 8n}$

d)  $a_n = \frac{\sqrt{n^2 - 3}}{n + 7}$

19. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \left(1 + \frac{3}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1}$

b)  $a_n = \left(1 - \frac{4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2}$

c)  $a_n = \left(1 + \frac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

20. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \left(\frac{2n^3 + 2n}{2n^3 - 6}\right)^{2n+1}$

b)  $a_n = \left(\frac{5n^7 - 4}{5n^7 - 6n}\right)^{n-2}$

c)  $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$

21. Calcula el límit de les successions següents:

a)  $a_n = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 - 6}\right)^{2n-3}$

b)  $a_n = \left(\frac{n^2 - 4}{n^2 - 6n}\right)^{n-2}$

c)  $a_n = \left(\frac{n+2}{n-5}\right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$

## Exponencial i logarítmica

22. La població de peixos d'una piscifactoria segueix un model de creixement exponencial i ha passat de 100 exemplars a 1500 en 60 dies. Quina població tindrà en 100 dies?

23. Ingressem en un banc 20.000 euros al 3% d'interès compost anual. En quant temps haurem duplicat els nostres diners?
24. Vanesa ha comprat un cotxe per 17.000 euros. S'estima que el preu es devalua un 10% cada any. A quant el podrà vendre al cap de 5 anys? Si té un accident en què el cotxe queda destrossat quan té 7 anys, quant li pagarà la companyia d'assegurances?
25. L'escala de Richter relaciona la intensitat d'un terratrèmol,  $x$ , amb la seva energia  $y$  (en ergios):  $\log y = 11,4 + 1,5 x$ . Calcula l'energia d'un terratrèmol: a) d'una intensitat 5 en aquesta escala, i b) d'una intensitat 7.
26. Joan ha vist paneroles a la seva casa. Mira que tipus és i s'assabenta que es tripliquen cada mes seguint un model exponencial. Estima que en aquest moment podria tenir 20. Si no fes gens, quantes tindria al cap de 5 mesos?
27. En la fórmula del terme  $n$ -èssim d'una progressió geomètrica, aïlla  $n$ , aplicant logaritmes.
28. Neus té un gran flascó de perfum molt concentrat d'un litre. Saca amb una pipeta 10 cm<sup>3</sup> que substitueix amb aigua. Torna a treure de la mescla amb una pipeta 10 cm<sup>3</sup> que torna a substituir amb aigua. Així fins a aconseguir una mescla amb el 75 % de la inicial. Quantes operacions ha hagut de fer?
29. Resol, prenent logaritmes, l'equació exponencial:  $(0,99)^n = 0,75$ .
30. Utilitza la calculadora per estimar el valor de  $2^{63}$ . Estima també  $2^{64} - 1$ .
31. Resol les equacions:

a)  $3^{2x-4} = 81$

b)  $\sqrt{5^x} = \sqrt[3]{5}$

c)  $x - \sqrt[3]{8} = 2$

d)  $\frac{1}{3^5} x = 27$

## RESUM

Concepte	Definició	Exemples
<b>Successió</b>	Funció entre els nombres naturals, $\mathbb{N}$ , i els reals, $\mathbb{R}$ .	3, 1, 4, 1, 5, 9, 2...
<b>Progressió aritmètica</b>	Successió de nombres reals en la qual la diferència $d$ entre dos termes consecutius de la successió és constant.	2, 5, 8, 11, 14, 17, ...
	<b>Terme general:</b> $a_n = a_k + (n - k) d$ <b>Suma dels <math>n</math> primers termes:</b> $S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$a_n = 2 + 3n$ $S_8 = (8/2) \cdot (2 + (2 + 3 \cdot 8)) = 112$
<b>Progressió geomètrica</b>	És una successió de nombres reals en la qual el quocient entre cada terme i l'anterior és constant. És a dir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ .	3, 6, 12, 24, ... 1, 1/2, 1/4, 1/8...
	<b>Terme general:</b> $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ <b>Suma:</b> $S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1} = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ , per a $1 \neq r$ <b>Suma infinita:</b> $S = \frac{a_1}{1 - r}$ , per $0 <  r  < 1$ . <b>Producte:</b> $P_n = \pm \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = \pm a_1 \cdot r^{\frac{n-1}{2}}$	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow$ $S_8 = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1} = 765$ $P_9 = \sqrt{(3 \cdot 3 \cdot 2^8)^9} = (3 \cdot 2^4)^9$ $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$
<b>El nombre e</b>	$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$e$ és un nombre irracional, amb infinites xifres decimals no periòdiques: $e \approx 2,71828...$

### AUTOAVALUACIÓ

1. Quin és la raó de la següent progressió geomètrica:  $a_n = 7 \cdot 4^{n-1}$ ?  
 a) 7                                      b) 4                                      c) -1                                      d) No és una progressió geomètrica
2. En la successió de múltiples d'11, el 121 ocupa el lloc:  
 a) 1                                      b) 2                                      c) 11                                      d) 121
3. La suma dels deu primers termes de la progressió aritmètica: 5, 10, 15, 20,... és:  
 a) 220                                      b) 275                                      c) 55                                      d) 250
4. La successió 1, 1/5, 1/25, 1/125,...:  
 a) És una progressió geomètrica de raó 5                                      b) És una progressió aritmètica de diferència 5  
 c) És una progressió geomètrica de raó 1/5                                      d) És una progressió aritmètica de diferència 1/5.
5. La solució de l'equació  $5^{\frac{1}{5}x} = 625$  és:  
 a) 40                                      b) 8                                      c) 10                                      d) 20
6. La progressió aritmètica el primer terme de la qual és 3 i la seva diferència 5, té com a terme general:  
 a)  $a_n = 5n$                                       b)  $a_n = 5n + 2$                                       c)  $a_n = 5n - 1$                                       d)  $a_n = 5n - 2$
7. Pepa està preparant l'examen de selectivitat. Per no deixar tota la matèria per al final ha decidit estudiar cada dia el doble de pàgines que el dia anterior. Si el primer dia va estudiar dues pàgines, quantes haurà estudiat al cap de 5 dies?  
 a) 62                                      b) 32                                      c) 1024                                      d) 128
8. A Lluís li han tocat 6000 € en la loteria i decideix dipositar-los al banc a un tipus d'interès compost del 4 %. Quants diners tindrà al cap de 5 anys?  
 a) 6240 €                                      b) 6104 €                                      c) 7832,04 €                                      d) 7299,92 €
9. La successió  $a_n = \frac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$  té com a límit:  
 a) 0                                      b)  $\infty$                                       c)  $-3/2$                                       d) 7
10. La successió  $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$  té com a límit:  
 a)  $e^2$                                       b)  $\infty$                                       c)  $e^{-2}$                                       d)  $-e$

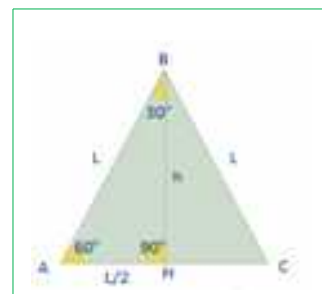


# CAPÍTOL 4: TRIGONOMETRIA

## ACTIVITATS PROPOSADES

### 1. RAONS TRIGONOMÈTRIQÜES

- Expressa en radiants les següents mesures:  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $330^\circ$ .
- Expressa en graus sexagesimals:  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  i  $\frac{10\pi}{6}$  radiants.
- Quant sumen (en radiants) els angles d'un triangle? Quant mesura un angle recte en radiants?
- Per veure la utilitat dels radiants, suposem un mòbil que es mou en una circumferència de dos metres de radi amb una velocitat de 4 m/s. Calcula la seva velocitat en rad/s i en graus per segon. Quantes voltes dóna per minut?
- Un mòbil ha recorregut 3 rad en una circumferència de radi 2 m. Quant espai ha recorregut? I si la circumferència tingués radi 0'5 m?
- Hem recorregut 40 graus d'una circumferència de radi 2 m. Quant espai hem recorregut? i si tingués radi 0'5 m? És més fàcil o més difícil que fer-ho amb radiants?
- En la figura es verifica el teorema de *Pitàgores*  $a^2 + b^2 = c^2$ . Utilitzant aquest teorema, demostra la primera relació fonamental.
- Utilitzant les definicions de les raons trigonomètriques, demostra la segona relació fonamental.
- Utilitzant la definició de les identitats, demostra:
  - $1 + \operatorname{tg}^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$
  - $1 + \cot^2(\alpha) = \operatorname{cosec}^2(\alpha)$
- Comprova les anteriors relacions a partir dels angles de  $30^\circ$  i  $60^\circ$ .
- Explica, a partir del vist en aquest apartat, perquè el sinus i el cosinus de  $45^\circ$  són iguals, i perquè la tangent val la unitat.
- Còpia en el teu quadern, i situa en el quadrant que correspongui i expressa en funció d'un angle agut les raons trigonomètriques dels següents angles:

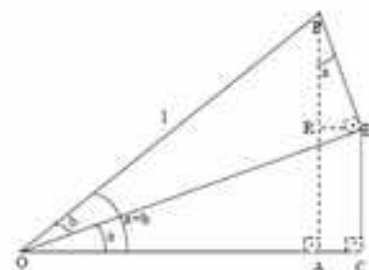


Angle	Sinus	Cosinus	Tangent	Cosecant	Secant	Cotangent
$135^\circ$						
$120^\circ$						
$210^\circ$						
$315^\circ$						
$390^\circ$						
$3000^\circ$						
$-150^\circ$						

- Utilitza la calculadora i l'après en aquest apartat per trobar tots els angles positius menors que  $360^\circ$  el sinus dels quals és de 0'6.
- Ídem tots els angles negatius menors en valor absolut que  $360^\circ$  el tangent val del qual 4.
- Ídem tots els angles compresos entre  $360^\circ$  i  $720^\circ$  el cosinus dels quals val 0'75.

### 2. CÀLCUL DE RAONS D'UNS ANGLES A PARTIR D'UNS ALTRES

- Calcula a partir de les raons trigonomètriques de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $90^\circ$  les raons trigonomètriques de  $75^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $105^\circ$  i  $135^\circ$
- Comprova que les raons trigonomètriques de  $90^\circ$  es poden obtenir a partir de les raons trigonomètriques de  $30^\circ$  i de  $60^\circ$ .
- Calcula a partir de les raons trigonomètriques de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $90^\circ$  les raons trigonomètriques de  $15^\circ$



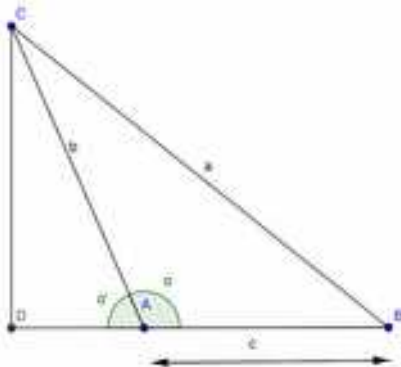
19. Comprova que les raons trigonomètriques de  $30^\circ$  es poden obtenir a partir de les raons trigonomètriques de  $90^\circ$ , i de  $60^\circ$ .
20. Demostra les fórmules d'angles complementaris usant les fórmules de la resta. És a dir, verifica que  $\text{sen}(90 - \alpha) = \text{sen}(\alpha)$  i les altres usant aquestes fórmules. Observa que aquesta demostració que acabes és més general que la que vam fer abans, perquè ara  $\alpha$  no té per què ser agut.
21. Calcula a partir de les raons trigonomètriques de  $22'5''$  i  $11'25''$  a partir de les raons trigonomètriques de  $45^\circ$ .
22. Comprova que les raons trigonomètriques de  $45^\circ$  es poden obtenir a partir de les raons trigonomètriques de  $90^\circ$ .
23. Calcula  $\cos(3a)$  en funció únicament de  $\cos(a)$ ,
24. Calcula  $\sin(4a)$  en funció únicament de  $\sin(a)$  i  $\cos(4a)$  en funció de  $\cos(a)$ .
25. Calcula sense fer ús de la calculadora: a)  $\sin(75) - \sin(15)$ ; b)  $\cos(15) - \sin(15)$
26. Utilitza les transformacions de sumes en productes per posar en funció del sinus i cosinus de l'angle a:  
a)  $\sin(45+a) + \sin(45 - a)$ ; b)  $\cos(120+a) + \cos(60 + a)$ ; c)  $\cos(270 - a) - \cos(90 - a)$
27. Simplifica les següents expressions fins a obtenir una única raó trigonomètrica:  
a)  $\frac{\text{sen}(5a) + \text{sen}(3a)}{\cos(5a) + \cos(3a)}$  b)  $\frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y)}$

### 3. EQUACIONS I SISTEMES TRIGONOMÈTRICS

28. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques  
a)  $\cos(3x) = 0$  b)  $\text{tg}(2x) = -1$  c)  $\sin(4x) = -1$
29. Expressa en radians les solucions de l'activitat resolta ( $\sin(2x) = 1/2$ ) i de l'activitat proposada anterior.
30. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques:  
a)  $\cos(5x) - \cos(x) = 0$  b)  $\sin(2x) - \sin(4x) = 0$
31. Calcula les solucions de les següents equacions trigonomètriques:  
a)  $\sin(x) + \cos(x) = 1$  b)  $\text{sen}(2x) = 2 \cdot \cos(x)$  c)  $\text{sen}^2(x) - \cos^2(x) - \cos(2x) = 1$
32. Resol els següents sistemes: a) 
$$\left. \begin{array}{l} x + \text{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array} \right\}$$
 b) 
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x) \cdot \cos(y) = \frac{3}{4} \\ \cos(x) \cdot \text{sen}(y) = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$$
33. Resol els següents sistemes: a) 
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x) - \text{sen}(y) = 0 \\ x - y = \pi \end{array} \right\}$$
 b) 
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$
34. Resol els següents sistemes: a) 
$$\left. \begin{array}{l} \cos(x - y) = 0 \\ \cos(x + y) = 0 \end{array} \right\}$$
 b) 
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x - y) = 1/2 \\ \cos(x - y) = 1/2 \end{array} \right\}$$

### 4. RESOLUCIÓ GENERAL DE TRIANGLES

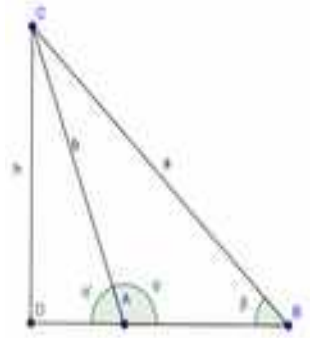
35. Què ocorre quan l'altura cau FORA del segment  $AB$ ? En altres paraules si tenim la figura que veus a la dreta. Demostra el teorema del cosinus en aquest cas [**Pista:** els únics canvis apareixen en aïllar  $AD$  que se suma en comptes de restar].



36. Demostra que el teorema del cosinus també val per a angles entre  $90$  i  $180$  graus. Per a això, procedeix com segueix:  
a) En la figura que tens a la teva esquerra considera l'angle  $\alpha'$ . Es compleix que  $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ . Per què?  
b) Considera el triangle rectangle  $DBC$  i posa  $a$  en funció de  $CD$  i  $DB$ .  
c) De la mateixa manera que abans, posa  $CD$  i  $DB$  en funció de  $b$ ,  $c$  i  $\alpha'$ .  
d) Substitueix en l'expressió per a  $a$  fins a arribar a una fórmula per a  $a$  en funció de  $b$ ,  $c$  i  $\alpha'$ . En substituir el  $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$  tens el resultat.
37. Dibuixa un triangle amb  $b = 5$ ,  $c = 8$  i l'angle entre ells  $\alpha = 40^\circ$  (usa una regla i un transportador). Calcula l'altre costat amb el teorema del cosinus i

comprova que coincideix amb el resultat mesurat. No et sortirà exactament per l'arrodoniment i l'error de mesurament però hauria de ser molt similar.

38. Un triangle té de costats 3, 5 i 7. Calcula els seus angles.
39. En un triangle  $ABC$ , els costats  $AB$  i  $AC$  mesuren 3 i 2 cm respectivament. L'angle  $\beta$  corresponent al vèrtex  $B$  mesura 30 graus.
- Utilitza el teorema del cosinus per calcular l'altre costat. Obtindràs dues solucions.
  - Les dues solucions es deuen al fet que hi ha dos triangles series capaç de dibuixar-los?
40. Què ocorre quan l'altura cau FORA del segment  $AB$ ? En altres paraules si tenim la figura que veus a la dreta. Demuestra el teorema del sinus en aquest cas [*Pista*: cal utilitzar  $\alpha'$  en comptes de  $\alpha$  i veure la relació entre el sinus de tots dos angles]
41. L'exercici anterior ja demostra que el teorema del sinus val per a triangles obtusangles per què? Demuestra el teorema per a un triangle rectangle usant que  $\sin 90 = 1$
42. Com abans, dibuixa un triangle amb  $b = 5$ ,  $c = 8$  i l'angle entre ells  $\alpha = 40^\circ$ . Calcula amb el teorema del sinus l'angle oposat al costat  $b$  i calcula, SENSE UTILITZAR EL TEOREMA DEL COSINUS l'altre angle i el costat que falta. Comprova que et surt el mateix que si haguessis utilitzat el teorema del cosinus per calcular  $a$ .
43. Un triangle té dos angles que valen 40 i 60 graus respectivament. El costat entre ells és de 8 cm. Calcula tots els seus angles i costats.
44. En un triangle  $ABC$ , els costats  $AB$  i  $AC$  mesuren 3 i 2 cm respectivament. L'angle  $\beta$  corresponent al vèrtex  $B$  mesura 30 graus.
- Utilitza el teorema del sinus per calcular l'altre angle. Hi ha dues solucions perquè hi ha dos angles amb el mateix sinus. Calcula els dos.
  - Les dues solucions es deuen al fet que hi ha dos triangles, series capaç de dibuixar-los?
45. Un globus està en la vertical entre dos observadors separats per 40 m. El primer ho veu amb un angle de 30 graus i el segon amb un angle de 50 graus, a quina altura està el globus?
46. En un viatge d'alumnes de 4<sup>o</sup> d'ESO a Londres, alguns dels viatgers van fer pràctiques de trigonometria. En conèixer que les torres de l'Abadia de Westminster tenen 30 metres d'altura, van decidir aprofitar els seus coneixements per calcular l'altura de la coneguda torre Big Ben. Des d'un punt intermedi entre tots dos edificis es veu el punt més alt de l'Abadia amb angle de  $60^\circ$ , i el Big Ben amb un angle de  $45^\circ$ . Si la distància entre les bases de les torres dels dos edificis és de 50 metres, quin va ser el resultat dels seus càlculs?, a quina distància es trobava de cada edifici?



## EXERCICIS I PROBLEMES

### Angles i raons trigonomètriques

- Sabent que  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ , troba les restants raons trigonomètriques de l'angle  $\alpha$ . [Hi ha dues solucions].
- Calcula sense fer ús de la calculadora les altres raons trigonomètriques
  - $\sin(\alpha) = 0,2$  (quadrant I);
  - $\cos(\alpha) = -0,3$  (quadrant II)
  - $\operatorname{tg}(\alpha) = 2$  (quadrant I)
- Sabent que  $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4}{5}$ , i que  $\alpha$  és un angle del tercer quadrant, troba el cosinus i la tangent d'aquest angle.
- Si  $\operatorname{tg} x = 1/3$ , i  $x$  és un angle del primer quadrant, calcula: a)  $\operatorname{tg}(180^\circ - x)$  b)  $\sin(180^\circ + x)$  c)  $\cos(360^\circ - x)$
- Sabent que  $\operatorname{sen} \alpha = 0.5$ , i que  $\alpha$  és un angle del SEGON quadrant, troba les altres cinc raons d'aquest angle.

### Identitats i equacions trigonomètriques

- Resol:
  - $3\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$
  - $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} \cos x$
- Demuestra les següents identitats:
  - $(\operatorname{tg} x)(\cos x) = \operatorname{sen}(x)$
  - $\cot g^2 x - 1 = \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x}$
  - $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
  - $1 + \cos(2x) = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$
  - $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot g^2 x$
  - $\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} \cdot \cos 2x = 1 + \operatorname{sen} 2x$

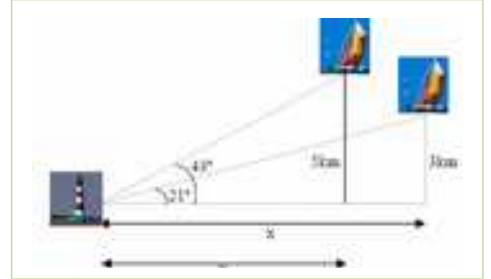
8. Demuestra que són certes les següents igualtats:
- a)  $\text{sen} a \cdot \text{sen}(a - b) + \cos a \cdot \cos(a - b) = \cos b$ ;      b)  $\text{tg} 2\alpha = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$
9. Resol les següents equacions trigonomètriques: a)  $\cos 2\alpha - 3\text{sen}\alpha + 1 = 0$       b)  $\text{sen}\alpha + \cos\alpha = 0$
10. Comprova si són certes o falses les següents igualtats: a)  $\frac{1 + \text{tg}^2 x}{1 + \cot^2 x} = \text{tg}^2 x$       b)  $\frac{\text{sen}(2x)}{1 + \cos(2x)} = \text{tg}(x)$
11. Demuestra que són certes les següents igualtats:  $\frac{2\text{sen}x}{\text{tg}2x} = \cos x - \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}$       b)  $\frac{1 - \text{sen}^4 x}{\cos^2 x} = 2 - \cos^2 x$
12. Comprova que són certes les següents igualtats: a)  $\frac{1 + \text{tg}^2(\alpha)}{1 + \cot^2(\alpha)} = \text{tg}^2(\alpha)$       b)  $\frac{\cos^2(\alpha)}{1 + \text{sen}(\alpha)} = 1 - \text{sen}(\alpha)$
- c)  $\text{sec}^2(x) + \text{cosec}^2(x) = \text{sec}^2(x) \cdot \text{cosec}^2(x)$
13. Resol les següents equacions trigonomètriques: a)  $\cos x \cdot \cos 2x + 2\cos^2 x = 0$       b)  $\text{tg}x - \text{sen}2x = 0$
14. Demuestra que són certes les igualtats: a)  $\cos(\alpha - \beta) - (\text{sen}\beta)(\text{tg}\alpha)(\cos\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sec\beta}$       b)  $\text{sen}(270 - \alpha) + \cos(\alpha) = 0$
15. Resol l'equació trigonomètrica  $\cos(2\alpha) + 1 = 4\cos\alpha$  (donant TOTES les solucions possibles).
16. Resol l'equació trigonomètrica  $\frac{\text{sen}(2x)}{\text{tg}x} + \cos^2 x = 1$  donant TOTES les solucions possibles.
17. Resol l'equació trigonomètrica  $\cos(2x) + \cos(x) = 0$  donant TOTES les solucions possibles.
18. Resol les següents equacions
- a)  $\text{sen}^2(x) - \sin(x) = 0$       b)  $\cos(x) + \text{sen}^2(x) = 1$ ;      c)  $3\text{tg}^2(x) = \text{sec}^2(x)$       d)  $\sin(2x) = 0$
19. Resol els següents sistemes: a)  $\left. \begin{array}{l} x + \text{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array} \right\}$       b)  $\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x) \cdot \cos(y) = \frac{3}{4} \\ \cos(x) \cdot \text{sen}(y) = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$       c)  $\left. \begin{array}{l} \cos(x) + \cos(y) = 1 \\ \cos(x + y) = 1 \end{array} \right\}$
20. Resol les següents equacions: a)  $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,      b)  $\text{sen}(3x) - \text{sen}(30^\circ) = 0$ ,      c)  $\text{sen}(2x) = 2 \cdot \cos(x)$
21. Simplifica les següents expressions: a)  $(\sin(x) + \cos(x))^2 + (\sin(x) - \cos(x))^2$       b)  $\frac{\text{sen}(2a) \cdot \cos(a)}{\text{sen}(a) \cdot (1 + \cos 2a)}$
- c)  $\frac{\text{sen}^3(x) + \text{sen}(x) \cdot \cos^2(x)}{\text{sen}(x)}$       d)  $\frac{\text{tg}(a)}{\text{tg}(2a) - \text{tg}(a)}$       e)  $\frac{\text{sen}(x - y) - \text{sen}(x + y)}{\cos(x + y) - \cos(x - y)}$

## Problemes de resolució de triangles

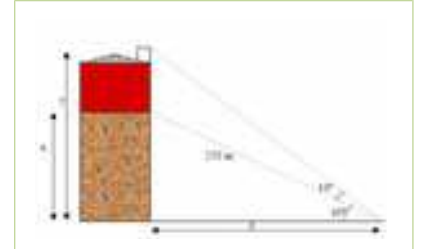
22. Una antena de ràdio està subjecta al terra amb dos cables, que formen amb l'antena angles de  $36^\circ$  i  $48^\circ$ . Els punts de subjecció dels cables estan alineats amb el peu de l'antena i disten entre sí 98 metres. Calcula l'altura de l'antena.
23. Calcula els costats i els angles del triangle  $ABC$ , rectangle en  $A$ , del que coneixem el catet  $AC = 15\text{cm}$ . i l'altura relativa a la hipotenusa  $AD = 12\text{cm}$ .
24. Calcular l'àrea d'un heptàgon regular inscrit en una circumferència de 35 cm de perímetre. Calcular el radi de la circumferència inscrita.
25. En un tram de carretera la inclinació és del 5 % (puja 5 m en 100 m). Calcular l'angle que forma amb l'horitzontal la carretera. Sabem que hem pujat 100 m, Quant hem caminat per la carretera?
26. Des d'un cert punt del sòl es veu un arbre sota un angle de  $42^\circ$  baix quin angle es veu col·locant-se al doble de distància?
27. En un triangle coneixem dos dels seus angles i un costat:  $A = 55^\circ$ ,  $B = 98^\circ$ ,  $a = 7,5\text{ cm}$ . Resoleu-lo.
28. En un triangle coneixem dos costats i l'angle comprès entre ells  $A = 35^\circ$ ,  $b = 20\text{ cm}$ ,  $c = 14\text{ cm}$ . Resoleu-lo.

29. Troba els angles d'un triangle del que es coneixen els tres costats:  $a = 37$  cm,  $b = 42$  cm,  $c = 68$  cm.
30. Dos vaixells parteixen d'un port amb rumbos diferents que formen un angle de  $127^\circ$ . El primer surt a les 10 h del matí amb una velocitat de 17 nusos, i el segon surt a les 11 h 30 min, amb una velocitat de 26 nusos. Si l'abast dels seus equips de ràdio és de 150 km. Podran posar-se en contacte a les 3 de la tarda? (nus=milla/hora; milla=1850 m).
31. Dos amics estan en una platja a 150 m de distància i en el mateix pla vertical que un estel que es troba volant entre tots dos. En un moment donat, un el veu amb un angle d'elevació de  $50^\circ$  i l'altre amb un angle de  $38^\circ$ . Quina distància hi ha des de cadascun d'ells a l'estel?
32. Un globus aerostàtic es troba subjecte al terra, mitjançant dos cables d'acer, en dos punts que disten 70 metres. El cable més curt mesura 90 metres i l'angle que forma l'altre cable amb el sòl és de  $42^\circ$ . Calcula:

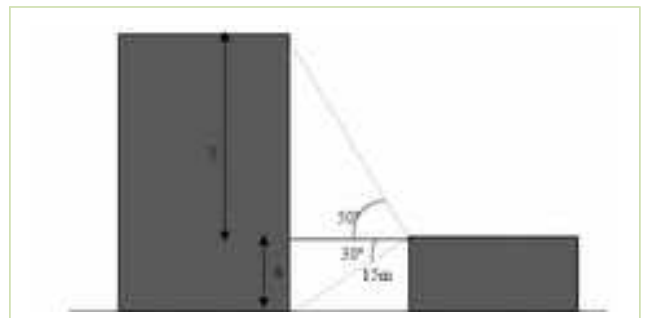
- a) La mesura de l'altre cable.  
b) La distància del globus al terra.



33. Des d'un far  $F$  es veu un vaixell  $A$  amb angle de  $43^\circ$  amb la costa, i el vaixell  $B$  amb  $21^\circ$ . El vaixell  $B$  està a 3km de la costa i el  $A$  a 5km. Calcula distància entre els vaixells.
34. Una finca té forma triangular. Dos dels seus costats mesuren 140 m i 200 m respectivament, i l'angle comprès entre tots dos és de  $35^\circ$ . Calcula el perímetre i la superfície de la finca.
35. Calcula l'àrea i el perímetre d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 3 cm.
36. Calcula l'altura de l'edifici:
37. Dues persones  $A$  i  $B$  disten entre sí 200m i veuen un globus que està situat entre ambdues. La primera persona ho veu amb un angle de  $30^\circ$  i la segona amb un angle de  $60^\circ$ .



- a) A quina distància està  $B$  del globus?  
b) A quina altura està el globus?  
c) Una persona que estigui situada dins del globus Amb quin angle veu  $a$  a  $B$ ?
38. Calcula l'altura de la torre gran a partir del següent dibuix.
39. Desitgem mesurar l'altura d'un edifici. Si ho observem des d'un punt  $A$  ho veiem amb un angle de  $50^\circ$ . Ara bé, si ho contemplem des de 20m més lluny l'angle és de  $40^\circ$ . Quina és l'altura de l'edifici? A quina distància està el punt  $B$  d'aquest edifici?
40. Calcula tots els angles d'un triangle de costats 4, 5 i 6. Hi ha més d'una solució? Si hi ha més d'una, calcula-les totes, si hi ha una sola, explica per què.
41. Justifica que hi ha EXACTAMENT DOS triangles amb costats  $a = 4$ ,  $b = 5$  i angle  $\alpha$  (l'oposat al costat  $a$ ) igual a  $45^\circ$ .
42. Resol els següents triangles:
- a)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $b = 50$ m,  $a = 40$ m;    b)  $\beta = 30^\circ$ ,  $a = 5$ cm,  $b = 3$ cm  
c)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  $b = 20$ m    d)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $b = 10$ m,  $c = 6$ m;    e)  $a = 5$ cm,  $b = 4$ cm,  $c = 4$ cm
43. Comencem en una ciutat  $A$  i observem un cartell. La ciutat  $B$  està a 50 Km i la ciutat  $C$  a 40 Km. Mesurem l'angle que formen les dues carreteres i resulta ser de  $60^\circ$ . A quina distància està  $B$  de  $C$ ? Des de la ciutat  $B$  Amb quin angle es veuen les altres dues ciutats? [En altres paraules: si considerem el triangle  $ABC$ , quant val l'angle  $\beta$  que correspon al vèrtex  $B$ ?]



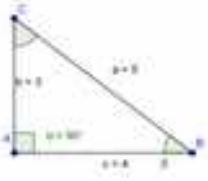
## AUTOAVALUACIÓ

1. Calcula les següents raons trigonomètriques sense fer ús de la calculadora.
  - a.  $\sin(-750^\circ)$
  - b.  $\operatorname{tg}(570^\circ)$
  - c.  $\cos(20\pi/3)$
2. A partir de les raons trigonomètriques de la suma calcula les següents raons trigonomètriques:
  - a.  $\sin(105^\circ)$
  - b.  $\cos(75^\circ)$
3. Sigui un triangle del que coneixem les següents dades  $a = 10$  cm,  $b = 20$  cm,  $\hat{A} = 30^\circ$ . Calcula les altres dades del triangle. Calcula l'àrea del triangle
4. On voltor vola a 120 m d'altura i formant un angle amb l'horitzontal respecte de nosaltres de  $60^\circ$ . En la mateixa direcció però formant un angle de  $30^\circ$  vola una perdiu a 100 m d'altura. Si el voltor vol menjar-se la perdiu, però només ho aconsegueix si la distància entre tots dos és menor de 150 m. Pot el voltor caçar a la perdiu? A quina distància estan?
5. Calcula sense utilitzar la calculadora la resta de raons trigonomètriques (sinus, cosinus) de  $\sim$ , sabent que  $\operatorname{tg}(\alpha) = 1/2$  i  $\alpha \in 3^{\text{er}}$  quadrant.
6. Resol les següents equacions:
  - a)  $6 \cdot \cos^2(x/2) + \cos(x) = 1$
  - b.  $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$
7. Resol els següents sistemes:
 

a) $\begin{cases} \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 1 \\ x + y = \pi \end{cases}$	b. $\begin{cases} \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$	c) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$
---	---	--
8. Demuestra les següents igualtats:
  - a)  $\cos(x+y+z) = \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) - \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(z) - \sin(x) \cdot \cos(y) \cdot \sin(z) - \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(z)$
  - b)  $\frac{\operatorname{sen}^2(2a)}{(1 - \cos^2 a) \cdot \cos(a)} = 4 \cdot \cos(a)$
9. Calcula el perímetre d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de 30 cm de radi. Calcula la seva àrea.
10. En els senyals de tràfic que indiquen el pendent de la carretera la informació que ens donen és el percentatge de pujada en funció de l'avanç del cotxe. Calcula l'angle per a un pendent del 15 %.



## RESUM

<b>Radiant</b>	<p>És un angle tal que qualsevol arc que se li associï mesura exactament el mateix que el radi utilitzat per traçar-ho. Es denota per <i>rad</i>.</p> <p>Nº de radiants d'un angle complet = <math>2\pi</math> rad</p>	$90^\circ$ són $\pi/2$ rad
<b>Raons trigonomètriques d'un angle agut</b>	$\sin \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$ $\cos \alpha = \frac{\text{catet contigu}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet contigu}} = \frac{b}{c}$	 <p><math>\sin(\beta) = \frac{3}{5}</math>, <math>\cos(\beta) = \frac{4}{5}</math></p>
<b>Relacions fonamentals</b>	$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2 =$ $= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
<b>Altres raons trigonomètriques</b>	$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \operatorname{cotan} \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$	$\operatorname{cosec} 90^\circ = 1$ $\sec 90^\circ$ No existeix $\operatorname{cotan} 45^\circ = 1$
<b>Fórmules de la suma</b>	$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\sin(75) = \sin(45)\cos(30) +$ $\cos(45)\sin(30) =$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$
<b>Angle doble</b>	$\begin{cases} \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\ \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \end{cases}$	$\cos(60) = \cos^2(30) - \sin^2(30)$ $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
<b>Angle meitat</b>	$\begin{cases} \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(a)}{2}} \\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(a)}{2}} \end{cases}$	$\sin(30) = \sqrt{\frac{1 - \cos(60)}{2}}$ $= \sqrt{(1 - 0.5)/2} = \sqrt{0.25} = 0.5$
<b>Teorema del cosinus</b>	<p>En un triangle <math>ABC</math> qualsevol:</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$	<p>Si <math>b = 5</math>, <math>c = 6</math> i l'angle entre ells és <math>30</math> graus, el costat <math>a</math> és</p> $a^2 = 5^2 + 6^2 - 60 \cos 30 = 3.01$
<b>Teorema del sinus</b>	<p>En un triangle <math>ABC</math> qualsevol:</p> $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$ <p>on <math>R</math> és el radi de la circumferència circumscrita.</p>	<p>Si <math>b = 5</math> i <math>a = 3.01</math> l'angle <math>\alpha</math> compleix <math>\frac{3.01}{\sin(\alpha)} = \frac{5}{\sin(30)}</math> i dóna <math>\alpha = 17'52^\circ</math></p>
<b>Resolució general de triangles</b>	<p>En general qualsevol triangle es pot resoldre si coneixem tres de les sis dades (hi ha tres costats i tres angles). S'apliquen els teoremes del sinus i del cosinus i que la suma dels seus angles són <math>180</math> graus.</p>	<p>Si les dades originals són <math>b=5</math>, <math>c = 6</math> i <math>\alpha = 30</math> el teorema del cosinus ens dóna <math>a = 3.01</math>, el teorema del sinus dóna <math>\alpha = 17'52^\circ</math> i la suma dóna <math>\beta = 132'48^\circ</math>.</p>

# CAPÍTOL 5: GEOMETRIA ANALÍTICA

## ACTIVITATS PROPOSADES

### 1. VECTORS

- Donats els punts  $P = (2, 2)$ ,  $Q = (1, 0)$  i  $R = (-2, 3)$  i els vectors  $\vec{v} = (1, -1)$ ,  $\vec{w} = (0, -2)$  calcula, indicant si el resultat és punt o vector:
  - $\overrightarrow{QP}$
  - $3\vec{v} - 2\vec{w}$
  - $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$
  - $P + \vec{v}$
  - $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$
- Daus tres punts genèrics,  $P = (p_1, p_2)$ ,  $Q = (q_1, q_2)$  i  $R = (r_1, r_2)$ , demostra:
  - $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$
  - $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$
  - $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$
  - $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$
- Calcula el producte escalar dels següents vectors.
  - $(1, 2) \cdot (-2, 3)$
  - $(1, 2) \cdot (0, 0)$
  - $(1, 2) \cdot (-2, 1)$
  - $(3, 2) \cdot (1, 3)$
  - $(-1, -2) \cdot (2, 0)$
  - $(5, -1) \cdot (3, -4)$
  - $(0, 1) \cdot (-2, 0)$
  - $(3, 4) \cdot (-4, 3)$
- Considera tres vectors genèrics  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  i  $\vec{w} = (w_1, w_2)$  així com un escalar genèric  $k$ . Demostra les propietats 1 a 3 del producte escalar.
- Calcula tots els costats i els angles dels següents triangles de dues maneres. Primer amb el mètode anterior i després pel qual s'indica:
  - $A = (1, 1)$ ,  $B = (1, 4)$ ,  $C = (2, 2)$ . Calcula els tres costats i després emprà trigonometria.
  - $A = (1, -1)$ ,  $B = (2, 4)$ ,  $C = (2, 2)$ . Calcula els costats  $a$  i  $c$  i l'angle  $\beta$  i després emprà trigonometria.
  - $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 3)$ ,  $C = (3, -2)$ . Calcula el costat  $a$  i els angles  $\beta$  i  $\gamma$  i després emprà trigonometria.
  - $A = (0, 1)$ ,  $B = (1, 4)$ ,  $C = (2, 3)$ . Calcula tres dades qualssevol (els que siguin, tres costats, dos angles i un costat...) i després emprà trigonometria.
- En el problema anterior, repeteix el càlcul d'angles canviant l'ordre en què es prenen els punts  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  i  $\overrightarrow{CB}$ . Com canvien els angles? Per què?
- Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs  $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 2)$  i  $C = (4, 5)$ . [Pista: Pots calcular tots els costats i angles. L'altura es calcula amb trigonometria].
- Calcula l'àrea del rectangle  $ABCD$  amb  $A = (1, 2)$ ,  $B = (2, 4)$ ,  $C = (5, 3)$  i  $D = (4, 1)$ .
- Calcula l'àrea del rombe  $ABCD$  amb  $A = (1, 1)$ ,  $B = (4, 0)$ ,  $C = (3, 3)$  i  $D = (0, 4)$ .
- Calcula un vector que formi 60 graus amb el vector  $(1, 0)$ . Per a això, procedeix com segueix. Suposa que el vector sigui de la forma  $(x, 1)$  i planteja l'equació  $\cos 60^\circ = \frac{(x, 1) \cdot (1, 0)}{\|(x, 1)\| \|(1, 0)\|}$ . Aïllant  $x$  obtindràs el vector. Series capaç de calcular un vector UNITARI (de mòdul 1) que formi un angle de  $60^\circ$  amb el vector  $(1, 0)$ ?
- Considera un hexàgon regular  $ABCDEF$  de centre l'origen. Si el punt  $B$  és el  $(1, 0)$ , quines són les coordenades dels punts  $A$  i  $C$ ? Calcula l'angle de l'hexàgon.
- $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 3)$  i  $C = (2, 8)$  són vèrtexs (consecutius) d'un paral·lelogram  $ABCD$ . Calcula el vèrtex  $D$  i l'angle  $ABC$ .
- Mateix problema que l'anterior amb  $A = (2, 4)$ ,  $B = (3, 5)$  i  $C = (4, -1)$ . Es pot resoldre el problema siguin quins siguin  $A$ ,  $B$  i  $C$ ?
- Siguin  $A = (2, 2)$  i  $B = (4, 6)$  dos vèrtexs d'un quadrat. Calcula els altres dos vèrtexs i l'àrea del quadrat. (Ajuda: Hi ha dues solucions, les dues amb la mateixa àrea).
- Són els següents parells de vectors una base ortogonal? Justifica la resposta.
  - $(1, 2)$  i  $(1, -2)$ ,
  - $(1, -2)$  i  $(2, 1)$
  - $(0, 1)$  i  $(100, 0)$
  - $(1, 0)$  i  $(0, 0)$
- Calcula un vector que formi amb  $(1, 4)$  una base ortogonal.
- Calcula un vector perpendicular a  $(1, 2)$  que tingui mòdul 3 [Pista: Calcula un vector perpendicular qualsevol. En dividir pel seu mòdul tindrà mòdul 1. Bastarà multiplicar per la constant 3].
- Formen els següents parells de vectors una base ortonormal? Justifica la resposta.



- a.  $(1, 0)$  i  $(0, 1)$ ,                      b.  $(1, -2)$  i  $(2, 1)$                       c.  $(0, 1)$  i  $(100, 0)$                       d.  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  i  $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$

19. Si  $A = (1, 1)$  i  $B = (2, 3)$  són dos vèrtexs d'un quadrat, calcula els altres dos vèrtexs i l'àrea del quadrat (*Atenció: hi ha dues solucions, les dues amb la mateixa àrea*).
20. Donat el vector  $\vec{v} = (1, -2)$  calcula una base ortonormal que contingui a un múltiple seu. Hi ha més d'una solució al problema anterior? En cas afirmatiu, calcula-les totes.

## 2. RECTES I PROBLEMES MÈTRICS

21. Donats els punts  $A = (1, 4)$  i  $B = (-3, 6)$  calcula el seu punt mitjà:
- Construint el vector que els uneix.
  - Amb la fórmula. Comprova que surt el mateix.
22. Considera els punts  $A = (a_1, a_2)$  i  $B = (b_1, b_2)$ . Demosta que amb les dues maneres de calcular el punt mitjà surt el mateix.
23. Calcula una recta perpendicular a  $r \equiv x + 2y = 5$  que passi per  $(2, 0)$ . Expressa-la almenys en tres formes i dibuixa-la.
24. Siguin les rectes  $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$  i  $s \equiv 2x + y = 2$ . Estudia la seva posició relativa i calcula els seus punts de tall si els hi hagués.
25. Considerem la recta  $r \equiv (1, 3) + \lambda(1, -2)$ .
- Calcula el seu pendent.
  - Pertany el punt  $(2, 2)$  a la recta? I el punt  $(0, -2)$ ?
  - Dóna almenys tres punts de la recta.
  - Dibuixa la recta.
26. Suposa que la distància d'un punt a una recta és 0. Què significa aquest resultat? Aplica-ho a la recta  $2x - y = 1$  i el punt  $(2, 3)$ .
27. Considera la recta  $x + 2y = 3$  i el punt  $A = (2, 3)$ . Calcula el punt  $Q$  de mínima distància i el simètric de  $A$  respecte de la recta.
28. Calcula la distància a l'origen de les rectes que s'indiquen.
- $2x + y = 3$
  - $(x, y) = (1, -2) + \lambda(1, 1)$
  - $y = \frac{x}{2}$
29. Calcula la distància del punt  $(1, 2)$  a les rectes que s'indiquen.
- $x + 3y = 4$
  - $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$
  - $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1}$
  - $y - 2 = 4(x + 1)$
30. Una recta passa pel punt  $(3, 1)$  i forma amb els semieixos positius un triangle d'àrea sis unitats. Calcula aquesta recta.
31. Calcula el punt de simètric de  $A = (1, 2)$  respecte a la recta  $y = 3$ .
32. Considerem un pentàgon irregular  $ABCDE$  format pels punts  
 $A = (-2, 3)$ ,  $B = (1, 4)$ ,  $C = (3, 3)$ ,  $D = (2, 2)$  i  $E = (-1, 1)$ .  
 Dibuixa-ho i calcula la seva àrea [Et recomanem dividir-ho en figures més simples].
33. Considerem un quadrat  $ABCD$ . El punt  $A$  és  $(1, 2)$  i els punts  $B$  i  $C$  estan sobre la recta  $y - x = 3$ . Calcula els quatre vèrtexs del quadrat i la seva àrea.
34. Determina les mediatrïus dels segments d'extremes  $A$  i  $B$ . Representa-ho gràficament.
- $A = (2, 7)$  i  $B = (6, 3)$
  - $A = (-3, 5)$  i  $B = (0, -3)$
  - $A = (-1, 0)$  i  $B = (7, -4)$
35. Determina les mediatrïus dels segments d'extremes  $A$  i  $B$ . Representa-ho gràficament.
- $A = (0, 7)$  i  $B = (0, 3)$
  - $A = (-3, 0)$  i  $B = (6, 0)$
  - $A = (-5, 0)$  i  $B = (0, -5)$

36. Determina les bisectrius de les rectes  $r$  i  $s$ . Representa-ho gràficament.  
 a.  $r: x + 2y - 5 = 0$  i  $s: 2x - y - 8 = 0$       b.  $r: 3x + 5y - 2 = 0$  i  $s: 4x - 6y - 1 = 0$
37. Determina les bisectrius de les rectes  $r$  i  $s$ . Representa-ho gràficament.  
 a.  $r: x = 0$  i  $s: y = 0$       b.  $r: x + y = 0$  i  $s: x - y = 0$
38. Donat el triangle de vèrtexs  $ABC$ , essent  $A = (0, 0)$ ,  $B = (6, 0)$  i  $C = (4, 4)$ , determina les equacions de:  
 a. Les seves mediatris i les coordenades del circumcentre  
 b. Les seves bisectrius i les coordenades de l' incentre  
 c. Les seves altures i les coordenades de l'ortocentre  
 d. Les seves mitjanes i les coordenades del baricentre

### 3. CÒNIQUES

39. Una el·lipse té focus en  $(1, 2)$  i en  $(5, 2)$  i passa pel punt  $(0, 2)$ . Calcula la seva equació i dibuixa-la. Què val la seva excentricitat?
40. Calcula tots els elements de les el·lipses següents i dibuixa-les.  
 a.  $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$       b.  $4x^2 + 9y^2 - 8x = 0$
41. Considera la hipèrbola  $x^2 - y^2 + 2y = 0$ . Calcula:  
 a. La seva equació reduïda.  
 b. El seu centre i focus.  
 c. Les seves asíptotes.
42. Calcula tots els elements de les hipèrboles següents i dibuixa-les.  
 a.  $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$       b.  $4x^2 - y^2 - 8x + 2y = 0$
43. Una hipèrbola horitzontal té centre en el  $(1, 2)$  i excentricitat 2. Sabent que passa pel punt  $(4, 2)$ , quina és la seva equació? [Pista: el paràmetre  $a$  el pots treure simplement del dibuix].
44. El vèrtex d'una paràbola vertical amb les branques cap amunt és el punt  $(2, -1)$ . Sabent que passa pel punt  $(1, 0)$  escriu l'equació de la paràbola, dibuixa-la i calcula el seu focus.
45. Identifica les figures i dibuixa-les calculant el seu o seus focus.  
 a.  $2y^2 + 3x = 0$       b.  $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
46. Identifica les figures i dibuixa-les. En el cas de la hipèrbola, calcula les seves asíptotes.  
 a.  $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$       b.  $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
47. Dibuixa amb *Geogebra* o qualsevol programa equivalent les següents còniques. En funció del dibuix, classifica-les en el·lipses, paràboles o hipèrboles.  
 a.  $x^2 + 3xy = 3$       c.  $x^2 + 2xy + y^2 - 3y = 0$       e.  $x^2 - 2xy - y^2 + 4 = 0$   
 b.  $2x^2 + 4xy + y^2 = 1$       d.  $3x^2 - 6xy + y^2 - 2x = 0$       f.  $4x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$
48. Dibuixa amb *Geogebra* o un programa equivalent les següents el·lipses i calcula els seus eixos major i menor. Series capaç de calcular la seva excentricitat? [Pista: fes-ho amb l'ordinador, tallant l'el·lipse amb la recta focal].  
 a. Una el·lipse amb focus en  $(1, 3)$  i en  $(3, 1)$ , que passa per l'origen.  
 b. Una el·lipse amb focus en  $(-1, 0)$  i en  $(-5, 2)$  que passa pel  $(1, 2)$ .
49. Dibuixa, amb *Geogebra* o un programa equivalent les següents hipèrboles i calcula els seus eixos major i menor.  
 a. Una hipèrbola amb focus en  $(1, 3)$  i en  $(3, 1)$  que passa pel  $(2, 0)$ .  
 b. Una hipèrbola amb focus en  $(-1, 0)$  i en  $(-5, 2)$  que passa pel  $(1, 2)$ .

50. Dibuixa, amb *Geogebra* o un programa equivalent les següents paràboles i calcula el seu eix de simetria i el seu vèrtex.
- Una paràbola amb focus en  $(1, 3)$  i recta directriu  $y = x$ .
  - Una paràbola amb focus en  $(-1, 1)$  i recta directriu  $3x+y = 4$ .
51. Calcula els focus i els paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$  de les següents hipèrboles equilàteres i dibuixa-les:
- $xy = 9/2$
  - $xy = 32$
  - $xy = 24$
  - $xy = 1$
52. Calcula l'equació de la hipèrbola equilàtera que té per focus  $(2, 2)$  i  $(-2, 2)$ , així com els seus paràmetres  $a$  i  $b$  i la seva excentricitat. Dibuixa-la.

## RESUM

		Exemples
<b>Vector</b>	Vector fix que va del punt A (origen) a B (extrem): $\vec{AB} = B - A$ Parell $\overrightarrow{(a, b)}$ que representa un desplaçament.	$P=(1,1), Q=(2,-1), \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(1,-2)}$
<b>Producte escalar</b>	Definició de producte escalar $\vec{v} \cdot \vec{w} =  \vec{v}   \vec{w}  \cos \alpha$ Expressió en coordenades respecte la base canònica: $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$	$\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{(1,-3)} = 1 \cdot 1 + 2(-3) = -5$
<b>Mòdul d'un vector</b>	Longitud del desplaçament que representa el vector: $ \vec{v}  = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	$\ \overrightarrow{(1,3)}\  = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
<b>Angle entre vectors</b>	$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\ \vec{v}\  \cdot \ \vec{w}\ }$	$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{(1,-3)}}{\ \overrightarrow{(1,2)}\  \cdot \ \overrightarrow{(1,-3)}\ } = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$
<b>Recta</b>	Són els punts que es poden aconseguir sumant-li a un punt un vector. Pot estar en forma vectorial, paramètrica, contínua, punt - pendent, implícita o explícita.	$(x, y) = (1, 1) + \lambda (2, -3);$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3}$ $x + 2y = 4; y = -\frac{x}{2} + 2$
<b>Distància d'un punt a una recta</b>	$d(P, r) = \left  \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right $	$r: 3x + 4y = 7; P(1, 2);$ $d(P, r) = \left  \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right  = \frac{5}{5} = 1$
<b>Lloc geomètric</b>	Punts del pla que verifiquen una equació	$x + y = 3, x^3 - 3y^2 = 1$
<b>Circumferència</b>	Lloc geomètric dels punts que equidisten d'un centre. La seva equació és $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$	Circumferència de radi 4 i centre (0, 2): $x^2 + (y - 2)^2 = 16$
<b>El·lipse</b>	Lloc geomètric dels punts que la seva suma de distàncies a dos punts fixos (anomenats focus) és constant. La seva equació canònica és $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$
<b>Hipèrbola</b>	Lloc geomètric dels punts la diferència dels quals de distàncies a dos punts fixos (anomenats focus) és constant. La seva equació és $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ . Si $a = b$ es diu <b>hipèrbola equilàtera</b> . En aquest cas la seva equació és $y = \frac{k}{x}$	$\frac{x^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ $xy = 10$
<b>Paràbola</b>	Lloc geomètric dels punts que equidisten d'un punt anomenat focus i una recta anomenada directriu. La seva equació és $y - y_0 = \alpha(x - x_0)^2$	$y = x^2 + 1$ (vertical) $x - 2 = (y - 1)^2$ (horitzontal)

## EXERCICIS I PROBLEMES

## Vectors

- Donats els punts  $P = (2, -2)$ ,  $Q = (1, 1)$  i  $R = (0, -2)$  i els vectors  $\vec{v} = \overrightarrow{(2, -1)}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{(1, 0)}$  calcula, indicant si són punts o vectors:
  - $\overrightarrow{PQ}$
  - $Q + \overrightarrow{PQ} - \vec{w}$
  - $2\vec{v} - \vec{w}$
  - $R + \vec{v}$
  - $\vec{v} - \overrightarrow{RQ}$
  - $\overrightarrow{QP} - 2\vec{w}$
- Donats els punts  $P = (2, 2)$ ,  $Q = (1, 0)$  i  $R = (-2, 3)$  i els vectors  $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{(0, -2)}$ , calcula, indicant si són punts o vectors:
  - $\overrightarrow{QP}$
  - $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$
  - $3\vec{v} - 2\vec{w}$
  - $P + \vec{v}$
  - $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$
  - $P + \overrightarrow{QP} - 2\vec{v}$
- Calcula el mòdul del vector que uneix  $P = (1, 3)$  i  $Q = (4, -3)$ , quina relació té amb la distància entre els punts?
- Divideix el segment format pels punts  $P = (1, 3)$  i  $Q = (4, -3)$  en tres parts iguals.
- Calcula una base ortogonal que contingui al vector  $(1, -4)$ .
- Calcula una base ortonormal que contingui a un vector paral·lel a  $\vec{v} = (-2, 3)$
- Calcula un vector perpendicular a  $\overrightarrow{(1, -2)}$  i que tingui mòdul 4.
- Tres punts d'un rombe  $ABCD$  són  $A = (2, 1)$ ,  $B = (4, 5)$  i  $C = (2, 9)$ . Calcula:
  - L'angle que correspon al vèrtex  $A$ .
  - El perímetre (suma de costats) del rombe.
  - El punt  $D$ .
- Calcula l'angle que formen les diagonals del rectangle  $ABCD$  essent  $A = (1, 2)$ ,  $B = (1, 8)$ ,  $C = (4, 8)$ . [El punt  $D$  pots calcular-ho].

## Rectes

- Calcula la recta que és paral·lela a  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$  i passa pel punt  $(0, 1)$ . Expressa-la en tres formes i dibuixa-la.
- Calcula la recta que és paral·lela a  $r \equiv 2x - 3y = 0$  i passa pel punt  $(1, 2)$ . Expressa-la en tres formes i dibuixa-la.
- Calcular una recta perpendicular a  $r \equiv y = 2x - 1$  i passa per  $(2, -1)$ . Expressa-la en tres formes i dibuixa-la.
- Siguin les rectes  $r \equiv (1, 1) + \lambda(-1, 2)$  i  $s \equiv x + y = 3$ . Estudia la seva posició relativa i calcula els seus punts de tall si els hi hagués.
- Siguin les rectes  $r \equiv (0, -2) + \lambda(1, 4)$  i  $s \equiv 4x - y - 2 = 0$ . Estudia la seva posició relativa i calcula els seus punts de tall si els hi hagués.
- Considerem la recta  $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3}$ .
  - Calcula el seu pendent.
  - Pertany el punt  $(0, 5)$  a la recta? I el  $(1, 3)$ ?
  - Dóna almenys tres punts de la recta.
  - Dibuixa la recta.
- Considerem la recta  $y - 2x = 1$

- a) Calcular el seu pendent i vector director.  
 b) Dona una recta perpendicular a ella que passi per  $(1, 2)$ . Expressa-la en almenys quatre formes.
17. Siguin els punts  $A = (1, 2)$  i  $B = (3, 0)$   
 a) Calcula el vector que els uneix.  
 b) Calcula la recta que passa per tots dos i expressa-la en tres formes diferents.  
 c) Pertany el punt  $(2, 1)$  a la recta?, i el  $(3, 1)$ ?
18. Sigui la recta  $r \equiv y = x - 2$ .  
 a) Calcula una recta perpendicular a ella i que passa per  $P(2, 1)$ .  
 b) Calcula una recta que passi per  $P(-1, 3)$  i sigui paral·lela a  $r$ .
19. Troba la posició relativa de les rectes  $x + y = 0$  i  $s \equiv (x, y) = (1, 2) + \lambda(1, 1)$  així com l'angle que formen.
20. Calcula la distància del punt  $(2, -1)$  a la recta  $y + x = 1$ .
21. Calcula la distància a l'origen de les següents rectes:  
 a.  $(x, y) = (1, 1) + \lambda(1, 2)$       b.  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3}$       c.  $y = 2x + 3$
22. Calcula la distància al punt  $(1, -2)$  de les següents rectes.  
 a.  $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$       b.  $2x + y = 3$
23. Sigui la recta  $s : x - 2y + 1 = 0$   
 a) Calcula una recta que sigui perpendicular a ella i passa per  $(1, 1)$ .  
 b) Calcula una recta que passi per  $(0, 1)$  i sigui paral·lela a  $s$ .
24. Troba la posició relativa de les rectes  $r : \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{-1}$  i  $s : (x, y) = (1, -2) + \lambda(1, 1) = 0$  així com l'angle que formen.
25. Tres punts d'un rectangle  $ABCD$  són  $A = (2, 1)$ ,  $B = (0, 7)$  i  $D = (5, 2)$ . Es demana:  
 a) Comprovar que l'angle  $B$  és de  $90^\circ$ .  
 b) Calcular les longituds dels costats  $AB$ ,  $BD$  i  $CD$  del rectangle.  
 c) Calcular el punt  $D$ .
26. Calcula la distància del punt  $(1, 4)$  a la recta  $y - x = 1$
27. Tres punts d'un triangle són  $A = (2, 1)$ ,  $B = (2, 8)$  i  $C = (4, -1)$ . Calcular els seus costats i angles.
28. Sigui la recta  $s : x + y = 4$ .  
 a) Calcula una recta perpendicular a ella i que passa per  $(1, 1)$ .  
 b) Calcula la distància d'aquesta recta al punt  $(2, 3)$ .
29. Troba la posició relativa de les rectes  $r : 3x + y = 5$  i  $s : (x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 3) = 0$  així com l'angle que formen.
30. Calcula la recta perpendicular a  $y = 2x - 4$  que passa pel punt mitjà de  $A = (1, 3)$  i  $B = (3, -1)$
31. En un paral·lelogram  $ABCD$  ve donat per  $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 3)$  i  $C = (3, -1)$ .  
 a) Calcula l'angle  $B$  (entre  $BA$  i  $BC$ ).  
 b) Calcula l'equació de la recta que passa per  $A$  i  $C$  (la diagonal del paral·lelogram).  
 c) Calcula el perímetre de la figura.  
 d) Calcula el punt  $D$ .
32. Ja saps que la mediatriu és el lloc geomètric dels punts que equidisten de dos punts donats. Escriu l'equació de la mediatriu del segment d'extremes  $A = (2, 5)$  i  $B = (4, -1)$ .
33. Recordem que el circumcentre d'un triangle és el punt de tall de les mediatris dels seus costats. Calcula el circumcentre del triangle  $A = (1, 2)$ ,  $B = (1, 6)$  i  $C = (3, 8)$  escrivint les equacions de les tres mediatris.

34. Recordem que el baricentre d'un triangle és el punt d'intersecció de les mitjanes (la mitjana és la recta que va des d'un vèrtex al punt mitjà del costat oposat). Sabent això, calcula el baricentre del triangle  $A = (-2, 2)$ ,  $B = (1, 4)$  i  $C = (1, 0)$ , escrivint les equacions de les tres mitjanes.
35. Ja saps que la bisectriu d'un angle és el lloc geomètric dels punts que equidisten dels costats de l'angle. ESCRIU l'equació de la bisectriu de l'angle format per les rectes  $y = 2x + 3$ , i  $3x + 5y = 1$ . Quantes hi ha? Com són?

## Còniques

36. Calcula la circumferència que passa pel punt  $A = (1, 1)$  i té per centre a  $C = (-1, 3)$
37. Identifica les figures i dibuixa-les
- a)  $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$       b)  $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$       c)  $y^2 - 2x = 0$       d)  $x^2 - 2x + y^2 = 0$
38. Calcula la circumferència que passa pels punts  $A = (1, 4)$ ,  $B = (3, 4)$  i  $C = (5, 5)$ .
39. Calcula l'equació d'una hipèrbola amb centre en  $(-1, 1)$  i semi-eixos 8 i 5. Dibuixa aquesta hipèrbola
40. Identifica les figures i dibuixa-les. Calcula el focus.
- a)  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$       c)  $y^2 - 2x = 1$       b)  $\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
- d)  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
41. Identifica les còniques i dibuixa-les.
- a)  $x^2 + 2y^2 - 4x = 0$       b)  $x^2 - y^2 + 2y = 0$
42. Calcula la circumferència que passa per  $A = (1, 4)$ ,  $B = (3, 6)$  i el centre de la qual és el seu punt mitjà.
43. Considera la hipèrbola equilàtera  $xy = 50$ . Calcula els seus focus, excentricitat i asíptotes i dibuixa-la.
44. Dibuixa amb *Geogebra* o qualsevol programa equivalent les següents còniques. En funció del dibuix, classifica-les en el·lipses, paràboles o hipèrboles.
- a)  $x^2 - 3xy = 2$       c)  $x^2 + xy + y^2 - y = 0$       e)  $2x^2 - 4xy + y^2 + 4 = 0$
- b)  $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$       d)  $3x^2 - 6xy + 4y^2 - 2x = 0$       f)  $4x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$
45. Una el·lipse té focus en  $(1, 1)$  i en  $(4, 1)$  i passa pel punt  $(0, 1)$ . Calcula la seva equació i dibuixa-la. Quant val la seva excentricitat?
46. Una el·lipse té per centre el punt  $(1, -1)$  i passa pels punts  $(5, -1)$  i  $(1, 1)$ . Sabent que la seva semi-eix major és 4:
- a. Dóna la seva equació i dibuixa l'el·lipse.
- b. Calcula els seus focus i excentricitat.
47. Una hipèrbola equilàtera amb centre l'origen passa pel punt  $(1, 3)$ . Calcula els seus focus i dibuixa-la.
48. Sabent que les asíptotes d'una hipèrbola són  $y = 2x$  i  $y = -2x$  i que passa pel punt  $(2, 0)$  calcular l'equació d'aquesta hipèrbola.
49. Una hipèrbola equilàtera té com a equació  $xy = 8$ . Calcula els seus focus.

## AUTOAVALUACIÓ

1. Comencem en el punt  $(1, 1)$  i ens movem primer amb el vector  $\vec{v} = (1, -3)$  i després amb el vector  $\vec{w} = (-4, 5)$ .
  - a. En quina posició estem al final?
  - b. Si volguéssim fer els dos passos en un, quin vector seguiríem?
2. Donats els punts  $P = (2, 2)$ ,  $Q = (1, 0)$  i el vector  $\vec{v} = (1, -1)$ , calcula, indicant si són punts o vectors:
  - a.  $\overrightarrow{QP}$
  - b.  $2\overrightarrow{PQ} + 3\vec{v}$
  - c.  $P + 2\vec{v}$
3. Realitza les següents operacions:
  - a.  $(1, 2) \cdot (1, -2)$
  - b.  $(2, -3) \cdot [(0, 2) - (1, -1)]$
4. Calcula la recta que és paral·lela a  $r \equiv 2x + y = 5$  i passa pel punt  $(2, -1)$ . Expressa-la almenys de quatre formes, calcula el seu pendent i dibuixa-la.
5. Calcula l'angle entre les rectes  $r \equiv x + 2y = 5$  i  $y = x + 3$
6. Siguin les rectes  $r \equiv (1, 2) + \lambda(-1, 2)$  i  $s \equiv y - 2 = -2(x + 1)$ . Estudia la seva posició relativa i calcula els seus punts de tall si els hi hagués.
7. Calcula la distància del punt  $(1, 3)$  a la recta  $(x, y) = (2, 2) + \lambda(1, -1)$  i interpreta el resultat
8. Considerem el triangle  $ABC$  rectangle en  $B$  i isòsceles. Si  $A = (2, 1)$  i  $B = (1, 4)$ , calcula:
  - a. El vèrtex  $C$  (hi ha dues solucions possibles).
  - b. Els altres dos angles del triangle.
  - c. L'àrea i el perímetre del triangle.
9. Tres punts d'un triangle són  $A = (1, 1)$ ,  $B = (3, 3)$  i  $C = (5, 2)$ . Calcula els seus costats i angles.
10. Calcula la circumferència que passa pels punts  $A = (4, 5)$ ,  $B = (-3, 4)$  i  $C = (6, 1)$ .
11. Calcular l'equació d'una el·lipse horitzontal amb centre en  $(-1, 3)$  i semi-eixos 2 i 4. Calcular els seus focus i dibuixa-la. Com canviaria la resposta si l'el·lipse fos vertical?
12. Dibuixa la hipèrbola  $4x^2 - 8y^2 = 2$  i les seves asímptotes. Calcula els seus focus i excentricitat.
13. Identifica les còniques i dibuixa-les
  - a.  $4x^2 + 3y^2 - 8x = 0$
  - b.  $\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 2$
  - c.  $x^2 + 2x + 1 - 3y = 0$
  - d.  $4x^2 - 8x + 4y^2 - 16y + 4 = 0$
14. Una paràbola vertical té el vèrtex en  $(1, 2)$  i les branques cap amunt. Si sabem que passa pel punt  $(0, 5)$  calcula la seva equació i el seu focus.



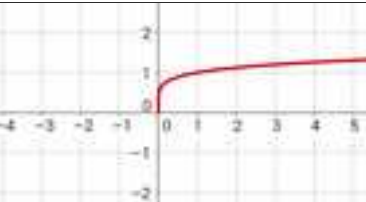
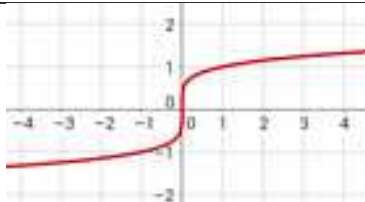


## CAPÍTOL 6: FUNCIONS

### ACTIVITATS PROPOSADES

#### TIPUS DE FUNCIONS. GRÀFIQUES

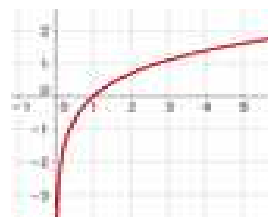
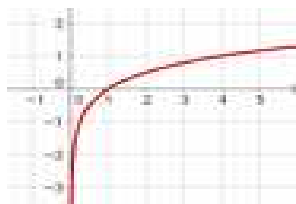
- Realitza una taula de valors i representa la funció identitat.
- Calcula les imatges dels nombres  $-3; -\frac{1}{2}; 0; 1; \sqrt{2}; \frac{3}{2}; 10$  per la funció  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$
- Còpia en el teu quadern les següents gràfiques de funcions i indica si l'índex és parell o imparell en les representacions de les següents funcions arrel  $y = \sqrt[n]{x}$  :

FUNCIO	ÍNDEX		FUNCIO	ÍNDEX	
	Parell	Imparell		Parell	Imparell
					
					

- Realitza en el teu quadern una taula de valors i la gràfica per a un cas similar, suposant que el nombre de bacteris es duplica cada hora.
- Torna a repetir una altra vegada l'exercici anterior suposant que el nombre de bacteris queda dividit per 2 cada hora.
- En el teu quadern, representa conjuntament les gràfiques de  $y = f(x) = x^2$ . (funció potencial) i  $f(x) = 2^x$ . (funció exponencial), amb valors de "x" entre 0 i 5. Observa la diferència quantitativa entre el creixement potencial i el creixement exponencial.
- Utilitzant la calculadora, fes en el teu quadern una taula de valors i representa les funcions  $f(x) = e^x$  i  $g(x) = e^{-x}$ .
- Una persona ha ingressat una quantitat de 5.000 euros a interès del 2% en un banc, de manera que cada any la seva capital es multiplica per 1'02.
  - Escriu en el teu quadern una taula de valors amb els diners que tindrà aquesta persona al cap d'1, 2, 3, 4, 5 i 10 anys.
  - Indica la fórmula de la funció que expressa el capital en funció del nombre d'anys.
  - Representa en el teu quadern gràficament aquesta funció. Pensa bé quines unitats hauràs d'utilitzar en els eixos.
- Un determinat antibiòtic fa que la quantitat de certs bacteris es multipliqui per 1/3 cada hora. Si la quantitat a les 9 del matí és de 10 milions de bacteris:
  - Fes una taula calculant el nombre de bacteris que hi ha cada hora, des de les 3 del matí a les 12 de migdia (observa que has de calcular també "cap a enrere").
  - Representa gràficament aquestes dades.
- Representa en el teu quadern, mitjançant taules de valors, les gràfiques de les següents funcions:
  - $f(x) = \log_3 x$
  - $f(x) = \log_{1/3} x$
  - $f(x) = \log_{1,5} x$

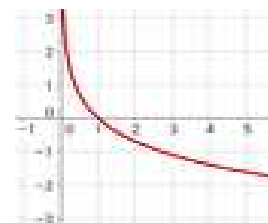
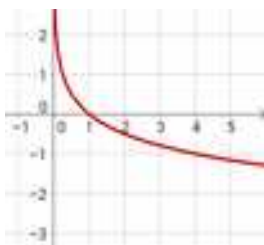
Comprova que en tots els casos passen pels punts  $(1, 0)$ ,  $(a, 1)$  i  $(1/a, -1)$ , on  $a$  és la base.

11. Identifica les fórmules de les següents funcions a partir de les seves gràfiques, sabent que són funcions logarítmiques:



a)

b)



c)

d)

12. Representa gràficament la funció valor absolut  $y=|x|$ .

13. Representa les següents funcions a trossos. S'indiquen els punts que has de calcular.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -4 \\ -x + 2 & \text{si } -4 \leq x < 0 \\ 5 & \text{si } 0 \leq x \end{cases} \quad \text{Punts: } -6; -4; -\frac{1}{2}; -0,2; 0; 1; \frac{3}{2}; 4$$

$$b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -3 \\ x & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \quad \text{Punts: } -5; -3; -\frac{1}{2}; -0,2; 0; 2; \frac{9}{4}; 4$$

14. Les dades de la taula indiquen en la primera fila, els preus, en euros, per sac de taronges, en la segona fila, les quantitats demandades de taronges per setmanes, i en la tercera fila, les quantitats ofertes:

Preu per sac (euros)	8	6	4	2
Quantitat demandada (milers de sacs per setmana)	50	100	200	400
Quantitat oferta (milers de sacs per setmana)	300	250	200	100

a) Dibuixa una gràfica amb les dades d'aquesta taula, representant en l'eix vertical els preus, i en l'eix horitzontal les quantitats demandades i ofertes. Uneix amb un traç continu ambdues corbes.

15. Les dades de la taula indiquen en la primera fila, els preus, en euros, del lloguer d'un pis de 70 m<sup>2</sup>, en la segona fila, la quantitat de persones que desitgen llogar un pis, i en la tercera fila, els pisos buits en una determinada ciutat:

Preu d'un pis (euros)	1500	1000	500
Quantitat demandada (persones que desitgen llogar)	10	100	500
Quantitat oferta (pisos lliures)	600	200	50

a) Dibuixa una gràfica de les corbes d'oferta i demanda.  
b) Determina de forma aproximada el punt d'equilibri

## 2. OPERACIONS AMB FUNCIONS

16. Realitza les operacions indicades amb les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

a)	$(p+q)(x)$	b)	$(q+r)(x)$
c)	$(q+r+s)(x)$	d)	$(s-q)(x)$
e)	$(q-r)(x)$	f)	$(r-p)(x)$
g)	$(f+p)(x)$	h)	$(j-f)(x)$
i)	$(g+k)(x)$	j)	$(m-a)(x)$
k)	$(b+d)(x)$	l)	$(r+m)(x)$
m)	$(p \cdot q)(x)$	n)	$(q \cdot r)(x)$
o)	$(q \cdot r : s)(x)$	p)	$(p : q)(x)$
q)	$(f \cdot p)(x)$	r)	$(j \cdot f)(x)$
s)	$(g : k)(x)$	t)	$(a \cdot b)(x)$
u)	$(p \circ q)(x)$	v)	$(a \circ b)(x)$
w)	$(r \circ s)(x)$	x)	$(f \circ p)(x)$
y)	$(j \circ f)(x)$	z)	$(g \circ k)(x)$

17. Calcula en el teu quadern les inverses que existeixin de les funcions de l'exercici anterior:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

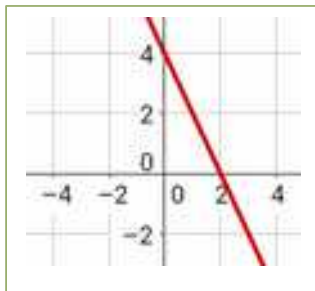
$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

	FUNCIÓ	INVERSA	FUNCIÓ	INVERSA
a)	$p(x)$		b)	$q(x)$
c)	$r(x)$		d)	$s(x)$
e)	$f(x)$		f)	$g(x)$
g)	$h(x)$		h)	$j(x)$
i)	$k(x)$		j)	$l(x)$
k)	$m(x)$		l)	$n(x)$
m)	$a(x)$		n)	$b(x)$
o)	$c(x)$		p)	$d(x)$

18. Calcula la funció inversa de:



19. Realitza el procés anterior per a la funció arc tangent:  $y = \arctg x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg}(y)$ ,  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

### 3. CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS I LES SEVES GRÀFIQUES

20. Calcula en el teu quadern el domini de les següents funcions:

	FUNCIÓ	DOMINI	FUNCIÓ	DOMINI
a)	$f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 3}$		b)	$j(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$
c)	$g(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}}$		d)	$k(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4}$
e)	$h(x) = \frac{x+1}{x-1}$		f)	$l(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$
g)	$i(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$		h)	$m(x) = \frac{x+1}{x-1}$

21. Calcula en el teu quadern el domini de cadascuna de les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} \quad ; \quad r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} \quad ; \quad s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x) = L(x+2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3 - 5)$$

	FUNCIÓ	DOMINI	FUNCIÓ	DOMINI
a)	$p(x)$		b)	$q(x)$
c)	$r(x)$		d)	$s(x)$
e)	$f(x)$		f)	$g(x)$
g)	$h(x)$		h)	$j(x)$
i)	$k(x)$		j)	$l(x)$
k)	$m(x)$		l)	$n(x)$
m)	$a(x)$		n)	$b(x)$
o)	$c(x)$		p)	$d(x)$

22. Calcula en el teu quadern els punts de tall amb els eixos de les funcions següents:

$$p(x) = -5x + 3 ; q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} ; r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} ; s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x} ; f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3}$$

$$g(x) = \frac{-3}{x} ; h(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1} ; j(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 4} ; k(x) = e^{x-4} ; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} ; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

$$n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}} ; a(x) = L(x + 2) ; b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) ; c(x) = L\left(\frac{x^2 + 1}{2x + 4}\right) ; d(x) = \log(x^3 - 5)$$

FUNCIÓ	PUNTS TALL EIXOS		FUNCIÓ	PUNTS TALL EIXOS	
	Ordenades	Abscisses		Ordenades	Abscisses
a) $p(x)$			b) $q(x)$		
c) $r(x)$			d) $s(x)$		
e) $f(x)$			f) $g(x)$		
g) $h(x)$			h) $j(x)$		
i) $k(x)$			j) $l(x)$		
k) $m(x)$			l) $n(x)$		
$a(x)$			$b(x)$		
$c(x)$			$d(x)$		

23. Estudia les simetries i els punts de tall amb els eixos de les següents funcions:

$$f(x) = 2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{-x-1} - 1$$

$$h(x) = x^3 + 4x$$

$$k(x) = e^{-2x} - 22$$

$$g(x) = -7x^4 - x^2 + 1$$

$$j(x) = \sqrt{15x - 3} \sqrt{-x - 9}$$

$$l(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

24. Calcula en el teu quadern el signe de les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 ; q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7} ; r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1} ; s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$$

$$f(x) = \frac{2x - 4}{x + 3} ; g(x) = \frac{-3}{x} ; h(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1} ; j(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x^2 - 4}$$

$$k(x) = e^{x-4} ; l(x) = 2^{\frac{1}{x}} ; m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} ; n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$a(x) = L(x + 2) ; b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right) ; c(x) = L\left(\frac{x^2 + 1}{2x + 4}\right) ; d(x) = \log(x^3 - 5)$$

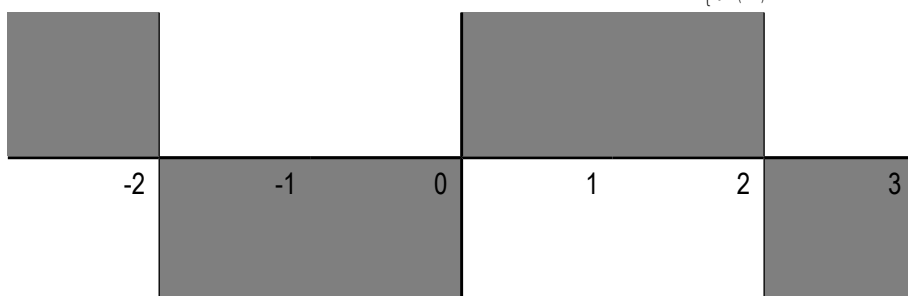
FUNCIÓ	SIGNE		FUNCIÓ	SIGNE	
	POSITIU	NEGATIU		POSITIU	NEGATIU
a) $p(x)$			b) $q(x)$		
c) $r(x)$			d) $s(x)$		

e)	$f(x)$		f)	$g(x)$		
g)	$h(x)$		h)	$j(x)$		
i)	$k(x)$		j)	$l(x)$		
k)	$m(x)$		l)	$n(x)$		
	$a(x)$			$b(x)$		
	$c(x)$			$d(x)$		

25. Interpreta gràficament els intervals de signe de l'exercici anterior, seguint l'exemple:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ceros: } 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{Polos: } x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-3) - \\ f(-1) + \\ f(1) - \\ f(3) + \end{cases}$$

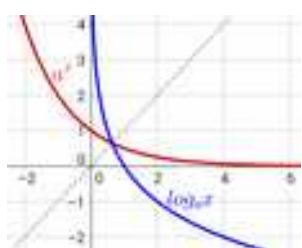
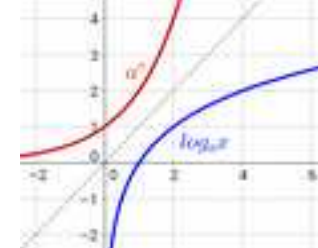
la gràfica de la funció ha d'anar per la zona no ombrejada:



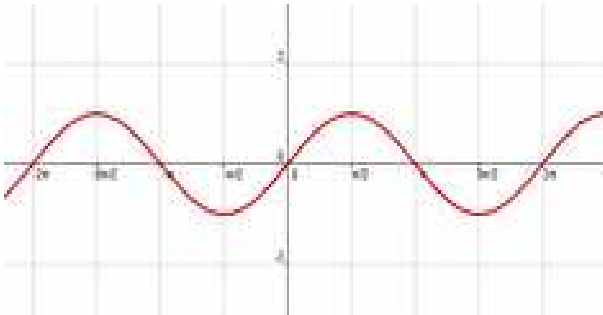
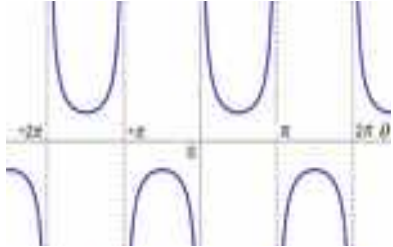
## RESUM

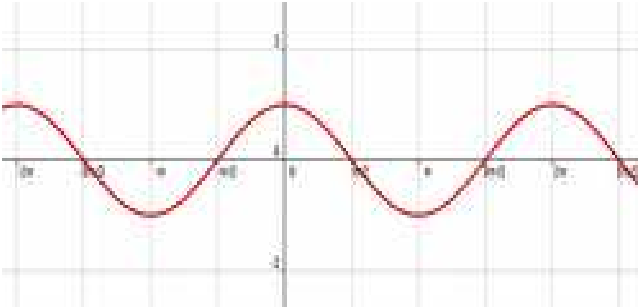
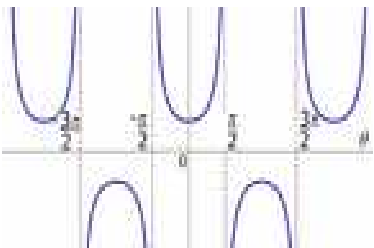
TIPUS DE FUNCIONS		FÓRMULA		
ALGEBRAIQUES	Polinòmiques	Polinomi		
	Racionals	Quocient de polinomis		
	Irracionals	Arrel d'una racional		
TRASCENDENTES	Exponencials	Exponencial (variable en l'exponent)		
	Logarítmiques	Logaritme (variable com a argument d'un logaritme)		
	Trigonomètriques	Trigonomètrica (variable com a argument d'una raó trigonomètrica)		
DEFINIDES A TROSSOS		Diverses fórmules depenent dels valors de la variable		
OPERACIÓ		EXEMPLE: $f(x) = \frac{2}{x}$ ; $g(x) = \frac{-3x}{x+1}$		
Funció summa $f + g$ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $(f + g)(x) = \frac{-3x^2 + 2x + 2}{x \cdot (x + 1)}$		Funció resta $f - g$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ $(f - g)(x) = \frac{3x^2 + 2x + 2}{x \cdot (x + 1)}$	Funció producte $f \cdot g$ : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $(f \cdot g)(x) = \frac{-6}{x + 1}$	Funció quocient $f/g$ : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , $g(x) \neq 0$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 2}{-3x^2}$
Funció composta		$f \circ g \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{-3x}{x+1}\right)$ <small>donde ponga x en f, ponemos <math>g(x) = \frac{-3x}{x+1}</math></small> $g \circ f \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right)$ <small>donde ponga x en g, ponemos <math>f(x) = \frac{2}{x}</math></small>		
Funció inversa $f^{-1}$ : $\begin{cases} f \circ f^{-1} = I \\ f^{-1} \circ f = I \end{cases}$ Si existeix, la inversa és única i la seva gràfica i la de la funció són simètriques respecte a la de la funció identitat.		<p>1º Anomenam y a <math>f(x)</math></p> <p>2º Canviam x per y en la funció.</p> <p>3º Aillem y</p> $g(x) = y = \frac{-3x}{x+1} \Rightarrow y \cdot (x+1) = -3x \Rightarrow$ $\Rightarrow yx + y = -3x \Rightarrow yx + 3x = -y \Rightarrow$ $\Rightarrow x(y+3) = -y \Rightarrow x = \frac{-y}{y+3}$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x}{x+3}$		

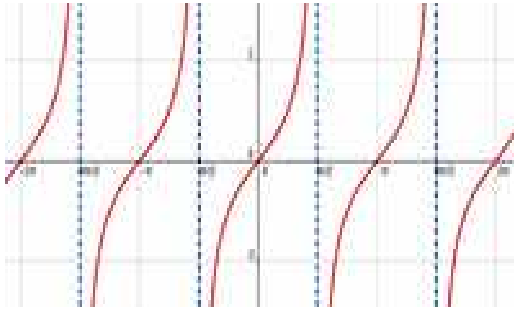
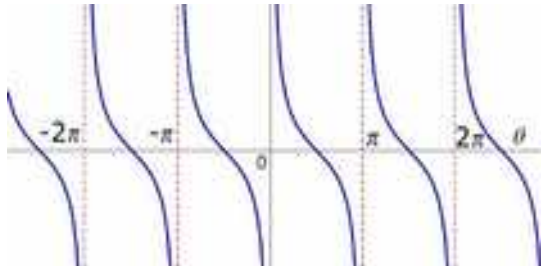
CARACTERÍSTIQUES DE LES FUNCIONS			
1) Domini	Conjunt de valors que <u>tenen</u> imatge.		
2) Punts de tall amb els eixos	Ordenades (OY)	$\exists f(0) \Rightarrow (0, f(0))$	Operació numèrica
	Abscisses (OX) -ZEROS-	$\nexists f(0) \Rightarrow$ No hay	
3) Simetria	Parell	$f(-x) = f(x)$	Operació algebraica
	Imparell	$f(-x) = -f(x)$	

FAMÍLIES DE FUNCIONS		Racional	Irracional		Exponencial	Logarítmica	Definida a trossos
Domini (D)		$\mathfrak{R} - \{\text{pols}\}$	Índex parell $\{x \in \mathfrak{R}; \text{radicant} \geq 0\}$	Índex imparell $\mathfrak{R} - \{\text{punts problemàtics radicant}\}$	$\mathfrak{R} - \{\text{punts problemàtics exponent}\}$	$\{x \in \mathfrak{R}; \text{argument} > 0\}$	-Valors de la variable -Punts problemàtics de cada fórmula $\mathfrak{R} - \{\text{valors que no pren la variable i punts problemàtics inclosos en el rang}\}$
Punts de tall amb els eixos	OY	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$	$(0, f(0))$ si $0 \in \text{Dom } f$ substituint en la fórmula el rang de la qual conté al 0
	OX	Numerador = 0	Radicant = 0	Radicant = 0	No hi ha	Argument = 1	-Cada fórmula = 0 -Solucions que pertanyen al seu rang
Signe		-Zeros i pols -Estudi del signe a la recta real	Positiu sempre excepte en els zeros	Signe del radicant	Positiu en tot el seu domini	$0 < a < 1$ : argument < 1: argument > 1: - $a > 1$ : argument < 1: - argument > 1: +	-Zeros, pols i punts on canvia la definició -Estudi del signe a la recta real
Simetria	PARELL	Tots els graus parells o imparells	Mai	Simetria del radicant	Argument parell	Argument parell	És tan infreqüent la simetria en aquest tipus de funcions que no mereix la pena estudiar-la
	SENAR	Tots els graus del numerador parells i del denominador imparells o viceversa			Mai	Mai	
CARACTERÍSTIQUES		$0 < a < 1$			$a > 1$		
		$a^x$	$\log_a x$	$a^x$	$\log_a x$		
Domini		$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathfrak{R}^+ = (0, \infty)$	$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathfrak{R}^+ = (0, \infty)$		
Recorregut		$\mathfrak{R}^+ = (0, \infty)$	$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathfrak{R}^+ = (0, \infty)$	$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$		
Punts de tall amb els eixos	Ordenades	(0, 1)		(0, 1)			
	Abscisses		(1, 0)		(1, 0)		
Signe	Positiu	$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$	(0, 1)	$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$	(1, $\infty$ )		
	Negatiu		(1, $\infty$ )		(0, 1)		
Simetria							
DIBUIX		 $0 < a < 1$			 $a > 1$		



CARACTERÍSTIQUES		sen x	cosec x = 1 / sen x
Domini		$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re - \{k\pi; k \in \Re\}$
Període fonamental		$[0, 2\pi]$	$[0, 2\pi]$
Recorregut		$[-1, 1]$	$\Re - [-1, 1] = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Punts de tall amb els eixos	Ordenades	(0, 0)	
	Abscisses	$(k\pi, 0), k \in \Re; \dots, (-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0), \dots$	
Signe	Positiu	$(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \Re; \dots \cup ]-2\pi, -\pi[ \cup ]0, \pi[ \cup \dots$	$(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \Re; \dots \cup ]-2\pi, -\pi[ \cup ]0, \pi[ \cup \dots$
	Negatiu	$((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \Re; \dots \cup ]-2\pi, -\pi[ \cup ]0, \pi[ \cup \dots$	$((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \Re; \dots \cup ]-\pi, 0[ \cup ]\pi, 2\pi[ \cup \dots$
Simetria		Imparell	Imparell
DIBUIX			

CARACTERÍSTIQUES		cos x	sec x = 1 / cos x
Domini		$\Re = (-\infty, \infty)$	$\Re - \{\pi/2 + k\pi; k \in \Re\}$
Període fonamental		$[-\pi, \pi]$	$[-\pi, \pi]$
Recorregut		$[-1, 1]$	$\Re - [-1, 1] = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Punts de tall amb els eixos	Ordenades	(0, 1)	(0, 1)
	Abscisses	$\dots, \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \dots$	
Signe	Positiu	$\dots \cup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right[ \cup \dots$	$\dots \cup \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right[ \cup \dots$
	Negatiu	$\dots \cup \left] \frac{-3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \cup \dots$	$\dots \cup \left] \frac{-3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \cup \dots$
Simetria		Parell	Parell
DIBUIX			

CARACTERÍSTIQUES		$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$	$\operatorname{cotg} x = 1 / \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$
Domini		$\mathfrak{R} - \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathfrak{R}\}$	$\mathfrak{R} - \{k\pi; k \in \mathfrak{R}\}$
Període fonamental		$]-\pi/2, \pi/2[$	$]-\pi/2, \pi/2[$
Recorregut		$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$	$\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$
Punts de tall amb els eixos	Ordenades	(0, 0)	
	Abscisses	$(k\pi, 0); k \in \mathfrak{R}; \dots, (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), \dots$	$(\pi/2 + k\pi, 0); k \in \mathfrak{R}; \dots, \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \dots$
Signe	Positiu	$\dots \cup ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \cup ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\pi, \frac{3\pi}{2}[ \cup \dots$	$\dots \cup ]-\pi, -\frac{\pi}{2}[ \cup ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\pi, \frac{3\pi}{2}[ \cup \dots$
	Negatiu	$\dots \cup ]\frac{-3\pi}{2}, -\pi[ \cup ]\frac{-\pi}{2}, 0[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \cup \dots$	$\dots \cup ]\frac{-3\pi}{2}, -\pi[ \cup ]\frac{-\pi}{2}, 0[ \cup ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \cup \dots$
Simetria		Imparell	Imparell
DIBUIX			

## EXERCICIS I PROBLEMES.

1. Fes un esbós de la gràfica de la funció  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  donada per  $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \leq -1, \\ x^3 - x & \text{si } x > -1. \end{cases}$

2. Realitza les operacions indicades amb les següents funcions:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

a)	$(s+q)(x)$	$(r+p)(x)$
b)	$(p-q)(x)$	$(p+q+r+s)(x)$
c)	$(q-r-s)(x)$	$(p-q+r-s)(x)$
d)	$(g+h)(x)$	$(s-g)(x)$
e)	$(n-k)(x)$	$(g+d)(x)$
f)	$(b-d)(x)$	$(c+s)(x)$
g)	$(s \cdot q \cdot r)(x)$	$(r \cdot p)(x)$
h)	$(q : p)(x)$	$(s : q)(x)$
i)	$(g \cdot h)(x)$	$(s : g)(x)$
j)	$(n \cdot k)(x)$	$(g : d)(x)$
k)	$(s \circ q)(x)$	$(r \circ p)(x)$
l)	$(q \circ p)(x)$	$(g \circ h)(x)$
m)	$(s \circ g)(x)$	$(n \circ k)(x)$

3. Considera la funció  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  definida per  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Determina els següents elements: el seu domini, punts de tall amb els eixos, signe i simetries.

4. Dibuixa el recinte limitat pels semieixos positius de coordenades i les corbes  $y = x^2 + 1$ ,  $y = \frac{2}{x}$  i  $y = x - 1$ .

5. Considerem les següents funcions:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad h(x) = 2^{-x+1} \quad k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1} \cdot 12^{-x+1} \quad m(x) = \sqrt[4]{-5+2x}$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \quad j(x) = L(x^5 - 1) \quad l(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} \quad n(x) = (4x^2 - 4x + 1)^{-\frac{1}{3}}$$

a) Calcula les següents composicions:

$$f \circ h \quad ; \quad g \circ h \quad ; \quad g \circ j \quad ; \quad k \circ h \quad ; \quad g \circ h \circ j \quad ; \quad m \circ j \quad ; \quad l \circ h \quad ; \quad m \circ h \quad ; \quad j \circ h \quad ; \quad l \circ m$$

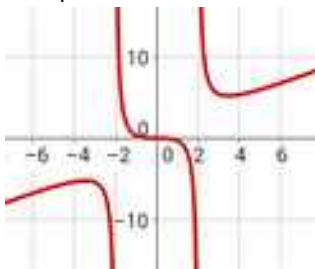
b) Calcula  $f^{-1}(x)$ ,  $h^{-1}(x)$ ,  $k^{-1}(x)$ ,  $j^{-1}(x)$ ,  $n^{-1}(x)$  i verificar que són les inverses de  $f(x)$ ,  $h(x)$ ,  $k(x)$ ,  $j(x)$  y  $n(x)$ . Per què  $g^{-1}(x)$  y  $m^{-1}(x)$  no són inverses?

c) Calcula tots els dominis.

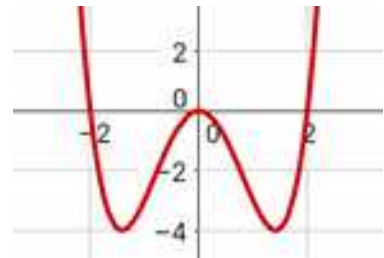
d) Calcula els punts de tall amb els eixos de totes les funcions.

6. Un objecte es llança verticalment cap amunt des d'un determinat punt. L'altura en metres aconseguida al cap de  $t$  segons, ve donada per  $h(t) = 5 + 4t - t^2$ . Calcula l'altura des de la qual es llança l'objecte i a la qual es troba després d'1 segon. Determina en quin instant aconseguirà l'altura màxima i quin és. Finalment, calcula l'instant en què caurà al terra i representa gràficament la situació amb les dades obtingudes anteriorment.
7. Considera les funcions  $f, g: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 \times \text{sen}(x)$  i  $g(x) = \text{sen}(2x)$ . Dibuixa la regió del pla limitada per les gràfiques de  $f$  i de  $g$ .
8. Sigui la funció donada per  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Determina  $a$ ,  $b$  i  $c$  sabent que és imparell i que passa pel punt  $(1, -2)$ .
9. Sigui les funcions definides mitjançant  $f(x) = |x(x-2)|$  i  $g(x) = x + 4$ . Fes un esbós de les gràfiques de  $f$  i  $g$  sobre els mateixos eixos i calcula els punts de tall entre ambdues.
10. La despesa pel consum de llum (en cèntims d'euro) d'un habitatge, en funció del temps transcorregut (en hores), ens ve donada per l'expressió  $f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 10$   $0 \leq t \leq 12$ .
- a) Representa gràficament la funció. b) Quin és el consum a les 6 hores? I després de 12 hores?
11. Considera la funció definida per  $f(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$ . Calcula el seu domini.
12. Dibuixa el recinte limitat per les corbes  $y = e^{x^2}$ ,  $y = e^{-x}$  i  $x = 0$ .
13. Els guanys d'una empresa, en milions d'euros, s'ajusten a la funció  $f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5}$ , on  $x$  representa els anys de vida de l'empresa, quan  $x \geq 0$ . Calcula el domini, tall amb els eixos, signe i simetries d'aquesta funció.
14. Considera la funció definida per  $g(x) = |\ln(x)|$  (on  $\ln$  denota el logaritme neperià). Esbossa el recinte limitat per la gràfica de  $g$  i la recta  $y = 1$ . Calcula els punts de tall entre elles.
15. Calcula el domini de les següents funcions:  $f(x) = \frac{\text{Lx}}{x^2}$  ( $\text{Lx}$  indica logaritme neperià de  $x$ );  $g(x) = (1 - x^3) \cos x$  i  $h(x) = 4x^3 - 5x + \frac{1}{e^x}$ .
16. Sigui la funció  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ . Dibuixa la seva gràfica i, a la vista d'ella, indica el seu domini, els seus punts de tall amb els eixos i el seu signe.
17. Estudia el domini, punts de tall amb els eixos i signe de les següents funcions:

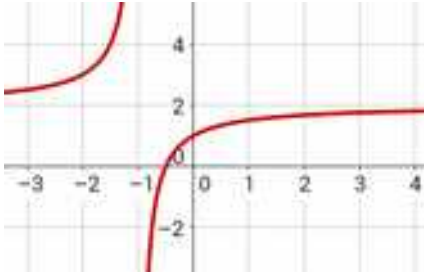
a)



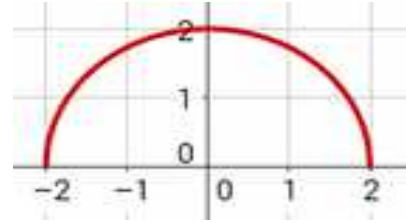
c)



b)



d)



18. L'estudi de la rendibilitat d'una empresa revela que una inversió de  $x$  milions d'euros produeix un guany de  $f(x)$  milions

de €, sent:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$ . Raona quin és el rang de valors de la variable, els punts

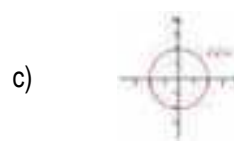
problemàtics de cadascuna de les fórmules i, finalment, el domini de la funció.

19. Un objecte es llança verticalment cap amunt de manera que l'altura " $h$ " (en metres) a la qual es troba en cada instant " $t$ " (en segons) ve donada per l'expressió  $h(t) = -5t^2 + 40t$ .

- En quin instant aconseguix l'altura màxima? Quin és aquesta altura?
- Representau gràficament la funció  $h(t)$ .
- En quin moment de la seva caiguda es troba l'objecte a 60 metres d'altura?
- En quin instant arriba al terra?

## AUTOAVALUACIÓ

1. Assenyala quin de les següents gràfiques no correspon a una funció:



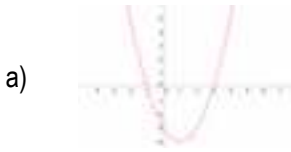
2. La fórmula de la composició  $f \circ g$  de les funcions  $f(x) = 2x - 1$  i  $g(x) = -x^2 + 2$  és:

- a)  $-2x^2 + 3$       b)  $2x^2 - 3$       c)  $-4x^2 + 4x + 1$       d)  $4x^2 - 4x - 1$

3. La fórmula de la funció inversa o recíproca de  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$  és

- a)  $\frac{x+2}{x-1}$       b)  $\frac{-x+1}{x+2}$       c)  $\frac{2x+1}{x-1}$       d)  $\frac{-2x-1}{x-1}$

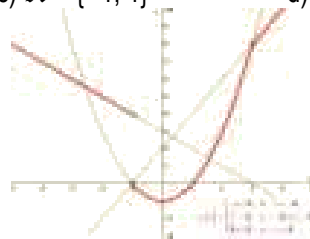
4. La gràfica de la funció  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  és:



5. El domini de la funció  $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$  és:

- a)  $\mathbb{R}$       b)  $\mathbb{R} - \{1\}$       c)  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$       d)  $\mathbb{R} - \{0\}$

6. El recorregut de la funció



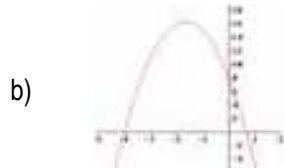
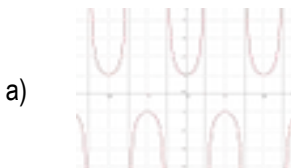
és:

- a)  $[-1, \infty[$       b)  $] -1, \infty[$       c)  $] -\infty, -1[$       d)  $\mathbb{R} - \{4\}$

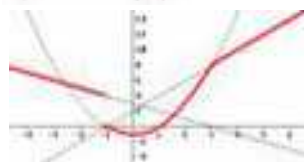
7. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses de la funció  $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 3)$  són:

- a) No té      b)  $(1, 0); (2, 0)$       c)  $(-1, 0); (2, 0)$       d)  $(0, \ln 3)$

8. L'única funció imparell entre les següents és:



9. L'interval on la funció



és negativa és:

- a)  $] -1, 1[$       b)  $] -\infty, -1[$       c)  $] -\infty, 1[$       d)  $] -\infty, 0[$

10. L'única funció NO periòdica de les següents és:

- a)  $f(x) = \sin(x)$       b)  $g(x) = \tan(x)$       c)  $h(x) = e^x$       d)  $j(x) = \operatorname{cosec}(x)$

# CAPÍTOL 7: LÍMITS I CONTINUÏTAT

## ACTIVITATS PROPOSADES

### 1. CONCEPTE DE LÍMIT

- Utilitza la definició de límit per provar que  $\lim_{x \rightarrow +1} x = 1$ .
- Calcula els límits laterals i determina si existeix el límit en les funcions següents definides a trossos, en els punts en els quals s'uneixen dues branques:

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x+5}{5x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2 + 4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Escriu la definició de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .
- Utilitza la definició de límit infinit per provar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

- Utilitza la definició de límit infinit per provar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ .

- Classifica els següents límits en finits o infinits, i calcula'ls:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} x^2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$$

- Calcula els següents límits, indicant el signe:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$$

- Calcula els següents límits, indicant el signe:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x-1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x-1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5}{x-3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5}{x-3}$$

### 2. ASÍMPTOTES

- Determina i dibuixa les asímptotes verticals de les funcions següents:

$$a) f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2)}$$

$$b) f(x) = \frac{x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$c) f(x) = \frac{(x+4)^2}{(x-1) \cdot (x+4)}$$

$$d) f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$$

- Determina totes les asímptotes de cadascuna de les funcions següents. Representa la posició relativa de la corba respecte d'elles.

$$a) f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-3)}$$

$$b) f(x) = \frac{3x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$c) f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1) \cdot (x-4)}$$

$$d) f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$$

- Determina totes les asímptotes de cadascuna de les funcions següents. Representa la posició relativa de la corba respecte d'elles.

$$a) f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1)}$$

$$b) f(x) = \frac{3x^2 \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 + 4}{2(x-1)}$$

$$d) f(x) = \frac{(2x^2 + 4)}{(x+1)}$$

- Analitza el comportament a l'infinit de cadascuna de les funcions següents:

$$a) f(x) = (x+4)^2$$

$$b) f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$$

$$c) f(x) = x^3 + 4$$

$$d) f(x) = \frac{2x^5 + 4}{x+1}$$

### 3. CÀLCUL DE LÍMITS

13. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$

14. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

15. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$

16. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x - 2}{x + 2} - \frac{x}{x^2 - 4} \right)$

17. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \right)$

18. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 1} \right)$

19. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sqrt{6 + x} - 3}{x^2 - 9} \right)$

20. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{3 + x} - 2}{x - 1} \right)$

21. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{3}}{x} \right)$

22. Calcula el límit:  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2 - \sqrt{2 + x}}{x - 2} \right)$

23. Escriu, sense fer càlculs, el valor dels límits següents:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{5x^2 + 2x - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 + 3}{5x^2 + 2x - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3}{5x^7 + 2x - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}{2x^3 + x^2 - x}$

24. Calcula els límits següents:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x^2 - 1} - \frac{x + 1}{x} \right)$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2 + 2}{x - 1} - 3x \right)$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 3} \right)$

25. Calcula els límits següents:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{sen} x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^5 - 7x}{x^5 + 100x^2} \right)$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))$

26. Determina els límits següents:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x + 1}{x - 2} \right)^{2x^2 - 1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2 + x}{3x^2 - 2} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{x}}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 - 1}{x^3 + 5} \right)^{3x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x + 3}{5x + 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{5x}}$



27. Determina els límits següents (observa que *no* són tipus e):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+3}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3-1}{4x^3+5} \right)^{3x^2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$$

#### 4. CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

28. Estudia la continuïtat de les funcions següents:


$$\text{a) } f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt{x-5} \quad \text{c) } f(x) = \log_2(x-3) \quad \text{d) } f(x) = \begin{cases} 2+x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1+e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

29. Determina el valor de k perquè la funció  $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ k+x & \text{si } x > 1 \end{cases}$  sigui contínua en tota la recta real.

30. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < -1 \\ 2+x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = x - \sqrt{x-2} \quad \text{c) } f(x) = |x-3| - 1$$

### RESUM

<b>Definició de límit</b>	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Per tot $\varepsilon > 0$ , existeix un $\delta > 0$ tal que, sempre que $ x - a  < \delta$ , es compleix $ f(x) - L  < \varepsilon$ .	
<b>Límit lateral a la dreta</b>	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ quan $x$ tendeix a $a$ , sempre que es compleixi la condició $x > a$	La funció $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ té de límit lateral a l'esquerra 8, i de límit lateral a la dreta també 8, doncs $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim_{x \rightarrow 2} 3x+2 = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$
<b>Límit lateral a l'esquerra</b>	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ quan $x$ tendeix a $a$ , sempre que es compleixi la condició $x < a$	
<b>Existència de límit</b>	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$	La funció $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ té límit en $x = 2$
<b>Asímtotes</b>	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = K$ hi ha una asímtota horitzontal $y = K$ . Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ hi ha una asímtota vertical $x = a$ .	$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ asímtota horitzontal, $y = 0$ i asímtota vertical $x = 0$
<b>Propietats dels límits</b>	$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $g(a) \neq 0$ .	
<b>Continuïtat d'una funció en un punt</b>	Una funció $f(x)$ és contínua en el punt $x = a$ , si: I. Existeix el límit a $x=a$ II. Existeix $f(a)$ III. Coincideixen I i II: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$	La funció $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ és contínua en $x = 2$

<b>Propietats de les funcions contínues</b>	La suma i el producte de funcions contínues és una funció contínua. El quocient de funcions contínues és una funció contínua si no s'anula el denominador.	Els polinomis són funcions contínues en $\mathfrak{R}$ $f(x) = \frac{1}{x}$ és contínua en $\mathfrak{R} - \{0\}$
<b>Tipus de discontinuïtat</b>	Evitable. De primera espècie de salt finit. De primera espècie de salt infinit. De segona espècie	$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x) = \frac{1}{x}$ salt infinit en $x = 0$

## EXERCICIS I PROBLEMES

### Límits i Asímptotes

20. Calcula els límits següents:

a)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2-9}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x-3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x-2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

g)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3+8x-2}{x^2-2x+3}$

21. Calcula els límits següents:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x-2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} \right)$

e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2} \right)$

f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x} \right)$

g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} \right)$

h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \right)$

31. Determina totes les asímptotes de cadascuna de les funcions següents. Representa la posició relativa de la corba respecte d'elles.

a)  $f(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$

b)  $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

c)  $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

d)  $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-1}$

e)  $f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2}$

f)  $f(x) = \frac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

g)  $f(x) = \ln \frac{-5x}{(x-1)^2}$

h)  $f(x) = \sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}}$

### Continuïtat

22. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a)  $f(x) = \begin{cases} 3^x & x < -2 \\ 4-x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & x > 1 \end{cases}$

b)  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ x^2-3x & 0 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & x \geq 3 \end{cases}$

c)  $h(x) = |x^2-5x|$

23. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a)  $f(x) = |x^2-25|$

b)  $g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}$

c)  $h(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-3}$

24. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a)  $f(x) = \frac{3x+5}{x^2-4x+3}$

b)  $g(x) = \frac{7x+2}{x^2+x}$

c)  $h(x) = \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

25. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a)  $f(x) = \sqrt{x^2-x-6}$

b)  $g(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$

c)  $h(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}}$

26. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a)  $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)$

b)  $g(x) = \ln(-x^2 - x + 2)$

c)  $h(x) = \ln\left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$

27. Estudia la continuïtat de les funcions següents, indicant en cada cas el tipus de discontinuïtat.

a)  $f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$

b)  $g(x) = e^{\sqrt{x-5}}$

c)  $h(x) = 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

28. Donada la funció  $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$ . a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica.

29. Donada la funció  $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 2 \\ k+x & x \geq 2 \end{cases}$ .

a) Determina el valor de  $k$  perquè la funció sigui contínua en tota la recta real. b) Representa la seva gràfica

30. Donada la funció  $f(x) = \begin{cases} x-3 & \dots x < -1 \\ x^2-5 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$ . a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica.

31. Donada la funció  $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x < 2 \\ x^2-4 & x \geq 2 \end{cases}$ . a) Estudia la seva continuïtat. b) Representa la seva gràfica.

32. Esbossa la gràfica de la funció  $f(x) = \frac{x}{x^2-25}$  indicant les seves asíptotes i els seus punts de discontinuïtat.

33. Esbossa la gràfica de la funció  $f(x) = \frac{x+5}{x^2-25}$  indicant les seves asíptotes i els seus punts de discontinuïtat.

34. Calcula  $k$  perquè la funció  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$  sigui contínua.

35. Donada la funció  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$ , estudia la continuïtat segons el paràmetre  $a$ .

36. Donada la funció  $f(x) = \begin{cases} 3-ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ , estudia la continuïtat segons el paràmetre  $a$ .

37. Determina  $a$  i  $b$  perquè la funció  $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$ , sigui contínua i es compleixi  $f(2)=3$

38. Determina  $a$  i  $b$  perquè la funció  $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sin(b+x) & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ \frac{\pi}{x} & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$ , sigui contínua.

## AUTOAVALUACIÓ

1. El límit  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$  val:  
 a)  $\infty$                       b) 0                      c) 1                      d)  $2/3$
2. El límit  $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 2) \cdot \left( \frac{1}{x + 2} \right)$  val:  
 a)  $\infty$                       b) 0                      c) 1                      d)  $-1$
3. El límit  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2} \right)$  val:  
 a)  $\infty$                       b) 0                      c)  $-2/3$                       d)  $-1$
4. El límit  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 + x} - 1}{x + 1}$  val:  
 a)  $1/2$                       b) 0                      c)  $-\infty$                       d)  $-1$
5. El límit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^2 + 3}$  val:  
 a)  $\infty$                       b) 0                      c) 5                      d) 1
6. El límit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x - 4}{x^3 + 3}$  val:  
 a)  $\infty$                       b) 0                      c) 5                      d) 1
7. El límit  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x + 1}{3x - 2} \right)^{2x^2 + 1}$  val:  
 a)  $\infty$                       b) 0                      c) 3                      d) 1
8. Estudia la continuïtat de  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  en  $x = 0$ .  
 a) És contínua                      b) Té una discontinuïtat evitable                      c) Un salt finit                      d) Un salt infinit
9. Estudia la continuïtat de  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  en  $x = 2$ .  
 a) És contínua                      b) Té una discontinuïtat evitable                      c) Un salt finit                      d) Un salt infinit
10. Estudia la continuïtat de  $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  en  $x = 2$ .  
 a) És contínua                      b) Té una discontinuïtat evitable                      c) Un salt finit                      d) Un salt infinit

## CAPÍTOL 8: DERIVADES

### ACTIVITATS PROPOSADES

#### 1. CONCEPTE DE DERIVADA

1. Troba la taxa de variació mitjana en els intervals  $[-3, 2]$ ,  $[1, 5]$  i  $[0, 3]$  de les funcions següents:

a)  $y = 3x - 4$

b)  $y = -2x - 3$

c)  $y = 0,5x + 2$

d)  $y = x - 1$

A la vista del que has obtingut, creus que la taxa de variació mitjana de les funcions polinòmiques de primer grau és sempre constant i igual al pendent de la recta que la representa?

2. Troba la taxa de variació mitjana de la funció  $y = x^2 - 1$  en els intervals  $[-3, 2]$ ,  $[1, 5]$  i  $[0, 3]$ . És ara constant?

3. Troba la taxa de variació mitjana de la funció  $y = x^3 + 1$  en els intervals  $[-3, 2]$ ,  $[1, 5]$  i  $[0, 3]$ .

Hauràs comprovat que en els dos últims exercicis la taxa de variació mitjana no és constant.

4. En fer un estudi sobre l'aterratge d'avions es grava una pel·lícula des del moment en què l'avió toca terra fins que es para, i es mesuren els temps i les distàncies recorregudes:

<b>Temps (<math>t</math>) en segons</b>	0	2	4	6	8	10	12	14
<b>Distància (<math>d</math>) en metres</b>	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocitat mitjana de l'avió.

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals:  $[0, 6]$ ,  $[2, 10]$  i  $[6, 14]$ .

c) És constant?

5. S'estudia la posició d'un cotxe respecte de la sortida d'un túnel i s'obtenen les dades següents:

<b>Temps (segons)</b>	0	5	10	15	20	25	30	35	40
<b>Distància (metres)</b>	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocitat mitjana del cotxe en l'interval  $[0, 40]$ .

b) Calcula la velocitat mitjana en els intervals  $[15, 25]$  i  $[20, 30]$ . És constant?

c) Si la velocitat màxima permesa és de 120 km/h, consideres que ha pogut sobrepassar-la en algun moment? I si la velocitat màxima fos de 80 km/h?

6. El tren AVE surt de l'estació i augmenta la seva velocitat fins a arribar a 250 km/h en 10 minuts, manté llavors aquesta velocitat constant durant hora i mitja, i comença a disminuir-la fins a parar-se en altres 10 minuts.

a) Representa en una gràfica la funció temps - velocitat.

b) Ja saps que l'acceleració ens indica la variació de velocitat. Indica l'acceleració mitjana en els primers 10 minuts.

c) Indica l'acceleració mitjana entre el minut 10 i el minut 90.

d) Determina l'acceleració en els últims 10 minuts.

7. En llançar un objecte verticalment cap amunt l'altura (metres)  $y$ , que aconseguix als  $x$  segons ve donada per la funció:  $y = 40x - 5x^2$ .

a) Escribe una taula de valors i dibuixa la gràfica de la funció. Té sentit per a valors de  $x$  menors que 0? I majors a 8?

b) Calcula la velocitat mitjana de l'objecte en els intervals següent:  $[0, 2]$ ,  $[0, 8]$ ,  $[1, 4]$ ,  $[4, 8]$  i  $[1, 8]$ .

c) Quin és l'altura màxima aconseguida per l'objecte?

8. Troba la derivada de les funcions següents en els punts  $x = 1$ ,  $x = 3$  i  $x = 5$ :

a)  $y = 3x - 4$

b)  $y = -2x - 3$

c)  $y = 0,5x + 2$

d)  $y = x - 1$

A la vista del que has obtingut, creus que la derivada de les funcions polinòmiques de primer grau és sempre constant i igual al pendent de la recta que la representa?

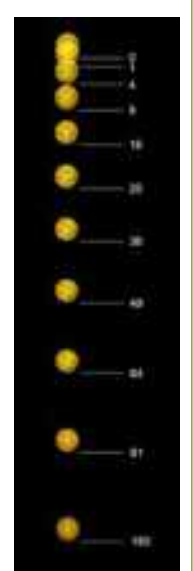
9. Troba la derivada de la funció  $y = x^2 - 1$  en els punts  $x = 1$ ,  $x = 3$  i  $x = 5$ . És ara constant?

10. Troba la derivada de la funció  $y = x^3 + 1$  en els punts  $x = 1$ ,  $x = 3$  i  $x = 5$ .

Hauràs comprovat que en els dos últims exercicis la derivada no és constant.

11. En llançar un objecte verticalment cap amunt l'altura (en metres)  $y$ , que aconseguix als  $x$  segons és:  $y = 40x - 5x^2$ . Calcula la velocitat als  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$  i  $x = 6$  segons. Determina també l'altura de la pedra a aquests segons. Quina és l'altura màxima aconseguida per l'objecte?

12. En el viatge de l'activitat d'introducció el cotxe recorria entre la primera hora i la segona una distància  $y$  donada per l'equació:  
 $y = 0,2x^2 + 110x - 67^2$ . Determina la velocitat que portava el cotxe per a  $x = 1^5$ .
13. En aquest viatge la distància recorreguda per  $2,5 \leq x \leq 3$  ve donada per l'equació  $y = 110x - 121^4$ . I per  $3 \leq x \leq 5$  per  $y = 0,1x^2 + 118x - 146^3$ . Per a  $x = 3$  hi ha un canvi en la velocitat. Calcula la velocitat abans de  $x = 3$ , i la velocitat després de  $x = 3$ .
14. En caure un cos en el buit la distància  $d$  (en metres), recorreguda als  $t$  segons ve donada aproximadament per l'expressió:  $d = 5t^2$ . (L'expressió és  $d = 1/2gt^2$ , on  $g$  és l'acceleració de la gravetat terrestre, aproximadament de  $9,8$ ):  
 a) A quina velocitat arribarà al terra una persona que en un incendi es llanci a la lona dels bombers i tarda 4 segons a arribar a ella?  
 b) A quina velocitat arribarà si es llança des d'una altura de 10 metres?
15. Un vehicle espacial surt d'un planeta amb una trajectòria donada per:  $y = 50x - 0,2x^2$  ( $x$  i  $y$  en km). La direcció del vehicle ens la proporciona la recta tangent en cada punt. Determina la direcció del vehicle quan està a 2 km de distància sobre l'horitzó.
16. Des d'un avió nodrissa es deixa anar un avió experimental que el seu impulsor s'encén a la màxima potència i roman encès 20 segons. La distància que separa a l'avió experimental de l'avió nodrissa ve donada per  $d = 0,3 t^4$ . Calcula la velocitat de l'avió experimental als 3, 4, 7 i 10 segons d'haver estat deixat anar.
17. Representa gràficament la funció  $y = 2$ , i determina la seva derivada per a  $x = 1, 2, 3, \dots$ . a. Quant val? És sempre la mateixa? Ocorrerà el mateix per a qualsevol recta horitzontal  $y = b$ ?
18. Dibuixa una funció qualsevol i dos punts sobre ella,  $f(x)$  i  $f(a)$ , corresponents a les ordenades  $x$ ,  $a$ . Interpreta geomètricament la definició de derivada a partir del dibuix.
19. Dibuixa una funció qualsevol i un punt qualsevol sobre la funció  $f(a)$ . Dibuixa també un segment sobre l'eix d'abscisses amb origen en  $a$  i longitud  $h$ . Interpreta de nou la definició de derivada en un punt basant-te en aquesta figura.
20. Calcula la derivada mitjançant el límit de la funció  $y = x^2 - x + 1$  en el punt  $x = 1$ . Calcula la derivada mitjançant el límit de la funció  $y = x^2 - x + 1$  en el punt  $x = a$ . Calcula mitjançant l'expressió resultant  $f'(1), f'(2), f'(12), f'(5^43)$  i  $f'(-7)$ .
21. Caiguda lliure d'una pilota. En la figura es mostren, mitjançant fotografia estroboscòpica<sup>1</sup>, les posicions de la pilota a intervals regulars de temps: per a  $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , l'espai recorregut és proporcional a  $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ , etc. Calcula la funció de posició  $y = f(t)$ , i calcula la velocitat i l'acceleració derivant la funció de posició.



Posicions de la pilota a intervals regulars de temps, per a  $t =$

22. Completa en el teu quadern la següent taula amb les derivades:

Funció	$f(x) = x^3$	$f(x) = 2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x$	$f(x) = k$	$f(x) = 2x + 3$	$f(x) = 2x^2 + 3x$
Derivada	$f'(x) = 3x^2$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$	$f'(x) =$

23. Pensa en un exemple de funció no derivable i que sí sigui contínua.

## 2. REGLES DE DERIVACIÓ

24. Escribe les funcions derivades de les funcions següents:

a)  $f(x) = x^{24}$ ;    b)  $g(x) = 6x^{10}$ ;    c)  $h(x) = 6/7x^{13}$ ;    d)  $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$ ;    e)  $p(x) = 5x^3 - x$

25. Calcula les derivades de les següents funcions polinòmiques:

a)  $y = 6 + x - 5x^2$ ;    b)  $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$ ;    c)  $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$ ;    d)  $y = x^8 - x$

26. Un determinat gas ocupa un volum de  $2 \text{ m}^3$  a una pressió de 5 Newtons per  $\text{m}^2$ . Segons la llei de Boyle a cada pressió exercida sobre el gas correspon un volum donat per  $V = 10/P$ . Quin és la taxa de variació instantània del volum quan la pressió és de 10 Newtons per  $\text{m}^2$ . I quan és de 20 Newtons per  $\text{m}^2$ ? És la meitat?

1 Un llum estroboscòpic és un instrument que il·lumina una escena durant intervals regulars de temps. Si utilitzem aquest tipus de llum sobre un moviment repetitiu, com la rotació d'una roda, i l'interval coincideix amb un període complet de moviment, l'objecte semblarà estàtic a l'observador.

27. Obté la derivada de  $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ . Utilitza-la per obtenir la derivada en  $x = 1, 4, 5 \dots$  Pots obtenir la derivada en  $x = 0$ ?

Raona la resposta.

28. Calcula les derivades de les següents funcions. Simplifica si és possible:

$$\text{a) } y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5); \quad \text{b) } y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4); \quad \text{c) } y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$$

29. Calcula les derivades de les següents funcions. Simplifica si és possible:

$$\text{a) } y = \frac{x-1}{x+3}; \quad \text{b) } y = x^2 + (5/3)x^3 - 2x + 7; \quad \text{c) } y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}; \quad \text{d) } y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2}$$

30. Calcula les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = \sqrt[5]{x^7}; \quad \text{b) } y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3 + 5}; \quad \text{c) } y = \frac{(x^4 - 2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}; \quad \text{d) } y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2}$$

31. Calcula les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = (x^5 - 7x^3)^{12} \quad \text{b) } y = (3x^3 - 5x^2)^7 \quad \text{c) } y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5} \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$$

32. Calcula les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = \sqrt{\frac{3x^2 - 5x}{2x^3 + 7} (x^4 - 6x^3)^2} \quad \text{b) } y = \sqrt{\frac{(x^2 + 3)(x^2 - 7)}{x^3 - 5}} \quad \text{c) } y = \sqrt{\left(\frac{5x^2 + 3x}{8x^3 - 2x^2}\right)^3} \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}$$

33. Calcula les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = \log(x^5 - 7x^3) \quad \text{b) } y = \log_2(3x^3 - 5x^2) \quad \text{c) } y = \ln \sqrt{\frac{4x^5 - 8x^3}{3x - 2}} \quad \text{d) } y = \ln \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$$

34. Utilitza derivació logarítmica per calcular les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = x^{x^5 - 7x^3} \quad \text{b) } y = (x+1)^{3x^3 - 5x^2} \quad \text{c) } y = x^{(4x^5 - 8x^3)^5} \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{(x-1)(2x^2 + 4x^7)^4}$$

35. Utilitzant que la derivada de  $y = e^x$  és  $y' = e^x$ , calcula les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = e^{x^5 - 7x^3} \quad \text{b) } y = (e^{3x^3 - 5x^2})^7 \quad \text{c) } y = e^{(4x^5 - 8x^3)^5} \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{e(2x^2 + 4x^7)^4}$$

36. Recorda la definició de cosecant:  $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ . Demuestra que:  $(\operatorname{cosec}(x))' = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

37. Recorda la definició de la secant:  $\operatorname{sec}(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ . Demuestra que:  $(\operatorname{sec}(x))' = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$

38. Recorda la definició de cotangent:  $\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$ . Demuestra que:  $(\operatorname{cotg}(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$

39. Calcula les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = \sin(x^5 - 7x^3) \quad \text{b) } y = (\sin(3x^3 - 5x^2))^7 \quad \text{c) } y = \operatorname{sen}^5(x) \cdot \cos^3(x) \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(2x^2 + 4x^7)^4}$$

40. Calcula les derivades de les següents funcions:

$$\text{a) } y = \cos(e^{x^5} + 4x^3) \quad \text{b) } y = (\operatorname{cotg}(5x^3 - 3x^2))^4$$

$$\text{c) } y = \sin(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)) \quad \text{d) } y = \sqrt[3]{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}(2x+1))^4}$$

41. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$

b)  $f(x) = (2-3x)\operatorname{sh}(2-3x)$

c)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{4-9\operatorname{sen}x}}{3+2\cos x}$

d)  $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{\cos x + x\operatorname{sen}x}$

42. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{x+1}$

b)  $y = \ln(\operatorname{arccos} x)$

c)  $y = \operatorname{arctg}(e^{2x+3})$

d)  $y = \operatorname{arccos}(\operatorname{sen}(\cos x))$

43. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$

b)  $y = e^{\operatorname{arccos} \sqrt{x+3}}$

c)  $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$

d)  $y = \operatorname{arccos} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

44. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{argsh} \sqrt{2x+3}$

b)  $y = \ln(\operatorname{argth}(5x))$

c)  $y = \operatorname{argch}(e^{4x-1})$

d)  $y = \operatorname{argsh}(\operatorname{argth}(x))$

45. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{argsh} \sqrt{\frac{1+\operatorname{sh}x}{1-\operatorname{sh}x}}$

b)  $y = \sqrt{e^{\operatorname{argch} \sqrt{x+3}}}$

c)  $y = \operatorname{sh}(\operatorname{argth} \frac{3x+7}{\sqrt{9-4x^2}})$

d)  $y = \operatorname{argch} \frac{\operatorname{sen}x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x^2}}$

### 3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

46. Determina l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $y = 7x^2 + 5x - 3$  en el punt  $x = 2$

47. El perfil d'una certa muntanya té la forma d'una paràbola:  $y = 0,05x - 0,01x^2$ , on  $x$  i  $y$  es mesuren en km. Escriu l'equació de la recta tangent per a  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$  km.

48. Un cotxe recorre una distància  $y$ , en quilòmetres, a les  $t$  hores, sent  $y = 20t + 0,5t^2$ . Determina la seva funció velocitat i la seva funció acceleració. És constant l'acceleració? Si segueix a aquesta velocitat, en quin instant sobrepassa la velocitat màxima permesa de 120 km/h?

49. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció:  $y = x^3 + 3x$ . Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció:  $y = x^3 - 3x$ . Com és en  $x = 0$ ? I en  $x = 2$ ? I en  $x = -2$ ?

50. Calcula els màxims i mínims de les funcions següents:

a)  $y = 4x^2 + 3$ ;

b)  $y = 5x^4 - 2$ ;

c)  $y = 3x^3 + 1$ ;

d)  $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$ ;

e)  $y = 7x^3 - 3x$ .

51. Es desitja fabricar envasos amb forma de prisma recte quadrangular de base quadrada de manera que el volum sigui d'un litre i la superfície emprada sigui mínima.

52. Determina els màxims i mínims de les funcions següents:

a)  $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$ ;

b)  $y = x^3 - 3x + 5$ ;

c)  $y = |x - 4|$ ;

d)  $y = |x + 1| + |x - 2|$ .

53. Calcula els màxims i mínims relatius i absoluts de la funció:  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$ , en l'interval  $[-4, 3]$  i en l'interval  $[0, 5]$ .

54. Determina els màxims i mínims, absoluts i relatius, de la funció  $f(x) = |x + 2|$  en l'interval  $[-3, 5]$ .

55. Determina les dimensions d'un con de volum mínim inscrit en una esfera de radi  $R = 5$  cm. (Ajuda: L'altura del con és igual a  $R + x$ , i el radi de la base  $r^2 = R^2 - x^2$ ).



## RESUM

<b>Definició de derivada</b>	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	
Càlcul de derivades	<p>Si <math>f(x) = k</math> llavors <math>f'(x) = 0</math></p> <p>Si <math>f(x) = x^k</math> llavors <math>f'(x) = kx^{k-1}</math></p> <p>Si <math>f(x) = g(x) + h(x)</math> llavors <math>f'(x) = g'(x) + h'(x)</math></p> <p>Si <math>f(x) = kg(x)</math> llavors <math>f'(x) = kg'(x)</math></p> <p>Si <math>f(x) = g(x) \cdot h(x)</math> llavors <math>f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)</math></p> $\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ <p><math>h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))</math></p> <p><math>h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)</math></p> <p><math>f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}</math></p> <p>Si <math>f(x) = \ln(x)</math> llavors <math>f'(x) = \frac{1}{x}</math></p> <p>Si <math>f(x) = a^x</math> llavors <math>f'(x) = a^x \cdot \ln a</math></p> <p><math>f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)</math></p> <p><math>f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{tg}(x) \Rightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{sh}(x) \Rightarrow f'(x) = \operatorname{ch}(x)</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{ch}(x) \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sh}(x)</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{th}(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x)</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{arcsin}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{arccos}(x) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{arctg}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{argsh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{argch}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}</math></p> <p><math>f(x) = \operatorname{argth}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}</math></p>	<p><math>y = 7x^3 + 2/x^5 \rightarrow</math></p> <p><math>y' = 21x^2 - 10/x^6</math></p> <p><math>y = \sqrt{x} \cdot 2x \rightarrow</math></p> <p><math>y' = (1/2)\sqrt{x} \cdot 2x + \sqrt{x} \cdot 2</math></p> <p><math>y = \frac{3x}{x^2-1} \rightarrow</math></p> <p><math>\Rightarrow y' = \frac{3 \cdot (x^2-1) - 3x \cdot (2x)}{(x^2-1)^2}</math></p> <p><math>y = \sqrt{x^3+2} \rightarrow</math></p> <p><math>y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3+2}} \cdot 3x^2</math></p> <p><math>y = \operatorname{arcsin}(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}</math></p> <p><math>y = \operatorname{arccos}(x^2) \Rightarrow y' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}</math></p> <p><math>y = \operatorname{arctg}(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1+x^6}</math></p> <p><math>y = \operatorname{argsh}(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}</math></p> <p><math>y = \operatorname{argch}(x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{\sqrt{x^4-1}}</math></p> <p><math>y = \operatorname{argth}(x^3) \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{1-x^6}</math></p>
<b>Recta tangent</b>	$y = f(a) + f'(a)(x - a)$	Tangent a $y = x^3 + 2x$ en el punt (0, 0): $y = 0 + 2(x - 0) = 2x$ .
<b>Creixement i decreixement</b>	<p>Si <math>f'(a) &gt; 0</math> llavors <math>y = f(x)</math> és creixent en <math>x = a</math>.</p> <p>Si <math>f'(a) &lt; 0</math> llavors <math>y = f(x)</math> és decreixent en <math>x = a</math>.</p>	<p><math>y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1</math>.</p> <p>• Per a <math>x &lt; -1, y' &gt; 0 \rightarrow y</math> creixent.</p>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Per <math>-1 &lt; x &lt; 1</math>, <math>y' &lt; 0 \rightarrow y</math> decreixent</li> <li>• Per a <math>x &gt; 1</math>, <math>y' &gt; 0 \rightarrow y</math> creixent</li> </ul>
Màxims i mínims	<p>Si <math>(a, f(a))</math> és un màxim o un mínim de <math>y = f(x)</math> i existeix <math>f'(a)</math> llavors <math>f'(a) = 0</math>.</p> <p>Si <math>f'(a) = 0</math> llavors <math>(a, f(a))</math> és un punt crític.</p> <p>Si <math>f'(a) = 0</math> i <math>f''(a) &gt; 0</math> llavors <math>(a, f(a))</math> és un mínim.</p> <p>Si <math>f'(a) = 0</math> i <math>f''(a) &lt; 0</math> llavors <math>(a, f(a))</math> és un màxim.</p>	<p><math>y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3 \rightarrow y'' = 6x</math>  <math>y'(-1) = 0</math>, <math>y''(-1) &lt; 0</math>,  llavors <math>(-1, 2)</math> és un màxim relatiu.</p> <p><math>y'(1) = 0</math>, <math>y''(1) &gt; 0</math>, llavors <math>(1, -2)</math> és un mínim relatiu.</p>

### Nota: Funcions hiperbòliques

Es defineixen les funcions hiperbòliques com

$$\text{Sinus hiperbòlic} : sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{Cosinus hiperbòlic: } ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{Tangent hiperbòlica: } th x = \frac{sh x}{ch x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

i les respectives funcions inverses

Argument sinus hiperbòlic:  $argsh x$

Argument cosinus hiperbòlic:  $argch x$

Argument tangent hiperbòlica:  $argth x$

## EXERCICIS I PROBLEMES

### Definició de derivada

1. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció  $y = x^3$  en el punt  $x = 2$ .
2. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció  $y = \sqrt{x}$  en  $x = 1$ .
3. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció  $y = 1/x^2$  en  $x = 4$ .
4. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció  $y = 3x^2 - 5x + 2$  en el punt d'abscissa  $x = 1$ .
5. Utilitza la definició de derivada per calcular la derivada de la funció  $y = x - 3$  en  $x = 2$ .

### Càlcul de derivades

6. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = 4x^2 + 2x - 3$       b)  $y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5$       c)  $y = x^2 - 5x + 2$       d)  $y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3$

7. Calcula:

a)  $D(5x^2 + 7x^4 - 3x)$       b)  $D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3)$       c)  $D(x^5 - 7x^4 + 2x^3)$       d)  $\frac{dy}{dx}(3x^3 - 9x^6 - 2x^8)$

8. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $i = 7x^2 + 3x - 1/x$       b)  $y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x}$       c)  $y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3) \cdot (x^2 - 5x + 2)}$       d)  $y = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+5)}{(x^2 - 5)}$

9. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = 7x^2/3 + 3x/5 - 8/(3x)$       b)  $y = 5x^3/2 - 2x^2/3 + 6\sqrt{x}/5$       c)  $7y = 4x^3/3 - 5x^2/7 + 7/\sqrt{x}$

10. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \frac{(x-1) \cdot (2x-3)}{x+2}$       b)  $y = \frac{(3x^2+4) \cdot (4x-2)}{7x-1}$       c)  $y = \frac{(8x+5x^2) \cdot (2x^5-7)}{4x+6}$       d)  $y = \frac{(x+9) \cdot (2x-3)}{(x+3) \cdot (x+2)}$

11. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \sqrt{x^3+5}$       b)  $y = \sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}$       c)  $y = (5x^3+2)^5$       d)  $y = (2x^2+5x)^9$

12. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \sqrt{x^3+5} \cdot (x^7+3x^2)^6$       b)  $y = \frac{\sqrt[3]{2x^3+4x^2-1}}{x+1}$       c)  $y = (5x^3+2)^5 \cdot (x^5-6x^8)$       d)  $y = \frac{(2x^3-5x^2)^9}{(7x^4-5x^3)^2}$

13. Utilitza derivació logarítmica per calcular les derivades de les funcions següents:

a)  $y = (3x)^{x^5-2x^3}$       b)  $y = (2x+4)^{5x^3+7x^2}$       c)  $y = e^{(2x^5-5x^3)^5}$       d)  $y = \sqrt[3]{(2x+5)(x^4-6x^5)^3}$

14. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = e^{x^5+4x^3}$       b)  $y = (e^{2x^2-7x^2})^7$       c)  $y = e^{(3x^5+5x^3)^5}$       d)  $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}}$

15. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \ln((7x^5-2x^3)^{12}(2x+3))$       b)  $y = \ln\sqrt{(3x^3+2x^2)^3}$       c)  $y = \ln\sqrt{\frac{4x^5-7x}{6x-1}}$       d)  $y = \ln\sqrt[3]{(x^4-2x^5)^2}$

16. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $f(x) = \frac{\cos(x)}{3 + \sin(x^2)}$       b)  $f(x) = \text{sen}(\text{sh}^3 2x)$       c)  $f(x) = \text{ch}(\text{sh}(5x))$       d)  $f(x) = \text{th}(2x + 3x^2)$

17. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $f(x) = 9\sqrt{\text{sen}^3(5x+2)}$       b)  $f(x) = \ln\sqrt{\frac{3+2\cos(x)}{3-2\cos(x)}}$       c)  $f(x) = \text{ch}(\text{sen}(5x-2)^2)$       d)  $f(x) = \ln(\cos^2(x-1))$

18. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \cos(x^5 - 7x^3) \cdot \sin(x^5 - 7x^3)$     b)  $y = \cos^7(3x^3 - 5x^2) \cdot \sin^5(3x^3 - 5x^2)$     c)  $y = \cos(4x^5 - 8x^3)^5$     d)  $y = \sqrt[3]{\cos(2x^2 + 4x^7)^4}$

19. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{sh}(2x^5 - 5x^3)^2$     b)  $y = (\operatorname{tg}(5x^3 - 3x^2))^4$     c)  $y = \sin(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2))$     d)  $y = \sqrt[3]{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}(2x + 1))^4}$

20. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{3 + 2e^{3x}}{3 - 2e^{3x}}$     b)  $f(x) = (3x - 5x^2)\operatorname{ch}(3x - 5x^2)$     c)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{25 - 14\operatorname{sen}x}}{4 + 5\cos x}$     d)  $f(x) = \frac{\operatorname{sh}x - x\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x + x\operatorname{sh}x}$

21. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $f(x) = \ln \sqrt{e^{2\operatorname{sh}x} - 1}$     b)  $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{5 - 3x^2}{5 + 3x^2}$     c)  $f(x) = 7\operatorname{arccos} \frac{4\operatorname{sen}x + 3}{5 - 2\operatorname{sen}x}$     d)  $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{2\cos x}{4\operatorname{sen}x + 3\cos x}$

22. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{arcsen}(e^{2x-3})$     b)  $y = \sqrt{\ln(\operatorname{arccos}x)}$     c)  $y = \operatorname{arctg}(\ln \sqrt[3]{3x-2})$     d)  $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg}(\operatorname{sen}(5x-1)))$

23. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3 + 2\operatorname{sen}x}{3 - 2\operatorname{sen}x}}$     b)  $y = e^{\operatorname{arcsen} \sqrt{2x-5}}$     c)  $y = \cos(\operatorname{arcsen} \frac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}})$     d)  $y = \operatorname{arcsen} \frac{2x}{\sqrt{8-x^2}}$

24. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{5x-7}$     b)  $y = \ln(\sqrt{\operatorname{arcsen}(2x+1)})$     c)  $y = \operatorname{arcsen}(e^{4x-7})$     d)  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{arccos}(\operatorname{sen}(2x-1)))$

25. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{argch} \sqrt{x-2}$     b)  $y = \ln(\operatorname{argsh}(2x-3))$     c)  $y = \operatorname{argth}(e^{3x-5})$     d)  $y = \operatorname{argch} \sqrt{\operatorname{argth}(x)}$

26. Calcula les derivades de les següents funcions:

a)  $y = \operatorname{argch} \sqrt{\frac{3 + 2\operatorname{ch}x}{3 - 2\operatorname{ch}x}}$     b)  $y = \sqrt{e^{\operatorname{argsh} \sqrt{5x-2}}}$     c)  $y = \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} \frac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}})$     d)  $y = \operatorname{argth} \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \cos^2 x^2}}$

### Aplicacions de la derivada

27. Calcula les rectes tangents de la gràfica de la funció  $y = x^3 - 3x$  en  $x = 0$ ,  $x = 1$  i  $x = 2$ .

28. Calcula les rectes tangents de les gràfiques de les funcions següents en els punts indicats:

a)  $y = x^3$  en  $x = 2$ .    b)  $y = 2x^2 + 4x - 5$  en  $x = 1$ .    c)  $y = x^3 - 7x^2 + 3$  en  $x = 0$ .

29. Indica el pendent de la recta tangent de:

a)  $y = x^3 + 3x$  en  $x = 3$ .    b)  $y + 2x - 5 = 0$ .    c)  $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$  en  $x = 1$ .

30. Determina les coordenades dels punts de la gràfica  $y = x^3 - 3x + 2$  en els quals la seva tangent sigui paral·lela:

a) a la recta  $y = 0$ ;    b) a la recta  $y = 6x$ .

31. Determina la recta tangent de la gràfica de la funció  $y = \sqrt[2]{x^3}$  en  $x = 0$ .

32. Si  $f'(x) = x(3-x)$ , quin de les següents gràfiques podria ser la de  $f(x)$ ?



33. Determina les rectes tangents a la funció  $f(x) = 4x^3 - 12x$  en els punts en els quals el pendent és 12. Quin és el menor valor que pot tenir el pendent a aquesta corba? En quins punts s'aconsegueix?

34. Determina la recta tangent a la funció  $f(x) = x^3 - 3x$  en el punt  $A(-1, 2)$ . En quin un altre punt talla la recta tangent a la funció?

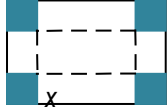
35. Determina els coeficients  $a$ ,  $b$  i  $c$  de la funció  $f(x) = ax^3 + bx + c$ , que passa pel punt  $A(1, 2)$  i és tangent a la recta  $y = x$  en el punt  $O(0, 0)$ .

36. Determina els coeficients  $a$ ,  $b$  i  $c$  perquè les funcions  $f(x) = x^3 + bx + c$  i  $g(x) = ax - x^2$  tinguin la mateixa recta tangent en el punt  $A(1, 0)$ .

37. Determina el coeficient  $a$ , perquè la funció  $f(x) = x^2 + a$ , sigui tangent a la recta  $y = x$ .
38. Determina els intervals de creixement i decreixement de  $f(x) = 1/x^2$ .
39. Determina els intervals de creixement i decreixement de  $f(x) = 1/x$ .
40. Determina els intervals de creixement i decreixement de  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ . Calcula els seus màxims i mínims i fes un esbós de la seva gràfica.
41. Determina els intervals de creixement i decreixement de  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$ . Calcula els seus màxims i mínims. En quin punt talla a l'eix d'ordenades? Fes un esbós de la seva gràfica.
42. Determina els intervals de creixement i decreixement de  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$ . Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.
43. Determina els intervals de creixement i decreixement de  $f(x) = x^3 - 9x$ . Calcula els seus màxims i mínims. Fes un esbós de la seva gràfica.
44. Calcula els màxims i mínims relatius i absoluts de la funció  $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$  en l'interval  $[-7, 2]$  i en l'interval  $[0, 8]$ .
45. Determina els màxims i mínims, absoluts i relatius, de la funció  $f(x) = |x + 3|$  en l'interval  $[-3, 3]$ .

## Problemes

46. L'espai recorregut, en metres, per un vehicle als  $t$  segons de passar per un control de radar, ve donat per:  $y = 15t + 0,8t^2$ . Quina velocitat portava en passar pel control? I als 5 segons? Si continua així, en quin moment passarà dels 120 km/h?
47. Sabent que l'acceleració és la derivada de la funció velocitat, calcula l'acceleració del vehicle de l'exercici anterior als  $t = 0$  segons, i als  $t = 5$  segons. Com és l'acceleració? És constant o variable?
48. La temperatura,  $T$ , en graus, d'una bola de ferro que s'està escalfant ve donada per  $T = 200 - 500/t$ , on  $t$  és el temps en segons. El radi,  $r$ , en mm, de la bola quan la temperatura és de  $T$  graus ve donada per  $r = 40 + 0,001T$ . A quina velocitat varia el radi quan la temperatura és de  $50^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $100^\circ$ ? A quina velocitat varia la temperatura als 30 segons? I per a  $t = 90$  segons? A quina velocitat varia el radi als 10 segons, als 30 segons i als 90 segons?
49. La distància,  $d$ , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure a la Terra als  $t$  segons, ve donada aproximadament per  $d = 5t^2$ . Si cau un cargol des de la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que està a 57 m d'altura), a quina velocitat arribaria al terra? I si caigués des de la segona plataforma (que està a 115m)? I des de la tercera plataforma (que està a 274 m)?
50. S'ha llançat des de la superfície de la Terra una pedra verticalment cap amunt amb una velocitat de 24 m/s, i aconseguix una altura  $h = 24t - 4,9t^2$ . A) Determina l'acceleració de la gravetat terrestre. B) Fins a quina altura arriba la pedra? C) Quant temps triga a aconseguir aquesta altura? D) Durant quant temps roman la pedra en l'aire? e) Es deixa caure ara la pedra per una esquadra i triga 10 segons a arribar al fons, quina profunditat té l'esquadra?
51. S'ha llançat des de la superfície de la Lluna una pedra verticalment cap amunt amb una velocitat de 24 m/s, i aconseguix una altura  $h = 24t - 0,8t^2$ . A) Determina l'acceleració de la gravetat en la superfície de la Lluna. B) Fins a quina altura arriba la pedra? C) Quant temps triga a aconseguir aquesta altura? D) Durant quant temps roman la pedra en l'aire? e) Es deixa caure ara la pedra per una esquadra i triga 20 segons a arribar al fons, quina profunditat té l'esquadra?
52. La distància,  $d$ , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure en la Lluna als  $t$  segons, ve donada aproximadament per  $d = 0,83t^2$ . Quina velocitat portaria un objecte que caigués en caiguda lliure en la Lluna al cap d'1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Lluna s'està construint una antena de transmissió sobre una base de formigó que pot esquadra-se si caigués un cargol amb una velocitat de 20 m/s. Per garantir que això no ocorri, quin ha de ser l'altura de l'antena?
53. La distància,  $d$ , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure en la superfície de Mart als  $t$  segons, ve donada aproximadament per  $d = 1,86t^2$ . Quina velocitat portaria un objecte que caigués en caiguda lliure en Mart al cap d'1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina l'acceleració de la gravetat en Mart.
54. La distància,  $d$ , en metres, recorreguda per un objecte en caiguda lliure en la superfície de Júpiter als  $t$  segons, ve donada aproximadament per  $d = 11,44t^2$ . Quina velocitat portaria un objecte que caigués en caiguda lliure a Júpiter al cap d'1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina l'acceleració de la gravetat a Júpiter.
55. La funció  $y = f(t)$  indica l'espai recorregut,  $y$ , en metres, per un cos en el temps  $t$  (en segons). Determina en cada cas la funció velocitat i la funció acceleració:
- a)  $y = t^2 - 4t + 3$                       b)  $y = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 3$                       c)  $y = -t^2 + 4t + 3$                       d)  $y = (3t - 4)^2$
56. Un dipòsit cilíndric de 10 metres de diàmetre s'omple d'aigua a  $0,3 \text{ m}^3$  per minut. A quina velocitat varia l'altura d'aigua als 2 minuts? I als 5 minuts?

57. La distància,  $d$ , en metres, recorreguda per un trineu que es llisca per un pendent gelat, als  $t$  segons, ve donada per  $d = 0'2t^2 + 0'01t^3$ . Determina la velocitat del trineu als 2, 4, 7 i 15 segons. Se sap que si la velocitat del trineu aconsegueix els 60 km/h li poden fallar els frens, quan hauria de començar a aplicar els frens per no perdre el control?
58. Volem construir caixes usant cartolines rectangulars de 20 cm per 25 cm. Per a això es talla en cada cantonada un quadrat de costat  $x$ , i es doblega. Quin valor ha de tenir el costat del quadrat,  $x$ , retallat perquè les caixes continguin un volum màxim? *Ajuda:* Hauràs d'escriure el volum de les caixes en funció de  $x$ .
- 
59. Uns barrils per emmagatzemar oli són cilíndrics i tenen una capacitat de 150 litres. Si es desitja construir-los de manera que la seva superfície total sigui mínima, quant ha de mesurar la seva altura i el radi de la seva base?
60. En fer les proves d'un nou medicament es comprova que segons la dosi,  $x$ , en mil·ligrams, que s'administri, el percentatge de curacions,  $y$ , ve donat per:  $y = 100 - 80/(x + 5)$ . No obstant això el medicament té efectes secundaris ja que perjudica al ronyó. El nombre de malalts als quals el tractament produeix efectes secundaris augmenta un 2% per cada mil·ligram que s'augmenta la dosi. Podries ajudar a determinar la dosi de medicament adequada? Raona la resposta.
61. Una pedra és llançada verticalment cap amunt i aconsegueix una altura  $h = 1'6t - 0'16t^2$  metres al cap de  $t$  segons. Quina altura aconsegueix la pedra?

### AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quin de les següents expressions és la definició de derivada d'una funció en  $x = a$ :
- a)  $\lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$       c)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$       d)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b + h) - f(b)}{h}$
2. La derivada de  $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$  en  $x = 1$  és:
- a) 0      b) 1/2      c) 1      d) 2
3. La derivada de  $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3}$  en  $x = 2$  és:
- a) 15/11      b) -10/25      c) -16/121      d) 1/3
4. La derivada de  $y = e^{x^2+3}$  és:
- a)  $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$       b)  $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$       c)  $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$       d)  $y' = 2e^{x^2}$
5. La derivada  $y = \cos(x^3)$  és:
- a)  $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x^3))$       b)  $y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$       c)  $y' = -\sin(x^3) \cdot \cos(3x^2)$       d)  $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x))$
6. L'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3$  en  $x = 1$  és:
- a)  $y = -2x - 6$       b)  $y = x + 8$       c)  $y = 2x + 6$       d)  $y = 8 + 2x$
7. L'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció  $y = 3x^2 - 2x^3$  en  $x = 0$  és:
- a)  $y = 2x + 3$       b)  $y = x + 8$       c)  $y = 6x$       d)  $y = 0$
8. La funció  $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$  en  $x = 1$  és:
- a) creixent      b) decreixent      c) assoleix un mínim      d) assoleix un màxim
9. Si la derivada d'una certa funció és:  $y' = (x - 4)x$  llavors els intervals de creixement i decreixement d'aquesta funció són:
- a)  $x < 0$ , decreixent;  $0 < x < 4$ , decreixent;  $x > 4$ , creixent  
b)  $x < 0$ , decreixent;  $0 < x < 4$ , creixent;  $x > 4$ , decreixent  
c)  $x < 0$ , creixent;  $0 < x < 4$ , creixent;  $x > 4$ , decreixent  
d)  $x < 0$ , creixent;  $0 < x < 4$ , decreixent;  $x > 4$ , creixent
10. La funció  $y = 3x^2 - 2x^3$  té els següents màxims i mínims:
- a) (0, 0) màxim i (1, 1) mínim      b) (-1, 5) màxim i (1, 1) mínim  
c) (6, -324) mínim i (1, 1) màxim      d) (0, 0) mínim i (1, 1) màxim

## CAPÍTOL 9: ESTADÍSTICA

### ACTIVITATS PROPOSADES

#### 1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL

1. Completa les dades que falten en la taula.

$x_i$	$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
10	2	0'05	2	0'05
13	4	0'1	6	0'15
16			16	0'4
19	15			
22	6	0'15	37	0'925
25				

2. Completa les dades que falten en la taula.

$[L_i, L_{i+1}[$	$n_i$	$f_i$	$N_i$
$[0, 10[$	60		60
$[10, 20[$		0'4	
$[20, 30[$	30		170
$[30, 40[$		0'1	
$[40, 50]$			200

3. Classifica les següents variables com a qualitatives o quantitatives, i aquestes últimes com a contínues o discretes.

- Intenció de vot d'un partit
- Nombre de correus electrònics que reps en un mes.
- Nombre de calçats.
- Nombre de quilòmetres recorreguts en cap de setmana.
- Marques de cervesa
- Nombre d'empleats d'una empresa
- Altura
- Temperatura d'un malalt.

4. Moltes persones que inverteixen en borsa ho fan per aconseguir beneficis ràpids, per això el temps que mantenen les accions és relativament breu. Preguntada una mostra de 40 inversors habituals sobre el temps en mesos que han mantingut les seves últimes inversions es van recollir les següents dades:

10'5 11'2 9'9 15'0 11'4 12'7 16'5 10'1 12'7 11'4 11'6 6'2 7'9 8'3 10'9 8'1 3'8 10'5 11'7 8'4 12'5 11'2 9'1  
10'4 9'1 13'4 12'3 5'9 11'4 8'8 7'4 8'6 13'6 14'7 11'5 11'5 10'9 9'8 12'9 9'9

Construeix una taula de freqüències que reculli aquesta informació i fes alguna representació gràfica.

5. Investigats els preus per habitació de 50 hotels d'una província s'han obtingut els següents resultats.

70 30 50 40 50 70 40 75 80 50 50 75 30 70 100 150 50 75 120 80 40 50 30 50 100 30 40 50 70 50  
30 40 70 40 70 50 40 70 100 75 70 80 75 70 75 80 70 70 120 80.

Determinar:

- Distribució de freqüència dels preus, sense agrupar i agrupant en 5 intervals de la mateixa amplitud.
- Percentatge d'hotels amb preu superior a 75.
- Quants hotels tenen un preu major o igual que 50 però menor o igual a 100?
- Representa gràficament les distribucions de l'apartat a).

6. El govern desitja saber si el nombre mitjà de fills per família ha descendit respecte a la dècada anterior. Per a això s'ha enquestat a 50 famílies respecte al nombre de fills i s'ha obtingut les dades següents.
- 2 4 2 3 1 2 4 2 3 0 2 2 2 3 2 6 2 3 2 2 3 2 3 3 4 3 3 4 5 2 0 3 2 1 2 3 2 2 3 1 4 2 3 2 4 3 3 2 2 1.
- Construeix la taula de freqüències amb aquestes dades.
  - Quantes famílies tenen exactament 3 fills?
  - Quin percentatge de famílies tenen exactament 3 fills?
  - Quin percentatge de famílies de la mostra té més de dos fills? I menys de tres?
  - Construeix el gràfic que consideris més adequat amb les freqüències no acumulades.
  - Construeix el gràfic que consideris més adequat amb les freqüències acumulades.
7. En un hospital es desitja fer un estudi sobre els pesos dels nounats. Per a això es recullen les dades dels 40 nounats i es té:
- 3'2 3'7 4'2 4'6 3'7 3'0 2'9 3'1 3'0 4'5 4'1 3'8 3'9 3'6 3'2 3'5 3'0 2'5 2'7 2'8 3'0 4'0 4'5 3'5 3'5 3'6 2'9  
3'2 4'2 4'3 4'1 4'6 4'2 4'5 4'3 3'2 3'7 2'9 3'1 3'5
- Construeix la taula de freqüències.
  - Si sabem que els nounats que pesen menys de 3 quilos ho fan prematurament Quin percentatge de nens prematurs han nascut entre aquests 40?
  - Normalment els nens que neixen prematurs que pesen més de 3 quilos i mitjà no necessiten estar en incubadora. Pots dir que percentatge de nens estan en aquesta situació?
  - Representa gràficament la informació rebuda.
8. En una finca de veïns de Binissalem, es reuneixen la comunitat de veïns per veure si contracten a una persona perquè els porti la comptabilitat. El resultat de la votació és el següent: 25 veïns a favor de la contractació, 15 veïns en contra i 5 veïns s'abstenen. Representa la informació mitjançant un diagrama de sectors
9. Es prenen vuit mesuraments del diàmetre intern dels anells per als pistons del motor d'un automòbil. Les dades en mm són: 74'001 74'003 74'015 74'000 74'005 74'002 74'005 74'004
- Calcula la mitjana i la mitjana d'aquestes dades. Calcula també la variància, la desviació típica i el rang de la mostra.
10. Donada la distribució de dades 38432 384343 38436 38438 38440 amb freqüències 4, 8, 4, 3, 8, troba la mitjana de la distribució.
11. La distribució dels salaris en la indústria turística espanyola és la que figura en la taula. Calcula:
- El salari mitjà per treballador (marques de classe de l'últim interval 20000)
  - El salari més freqüent.
  - El salari tal que la meitat dels restants sigui inferior a ell.

$[L_i, L_i[$	$n_i$
[0, 1500[	2145
[1500, 2000[	1520
[2000, 2500[	840
[2500, 3000[	955
[3000, 3500[	1110
[3500, 4000[	2342
[4000, 5000[	610
[5000, 10000[	328
$\geq 10000$	150

12. Calcula la mitjana, la moda, primer i tercer quartil i norantè percentil de la distribució:

$x_i$	$n_i$
5	3
10	7
15	5
20	3
25	2



13. S'han dissenyat dues unitats bessones de plantes pilots i han estat posades en funcionament en un determinat procés. Els resultats dels deu primers balanços en cadascuna de les unitats han estat els següents:

Unitat A 97'8 98'9 101'2 98'8 102'0 99'0 99'1 100'8 100'9 100'5

Unitat B 97'2 100'5 98'2 98'3 97'5 99'9 97'9 96'8 97'4 97'2

- a) Fes una representació gràfica d'aquestes mostres.  
b) Determina les mitjanes i les variàncies.
14. A cert barri s'ha trobat que les famílies residents s'han distribuït, segons la seva composició de la forma següent:

Composició	Nº de famílies
0-2	110
2-4	200
4-6	90
6-8	75
8-10	25

- a) Quin és el nombre mitjà de persones per família?  
b) Quin és la grandària de la família més freqüent?  
c) Si solament hi hagués places d'aparcament pel 75 % de les famílies i aquestes s'atenguessin per famílies de major grandària a menor, quins components hauria de tenir una família per entrar en el contingent?  
d) Nombre de membres que tenen com a màxim el 85 % de les famílies.
15. En llançar 200 vegades un dau es va obtenir la següent distribució de freqüències.

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$n_i$	$a$	32	35	33	$b$	35

Troba la mitjana i la moda de la distribució, sabent que la mitjana aritmètica és 3'6.

16. Les següents dades són mesures de la capacitat cranial d'un grup d'homínids:  
84, 49,61, 40, 83, 67, 45, 66, 70, 69, 80, 58, 68, 60, 67, 72, 73, 70, 57, 63, 70, 78, 52, 67, 53, 67, 75, 61, 70, 81, 76, 79, 75, 76, 58, 31.
- a) Calcula la mitjana i la mitjana mostrals.  
b) Troba els quartils primer i tercer.  
c) Troba els percentils cinquanta i noranta.  
d) Calcula el rang mostral.  
e) Calcula la variància mostral i la desviació estàndard mostral.

17. Les següents dades procedeixen d'un estudi de contaminació de l'aire.  
6'5 2'1 4'4 4'7 5'3 2'6 4'7 3'0 4'9 8'6 5'0 4'9 4'0 3'4 5'6 4'7 2'7 2'4 2'7 2'2 5'2 5'3 4'7 6'8 4'1 5'3 7'6 2'4  
2'1 4'6 4'3 3'0 4'1 6'1 4'2
- a) Construeix un histograma.  
b) Determina els quartils.  
c) Calcula la mitjana i la desviació típica.

## 2. ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL. COVARIÀNCIA

18. Les dades següents són les qualificacions obtingudes pels estudiants d'un grup de 25 de 1º de batxillerat en les assignatures de Matemàtiques i Llengua.

Matemàtiques	4	5	5	6	7	7	7	7	7	7	8	8
Llengua	3	5	6	7	7	7	7	8	8	8	7	7
Matemàtiques	8	8	8	8	9	9	9	9	9	10	9	8
Llengua	8	8	8	8	8	8	8	10	10	10	9	9

- a) Escriu la taula de freqüències conjunta.  
b) Proporció d'estudiants que obté més d'un cinc en ambdues assignatures, proporció d'estudiants que obté més d'un

cinc en Matemàtiques, proporció estudiants que obté més d'un cinc en Llengua.

- c) Són independents les qualificacions de Matemàtiques i Llengua?  
d) Representa gràficament. Calcula el coeficient correlació.

19. Per realitzar un estudi sobre la utilització d'una impressora en un determinat departament, es va mesurar en un dia els minuts transcorreguts entre les successives utilitzacions  $X$  i el nombre de pàgines impreses  $Y$ , obtenint-se els següents resultats.

<b>X</b>	9	9	4	6	8	9	7	6	9	9	9	9	9	10	9	15	10	12	12	10	10	12	10	10	12	10	12	12
<b>Y</b>	3	8	3	8	3	8	8	8	3	8	12	12	20	8	20	8	8	20	8	8	12	8	20	20	3	3		

- a) ESCRI la distribució de freqüències conjunta. Percentatge de vegades que transcorren més de nou minuts des de l'anterior utilització i s'imprimeixen menys de dotze pàgines. Nombre de vegades que s'imprimeixen menys de dotze pàgines i transcorren nou minuts des de la utilització anterior.  
b) Freqüències marginals. Vegades que s'imprimeixen com a molt dotze pàgines. Nombre de pàgines que s'imprimeixen en el 80% de les ocasions.  
c) Calcula la distribució del nombre de pàgines impreses condicionada al fet que han transcorregut nou minuts entre successives utilitzacions.  
d) Dibuixa el diagrama de dispersió.

20. Les alçades dels 30 nens nascuts en una maternitat durant una setmana van ser els següents:

<b>Estatuta</b>	50	51	53	50	51	48	50	49	52	52	49	50	52	51	52
<b>Paixò</b>	3'2	4'1	4'5	3'0	3'6	2'9	3'8	3'8	3'6	3'9	3'0	3'8	4'1	3'5	4'0

49	50	51	52	53	52	52	51	50	51	54	50	51	51	51
3'1	3'3	3'9	3'7	4'1	4'2	3'5	3'8	3'6	3'4	4'6	3'5	3'6	3'1	4'0

- a) Construeix una taula de doble entrada, agrupant els pesos en intervals de 0'5 kg.  
b) És la alçada independent del pes?

21. En l'examen d'una assignatura que consta de part teòrica i part pràctica, les qualificacions de nou alumnes van ser:

<b>Teoria</b>	5	7	6	9	3	1	2	4	6
<b>Pràctica</b>	6	5	8	6	4	2	1	3	7

Calcula la covariància i el coeficient de correlació lineal. Dibuixa el núvol de punts. Comenta els resultats.

22. Es vol investigar el bestiar de cabres i el bestiar oví d'un país. En la taula de doble entrada adjunta es presenten els resultats d'un estudi de 100 explotacions ramaderes, seleccionades aleatòriament del cens agropecuari. Es proporcionen les freqüències conjuntes del nombre de caps (en milers) de cabres  $X$  i ovelles  $Y$  que posseeixen les explotacions.

<b>X / Y</b>	0	1	2	3	4
0	4	6	9	4	1
1	5	10	7	4	2
2	7	8	5	3	1
3	5	5	3	2	1
4	2	3	2	1	0

- a) Troba les mitjanes, variàncies i desviacions típiques marginals.  
b) Troba el nombre mitjà d'ovelles condicionat al fet que en l'explotació hi ha 2000 cabres.  
c) Troba el nombre mitjà de cabres que tenen aquelles explotacions que sabem que no tenen ovelles.  
d) Troba la covariància i el coeficient de correlació entre ambdues variables.

23. El volum d'estalvi i la renda del sector famílies en milions en euros constants de 2005 per al període 2005-2014 van ser:

<b>Anys</b>	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
<b>Estalvi</b>	1'9	1'8	2'0	2'1	1'9	2'0	2'2	2'3	2'7	3'0
<b>Renta</b>	20'5	20'8	21'2	21'7	22'1	22'3	22'2	22'6	23'1	23'5

- a) Recta regressió de l'estalvi sobre la renda.

- b) Recta de regressió de la renda sobre l'estalvi.  
 c) Per a l'any 2015 se suposa que la renda era de 24.1 milions d'euros. quin serà l'estalvi esperat per a l'any 2015?  
 d) Estudiar la fiabilitat de la predicció anterior.

24. Es va mesurar el temps en segons que van trigar a gravar-se els mateixos 24 fitxers en un llapis USB  $X$  i en un disc dur exterior  $Y$ .

$X$	1'2	1	1'1	0'5	1'1	1'5	1	1'4	1'4	1'3	0'4	0'3
$Y$	1'3	1'1	1'2	0'4	1'2	1'4	1'1	1'6	1'6	1'5	0'4	0'3

$X$	0'3	1'5	1'4	1'1	1'2	1'2	0'4	0'5	1'3	1'5	1'2	0'2
$Y$	0'3	1'6	1'3	1'1	1'3	1'1	0'4	0'4	1'4	1'6	0'9	0'3

- a) Construeix la taula de freqüències conjunta. Quin és el percentatge de fitxers que triguen menys d'1'5 segons en el primer tipus i més de 1'4 en el segon? Quants fitxers triguen a gravar-se entre 0'6 i 1'2 segons en el primer tipus de memòria? Quant temps triguen com a molt a gravar-se almenys el 90% dels fitxers en el segon tipus de memòria?  
 b) Troba la taula de freqüències condicionades dels temps del segon tipus de memòria d'aquells programes que van trigar 1'2 en el primer tipus de memòria. Quina és la proporció d'aquests programes que triguen a gravar-se més d'1'5 segons en el segon tipus de memòria?  
 c) Representa gràficament les dades i comenta el resultat obtingut.  
 d) Si un fitxer triga 0'8 segons a gravar-se en el primer tipus de memòria, quants segons trigarà a gravar-se en el segon tipus? Donar una mesura de fiabilitat. Confirma aquesta mesura el comentat en l'apartat c)?

25. D'una molla es penjen pesos i obtenim els allargaments següents.

<b>Pes gr <math>X</math></b>	0	10	30	60	90	120	150	200	250	350
<b>Allargament cm <math>Y</math></b>	0	0'5	1	3	5	6'5	8	10'2	12'5	18

Calcula la recta de regressió d' $Y$  sobre  $X$  i estima l'allargament que s'aconseguirà amb pesos de 100 i 500 gr. Quina de les dues estimacions és més fiable?

26. La taula següent mostra el nombre de gèrmens patògens per centímetre cúbic d'un determinat cultiu segons el temps transcorregut.

<b>Nombre d'hores</b>	0	1	2	3	4	5
<b>Nombre de gèrmens</b>	20	26	33	41	47	53

- a) Calcula la recta de regressió per predir el nombre de gèrmens per centímetre cúbic en funció del temps.  
 b) Quina quantitat de gèrmens per centímetre cúbic és previsible trobar quan transcorrin 6 hores? És bona aquesta predicció?

27. En un deposit cilíndric, l'altura de l'aigua que conté varia a mesura que passa el temps segons les dades recollides en la taula:

<b>Temps: <math>h</math></b>	8	22	27	33	50
<b>Altura: <math>m</math></b>	17	14	12	11	6

- a) Troba el coeficient correlació entre el temps i l'altura. Dóna una interpretació d'aquest.  
 b) Quina altura s'aconsegueix quan hagin transcorregut 40 hores?  
 c) Quan l'altura arriba a 2 m sona una alarma. Quant de temps ha de passar perquè soni l'alarma?

28. L'evolució de l'IPC (índex de preus al consum) i la taxa d'inflació en els mesos indicats d'un determinat any, va ser:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny
<b>IPC</b>	0'7	1'1	1'7	2	1'9	1'9
<b>Taxa inflació</b>	6	6	6'3	6'2	5'8	4'9

- a) Representa el núvol de punts.  
 b) Calcula el coeficient de correlació entre l'IPC i la taxa d'inflació.  
 c) Es pot estimar la taxa de inflació a partir de l'IPC?

## EXERCICIS I PROBLEMES

### Estadística descriptiva unidimensional

1. Es sap el volum setmanal de residus sòlids recollits en  $m^3$  durant 10 setmanes, en un municipi petit:

25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6

Calcula:

- Les mesures de **centralització**: la mitjana, mitjana, moda
  - Les mesures de **dispersió**: desviació típica, variància, coeficient de variació, valor mínim, valor màxim, recorregut, primer quartil, tercer quartil i interval interquartílic.
  - Fes una representació gràfica en **sèrie temporal**, que permeti observar tendències, cicles i fluctuacions. Recorda que en una sèrie temporal, en l'eix d'abscisses està el temps d'observació i en l'eix d'ordenades la magnitud d'observació.
2. Una companyia d'assegurances desitja establir una pòlissa d'accidents. Per a això, selecciona a l'atzar a 100 propietaris i els pregunta quants euros han gastat en reparacions de l'automòbil. S'han agrupat en intervals els valors de la variable obtinguts:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
<b>Nombre de persones</b>	20	20	10	20	20	10

- Calcula les marques de classe i escriu en el teu quadern una taula de freqüències absolutes, freqüències relatives, freqüències acumulades absolutes i freqüències relatives acumulades.
  - Representa les dades en un diagrama de barres, un altre de línies i un de sectors.
  - Representa un histograma de freqüències relatives. *Atenció*: Els intervals no són tots iguals.
  - Calcula la mitjana i la desviació típica.
  - Calcula la mitjana i els quartils.
3. S'ha preguntat a 40 alumnes pel nombre de germans que tenia, i s'ha obtingut

Nombre de germans	0	1	2	3	4	5	6 o més
<b>Nombre de vegades</b>	5	15	7	6	4	2	1

- Representa un diagrama de barres de freqüències absolutes i un diagrama de línies de freqüències relatives.
  - Calcula la mitjana, la mitjana i la moda.
4. S'ha preguntat a 50 estudiants de 1r de Batxillerat pel nombre de germans que tenia, i s'ha obtingut:

Nombre de germans	0	1	2	3	4	5	6 o més
<b>Nombre de vegades</b>	8	19	8	7	5	2	1

- Representa les dades en un diagrama de barres de freqüències absolutes, en un diagrama de línies de freqüències relatives, i en un diagrama de sectors.
- Fes un histograma.
- Calcula la mitjana, la mitjana i la moda. Calcula els quartils.
- Calcula la variància, la desviació típica, el recorregut i l'interval interquartílic.
- 

### Utilitza un full de càlcul amb l'ordinador

5. Es coneix el volum setmanal de residus sòlids recollits en  $m^3$  durant les 52 setmanes d'un any, en un municipi petit:

25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula, utilitzant Excel o un altre full de càlcul:

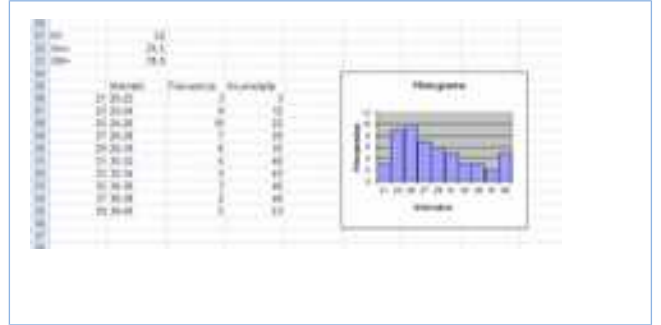
Paràmetres estadístics

- Les mesures de centralització: la mitjana, mitjana, moda
- Les mesures de **dispersió**: desviació típica, variància, coeficient de variació, valor mínim, valor màxim, recorregut, primer quartil, tercer quartil i interval interquartílic.

- c) Altres coeficients: coeficient d'asimetria i coeficient de curtosis que trobis. Investiga les possibilitats de l'ordinador per obtenir paràmetres estadístics.
- d) Fes una representació gràfica en **sèrie temporal**, que permeti observar tendències, cicles i fluctuacions. Recorda que en una sèrie temporal, en l'eix d'abscisses està el temps d'observació i en l'eix d'ordenades la magnitud d'observació.

Les dades de la pràctica anterior es volen representar en un histograma per tal de determinar millor la seva distribució. Per a això:

- a) Indica el nombre total de dades,  $N$ , el menor valor:  $X_m$ , el major valor,  $X_M$ , i el recorregut  $R$ .
- b) La quantitat de barres de l'histograma,  $k$ , se sol prendre, per menys de 50 dades, entre 5 i 7. Per a  $N$  entre 50 i 100, entre 6 i 10. Per a  $N$  entre 100 i 250, entre 7 i 12. I per a  $N$  major de 250, entre 10 i 20. En aquest cas  $N$  és igual a 52, llavors el nombre de barres podria ser entre 6 i 10. En dividir  $R$  entre 10 s'obté 1,87 que seria l'interval de classe. Per facilitar la divisió en classes fixem l'interval de classe,  $h$ , en 2, i el nombre de barres,  $k$ , en 10. Per no tenir valors en els límits de classe prenem l'inici del primer interval en 20. Així, els intervals són: (20, 22), de valor central: 21; [22, 24), de valor central 23... Ara ja es pot construir la taula de freqüències i dibuixar l'histograma.
- c) Calcula i representa en l'histograma els punts  $m$ ,  $m \pm s$ ,  $m \pm 2s$ ,  $m \pm 3s$ , on  $m$  i  $s$  són la mitjana i la desviació típica, respectivament



Anem a investigar què ocorre en fer un canvi de variables.

Vàrem dir que si considerem  $y_i = a + bx_i$  sent  $a$  i  $b$  dues constants qualssevol, la nova mitjana aritmètica quedaria  $\bar{y} = a + b\bar{x}$ .

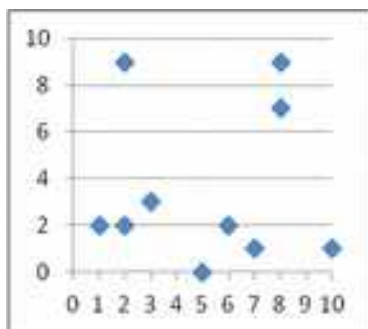
- a) Obre Excel. Introdueix les dades:  $X = 255, 271, 318, 342, 389, \dots$  en la columna A, a partir de la fila 11. Quin canvi de variable s'ha fet? Observa:  $x = X/10$ .
- b) En la columna C, a partir de la fila 11 escriu els límits de classe, en la columna D el valor mitjà, en la columna E anem a explicar les freqüències absolutes i en la columna F les freqüències acumulades. Utilitza la funció CONTAR.SI. Per exemple, escriu en I11, CONTAR.SI(A11:A63; <220). En F11 escriu =I11. En I12 escriu CONTAR.SI(A11:A63; <240)-F11. Completa la taula de freqüències. Escriu títols en la fila 10.
- c) Calcula la mitjana i la desviació típica. Per a això escriu en la fila 3 i 4, columna B, les funcions =MITJANA(A11:A63) i =DESVEST(A11:A63). Escriu els resultats amb 2 decimals.
- d) Com obtens ara la mitjana i la desviació típica de les dades reals? Com desfàs el canvi? Si no ho recordes, o no tens seguretat, investiga-ho. Calcula la mitjana i la desviació típica, abans i després del canvi. Escriu aquest resultat, en general, per a un canvi de variables lineal  $y = ax + b$ .
- e) Dibuixa l'histograma. No oblidis mai indicar les unitats en tots dos eixos, i tota la informació que ajudi a comprendre el gràfic. Afegeix sempre la grandària,  $N$ , i els valors de la mitjana i la desviació típica.
- f) Discuteix el resultat. És gran la dispersió? La distribució, és simètrica?

Una altra recerca: Anem a investigar la distribució de la mitjana. Per a això anem a prendre mostres de grandària 5. Utilitza la columna G. En G11 escriu =MITJANA(B11:B15), en G12 la mitjana de B16 a B20, i així fins al final. Tenim calculades les 10 mitjanes de mostres de grandària 5. Calcula la mitjana i la desviació típica d'aquestes mitjanes. Compara amb els resultats anteriors. Escriu en el teu quadern les conclusions.

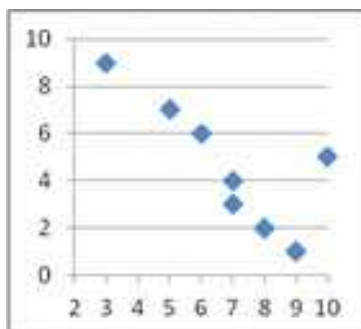
## Estadística descriptiva bidimensional

6. En una mostra de 10 persones mirem el seu color d'ulls i pèl i trobem que hi ha 5 de pèl fosc i ulls marrons, 1 de pèl fosc i d'ulls verds, 3 rossos d'ulls blaus i 1 ros d'ulls verds. A) Representa en una taula de doble entrada aquesta situació. B) Escriu la taula de freqüències relatives. C) Escriu les freqüències absolutes i relatives marginals. D) Escriu la distribució de freqüències condicionades.
7. Lola ha calculat els coeficients de correlació dels tres núvols de punts adjuntes, i ha obtingut:  $-0,8$ ,  $0,85$  i  $0,03$ , però ara no recorda quin és de cadascuna. Pots ajudar a decidir què coeficient correspon amb cada núvol?

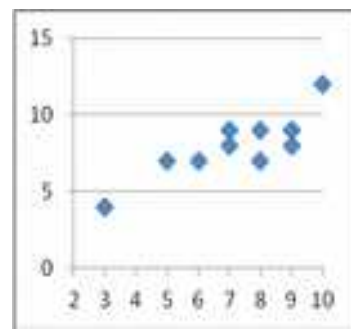
A



B



C



8. En una tenda volen estudiar les vendes del pa de motlle en funció del preu. Per a això proven cada setmana amb un preu diferent i calculen les vendes realitzades. Han obtingut les següents dades:

<b>Preu (euros)</b>	0'5	0'7	1	1'2	1'3	1'5	1'7	1'8	2
<b>Vendes (mitjanes)</b>	20'2	19'2	18'1	15'3	11'6	6	4	0	0

- Representa les dades en un diagrama de dispersió (núvol de punts) i indica a quines conclusions creïs que es va a arribar.
  - Calcula la covariància, el coeficient de correlació i la recta de regressió.
  - Decideixen posar un preu de 1'4 euros, quines opines que serien les vendes mitjanes setmanals?
9. Preguntem a 10 estudiants de 1r de Batxillerat per les seves qualificacions en Matemàtiques, pel nombre de minuts diaris que veuen la televisió, pel nombre d'hores setmanals que dediquen a l'estudi, i per la seva alçada en centímetres. Les dades es recullen en la taula adjunta.

<b>Qualificacions de Matemàtiques</b>	10	3	8	8	5	10	10	8	5	8
<b>Minuts diaris que veu la TV</b>	0	90	30	20	70	10	0	20	60	30
<b>Hores setmanals d'estudi</b>	15	0	10	10	10	15	15	10	5	5
<b>Alçada (en cm)</b>	175	166	155	161	161	177	182	177	167	172

Volem estudiar la relació entre les qualificacions de Matemàtiques i les altres tres variables. Per a això dibuixa els diagrames de dispersió, i calcula els coeficients de correlació i les rectes de regressió.

10. Una companyia aèria realitza un estudi sobre la relació entre les variables  $X$ , temps d'un vol, en hores; i  $Y$ , consum de combustible (gasoil) para aquest vol, en litres, i s'han obtingut les següents dades.

<b><math>X</math> (hores)</b>	0'5	1	1'5	2	2'5	3
<b><math>Y</math> (litres)</b>	2250	3950	5400	7300	8500	10300

- Representa les dades en un diagrama de dispersió.
  - Calcula la covariància i el coeficient de correlació entre ambdues variables. Interpreta els resultats.
  - Calcula l'equació de les rectes de regressió.
11. Fes un treball. Passa una enquesta als teus companys i companyes de classe. Tria una mostra de 10 persones i fes-lis dues preguntes amb dades numèriques, com per exemple, quant mesura la seva mà, quin nombre de sabata calça, el nombre de llibres que llegeix en un mes, el nombre d'hores que veu la televisió a la setmana, diners que gasta al mes a comprar música, la qualificació en Matemàtiques del seu últim examen... Representa les dades obtingudes en una taula de doble entrada. Fes un estudi complet. Pots utilitzar l'ordinador:
- Escriu en el teu quadern una taula de doble entrada de freqüències absolutes, freqüències relatives. Obtingues les distribucions marginals i condicionades.
  - Amb les distribucions unidimensionals, dibuixa els diagrames de barres, diagrames de línies i diagrames de sectors. Calcula les mitjanes i modes. Calcula les variàncies i les desviacions típiques. Calcula els quartils i els intervals interquartílics.
  - Amb les distribucions bidimensionals, dibuixa un diagrama de dispersió, i calcula la covariància, el coeficient de correlació i la recta de regressió.
  - Reflexiona sobre els resultats i escriu un informe.



## Utilitza un full de càlcul amb un ordinador

12. L'objectiu d'aquesta pràctica és estudiar la relació entre dues variables, mitjançant un núvol de punts o diagrama de dispersió, el coeficient de correlació i la recta de regressió.

En 10 països s'anoten els ingressos mitjans, en euros, per habitant i any, i el percentatge mitjà en els residus sòlids de menjar. S'obté:

$x_i$ (€)	750	5000	7000	2000	5500	1000	500	6000	4000	3000
$y_i$ (%)	85	65	30	20	25	45	70	6	40	50

- Obre un full de càlcul. Copia les dades. Calcula la mitjana i la desviació típica de les  $x$ , i la mitjana i la desviació típica de les  $y$ .
- Representa el núvol de punts. Selecciona les dades, incloent a les mitjanes. Pitja el botó d'assistent de gràfics i tria **XY (Dispersió)**. En títols escriu com a **Títol del gràfic Correlació**, en **Eix de valors (X)** descriu la variable  $x$  sense oblidar dir les unitats, escriu: *Ingressos/habitant (€)*, en **Eix de valors (Y)** descriu la variable  $y$  sense oblidar dir les unitats, escriu: *Percentatge de residus de menjar en els RSU (%)*. En **Llegenda** tria no mostrar llegenda.
- Observa que si  $x - \bar{x}$  i  $y - \bar{y}$  tenen el mateix signe queden en els quadrants I i III i si ho tenen diferent en II i IV. Explica els punts que queden en els quadrants I i III, explica els que queden en els quadrants II i IV. Ens pot donar una idea de la correlació. Serà positiva o negativa? És una correlació forta o feble? Entre quins valors pot variar el coeficient de correlació? Estima a ull un valor per a aquesta correlació.
- Crea en Excel un full de càlcul que et permeti calcular la correlació. Escriu les dades en les files 3 i 4. En L3 i L4 calcula les mitjanes utilitzant la funció **MITJANA**. En M3 i M4 calcula la desviació típica utilitzant la funció **DESVEST**. En N3 calcula el coeficient de correlació, utilitzant la funció:

**COEF.DE.CORREL(B3:K3;B4:K4)**

- Ara anem a millorar el nostre gràfic. Observa que si col·loques al ratolí damunt d'un punt indica les coordenades. Traça les rectes  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$  que indiquen les mitjanes. Utilitza per a això la paleta de dibuix. Dibuixa-les en color vermell.
- La recta de regressió és la recta que fa mínimes les distàncies del núvol de punts. És la recta:  $y = \bar{y} + \rho \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x})$ .

Calcula en N4 el pendent de la recta. Escriu l'equació de la recta. Observa el gràfic. Com l'hauries estimat a ull? Avaluja el pendent i l'ordenada en l'origen.

13. Es recull en una taula l'altura (en metres) d'un pare i de la del seu fill amb 15 anys d'edat.

<b>Pare</b>	1'7	2	1'6	1'7	1'65	1'9	1'9	1'81
<b>Fill</b>	1'75	1'9	1'7	1'8	1'6	1'88	2	1'95



- Utilitza l'ordinador per representar el diagrama de dispersió. Copia les dades en un full de càlcul en les columnes A i B. Assenyala les dues sèries i tria *inserir gràfic de dispersió*. Automàticament veuràs que apareix el diagrama de dispersió (núvol de punts). Joga amb les opcions per modificar el títol, el format, l'escala dels eixos...

- Dibuixa la recta de regressió. Pitja sobre un punt del núvol, i tria "Agrega línia de tendència".


Perquè dibuixi l'ordinador la recta de regressió la línia de tendència ha de ser *Lineal*. En la pantalla que apareix marquem la casella que diu: "Presentar equació en el gràfic" i la casella que diu "Presentar el valor de R quadrat en el gràfic". Al final, si ho has fet bé, el dibuix ha de ser més o menys alguna cosa similar a això:

- Utilitza la recta per determinar que altura del fill correspondria a una altura del pare de 1'75 m.

## RESUM

$n$  = número total de dades

$n_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
Freqüència <i>pics que apareix el valor de la variable <math>x_i</math></i>	Freqüència relativa $f_i = n_i / n$	Freqüència acumulada $N_1 = n_1$ $N_2 = n_1 + n_2$ $N_3 = n_1 + n_2 + n_3 \dots$	Freqüència acumulada relativa $F_i = N_i / n$

		Exemples
<b>Histograma</b>	Representació gràfica de les dades agrupades en intervals.	
<b>Mitjana aritmètica</b>	$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^k x_i f_i$	$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 21 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{50} = \frac{126}{50} = 2,52$
<b>Mitjana</b>	Valor tal que en la distribució hi ha tantes dades menors que ell com a majors que ell.	
<b>Moda</b>	Dada amb major freqüència, el que més vegades es repeteix.	
<b>Variància</b>	$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \cdot x_i^2}{n} - \bar{x}^2$	
<b>Desviació típica</b>	$s = \sqrt{\text{Variància}}$	
<b>Covariància</b>	$S_{xy} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot n_{ij}}{n} = \frac{\sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$	
<b>Coefficient correlació</b>	$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{s_x \cdot s_y} \quad -1 \leq r \leq 1$	
<b>Dependència lineal</b>	$r = -1$ dependència funcional lineal negativa $-1 < r < 0$ dependència negativa $r = 0$ no existeix dependència lineal, ni funcional $0 < r < 1$ dependència positiva $r = 1$ dependència funcional lineal positiva	
<b>Recta regressió / sobre X</b>	$y = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{s_x^2} (x - \bar{x})$	



## AUTOAVALUACIÓ

1. Realitzem una prova a 20 aspirants consistent en un dictat amb cert temps de durada (en minuts) i després recomptar el nombre d'errors comesos en transcriure-ho a ordinador. Els resultats van ser.

<b>Temps</b>	7	6	5	4	5	8	7	8	9	6	5	8	6	8	7	8	7	6	6	9
<b>Errors</b>	8	7	6	6	7	10	9	9	10	8	6	10	8	9	8	8	7	8	6	8

- a) Construeix la taula freqüències conjunta i les taules freqüències marginals.
  - b) Calcula mitjana, mitjana, moda, variància, desviació típica per a les variables marginals.
  - c) Calcula el recorregut per a les variables marginals i la covariància.
  - d) Nombre mitjà d'errors condicionat a un temps de dictat de 6 minuts. Percentatge aspirants que cometen menys de 8 errors d'entre els quals són sotmesos a un dictat de més de 6 minuts.
  - e) Calcula la recta de regressió lineal del temps sobre el nombre d'errors i, a la vista d'ella, explica la dependència o independència de les variables.
2. La següent taula mostra la talla de calçat i els pesos de 55 estudiants.

<b>Talla</b>	39	40	40	40	41	41	41	41	42	42	42	42	43	43	44
<b>Pes</b>	55	60	65	70	60	65	70	85	65	70	75	80	65	75	85
<b>Nº estudiants</b>	1	3	3	4	3	4	6	1	8	8	7	2	2	1	2

- a) Calcula la taula de freqüències conjunta.
  - b) Són independents el pes i la talla? Calcula la covariància i la recta de regressió.
3. Donada la següent taula de freqüències conjunta, calcular el valor de  $a$  sabent que la mitjana condicionada d'Y donat que  $X = 1$  és  $3/5$ .

<b>X/Y</b>	<b>0</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	4	$a$
<b>4</b>	3	7

4. Els preus diaris de les accions X i Y varien, de manera que s'estudien conjuntament aquestes dues variables durant 10 dies, i es calculen els paràmetres.

	<b>Mitjana</b>	<b>Desviació típica</b>
<b>X</b>	15'7	3'1
<b>Y</b>	8'2	1'9

Covariància 0'95.

- a) Si coneixem el valor de l'acció X amb anterioritat al valor d'Y, calcula la recta de regressió que permeti obtenir una estimació del preu d'Y, una vegada conegut el valor de X.
- b) Seria útil usar aquest cas concret de regressió lineal per predir el valor d'Y i aprofitar la predicció per prendre decisions? Per què?

# CAPÍTOL 10: PROBABILITAT I DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT

## 1. PROBABILITAT

1. Escribe el conjunto de posibles resultados de l'experiment aleatori: "Escriure en cinc targetes cadascuna de les vocals i treure una a l'atzar".
2. Escribe tres successos aleatoris de l'experiment aleatori treure una carta d'una baralla espanyola.
3. Siguei  $A$  el succés tirar un dau i treure un nombre major que 4. Escribe el succés contrari de  $A$ .
4. Calcula la probabilitat que en treure una carta de la baralla sigui una espasa.
5. Quina és la probabilitat de *no* treure un 5 en tirar un dau? I de *no* treure un múltiple de 3? I de *no* treure un nombre menor que 2?
6. En tirar una moneda dues vegades, quin és la probabilitat de *no* treure cap cara? I de treure almenys una cara? Observa que treure almenys una cara és el succés contrari de *no* treure cap cara.
7. En l'experiment "treure tres cartes seguides", quina és la probabilitat de *treure tres asos*? Primer amb reemplaçament, i després sense reemplaçament.
8. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat que surti un sis doble.
9. En tirar dues vegades un dau calcula la probabilitat de treure almenys un 6. *Ajuda*: Potser et sigui més fàcil calcular la probabilitat de *no treure cap 6*, i utilitzar el succés contrari.
10. Llancem dos daus que no estiguin trucats i anotem els nombres de la seva cara superior. Considerem el succés  $A$  que la suma de les dues cares sigui 8, i el succés  $B$  que aquests nombres difereixin en dues unitats. a) Comprova que  $P(A) = 5/36$  (casos favorables:  $2 + 6; 3 + 5; 4 + 4; 5 + 3; 6 + 2$ ) i que  $P(B) = 8/36$  (casos favorables:  $(1, 3), (2, 4), \dots$ ).
11. Dibuixa en el teu quadern un diagrama en arbre per a tres incendis, i calcula la probabilitat que almenys un hagi estat intencionat essent la probabilitat d'un incendi  $P(I) = 0'6$ .
12. En una aeronau s'han instal·lat tres dispositius de seguretat:  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Si falla  $A$  es posa  $B$  en funcionament, i si també falla  $B$  comença a funcionar  $C$ . Les probabilitats que funcioni correctament cada dispositiu són:  $P(A) = 0'96$ ;  $P(B) = 0'98$  i  $P(C) = 0'99$ . a) Calcula la probabilitat que fallin els tres dispositius. b) Calcula la probabilitat que tot vagi bé.
13. Una fàbrica de joguines rebutja normalment el 0'3 % de la seva producció per fallades degudes a l'atzar. Calcula la probabilitat que: a) En agafar dues joguines a l'atzar calgui rebutjar ambdues. b) En agafar dues joguines a l'atzar calgui rebutjar només una. c) En agafar dues joguines a l'atzar no calgui rebutjar cap.
14. Es tenen 3 caixes,  $A$ ,  $B$  i  $C$ . La caixa  $A$  té 10 boles de les quals 4 són negres. La caixa  $B$  té 6 boles amb una bola negra. La caixa  $C$  té 8 boles amb 3 negres. S'agafa una caixa a l'atzar i d'aquesta caixa es treu una bola, també a l'atzar. Comprova que la probabilitat que la bola sigui negra és  $113/360$ .
15. Tenim una moneda trucada la probabilitat de la qual d'obtenir cara és  $3/5$  i la de creu és  $2/5$ . Si surt cara s'escull a l'atzar un nombre de l'1 al 8, i si surt creu, s'escull un nombre de l'1 al 6. Calcula la probabilitat que el nombre escollit sigui imparell.
16. Antoni, Joan i Jordi tenen una prova de natació. Antoni i Joan tenen la mateixa probabilitat de guanyar, i doble a la probabilitat de Jordi. Calcula la probabilitat que guanyi Joan o Jordi.
17. Llancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que la suma sigui 1, sigui 2, sigui 3, .... sigui 12.
18. Llancem una moneda 50 vegades, què és més probable, obtenir 50 cares seguides o obtenir en les primeres 25 tirades cara i en les 25 següents creu? Raona la resposta.
19. Una moneda està trucada. La probabilitat d'obtenir cara és doble que la d'obtenir creu. Calcula les probabilitats dels successos obtenir cara i d'obtenir creu en tirar la moneda.
20. Tenim un dau trucat de manera que els nombres imparells tenen una probabilitat doble a la dels nombres parells. Calcula les probabilitats de: A) Surti un nombre imparell. B) Surti un nombre primer. C) Surti un nombre primer imparell. D) Surti un nombre que sigui primer o sigui imparell.
21. En un grup de 12 amigues hi ha 3 rosses. Es trien dues noies a l'atzar. Calcula la probabilitat que: A) Ambdues siguin rosses. B) Almenys una sigui rossa. C) Cap sigui rossa. D) Una sigui rossa i l'altra no.
22. Llancem dos daus i anotem els valors de les cares superiors. Calcula les probabilitats que: A) Els nombres obtinguts siguin iguals. B) Els nombres obtinguts difereixin en 3 unitats. C) Els nombres obtinguts siguin parells.

23. Llancem una moneda fins que surti cara. Calcula la probabilitat que: A) Surti cara abans del quart llançament. B) Surti cara després del vuitè llançament.
24. Un lot de 20 articles té 2 defectuosos. Es treuen 4 a l'atzar, quin és la probabilitat que cap sigui defectuós?

## DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT DISCRETES. LA BINOMIAL

- En una distribució binomial  $B(10, 0.3)$  calcula  $P(x = 0)$ ,  $P(x \neq 0)$ ,  $P(x = 10)$  i  $P(x = 7)$ . Determina també la mitjana i la desviació típica.
- Llancem 5 monedes, calcula les probabilitats d'obtenir:
  - 0 cares,
  - 1 cara,
  - 2 cares,
  - 3 cares
- Es llança un dau tres vegades i es compta el nombre de trossos que apareixen. Es considera la variable aleatòria "nombre de trossos obtinguts". Representa la distribució de probabilitat. Calcula la mitjana i la desviació típica.
- La població activa d'un cert país es pot dividir en els quals tenen estudis superiors i els que no els tenen, sent el primer d'un 20%. Triem 10 persones de la població activa a l'atzar. Escriu l'expressió de totes les possibilitats i les seves probabilitats. Calcula la probabilitat que hi hagi 9 o 10 que tinguin estudis superiors.
- S'estima que el percentatge de llars que utilitza una determinada marca de tomàquet fregit és del 12%. En una mostra de 20 llars, quina probabilitat hi ha de trobar entre 6 i 15 que ho utilitzin? (No ho calculis, només planteja com ho calcularies).
- Una escola té 500 alumnes 20 dels quals són esquerrans. N'elegim tres a l'atzar. Quina és la probabilitat que almenys un sigui esquerrà? Supposeu que en cada elecció d'un alumne, la probabilitat que sigui esquerrà és la mateixa.
- Si la probabilitat que un nen pateixi hemofília és 0,0001, quina és la probabilitat que hi hagi al menys un nen hemofílic en una escola que té 500 alumnes?
- La probabilitat de contreure una malaltia per contacte amb una persona malalta és de  $\frac{2}{3}$ . Calculeu la probabilitat de contreure-la que té una persona sana que s'exposa a contacte successiu de dos malalts.
- La probabilitat que els cargols que fabrica una determinada empresa siguin defectuosos és del 10%, però que un cargol sigui defectuós és independent del fet que un altre ho sigui o no. Els cargols s'empaqueten en caps de 5 unitats. Calculeu quina probabilitat tindrem que en una capsa no hi hagi cap cargol defectuós.
- El 20% d'un model de bombetes és defectuós. En una mostra de 5 bombetes, calculeu la probabilitat que exactament dues bombetes siguin defectuoses.
- El 4% dels USB d'ordinador que fabrica una determinada empresa resulten defectuosos. Els USB es distribueixen en caps de 5 unitats. Calculeu la probabilitat que en una capsa no hi hagi cap disquet defectuós.
- La probabilitat que un tirador amb arc faci diana és 0,2. Si fa 5 intents independents, calculeu la probabilitat que faci exactament 3 dianes.
- Llancem dues monedes i anotem el nombre de cares. Calcula la mitjana i la desviació típica d'aquest experiment.
- Considera l'experiment de llançar una moneda 3 vegades. Indica les següents probabilitats. A) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor que 1. B) Probabilitat que el nombre de cares sigui menor o igual a 1.
- Calcula la probabilitat que en llançar una moneda 15 vegades el nombre de cares sigui menor que 5.
- Escriu l'expressió (no ho calculis) de la probabilitat que en llançar un dau 15 vegades el nombre de cincs sigui major que 10.
- En el control de qualitat de bombetes de baix consumeix d'una fàbrica s'ha comprovat que el 90% són bones. Es pren una mostra de 500 bombetes. De mitjana, quantes seran de bona qualitat? Calcula la mitjana, variància i desviació típica.
- En l'estudi sobre una nova medicina per a l'hepatitis C s'ha comprovat que produeix curacions completes en el 80% dels casos tractats. S'administra a mil nous malalts, quantes curacions esperarem que es produeixin?
- S'ha comprovat que la distribució de probabilitat del sexe d'un nou-nat és:

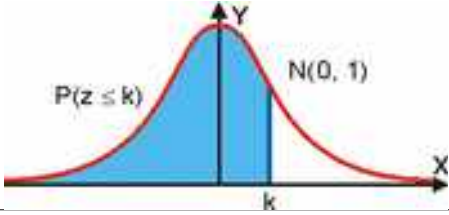
<b>Sexe del nou-nat:</b>	noia	noi
<b>Probabilitat:</b>	0'485	0'515

En un hospital van a néixer avui 10 bebès. Escriu l'expressió de probabilitat que neixin 7 noies.

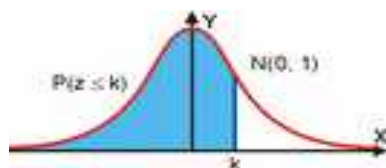
## DISTRIBUCIONS DE PROBABILITAT CONTÍNUES. LA NORMAL

20. Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:
21. a)  $P(z = 0)$ , b)  $P(z < 0)$ , c)  $P(z = 1'82)$ , d)  $P(z > 1'82)$ .
22. Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:
23. a)  $P(z > 4)$ , b)  $P(z < 4)$ , c)  $P(z > 1)$ , d)  $P(z < 1)$ .
24. Calcula en una distribució normal estàndard les probabilitats següents:
25. a)  $P(1 < z < 2)$ , b)  $P(-1'3 < z < 4)$ , c)  $P(-0'2 < z < 2'34)$ , d)  $P(-1 < z < 1)$ .
26. Calcula en una distribució normal  $N(1, 2)$  les probabilitats següents:
27. a)  $P(x > 4)$ , b)  $P(x < 4)$ , c)  $P(x > 1)$ , d)  $P(x < 1)$ .
28. Calcula en una distribució normal  $N(0'5, 0'2)$  les probabilitats següents:
29. a)  $P(x > 4)$ , b)  $P(x < 4)$ , c)  $P(x > 1)$ , d)  $P(x < 1)$ .
30. Calcula en una distribució normal  $N(1, 1/2)$  les probabilitats següents:  
 a)  $P(1 < x < 2)$ , b)  $P(-1'3 < x < 4)$ , c)  $P(-0'2 < x < 2'34)$ , d)  $P(-1 < x < 3)$
31. Les alçades de les persones d'una certa població es distribueixen segons una normal de mitjana 180 cm i desviació típica 15 cm. Determina les probabilitat que:  
 a) Una persona tingui una alçada superior a 190 cm.  
 b) Una persona tingui una alçada menor a 160 cm.  
 c) Quina proporció de persones tenen una alçada compresa entre 160 cm i 190 cm?
32. En un examen per entrar en un cos de l'Estat se sap que els punts obtinguts es distribueixen segons una normal de mitjana 100 i desviació típica 10 punts. Determina la probabilitat que:  
 a) Un opositor obtingui 120 punts.  
 b) Si per aprovar és necessari tenir més de 120 punts, Quin percentatge d'opositors aproven?  
 c) Si aproven únicament els que estan entre el 20 % dels millors, quants punts d'obtenir un opositor per aprovar?
33. Es llança una moneda mil vegades, quin és la probabilitat que el nombre de cares obtingudes estigui entre 400 i 600? I que sigui major que 800?
34. En una fàbrica de bombetes de baix consum se sap que el 70% d'elles tenen una vida mitjana superior a 1000 hores. Es pren una mostra de 50 bombetes, quin és la probabilitat que hi hagi entre 20 i 30 la vida mitjana de la qual sigui superior a mil hores?, i la probabilitat que hi hagi més de 45 la vida mitjana de la qual sigui superior a 1000 hores?
35. Una companyia aèria ha estudiat que el 5% de les persones que reserven un bitllet per a un vol no es presenten, per la qual cosa venen més bitllets que les places disponibles. Un determinat avió de la companyia té 260 places (amb el que solen reservar fins a 270). Calcula la probabilitat que arribin 260 passatgers. En 500 vols d'aquest avió, en quants consideres que hi haurà excés de passatgers?
36. Es llança 600 vegades un dau i mirem el nombre de 5s. a) Quin és l'interval simètric respecte de la mitjana amb una probabilitat de 0'99? b) El mateix amb una probabilitat del 0'6.

## RESUM

Propietats de la distribució de probabilitat discreta	1) $p(x) \geq 0$ 2) $\sum p(x) = 1.$	Llançem dues monedes i expliquem el nombre de cares: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: top;"> <tr> <td>Nombre de cares (x):</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>Probabilitat</td> <td>1/4</td> <td>1/2</td> <td>1/4</td> </tr> <tr> <td>Funció de distribució F(x):</td> <td>1/4</td> <td>3/4</td> <td>4/4</td> </tr> </table>	Nombre de cares (x):	0	1	2	Probabilitat	1/4	1/2	1/4	Funció de distribució F(x):	1/4	3/4	4/4
Nombre de cares (x):	0		1	2										
Probabilitat	1/4	1/2	1/4											
Funció de distribució F(x):	1/4	3/4	4/4											
Propietats de funció de distribució contínua	1) $0 \leq F(x) \leq 1$ 2) $F(x)$ és una funció creixent 3) $F(x_{M\grave{a}xim}) = 1$													
Esperança matemàtica		$\mu = 0 \cdot (1/4) + 1 \cdot (1/2) + 2 \cdot (1/4) = 1$												
Variància i desviació típica		$\sigma^2 = (0-1)^2 \cdot (1/4) + (1-1)^2 \cdot (1/2) + (2-1)^2 \cdot (1/4) = 1/2.$												
Distribució binomial	$E(x) = \mu = n \cdot p,$ $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$	$B(10, 1/2).$												
Distribució normal														
Aproximació de la binomial a la normal	Una binomial amb $npq \geq 9$ es considera s'ajusta bé a una normal d'igual mitjana i desviació típica.													

## ÀREES SOTA LA DISTRIBUCIÓ DE PROBABILITAT NORMAL ESTÀNDARD, $N(0, 1)$



*Taula de la uam: Universitat Autònoma de Madrid*

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

## ANNEXOS IES BINISSALEM



## 1. PROPIETATS DELS RADICALS I LOGARITMES

### Radicals:

**Def.:** Permeten resoldre l'equació  $x^n = a \rightarrow x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ . Exemple:  $x^3 = 8 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$   
**Nota:** Si  $a > 0$ ,  $\sqrt[n]{a}$  existeix sempre. Si  $a < 0$ ,  $\sqrt[n]{a}$  existeix només per  $n$  senar.

	Propietat	Exemple
1. Producte mateix índex	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$
2. Quocient mateix índex	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a/b}$	$\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{6}$
3. Potència d'una arrel	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	$(\sqrt[4]{2})^3 = \sqrt[4]{8}$
4. Arrel d'una arrel	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$
5. Introduir un factor dins l'arrel	$k \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot k^n}$	$2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = \sqrt{20}$
6. Extreure un factor d'una arrel	$\sqrt[n]{a \cdot k^n} = k \cdot \sqrt[n]{a}$	$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 27} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$
7. Radicals equivalents	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot q]{a^q}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[9]{2^3} = \dots$
8. Operació amb diferent índex $q = m \cdot c \cdot m(n, m)$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[q]{a^{q/n} \cdot b^{q/m}}$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 12 \cdot 3^3} = \sqrt[12]{432}$
9. Racionalitzar	$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{\sqrt[4]{125}}{5}$
10. Racionalitzar	$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$	$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$

### 11. Reduir a un únic radical

a) Introduir tots els factors dins l'arrel més interna (5), b) aplicar la propietat (4)

$$\text{Exemple: } \sqrt{a \sqrt[3]{a^2} \sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^5} \sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{11}}} = \sqrt[12]{a^{11}}$$

### 12. Simplificar expressions amb radicals

a) Aplicar (6) per extreure tots els factors possibles de cada arrel, b) operar només arrels iguals

$$\text{Exemple: } \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^3} + \sqrt[3]{3 \cdot 3^3} = \boxed{3 \sqrt[3]{2} + 2 \sqrt[3]{2}} + 3 \sqrt[3]{3} = 5 \sqrt[3]{2} + 3 \sqrt[3]{3}$$

### Logaritmes:

**Def.:** Permeten resoldre l'equació  $b^x = a \rightarrow x = \log_b a$ . Exemple:  $10^x = 1000 \rightarrow x = \log_{10} 1000 = 3$   
**Logaritmes decimals en base 10:**  $\log a$       **Logaritmes neperians en base e:**  $\ln a$   
**Nota:** Els logaritmes només existeixen quan  $b > 0$  i  $a > 0$ .

	Propietat	Exemple
1. logaritme de 1 en qualsevol base	$\log_b 1 = 0$	$\log 1 = \ln 1 = \log_5 1 = \dots = 0$
2. logaritme de la base	$\log_b b = 1$	$\log 10 = \ln e = \log_5 5 = \dots = 1$
3. base elevat al seu logaritme	$b^{\log_b a} = a$	$10^{\log 1000} = 10^3 = 1000$
4. logaritme d'un producte	$\log_b A \cdot C = \log_b A + \log_b C$	$\log 12 = \log 3 \cdot 4 = \log 3 + \log 4$
5. logaritme d'un quocient	$\log_b \frac{A}{C} = \log_b A - \log_b C$	$\log 50 = \log \frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - \log 2$
6. logaritme d'una potència	$\log_b A^n = n \cdot \log_b A$	$\log 81 = \log 3^4 = 4 \cdot \log 3$
7. fórmula del canvi de base	$\log_b A = \frac{\log A}{\log b} = \frac{\ln A}{\ln b} = \dots$	$\log_5 2 = \frac{\log 2}{\log 5} = 0,43067\dots$



## 2. ACTIVITATS INICIALS – REPÀS 4t ESO

### CÀLCUL AMB RADICALS

1. Expressa com un sol radical:

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$  =      b)  $\sqrt[4]{\sqrt{8}}$  =      c)  $\sqrt{\sqrt{x^3}\sqrt{x}}$  =

2. Simplifica, extraient tots els factors que puguis del radical:

a)  $\sqrt[4]{64}$  =      b)  $\sqrt{243}$  =      c)  $\sqrt[9]{216}$  =      d)  $\sqrt[8]{1024}$  =

e)  $\sqrt[15]{243}$  =      f)  $\sqrt[6]{2401}$  =      g)  $\sqrt[16]{49}$  =      h)  $\sqrt[14]{128}$  =

3. Redueix el radical a l'índex indicat:

a)  $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$       b)  $\sqrt{7} = \sqrt[6]{7^3}$       c)  $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3}$       d)  $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^8}$

4. Expressa com un sol radical (reduïx, primer de tot, els radicals a índex comú i simplifica si pots):

a)  $\frac{\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[3]{25}}{\sqrt{8}}$       b)  $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{6}}$       c)  $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}}$       d)  $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{24}}}}$   
 e)  $(\sqrt[5]{64})^4$       f)  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5^9}}$       g)  $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3^2}}}$       h)  $(\sqrt{\sqrt[3]{125}})^4$

5. Calcula, extraient primer factors fora dels radicals:

a)  $\sqrt{1331} - \sqrt{44} + 2\sqrt{99} =$       b)  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{686} - 3\sqrt[3]{2} =$   
 c)  $2\sqrt{54} - \sqrt{216} - \sqrt{\frac{6}{25}} =$       d)  $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{\frac{2}{81}} - 7\sqrt[4]{2} =$   
 e)  $2\sqrt{3} - \frac{1}{5}\sqrt{27} + \frac{2}{3}\sqrt{12} =$       f)  $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \frac{1}{5}\sqrt{128} =$

6. Racionalitza:

a)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$  =      b)  $\frac{3}{2\sqrt[4]{2}}$  =      c)  $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$  =  
 d)  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$       e)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$  =      f)  $\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$  =

7. Racionalitza:

a)  $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$       b)  $\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$       c)  $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$

8. Opera, racionalitza i simplifica

a)  $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{8}} =$       b)  $\frac{\sqrt[4]{2}}{2} =$       c)  $\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} =$       d)  $(4\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot (4\sqrt{5} - 3\sqrt{5}) =$   
 e)  $2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2^5} =$       f)  $\left(\frac{5}{2} - \sqrt{2}\right)^2 =$       g)  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{7}}{2 - \frac{4}{6}} =$

**OPERACIONS ALGEBRAIQUES**

9. Opera, racionalitza i simplifica  $\left(1 + \left(1 + \sqrt{a}\right)^2\right)^2 =$

10. Efectua les **divisions** de polinomis dient quin és el **quocient** i **residu**.

a)  $6x^5 - x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x$  per  $2x^2 - 3x + 2$

b)  $2x^3 + 2x + 1$  per  $x^2 - x + 1$

c)  $ax^4 + b$  per  $x - 1$  \*

e)  $x^9 - x^8 + x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$  per  $x - 1$  \*

\*Ruffini

11. Factoritza els polinomis fent servir la regla de Ruffini (pensa a extreure factor comú quan sigui necessari).

a)  $p(x) = 3x^2 + 9x + 6 =$

b)  $p(x) = x^5 - 9x^3 =$

c)  $p(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 =$

d)  $p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6 =$

e)  $p(x) = x^4 - x^3 + 8x^2 - 4x =$

f)  $p(x) = x^3 - 3x - 2 =$

g)  $p(x) = 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20 =$

h)  $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 =$

i)  $p(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 =$

12. Opera les fraccions algebraiques (ajuda: cercau el m.c.m. i reduïu a denominador comú)

a)  $\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} =$

b)  $\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} =$

c)  $\frac{2(x-3)}{x^2+2x-3} - \frac{3}{x+3} =$

d)  $\frac{1}{t} + \frac{1-t}{t^2+2t} - \frac{2}{t+2} =$

e)  $\frac{2x+6}{x} - \frac{2x^2+4x-6}{x^2-x} =$

f)  $x^4 - (1-x^2)^2 - 2x^2 + \frac{1}{x^2} =$

g)  $\left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \left(\frac{4}{(1+x)^2} - \frac{x+1}{x-1} + \frac{x}{x+1}\right) =$

13. Opera i simplifica les fraccions algebraiques

a)  $\frac{x}{3x+3} \cdot \frac{x^2-1}{x^3+2x^2} =$

b)  $\frac{2x}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x+5} =$

c)  $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x^2}{x^2-1} =$

d)  $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{3x+1}{x^2+3} =$

e)  $\frac{x^2+x+1}{x+1} \cdot \frac{x}{x^2-1} =$

f)  $\frac{1}{x^2-4} \cdot \frac{1}{2-x} =$

a)  $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x} =$

h)  $\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{x^3}{x^5-1} =$

**RESOLUCIÓ D'EQUACIONS**

14. Resol les equacions primer traient factor comú i factoritzant el polinomi

a)  $x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8 = 0$

b)  $3x^3 - 75x = 0$

c)  $x(x+1) = 2$

d)  $x^3 + 6 = \frac{4x^3 + 7x^2 - 2x}{x+2}$

e)  $x(x^2 - 5x - 13) + 77 = \frac{60}{x}$

f)  $x^3 - 1 = 0$

- g)  $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$       h)  $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6 = 0$   
 i)  $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$       j)  $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12 = 0$   
 k)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$       l)  $x^2(x - 4) = 5x$

15. Resol les següents equacions i comprova les solucions:

- a)  $\sqrt{x+1} = 3$       b)  $x - 2 = \sqrt{x}$       c)  $\sqrt{x+4} = 3$   
 d)  $\sqrt{x+2} = x - 4$       e)  $\sqrt{x+2} = x$       f)  $\sqrt{\sqrt{x+2}} = 14$   
 g)  $\sqrt{\sqrt{x-1}+1} = 2$       h)  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$       i)  $\sqrt{x-2} = \sqrt{x+5} - 1$   
 j)  $\sqrt{x+7} - 1 = \sqrt{x-4}$       k)  $\sqrt{x+2} = x - \sqrt{x+86}$       l)  $\sqrt{10-x} - \sqrt{x+3} = x$

16. Resol els sistemes lineals

- a)  $\begin{cases} 5y - 3x = 72 + 5x \\ 15x = y - 1 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x + 2y = 22 \\ 5(x - 5) = y - 3 \end{cases}$   
 c)  $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 8 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = -3 \end{cases}$   
 e)  $\begin{cases} 3(x + y) - 1 = 5x - 4y \\ 2x + 3(y + 1) = x + 3(x + y - 1) \end{cases}$       f)  $\begin{cases} 4(x - 1) - 3(y + 2) = -5y + x \\ 5(x + 3) = 2y - 3(y + x) + 7 \end{cases}$

17. Resol

- a)  $\frac{1-x}{6} + \frac{x-1}{3} = \frac{2x^2-1}{2}$       b)  $\frac{2x}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{13x+1}{3x}$   
 c)  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{5}{6}$       d)  $\frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 3$   
 e)  $\begin{cases} x + y - xy = 7 \\ x - y - xy = -1 \end{cases}$       f)  $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 + 3xy = 0 \end{cases}$   
 g)  $\begin{cases} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$       h)  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

18. Calcula el valor dels logaritmes fent servir la definició  $b^x = a$ ;  $x = \log_b a$

- a)  $\log_2 2^{-3}$       d)  $\log 100$       g)  $\ln \sqrt[3]{e}$   
 b)  $\log \frac{1}{100}$       e)  $\log_3 \frac{1}{81}$       h)  $\log_8 64^2$   
 c)  $\ln e^{-10}$       f)  $\log_5 25$       i)  $\ln \frac{1}{e^{-1}}$

19. Resol les equacions exponencials

- a)  $2^x = 11$       b)  $5^{x+1} = 21$       c)  $e^{4x+3} = 123.6$   
 d)  $7^{3x} = 4747561509943$       e)  $3^{4x} \cdot 3^{11x+3} = 872$       f)  $2^x = 16$

g)  $8^x = 512$

h)  $5^{x-2} = 125$

i)  $2^x \cdot 2^{x-1} \cdot 2^{x+1} = 64$

j)  $7^{3x-2} = \sqrt{7^{x-1}}$

k)  $5^{x+1} + 5^{x-2} + 5^x = \frac{151}{25}$

20. Resol les equacions logàrímiques (*Recorda:  $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$* )

a)  $\log_2(x) = 4$

b)  $\log_3(2x) = 1$

c)  $\log_4(x-6) = 0$

d)  $\log_{10}(x-2) = -1$

e)  $\log_2(8) = x$

f)  $\log_5(2x+1) = 1$

g)  $\log_3(5-x) = 2$

h)  $\log_2(x^2) = -2$

21. Representa gràficament les funcions, indicant el domini i el recorregut.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = \sqrt{x}$

c)  $f(x) = x^2$

d)  $f(x) = 10^x$

e)  $f(x) = \log x$

f)  $f(x) = |1-x|$

\*  $|\dots|$  = valor absolut

### **SOLUCIONS:**

1. a)  $\sqrt[6]{5}$       b)  $\sqrt[8]{8}$       c)  $\sqrt[8]{x^7}$

2. a)  $2\sqrt{2}$     b)  $9\sqrt{3}$     c)  $\sqrt[3]{6}$     d)  $2\sqrt[4]{2}$     e)  $\sqrt[3]{3}$     f)  $\sqrt[3]{49}$     g)  $\sqrt[8]{7}$       h)  $\sqrt{2}$

3. a)  $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[12]{2^9}$     b)  $\sqrt{7} = \sqrt[16]{7^8}$     c)  $\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3}$     d)  $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[3]{5^6} = 5^2$

4. a)  $\sqrt[3]{(5/4)^2}$     b)  $\sqrt[12]{2^3 \cdot 3}$     c)  $\sqrt[12]{5^7}$     d)  $2^3$     e)  $2^4 \cdot \sqrt[5]{2^4}$     f)  $\sqrt{5}$     g) 3    h)  $5^2$

5. a)  $15\sqrt{11}$     b)  $6\sqrt[3]{2}$     c)  $-\sqrt{6}/5$     d)  $-14\sqrt[4]{2}/3$     e)  $41\sqrt{3}/15$     f)  $13\sqrt{2}/5$

6. a)  $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{3}$     b)  $\frac{3}{4}\sqrt[4]{2^3}$     c)  $3(\sqrt{2+1})$     d)  $3+2\sqrt{2}$     e)  $(\sqrt{10}-\sqrt{6})/2$     f)  $-(9+4\sqrt{5})$

7. a)  $\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$       b)  $(2\sqrt{2}+\sqrt{5})/3$       c)  $\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}{x(x+1)}$

8. a)  $3\sqrt{6}$     b)  $\frac{\sqrt[4]{2^3}}{2}$     c)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     d) 35    e)  $2^{-64/15}$     f)  $33/4-5\sqrt{2}$     g)  $39/56$

9.  $(2+a)^2 + 4(2+a)\sqrt{a} + 4a$

10. a)  $Q(x)=3x^3+4x^2-x+2; R(x)=-4$

b)  $Q(x)=2x+2; R(x)=2x-1$

c)  $Q(x)=a(x^3+x^2+x+1); R(x)=a+b$

d)  $Q(x)=x^8+x^6+x^4+x^2+1; R(x)=0$

11. a)  $3(x+2)\cdot(x+1)$     b)  $x^3(x+3)(x-3)$     c)  $4(x+3)(x+1)(x-1)$     d)  $-2(x+1)^2\cdot(x-3)$

e)  $x(x^3-x^2+8x-4)$     f)  $(x+1)^2\cdot(x-2)$     g)  $2(x+1)(x-2)(x-5)$     h)  $x^2(x+1)(x-3)$

i)  $(x+4)(x+1)(x-2)$

12. a)  $\frac{-4x}{(x+1)(x-1)}$     b)  $\frac{-2}{x+1}$     c)  $\frac{-1}{x-1}$     d)  $\frac{-2t+3}{t(t+2)}$     e) 0    f)  $\frac{1-x^2}{x^2}$     g)  $\frac{3x^2+5}{x(x+1)^2}$

13. a)  $\frac{x-1}{3x(x+2)}$     b)  $\frac{2(x+5)}{(x+1)^2}$     c)  $\frac{x-1}{x(x+2)}$     d) No es pot    e)  $\frac{(x^2+x+1)(x-1)}{x}$   
 f)  $\frac{1}{x+2}$     g)  $\frac{x+2}{x-1}$     h)  $\frac{2(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x}$

14. a)  $x=1, 2, -2$     b)  $x=0, 5, -5$     c)  $x=1, -2$     d)  $x=2, 3, -1, -2$     e)  $x=1, 3, 5, -4$   
 f)  $x=1$     g)  $x=-2, -1, 2$     h)  $x=-3, -1, 2$     i)  $x=-2, 2, 4$     j)  $x=-3, -2, 1$   
 k)  $x=-3, 3, -2, 2$     l)  $x=-1, 0, 5$

15. a)  $x=4$     b)  $x=4$     c)  $x=9$     d)  $x=7$     e)  $x=2$     f)  $x=38414$     g)  $x=10$     h)  $x=3$     i)  $x=11$   
 j)  $x=29$     k)  $x=14$     l)  $x=1$

16. a)  $x=1; y=16$     b)  $x=6; y=8$     c)  $x=10; y=2$     d)  $x=4; y=7$     e)  $x=3; y=1$     f)  $x=-2; y=8$

17. a)  $x=2/3, -1/2$     b)  $x=2, 1/7$     c)  $x=2, -3/5$     d)  $(1 \pm \sqrt{41})/4$     e)  $x=-1; y=4$   
 f)  $x=0; y=1$     i)  $x=-3/7; y=1/7$     g)  $x=1/2; y=2$     i)  $x=-1/2; y=-2$     h)  $x=9; y=4$

18. a) -3    b) -2    c) -10    d) 2    e) -4    f) 2    g) 1/3    h) 4    i) 1

19. a)  $\log_2 11=3,46$     b)  $\log_5 21 - 1=0,89$     c)  $(\ln 123.6 - 3)/4=0.45$     d) 5  
 e)  $(\log_3 872 - 3)/15=0,21$     f) 4    g) 3    h) 5    i) 2    j) 3/5    k) 0,0042

20. a) 16    b) 3/2    c) 7    d) 2,1    e) 3    f) 2    g) -4    h)  $\pm 1/2$

21. a)  $Dom f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ;  $Rec f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ . *Funció proporcionalitat inversa*  
 b)  $Dom f = [0, +\infty)$ ;  $Rec f = [0, +\infty)$ . *Funció radical*  
 c)  $Dom f = (-\infty, +\infty)$ ;  $Rec f = [0, +\infty)$ . *Funció quadràtica o paràbola*  
 d)  $Dom f = (-\infty, +\infty)$ ;  $Rec f = (0, +\infty)$ . *Funció exponencial creixent*  
 e)  $Dom f = (0, +\infty)$ ;  $Rec f = (-\infty, +\infty)$ . *Funció logarítmica – inversa de  $10^x$*   
 f)  $Dom f = (-\infty, +\infty)$ ;  $Rec f = [0, +\infty)$ . *Funció a trossos*

### 3. PROBLEMES DE RESOLUCIÓ DE TRIANGLES

1. El radi de la circumferència circumscrita al triangle ABC mesura  $2\sqrt{2}$  i dos dels seus angles fan  $60^\circ$  i  $45^\circ$ . Resol el triangle i troba'n l'àrea.
2. Calcula el radi de la circumferència circumscrita en el triangle de costats 13 m, 14 m i 15 m.
3. El costat d'un triangle val  $a$  i l'angle oposat fa  $\hat{A}=30^\circ$ . Calcula el costat  $a$  sabent que l'àrea de la circumferència circumscrita val  $9\pi$  unitats.
4. Si els braços d'un compàs fan 12 cm de llarg i formen un angle de  $60^\circ$ , calcula el radi de la circumferència que podem traçar amb el compàs.
5. Per determinar l'amplada d'un riu ens fixam amb un arbre que està situat en un punt  $C$  de la vorera. Arran de l'altra vorera del riu hi ha dues cases  $A$  i  $B$  separades 30 m. Des de la casa  $A$ , l'arbre i la casa  $B$  formen un angle de  $60^\circ$ . Des de la casa  $B$ , angle que forma l'arbre i la casa  $A$  és de  $75^\circ$ . Calcula l'amplada del riu.
6.  $A$  i  $B$  són dues ciutats situades a l'altra banda d'un riu de pas inaccessible. Aquestes ciutats, però, són visibles des d'altres punts accessibles  $C$  i  $D$ , separats per una longitud de 73,2 km. Suposant que els angles  $\widehat{ACD}=80^\circ 12'$ ;  $\widehat{BCD}=43^\circ 31'$ ;  $\widehat{ADC}=23^\circ 14'$ ,  $\widehat{BDC}=32^\circ$ , determina la distància entre les ciutats  $AB$ .
7. Uns excursionistes volen escalar una muntanya de la qual desconeixen l'altura. A la sortida del campament base mesuren una elevació del pic de  $30^\circ$  amb l'horitzontal. Després d'avançar 500 m per un pendent de  $10^\circ$  determinen una elevació del pic de  $45^\circ$  amb respecte l'horitzontal. Quina és l'altura de la muntanya?
8. Dos estudiants A i B observen un globus que està situat en el pla vertical que passa per ells. La distància entre els estudiants és de 4 km. Els angles d'elevació que observen els estudiants els globus són  $46^\circ$  i  $52^\circ$ , respectivament. Troba l'altura del globus respecte del terra i la distància del globus a cada estudiant.
9. Dos muntanyistes que han pujat en caps de setmana successius a dos cims veïns volen saber quina distància hi ha entre aquests dos cims. Per això han mesurat des del peu del cim A els angles d'elevació dels cims A i B que són  $65^\circ$  i  $30^\circ$ , respectivament. Després han caminat fins el peu del cim B i han mesurat els angles d'elevació dels cims A i B de  $40^\circ$  i  $47^\circ$  respectivament. La distància que hi ha entre els dos peus dels cims és de 600 m. Podem calcular l'altura i la distància entre cims?

SOLUCIONS:

1.  $\gamma=75^\circ$ ,  $a=2\sqrt{6}$ ,  $b=4$ ,  $c=2(\sqrt{3}+1)$ . Area =  $2(3+\sqrt{3})$
2.  $\sin A=4/5$ ,  $R=a/(2\sin A)=65/8=8.125$
3.  $a=3$
4. És un triangle equilàter, és a dir  $R=12$  cm
5.  $d=35,49$  m
6.  $AB=24$  km
7.  $h=554$  m
8. Distància Globus-A=3,18 km. Distància Globus-B=2,9. Altura globus=2,3 km
9. cim A= 827 m, cim B= 751 m, distància A-B entre cims=1687,3 m

## 4. CÀLCUL DE LÍMITS

Calcula els límits següents. En cas que el límit no existeixi indica quins són els límits laterals.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{2x^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4}$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x + 1}{2x - 1}$
5.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$
6.  $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$
7.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 3}{x^2 - 4}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 3}{(x - 4)^2}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x - 1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 5)$
14.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + 7)$
15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^2 - 10x + 17)$
16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$
17.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-14}{x^2}$
18.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x - 5}$
19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x^2 - 4x + 1}$
20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{5x^2 - 4x + 1}$
21.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^2 + 3x}{3x^2 - 4x + 1}$
22.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{2x + 7}$
23.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 8x}{x - 4}$
24.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2 + 8x}{x - 4}$
25.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin x$
26.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$
27.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x$
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}}$
29.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 7}{2x^2 + x + 1}$
30.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 3x + 21}{5x^2 - 4x^3 + 2x}$
31.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 10x}{-x^2 + 5x^3 - x + 3}$
32.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + x - 2x^3}{2x^2 - 3x + 11}$
33.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x - 2} - \frac{(2x^2 - 3x + 1)}{2(x - 2)} \right)$
34.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$
35.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{\sqrt{2x^3 - 4x}}$
36.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^3 + 2x}}$
37.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
38.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x}}{2x - 4}$
39.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{2 - \sqrt{2x}}$
40.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - x}{3 - x}$
41.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - \sqrt{4x - 3}}{x^2 - 9}$
42.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3} \right)$

## Solutions:

1. Laterals  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
2.  $-3/2$
3.  $-1/4$
4. Laterals  $\lim_{x \rightarrow 1/2^-} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x) = +\infty$
5. 0
6. Laterals  $\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -\infty$
7. laterals  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$
8.  $+\infty$
9. laterals  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
10. 10
11. laterals  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty$
12. 6
13.  $+\infty$
14.  $-\infty$
15.  $+\infty$
16. 0
17. 0
18. 0
19. 0
20.  $2/5$
21.  $-7/3$
22.  $+\infty$
23.  $-\infty$
24.  $+\infty$
25. -1
26. laterals  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$
27.  $-\infty$
28.  $\sqrt{3}$
29.  $1/2$
30. 0
31.  $1/5$
32.  $+\infty$
33.  $3/2$
34. 2
35. 0
36.  $+\infty$
37.  $1/4$
38. laterals  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
39. -4
40.  $2/3$
41. laterals  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$
42.  $1/2$

Notació:  $0^-$  un nombre negatiu molt proper a zero, per exemple,  $-0.0001$



## 5. CÀLCUL DE DERIVADES

Regles de derivació	Exemple
Constant per funció: $[k f(x)]' = k f'(x)$	$[8x^3]' = 8 \cdot 3x^2 = 24x^2$
Suma o resta: $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$	$[\sin x + x^2 - 3x]' = \cos x + 2x - 3$
Producte: $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	$[x^2 \sin x]' = 2x \sin x + x^2 \cos x$
Divisió: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$	$\left[\frac{x^2}{x^3-4}\right]' = \frac{2x \cdot (x^3-4) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-4)^2}$
Regla de la cadena: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$[\ln(\cos x)]' = \frac{1}{\cos x} \cdot [\cos x]' = \frac{-\sin x}{\cos x}$

1. Calcula les derivades de les funcions següents aplicant les regles de derivació

(a)  $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + x - 1$

(b)  $f(x) = 5\sqrt{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$

(c)  $f(x) = x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

(d)  $f(x) = x \cdot \ln x$

(e)  $f(x) = 3^x \cdot \tan x$

(f)  $f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^x$

(g)  $f(x) = (x + 1) \cdot \ln x \cdot \sin x$

(h)  $f(x) = 5x^2 \cdot \arctg x$

2. Calcula les derivades de les funcions següents aplicant les regles de derivació

(a)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

(b)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(c)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(d)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2}$

(e)  $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

(f)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$

(g)  $f(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(x-3) \cdot (x-4)}$

(h)  $f(x) = \frac{1}{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}$

3. Calcula les derivades de les funcions següents aplicant la regla de la cadena.

(a)  $f(x) = (x^2 + x + 1)^3$

(b)  $f(x) = (\ln(2x + 3))^5$

(c)  $f(x) = (3x^4 + 7)^5$

(d)  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 7}$

(e)  $f(x) = e^{-x^2}$

(f)  $f(x) = \sin(\ln x)$

(g)  $f(x) = \ln(\sin \sqrt{x})$

(h)  $f(x) = \ln(\operatorname{tg}(x^2 + 1))$

4. Calcula les derivades de les funcions següents

(a)  $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

(b)  $f(x) = \frac{e^{4x} + e^{-x}}{2x}$

(c)  $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{2x - 1}$

(d)  $f(x) = (\cos 2x)^2 \cdot e^{-(2x+1)^2}$

5. Calcula l'equació de la recta tangent de cada una de les funcions en el punt que s'indica:

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x = -2$

b)  $f(x) = \sqrt{10-x^2}$  en  $x = 1$

c)  $f(x) = \cos x$  en  $x = \frac{\pi}{4}$

d)  $f(x) = \ln x$  en  $x = e$

6. Determina els intervals de creixement, decreixement, els màxims i mínims de les funcions:

(a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

(b)  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(c)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$

(d)  $f(x) = x^2 e^x$

(e)  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

(f)  $f(x) = x + 5 - 2 \sin x$

7. La trajectòria d'un projectil ve donada per l'equació  $y = 10 + 2x - \frac{1}{20}x^2$  on les distàncies estan en metres. Determina l'altura màxima que assoleix.

8. Troba dos nombres que sumin 25 i tals que el doble del quadrat del primer més el triple del quadrat del segon sigui mínim.

9. Determina la mínima distància entre la paràbola  $y = x^2$  i el punt  $A(3, 3)$ .

10. Determina la mínima distància entre la hipèrbola  $y = 1/x$  i l'origen de coordenades.

11. Quines mesures té el triangle rectangle d'àrea més gran d'entre tots els que tenen 10 cm d'hipotenusa?

12. Un pagès vol tancar un cap rectangular de 3600 m<sup>2</sup> per sembra-hi. Li podries dir quines dimensions hauria de tenir perquè el cost fos mínim?

13. D'entre tots els cilindres rectes de volum fixat, troba el que tengui una superfície menor.

### SOLUCIONS ALS PROBLEMES

5. a)  $x+4y+4=0$ , b)  $x+3y-10=0$ , c)  $\sqrt{2}x + 2y - \sqrt{2}(1 + \pi/4) = 0$ , d)  $x - e y = 0$

6. a)  $x=1$  max.,  $x=3$  min., b)  $x=e$  min., c)  $x=-2$  min.,  $x=2$  max., d)  $x=0$  min.,  $x=-2$  max., e)  $x=0$  min.,

f) Mínims a  $x = \pi/3 + 2\pi n$ , Màxims a  $x = 2\pi/3 + 2\pi n$  per a tot  $n$  enter.

7.  $x = 20$ ,  $y_{\max} = 30$

8. Funció d'optimització  $f(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2$ . Mínim  $x=15$ ,  $y=10$

9. Funció d'optimització  $f(x) = 2 \cdot (x^2 - 3)^2 \rightarrow$  Mínim  $x=-1$ ,  $y=1.49 \rightarrow d = 1.2$  distància mínima

10. Funció d'optimització  $f(x) = x^2 + 1/x^2 \rightarrow$  Mínim  $x=\pm 1 \rightarrow y=3/2 \rightarrow d = 1.22$  distància mínima

11. Funció d'optimització  $f(x) = x \sqrt{100-x^2}$ . Solució màxim,  $x = y = \sqrt{50} \approx 7,07$

12. Funció optimització  $f(x) = 2(x + 3600/x)$ . Solució mínim  $x = y = 60$

13. Funció superfície  $S(r) = 2\pi(r^2 + \frac{V}{\pi r})$ . Mínim per a  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ . Superfície mínima per un Volum donat

$$S_{\min} = 6\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi}}$$

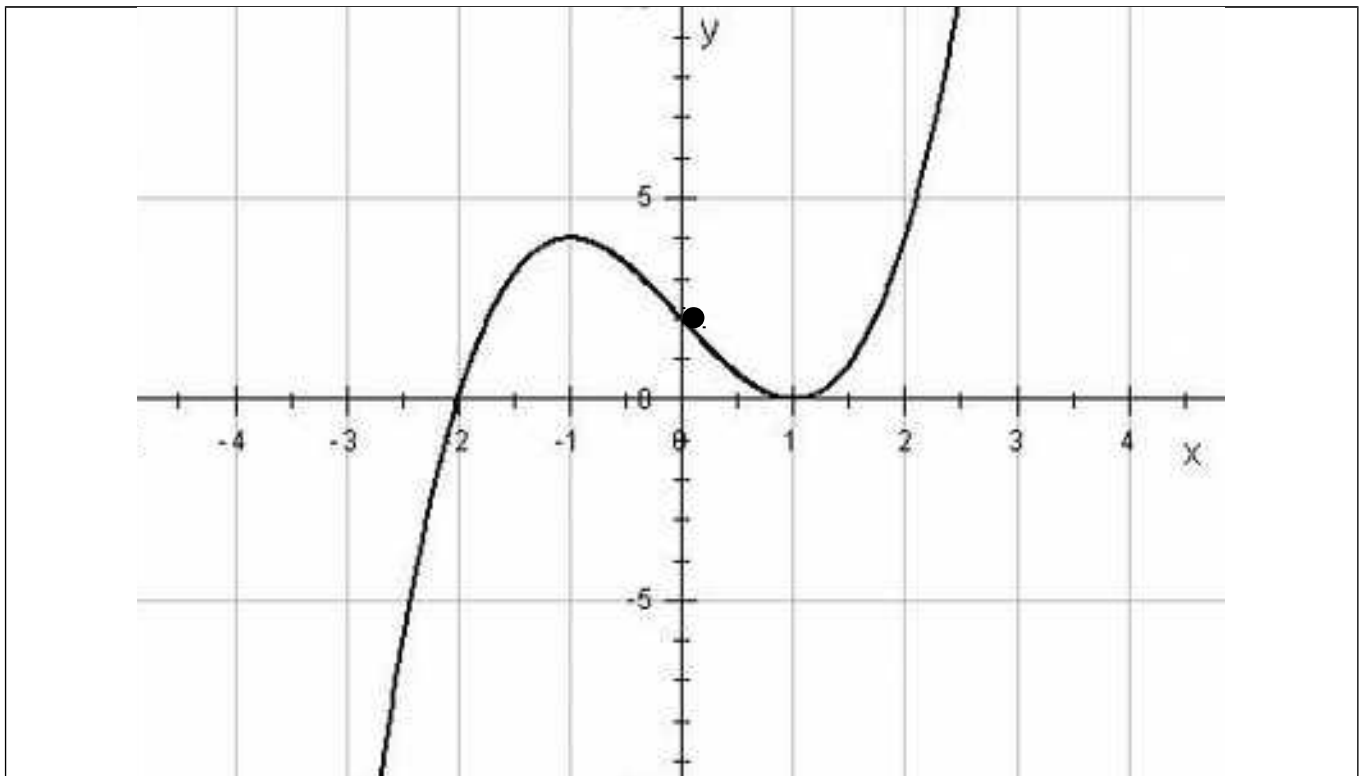
## 6. REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS

### TAULA RESUM DE REPRESENTACIÓ DE CORBES $y=f(x)$

1. <b>Domini</b> , $\text{Dom}(f)$  <b>Continuïtat</b>	Conjunt de valors de la variable independent $x$ , per als quals existeix la funció Valors del $\text{Dom}(f)$ on és contínua
2. <b>Periodicitat</b>	$f(x+T)=f(x)$ per a tot $x$ real, $T$ mínim és el període
3. <b>Simetries</b> $f$ parell $\rightarrow$ Simetria respecte eix OY $f$ senar $\rightarrow$ Simetria respecte l'origen $(0,0)$	Calculem $f(-x)$ $f(-x)=f(x)$ $f(-x)=-f(x)$
4. <b>Asímtotes</b> Verticals: $x=a$  Horizontals: $y=k$  Oblíques: $y=mx+n$  Posició de la corba respecte de les asímtotes.	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ $m = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}$ ; $n = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx]$
5. Punts de <b>tall amb els eixos</b> Eix OX Eix OY  Regions o signe	Arrels de $f(x)=0$ , cap, un o uns quants Punt $(0, f(0))$ , un o cap  $f(x)>0$ , $f(x)<0$
6. <b>Màxims i mínims</b> relatius  <b>Monotonia</b> (creixement i decreixement)	Punts crítics $f'(x)=0$ $f''(a)<0 \rightarrow$ Màxim relatiu $f''(a)>0 \rightarrow$ Mínim relatiu  $f'(x)>0 \rightarrow$ Creixent $f'(x)<0 \rightarrow$ Decreixent
7. <b>Punts d'inflexió</b>  <b>Curvatura</b> (còncava o convexa)	$f''(x)=0$ i $f'''(x) \neq 0$  $f''(a)<0 \rightarrow$ Convexa $\cap$ $f''(a)>0 \rightarrow$ Còncava $\cup$
8. <b>Gràfica</b>	Fer el dibuix
9. <b>Recorregut o imatge</b> , $\text{Rec}(f)$	Conjunt de valors que adopta la variable dependent $y$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

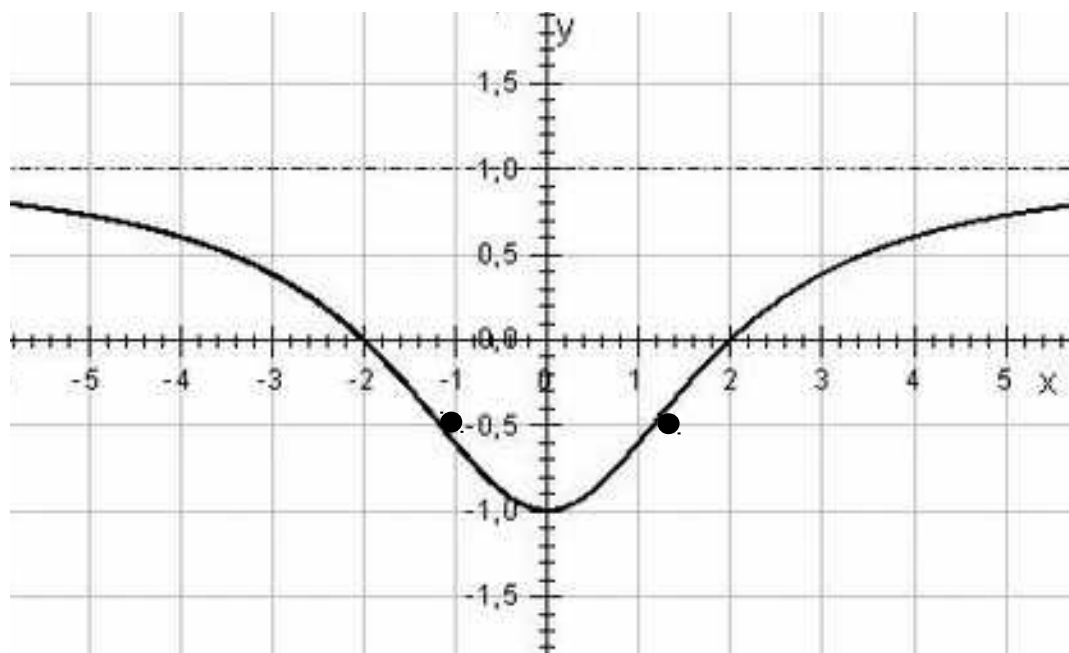
<b>1. Domini</b>	$(-\infty, +\infty)$	<b>Tipus: Polinòmica</b>
<b>2. Simetries</b>	No en té	
<b>3. Talls amb els eixos</b> Talls amb l'eix X: Tall amb l'eix Y:	$(x=-2, y=0)$ i $(x=1, y=0)$ $(x=0, y=2)$	
<b>4. Asímptotes</b>		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	No en té	
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
<b>5. Primera derivada</b>	$f'(x) = 3x^2 - 3$	
<b>Solucions <math>f'(x)=0</math></b>	$x=-1, x=1$	
<b>6. Creixement</b>	Creixent $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	Decreixent $(-1, 1)$
<b>7. Màxims i mínims</b>	Màxims $(x=-1, y=4)$	Mínims $(x=1, y=0)$
<b>8. Segona derivada</b>	$f''(x) = 6x$	
<b>Solucions <math>f''(x)=0</math></b>	$x=0$	
<b>9. Curvatura</b>	Còncava $(0, +\infty)$	Convexa $(-\infty, 0)$
<b>10. Punts d'inflexió</b>	$(x=0, y=2)$	
<b>Gràfica:</b>		



$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

<b>1. Domini</b>	$R$	<b>Tipus: Racional</b>
<b>2. Simetries</b>	Simètrica parell $f(-x)=f(x)$	
<b>3. Talls amb els eixos</b> Talls amb l'eix X: Tall amb l'eix Y:	$(x=-2, y=0)$ i $(x=2, y=0)$ $(x=0, y=-1)$	
<b>4. Asíptotes</b>		
Verticals:	No en té	
Horizontals:	$y=1$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$
Obliqües:	No en té	
Branques:	No en té	
<b>5. Primera derivada</b>	$f'(x) = \frac{16x}{(x^2 + 4)^2}$	
<b>Solucions <math>f'(x)=0</math></b>	$x=0$	
<b>6. Creixement</b>	Creixent $(0, +\infty)$	Decreixent $(-\infty, 0)$
<b>7. Màxims i mínims</b>	Màxims: no en té	Mínims: $(x=0, y=-1)$
<b>8. Segona derivada</b>	$f''(x) = \frac{64 - 48x^2}{(x^2 + 4)^3}$	
<b>Solucions <math>f''(x)=0</math></b>	$x=-1.15$ i $x=1.15$	
<b>9. Curvatura</b>	Còncava $(-1.15, 1.15)$	Convexa $(-\infty, -1.15) \cup (1.15, +\infty)$
<b>10. Punts d'inflexió</b>	$(x=-1.15, y=-0.5)$ i $(x=1.15, y=-0.5)$	

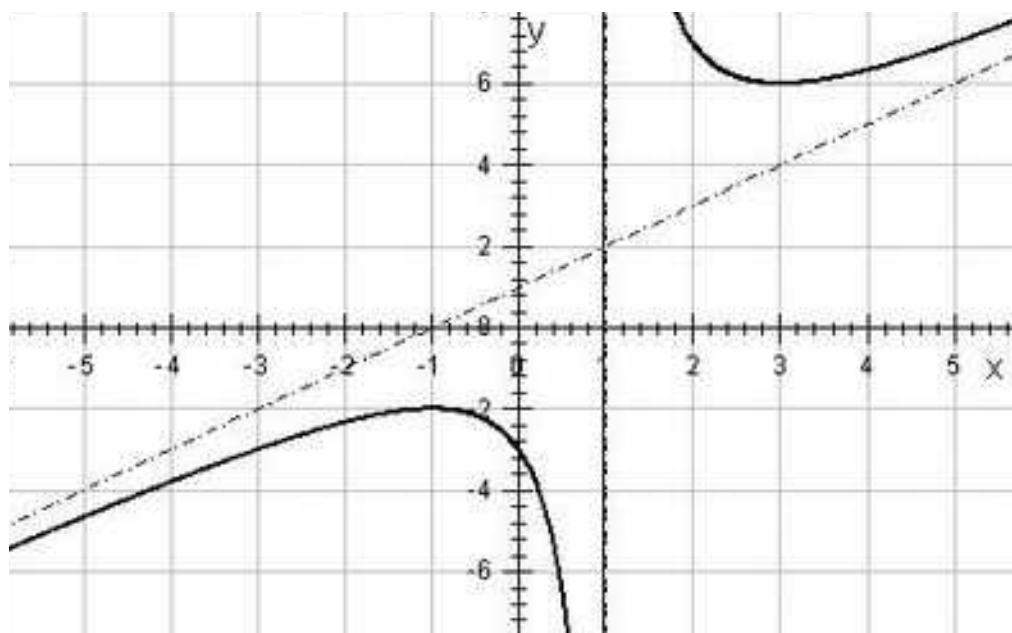
Gràfica:



$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

<b>1. Domini</b>	$R - \{1\}$	<b>Tipus: Racional</b>
<b>2. Simetries</b>	No en té.	
<b>3. Talls amb els eixos</b> Talls amb l'eix X: Tall amb l'eix Y:	<i>no hi talla</i> (x=0, y=-3)	
<b>4. Asímtotes</b>		
Verticals:	x= 1	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
Horizontals:	No en té	
Obliqües:	y = x + 1	
Branques:	No en té	
<b>5. Primera derivada</b>	$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$	
<b>Solucions <math>f'(x)=0</math></b>	x=-1 i x=3	
<b>6. Creixement</b>	Creixent ( $-\infty, -1$ ) $\cup$ ( $3, +\infty$ )	Decreixent ( $-1, 1$ ) $\cup$ ( $1, 3$ )
<b>7. Màxims i mínims</b>	Màxims (x=3, y=6)	Mínims: (x=-1, y=-2)
<b>8. Segona derivada</b>	$f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3}$	
<b>Solucions <math>f''(x)=0</math></b>	No en té	
<b>9. Curvatura</b>	Còncava ( $1, +\infty$ )	Convexa ( $-\infty, 1$ )
<b>10. Punts d'inflexió</b>	No en té	

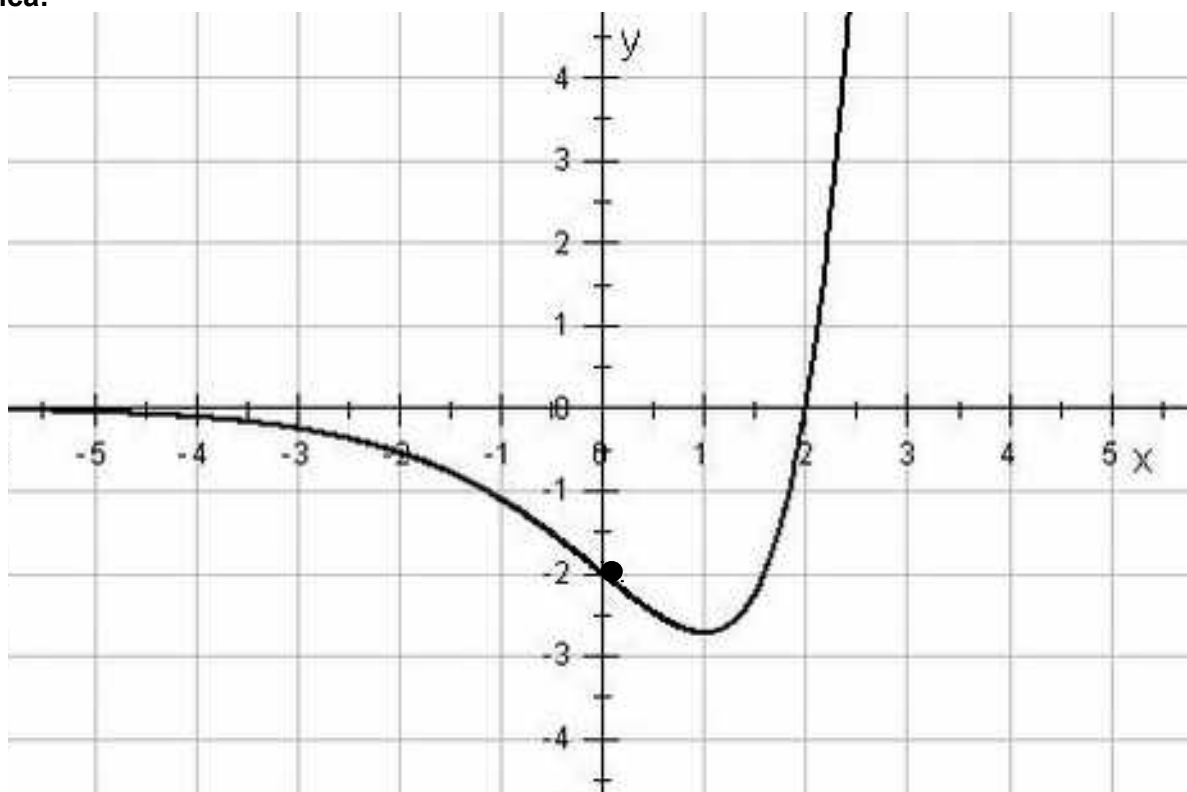
Gràfica:



$$f(x) = e^x(x - 2)$$

<b>1. Domini</b>	$R$	<b>Tipus: Exponencial</b>
<b>2. Simetries</b>	No en té	
<b>3. Talls amb els eixos</b> Talls amb l'eix X: Tall amb l'eix Y:	$(x=2, y=0)$ $(x=0, y=-2)$ <b>Regions:</b> si $x > 2, y > 0$ ; si $x < 2, y < 0$	
<b>4. Asímptotes</b>		
Verticals:	No en té	
Horitzontals:	$y=0, \text{ per a } x < 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
Obliqües:	No en té	
Branques:	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	
<b>5. Primera derivada</b>	$f'(x) = e^x(x - 1)$	
<b>Solucions <math>f'(x)=0</math></b>	$x=1$	
<b>6. Creixement</b>	Creixent $(1, +\infty)$	Decreixent $(-\infty, 1)$
<b>7. Màxims i mínims</b>	Màxims <i>no en té</i>	Mínims: $(x=1, y=-e)$
<b>8. Segona derivada</b>	$f''(x) = xe^x$	
<b>Solucions <math>f''(x)=0</math></b>	$x=0$	
<b>9. Curvatura</b>	Còncava $(0, +\infty)$	Convexa $(-\infty, 0)$
<b>10. Punts d'inflexió</b>	$(x=0, y=2)$	

Gràfica:



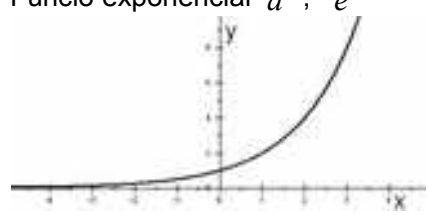
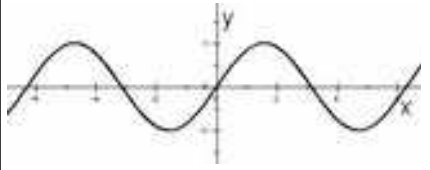
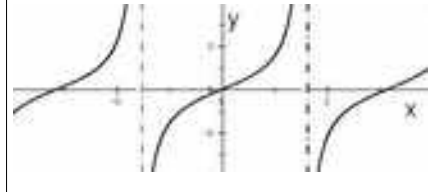
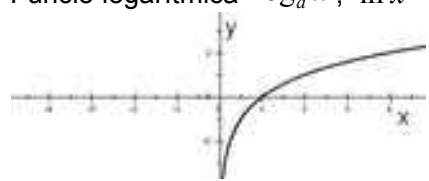
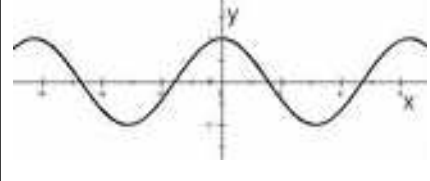
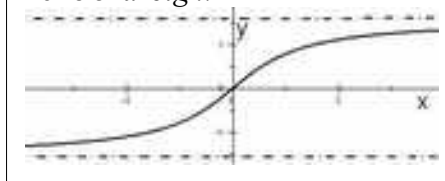


## 7. RESUM D'ANÀLISI DE FUNCIONS

## DEFINICIÓ DE FUNCIÓ

$f(x) : \text{Domini } f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Recorregut } f \subseteq \mathbb{R}$ , és una funció si per a cada valor de  $x$  del domini assigna un únic valor de  $y$  del recorregut.  $y = f(x)$  "y és la imatge de x per f"

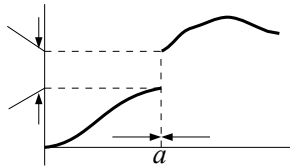
## (ALGUNES) FUNCIONS ELEMENTALS

Funció inversa $f^{-1}(x)$	-Funció exponencial $a^x$ ; $e^x$ 	-Funcions trigonomètriques sin x : 	-Funció tg x 
	-Funció logarítmica $\log_a x$ ; $\ln x$ 	cos x : 	-Funció arctg x 

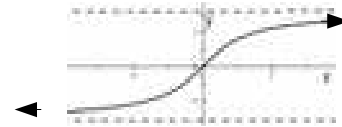
## LÍMITS – CÀLCUL DE LÍMITS

## LÍMITS LATERALS:

El límit existeix si els dos límits laterals coincideixen



## LÍMITS A L'INFINIT



Límits immediats:  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$ ;  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$ ; etc.

## Indeterminacions:

- $\frac{0}{0}$ : Factoritzar (o racionalitzar), i simplificar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x-3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x-3 = -3 ; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2) \cdot (\sqrt{x}+2)}{(x-4) \cdot (\sqrt{x}+2)} = \dots$$

- $\frac{\infty}{\infty}$ : Dividir tots els termes per la potència major de  $x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+1/x^2}{3+1/x+1/x^2} = 2/3$$

- $0 \cdot \infty$ : Es redueix al cas  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x^2} \cdot (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

- $\infty - \infty$ : Reduir a denominador comú i simplificar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x-2} - \frac{2x^2-3x+1}{2(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - (2x^2 - 3x + 1)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{2x-4} = 3/2$$

## FUNCIÓ CONTÍNUA

$f(x)$  és contínua en  $x=a$  si

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- Existeix  $f(a)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

## TIPUS DE DISCONTINUITATS

- Asíptotica. No existeix  $f(a)$  i  $\lim_{x \rightarrow a^\mp} f(x) = \mp \infty$
- De salt finit  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- Evitable -li falta un punt- No existeix  $f(a)$
- Evitable -té un punt desplaçat-  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

## ASÍMPTOTES

ASÍMPTOTES VERTICALS	ASÍMPTOTES HORIZONTALS	ASÍMPTOTES OBLIQUES
<p><math>x=a</math> és una asymptota vertical de <math>f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}</math> si s'anul·la el denominador, <math>Q(a)=0</math>. Per representar-la cal calcular els límits laterals <math>\lim_{x \rightarrow a^{\pm}} f(x)</math></p>	<p><math>y=l</math> és una asymptota horitzontal de <math>f(x)</math> si <math>\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x)=l</math>. Cal comprovar si la funció s'acosta per damunt o per davall l'asímtota.</p>	<p><math>y=mx+n</math> és una asymptota obliqua de <math>f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}</math> si el quocient de la divisió entera és <math>P(x):Q(x)=mx+n</math>.</p>

## DERIVADES

DEFINICIÓ DE DERIVADA EN UN PUNT:	FUNCIO DERIVADA:
<p><math>f'(a)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}=m</math> és un nombre. Dóna el pendent de la recta tangent a <math>f(x)</math> en el punt d'abscissa <math>x=a</math>.</p>	<p><math>f'(x)</math> és una funció. Dóna el pendent de la recta tangent a <math>f(x)</math> per a qualsevol <math>x</math>.</p> <p>A la pràctica, s'obté aplicant les regles de derivació i la taula de derivades.</p>
TAULA DE DERIVADES (ALGUNES):	REGLES DE DERIVACIÓ:
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>y=x^n \rightarrow y'=nx^{n-1}</math> per a tot <math>n</math> racional,</li> <li>- <math>y=e^x \rightarrow y'=e^x</math>; <math>y=a^x \rightarrow y'=\ln a \cdot a^x</math></li> <li>- <math>y=\ln x \rightarrow y'=\frac{1}{x}</math>; <math>y=\log_a x \rightarrow y'=\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}</math></li> <li>- <math>y=\sin x \rightarrow y'=\cos x</math></li> <li>- <math>y=\cos x \rightarrow y'=-\sin x</math></li> <li>- <math>y=\operatorname{tg} x \rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}</math></li> </ul>	<p>Regla de la cadena (funció composta)</p> $[f(u(x))]'=f'(u(x)) \cdot u'(x)$ <p>Ex.: <math>[\sin(x^3+2x)]'=\cos(x^3+2x) \cdot (3x^2+2)</math></p> <p>Producte <math>[u(x) \cdot v(x)]'=u' \cdot v + u \cdot v'</math></p> <p>Quocient <math>[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}</math></p>

## APLICACIONS DE LES DERIVADES

EQUACIÓ DE LA RECTA TANGENT:	CREIXEMENT, DECREIXEMENT, MÀXIMS I MÍNIMS:
<p>Recta tangent a la corba <math>y=f(x)</math> en el punt <math>x=a</math>, <math>y=f(a)</math></p> $y-f(a)=f'(a) \cdot (x-a)$	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Funció Creixent <math>f'(x) &gt; 0</math></li> <li>- Funció Decreixent <math>f'(x) &lt; 0</math></li> <li>- Màxim o mínim <math>f'(x)=0</math> i, a més, construir la taula de <math>f'</math> i comprovar que hi ha canvi de signe:</li> </ul>
<p>EQUACIÓ DE LA RECTA NORMAL:</p> $y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)} \cdot (x-a)$	<p>Signe <math>f'(x)</math>: ++++++0-----</p> <p style="text-align: center;">↖      ↗ Màxim relatiu</p>
PROBLEMES D'OPTIMITZACIÓ*:	REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS:
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Construir una funció a partir d'un enunciat</li> <li>- Determinar la condició de màxim o mínim</li> <li>- Analitzar i discutir el resultat</li> </ul>	<p>REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE FUNCIONS:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>FUNCIONS POLINÒMIQUES</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Punts de tall amb eixos</li> <li>- Determinar max, min</li> <li>- Branques parabòliques, etc.</li> </ul> </li> <li>- <b>FUNCIONS RACIONALS</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Punts de tall amb eixos</li> <li>- Determinar max, min</li> <li>- Asímtotes, etc.</li> </ul> </li> </ul>