Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

2º de Bachillerato

RESPUESTAS

LOMLOE

www.apuntesmareaverde.org.es

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Textos Marea Verde

1. ÍNDICE

2. Bloque 1. Álgebra

3. Bloque 2. Análisis

4. Bloque 3. Probabilidad y estadística

- 300 -

Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. II
2º Bachillerato
Capítulo 1: Matrices

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR.
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido 1000 lechugas, 2000 Kg de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1000 y 400. Por cada lechuga recibe 1 céntimo, por cada Kg de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias en el año de 2014.

Solución:

	LECHUGAS	NARANJAS (KG)	MELONES
CANTIDAD 2014	1000	2000	500
CANT. ANTES	500	1000	400
DINERO (CENTS)	1	3	5
GANANCIAS 2014 (CENTS)	1000	3000	5000

2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no.

Solución:

Son matrices a) y g); b), c) y f) se pueden representar como matrices intercambiando por números los datos; y d), e), h) e i) podrían representarse como matrices, aunque no sean numéricos, teniendo en cuenta que se disponen en filas y columnas.

3. Propón otros elementos de tu entorno que sean matrices o puedan representarse como matrices.

Solución: Respuesta libre. Ejemplos: Podrían representarse como matrices la cuadrícula de un cuaderno, un tablero de ajedrez, un casillero de tres en raya, las caras laterales de un cubo de Rubik... etc.

4. Escribe tres matrices fila

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$A = (7\ 1); \quad B = (8\quad 4\quad -3); \quad C = (9\quad 20\quad -12\quad 0)$$

5. Escribe tres matrices columna

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & -1 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4

Solución:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

calcula: a) $A + 3B$, b)$2A + B - 5C$.

Solución:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & -6 \\ -9 & 9 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2+3 & 1+3 & 0+3 \\ 9+6 & 0+6 & -3-6 \\ -2-9 & 0+9 & 7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & -9 \\ -11 & 9 & 16 \end{pmatrix}$$

b) $$2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 7 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 18 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & -25 \\ 35 & 15 & -15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1-5 & 2+1-0 & 0+1-0 \\ 18+2-10 & 0+2-20 & -6-2+25 \\ -4-3-35 & 0+3-15 & 14+3+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 10 & -18 & 17 \\ -42 & -12 & 32 \end{pmatrix}$$

10. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$ ¿es el producto conmutativo?

Solución:

a) $A \cdot B \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 18 & 0 & 0 \\ -23 & 19 & 19 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 26 & 2 & -20 \\ 15 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

Podemos observar que el producto no es commutativo.

11. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula $3 \cdot A^t - B^2$.

1. Calculamos la matriz traspuesta de A: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$
2. Calculamos $B^2 : B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 12 & 0 & -8 \\ -6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$
3. Calculamos la operación propuesta: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 12 & 0 & -8 \\ -6 & 12 & 0 \end{pmatrix} =$
4. $= \begin{pmatrix} 6 & 27 & -6 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 12 & 0 & -8 \\ -6 & 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 & -8 \\ -9 & 0 & 8 \\ 6 & -21 & 21 \end{pmatrix}$
5. Respuesta: $\begin{pmatrix} 6 & 21 & -8 \\ -9 & 0 & 8 \\ 6 & -21 & 21 \end{pmatrix}$

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

- Inversa de A $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{7}{57}&\frac{1}{19}\\1&-\frac{14}{57}&-\frac{2}{19}\\0&\frac{2}{57}&\frac{3}{19}\end{pmatrix}$

- Inversa de B: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-3&3&3&0&0&1\end{array}\right)\to\begin{matrix}-2F_1+F_2\\3F_1+F_3\end{matrix};\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&-4&-2&1&0\\0&6&6&3&0&1\end{array}\right)\to$

$$F_3+F_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&6&2&1&1&0\\0&6&6&3&0&1\end{array}\right)\to\frac{1}{6}F_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&6&6&3&0&1\end{array}\right)\to-6F_2+F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&0&4&2&-1&-1\end{array}\right)\to\frac{1}{4}F_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}-\frac{1}{3}F_3+F_2\\-F_3+F_1\end{matrix};\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\to$$

$$-F_2+F_1\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\qquad \mathbf{B^{-1}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

- Inversa de C: $\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\to\frac{1}{2}F_1\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\to-F_1+F_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\to F_2+F_1\left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&0&-1\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\to-\frac{2}{3}F_2\left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&0&-1\\0&1&3&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

- $\boldsymbol{C^{-1}}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{3}&-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\end{pmatrix}$

- Inversa de D: ∄, ya que siempre nos dará como resultado (al hacer gauss-jordan) 0 en las filas 2 y 3

13. Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Despejamos X: $M \cdot X = P - N$, $X = M^{-1}(P - N)$
2. Restamos las matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Calculamos la inversa de M: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{57} & \frac{1}{19} \\ 1 & -\frac{14}{57} & -\frac{2}{19} \\ 0 & \frac{2}{57} & \frac{3}{19} \end{pmatrix}$
4. Resolvemos: $X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{57} & \frac{1}{19} \\ 1 & -\frac{14}{57} & -\frac{2}{57} \\ 0 & \frac{2}{57} & \frac{3}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{19} & 0 & \frac{28}{57} \\ -\frac{4}{19} & 0 & -\frac{56}{57} \\ \frac{18}{19} & 0 & \frac{8}{57} \end{pmatrix}$

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Rango de A: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 + F_3 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow 9F_1 - 2F_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Por lo que r(A)=2

- Rango de B: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 2F_1 + F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

  $3F_1 + F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \quad F_2 \leftrightarrow F_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ Por lo que r(B)= 3
- Rango de C: $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad -2F_1 + F_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Por lo que r(C)=1
- Rango de D: $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 2F_1 + F_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow -3F_1 + F_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  Por lo que r(D)=1

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dadas las matrices

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y\ C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Calcula:

a) A + B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -1+0 \\ 0-1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) A-B-C= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4+1 & -1-0-2 \\ 0+1+2 & 3+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) 3·A+5·B-6·C=3·$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+20+6 & -3+0-12 \\ 0-5+12 & 9-10-18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$$

2. Para las matrices

A= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y\ B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **Calcula A·B y B·A. ¿Es el producto conmutativo?**

A·B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 1\cdot 0 & 1\cdot(-1) - 1\cdot 5 & 1\cdot 2 - 1\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 3\cdot 5 & 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 0\cdot 4 + 4\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 4\cdot 5 & 0\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

B·A= $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 - 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) - 1\cdot 3 + 2\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 2 + 3\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 5\cdot 3 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$$

A·B$\neq B \cdot A$ El producto no es conmutativo

3. Calcula los productos posibles entre las matrices:

A= $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

$- A_{3x3} \cdot B_{3x1} = M_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$- B_{3x1} \cdot A_{3x3}$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de B con las filas de A

$- A_{3x3} \cdot C_{2x3}$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A con las filas de C.

$$- C_{2x3} \cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0 & 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 & 3\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 12 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

-$B_{3x1} \cdot C_{2x3}$ = No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de B con las filas de C.

$$-C_{2x3} \cdot B_{3x1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **y B** $= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **Calcula 3·A^t – B^2.**

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 =$$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\3&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\9&12&9\\9&9&12\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-6)&1\cdot1+1\cdot0+2\cdot(-1)&1\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot0\\2\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot(-6)&2\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot(-1)&2\cdot2+0\cdot(-1)+(-1)\cdot0\\(-6)\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot(-6)&(-6)\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot(-1)&(-6)\cdot2+(-1)\cdot(-1)+0\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&3&3\\9&12&9\\9&9&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9&-1&1\\8&3&4\\-8&-6&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&4&2\\1&9&5\\17&15&23\end{pmatrix}$$

5. Para las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&-3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-5&1&4&-2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}\text{ y } D=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones si es posible:

a) $A+B=\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1+0&-1+3&2+4\\4+(-1)&0+(-2)&(-3)+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&6\\3&-2&0\end{pmatrix}$$

b) $3\cdot A-4\cdot B=3\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&-3\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3&-3&6\\12&0&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-12&-16\\4&8&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-15&-10\\16&8&-21\end{pmatrix}$$

c) **A · B =** No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A con las filas de B

d) **A · D =** $\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+(-1)\cdot1+2\cdot3\\4\cdot2+0\cdot1+(-3)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}$

e) **B · C =** $\begin{pmatrix}0&3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-5&1&4&-2\\1&0&0&-3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}0\cdot2+3\cdot(-5)+4\cdot1&0\cdot3+3\cdot1+4\cdot0&0\cdot0+3\cdot4+4\cdot0&0\cdot1+3\cdot(-2)+4\cdot(-3)\\(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-5)+3\cdot1&-1\cdot3+(-2)\cdot1+3\cdot0&(-1)\cdot0+(-2)\cdot4+3\cdot0&(-1)\cdot1+(-2)\cdot(-2)+3\cdot(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-11&3&12&-18\\11&-5&-8&-6\end{pmatrix}$$

f) $\mathbf{C \cdot D} = \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ = No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de C con las filas de D.

g) $\mathbf{A^t \cdot C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ = No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A^t con las filas de C.

6. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas pueda existir A·B y B·A?

SÍ es posible, ejemplo:

$A_{mxn} \cdot B_{nxm} = C_m$

$B_{nxm} \cdot A_{mxn} = D_n$

7.

a) Calcula $A^{50}\ y\ A^{97}$

Para resolver este ejercicio hay que ir haciendo las potencias de la matriz hasta ver que patrón siguen.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Ahora resolvemos:

$A^{50} = A^{12\cdot4+2} = A^{12\cdot4} \cdot A^2 = (A^4)^{12} \cdot A^2 = I^{12} \cdot A^2 = A^2$

$A^{97} = A^{24\cdot4+1} = A^{24\cdot4} \cdot A^1 = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = A$

b) Encuentra los valores a y b para que la matriz A conmute con la matriz B= $\begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Que conmuten significa que $A * B = B * A$ entonces primero realizamos las multiplicaciones.

$$\left\{\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} -b = 0 \\ a = 1 \\ -1 = -a \\ 0 = -b \end{array}\right\} \begin{array}{c} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \text{ luego } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

Hay que ir calculando potencias hasta encontrar el patrón

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \Big\}$ $\quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}1&4\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^4=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\quad A^n=\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

9. $Se\ dice\ que\ dos\ matrices\ A\ y\ B\ conmutan\ si:$

$A\cdot B=B\cdot A.$ $Dada\ la\ matriz\ A\ halla\ las\ matrices\ B\ que\ comuten\ con\ A.$

$$\left\{\begin{array}{c}A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\c&d\end{pmatrix}\\ B\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&2a+b\\c&2c+d\end{pmatrix}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}a+2c=a\\b+2d=2a+b\\c=c\\d=2c+d\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}a=a\\b=b\\c=0\\d=a\end{array}\right\}B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

10. encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con estas matrices.

a) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{c}A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}\\ B\cdot A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}a+c=a\\b+d=a+b\\c=c\\d=c+d\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}a=a\\b=b\\c=0\\d=a\end{array}\right\}B=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

b) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{c}A*B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\a+d&b+e&c+f\end{pmatrix}\\ B*A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+c&c&0\\e+f&f&0\\h+i&i&0\end{pmatrix}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}b+c=0\\c=0\\0\\a=e+f\\b=f\\c=0\\a+d=h+i\\b+e=i\\c+f=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{c}a=a\\b=0\\c=0\\d=d\\e=a\\f=0\\g=g\\e=d\\i=a\end{array}\right\}$$

$$B=\begin{pmatrix}a&0&0\\d&a&0\\g&d&a\end{pmatrix}$$

11.- Sean las matrices

$$\boldsymbol{A=2\cdot\begin{pmatrix}x & 2\\ 0 & m\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5\\ y\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0\\ 10x\end{pmatrix},\qquad D=10\cdot\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix},\qquad E=(3\quad m)}$$

Calcula cada uno de los productos $\boldsymbol{A\cdot B, D\cdot E, E\cdot B, C\cdot E}$.

$A\cdot B$:

$A_{2\times\mathbf{2}},\ B_{\mathbf{2}\times1}\rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$A=2\cdot\begin{pmatrix}x & 2\\ 0 & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 4\\ 0 & 2m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2x & 4\\ 0 & 2m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10x+4y\\ 2my\end{pmatrix}$$

$D\cdot E$:

$D_{2\times\mathbf{1}},\ E_{\mathbf{1}\times2}\rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$D=10\cdot\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ 10m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10\\ 10m\end{pmatrix}(3\quad m)=\begin{pmatrix}30 & 10m\\ 30m & 10m^2\end{pmatrix}$$

$E\cdot B$

$E_{1\times\mathbf{2}},\ B_{\mathbf{2}\times1}\rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$(3\quad m)\begin{pmatrix}5\\ y\end{pmatrix}=(15my)$$

$C\cdot E$

$C_{2\times\mathbf{1}},\ E_{\mathbf{1}\times2}\rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$\begin{pmatrix}0\\ 10x\end{pmatrix}(3\quad m)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 30x & 10xm\end{pmatrix}$$

12.- Sean

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ y & 3 & 5\end{pmatrix}\ \text{y}\ B=\begin{pmatrix}-1 & x & 1\\ 3 & z & x+z\end{pmatrix}}$$

dos matrices de orden $\boldsymbol{2\times3}$, en las que $\boldsymbol{x,y,z}$ denotan valores numéricos desconocidos.

a) Determina, razonadamente, los valores de $\boldsymbol{x,y,z\in\mathbb{R}}$ de manera que $\boldsymbol{A=B}$.
b) ¿Es posible el cálculo de $\boldsymbol{A\cdot B}$? Razona la respuesta.

a) $x=2;\ z=3;\ y=3$

Para que dos matrices sean iguales todos sus elementos tienen que ser iguales uno a uno.

b) No es posible el cálculo de $A\cdot B$ por que el número de columnas de A no es igual al número de filas de B, requisito necesario para multiplicar dos matrices.

13.- Sea la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz X, tal que

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}=(\mathbf{1}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{-1})$$

b) Una matriz Y, tal que

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a) $X_{1\times 3},\ A_{3\times 3}\rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$X=(a\quad b\quad c)$$

$$(a\quad b\quad c)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}=(1\quad 0\quad -1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2a+2b-5c=1 \\ a-c=0 \\ 2a-b=-1 \end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} 2a+2b-5c=1 \\ a=c \\ 2a-b=-1 \end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} 2a+2b-5a=1 \\ 2a-b=-1 \end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned} -3a+2b=1 \\ 2a-b=-1 \end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned} -3a+2b=1 \\ 4a-2b=-2 \end{aligned}\right\}$$

$a=-1\,;c=-1\,;b=2a+1=2(-1)+1=-1$

$$X=(-1\quad -1\quad -1)$$

b) No se pueden multiplicar, ya que el producto de dos matrices debe tener el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz, y en este caso, el producto solo tiene dos filas, no como la primera matriz (A) que tiene tres filas.

$$A_{3\times 3}\cdot Y_{x\times y}\neq B_{2\times 3}$$

Para poder multiplicar $A\cdot Y$, el resultado debería tener 3 filas

14.- Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{a})\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\quad \boldsymbol{b})\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix}\quad \boldsymbol{c})\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\quad \boldsymbol{d})\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$a)\ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);\ F_2=F_2+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right);\ F_1=\frac{1}{2}F_2+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right);$

$F_2=\frac{1}{2}F_2\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right);\ F_2=-1F_1+F_2\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right);\ F_2=-1F_2\rightarrow$

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right);\ F_1=2F_1\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right);\ F_1=-3F_2+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right);\ F_1=\frac{1}{2}F_1\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right) \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$b)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{r}a+2c=1\\ 4a+8c=0\end{array}\right\}\ a=1-2c\rightarrow 4(1-2c)+8c=0;\ -8c+4+8c=0;\quad \mathbf{4=0}$

$\left.\begin{array}{r}b+2d=0\\ 4b+8d=1\end{array}\right\}\ b=-2d\rightarrow 4(-2d)+8d=1;\ -8d+8d=1;\quad \mathbf{0=1}$

$No\ existe\ su\ matriz\ inversa.$

$c)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right);\ \begin{array}{l}F_2=F_1+F_2\rightarrow\\ F_3=4F_1+F_3\rightarrow\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 & 1\end{array}\right);\ F_3=-5F_2+F_3\rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -16 & -1 & -5 & 1\end{array}\right);F_1=-1F_1\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -16 & -1 & -5 & 1\end{array}\right);F_3=-\frac{1}{16}F_3\rightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16}\end{array}\right);\ F_1=F_2+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16}\end{array}\right);$

$F_1=-3F_1+F_1\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16}\\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16}\end{array}\right);\ F_2=-5F_3+F_2\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{5}{16}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16}\end{array}\right) \qquad C^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16}\\ \frac{11}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{5}{16}\\ \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16}\end{pmatrix}$$

$d)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right);\ F_1=-1F_1+F_2\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right);\ \begin{array}{l}F_2=-3F_1+F_2\rightarrow\\ F_3=-4F_1+F_3\rightarrow\end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -4 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -8 & -7 & 4 & -4 & 1\end{array}\right);\ F_2=-\frac{1}{5}F_2\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0\\ 0 & -8 & -7 & 4 & -4 & 1\end{array}\right);$

$$F_3 = 8F_2 + F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right);\ F_3 = -\frac{5}{3}F_3 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);\ F_2 = -\frac{4}{5}F_3 + F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);$$

$$F_1 = -2F_3 + F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);\ F_1 = -2F_2 + F_1 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

15.- Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

calcula $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^t$ y $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{-1}$.

$A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)^t$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 7a + 7c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{matrix}\right\}\ c = -3a \rightarrow 7a + 7(-3a) = 1;\ 7a - 21a = 1;\ -14a = 1;\ a = -\frac{1}{14};$$

$$\left.\begin{matrix} 7b + 7d = 0 \\ 3b + d = 1 \end{matrix}\right\}\ d = 1 - 3b \rightarrow 7b + 7(1 - 3b) = 0;\ \ 7b + 7 - 21b = 0;\ \ 7b - 21b = -7;$$

$$-14b = -7;\ \ b = \tfrac{7}{14}; \qquad c = -3\left(-\tfrac{1}{14}\right); c = \tfrac{3}{14} \qquad d = 1 - 3\left(\tfrac{7}{14}\right);\ d = 1 - \tfrac{3}{2};\ d = -\tfrac{1}{2}$$

$$(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{14} & \frac{7}{14}\\ \frac{3}{14} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

16.- Dada la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) Halla la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$

b) Comprueba que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$

c) Halla una matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, siendo

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix}2a-c=1\\ a+c=0\end{matrix}\right\}$ $a=-c\rightarrow\ 2(-c)-c=1;\ -2c-c=1;\ -3c=1; c=-\frac{1}{3}$

$\left.\begin{matrix}2b-d=0\\ b+d=1\end{matrix}\right\}$ $b=1-d\rightarrow 2(1-d)-d=0;\ 2-2d-d=0;\ 2d+d=2;\ \ 3d=2;$

$d=\frac{2}{3}$ $\qquad a=-\left(-\frac{1}{3}\right);\ \ a=\frac{1}{3}$ $\qquad b=1-\frac{2}{3};\ \ b=\frac{1}{3}$ $\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $A\cdot X=B,\quad Sea\ B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix}2a-c=4\\ a+c=0\end{matrix}\right\}$ $a=-c; 2(-c)-c=4;\ -2c-c=4;\ -3c=4; c=-\frac{4}{3}$

$\left.\begin{matrix}2b-d=2\\ b+d=-2\end{matrix}\right\}$ $b=-2-d;\ 2(-2-d)-d=2;\ -4-2d-d=2;\ -3d=6;\ d=-\frac{6}{3}$

$a=-\left(-\frac{4}{3}\right); a=\frac{4}{3}$ $\qquad b=-2-\left(-\frac{6}{3}\right); b=-2+\frac{6}{3};\ b=4$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 4\\ -\frac{4}{3} & -2\end{pmatrix}$$

17. Calcula la matriz inversa de

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Procedimiento:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F3-F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F3+F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F2-2F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{3F1-F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}\cdot F1\\ \frac{1}{3}\cdot F2\\ \frac{1}{3}\cdot F3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa es:

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

18. Dadas las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$ **Obtén, si procede, $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1}$.**

Tenemos que hallar C^{-1} entonces, primero multiplicamos B·A=C= $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

Luego hallamos la inversa de C:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F2-F1}\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{5F1+F2}\left(\begin{array}{cc|cc}15 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 10 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{F1}{15}\\ \frac{F2}{10}}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{15}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\end{array}\right)$$

$$(\mathrm{B}\cdot\mathrm{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & \frac{1}{15}\\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

19. Sean las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de A·B

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.

a) La matriz inversa de $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}=\mathrm{C}^{-1}$

Primero multiplicamos A·B=$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

Ahora obtenemos C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F2-2F1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F1+F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

$$\mathrm{C}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

b) Tenemos que hallar la inversa de B y la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F1+F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\qquad \mathrm{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F2-2F1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F1+2F2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F2\cdot(-1)}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$:

$$\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Observamos que el resultado de multiplicar $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}=\ \mathrm{C}^{-1}$

En el apartado "a" obtenemos la matriz inversa de C realizando este proceso: A · B = C y se halla su inversa.

En el apartado "b" también se obtiene la inversa de C, pero en lugar de multiplicar B · A, se multiplica directamente las inversas de B y A, es decir, $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$:

$\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}=\ \mathrm{C}^{-1}$

La relación que existe entre la matriz de ambos apartados es que obtenemos el mismo resultado tanto si seguimos el proceso del apartado "a" como el del apartado "b", es decir,

$(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}=\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$

20. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Comprueba que $\mathbf{A^t}$ = $\mathbf{A^{-1}}$ y calcula $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A^t})^{\mathbf{2003}}$.

Primero hallamos la matriz traspuesta de A:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que $A^t = A^{-1}$ nos falta obtener la matriz inversa de A, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 \leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente $A^t = A^{-1}$

Ahora tenemos que obtener $(A \cdot A^t)^{2003}$. Como $A^t = A^{-1}$, $(A \cdot A^t)^{2003} = (A \cdot A^{-1})^{2003} = (I)^{2003} = I$

21. Sean las matrices:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

a) **Halla $\mathbf{C^{-1}}$ y $\mathbf{D^{-1}}$**
b) **Calcula la matriz inversa de C·D**
c) **Comprueba que $(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D})^{-1}$ = $\mathbf{D^{-1}} \cdot \mathbf{C^{-1}}$.**
a) Hallamos la matriz inversa de C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1+2F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\frac{F1}{-3} \\ \frac{F2}{-1} \\ \frac{F3}{2}}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora hallamos la matriz inversa de D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+2F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F2}{3}]{\frac{F1}{6}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular la matriz inversa de C·D primero multiplicamos C·D=E = $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

A continuación, hallamos la matriz inversa de E:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F3+5F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{2F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -24 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F1}{-24},\ \frac{F2}{-6},\ \frac{F3}{8}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

c) Sabemos que $(C \cdot D)^{-1} = E^{-1}$, es decir, $(C \cdot D)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Ahora tenemos que comprobar si $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$, es decir, $D^{-1} \cdot C^{-1} = E^{-1}$
Para ello, multiplicamos $D^{-1} \cdot C^{-1}$:

Obtenemos $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, es decir, E^{-1}.

Por lo tanto, hemos comprobado que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$

22.- Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M \cdot X + N = P$; $M \cdot X = P - N$; $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot (P - N)$

$X = M^{-1} \cdot (P - N)$

$M^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-a = 1;\quad -b = 0;\quad -c = 0;\quad -d = 1$

$M^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(P - N) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

23. - Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$

b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

$a)\ A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (2B + 3I) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot (2b + 3I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$

$b)\ X \cdot A = A + I$; $X \cdot A \cdot A^{-1} = (A + I) \cdot A^{-1}$; $X = (A + I) \cdot A^{-1}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $(A + I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = (A + I) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

24. - Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $X\cdot A\cdot B-X\cdot C=2\cdot C$

$X\cdot A\cdot B-X\cdot C=2\cdot C$; $\quad X\cdot(A\cdot B-C)=2\cdot C$;

$X\cdot(A\cdot B-C)\cdot(A\cdot B-C)^{-1}=2\cdot C\cdot(A\cdot B-C)^{-1}$; $\quad X=2\cdot C\cdot(A\cdot B-C)^{-1}$

$$(A\cdot B-C)^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$2\cdot C\cdot(A\cdot B-C)^{-1}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&1\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&-1\\0&4&2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&0&1&0\\2&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

a) $rango\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}-2F_1+F_2=F'_2\to rango\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}=2;\ R(A)=2$

b) $rango\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&-1\\0&4&2\end{pmatrix}\ C_2\leftrightarrow C_1;\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\4&0&2\end{pmatrix}\ F_3-2F_1=F'_3\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix};R(A)=2$

c) $rango\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&0&1&0\\2&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ F_3\leftrightarrow F_2\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\2&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-1F_1+$
$F_2\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad R(C)=4$

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix}2&0&0&1\\2&1&3&1\\a&1&3&2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2a&1&1\\2&a&1\\2&1&a\end{pmatrix}$

$a)\begin{pmatrix}2&0&0&1\\2&1&3&1\\a&1&3&2\end{pmatrix};C_4\leftrightarrow C_1\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\1&1&3&2\\2&1&3&a\end{pmatrix}\ \begin{matrix}F'_2=-F_1+F_2\\F'_3=-2F_1+F_3\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&3&0\\0&-1&-3&a-4\end{pmatrix}$

$$F''_3 = F'_1 + F'_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} ;\ C_4 \leftrightarrow C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}$$

$si\ a \neq\ 4; rango = 3 \qquad si\ a = 4;\ rango = 2$

$$b) \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} C_3 \leftrightarrow\ C_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{matrix} F'_2 = -F_1 + F_2 \\ F'_3 = -aF_1 + F_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 1-a^2 & 2-2a^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2\cdot a \\ 0 & 1-a & 2\cdot(1-a) \\ 0 & 1-a^2 & 2\cdot(1-a^2) \end{pmatrix};\ C_2 - 2C_3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{1.}\ a \neq 1, \quad rango = 2$

$\mathbf{2.}\, a = 1\,, \quad rango = 1$

27.- Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A-2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \qquad 2A+B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3A-2B = C \\ 2A+B = D \end{cases};\ E'_2 = E_1 + 2E_2\ ;\ \begin{cases} 3A-2B = C \\ 7A = C+2D \end{cases};\ A = \tfrac{1}{7}(2D+C); \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3A-2B = C \\ 2A+B = D \end{cases};\ E'_2 = -2E_1 + 3E_2\,;\ \begin{cases} 3A-2B = C \\ 7B = -2C+3D \end{cases};\ B = \tfrac{1}{7}\cdot(3D-2C); \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

28. *Obtén las matrices X e Y para que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.*

a)

$$\begin{cases} 2X-3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X-Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1º Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$\boxed{C \rightarrow}$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\boxed{D\rightarrow}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de x e y en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$-\begin{cases} 2x-3y = C \\ x-y = D \end{cases} \rightarrow$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -3 y la primera la dejamos como está.

$$\rightarrow \begin{array}{rrcr} 2X & -3Y & = & C \\ -3X & +3Y & = & -3D \\ \hline & -X & = & C-3D \end{array} \rightarrow$$

cambiamos el signo

$$X = -C + 3D$$

3º Se resuelve.

$$\cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo que sustituir.

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{array}{c} 2X \quad -3Y \; = \quad C \\ \underline{-2X \quad +2Y \; = \; -2D} \\ -Y = C-2D \end{array} \to Y = -C + 2D \to \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{Bmatrix} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

1º; Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$\boxed{C \to} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{D \to} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de x e y en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$\begin{Bmatrix} X + Y = C \\ X - Y = D \end{Bmatrix} \to$$

En este caso se deja como está

$$\to \begin{array}{c} X \quad +Y \; = \quad C \\ \underline{X \quad -Y \; = \quad D} \\ 2X = C+D \end{array} \to$$

Despejamos

$$\to X = \frac{1}{2} \cdot (C + D)$$

3º Se resuelve.

$$\cdot X \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo.

Multiplicamos la segunda ecuación por -1 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{array}{c} X \quad +Y \; = \quad C \\ \underline{-X \quad +Y \; = \; -D} \\ 2Y = C-D \end{array} \to Y = \frac{1}{2} \cdot (C - D) \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{Bmatrix} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

1º; Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$\boxed{C \to} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\boxed{D \to} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de *x* e *y* en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$\begin{Bmatrix} 2X + Y = C \\ X + 2Y = D \end{Bmatrix} \to$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{Bmatrix} 2X+Y=C \\ \underline{-2X-4Y=-2D} \\ -3Y=C-2D \end{Bmatrix} \to \quad Y = \frac{1}{-3} \cdot (C - 2D)$$

3º Se resuelve.

$$\cdot Y \to \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/-3 & 1/-3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo.

Multiplicamos la segunda ecuación por -1/2 y la primera la dejamos como está

$$\to \frac{\begin{matrix} 2X+Y=C \\ -\frac{1}{2}X-Y=-\frac{1}{2}C \end{matrix}}{\frac{3}{2}X=C-\frac{1}{2}D} \to X = \frac{2}{3}\cdot\left(C-\frac{1}{2}D\right) \to \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

29. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1º Lo que hay que hacer en estos ejercicios es dejar en 0 todos los números debajo de la diagonal principal. Sumando, multiplicando en (positivo o negativo) las sumas… En este caso tenemos que multiplicar la $F_1 \cdot (-3)$ y sumársela a F_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to (-3 \quad -6) + (3 \quad 4) \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \mathrm{F1+F2} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to 2\cdot\mathrm{F1+F3} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to$

$-\frac{1}{2}\mathrm{F2+F3} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to -3\cdot\mathrm{F1+F2} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to -4\cdot\mathrm{F1+F3} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix} \to$

$-1\cdot\mathrm{F2+F3} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to 2\cdot\mathrm{F3+F2} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \mathrm{F3}\cdot 3+\mathrm{F4} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to -\mathrm{F2+F4} \to$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 5\\ -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\rightarrow -F2+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 5\\ -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -5\end{pmatrix}\rightarrow -\frac{1}{2}\cdot F2+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 5\\ -1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F1+F3\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 5\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{15}{2}\end{pmatrix}\rightarrow -F2+F3\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 5\\ 0 & 0 & -5 & -3\\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{15}{2}\end{pmatrix}\rightarrow -\frac{11}{10}\cdot F3+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 2 & 5 & 5\\ 0 & 0 & -5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{5}\end{pmatrix}$$

30. 30. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales. La matriz $A=\begin{pmatrix}130 & 160\\ 120 & 80\\ 210 & 130\\ 100 & 60\end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix}0.2 & 0.25 & 0.4 & 0.75\\ 0.8 & 0.75 & 0.6 & 0.25\end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{ing.} & \text{al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}1º\\ 2º\\ 3º\\ 4º\end{array} & \begin{pmatrix}130 & 160\\ 120 & 80\\ 210 & 130\\ 100 & 60\end{pmatrix}\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1º & 2º & 3º & 4º\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{red.}\\ \text{nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}75\\ 0{,}8 & 0{,}75 & 0{,}6 & 0{,}25\end{pmatrix}\end{array}$$

a) *Para obtener esta matriz debemos hacer un producto de matrices la cual se multiplicaría la matriz B por la A:* ***$B_{2x4}\cdot A_{4x2}$***

$$\begin{pmatrix}(130\cdot 0{,}2)+(120\cdot 0{,}25)+(210\cdot 0{,}4)+(100\cdot 0{,}75) & (130\cdot 0{,}8)+(120\cdot 0{,}75)+(210\cdot 0{,}6)+(100\cdot 0{,}25)\\ (160\cdot 0{,}2)+(80\cdot 0{,}25)+(130\cdot 0{,}4)+(60\cdot 0{,}75) & (160\cdot 0{,}8)+(80\cdot 0{,}75)+(130\cdot 0{,}6)+(60\cdot 0{,}25)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{Red.}\\ \text{Nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}215 & 345\\ 149 & 281\end{pmatrix}\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc}\text{red.} & \text{nor.}\\ (30 & 20)\end{array}\cdot\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{red.}\\ \text{nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}215 & 345\\ 149 & 281\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\\ (13350 & 10090)\end{array}$$

Respuesta: *La academia de idiomas gana dando ingles un total de 13350€ y en alemán 10090€.*

31.

31. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ (0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T & C & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} T \\ C \\ V \end{array}\begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix} = (8525)$$

Respuesta: El editor se gasta 8525€

32.

32. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 en la *L* y 30 en la *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ N \\ L \\ S \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 200 & 100 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{Taller} \\ \text{Admn.} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N & L & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 30 & 33 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) *Debemos hacer el producto de B y A.*

$$B \cdot A = \cdot \begin{pmatrix} 25 & 30 & 33 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 200 & 100 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (400 \cdot 25) + (200 \cdot 30) + (50 \cdot 33) & (300 \cdot 25) + (100 \cdot 30) + (30 \cdot 33) \\ (400 \cdot 1) + (200 \cdot 1{,}2) + (50 \cdot 1{,}3) & (300 \cdot 1) + (100 \cdot 1.2) + (30 \cdot 1.3) \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Taller} \\ \text{Admn.} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 17650 & 11490 \\ 705 & 459 \end{pmatrix} \end{array}$$

33.

33. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda\cdot(A + B) = \lambda\cdot A + \lambda\cdot B$. Justifica el resultado.

Dada una matriz $A \in E_{mxn}$, $A = (a_{ij})$ y $\alpha \in K$, se define el producto del escalar α por la matriz A y se denota por α·A a la matriz B $\in E_{mxn}$, cuyos elementos $b_{ij} = \alpha \cdot aij$ se obtienen a partir de los elementos de A multiplicando a todos ellos por el escalar α.

Justificamos el resultado con la siguiente formula;

$$\boldsymbol{\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \quad \to \quad \forall\, \alpha \in K \wedge \forall\, A, B \in E_{mxn}}$$

34. Sean *A* y *B* dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si *A* y *B* son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto *A·B*. Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

$Si\ \ A = A^t\ \ y\, B = \ \ B^t\ \ \ tenemos\, que\ \ \ A \cdot B = \ \ A^t\, B^t$

$Sin\ embargo\ \ (A \cdot B)^t = \ B^t \cdot A^t\ \ \ que\ no\ tiene\ que\ ser\ igual\ a\ A^t \cdot\ B^t$

Contraejemplo:

A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

A·B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1\cdot 2+1\cdot 3+3\cdot 4 & 1\cdot 3+1\cdot 4+3\cdot 5 & 1\cdot 4+1\cdot 5+3\cdot 6 \\ 1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 4 & 1\cdot 3+2\cdot 4+4\cdot 5 & 1\cdot 4+2\cdot 5+4\cdot 6 \\ 3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4 & 3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5 & 3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 18 & 22 & 27 \\ 24 & 31 & 38 \\ 38 & 50 & 62 \end{pmatrix}$

$(A \cdot B)^t$=$\begin{pmatrix} 18 & 24 & 38 \\ 22 & 31 & 50 \\ 27 & 38 & 62 \end{pmatrix}$ luego A·B no es simétrica.

35. Sea la matriz M=$\begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$, siendo *r* y *s* dos números reales tales que *r·s* ≠ 1.

Calcula M^2, M^3, M^4 y M^{2k} para $k \in$ N.

M^2=M·M= $\begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0\cdot 0 + rs & 0 \cdot r \\ s0 + 0s & s\cdot r + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} rs & 0 \\ 0 & sr \end{pmatrix}$

M^3=M^2·M=$\begin{pmatrix} rs & 0 \\ 0 & sr \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rs\cdot 0 + 0\cdot s & rs\cdot r + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + sr\cdot s & 0\cdot r + sr\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r^2 s \\ rs^2 & 0 \end{pmatrix}$

M^4=$M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 s \\ rs^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + r^2 s\cdot s & 0\cdot r + r^2 s \cdot 0 \\ rs^2\cdot 0 + 0\cdot s & rs^2\cdot r + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 s^2 & 0 \\ 0 & r^2 s^2 \end{pmatrix}$

M^{2K}=$\begin{pmatrix} r^k s^k & 0 \\ 0 & r^k s^k \end{pmatrix}$

36. Sea el conjunto de matrices definido por: M=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R\right\}$

a) Comprueba que si A, B ∈ M, también $A + B$ ∈ M y $A \cdot B$ ∈ M

b) Encuentra todas las matrices C ∈ M, tales que $C^2 = C$.

a) Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R$ y B=$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}; c, d \in R$

A+B=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$, efectivamente ∈ M

A·B=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+bd & bd+ac \end{pmatrix}$, efectivamente ∈ M

b) Sea la matriz C=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

C·C=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+ba \\ ba+ab & b^2+a^2 \end{pmatrix}$

C^2 = C

$$\begin{cases} a^2+b^2 = a \\ ab+ba = b \\ ab+ba = b \\ a^2+b^2 = a \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+b^2 = a \\ 2ab = b \\ 2ab = b \\ a^2+b^2 = a \end{cases} \quad \boldsymbol{Si\ b \neq 0} \quad \begin{cases} \frac{1}{4}+b^2 = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Si\ b = 0} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Las matrices son: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

37. Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A \cdot B$ es una matriz ortogonal.

A ortogonal $\quad A \cdot A^t = I \quad$ B ortogonal $\quad B \cdot B^t = I$

$$¿A \cdot B \cdot (A \cdot B)^t = I?$$

$$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Sí, A·B es ortogonal

38. Considera las matrices *A*, *B* y *C* definidas como:

$A_{3x3} = (a_{ij} = i+j)$, $\forall$ *i*, *j*=1, 2, 3.

$B_{2x3} = (b_{ij} = i-j)$, $\forall i$=1, 2; *j*=1, 2, 3.

$C_{3x2} = (c_{ij} = 2i+j)$,$\forall i$=1, 2, 3; *j*=1, 2.

a) Construye las tres matrices.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) Halla las traspuestas A^t, B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.

A^t=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ A es simétrica, no lo son B, B^t=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ni C, C^t=$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

c) Analiza cuáles de los productos *A·A*, *A·B*, *A·C*, *B·A*, *B·B*, *B·C*, *C·A*, *C·B* o *C·C* pueden realizarse.

A·A: sí se puede, son dos matrices de orden 3

A·B: no se puede calcular ya que una matriz es de 3x3 y la otra es de 2x3

A·C: sí se puede, ya que una matriz es de 3x3 y la otra es de 3x2

B·A: sí se puede, ya que una matriz es de 2x3 y la otra es de 3x3

B·B: No se puede calcular porque una matriz es de 2x3 y la otra matriz también es de 2x3

B·C: sí se puede, ya que una matriz es de 2x3 y la otra es de 3x2

C·A: no se puede, ya que una matriz es de 3x2 y la otra de 3x3

C·B: sí se puede, ya que una matriz es de 3x2 y la otra es de 2x3

C·C: No se puede calcular porque una matriz es de 3x2 y la otra matriz también es de 3x2

d) Determina el rango de las tres matrices *A*, *B* y *C*

A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2F1 + F3 \rightarrow F3 \\ 2F2 - 3F1 \rightarrow F2 \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \{2F2 - 3F1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$-F2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ →R(A)=2

B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F1 \leftrightarrow F2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ →R(B)=2

C=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow C1 \leftrightarrow C2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3F1 + 2F2 \\ -2F1 + F3 \end{cases} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ →R(C)=2

39.Dada la matriz: M=$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ En la que se verifica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Calcula M^2.

b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprueba que $P^2 = P$.

d) Comprueba que $P \times M = M \times P = O$.

a)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

b) $P = M^2 + I = \begin{pmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -y^2 - z^2 + 1 & xy & xz \\ xy & -x^2 - z^2 + 1 & yz \\ xz & yz & -x^2 - y^2 + 1 \end{pmatrix}$$

como $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sustituimos y nos queda $P = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$

c) $P^2 = P$

$$P\cdot P=\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz\\ xy & y^2 & zy\\ xz & yz & z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz\\ xy & y^2 & zy\\ xz & yz & z^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^4+x^2y^2+x^2z^2 & x^3y+xy^3+xyz^2 & x^3z+xy^2z+xz^3\\ x^3y+xy^3+xyz^2 & x^2y^2+y^4+x^2y^2 & x^2yz+zy^3+z^3y\\ x^2z+xy^2z+xz^3 & x^2yz+y^3z+y^2z^2 & x^2z^2+y^2z^2+z^4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^2(x^2+y^2+z^2) & xy(x^2+y^2+z^2) & xz(x^2+y^2+z^2)\\ xy(x^2+y^2+z^2) & y^2(x^2+y^2+z^2) & yz(x^2+y^2+z^2)\\ xz(x^2+y^2+z^2) & zy(x^2+y^2+z^2) & z^2(x^2+y^2+z^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz\\ xy & y^2 & yz\\ xz & zy & z^2\end{pmatrix}$$

$d)\;\; P\times M=M\times P=0$

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz\\ xy & y^2 & yz\\ xz & zy & z^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & z & -y\\ -z & 0 & x\\ y & -x & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & z & -y\\ -z & 0 & x\\ y & -x & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz\\ xy & y^2 & yz\\ xz & zy & z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad ;B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. La dimensión de la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz A es 2x3 porque está compuesta por 2 filas y 3 columnas.

La respuesta correcta es c) 2x3

2. La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \to Matriz\ rectangular$$

La respuesta correcta es d) rectangular

3. La suma de las matrices $A\ y\ B$ es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & -2+3 & 0+5 \\ 3+0 & 4+1 & -7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es b) $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$

4. El producto $3A$ es:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es c) $3A$=$\begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix}$

5. Indica qué afirmación es cierta:

La respuesta correcta es b) Las matrices A y B no se pueden multiplicar.

Ya que el número de columnas de la matriz A **no es igual** al número de filas de matriz B.

Dadas las matrices:

C = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; E = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; F = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6. La matriz identidad es la matriz: D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

·Explicación: Ya que la matriz identidad o unidad es la matriz escalar en la que los elementos no nulos son iguales a 1.

7. El producto de las matrices E y F es:

$$E \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 3+0+3 & 1+2+12 \\ 4+0+0 & 12+0+1 & 4+0+4 \\ 2+0+0 & 6+0+4 & 2+3+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$$

- Respuesta: d) E·F = $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

8. La matriz inversa de la matriz F es:

$$F = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boldsymbol{F_2 + F_3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boldsymbol{-F_2 + F_3} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\0&1&5&0&1&1\\0&0&-1&0&-1&0\end{array}\right)\boldsymbol{-F_3}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\0&1&5&0&1&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\boldsymbol{-5F_3+F_2}\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&1&1&0&0\\0&1&0&0&-4&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\boldsymbol{-F_3+F_1}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&-1&0\\0&1&0&0&-4&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\boldsymbol{-3F_2+F_1}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&11&-3\\0&1&0&0&-4&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

La respuesta es: a) $F^{-1}=\begin{pmatrix}1&11&-3\\0&-4&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

9. La matriz traspuesta de la matriz F es:

F = $\begin{pmatrix}1&3&1\\0&0&1\\0&1&4\end{pmatrix}$ Matriz traspuesta→ $\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&1\\1&1&4\end{pmatrix}$ d) $F^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&0&1\\1&1&4\end{pmatrix}$

·Explicación: Dada una matriz A de dimensiones m x n, se llama matriz traspuesta de A y se representa por A^ta la matriz que se obtiene al cambiar las filas de A por sus columnas, por lo que la matriz, será de dimensión n x m.

10. El rango de la matriz C es:

C = $\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}-F_2+F_3\rightarrow\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\0&0&0\end{pmatrix}-F_1+F_2\rightarrow\begin{pmatrix}3&3&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

- Respuesta: La matriz es de rango 1, es c) 1.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 2: Determinantes

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR,ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA.
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1 Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 6 - (-1) = 7$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-3) = 3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

2 Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot (0) + 1 \cdot 2 \cdot 3) - \big(0 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \cdot (-2) +$
$3 \cdot 2 \cdot (-2)\big) = (-6 + 6) - (4 - 12) = -(-8) = 8$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 5 \cdot 4) - (2 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \cdot (-2) + 5 \cdot$
$(-2) \cdot (-1)) = 8 - 10 = -2$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot$
$(-1) \cdot 4 = -24 - (4 - 8) = -20$

3 Comprueba que ocurre en un determinante de orden dos cuando haces dos permutaciones de filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A|$$

Al ser solo 2 filas solo hay 1 posibilidad de permutación y al hacerlo dos veces vuelve a su forma original.

4 Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = |A|$$

El resultado sería el mismo ya que da igual hacer $a \cdot d - b \cdot c$ que $d \cdot a - c \cdot b$ debido a que en ambos casos se va a restar el mismo número menos el mismo número.

5 Comprueba que ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot |A| = |A|$$

6 Comprueba que ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{vmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & g & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot |A| = |A|$$

7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.

Porque la propiedad 5 dice: “Si en una matriz se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 8 \quad \rightarrow \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -8$$

Sea A la matriz inicial y B la matriz obtenida permutando dos filas, entonces $|A| = -|B|$ Ahora permutamos dos columnas de la matriz B obteniendo la matriz D, entonces:$|B| = -|D|$ Por tanto$|A| = -|B| = -(-|D|) = |D|$.

8. Comprueba que en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = [(1 \cdot 5 \cdot 8) + (4 \cdot 8 \cdot 2) + (2 \cdot 5 \cdot 7)] - [(7 \cdot 5 \cdot 2) - (8 \cdot 5 \cdot 1) - (2 \cdot 4 \cdot 8)]$$
$$= 174 - 174 = 0$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = [(1 \cdot 5 \cdot 8) + (4 \cdot 8 \cdot 2) + (2 \cdot 5 \cdot 7)] - [(7 \cdot 5 \cdot 2) - (8 \cdot 5 \cdot 1) - (2 \cdot 4 \cdot 8)]$$
$$= 174 - 174 = 0$$

9. Demuestra esta propiedad para determinantes de orden tres.

Propiedad 7, si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & 20 \\ 1 & 4 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 15 \end{vmatrix} 2 \cdot 0, \text{al tener dos filas (columnas iguales)}$$

Propiedad 8, si los elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & 2+3=5 \\ \rightarrow & 5+1=6 \\ \rightarrow & 1+4=5 \end{matrix}$$ Si hacemos -F1-F2+F3 obtenemos $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ cuyo valor es 0

10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el determinante de partida.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [(6 \cdot (-2) \cdot 0) + (7 \cdot (-3) \cdot 5) + (1 \cdot 1 \cdot (-4))] - [(5 \cdot (-2) \cdot (-4)) - (1 \cdot (-3) \cdot 6) - (7 \cdot 1 \cdot 0)] = -131$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} =$$

$= [(6\cdot(-2)\cdot(-10) + (7\cdot(-3)\cdot 13) + (1\cdot 4\cdot(-4))] - [(13\cdot(-2)\cdot(-4)) - (4\cdot(-3)\cdot 6) - (7\cdot 1\cdot(-10)] = -131$

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres:

PROPIEDAD: *El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:* $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

a) A=$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$|A\cdot B|$=$\begin{vmatrix} 6\cdot 2+1\cdot 1+5\cdot 2 & 0+0+5\cdot(-2) & 6\cdot 2+1\cdot(-1)+0 \\ 7\cdot 2-2\cdot 1+1\cdot 2 & 0+0+1\cdot(-2) & 7\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+0 \\ (-4)\cdot 2-3\cdot 1+0 & 0+0+0 & (-4)\cdot 2+(-3)\cdot(-1)+0 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 23 & -10 & 11 \\ 14 & -2 & 16 \\ -11 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -11\cdot\begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 23 & -10 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} =$

$= -11(-160-(11\cdot(-2)) - 5(23\cdot(-2)-(14\cdot(-10))$ =-11(-160+22)-5(-46+140)=

1518-470=1048

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-21-8)-(-18+4)$ =-131

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$

$|A|\cdot|B| = -131\cdot(-8) = 1048$

b) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$|A\cdot B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2)-(3+1) = -5$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$ $\quad |A|\cdot|B| = 1\cdot(-5) = -5$

c) A=$\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\0 & 0 & -2\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 2 & 0+0+2\cdot(-2) & 2\cdot 2+1\cdot(-1)+0\\ 0+0-2\cdot 2 & 0+0+(-2)\cdot(-2) & 0+0+0\\ 2\cdot 2-1\cdot 1+0 & 0+0+0 & 2\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+0\end{vmatrix}$$

$=\begin{vmatrix}9 & -4 & 3\\-4 & 4 & 0\\3 & 0 & 5\end{vmatrix}$ =Fila2= Fila 2 + Fila 1=$\begin{vmatrix}9 & 5 & 3\\-4 & 0 & 0\\3 & 3 & 5\end{vmatrix}=-(-4)\cdot\begin{vmatrix}5 & 3\\3 & 5\end{vmatrix}=4(25-9)=64$

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\0 & 0 & -2\\2 & -1 & 0\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & -1\end{vmatrix}=2(-2-2)=-8$

$|B|=\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\1 & 0 & -1\\2 & -2 & 0\end{vmatrix}=-(-2)\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\1 & -1\end{vmatrix}=2(-2-2)=-8$

$|A|\cdot|B|$= (-8)·(-8)=64

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos A·B y B·A, pero no se verifique que $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}|$

Para que existan los productos A·B y B·A es necesario que las matrices A y B sean:

a) Cuadradas y del mismo orden: A_{nxn} y B_{nxn}, en cuyo caso existen los productos A·B y B·A y se cumple que $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}|$

b) O que sean A_{mxn} y B_{nxm}, en cuyo caso existen los productos A·B y B·A, pero no son iguales porque A·B es de orden m y B·A es de orden n, y por tanto no se cumple que $|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}|$

13. Dadas las matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no.

$\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$ ⟶ Falso, porque: $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{AB}$ ⟶ Falso, porque: $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$\boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ ⟶ Falso, porque: $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$

$\boldsymbol{d})$ $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2-2\boldsymbol{AB}$ ⟶ Falso, porque: $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$

$\boldsymbol{e})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ ⟶ Falso, porque: $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

$\boldsymbol{f})\ |(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A+B)^2| = |(A+B)(A+B)| = |A+B||A+B|$

$\boldsymbol{g})\ |(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 + 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ⟶ Falso porque: $|(A+B)^2| = |(A+B)(A+B)| = |A+B||A+B|$

$\boldsymbol{h})\ |(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 - |\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A-B)^2| = |(A+B)(A-B)| = |A+B||A-B|$

$\boldsymbol{i})\ |(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2| = |\boldsymbol{A}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2 - 2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ⟶ Falso, porque: $|(A-B)^2| = |(A+B)(A-B)| = |A+B||A-B|$

$\boldsymbol{j})\ |(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})| = |\boldsymbol{A}|^2 - |\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A+B)(A-B)| = |A+B||A-B|$

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\right) = 1 \cdot (-1 \cdot 2 \cdot (-2)) = 4$$

15. Halla el valor de a que verifica:

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 24$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -38 & 53 & -78 \\ 0 & -4 & 87 & -39 \\ 0 & 0 & a & 93 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-2) \cdot a \quad ; \quad 1 \cdot (-4) \cdot (-2) \cdot a = 24 \quad ; \quad 8a = 24 \rightarrow a = 3$$

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina :

A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) $|\boldsymbol{A}|\ \ \boldsymbol{y}\ \ |\boldsymbol{B}|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (8-5) = 3$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = ((-10) - 18 + 6) - (45 + 6 + 4) = -77$$

b) $[\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A})]^t\ \ \boldsymbol{y}\ \ [\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{B})]^t$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \ ; \ [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} -16 & 1 & -21 \\ 22 & -11 & 0 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} \ ; \ [Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} -16 & 22 & -13 \\ 1 & -11 & -4 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

c) **A** $\cdot [\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A})]^t\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{B} \cdot [\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{B})]^t$. **¿Qué observas?**

$$A \cdot [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5 & -10+10 \\ 4-4 & -5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot [Adj(B)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 22 & -13 \\ 1 & -11 & -4 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16+2-63 & 22-22 & -13-8+21 \\ 16+5-21 & -22-55 & 13-20+7 \\ -48+6+42 & 66-66 & -39-24-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -77 & 0 & 0 \\ 0 & -77 & 0 \\ 0 & 0 & -77 \end{pmatrix}$$

Observamos que al multiplicar una matriz por la traspuesta de su adjunta obtenemos una matriz que tiene en la diagonal principal el valor del determinate de esa matriz.

17. a) Calcula la matriz adjunta de:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1º. Ahora mostraremos algunos ejemplos del menor complementario (en los que tenemos que realizar en todos los elementos de la matriz), y ya realizaremos la primera parte del ejercicio.

$$\alpha_{11} \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{-1} & 0 & 2 \\ \cancel{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \alpha_{12} \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ -1 & \cancel{0} & 2 \\ 1 & \cancel{1} & 1 \end{pmatrix} ; \quad \alpha_{13} \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ -1 & 0 & \cancel{2} \\ 1 & 1 & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1\cdot 0 - 2\cdot 1) & (-1\cdot 1 - 2\cdot 1) & (-1\cdot 1 - 0\cdot 1) \\ (1\cdot 1 - 0\cdot 1) & (2\cdot 1 - 1\cdot 0) & (2\cdot 1 - (-1)\cdot 1) \\ (1\cdot 2 - 0\cdot 0) & (2\cdot 2 - 0\cdot 1) & (2\cdot 0 - (-1\cdot -1)) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2º. Ahora tendremos que asignar los signos. Lo que indica el + es que no varía su signo y el –, lo contrario, que sí se tiene que cambiar en la matriz adjunta.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Halla $|C|$, $[\mathrm{Adj(C)}]^t$ y efectúa el producto $C \cdot [\mathrm{Adj(C)}]^t$

1º. Primero realizaremos el determinante de la matriz con la **Regla de Sarrus**.

- 1º $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ → ((2·0·1) + (-1·1·0) + (1·-1·2)) = -2

- 2º $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \rightarrow$ $((\mathbf{0} \cdot \mathbf{0} \cdot \mathbf{1})$ + (-1·-1·1) + (2·2·1)) = 5
  - 3º (-2) – (5)= -7

2º. Para hallar la traspuesta de la matriz adjunta solo debemos de colocar las filas donde las columnas y las columnas donde las filas.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C} \cdot [\mathrm{Adj(C)}]^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((-2 \cdot 2) + (-1 \cdot 3) + (0 \cdot -1)) & ((2 \cdot 1) + (-1 \cdot 2) + (0 \cdot -3)) & ((2 \cdot -2) + (-1 \cdot -4) + (0 \cdot -1)) \\ ((-1 \cdot -2) + (0 \cdot 3) + (2 \cdot -1)) & ((-1 \cdot 1) + (0 \cdot 2) + (3 \cdot 2)) & ((-1 \cdot -2) + (0 \cdot -4) + (-1 \cdot 2)) \\ ((1 \cdot -2) + (3 \cdot 1) + (-1 \cdot 1)) & ((1 \cdot 1) + (2 \cdot 1) + (1 \cdot -3)) & ((1 \cdot -2) + (-4 \cdot 1) + (1 \cdot -1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

c) ¿Qué observas?

-Lo primero que podemos apreciar es una matriz escalar.

Podemos apreciar que -7 es el valor del determinante de la matriz, esto quiere indicar que el producto de una matriz por la traspuesta de su adjunta nos da el valor del determinante por la matriz identidad.

$$\mathbf{C} \cdot [\mathbf{Adj(C)}]^{\mathbf{t}} = |\mathbf{C}|\cdot\mathbf{I}$$

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A\cdot A^{-1}=I$ y $B\cdot B^{-1}=I$.

a) $A\cdot A^{-1}=I$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1 \cdot -1) + (1 \cdot 2) & (1 \cdot 1) + (-1 \cdot 1) \\ (2 \cdot -1) + (1 \cdot 2) & (1 \cdot 2) + (1 \cdot -1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B\cdot B^{-1}=I$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16/77 & -22/77 & 13/77 \\ -1/77 & 11/77 & 4/77 \\ 21/77 & 0 & -7/77 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 16/77 + 2 \cdot -1/77 + 3 \cdot 21/77 & -1 \cdot 16/77 + 5 \cdot -1/77 + 1 \cdot 21/77 & 3 \cdot 16/77 + 6 \cdot -1/77 \pm 2 \cdot 21/77 \\ 1 \cdot -22/77 + 2 \cdot 11/77 + 3 \cdot 4/77 & -1 \cdot -22/77 + 5 \cdot 11/77 + 1 \cdot 4/77 & 3 \cdot -22/77 + 6 \cdot 11/77 \pm 2 \cdot 4/77 \\ 1 \cdot 13/77 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot -7/77 & -1 \cdot 13/77 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot -7/77 & 3 \cdot 13/77 + 6 \cdot 0 \pm 2 \cdot -7/77 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$\boldsymbol{a})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix} \to |A| = (1\cdot 4) - (2\cdot 3) = 4 - 6 = -2$

$\boldsymbol{b})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{5} \end{pmatrix} \to |B| = (2\cdot 5) - \big(4\cdot(-3)\big) = 10 + 12 = 22$

$\boldsymbol{c})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-5} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \to |C| = (a\cdot b) - \big(5\cdot(-5)\big) = ab + 25$

$\boldsymbol{d})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to |D| = (a\cdot a) - (b\cdot b) = a^2 - b^2$

$\boldsymbol{e})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{m^2} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \to |E| = (m^2\cdot 1) - (m\cdot m) = m^2 - m^2 = 0$

$\boldsymbol{f})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \to |F| = [(1\cdot 0\cdot 1) + (1\cdot 1\cdot 0) + (1\cdot 1\cdot 0)] - [(0\cdot 0\cdot 0) + (1\cdot 1\cdot 1) +$
$(1\cdot 1\cdot 1)] = 0 - 2 = -2$

$\boldsymbol{g})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{5} \end{pmatrix} \to |G| = [(1\cdot 1\cdot 5) + (0\cdot 4\cdot 1) + (0\cdot 0\cdot 3)] - [(3\cdot 1\cdot 1) + (0\cdot 0\cdot 5) +$
$(0\cdot 4\cdot 1)] = 5 - 3 = 2$

$\boldsymbol{h})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{-4} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{5} \end{pmatrix} \to |H| = \big[(1\cdot 3\cdot 5) + (0\cdot 1\cdot 3) + \big((-2)\cdot 4(-4)\big)\big] - \big[\big(3\cdot 3(-4)\big) +$
$\big((-2)\cdot 0\cdot 5\big) + (4\cdot 1\cdot 1)\big] = (15 + 32) - (-36 + 4) = 47 - (-32) = 47 + 32 = 79$

$\boldsymbol{i})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to |I| = [(a\cdot a\cdot a) + (1\cdot 1\cdot 1) + (1\cdot 1\cdot 1)] - [(1\cdot a\cdot 1) + (1\cdot 1\cdot a) +$
$(1\cdot 1\cdot a)] = (a^3 + 1 + 1) - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2$

$\boldsymbol{j})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix} \to |J| = [(m\cdot(-1)\cdot m) + (1(-3)\cdot 3) + (1(-1)\cdot 5)] - [(3(-1)\cdot 5) +$
$(1\cdot 1\cdot m) + ((-1)(-3)m)] = [(-m^2) + (-9) + (-5)] - [(-15) + (m) + (3m)] =$
$(-m^2 - 14) - (4m - 15) = -m^2 - 4m + 1$

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

$\mathbf{a)}\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{b+c} \\ \mathbf{1} & \mathbf{b} & \mathbf{c+a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{c} & \mathbf{a+b} \end{pmatrix} \mathrm{C_2 + C_3} \to \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a+b+c} \\ 1 & \mathrm{b} & \mathrm{a+b+c} \\ 1 & \mathrm{c} & \mathrm{a+b+c} \end{vmatrix} = 0$ Porque $\mathrm{C_1}$ y $\mathrm{C_3}$ son proporcionales

$\boldsymbol{b})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c+d} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b+d} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \to a \begin{vmatrix} 1 & c+d & b \\ 1 & b+d & c \\ 1 & b+c & d \end{vmatrix} C_2 + C_3 \to a \begin{vmatrix} 1 & c+d+b & b \\ 1 & b+d+c & c \\ 1 & b+c+d & d \end{vmatrix} = a\cdot 0 = 0$

Porque $\mathrm{C_2}$ y $\mathrm{C_1}$ son proporcionales

3.- Demuestra sin desarrollar que los siguientes determinantes son múltiplos de 15:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

1. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \to$ Sacamos el 5 como factor común $\to 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to$ Restamos la columna 2 a la columna 3 $\to$

$-C_2 + C_3 \to 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to$ Sacamos el 3 factor común $\to 3 \cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \to$ Sacamos el 5 y el 3 factor común $\to 3 \cdot 5\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

4.- Demuestra sin desarrollar que los siguientes determinantes son múltiplos de 11:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \to$ Como 121; 198 y 506 son divisibles entre 11 $\to 100C_1 + 10C_2 + C_3 \to$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} \to$ Sacamos el 11 factor común $\to 11\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -2F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3 \\ -F_1 + F_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -1 & 2 \\ 0 & -16 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = C_1 \leftrightarrow C_2 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & 2 \\ 0 & -1 & -16 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$-F_2 + F_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -F_3 + F_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -4 \cdot 11$$

5. Comprueba a partir de las propiedades de los determinantes que $A_1 = 0$ y $A_2 = \dot{5}$

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

1. $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el $-\frac{1}{5} \rightarrow -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 40 & 25 & 40 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$
Como hay dos columnas iguales se anula el determinante por lo que $\rightarrow A_1 = 0$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \rightarrow F_2 + F_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos 5 factor común $\rightarrow 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6. Sabiendo que: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}$**=3 calcula, sin desarrollar, el valor de:** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{-i} & \boldsymbol{-g} & \boldsymbol{-h} \\ \boldsymbol{f+c} & \boldsymbol{d+a} & \boldsymbol{e+b} \\ \boldsymbol{3c} & \boldsymbol{3a} & \boldsymbol{3b} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3\left(\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ c & a & b \end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} + 0\right) = 3\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} i & g & h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = F3 \leftrightarrow F1 \rightarrow (-3)(-1)\begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} =$$

$$= C1 \leftrightarrow C3 \rightarrow 3 \cdot (-1)\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = C1 \leftrightarrow C2 \rightarrow 3 \cdot (-1)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 = 9$$

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{p} & \boldsymbol{q} & \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{vmatrix} = -2$***, calcula sin desarrollar:***

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{2z} & \boldsymbol{2y} \\ \boldsymbol{-3p} & \boldsymbol{-3r} & \boldsymbol{-3q} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} = F2 \leftrightarrow F3 \rightarrow (-1) \cdot (-6) \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & q & r \\ x & z & y \end{vmatrix} =$$

$$= \ C3 \leftrightarrow C2 \rightarrow 6 \cdot (-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{a-3p} & \mathbf{-2a} \\ \mathbf{y} & \mathbf{b-3q} & \mathbf{-2b} \\ \mathbf{z} & \mathbf{c-3r} & \mathbf{-2c} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x & a-3p & a \\ y & b-3q & b \\ z & c-3r & c \end{vmatrix} = -2\left(\begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}\right) = -2\left(0 - 3\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}\right) =$$

$\rightarrow cambiamos\ filas\ por\ columnas \rightarrow 6 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \rightarrow F1 \leftrightarrow F3 = -6 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) = 12$

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-2p+3a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-3p} \\ \boldsymbol{z-2r+3c} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{-3r} \\ \boldsymbol{y-2q+3b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-3q} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x-2p & a & -3p \\ z-2r & c & -3r \\ y-2q & b & -3q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & a & -3p \\ 3c & c & -3r \\ 3b & b & -3q \end{vmatrix} \right) =$ 2º determ. Columna 1 y 2 proporcionales

$= \begin{vmatrix} x-2p & a & -3p \\ z-2r & c & -3r \\ y-2q & b & -3q \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x & -a & -3p \\ z & -c & -3r \\ y & -b & -3q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2p & a & -3p \\ -2r & c & -3r \\ -2q & b & -3q \end{vmatrix} \right) =$ 2º determ. Columna 1 y 3 proporcionales

$-3 \begin{vmatrix} x & -a & p \\ z & -c & r \\ y & -b & q \end{vmatrix} \rightarrow cambiamos\ filas\ por\ columnas\ y\ extraemos\ (-1) \rightarrow (-3) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ p & r & q \end{vmatrix} =$

$C2 \leftrightarrow C3 = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} F1 \leftrightarrow F2 = 3 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} F2 \leftrightarrow F3 = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) = -6$

8. ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale –5 y que el determinante de la matriz $3 \cdot A^t$ vale –1215?

$|A| = -5 \qquad |3 \cdot A^T| = -1215 \qquad |3 \cdot A^T| = 3^n \cdot |A^t| = 3^n \cdot (-5) = -1215$

$2^n = \frac{-1215}{-5} = 243 \qquad 3^n = 3^5 \qquad n = 5$

9. justifica sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{y^2} & \boldsymbol{z^2} \\ \boldsymbol{x^3} & \boldsymbol{y^3} & \boldsymbol{z^3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x \cdot y \cdot z} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{y^2} & \boldsymbol{z^2} \end{vmatrix}$**.**

Sacamos ***x*** de la primera columna, ***y*** de la segunda y ***z*** de la tercera.

10. Dadas las matrices A y B de orden 4x4 con $|A| = 3\ y\ |B| = 2$ y calcula $|A^{-1}|$, $|B^tA|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

$\boldsymbol{A \cdot A^{-1}} = I \rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$

$|\boldsymbol{B^tA}| = |B^t| \cdot |A| = |B| \cdot |A| = 2 \cdot 3 = 6$

$|(\boldsymbol{AB^{-1}})^t| = |AB^{-1}| = |A| \cdot \frac{1}{|B|} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

11. Obtén, en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a+b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+c} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$**.**

$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -C_3 + C_1 \\ -C_3 + C_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & a \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc$

12.- Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^3 \cdot (a+3)$$

a) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$ calculamos : $-C_4+C_3;\ \ -C_4+C_2;\ \ -C_4+C_1;$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ b & b & b & (1-b) \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ b & b & b \end{vmatrix} \rightarrow \quad (a \cdot b)\begin{vmatrix} -a & 1 \\ b & -b \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} =$$

$$(a \cdot b)\begin{vmatrix} -a & 1 \\ b & -b \end{vmatrix} = (ab \cdot b) \cdot ab \quad ; \quad b \cdot \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = (-ab) \cdot -b$$

$$= ab(ab-b) - b(-ab) = (ab)^2 - (ab)^2 + (ab)^2 = (ab)^2$$

b) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \rightarrow$ Calculamos : $-F_1+F_2;\ -F_1+F_3;\ -F_1+F_4$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ -a+1 & a-1 & 0 & 0 \\ -a+1 & 0 & a-1 & 0 \\ -a+1 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix};$$ Calculamos: $C_1+C_2+C_3+C_4$

$$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3) \cdot (a-1)(a-1)(a-1) = (a+3) \cdot (a-1)^3$$

13.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula: $|A|;\ \alpha_{32}\ ;\ \alpha_{13}\ ;\ A_{22}\ ;\ A_{12}$

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A| \cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot x$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 28; \qquad |A| = 28$

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9; \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2&-3\\1&4\end{vmatrix}=11;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3&0\\1&4\end{vmatrix}=-12$$

b) $|A|\cdot X+A_{23}+3\alpha_{11}=-2+A_{13}\cdot X\rightarrow$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}=5;\qquad A_{11}=\begin{vmatrix}2&0\\-2&4\end{vmatrix}=-8$$

$$|A|=28;\qquad A_{23}=5;\qquad \alpha_{11}=8;\qquad a_{13}=-8$$

$\rightarrow 28x+5+24=-2-8x;\quad 28x+8x=-2+3-24\quad 36x=-31\quad x=-\frac{31}{36}$

14. Sea la matriz simétrica $A\in M_{3x3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$.

Comprueba si es verdadero o falso y si son falsas, indica la respuesta correcta.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}$$

- $|-3A|=9\,;-3A=\begin{pmatrix}-3a&-3b&-3c\\-3b&-3d&-3e\\-3c&-3e&-3f\end{pmatrix};|-3A|=\begin{vmatrix}-3a&-3b&-3c\\-3b&-3d&-3e\\-3c&-3e&-3f\end{vmatrix}=-3\cdot$ $\begin{vmatrix}a&-3b&-3c\\b&-3d&-3e\\c&-3e&-3f\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix}a&b&-3c\\b&d&-3e\\c&e&-3f\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{vmatrix}=(-3)^3\cdot$ $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{vmatrix}=-27\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{-27}{-3}=9;\ Verdadero$
- $\frac{|A\cdot A^t|}{3}=3^{-3}\,;\ |A|=|A^t|\,;\ \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}{3}=\frac{\frac{1}{9}}{3}=\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}=3^{-3}\,;Verdadero$
- $A^3\notin M_{3x3}\,;\ \mathrm{A}_{3x3}\,;\ \mathrm{A}^2=\mathrm{A}_{3x3}\cdot\mathrm{A}_{3x3}=\mathrm{A'}_{3x3}\,;\mathrm{A}^3=\mathrm{A'}_{3x3}\cdot\mathrm{A}_{3x3}=\mathrm{A''}_{3x3}\,;$

  Falso (ya que al multiplicar una matriz cuadrada por sí misma, la dimensión de esta no varía)
- $4|A|-7|A^t|=1\,;\ |A|=|A^t|\,;\ 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-7\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}=\frac{3}{3}=1\,;$ Verdadero
- $2A\in M_{6x6};\ 2A=\begin{pmatrix}2a&2b&2c\\2b&2d&2e\\2c&2e&2f\end{pmatrix}\neq M_{6x6}\,;\ Falso$
- $|4A-A^t|=-3^2\,;A=A^t\,;4A-A^t=\begin{pmatrix}4a&4b&4c\\4b&4d&4e\\4c&4e&4f\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a&3b&3c\\3b&3d&3e\\3c&3e&3f\end{pmatrix}=$ $3A\,;|3A|=\begin{vmatrix}3a&3b&3c\\3b&3d&3e\\3c&3e&3f\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}a&3b&3c\\b&3d&3e\\c&3e&3f\end{vmatrix}=3\cdot3\cdot\begin{vmatrix}a&b&3c\\b&d&3e\\c&e&3f\end{vmatrix}=3\cdot3\cdot3\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{vmatrix}=3^3\cdot$ $\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{3^3}{3}=-3^2=-9\,;\ Verdadero$
- $|A^{-1}|=-3^{-1}\,;\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}=\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{1}=-3\,;$ Falso

- $\left|\frac{3A-A^t}{3A+A^t}\right| = (-2)^{-3}$; $A = A^t$; $|A| = |A^t|$; $\frac{3A-A^t}{3A+A^t} = \frac{2A}{4A}$; $2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{pmatrix}$ $y\ 4A =$ $\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{pmatrix}$; $\left|\frac{2A}{4A}\right| = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ b & 2d & 2e \\ c & 2e & 2f \end{vmatrix}}{4\begin{vmatrix} a & 4b & 4c \\ b & 4d & 4e \\ c & 4e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ b & d & 2e \\ c & e & 2f \end{vmatrix}}{4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & 4c \\ b & d & 4e \\ c & e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}}{4\cdot 4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}} = \frac{2^3\left(-\frac{1}{3}\right)}{4^3\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{2^3}{4^3} =$ $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$; *Falso*
- $\frac{1}{9}|A^{-1}| - 6|A^t|^2 = 1$; $|A| = |A^t|$; $|A^{-1}| = -3$ (apartado anterior) ; $\frac{1}{9}\cdot(-3) - 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{3}{9} - 6\cdot\frac{1}{9} = -\frac{3}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{9}{9} = -1$; *Falso*
- $|3^{-2}\cdot A^t| = -\frac{1}{3^7}$; $A = A^t$; $|A| = |A^t|$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-2}\cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3^2}a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ \frac{1}{3^2}c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{pmatrix}$; $|3^{-2}\cdot A^t| =$ $\begin{vmatrix} \frac{1}{3^2}a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ \frac{1}{3^2}c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & \frac{1}{3^2}c \\ b & d & \frac{1}{3^2}e \\ c & e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} =$ $\frac{1}{3^6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3^7}$; *Verdadero*

15. Sean las matrices A y B ∈ $\mathbf{M_{3x3}}$ tales que $|\mathbf{A}| = -3^{-2}$ y $|\mathbf{B}| = 3$.

Con estos datos calcula de forma razonada:

$\left|\mathbf{A^{-1}}\right|$; $\left|\mathbf{B^{-1}}\right|$; $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|^{-1}$; $\left|\mathbf{3B^{-1}\cdot A^t}\right|$; $|\mathbf{3A\cdot B^t}|$; $\left|(\mathbf{B^{-1}\cdot A^{-1}})^t\right|$

- $|A^{-1}| = (-3^{-2})^{-1} = \frac{1}{-3^{-2}} = \frac{1}{-\frac{1}{3^2}} = -\frac{3^2}{1} = -9$
- $|B^{-1}| = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
- $|A|\cdot|B|^{-1} = -3^{-2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$
- $|3B^{-1}\cdot A^t| = |3B^{-1}|\cdot|A^t| = 3^3\cdot|B^{-1}|\cdot|A^t| = 3^3\cdot 3^{-1}(-3^{-2}) = -1$
- $|3A\cdot B^t| = 3^3\cdot|A|\cdot\ |B| = 3^3\cdot(-3^{-2})\ \cdot 3 = -3^2 = -9$
- $|(B^{-1}\cdot A^{-1})^t|$; $|A| = |A^t|$; $|B| = |B^t|$; $|(B^{-1}\cdot A^{-1})^t| = 3^{-1}\cdot(-9) =$

  $= 3^{-1}\cdot(-3)^2 = -3^1 = -3$

16. Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale -2. Se pide calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz - $\frac{3A}{2}$.

$\left|-\frac{3A}{2}\right| = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot |A| = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot (-2) = -\frac{81}{8}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A.

$|A^{-1}| = |A|^{-1} = = (-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$.

c) El determinante de la matriz $\frac{A^2}{6}$.

$\left|\frac{A^2}{6}\right| = \left|\frac{1}{6}A \cdot A\right| = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot |A| \cdot |A| = \left(\frac{1}{6}\right)^4 (-2) \cdot (-2) = \frac{1}{324}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2$, -$3F_1$ + $4F_3$, -F_4, $2F_3$.

det($2F_2$, -$3F_1$ + $4F_3$, -F_4, $2F_3$) =

= det($2F_2$, -$3F_1$, -F_4, $2F_3$) + det($2F_2$, $4F_3$, -F_4, $2F_3$) =

(El determinante segundo es 0 porque $4F_3$ y $2F_3$ son proporcionales)

= 2 · (-3) · (-1) · 2 · det(F_2, F_1, F_4, F_3) + 0 = $\rightarrow (F_1 \leftrightarrow F_2, F_3 \leftrightarrow F_4)$

= (-) · (-) · 12 · det(F_1, F_2, F_3, F_4) = 12· $|A|$= 12 · (-2) = -24.

17. Para los determinantes

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \qquad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) **Halla los menores complementarios de los elementos α_{11}, α_{23}, α_{32} y α_{12} cuando existan.**

A_1: $\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$ $\qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2$

$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2$ $\qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = ab - b^2$

A_2: $\alpha_{11} = b$ $\qquad \alpha_{23}$= *no existe* $\qquad \alpha_{32}$= *no existe* $\qquad \alpha_{12}$ =*a*

A_3:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \\ b & -c & d \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-bd) + (-bc)] - (-b) = -bd - bc + b$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & 1 \\ a^2 & b & 0 \\ a & b & d \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (abd + a^2b) - (a^2bd + ab) = ab\text{-}abd$$

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \\ a & c & d \\ -a & -c & d \end{vmatrix} = (ad + a^2cd) - (-a^2cd + ad) = 2a^2cd$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \\ -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-ad) - (a^2c)] - (a) = -ad - a^2c - a$$

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

Primero vamos a hallar los de A_1:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$ $\quad$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2$ $\quad$ $A_{12} = -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = -ab + b^2$

Ahora los de A_2:

$A_{11} = +|b| = b$ $\quad$ $A_{23} =$ no existe $\quad$ $A_{32} =$ no existe $\quad$ $A_{12} = -|a| = -a$

Y finalmente los de A_3:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \\ b & -c & d \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-bd) + (-bc)] - (-b) = -bd - bc + b$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & 1 \\ a^2 & b & 0 \\ a & b & d \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (abd + a^2b) - (a^2bd + ab) = -ab+abd$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \\ a & c & d \\ -a & -c & d \end{vmatrix} = (ad + a^2cd) - (-a^2cd + ad) = -2a^2cd$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \\ -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-ad) - (a^2c)] - (a) = ad + a^2c + a$$

18. a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

Para que A^2 = A, la matriz A debe ser cuadrada y $|A^2| = |A|$, es decir, $|A|^2 = |A|$ por lo que:

$|A^2| = |A|$ $\quad |A \cdot A| = |A|$ $\quad |A||A| = |A|$ $\quad |A|^2 - |A| = 0$ $\quad |A|(|A| - |I|) = 0$

Las dos posibles soluciones son:

$|A| = 0$ $\quad |A| = 1$

b) La matriz A verifica que $A{\cdot}A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

$|A| = |A^t|$

$A \cdot A^t = I \qquad |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A||A| = |A|^2 = |I| = 1$, por tanto, $\quad |A| = 1 \quad o \quad |A| = -1$

19. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:

a) Aplicando la regla de Sarrus.

$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [(-3)(2)(1) + (2)(-3)(-2) + (1)(1)(1)] - [(1)(2)(-2) + (1)(2)(1) + (-3)(1)(-3)] = [-6 + 12 + 1] - [-4 + 2 + 9] = 7 - 7 = 0$

b) Desarrollando por los elementos de la 3 fila y de la 2 columna.

3 fila; $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-8) - 1(8) + 1(-8) = 0$

2 columna; $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2(-5) + 2(-1) - 1(8) = 0$

20. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se pide calcular el valor de los siguientes determinantes: $|A \cdot B|; |C|; |A^t \cdot B^t|; |C \cdot B \cdot A|; |C|^2$.

$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -3 & -19 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$

$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [(2)(1)(3) + (-3)(-1)(0) + (-2)(2)(1) -] - [(0)(1)(1) + (-2)(-3)(3) + (2)(-1)(2)] = 2 - 14 = -12$

$|A^t \cdot B^t| = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 8 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = [(-3)(-2)(6) + (8)(1)(-6) + (-1)(-5)(3)] - [(-6)(-2)(3) + (-1)(8)(6) + (-5)(1)(-3)] = 0$

$|C\cdot B\cdot A| = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -16 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\cdot(A) = \begin{vmatrix} -6 & 16 & 6 \\ -4 & -36 & 4 \\ -20 & -5 & 20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 16 & 6 \\ 4 & -36 & 4 \\ 20 & -5 & 20 \end{vmatrix} =$
$la\ primera\ y\ tercera\ columna\ son\ iguales\ por\ tanto = 0$

$|C|^2$ = (-12)·(-12) = 144

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$**= 2-3x;**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [(1\cdot 3\cdot 3) + (-1\cdot 0\cdot x) + (2\cdot 2\cdot 2)] - [(x\cdot 3\cdot 2) + (-1\cdot 2\cdot 3) + (2\cdot 0\cdot 1)] = 2-3x;$

$[9+8+0]-[6x-6+0] = 2-3x;$ $17-6x-6 = 2-3x;$ $-6x+11 = 2-3x;$ -3x=-9; x=-3

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-3} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} + \mathbf{5} = \mathbf{5}\boldsymbol{x} - \mathbf{3};$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & \mathrm{x} & -3 \\ \mathrm{x} & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = [(2)(\mathrm{x})(4) + (-1)(1)(2) + (-1)(-3)(\mathrm{x})] - [(2)(\mathrm{x})(\mathrm{x}) + (-1)(-1)(4) + (-3)(1)(2)] + 5$

$[(8x)+(-2)+(3x)] - [(2x^2)+(4)+(-6)] + 5 = 5x-3 \quad 6x+8-2x^2 = 0 \quad x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0\,;$

$\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = [(3)(2)(x) + (x)(3)(2) + (x)(3)(2)] - [(2)(2)(2) + (x)(x)(x) + (3)(3)(3)] = 0$

$$18x - 35 - x^3 = 0; x = \begin{cases} -5 \\ \dfrac{5+\sqrt{3}i}{2} \\ \dfrac{5+\sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11;\ x^2+4x-11-2x^2-3 = 11;\ -x^2+4x-14 = 11;$

$-x^2+4x-25 = 0; x = \begin{cases} 2+\sqrt{21}i \\ 2-\sqrt{21}i \end{cases}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

23. Resuelve la siguiente ecuación $|\mathbf{A}-\mathbf{x}\cdot\mathbf{I}|=\mathbf{0}$, siendo A $=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{3}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\\\mathbf{-2}&\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$ e I la matriz unidad.

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to x\cdot I=x\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}-\mathrm{x}\cdot\mathrm{I}|=\left|\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathrm{x}&0&0\\0&\mathrm{x}&0\\0&0&\mathrm{x}\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}-1-\mathrm{x}&0&0\\3&2-\mathrm{x}&1\\-2&1&2-\mathrm{x}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-x)\cdot\begin{vmatrix}2-x&1\\1&2-x\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}3&1\\-2&2-x\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}3&2-x\\-2&1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-x)\cdot(3-4x+x^2)+0+0=(-1-x)\cdot(3-4x+x^2)=$$

$$=-3+4x-x^2-3x+4x^2-x^3=\boldsymbol{-3+x+3x^2-x^3}$$

$$\boldsymbol{-3+x+3x^2-x^3=0\ \to x=1;\quad x=-1;\quad x=3}$$

24. Halla los determinantes de las siguientes matrices

$A;\begin{vmatrix}1&4\\2&3\end{vmatrix}=[3\cdot1-2\cdot4]=3-8=\ \mathbf{-5}$

$B;\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=[3\cdot1-0\cdot1]=\mathbf{3}$

$D;\begin{vmatrix}1&1&2\\3&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}=[1\cdot0\cdot0+3\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1]-[2\cdot0\cdot2+1\cdot1\cdot1+1\cdot3\cdot0]=8-1=\mathbf{7}$

$E;\begin{vmatrix}-1&3&-2\\0&-1&2\\1&4&2\end{vmatrix}=[(-1)\cdot(-1)\cdot2+0\cdot4\cdot(-2)+1\cdot2\cdot3]-[(-2)\cdot(-1)\cdot1+2\cdot4\cdot(-1)+3\cdot0\cdot2]=8-(-6)=\mathbf{14}$

$F;\begin{vmatrix}2&1&-1\\3&-2&-2\\-1&2&0\end{vmatrix}=[2\cdot(-2)\cdot0+3\cdot2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)\cdot1]-[(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)+(-2)\cdot2\cdot2+1\cdot3\cdot0=(-4)-(-10)]=\mathbf{6}$

$G;\begin{vmatrix}2&1&3\\0&-1&-5\\0&0&2\end{vmatrix}=[2\cdot(-1)\cdot2+0\cdot0\cdot3+0\cdot(-5)\cdot1]-[3\cdot(-1)\cdot0+(-5)\cdot0\cdot2+1\cdot0\cdot2]=(-4)-0=\mathbf{-4}$

$$H;\begin{vmatrix}1&2&1&2\\3&0&0&1\\0&2&1&0\\-1&2&3&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}-3\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2\\2\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&2&1&0\\0&4&4&3\end{vmatrix}=\begin{matrix}\mathrm{F}_2+3\mathrm{F}_3\\2\mathrm{F}_2+3\mathrm{F}_4\end{matrix}\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&0&0&-5\\0&0&6&-1\end{vmatrix}=$$

$$\mathrm{F}_3\leftrightarrow\mathrm{F}_4\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&0&6&-1\\0&0&0&-5\end{vmatrix}=1\cdot(-6)\cdot6\cdot(-5)=180$$

$$J;\ \begin{vmatrix}-1&3&0&2\\0&-2&3&1\\2&1&-4&2\\-1&5&-2&3\end{vmatrix}=\begin{matrix}2F_1+F_3\\-F_1+F_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&3&0&2\\0&-2&3&1\\0&7&-4&6\\0&2&-2&1\end{vmatrix}=C_4\leftrightarrow C_2=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&3&-2\\0&6&-4&7\\0&1&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{matrix}-6F_2+F_3\\-F_2+F_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&3&-2\\0&0&-22&19\\0&0&-5&4\end{vmatrix}=-5F_3+22F_4=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&3&-2\\0&0&-22&19\\0&0&0&-11\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot 1\cdot(-22)\cdot(-11)=-242$$

25. Aplicando propiedades, calcula el valor del determinante:

a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&-3&0&2\\-3&1&2&1\\0&-2&-1&3\\-1&4&2&0\end{vmatrix}\to\begin{matrix}2F_3+F_2\\2F_3+F_4\end{matrix}\to\begin{vmatrix}-2&-3&0&2\\-3&-3&0&7\\0&-2&-1&3\\-1&0&0&6\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&2\\-3&-3&7\\-1&0&6\end{vmatrix}$$

$$-F_1+F_2\to(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&2\\-1&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\-1&6\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-6+5)=3$$

b) Desarrollando por los elementos de una línea

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&-3&0&2\\-3&1&2&1\\0&-2&-1&3\\-1&4&2&0\end{vmatrix}=\text{desarrollando por la tercera fila}=$$

$$=0\cdot\begin{vmatrix}-3&0&2\\1&2&1\\4&2&0\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix}-2&0&2\\-3&2&1\\-1&2&0\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&2\\-3&1&1\\-1&4&0\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&0\\-3&1&2\\-1&4&2\end{vmatrix}=$$

$$=0+2*(-4)+(-1)\cdot(-11)-3\cdot 0=-8+11-0=-8+11=\mathbf{3}\qquad |\boldsymbol{A}|=\mathbf{3}$$

26. Comprobar el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\4&1&-2&3\\2&3&0&4\end{vmatrix}=137;\qquad \begin{vmatrix}2&1&3&2\\1&-2&1&2\\-3&2&-2&1\\-1&3&0&-3\end{vmatrix}=27$$

a) $$\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\4&1&-2&3\\2&3&0&4\end{vmatrix}\to F_2+F_4\to\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\4&1&-2&3\\0&3&3&5\end{vmatrix}\to 2F_2+F_3\to\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\0&1&4&5\\0&3&3&5\end{vmatrix}\to$$

$$\tfrac{2}{3}F_1+F_2\to\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\0&-4/3&13/3&-1\\0&1&4&5\\0&3&3&5\end{vmatrix}\qquad |A|=3\begin{vmatrix}-4/3&13/3&-1\\1&4&5\\3&3&5\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot\left[\left(-{}^{4}\!/_{3}\cdot 4\cdot 5\right)+\left(1\cdot 3\cdot(-1)\right)+\left(\frac{13}{3}\cdot 5\cdot 3\right)\right]-$$

$$-\left[(3\cdot 4\cdot(-1))+\left(5\cdot 3\cdot\left(-{}^{4}/_{3}\right)\right)+(1\cdot 13/3\cdot 5)\right]=3\cdot\left[\frac{106}{3}-\left(-\frac{31}{3}\right)\right]=137$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \to F_2+F_4 \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \to \frac{-1}{2}F_1+F_2$

$$\to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5/2 & -{}^{1}/_{2} & -2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \to \frac{3}{2}F_1+F_3 \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -{}^{5}/_{2} & -{}^{1}/_{2} & 1 \\ 0 & 7/2 & 5/2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A|=2\begin{vmatrix} -5/2 & -{}^{1}/_{2} & 1 \\ 7/2 & 5/2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\left[\left(-{}^{5}/_{2}\cdot{}^{5}/_{2}(-1)\right)+\left({}^{7}/_{2}\cdot 1\cdot 1\right)+\left(4\cdot\left(-{}^{1}/_{2}\right)\cdot 1\right)\right]-$$

$$-\left[(1\cdot 5/2\cdot 1)+\left({}^{7}/_{2}\cdot\left(-{}^{1}/_{2}\right)\cdot(-1)\right)+\left(-{}^{5}/_{2}\cdot 4\cdot 1\right)\right]=2\left({}^{27}/_{2}\right)=27$$

27. Calcula el determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to -3F_1+F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to 2F_1+F_2$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A|=1\cdot\begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ -18 & 7 & 1 & -19 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \frac{3}{5}F_2+F_4 \to 1\cdot\begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -{}^{6}/_{5} \end{vmatrix} \to \frac{18}{5}F_2+F_3$$

$$\to \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & -{}^{131}/_{5} \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix} \to \frac{-5}{13}F_1+F_2 \to \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & -20/13 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -{}^{131}/_{5} \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix}$$

$$|A|=13\begin{vmatrix} 0 & -20/13 & 3 \\ 7 & 1 & -{}^{131}/_{5} \\ 0 & 0 & -{}^{6}/_{5} \end{vmatrix}=13\cdot\left[0-\left(0+7\cdot\left(-{}^{20}/_{13}\right)\cdot -{}^{6}/_{5}+0\right)\right]=-168$$

28. Calcula los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \to F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \to -2F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \to$$

$$-5F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -15 & 13 & -24 \\ 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -15 & 13 & -24 \\ -1 & 10 & -7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-15 \cdot 10 \cdot 7) + (-24 \cdot 1 \cdot (-1)) + (-7 \cdot 13 \cdot 5)] - [(-24 \cdot 10 \cdot 5) + (-1 \cdot 13 \cdot 7) + (-15 \cdot (-7) \cdot 1)] =$$

$$= (-1050 + 24 - 455) - (-1200 + 105 - 91) = -295$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_3 \to$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_5$$

$$\to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \to |A| = (x+1)^4$$

29. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = [(3 \cdot 2x \cdot x) + (-1 \cdot (-1) \cdot 7) + (5 \cdot 3 \cdot x)] - [(-1 \cdot 2x \cdot x) + (5 \cdot (-1) \cdot x) + (3 \cdot 7 \cdot 3)] = [(6x^2 + 7 + 15x) - (-2x^2 + (5x) + 63)] = 8x^2 + 20x - 56$

$8x^2 - 20x - 56 = 5x + 6 \to 8x^2 + 15x - 62 = 0; x_1 = 2; x_2 \approx -3{,}875$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_3 \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 3 & 4+x \end{vmatrix} \to |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 4+x \end{vmatrix} = \big(x(4+x)\big) - 12$

$\big(x(4+x)\big) - 12 = 0 \to 4x + x^2 - 12 = 0;\ x_1 = 2 ; x_2 = -6$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 7x$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to 2C_2 + C_1 \to \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 2x \\ 2x+6 & x-1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \to |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 2x \\ 2x+6 & 5 \end{vmatrix} =$

$(x+2)5 - (2x+6)2x = 5x + 10 - (4x^2 + 12x)$

$5x + 10 - (4x^2 + 12x) = 67 \to -4x^2 + 7x - 57 = 0;\ x_1 = 3; x_2 = -4{,}75$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} \to C_1 + C_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x-1 & x-1 & x+3 \\ 1 & x-1 & 4 \end{vmatrix} \to -2C_1 + C_2 \to$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-1 & x-1 & -x+5 \\ 1 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \to |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -x+5 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-1) - [(x-1)(-x+5)] =$

$= (2x-2) - (-x^2 + 5x + x - 5) = x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 = 1 - 7x \to x^2 + 3x + 2 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -2$

31- Halla las matrices inversas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow inversa$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t \qquad |A| = 6 \quad Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow traspuesta \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow inversa$

|A|=(-20+10+0)-(-75+24+0)= 41

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -7 & -25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow traspuesta \begin{pmatrix} -20 & -8 & 17 \\ -7 & -11 & 8 \\ -25 & 10 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{41} \cdot \begin{pmatrix} -20 & -8 & 17 \\ -7 & -11 & 8 \\ -25 & 10 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{41} & -\frac{8}{41} & \frac{17}{41} \\ -\frac{7}{41} & -\frac{11}{41} & \frac{8}{41} \\ -\frac{25}{41} & \frac{10}{41} & -\frac{11}{41} \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix} \rightarrow inversa$

$$|A| = (ac + c^2 + b^2) - (ab + cb + c^2) \rightarrow \ (c-b)(a-b)$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ b & c \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} c & b \\ b & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & b \\ a & c \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bc & 0 & b-a \\ -c^2+b^2 & c-b & -b+c \\ c^2-ab & -cc+b & a-c \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow traspuesta \begin{pmatrix} c(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2-ab \\ 0 & c-b & -c+b \\ b-a & -b+c & a-c \end{pmatrix}$$ * Simplificamos.

$$A^{-1}=\frac{1}{(c-b)(a-b)}\cdot\begin{pmatrix} c(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2-ab \\ 0 & c-b & -c+b \\ b-a & -b+c & a-c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{c\cancel{(a-b)}}{(c-b)\cancel{(a-b)}} & \frac{(b+c)\cancel{(b-c)}}{-\cancel{(c-b)}(a-b)} & \frac{c^2-ab}{(c-b)(a-b)} \\ 0 & \frac{\cancel{c-b}}{\cancel{(c-b)}(a-b)} & \frac{\cancel{-c+b}}{\cancel{(c-b)}-(a-b)} \\ \frac{\cancel{b-a}}{-(c-b)\cancel{(a-b)}} & \frac{\cancel{-b+c}}{\cancel{(c-b)}(a-b)} & \frac{a-c}{(c-b)(a-b)} \end{pmatrix}$$

- Solución $=\begin{pmatrix} \frac{c}{c-b} & \frac{b+c}{-a+b} & \frac{c^2-ab}{(c-b)(a-b)} \\ 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{1}{-a+b} \\ \frac{1}{-c+b} & \frac{1}{a-b} & \frac{a-c}{(c-b)(a-b)} \end{pmatrix}$

32.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz inversa de A

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2+1=3\,;\;\; A^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\;\;;\;\; Adj(A^t)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\;\;; A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) Comprueba que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Halla una matriz X tal que A·X=B siendo $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

33.- Sean las matrices $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}}$ ***y*** $\boldsymbol{B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}}$

a) Calcula la matriz inversa de A·B

$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\quad;\quad|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=1-2=-1$

$(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\quad;\quad Adj(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&1\end{pmatrix}\quad;\quad \mathbf{(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}}$

b) Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Que relación entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta

$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=3-4=-1\quad;\quad A^t=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\;;\; Adj(A^t)=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}\;;A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$

$|B|=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1-0=1\quad;\quad B^t=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\;;\; Adj(B^t)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\;;B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{1}\\\mathbf{2}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

$$\mathbf{(A\cdot B)^{-1}}=\boldsymbol{B^{-1}\cdot A^{-1}}$$

34.- Siendo las matrices. A=$\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{-2}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{1}&\mathbf{-4}\end{pmatrix}$ **B=**$\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{2}&\mathbf{-1}\\\mathbf{0}&\mathbf{3}\\\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$

a) ¿Es cierto que det(A·B)= det(B·A)?

AB=$\begin{pmatrix}1+6+0+2&0-3+0-2\\2+4+0+4&0-2+3-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-5\\10&-3\end{pmatrix}$

BA=$\begin{pmatrix}1+0&3+0&0+0&-2+0\\2-2&6-2&0-1&-4+4\\0+6&0+6&0+3&2-4\\-1+2&-3+2&0+1&2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&0&-2\\4&4&-1&0\\6&6&3&-2\\1&-1&1&-2\end{pmatrix}$

- Solución: No es cierto, ya que:

$\begin{pmatrix}9&-5\\10&-3\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&3&0&-2\\4&4&-1&0\\6&6&3&-2\\1&-1&1&-2\end{pmatrix}$

b) Calcula, si es posible, la inversa de A·B.

$|A\cdot B|$ = -27-(-50)= 23 ; $Adj(AB)$=$\begin{pmatrix}-3&-10\\-(-5)&9\end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix}-3&-10\\5&9\end{pmatrix}\rightarrow traspuesta\begin{pmatrix}-3&5\\-10&9\end{pmatrix}$

- $(AB)^{-1}=\frac{1}{23}\cdot\begin{pmatrix}-3&5\\-10&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{23}&\frac{5}{23}\\-\frac{10}{23}&\frac{9}{23}\end{pmatrix}$

35- Halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa. A= $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{-t} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ =(0+2+t^2)-(0+2 $- 3t) = t^2 + 3t; \quad t(t+3) = 0; \quad t = 0; \quad t = -3$

Cuando t= 0 $\quad o \quad t = -3, no\ existe\ A^{-1}$.

36.- Dada la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{-\lambda} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **averigua para que valores de λ existe A^{-1}, y calcúlala para λ=-3.**

a)

$|A| = (1\cdot(-\lambda)\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot 1 + \lambda\cdot(-2)\cdot 0) - (1\cdot(-\lambda)\cdot\lambda + 0\cdot 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2)\cdot 1)$=

=$(-\lambda - 2) - (-\lambda^2 + 4)$=$\lambda^2 - \lambda - 6 \qquad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \qquad \lambda = \frac{1+5}{2} = 3 \qquad \lambda = \frac{1-5}{2} = -2$ Si λ vale 3 o -2 no existe A^{-1}

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A| = (-3)^2 - (-3) - 6 = 6$$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 7 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$

37.- Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 2) - (1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 2 + 0\cdot 1\cdot 1) = 3$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; A^{-1} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

38.- Dada la matriz $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.

$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3\cdot(-1)\cdot(-2)+1\cdot1\cdot0+2\cdot2\cdot3)-(0\cdot(-1)\cdot2+3\cdot1\cdot3+(-2)\cdot2\cdot 1) = 18-5 = 13 \;\; |M| \neq 0, \quad \textit{tiene inversa}$

$M^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}; Adj(M^t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{-6}{13} \\ \frac{-4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$

b) Descompón la matriz $|M|$ en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica

Matriz simétrica: $A = A^t$ Matriz antisimétrica: $B = -B^t$

Fórmulas: $A = \frac{M+M^t}{2}$ $B = \frac{M-M^t}{2}$

$$M + M^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \textit{Matriz simétrica}$$

$$M - M^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{Matriz antisimétrica}$$

c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean todos no nulos y que el valor de uno de ellos sea nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 2+1 & 3-1 & -3+3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4+(-3)+18)-(6+6-6)+0 = 13-0 = 13$$

d) Comprueba si: $|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{P}| + |\boldsymbol{Q}| \;\; y \;\; |\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{P}|\cdot|\boldsymbol{Q}|$

$13 = 13 + 0 \rightarrow 13 = 13 \rightarrow |M| = |P| + |Q|$

$13 = 13 \cdot 0 \ \rightarrow 13 \neq 0 \rightarrow |M| \neq |P| \cdot |Q|$

e) Resuelve la ecuación: $\boldsymbol{\alpha_{13}x^2 - |M|x + 4A_{32} = 2}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} x^2 - 13x + 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \ ; \ \ 3x^2 - 13x + 4 \cdot (-9) = 2 \quad ; \ \ 3x^2 - 13x - 38 = 0$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-38)}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm 25}{6} \qquad x = \frac{13+25}{6} = \frac{19}{3} \quad ; \quad x = \frac{13-25}{6} = -2$

39.- ¿Para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ tiene inversa? Halla la inversa para a=2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = (a \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot a \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1) - (0 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot a + 0 \cdot 1 \cdot 0) = 1 - a^2$$

$1 - a^2 = 0 \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow \ a = 1 \ \ y \ a = -1$, Existe la matriz inversa cuando $a \neq 1 \ \ y \ a \neq -1$

Inversa para a=2

$(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A^t) \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 2^2 = -3$

$(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \ \ A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{-3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{-3} & -1 & \frac{2}{-3} \end{pmatrix}$

40.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A?

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} . Adj(A^t)$

$$|A| = 60 - 2a - 14 - (21a - 16 + 5) = 57 - 19a$$

$57 - 19a = 0 \quad ; \ \ -19a = -57 \quad ; \qquad a = \frac{-57}{-19} = 3$

$a = 3$ Para que A no sea invertible.

b)

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$A=\begin{pmatrix}4&1&7\\1&3&2\\a&-2&5\end{pmatrix}\qquad A^t=\begin{pmatrix}4&1&7\\1&3&-2\\7&2&5\end{pmatrix}$$

Si $a=3$ $\quad |A|=0 \quad |A^t|=0 \qquad |A\cdot A^t|=|A|\cdot|A^t|=0$

Si $a\neq 3$ $\quad |A|=57-19a \qquad |A^t|=|A|=57-19a$

$|A\cdot A^t|=|A|\cdot|A^t|=(57-19a)^2$

41.- Sea C la matriz

$$\begin{pmatrix}2&-1&m\\1&0&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

a) **¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C?**
b) **Calcula la inversa de C para $m=2$.**

a) $|C|=-2+m-(-2-1)=-2+m+3=m+1$

$m+1=0 \quad ; \quad m=-1$

$m=-1$ Es el valor para el que C no tiene inversa.

b) $\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&0&-1\\-2&1&1\end{pmatrix} \qquad |C|=3$

$$AdjC=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\-2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\-2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\-2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&-1\\-2&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&2\\0&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&2\\1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&6&0\\1&4&1\end{pmatrix}$$

$$(AdjC)^t=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&6&4\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad C^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&3&1\\1&6&4\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&2&\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

42.- Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&x&3\\4&1&-x\end{pmatrix}$$

donde x es un número real, halla:

a) **Los valores de x para los que la matriz A posea inversa**
b) **La inversa de A para x=2**
c) **Con x=5, el valor de $b\in R$ para que la matriz b·A tenga determinante 1.**

a) $|A|=-x^2+4x-3\rightarrow x^2-4x+3=0$

$$x=3 \quad ,x=1$$

Los valores de x tienen que ser distintos de 1 y 3, para que A posea inversa.

b) $x=2$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\4&1&-2\end{pmatrix}$ $\quad |A|=1$

$$AdjA=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&3\\4&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&2\\4&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&-1\\1&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&-1\\4&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\4&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&-1\\2&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-1\\0&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&12&-8\\-1&-6&-1\\2&3&2\end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t=\begin{pmatrix}-7&-1&2\\12&-6&3\\-8&-1&2\end{pmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}-7&-1&2\\12&-6&3\\-8&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-1&2\\12&-6&3\\-8&-1&2\end{pmatrix}$$

c) $\quad b\cdot A=b\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&5&3\\4&1&-5\end{pmatrix}\rightarrow|b\cdot A|=\left|b\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&5&3\\4&1&-5\end{pmatrix}\right|=b^3\cdot\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&5&3\\4&1&-5\end{vmatrix}$

$$|A|=-25-(-20+3)=-8$$

$$b^3\cdot(-8)=1 \;;\quad b^3=\frac{1}{-8} \;;\quad b=\sqrt[3]{\frac{1}{-8}}=\frac{1}{-2}$$

43. Dadas las matrices A, B y C ∈ M_{3x3}, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $\boldsymbol{X\cdot A=B}\longrightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}\longrightarrow X=B\cdot A^{-1}$

b) $\boldsymbol{B\cdot X-2B=3X}\longrightarrow B\cdot X-3X=2B\longrightarrow(B-3I)\cdot X=2B\longrightarrow$

$(B-3I)^{-1}(B-3I)\cdot X=(B-3I)^{-1}\cdot 2B\,;$ $\qquad X=(B-3I)^{-1}\cdot 2B$

c) $\boldsymbol{A\cdot X\cdot C=2B^t+A}\longrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot C\cdot C^{-1}=A^{-1}(2B^t+A)\cdot C^{-1};$ $\qquad X=A^{-1}(2B^t+A)\cdot C^{-1}$

44. Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

$A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ La fórmula para calcular la matriz inversa es: $\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,(adj(A))^t}$

- Calculamos el **valor del determinante** A.

$A=\begin{vmatrix}a&0\\0&b\end{vmatrix}=(ab)-(0\cdot 0)=ab\longrightarrow|A|=ab$

- Hallamos el **adjunto** del determinante con la fórmula: $\boldsymbol{A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}}$, siendo "i" las filas y "j" las columnas

$a_{11}:(-1)^2(b)=b$

a_{12}: $(-1)^3(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad Adj(A) = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \longrightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$

a_{21}: $(-1)^3(0) = 0$

a_{22}: $(-1)^4(a) = a$

Por lo que $\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{ab}|} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \qquad A = A^{-1} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{a} \longrightarrow a^2 = 1;\ \boldsymbol{a} = \mathbf{1}, -\mathbf{1} \\ b = \frac{1}{b} \longrightarrow b^2 = 1;\ \boldsymbol{b} = \mathbf{1}, -\mathbf{1} \end{cases}$$

Por lo tanto, existen cuatro matrices diagonales que coinciden con su inversa:

$$1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad 4.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

45. a) Halla, si existe, la matriz inversa de M.

b) Calcula la matriz X que cumple $\boldsymbol{X \cdot M + M = 2M^2}$ $\qquad \boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{2} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$

a)

$$|M| = \left[\left(0 \cdot\ 1(-2)\right) + \left(1(-2) \cdot 1\right) + \left((-1) \cdot 2\ \cdot 1\right)\right] - \left[\left(1\ \cdot 1(-1)\right) + \left(1(-2) \cdot 0\right) + \left((-2) \cdot 2\ \cdot 1\right)\right] =$$

$= -4 - (-5) \Rightarrow \boldsymbol{|M| = 1}$

$$\boldsymbol{M^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{M}|} \cdot \left(\boldsymbol{adj(M)}\right)^{\boldsymbol{t}}$$

Hallamos el adjunto de la matriz:

a_{11}: $(-1)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) = -4$

a_{12}: $(-1)^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

a_{13}: $(-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$

a_{21}: $(-1)^3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-3) = 3$

a_{22}: $(-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1) = 1$

a_{23}: $(-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (2) = -2$

a_{31}: $(-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1) = 1$

a_{32}: $(-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

a_{33}: $(-1)^6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2$

$$Adj(M) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(Adj(M)\right)^t = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $\mathrm{X} \cdot \mathrm{M} + \mathrm{M} = 2M^2$ $\quad \mathrm{X} \cdot \mathrm{M} = 2M^2 - \mathrm{M}$ $\quad \mathrm{X} = (2M^2 - \mathrm{M}) \cdot M^{-1}$ $\quad \mathrm{X} = 2M^2 \cdot M^{-1} - M \cdot M^{-1}$

$$\mathrm{X} = 2\mathrm{M} - \mathrm{I} \longrightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

46. Dadas las matrices:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué valores de *a* hacen singular la matriz?

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz *B* para que la ecuación $\boldsymbol{A \cdot B \cdot C = D}$ tenga sentido?

c) Calcula *B* para el valor *a = 1*?

a)

$$|\mathrm{C}| = (0 + 4a + 2) - (2a^2 + 0 + 2)$$

$$4a + 2 - 2a^2 - 2 = 0$$

$$4a - 2a^2 = 0 \rightarrow a(4 - 2a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

b) $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{C} = \mathrm{D}$

$$(2 \cdot 2) \cdot (?\cdot ?) \cdot (3 \cdot 3) = (2 \cdot 3)$$

Para poder multiplicar la **matriz B** por la matriz A y por la matriz C, sus dimensiones tendrán que ser **2x3**

c)

$A \cdot B \cdot C = D$

$A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1} \Longrightarrow \boldsymbol{B = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1}}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\mathrm{Adj}\ (A))^t \qquad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$a_{11} = (-1)^2 \cdot (1) = 1 \qquad a_{12} = (-1)^3 \cdot (-2) = 2$

$a_{21} = (-1)^3 \cdot (0) = 0 \qquad a_{22} = (-1)^4 \cdot (1) = 1$

$\mathrm{Adj}\ (A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to (\mathrm{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot (\mathrm{Adj}\ (C))^t$

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 4a + 2) - (2a^2 + 0 + 2) \to (4a + 2) - (2a^2 + 2)$

$\to (4 \cdot 1 + 2) - (2 \cdot 1^2 + 2) \to |C| = 2$

$\mathrm{Adj}(C) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to (\mathrm{Adj}(C))^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to C^{-1} =$
$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{B = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1}} \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

47. Resuelve las siguientes ecuaciones :

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

$((5 \cdot 3 \cdot 7) + (4 \cdot 0 \cdot (-2) \cdot (9 \cdot x \cdot 1)) — 2 \cdot 3 \cdot 1 + (9 \cdot 0 \cdot 5) \cdot (7 \cdot x \cdot 4) = 0$

$105 + 9x + 6 - 28x = 0 \qquad 105 + 6 = 28x - 9x \qquad 111 = 19x \qquad x = \frac{111}{19}$

b) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x-2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$; F1+F2 $\to \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$

(-1)·C3+C2 $\rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ 1 & 3-x & x-2 \end{vmatrix}$; F2+F3 $\rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ x+4 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ x+4 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)\cdot\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ x+4 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)\cdot(x^2-5x-6)$$

$(x-3)=0 \rightarrow x=3$

$(x^2-5x-6)=0 \rightarrow x=-1\,; x=6$

c) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \boldsymbol{x}+\mathbf{3} \end{vmatrix}$**=0**

$$C3\cdot(-1)+C1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & x & 2 & 2 \\ 3-x & 5 & x & 3 \\ 0 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & x & 2 & 2 \\ 3-x & 5 & x & 3 \\ 0 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 2 & 2 \\ 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} \;;\; C2\cdot(-1)+C1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x-2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x-2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x)\cdot((x-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x)\cdot((x-2)\cdot(-3x+3))$$

$(3-x)=0 \rightarrow x=3 \qquad (x-2)=0 \rightarrow x=2 \qquad (-3x+3)=0 \rightarrow x=1$

48. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow 0+4\;;\; 4\neq 0 \;\; rg(a)=2$

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \rightarrow |1|=1\neq 0 \rightarrow rg\,(b)\geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\; rg(A)=2$; No puede tener rango mayor que 2 pues solo hay 2 filas.

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \rightarrow |2|=2\neq 0 \rightarrow rg(c)\geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3\neq 0 \;\rightarrow rg(c)\geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (10-6)=4\neq 0 \rightarrow \;\; rg\,(c)=\;3$

d) $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \rightarrow |3|=3\neq 0 \rightarrow rg(d)\geq 1$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow 9-4 \neq 0 \; rg(d) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow (18+4+16)-(24+6+8)=0$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow (18-16)-(-6+8)=0 \;\; rg(d)=2$

49. Halla el rango de las siguientes matrices :

a) A=$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \rightarrow |3| \neq 0 \quad rg \geq 1$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow 6-6=0$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow 12-12=0$ Rg(A)=1

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \rightarrow |1| \neq 0$ rg ≥ 1

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow (-1)-(4)=-5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow (-2+12+24)-(-9+8+8)=27 \neq 0 \quad rg=3$

$\boldsymbol{c})\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{pmatrix} \rightarrow |1| \neq 0 \qquad rg(c) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow 3+2=5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;,$

la fila 4 es igual a la suma de la 1 y la 2; la fila 3 es igual a la fila 1 multiplicada por 3.

Por tanto $\mathrm{rg}(\mathrm{C}) = 2$

50. Halla el rango de las matrices en función del parámetro:

a) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \rightarrow (a \cdot 1)-(1 \cdot 1)=0\,; \;\; a=1$

$1.\,Si\ a=1\ rg=1 \qquad 2.\,Si\ a \neq 1\ rg=2$

b) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (a \cdot 0)-(3 \cdot 0)=0$

$\begin{vmatrix} a & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (a \cdot 6)-(4 \cdot 3)=0\,; a=2$

$Si\ a=2\ \ rg=1\ \ ;\ Si\ a\neq 2\ \ rg=2$

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \big(1\cdot(-1)\big)-(1\cdot 0)=-1$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = (1\cdot a\cdot a+0+0)-(0-2+3a)$

$a^2-3a+2=0\ \ ;\ a=2\,;\ \ a=1$

$Si\ a=2\ o\ a=1\to\ rg=\ 2$

$Si\ a\neq 1\,,a\neq 2\ \ entonces\ rg=3$

d) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+1+a^3)-(a+a+a)\quad 2+a^3-3a=0\ ;\ a=-2\,;\ \ a=1$

1. Si a = 1 el rango es 1
2. Si a = -2 entonces rg = 2
3. Si a ≠ -2 y a ≠ 1 entonces rg = 3

51. Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente

$$A=\begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

- $\begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^2-2x\ ;\ x^2-2x=0\ ;\ x=0\ \ y\ x=2$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\ \ rg(A)\geq 2$

  1. Si $x=0\ \ o\ \ x=2\ \ rg(A)=2$
  2. Si $x\neq 0\ \ o\ \ x\neq 2\ \ rg(A)=3$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix} 3C4+C1\to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & x & x & 1 \end{pmatrix} -F1+F3\to \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & x-1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4\ \ rg(B)\geq 2\quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \end{vmatrix} = x-1\,;\ \ x-1=0\,;\ \ x=1$

1. Si $x=1\ \ rg(B)=2$
2. Si $x\neq 1\ \ rg(B)=3$

- $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -3+2+3-3a=2-3a\ ;\ 2-3a=0\ ;\ \ a=\frac{2}{3}$

  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3\ \ rg(C)\geq 2$

1. Si $x = \frac{2}{3}$ $\text{rg}(C) = 2$
2. Si $x \neq \frac{2}{3}$ $\text{rg}(C) = 3$

52. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\boldsymbol{x} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{x} \end{pmatrix}$

a) Resuelve la ecuación det(A)=0

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x

a) $\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 1 + 1 + x + x + x = -x^3 + 3x + 2$

$$-x^3 + 3x + 2 = 0\,; \quad x = -1 \text{ doble}\,; \quad x = 2$$

b)
1. Si $x \neq -1$ $x \neq 2$ rg(A)=3
2. Si $x = -1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ rg(A)=1
3. Si $x = 2$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$ rg(A)=2

53. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{m} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{m} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de m.

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación A·X=B?

c) Calcula X para m=0.

a) $\begin{vmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} = 6m^2 + 12m + 16 - 12m - 4m^2 - 24 = 2m^2 - 8$

$$2m^2 - 8 = 0\,; \quad m = 2 \text{ y } m = -2$$

1. Si $m \neq 2$ y $m \neq -2$ rg(A) = 3
2. Si $m = 2$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, tiene dos columnas iguales y $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4 \neq 0$
   Por tanto, el rango sería 2.
3. Si $m = -2$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$, la columna 1 y 2 son iguales con el signo cambiado y $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 12 = 20 \neq 0$. Por tanto, el rango sería 2.

b) Como A es de orden **3**x3 y B de orden 3x**2 ,** X debe ser de orden 3x2.

c) $X = A^{-1} \cdot B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}0&2&6\\2&0&4\\2&0&6\end{pmatrix};\qquad |A|=-8;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{2}&-1\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{2}&-1\\\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{5}{2}}&\boldsymbol{-2}\\\boldsymbol{4}&\boldsymbol{-2}\\\boldsymbol{-1}&\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$$

54. Resuelve las ecuaciones:

a) **A·X = B, siendo** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{2}\\\boldsymbol{2}&\boldsymbol{5}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{4}&\boldsymbol{-6}\\\boldsymbol{2}&\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$

$$X=A^{-1}\cdot B\ ;\ A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix};\ \ X=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-6\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&28\\-6&13\end{pmatrix}$$

b) **B·X = C, siendo** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{2}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$

$$X=B^{-1}\cdot C\ ;\ B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\ ;\ X=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0&1\\1&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&3&-2\\-2&0&0\end{pmatrix}$$

c) **A·X = B + 2C, siendo** $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{2}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{3}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{-1}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{9}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{-3}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{2}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{3}&\boldsymbol{4}&\boldsymbol{5}\end{pmatrix}$

$$X=A^{-1}\cdot(B+2C)\ ;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\9&3&-3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\3&4&5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3}&\boldsymbol{2}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{2}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{4}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{2}\end{pmatrix}$$

d) A·X + B = 2C, siendo $A=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y\ C}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

$$X=A^{-1}\cdot(2C-B)\ ;\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=A^{-1}\cdot(2C-B)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\mathbf{\frac{5}{2}} & -\mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{2}\\ \mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. **El valor del determinante de la matriz A es: a) 4 b) 0 c) − 4 d) 8**
$|A| = (2^3 + 1^3 + 1^3) - (1^2 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2) = (8 + 1 + 1) - (2 + 2 + 2) = 10 - 6 = 4$; **a) 4**

2. **El adjunto B_{23} del determinante de la matriz B es**

a) 0 b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) − 4 d) $-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$B_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ **a) 0**

3. **El valor del determinante de la matriz B es:**

a) 4 b) 0 c) 8 d) − 8

Como tiene una columna de ceros el determinante vale 0. **b) 0**

4. **El rango de B es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4**

(Buscamos el determinante no nulo de mayor dimensión dentro del determinante)

$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = [2 \cdot (-2)] - [(-2) \cdot 7] = -4 + 14 = 10$

$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = [2 \cdot (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 0] - [4 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot 7 \cdot 3] = (-12 - 16) — 12 - 42 = -28 + 12 + 42 = -28 + 54 = 26$

Como el determinante tiene una columna de ceros no hay más determinantes distintos de cero

$rg(B) = 3$; **c) 3**

5. **La matriz inversa de A es:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A^t)]$; $|A| = 4$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$[Adj(A^t)] \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (2^2-1^2) & -(2\cdot 1-1^2) & (1^2-1\cdot 2) \\ -(1\cdot 2-1^2) & (2^2-1^2) & -(2\cdot 1-1^2) \\ (1^2-1\cdot 2) & -(2\cdot 1-1^2) & (2^2-1^2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (4-1) & -(2-1) & (1-2) \\ -(2-1) & (4-1) & -(2-1) \\ (1-2) & -(2-1) & (4-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

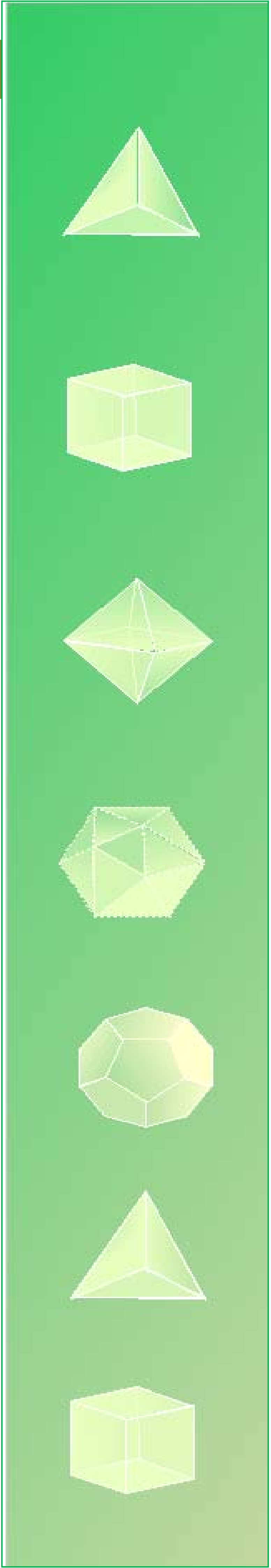
$$A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}; \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6. La matriz inversa de la matriz F es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad F^{-1} = \frac{1}{|F|}\cdot Adj(F^t) \qquad |F| = -1$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Adj; (F^t) = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F^{-1} = opción\ a)$$



Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

2º Bachillerato

Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR,ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA, CELIA S, ANDREA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

a) $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{-x+2y-5z=-3}\\ \mathbf{2x-3y+z=3}\\ \mathbf{-5x+2y-5z=-4}\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c}2E1+E2\\ -5E1+E3\end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}-x+2y-5z=-3\\ y-9z=-3\\ -8y+20z=11\end{array}\right. \rightarrow$

$(8E2+E3)\rightarrow\left\{\begin{array}{r}-x+2y-5z=-3\\ y-9z=-3\\ -52z=-13\end{array}\right. \;;\qquad z=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

$y-9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=-3 \quad;\qquad y=-3+\frac{9}{4}=-\frac{3}{4}$

$-x+2\left(-\frac{3}{4}\right)-5\left(\frac{1}{4}\right)=-3 \quad;\quad -x-\frac{11}{4}=-3 \quad;\quad x=\frac{1}{4}$

$\mathbf{x=\frac{1}{4}} \qquad \mathbf{y=-\frac{3}{4}} \qquad \mathbf{z=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}}$

b) $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{x-2y+3z=-14}\\ \boldsymbol{-x+3y-z=10}\\ \boldsymbol{2x-y+6z=-22}\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c}E1+E2\\ -2E1+E3\end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x-2y+3z=-14\\ y+2z=-4\\ 3y\qquad=6\end{array}\right.$

$3y=6 \quad;\quad \boldsymbol{y}=\frac{6}{3}=\mathbf{2} \qquad 2+2z=-4 \quad;\quad 2z=-6 \quad;\quad \boldsymbol{z}=-\frac{6}{2}=\mathbf{-3}$

$x-2\cdot(2)+3\cdot(-3)=-14 \quad;\quad x=\;-14+4+9 \quad;\quad \boldsymbol{x=-1}$

$\mathbf{x=-1} \qquad \mathbf{y=2} \qquad \mathbf{z=-3}$

c) $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{-x+3y-z=6}\\ \mathbf{3x-y+4z=7}\\ \mathbf{2x+6y-z=-9}\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c}3E1+E2\\ 2E1+E3\end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}-x+3y-z=6\\ 8y+z=25\\ 12y-3z=9\end{array}\right. \;3E2+E3\rightarrow \left\{\begin{array}{l}-x+3y-z=6\\ 8y+z=25\\ 36y\quad=84\end{array}\right.$

$\mathbf{y}=\frac{84}{36}=\mathbf{\frac{7}{3}} \;; \qquad 8\cdot\left(\frac{7}{3}\right)+z=25 \quad;\quad \mathbf{z}=25-\frac{56}{3}=\mathbf{\frac{19}{3}}$

$-x+3\frac{7}{3}-\frac{19}{3}=6 \quad;\quad -x=6-7+\frac{19}{3} \quad;\quad \mathbf{x}=-\mathbf{\frac{16}{3}}$

$\mathbf{x=-\frac{16}{3}} \qquad \mathbf{y=\frac{7}{3}} \qquad \mathbf{z=\frac{19}{3}}$

d) $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{x-9y+5z=33}\\ \boldsymbol{x+3y-z=-9}\\ \boldsymbol{x-y+z=5}\end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c}-E1+E2\\ -E1+E3\end{array} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x-9y+5z=33\\ 12y-6z=-42\\ 8y-4z=-28\end{array}\right. \rightarrow$

$8E2-12E3 \left\{\begin{array}{r}x-9y+5z=33\\ 12y-6z=-42\\ 0=0\end{array}\right. \qquad \textit{Sistema Compatible Indeterminado}$

Simplificamos la segunda ecuación e igualamos z a t; z = t.

$\left\{\begin{array}{l}x-9y+5t=33\\ 2y-t=-7\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}x-9y=33-5t\\ 2y=-7+t\end{array}\right. ;\; y=\frac{-7+t}{2} \qquad x=33-5t+9\left(\frac{-7+t}{2}\right)=\frac{3-t}{2}$

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{3-t}}{\mathbf{2}}\ ;\qquad \mathbf{y}=\frac{\mathbf{-7+t}}{\mathbf{2}}\ ;\qquad \mathbf{z=t}$$

2.-Dados los sistemas siguientes

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer
b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases}\mathbf{-4x+3y=-5}\\ \mathbf{3x-4y=2}\end{cases}$; $\left(\begin{array}{cc|c}-4 & 3 & -5\\ 3 & -4 & 2\end{array}\right)$ $\quad |A|=16-9=7\neq 0$

$$AdjA=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}\rightarrow traspuesta\rightarrow\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{7} & \frac{-3}{7}\\ \frac{-3}{7} & \frac{-4}{7}\end{pmatrix}\rightarrow X=A^{-1}\cdot B\ \rightarrow\begin{pmatrix}-\frac{4}{7} & \frac{-3}{7}\\ \frac{-3}{7} & \frac{-4}{7}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Cramer: $\quad x=\frac{\begin{vmatrix}-5 & 3\\ -3 & -4\end{vmatrix}}{7}=\frac{14}{7}=\mathbf{2}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}-4 & -5\\ 3 & 2\end{vmatrix}}{7}=\frac{7}{7}=\mathbf{1}$

b) $\begin{cases}\boldsymbol{-2x-y=-4y}\\ \boldsymbol{5+2y=3x}\end{cases}$; $\begin{cases}2x+3y=0\\ -3x+2y=-5\end{cases}\ \rightarrow\ \left(\begin{array}{cc|c}2 & 3 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{array}\right)\ \rightarrow |A|=13$

Adj A=$\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\rightarrow traspuesta\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\ A^{-1}\ =\frac{1}{13}\ \begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\ \ X=A^{-1}\cdot B$

$$X=\frac{1}{13}\ \begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{13}}\\ \frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{13}}\end{pmatrix}$$

Cramer: $\quad x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 3\\ -5 & 2\end{vmatrix}}{13}=\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{13}}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & -5\end{vmatrix}}{13}=\frac{\mathbf{-10}}{\mathbf{13}}$

c) $\begin{cases}\boldsymbol{y+2z=-3}\\ \boldsymbol{2x+y=3}\\ \boldsymbol{x+3y-4z=3}\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & -4 & 3\end{array}\right)\rightarrow\ |A|=12-(2-8)=18$

Adj A = $\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 5\\ 10 & -2 & 1\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}\rightarrow(AdjA)^t\rightarrow\begin{pmatrix}-4 & 10 & -2\\ 8 & -2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$A^{-1}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 10 & -2\\ 8 & -2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\text{X}=A^{-1}\cdot\text{B}\rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Cramer: $\text{X}=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -4\end{vmatrix}}{18}=\frac{12+18-(6-12)}{18}=\frac{36}{18}=\mathbf{2}$ $\quad \text{y}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}}{18}=\frac{12-(6+24)}{18}=\frac{-18}{18}=\mathbf{-1}$

$\text{Z}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}}{18}=\frac{-18+3-(-3+6)}{18}=\frac{-18}{18}=\mathbf{-1}$

3.- Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}-2x+y=-3\\ 6x-3y=9\end{cases}$ usamos el método de reducción: $3F_1=F_1'$

$\begin{cases}-6x+3y=-9\\ 6x-3y=9\end{cases}$ sumamos las ecuaciones $\begin{cases}-6x+3y=-9\\ 0=0\end{cases}$

hacemos $\mathbf{x=t}$, $\mathbf{y}=\frac{-9+6t}{3}=\mathbf{-3++2t}$

b) $\begin{cases}-4x-6y=-6\\ -2x+3y=-3\end{cases}$ usamos el método de reducción: $-2F_2=F_2'$

$\begin{cases}-4x-6y=-6\\ 4x-6y=+6\end{cases}$ $\begin{cases}-4x-6y=-6\\ -12y=0\end{cases}$ $\mathbf{y=0}$ $-4x=-6;$ $\mathbf{x}=\frac{6}{4}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

c) $\begin{cases}3x-2y=-2\\ 9x-6y=6\\ 6x+4y=3\end{cases}$ $\begin{matrix}-3F_1+F_2=F_2'\\ -2F_1+F_3=F_3'\end{matrix}$ $\begin{cases}3x-2y=-2\\ \mathbf{0=12}\\ 8y=7\end{cases}$

No es posible resolver este sistema ya que es incompatible

4.- Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible la regla de Cramer:

$\boldsymbol{a})\begin{cases}\boldsymbol{-x-2y+3z=6}\\ \boldsymbol{3x-4y+2z=7}\\ \boldsymbol{4x+y-z=-1}\end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & 3 & 6\\ 3 & -4 & 2 & 7\\ 4 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$ $|A|=33$

$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & -2 & 3\\ 7 & -4 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{33}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3};$ $\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 6 & 3\\ 3 & 7 & 2\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}}{33}=-\frac{22}{33}=-\frac{2}{3};$ $\quad z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -2 & 6\\ 3 & -4 & 7\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}}{33}=\frac{55}{22}=\frac{5}{2}$

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{3};y=-\frac{2}{3};z=\frac{5}{2}}$$

$$b)\begin{cases}2x-3y+z=-29\\ 3x+y-5z=21\\ -x+2y-4z=32\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}2&-3&1&-29\\3&1&-5&21\\-1&2&-4&32\end{array}\right)\qquad |B|=-32$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-29&-3&1\\21&1&-5\\32&2&-4\end{vmatrix}}{-32}=\frac{64}{-32}=-2;\; y=\frac{\begin{vmatrix}2&-29&1\\3&21&-5\\-1&32&-4\end{vmatrix}}{-32}=\frac{-224}{-32}=7;\; z=\frac{\begin{vmatrix}2&-3&-29\\3&1&21\\-1&2&32\end{vmatrix}}{-32}=\frac{128}{-32}=-4$$

$$\boldsymbol{x=-2;\; y=7;\; z=-4}$$

$$c)\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+3y-4z=9\\ x-y+z=-1\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&3&-4&9\\1&-1&1&-1\end{array}\right)\qquad |C|=-12$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\9&3&-4\\-1&-1&1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{-12}{-12}=1;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&9&-4\\1&-1&1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{-12}{-12}=1;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&9\\1&-1&-1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{12}{-12}=-1$$

$$\boldsymbol{x=1;\; y=1;\; z=-1}$$

$$d)\begin{cases}3x+2y+z=1\\ 5x+3y+4z=2\\ x+y-z=1\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&1\\5&3&4&2\\1&1&-1&1\end{array}\right)\qquad |D|=-1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&4\\1&1&-1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{4}{-1}=-4;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3&1&1\\5&2&4\\1&1&-1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-6}{-1}=6;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3&2&1\\5&3&2\\1&1&1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\boldsymbol{x=-4;\; y=6;\; z=1}$$

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible:

$$a)\begin{cases}2x+3y-4z=1\\ 4x+6y-az=2\\ x+y+az=10\end{cases}\qquad b)\begin{cases}5x+4y+2z=0\\ 2x+3y+z=0\\ 4x-y+m^2z=m-1\end{cases}$$

a) $\begin{vmatrix}2&3&-4\\4&6&-a\\1&1&a\end{vmatrix}=-a+8\;\rightarrow\;-a+8=0,\quad a=8$

1. $Para\ a\ \neq 8\ es\ un\ SCD$

$|A_x|=-2a+248\qquad |A_y|=19a-152\qquad |A_z|=0\qquad |A|=(-8+a)$

$$\mathbf{x=\frac{248-a}{8-a}\quad,\quad y=\frac{19a-152}{8-a}\quad,\quad z=0}$$

2. $Para\ a=8$

$\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0\,,\;\; R(A)=2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0\,, R(A^*) = 2;\; R(A) = R(A^*) < Nº\ de\ incognitas\ es\ un\ SCI$$

Suprimimos la 2ª ecuación que es doble de la primera y hacemos $z = \lambda$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ x + y + 8z = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 1 + 4\lambda \\ x + y = 10 - 8\lambda \end{matrix} \quad E1 - 2E2 \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 1 + 4\lambda \\ y = -19 + 20\lambda \end{matrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando x obtenemos

$$\boldsymbol{x = 29 - 28\lambda\,, \quad y = -19 + 20\lambda\,, \quad z = \lambda}$$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = m^2 - 1 \to m^2 - 1 = 0\,,\; m = \pm 1$

1. Para $\mathrm{m} \neq 1$ y $\mathrm{m} \neq -1$ $\mathrm{R(A) = 3}$ y por tanto es un $\mathbf{S.C.D.}$

$$|A_x| = -2(m-1) \quad |A_y| = (m-1) \quad |A_z| = 7(m-1) \quad |A| = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$$

$$\mathbf{x} = \frac{-2(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{m+1}}\;;\; \mathbf{y} = \frac{(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m+1}}\;;\; \mathbf{z} = \frac{7(m-1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{m+1}}$$

2. para $\mathrm{m} = 1$

$\mathrm{R(A) = 2; R(A^*) = 2 \to R(A) = R(A^*) <}$ Nº de incognitas es un $\mathbf{S.C.I.}$

Cogemos dos ecuaciones $\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$ hacemos $\mathbf{z = \lambda}$ $\begin{cases} 5x + 4y = -2\lambda \\ 2x + 3y = -\lambda \end{cases}$ -2F1+5F2

$$\begin{cases} 5x + 4y = -2\lambda \\ 7y = -\lambda \end{cases} \;;\quad \mathbf{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{\lambda} \;;\quad \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{\lambda}$$

3. para $\mathrm{m} = -1$

$\to \mathrm{R(A) \neq R(A^*)}$es un $\mathbf{S.I.}$

6. – Dado el sistema

$$\begin{cases} (a+2)x + (a-1)y - z = 3 \\ ax - y + z = 3 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo para el caso $a = -1$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (a^2 + 2a + 1) - (-a^2 + a) = a(-a-1)$

$$a(-a-1) = 0; \quad a = 0; \quad a = -1$$

1. **Si a $\neq$ 0 y a $\neq -1$.** El determinante será $\neq 0 \rightarrow r(A) = 3$ **SCD**

2. **Si a = -1**

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3; R(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \mathrm{R}(\mathrm{A}^*) = 2 \quad \text{Como el } \mathrm{R(A)} = \mathrm{R(A)}^* < \text{Nº de incógnitas es un } \textbf{SCI}$$

3. ***Si a* = 0**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2; R(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,; \ \mathrm{R}(\mathrm{A}^*) = 3\ ; \quad \text{Como el } \mathrm{R(A)} \neq \mathrm{R(A)}^* \text{es un } \textbf{SI}$$

b) Nos quedamos con 2 ecuaciones $\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ hacemos $z = \lambda$

$$\begin{cases} -x - y = 3 - \lambda \\ x - y = 1 - \lambda \end{cases} \quad E1 + E2 \quad \begin{cases} -x - y = 3 - \lambda \\ -2y = 4 - 2\lambda \end{cases} ; \quad y = -2 + \lambda \quad , \quad x = -1$$

$$\boldsymbol{x = -1 \quad , \quad y = -2 + \lambda \quad , \quad z = \lambda}$$

7. Dadas las ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{6x - 9y + 2z = 5} \\ \boldsymbol{2x - 3y + z = 4} \end{cases}$ **se pide:**

a) Añade una ecuación para que resulte un sistema incompatible.

$$\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 6 & -9 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Rg(A) < 3 $\quad \begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ = -3 Rg (A) = 2 $\quad \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 12 Rg(A*) =3

Rg (A)≠ Rg(A*) Sistema incompatible

b) Añade una ecuación para que resulte un sistema compatible determinado

$$\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 6 & -9 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \ \ Sistema\ compatible\ determinado$$

8. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \mathbf{2x+3y-z=-2} \\ \mathbf{x+2y+2z=1} \end{cases}$ **se pide**

a) Discútelo y resuélvelo cuando sea posible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0$$

Rg (A) = Rg (A*) = 2 < nº de incógnitas → Sistema compatible indeterminado ∞ soluciones

Z=λ $\begin{cases} 2x+3y-\lambda=-2 \\ x+2y+2\lambda=1 \end{cases} \to \begin{matrix} 2x+3y=-2+\lambda \\ x+2y=1-2\lambda \end{matrix}$

X=$\dfrac{\begin{vmatrix} -2+\lambda & 3 \\ 1-2\lambda & 2 \end{vmatrix}}{1} = (-4+2\lambda)-(3-6\lambda) = -7+8\lambda$

y=$\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -2+\lambda \\ 1 & 1-2\lambda \end{vmatrix}}{1} = (2-4\lambda)-(-2+\lambda) = 4-5\lambda$

b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:

i) una solución

$$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ z=1 \end{matrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

Rg (A) = Rg (A*) = S.C.D

ii) Muchas soluciones

(Añadimos una ecuación que sea la combinación de las otras dos para no añadir información)

$$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ 3x+5y+z=-1 \end{matrix}$$

iii) no tenga solución

$$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Rg(A) < 3 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 8 Rg (A) = 2 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = 12 Rg(A*) =3

Rg (A)≠ Rg(A*) Sistema incompatible

9. Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to 2F_1+F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to$

$-3F_1+F_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to -F_2+F_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

Como es homogénea y el rango de la matriz de coeficientes es 3; **x=0, y=0 y z=0.**

b) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 2y-z=0 \\ -2x+3y-4y=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to F_1+F_3 \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to -F_2+F_3 \to$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to S.C.I.\ hacemos\ t=z \begin{cases} 2x-y=-3t \\ 2y=t \end{cases}$

$y=\frac{t}{2}$; $2x=y-3t=\frac{t}{2}-3t=-\frac{5t}{2}$; $x=-\frac{5t}{4}$ $\quad \boldsymbol{x=-\frac{5t}{4}}$, $\boldsymbol{y=\frac{t}{2}}$, $\boldsymbol{z=t}$

c) $\begin{cases} y=x+3z-y \\ x=z-2y+x \\ z=x-2y-2z \end{cases} \to \begin{cases} x-y-y+3z=0 \\ x-x-2y-2z=0 \\ x-2y-2z-z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ -2y+z=0 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to -F_1+$

$F_3 \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$

Como es homogénea y el rango de la matriz de coeficientes es 3; **x=0, y=0 y z=0.**

10. Sean las matrices:

$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}, E(1 \quad 4)}.$

a) Calcula cada uno de los tres productos $A\cdot B, E\cdot D, D\cdot E$;

$A\cdot B \to \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix}$

$E\cdot D = (1 \quad 4)\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix} = (3x+16x) = (19x)$

$D\cdot E = \begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}(1 \quad 4) = \begin{pmatrix} 3x & 12x \\ 4x & 16x \end{pmatrix}$

b) Si C-2AB=-D plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

$\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y-2-2(x-y)=-3x \\ m-2(x-my)=-4x \end{cases} \to \begin{cases} y-2-2x+2y+3y=0 \\ m-2x+2my+4x=0 \end{cases} \to \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+2my=-m \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2m & -m \end{array}\right) \to \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2m \end{vmatrix} = 2\text{m}-6 \quad \to si\ 2m-6=0 \to m=\frac{6}{2}=3$

1. Para $m=3$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{array}\right)$ $-2F_1+F_2$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$ El sistema es Incompatible.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

11. Sean las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix};\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix};\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix};\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a

$$(AB-C)D=2E\rightarrow\left[\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A\cdot B};\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\x&y&z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB-C};\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\x&y&z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&y&z\\0&y&z\\x&y&z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(AB-C)D};\begin{pmatrix}0&y&z\\0&y&z\\x&y&z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\y+z\\x+y+z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{2E};2\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2a\\2a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{y+z}\\\boldsymbol{y+z}\\\boldsymbol{x+y+z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{2a}\\\boldsymbol{2a}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{y+z=0}\\\boldsymbol{y+z=2a}\\\boldsymbol{x+z+y=2a}\end{cases}$$

b) ¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?

$$A=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}\rightarrow 0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0+0+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0+0+0=\boldsymbol{0}$$

$$A_a=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&2a\\1&1&2a\end{vmatrix}=0\rightarrow 0\cdot\begin{vmatrix}1&2a\\1&2a\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}0&2a\\1&2a\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=0\rightarrow 0-(-2a)+0=0$$
$$\rightarrow-(-2a)=0\ \rightarrow 2a=0\rightarrow \boldsymbol{a=0}$$

- $\underline{\boldsymbol{Si\ a\neq 0}}$

$rg(A)=2$, ya que es posible encontrar un menor complementario de orden 2 y distinto de cero

$rg(A_a)=3$, ya que es posible encontrar un menor complementario de orden 3 y distinto de cero

$$Como\ rg(A)\neq rg(A_a), no\ tiene\ solución$$

- $\underline{\boldsymbol{Si\ a=0}}$

$$rg(A)=no\ varia\ su\ valor$$

$rg(A_a)=$ no es posible encontrar un menor complementario de orden 3 distinto de cero

$$Como\ rg(A)=rg(A_a)<número\ de\ incógnitas\ tiene\ infinitas\ soluciones$$

El sistema no tiene una única solución, puesto que para ningún valor da un resultado compatible

c) Para $\boldsymbol{a=0}$ encuentra una solución del sistema con $\boldsymbol{z\neq 0}$

$$Si\ a=0$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+z+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x+y=-z \end{cases} \rightarrow \{\boldsymbol{x=0; y=-k; z=k}$$

12. El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000€. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 101 es el doble que el número de billetes de 20 euros.

$$\begin{cases} x \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 50\ euros \\ y \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 20\ euros \\ z \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 10\ euros \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50x+20y+10z=7000 \\ x+y+z=225 \\ x+z=2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+2y+z=700 \\ x+y+z=225 \\ x+z=2y \end{cases} \quad ordenando\ las\ ecuaciones \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 700 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} -F_1+F_2 \\ -5F_1+F_3 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \\ 0 & -3 & -4 & -425 \end{array}\right) reordenando \rightarrow \begin{cases} x+z+y=225 \\ 4z+3y=425 \\ 3y=225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z+y=225 \\ 4z+3y=425 \\ \boldsymbol{y=75} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+z+75=225 \\ 40z+30\cdot 75=425 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+z=150 \\ \boldsymbol{z=50} \end{cases} \rightarrow x+50=150 \rightarrow \boldsymbol{x=100}$$

$$\begin{cases} 100+50+75=225 \\ 4\cdot 50+3\cdot 75=425 \\ 3\cdot 75=225 \end{cases} = \begin{cases} 225=225 \\ 425=425 \\ 225=225 \end{cases} \qquad (x,y,z)=(100{,}75{,}50)$$

$$\boldsymbol{Se\ obtiene\ \rightarrow 100\ billetes\ de\ 50€;\ \ 75\ billetes\ de\ 20€;\ 50\ billetes\ de\ 10€}$$

13. Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en esta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en esta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.

$x \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ A$

$y \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ B$

$z \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ C$

$$\begin{cases} x+5=y-5+z \\ z+10=x-10+y \\ 10x+20y+50z=1550 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-z=-10 \\ -x-y+z=-20 \\ 10x+20y+50z=1550 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & -20 \\ 10 & 20 & 50 & 1550 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & -20 \\ 1 & 2 & 5 & 155 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & -30 \\ 0 & 3 & 6 & 165 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y-z=-10 \\ \quad -2y \quad = -30 \\ \quad 3y+6z=165 \end{cases} \qquad y=15; \quad z=20; \quad x=25$$

SOLUCIÓN: Hay 25 billetes en la billetera A, 15 billetes en la billetera B y 20 billetes en la billetera C.

14. La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. Halla el número.

Datos: Número = xyz

*Escribimos el sistema:

- $x+y+z=18$
- $z=x+y$
- $100z+10y+x=100x+10y+z+594$ (zyx = xyz + 594)

*Lo simplificamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ -99x & 0 & 99z & 594 \end{array}\right) \to 99F_1+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ 0 & 99y & 198z & 2376 \end{array}\right) \to \frac{1}{99}F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ 0 & y & 2z & 24 \end{array}\right)$$

$$\to F_1+F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ 0 & 0 & 2z & 18 \\ 0 & y & 2z & 24 \end{array}\right)$$

*Con F_2 podemos sacar el valor de z: $2z=18;\ z=9$

*Con F_3 sacamos el valor de y: $y+2z=24;\ y=24-18;\ y=6$

*Hallamos el valor de x: $x+y+z=18;\ x=18-9-6;\ x=3$

El número es 369

15- Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

nº aciertos: x; nº fallos: y; nº no respondidas: z.

Para aprobar se necesitan 150 puntos.

- $x+y+z=60$
- $y+5z=x$
- $5x-2y-z=150$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 60 \\ -x & y & 5z & 0 \\ 5x & -2y & -z & 150 \end{array}\right) \rightarrow -5F_1+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 60 \\ -x & y & 5z & 0 \\ 0 & -7y & -6z & 150 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow F_2+F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2y & 6z & 60 \\ -x & y & 5z & 0 \\ 0 & -7y & -6z & -150 \end{array}\right) \rightarrow F_1+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2y & 6z & 60 \\ -x & y & 5z & 0 \\ 0 & -5y & 0 & -90 \end{array}\right)$$

*Cogemos F_3 y sacamos el valor de y:

$$y = \frac{90}{5} = 18; y = 18$$

*Hallamos las demás incógnitas:

$$2 \cdot 18 + 6z = 60;\ z = \frac{60-36}{6} = 4; z = 4$$

$$x = 18 + 5 \cdot 4;\ x = 38$$

- Solución: 38 aciertos, 18 fallos y 4 preguntas sin contestar. En total son 230 puntos obtenidos.

16. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- **Alimento Migato:600g de carne, 300g de pescado y 100g de verdura**
- **Alimento Catomeal:300g de carne, 400g de pescado y 300g de verdura**
- **Alimento Comecat:200g de carne, 600g de pescado y 200g de verdura**

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470g de carne, 370g de pescado y 160g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Solución:

$x = \%$ comida Migato; $y = \%$ comida Catomeal; $z = \%$ comida Comecat

Una vez determinadas las incógnitas se escribe el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 600x + 300y + 200z = 470 \\ 300x + 400y + 600z = 370 \\ 100x + 300y + 200z = 160 \end{cases}$$

Para resolver el sistema escribimos las matrices asociada y ampliada y hacemos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 600 & 300 & 200 & 470 \\ 300 & 400 & 600 & 370 \\ 100 & 300 & 200 & 160 \end{array}\right) \rightarrow -F_1+6F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 600 & 300 & 200 & 470 \\ 300 & 400 & 600 & 370 \\ 0 & 1500 & 1000 & 490 \end{array}\right) \rightarrow -F_1+2F_2 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 600 & 300 & 200 & 470 \\ 0 & 500 & 1000 & 270 \\ 0 & 1500 & 1000 & 490 \end{array}\right) \rightarrow F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 600 & 300 & 200 & 470 \\ 0 & 500 & 1000 & 270 \\ 0 & 1000 & 0 & 220 \end{array}\right)$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} 600x + 300y + 200z = 470 \\ 500y + 1000z = 270 \\ 1000y = 220 \end{cases}$

Despejamos la y: $y = \frac{220}{1000} = 0{,}22 \rightarrow 0{,}22 \cdot 100 = 22\%$

Despejamos la z: $z = \frac{270-110}{1000} = 0{,}16 \rightarrow 0{,}16 \cdot\ 100 = 16\%$

Despejamos la x: $X = \frac{470-66-32}{1000} = 0{,}62 \rightarrow 0{,}62 \cdot 100 = 62\%$

Entonces, para realizar la mezcla, necesitamos un 62% de Migato, un 22% de Catomeal y un 16% de Comecat.

17. Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.
Solución:

$$\mathrm{x} = \text{Edad padre; } \mathrm{y} = \text{Edad madre; } \mathrm{z} = \text{Edad hija}$$

Una vez determinadas las incógnitas se escribe el siguiente sistema y se desarrolla:

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ (x-4) = 7(z-4) \\ (z+15) = \frac{1}{4}\left((x+15)+(y+15)\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 70 \\ x - 7z = -24 \\ -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + z = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

Para resolver el sistema escribimos las matrices asociada y ampliada y hacemos Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & 0 & -7 & -24 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{15}{2} \end{array}\right) \rightarrow F_1 - F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 8 & 94 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{15}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}F_1 + F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 8 & 94 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & 10 \end{array}\right)$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 70 \\ y + 8z = 94 \\ \frac{5}{4}z = 10 \end{cases}$

Despejamos la z: $z = \frac{10 \cdot 4}{5} = 8$
Despejamos la y: $y = 94 - 64 = 30$
Despejamos la x: $x = 70 - 30 - 8 = 32$
Por lo tanto, la edad del padre es 32 años, la de la madre es 30 años y la de la hija 8 años.

18. Una persona invirtió 72000€ repartidos en 3 empresas y obtuvo 5520€ de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10% en la empresa A, el 8% en la empresa B y el 5% en la empresa C.

1. Datos:
    a. € invertidos en la empresa A= x
    b. € invertidos en la empresa B= y
    c. € invertidos en la empresa C= z
2. Determinamos el sistema de ecuaciones:

$$x+y+z=72000$$
$$y=3(x+z)\rightarrow\ -3x+y-3z=0$$
$$0{,}1x+0{,}08y+0{,}05z=5520$$

3. Resolvemos mediante el método de preferencia, en este caso voy a utilizar Rouché–Frobenius.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 72000\\ -3 & 1 & -3 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}08 & 0{,}05 & 5520\end{array}\right)\rightarrow C_2\leftrightarrow C_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 72000\\ -3 & -3 & 1 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 & 5520\end{array}\right)\rightarrow F_2\leftrightarrow F_3$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 72000\\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 & 5520\\ -3 & -3 & 1 & 0\end{array}\right)\rightarrow 3F_1+F_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 72000\\ 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}08 & 5520\\ 0 & 0 & 4 & 216000\end{array}\right)\rightarrow -0{,}1F_1+F_2$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 72000\\ 0 & -0{,}05 & -0{,}02 & -1680\\ 0 & 0 & 4 & 216000\end{array}\right)$$

a. Como: $r(A)=r(A^*)=n^{\text{º}}\ incógnitas\rightarrow S.C.D$
b. Obtenemos el sistema resultante:

$$x+y+z=72000$$
$$-0{,}02y-0{,}05z=-1680$$
$$4y=216000$$

c. Resolvemos y obtenemos que: $x=6000; y=54000; z=12000$

Invierte 6000€ en la empresa A, 54000€ en la B y 12000€ en la C.

19. Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

1. Datos:
   a. Kg de café clase A= x
   b. Kg de café clase B= y
   c. Kg de café clase C= z
2. Determinamos el sistema de ecuaciones:

$$x+y+z=80$$
$$6x+8y+10z=560$$
$$x-2y-1z=0$$

3. Resolvemos mediante el método de preferencia, en este caso voy a utilizar Rouché–Frobenius.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 80\\ 6 & 8 & 10 & 560\\ 1 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)\rightarrow -6F_1+F_2\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 80\\ 0 & 2 & 4 & 80\\ 1 & -2 & -1 & 0\end{array}\right)\rightarrow -F_1+F_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 80\\ 0 & 2 & 4 & 80\\ 0 & -3 & -2 & -80\end{array}\right)$$

$$\rightarrow 3F_2+2F_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 80\\ 0 & 2 & 4 & 80\\ 0 & 0 & 4 & 80\end{array}\right)$$

a. Como $r(A)=r(A^*)=n^{\text{º}}\ incógnitas\rightarrow$ S.C.D
b. Obtenemos el siguiente sistema:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$x + y + z = 80$$
$$2y + 4z = 80$$
$$4z = 80$$

c. Resolvemos y obtenemos que: x = 60; y = 0; z = 20

Debe poner 60 kg del tipo A, ninguno del tipo B y 20 kg del tipo C.

20. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

SOLUCIÓN:

En la siguiente tabla se introducen los datos del problema y sus relaciones:

Edades	Madre	Hijo 1	Hijo 2	Relación
Actual	x	y	z	
Hace 14 años	x-14	y-14	z-14	x-14=5(y-14 + z-14)
Dentro de 10 años	x+10	y+10	z+10	x+10= y+10+z+10
Dentro de (x-y) años		x	42	z+(x-y) =42

El sistema de ecuaciones que resulta es:

$$\begin{cases} x - 14 = 5(y - \\ x + 10 = y + \\ z + (x - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 14 = 5y - 70 + 5z - 70 \\ x - y - z = 10 + 10 - 10 \\ z + x - y = 42 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 5y - 5z = -126 \\ x - y - z = 10 \\ x - y + z = 42 \end{cases}$$

Escribimos la matriz C y la Ampliada y resolvemos por el método de Gauss, por eliminación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 4 & 6 & 168 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right)$$

La última fila de la matriz corresponde a la ecuación:

$$2\,z = 32 \rightarrow \mathbf{z = 16}$$

Con la segunda fila sacamos el valor de la y:

$$4\,y + 4\,z = 136 \rightarrow 4\,y + 4 \cdot 16 = 136 \rightarrow 4y + 64 = 136 \rightarrow \mathbf{y = 18}$$

Con la primera fila sacamos el valor de la x:

$$x - 5y - 5z = -126 \rightarrow x - 5 \cdot 18 - 5 \cdot 16 = -126 \rightarrow \mathbf{x = 44}$$

Edad de la madre 44 años, el hijo mayor 18 años y el menor 16

21. En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además,

el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros dos.

SOLUCIÓN:

a) Llamamos **m**= precio desconocido del champú anticaspa.
x= unidades vendidas el mes pasado del champú normal.
y= unidades vendidas el mes pasado del champú con vitaminas
z= unidades vendidas el mes pasado del champú anticaspa.

Siguiendo el enunciado del problema se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x + 56 = 3y + mz \\ 3y + mz = 28M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - mz = -56 \\ 3y + mz = 28m \end{cases}$$

b) Se pasa el sistema de ecuaciones a forma matricial y se estudia en función del parámetro m. Para ello se calcula el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 2 & -3 & -m \\ 0 & 3 & m \end{vmatrix} = -6m + 6m - (-6m + 6m) = 0 \qquad \text{R(C)= 2 porque} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora analizamos el determinante de la ampliada:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 112 \\ 2 & -3 & -56 \\ 0 & 3 & 28m \end{vmatrix} = -168m + 672 - (-336 + 168m) = -336m + 1008$$

$$-336m + 1008 = 0 \rightarrow m = 3$$

- <u>Si m=3, R(C)=2= R(A)=2 $< nº\ incógnitas. \rightarrow\ S.C.I.$</u>
  Es decir, si el precio del champú anticaspa es 3 euros, habrá infinitas soluciones, es decir, habrá infinitos valores de unidades de champú de cada tipo que puedan venderse y obtener lo que aparece en el enunciado
- <u>Si m≠ 3, $R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \rightarrow S.I.$</u>
  Es decir, el precio del champú anticaspa no puede tener un precio diferente a 3 euros porque si no, el sistema de ecuaciones no tendría solución.

c) Z=20 y sabemos que m=3, el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - mz = -56 \\ 3y + mz = 28m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 112 \\ 2x - 3y - 3 \cdot 20 = -56 \\ 3y + 3 \cdot 20 = 28 \cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 112 \\ 2x - 3y - 60 = -56 \\ 3y + 60 = 84 \end{cases}$$

De la tercera ecuación despejamos y:

$3y = 84 - 60 \rightarrow y = \frac{24}{3} \rightarrow y = 8$

De la segunda ecuación despejamos x:

$2x - 3 \cdot 8 - 60 = -56 \rightarrow x = \frac{28}{2} \rightarrow x = 14$

14 unidades de champú normal, 8 unidades del de vitaminas y 20 unidades del anticaspa

22. En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1.20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1.18 euros/litro, pero ha olvidado el precio de C. (Supongamos que es de *m* euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46.80 € el gasto en C.

- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.

- el gasto de litros en A superó al de B en 12.60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

Litros en gasolinera A → x ; Litros en gasolinera B → y ; Litros en gasolinera C → z

$$\begin{cases} 1{,}20x + 1{,}18y - mC = 46{,}80 \\ 1{,}18y - mC = 0 \\ 1{,}20x - 1{,}18y = 12{,}60 \end{cases}$$

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de *m*. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 1{,}20 & -1{,}18 & 0 & 12{,}60 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 0 & 2{,}36 & m & -34{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m & -34{,}2 \end{array}\right)$$

$-m = 0 \rightarrow m = 0$

Si m = 0 → Rg(A) ≠ Rg(A*) → Es un sistema incompatible.

Si m ≠ 0 → Rg(A) = Rg(A*) → Es un sistema compatible determinado.

Por lo tanto, es imposible vender la gasolina en la gasolinera C a 0€.

23. En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de la otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

x → precio del café y →precio de la tostada z → precio del refresco

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 9 \\ 2x + 3y = a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & (a-4) \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & (a-4) \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-6) \end{array}\right)$$

$a - 6 = 0 \rightarrow a = 6$

Los clientes de la tercera mesa deben pagar 6€.

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 9 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como Rg(A) = Rg(A*) $<$ número de incógnitas → Es un sistema compatible indeterminado.

Lo que significa que con los datos que nos dan no podemos calcular el precio del café.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=6} \\ \boldsymbol{x+2z+2y=5} \\ \boldsymbol{2y-x+z=11} \end{cases}$

1.- Su matriz de coeficientes es:

1)Organizamos el sistema: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+2z=5 \\ -x+2y+z=11 \end{cases}$

2)Cogemos los coeficientes del sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **Solución:** Opción d

2.- Su matriz ampliada es:

1)Añadimos a la matriz de coeficientes la columna de los términos independientes:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ **Solución:** Opción d

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_1+F_2}{\overset{-F_1+F_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_2+F_3}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{pmatrix}$ **Solución:** Opción d

4.- El sistema es:

1) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$, como no puede ser mayor, el $Rg(A^*)$ también es 3

2) Como sabemos que este sistema tiene 3 incógnitas; tenemos que:

$Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ incógnitas = 3$; luego es un S.C.D

Solución: Opción a

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{2x-y=-4y} \\ \boldsymbol{5+2y+z=3x} \end{cases}$

5.- Su forma matricial es:

1) Organizamos el sistema: $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -3x+2y+z=-5 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ **Solución:** Opción b

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado:

Solución: Opción b

$$b)\ x - y = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1)Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [0+0+3] - [0+(-2)+0] = 5 \neq 0; R(A) = 3$$

2)Rango de la matriz ampliada también 3: $Rg(A^*) = 3$.

$Como\ Rg(A) = Rg(A^*) = 3 = nº\ de\ incógnitas; luego\ es\ un\ S.C.D$

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado:

Solución: Opción c

$$\mathrm{c)} - \mathrm{x} + 5\mathrm{y} + \mathrm{z} = -5$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = [4+0-3] - [0+10-9] = 0; Rg(A) = 2$$

2)Rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; Rg(A^*) = 2$$

$Rg(A) = Rg(A^*) = 2 < nº\ de\ incógnitas\ = 3; luego\ es\ un\ S.C.I$

8.-Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible:

Solución: Opción a)

$$a) 3y + 2x = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0+0+6]-[0+6+0] = 0; Rg(A) = 2$$

2) Rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}F_1+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; Rg(A^*) = 3$$

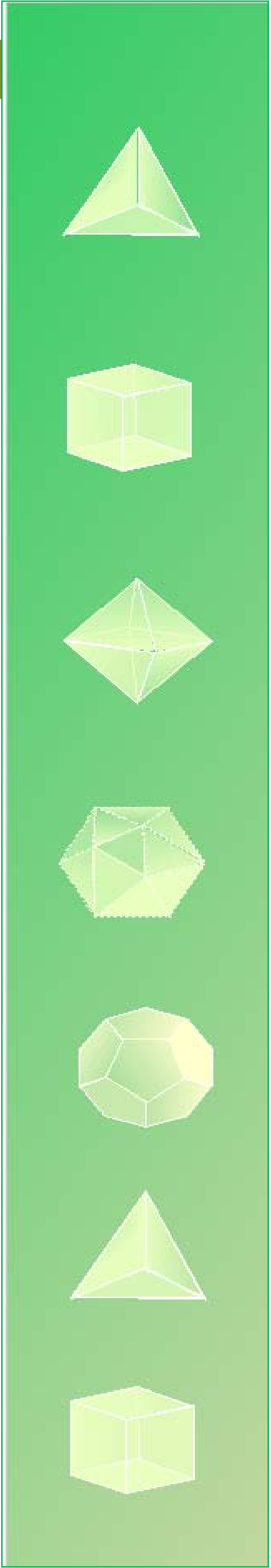
$$Rg(A) \neq Rg(A^*); luego\ es\ un\ sistema\ incompatible.$$

9.- Indica la afirmación que es correcta:

Solución: c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Esto es el teorema de Rouché-Frobenius.

$$Sistema\ compatible \ \leftrightarrow R(C) = R(A)$$



Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 3: Inecuaciones y Programación lineal

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: ADRIÁN, ADRIANA, ALICIA, ÁLVARO, ARÍSTIDES, JAIME, KASSANDRA, LUCÍA, LUIS, PALOMA, PATRICIA, SARA y TERESA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

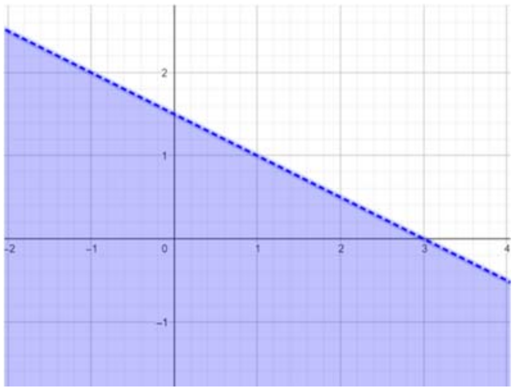
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Representa la solución gráfica de las inecuaciones siguientes: Indica en cada solución si el recinto solución es abierto o cerrado

a) x + 2y < 3



x + 2y = 3

x	y
0	3/2
3	0

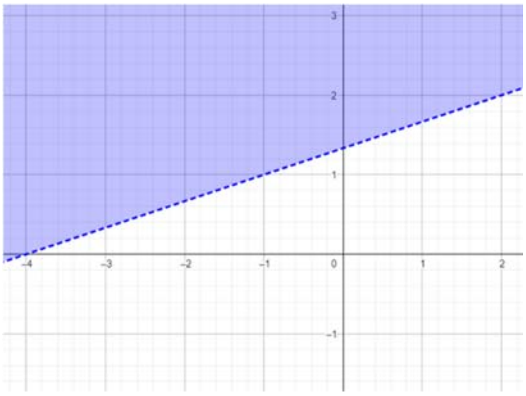
0 +2y = 3

x + 2·0 = 3

0 + 2·0 < 3 Sí

El recinto solución es abierto

b) -x + 3y > 4



-x + 3y = 4

x	y
0	4/3
-4	0

-0 + 3y = 4

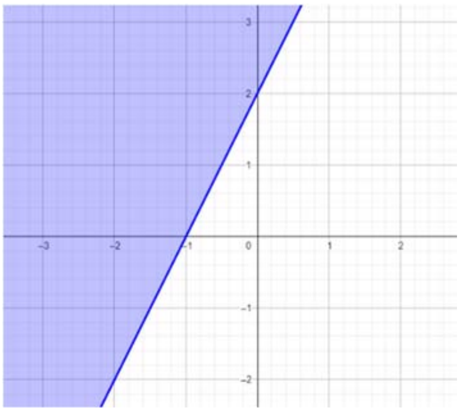
-x + 3·0 = 4

-0 + 3·0 > 4 No

El recinto solución es abierto

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) 2x – y ≤ -2



2x – y = -2

x	y
0	2
-1	0

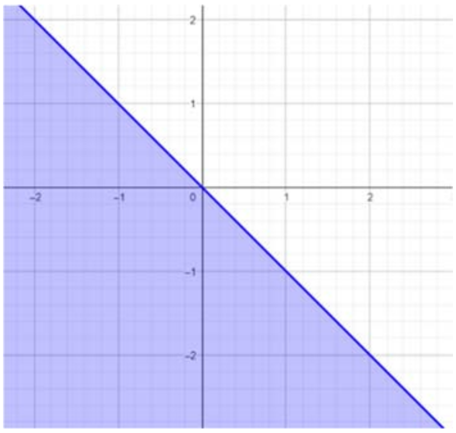
2·0 - y = -2

2x – 0 = -2

2·0 - 0 ≤ -2 No

El recinto solución es cerrado

d) -x –y ≥ 0



– x – y = 0

x	y
1	-1
-1	1

-1 –y = 0

-x – 1 = 0

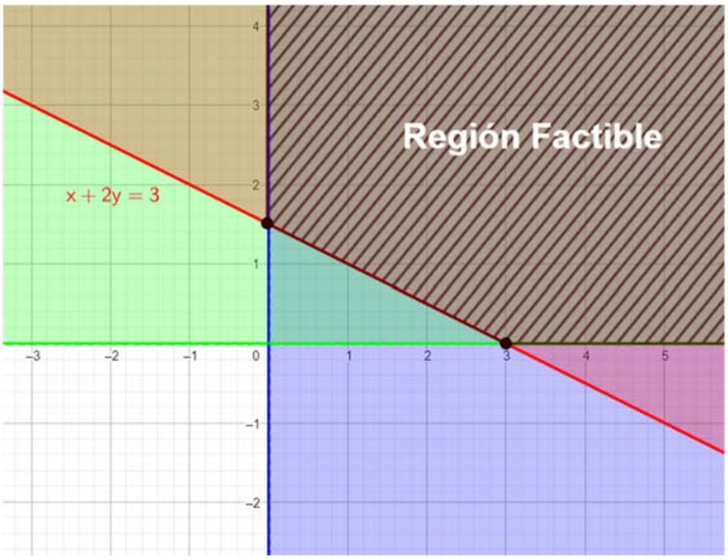
-0 – (-1) ≥ 0 Sí

El recinto solución es cerrado

2. Representa la región factible de los siguientes sistemas de inecuaciones: Indica en cada caso si la solución es acotada, no acotada o no existe solución.

a)

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases}$$



Solución No Acotada

x = 0 ; y = 0 ;

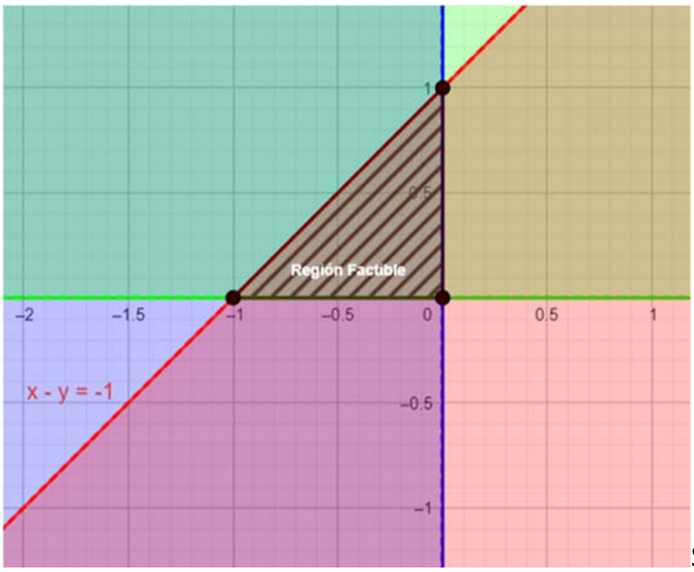
x + 2y = 3

x	y
0	1.5
3	0

0 + 2 · 0 ≥ 3 No

b)

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ x - y > -1 \end{cases}$$



Solución Acotada

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

x = 0 ; y = 0

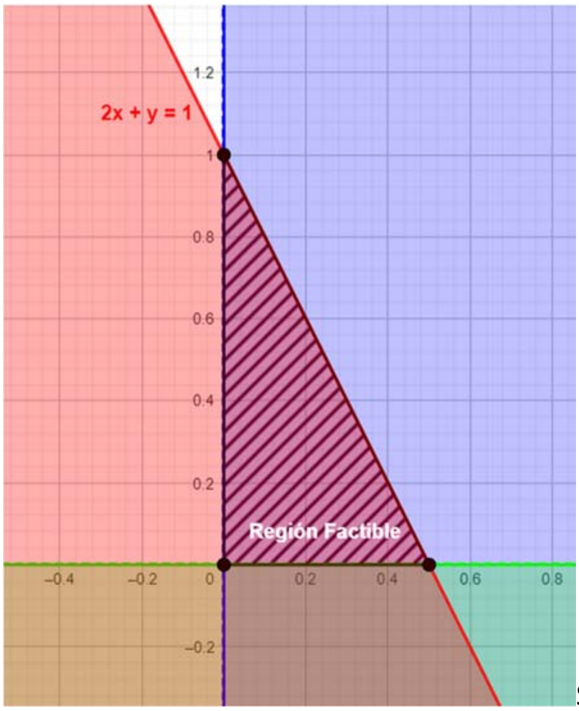
x – y = -1

x	y
0	1
-1	0

0– 0 > -1 Si

c)

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$$



Solución Acotada

x = 0 ; y = 0

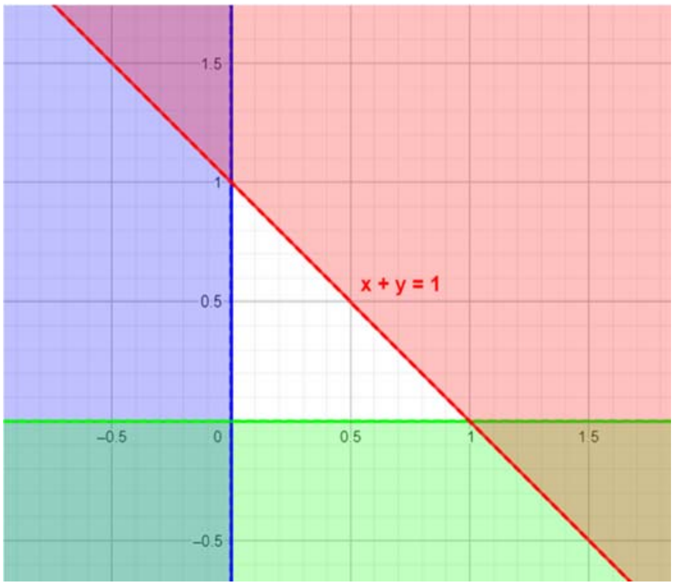
2x + y = 1

x	y
0	1
0.5	0

2 · 0 + 0 < 1 Si

d)

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ x + y > 1 \end{cases}$$



No tiene Solución

x = 0; y = 0

x + y = 1

x	y
0	1
1	0

0 + 0 > 1 No

3. Con la misma región factible del ejemplo, optimiza las siguientes funciones objetivo:

a) z = 2x + 4y : Máx
b) z = 4x + 3y : Mín
c) z = 4x + 3y : Máx

a) z = 2x + 4y : Máx

Punto	Función objetivo
A(20, 60)	F(20, 60) = 2·20 + 4·60 = 280
B(0, 80)	F(0, 80) = 2·0 + 4·80 = 320
C(60, 0)	F(60, 0) = 2·60 + 4·0 = 120

Su máximo es el punto B

b) z = 4x + 3y : Mín

Punto	Función objetivo
A(20, 60)	F(20, 60) = 4·20 + 3·60 = 260
B(0, 80)	F(0, 80) = 4·0 + 3·80 = 240
C(60, 0)	F(60, 0) = 4·60 + 3·0 = 240

Su mínimo está comprendido entre los puntos B y C

c) z = 4x + 3y : Máx

Punto	Función objetivo
A(20, 60)	F(20, 60) = 2·20 + 4·60 = 280
B(0, 80)	F(0, 80) = 2·0 + 4·80 = 320
C(60, 0)	F(60, 0) = 2·60 + 4·0 = 120

Su máximo es el punto A

4. Resuelve los siguientes problemas de programación lineal:

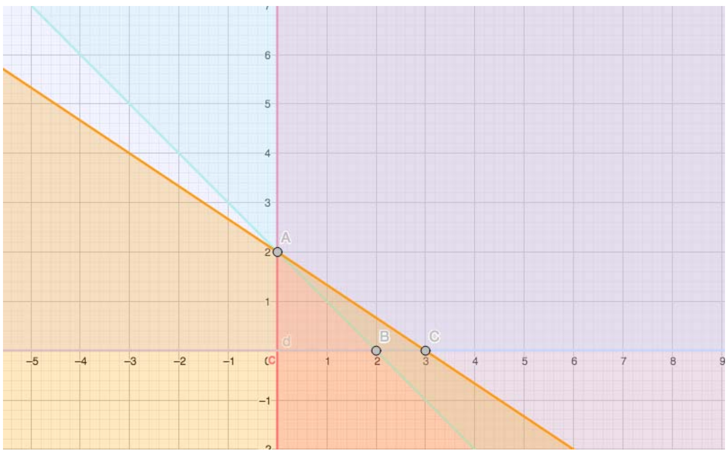
$$\text{f.o. } f(x,y) = 2x + 3y \quad \text{s.a.} \begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x + 3y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } f(x,y) = x + 3y \quad \text{s.a} \begin{cases} 2x + 5y \leq 300 \\ x + y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 15 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z = x + y \quad \text{s.a.} \begin{cases} 2x + 3y \leq 120 \\ x \geq y \\ 0 \leq x \leq 45 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{f.o. } z = 1{,}5x + 2y \quad \text{s.a.} \begin{cases} 3x + 4y \geq 12 \\ x \geq y \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

a)



Vértices de la región factible :

A- (0,2) B-(2,0) C-(3,0)

f.o. $f(x,y) = 2x + 3y$

SOLUCIONES :

A. 2· 0 + 3·2= 6

B. 2·2 + 3·0= 4

C. 2·3+3·0=6

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

b)

Vértices de la región factible :

D. (0,90) B. (0,15) C. (112,5 , 15)

f.o. f(x,y)= x+3y

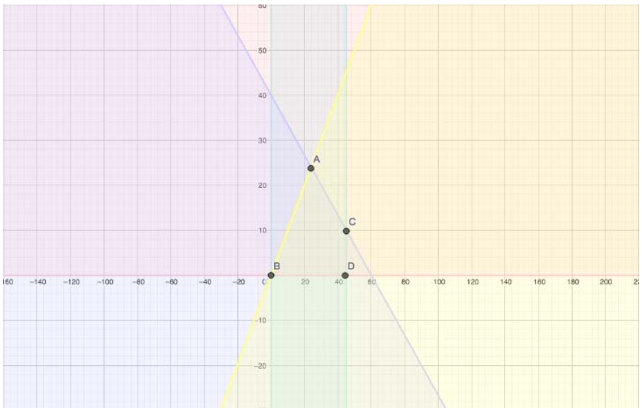
SOLUCIONES :

A. 0+ 3·90= 270

B. 0+ 3·15= 45

C. 112,5+ 3·15= 157,5

c)



Vértices de la región factible :

A.(24,24) B.(0,0) C.(45,10) D.(0,45)

f.o. z=x+y

SOLUCIONES :

A. 24+24=48

B. 0+0=0

C. 45+10= 55

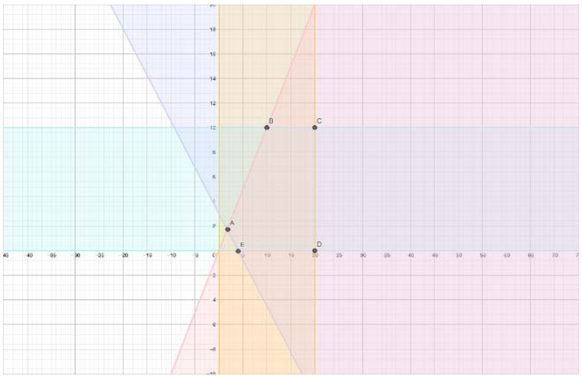
D. 0+45= 45

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

d)



Vértices de la región factible :

A.(1,7 , 1,7) B.(10,10) C.(20,10) D.(20,0)

f.o z=1,5x+2y

SOLUCIONES :

A. 1,5· 1,7 + 2 ·1,7=5,95

B. 1.5· 10 + 2· 10= 35

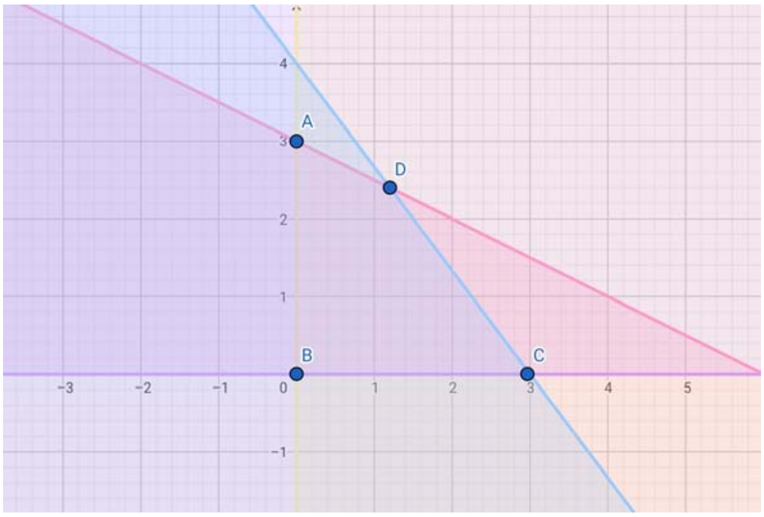
C. 1,5· 20 + 2· 10= 50

D. 1,5· 20 + 2·0= 30

5. Dibuja el recinto que cumple las restricciones:

$$\begin{cases} x+2y\le 6 \\ 4x+3y\le 12 \\ x,y\ge 0 \end{cases}$$

y analiza si los puntos $(0,2)$, $(3,0)$, $(1,1)$ y $(5,6)$ al conjunto de soluciones del sistema anterior.



Los puntos (0,2), (3,0) y (1,1) están dentro de la región factible y el punto (5,6) está fuera de la región factible.

6. Dibuja el recinto que cumple las restricciones:

$$\begin{cases} x+3y \le 9 \\ x+y \ge 10 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

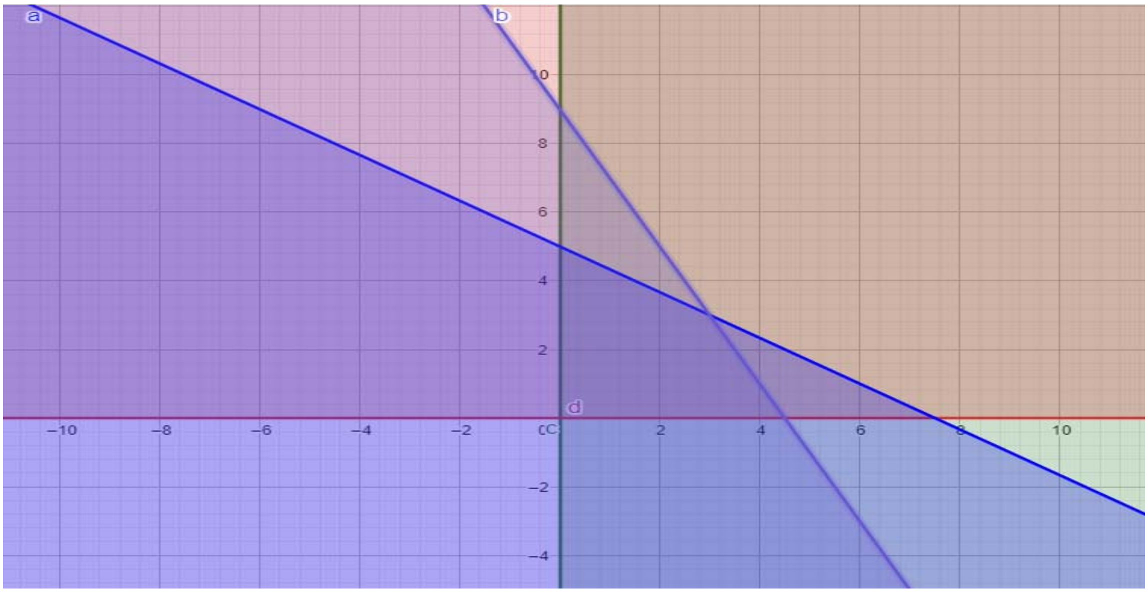
y da seis puntos que sean solución del sistema anterior

Este sistema no tiene solución.

7. Maximiza la función f(x , y) = 3x + 2y sujeta a las restricciones:

$2x + 3y \le 15$ $2x + y \le 9$ $x \ge 0$, $y \ge 0$

y da seis puntos que sean solución del sistema anterior.



Función objetivo: f(x , y)= 3x + 2y (máximo)

a: 2x + 3y = 15

Cuando (x = 0, y = 5)   Cuando (x = 6, y = 1).

b: 2x + y = 9

Cuando (x = 0, y = 9)   Cuando (x = 4.5, y=0).

PUNTOS:

- A (0 , 5)
- B (0 , 2)
- C (2 , 2)
- D (9/2 , 0)
- E (3 , 3)
- F (0 , 0)

$$\begin{cases} 2x+3y=15 \\ 2x+y=9 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x+3y=15 \\ -1(2x+y=9) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2x+3y=15 \\ -2x-y=-9 \end{matrix} \rightarrow 2y=6 \rightarrow y=\frac{6}{2} \rightarrow y=3$$

$$2x+(3\cdot 3)=15 \rightarrow 2x+9=15 \rightarrow 2x=15-9 \rightarrow 2x=6 \rightarrow x=3$$

SOLUCIÓN:

- Fa → (3 · 0) + (2 · 5)= 10
- Fb → (3 · 4.5) +(2 · 0)= 13.5
- Fc → (3 · 3) + (2 · 3)= 15, solución C(3 , 3), (máximo).
- F0 → 0

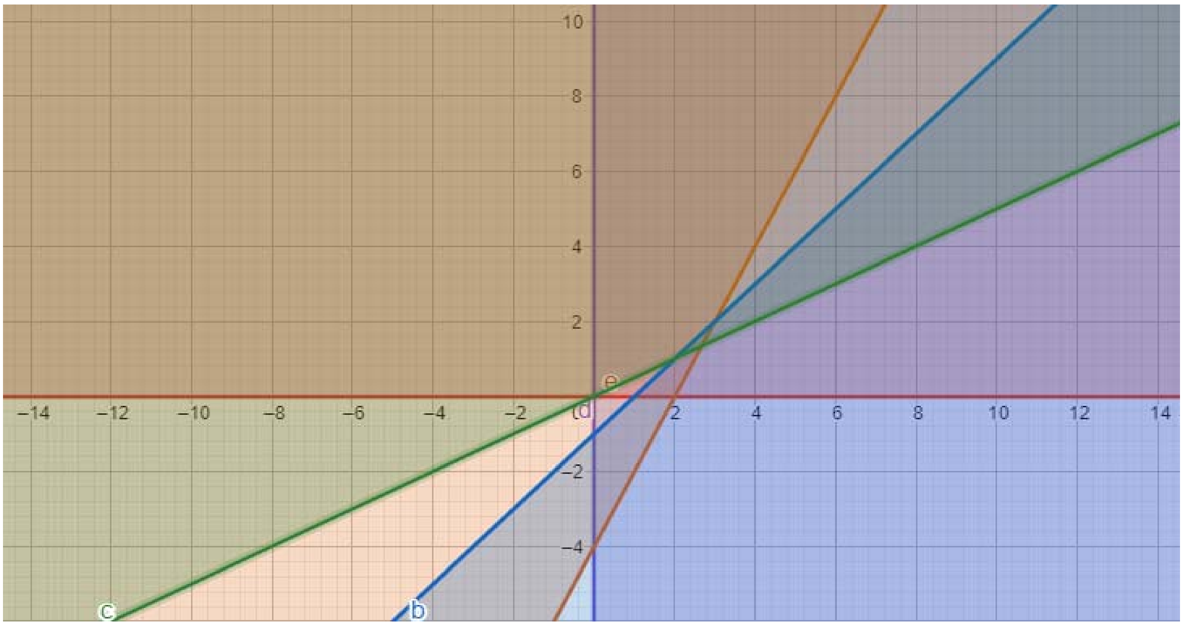
8. Sea S la región del plano definida por

y ≥ 2x – 4   y ≤ x −1   2y ≥ x   x ≥ 0   y ≥ 0

a) Representa la región *S* y calcula las coordenadas de sus vértices.

b) Obtén los valores máximo y mínimo de la función f(x ; y) = x – 3y en S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



a: y = 2x-4; Cuando x=0, y= -4 Cuando x=2, y= 0

b: y = x-1; Cuando x=0, y= -1 Cuando x=1, y=0

c: 2y = x; Cuando x=0, y=0 Cuando x=2, y=1

d: x = 0, e: y = 0

PUNTOS

- A(0,4)
- B(2,0)
- C(0,-1)
- D(1,0)
- E(0,0)
- F(2,1)

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x - 4 = x - 1 \\ 2x - x = -1 + 4 \end{matrix} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 2 \cdot 3 - 4 \rightarrow y = 2$$

SOLUCIÓN:

- Fa; y = (2 · 2) -4 = 0 → solución, B(2,0)
- Fb; y = (2 · 1) -8 = -6
- F0; y = (2 · 0) -4 = -4

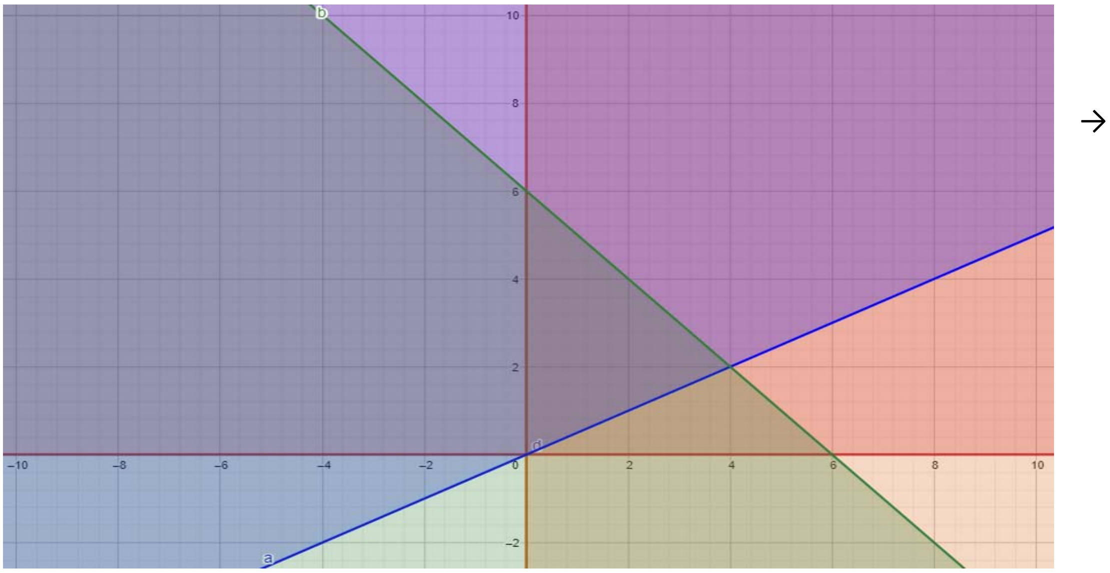
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

9. Se consideran la función f(x , y) = 5x – 2y y la región del plano S definida por el siguiente conjunto de restricciones:

x – 2y ≤ 0   x + y ≤ 6   x ≥ 0   y ≤ 3

a) Representa la región *S*.

b) Calcula las coordenadas de los vértices de la región S y obtén los valores máximo y mínimo de la función f en S indicando los puntos donde se alcanzan



Función objetivo f(x, y)= 5x - 2y

a: x - 2y = 0;

Cuando x = 0, y = 0   Cuando x = 2, y = 1

b: x + y = 6;

Cuando x = 0, y = 6   Cuando x = 1, y = 5

c: x = 0 ;   d: y = 0

PUNTOS:

- A (0,6)
- B (1,5)
- C (0,0)
- D (2,1)
- E (0,0)

$$\begin{cases} x+y=6 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x+y=6 \\ -1(x+2y=12) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x-y=6 \\ -x-2y=-12 \end{matrix} \to -3y=-6 \to y=\frac{-6}{-3} \to y=2$$

$x+2=6 \to x=6-2 \to x=4 \to (4,2)$

SOLUCION:

- Fa → 4 + 2 = 6 (Máximo)
- Fb → 4 - (2·2) = 0
- F0 → 0

10. Minimiza z=-3x-2y sujeta a:

-2x+y≤ 2; x-2y≤ 2; x≥ 0; y≤ 3

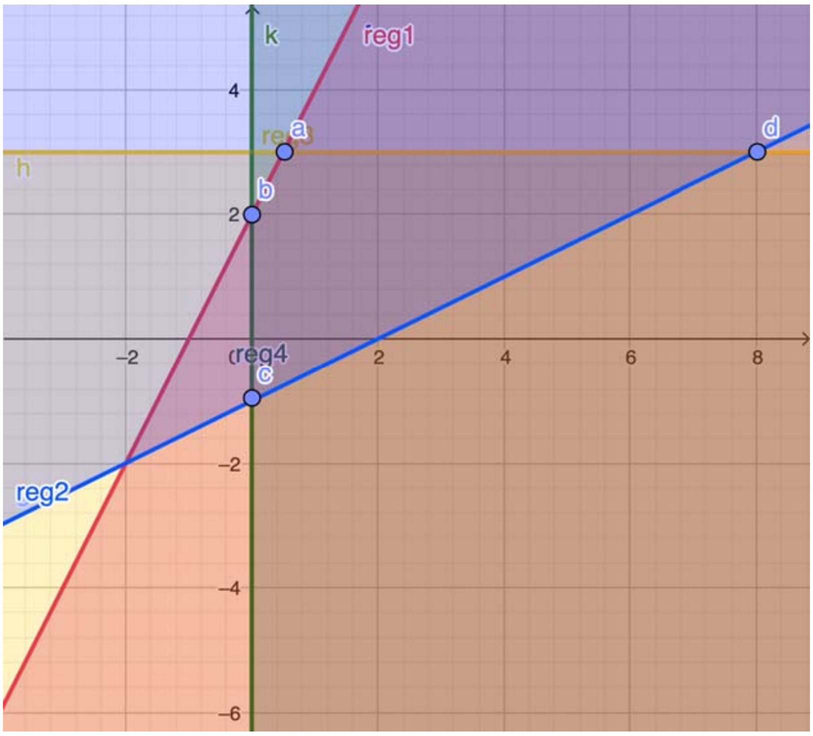
Paso 1: Tenemos que obtener puntos por los que pasan la rectas para trazarlas.

-2x+y= 2

x	y
0	2
-1	0

x-2y=2

x	y
0	-1
2	0



Ahora resolvemos los vértices por medio de sistemas de ecuaciones

a) y =3
-2x+y= 2 ⟾-2x+3 = 2 ⟾ -2x = 2-3 ⟾x= 0,5 a(0'5,3)

b) x=0
-2x+y= 2 ⟾ -2·0+y= 2 ⟾ y=2 b(0,2)

c) x=0
x-2y=2 ⟾ 0-2y=2 ⟾ y=-1 c(0,1)

d) x-2y=2
y =3 ⟾ x-2·3=2 ⟾ x=2+6 ⟾x=8 d(8,3)

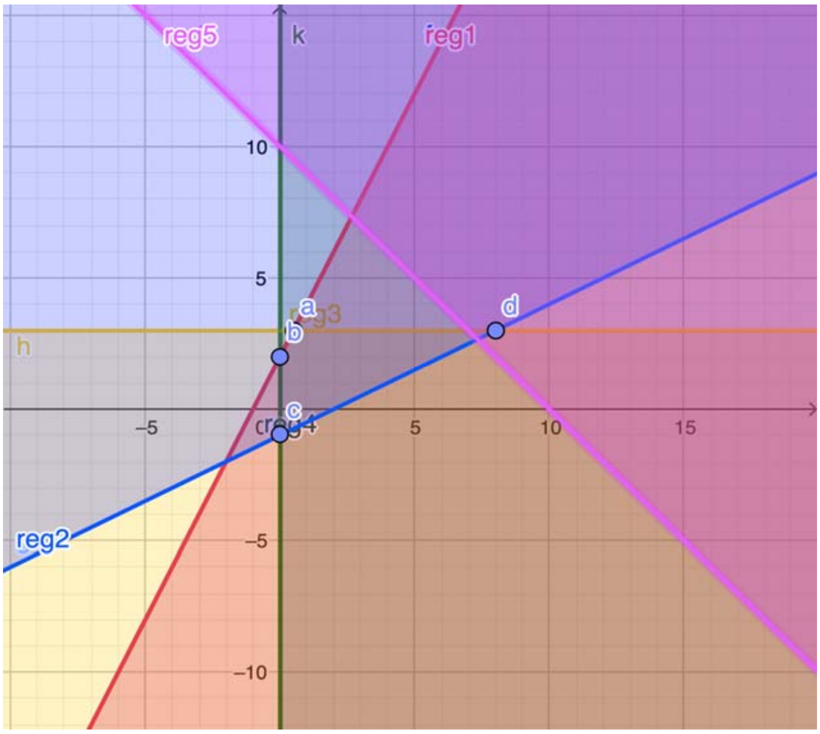
a) z=-3·0’5-2·3= -7,5
b) z=-3·0-2·2= -4
c) z=-3·0-2(-1)= 2
d) z=-3·8-2·3=-30

Solución: el mínimo se encuentra en el punto D(8,3) y es -30

a)Mediante la resolución gráfica del problema, discute si existen soluciones factibles y si existe solución óptima.

Sí existe solución óptima porque las soluciones no son infinitas

b) Si se añade la restricción: x + y ≥ 10, discute si existe solución óptima y en caso afirmativo calcúlala.



11. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer las reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan a 100 euros la tonelada, independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Número de pesqueros: x Número de yates: y

Para organizar los datos realizamos una tabla

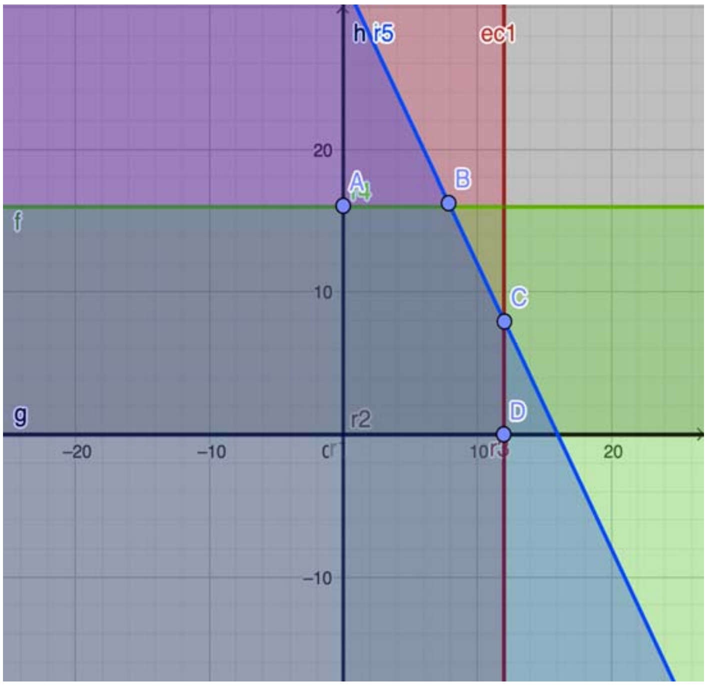
	Toneladas	Horas	Precio	Coste Total
Yates	100	50	100	50000
Pesqueros	500	100	100	10000

Para obtener el ingreso máximo debemos maximizar f(x, y)=50000x+10000y

Restricciones: x≥0   y≥0   x≤12   y≤16   100x+50y≤1600

100x+50y=1600

x	y
0	32
16	0



A) x=0
y=16 ⟾ A(0,16)

B) 100x+50y=1600
y=16 ⟾ 100x+50·16=1600 ⟾ 100x+800=1600 ⟾
100x=800 ⟾ x=8 B(8,16)

C) 100x+50y=1600
x=12 ⟾ 100·12+50y=1000 ⟾1200+50y=1600 ⟾50y=400 ⟾ y=8 C(12,8)

D) y=0
x=12 ⟾ D(12,0)

Para saber cuál es el máximo sustituimos en la función cada uno de los puntos.

A) 50000·0+10000·16= 160000
B) 50000·8+10000·16= 560000
C) 50000·12+10000·0= 680000
D) 500000·12+10000·0= 600000

Solución: El astillero tiene que arreglar 12 pesqueros y 8 yates (Punto C) para obtener el máximo beneficio (680000 euros)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Encuentra el conjunto de soluciones de las inecuaciones siguientes:

a) $x + y - 7 \leq 0$
b) $2x - y + 3 \geq 0$
c) $y \geq 3$
d) $x \leq 5$
e) $x \geq 0$
f) $y \leq 0$

a) $x + y - 7 = 0$

x	y
0	7
7	0

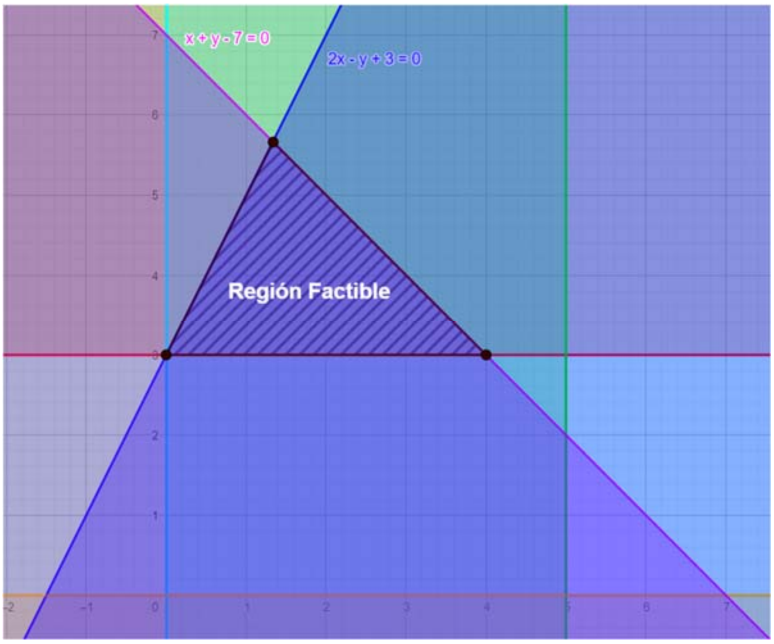
$0 + 0 - 7 \leq 0$ si

b) $2x - y + 3 = 0$

x	y
0	3
-1.5	0

$2\cdot 0 - 0 + 3 \geq 0$ si

c) $y = 3$; d) $x = 5$; e) $x = 0$; f) $y = 0$



2. Dibuja las regiones factibles de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+4y \le 9 \\ 2x-y \ge 12 \end{cases}$

1º 3x + 4y = 9

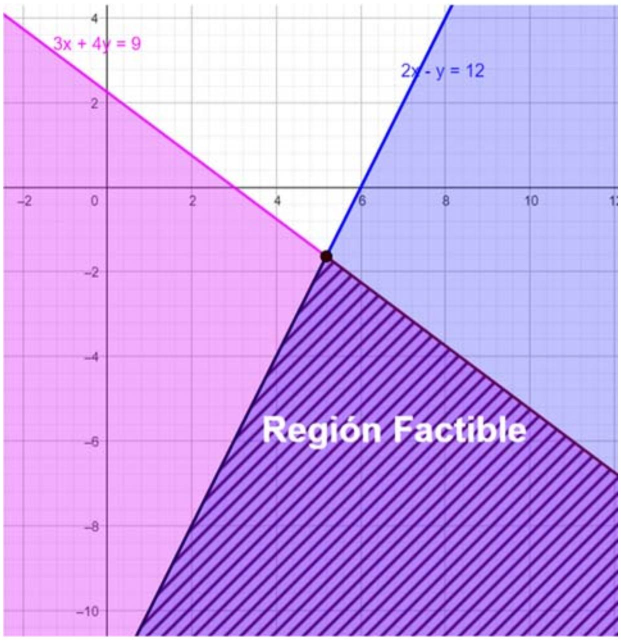
x	y
0	2,25
3	0

3·0 + 4·0 ≤ 9 Si

2º 2x – y = 12

x	y
0	-12
6	0

2·0 - 0 ≥ 12 No



b) $\begin{cases} y+3x-7 \le 0 \\ y-6x+11 \le 0 \end{cases}$

1º y + 3x –7 = 0

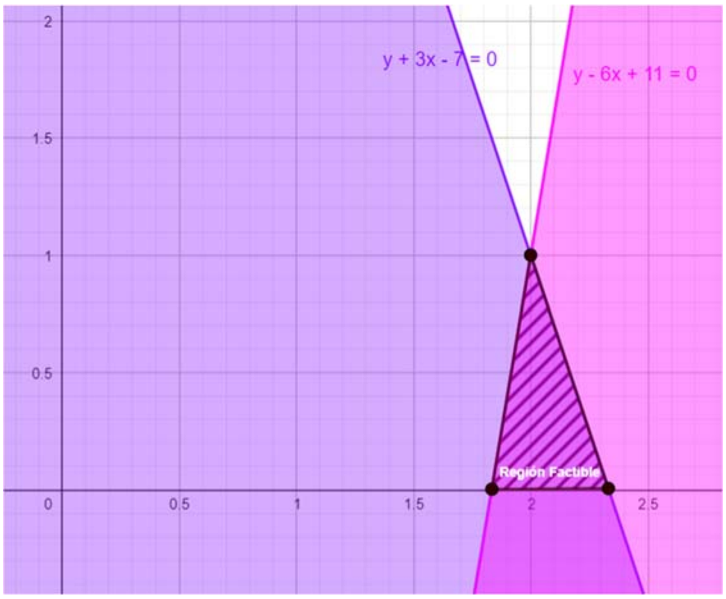
x	y
0	7
2.3	0

0+ 3·0 - 7 ≤ 0 Si

2º y – 6x + 11 = 0

x	y
0	-11
1.8	0

0 - 6·0 + 11 ≤ 0 No



c) $\begin{cases} x-2y\le 10 \\ x+y\ge 10 \end{cases}$ $\quad x\ge 0 \quad 0\le y\le 5$

1º x – 2y = 10

x	y
0	-5
10	0

0 - 2·0 ≤ 10 Si

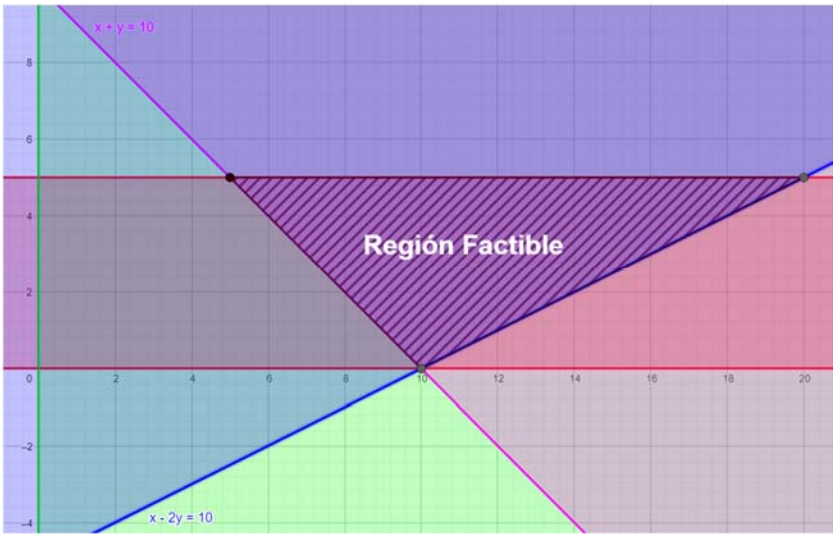
2º x + y = 10

x	y
0	10
10	0

0 + 0 ≥ 10 No

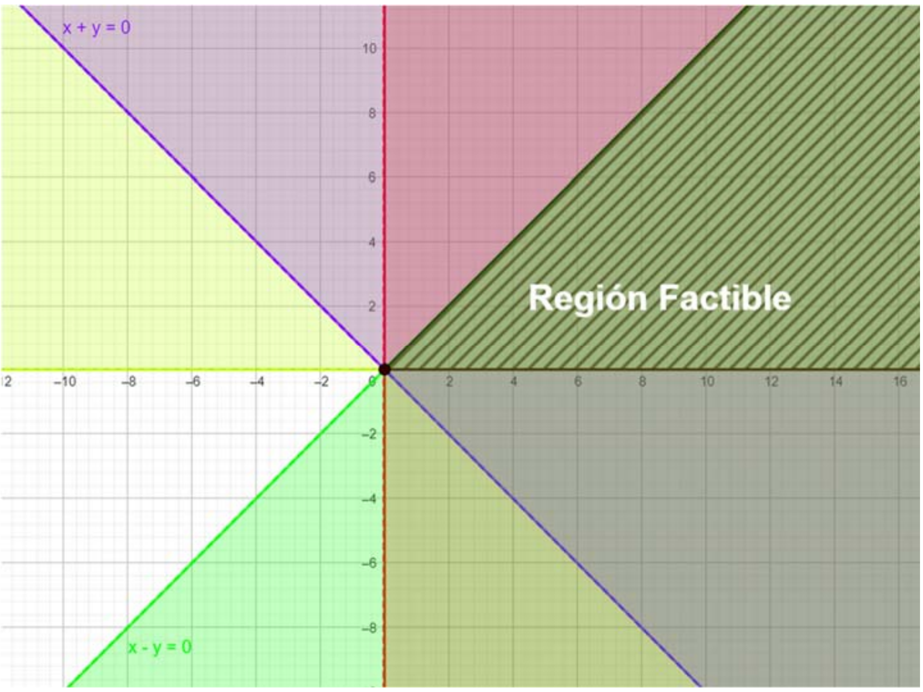
x = 0; 0 = y = 5

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



3. Maximizar la función z = 3x + 3y sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$



1º x = 0 ; **2º** y = 0 ; **3º** x + y = 0 ; **4º** x – y = 0

Cogemos el punto (10, 0) y sustituimos:

3º 10 + 0 > 0 Si

4º 10 – 0 > 0 Si

4. Calcula el valor máximo y el mínimo de la función f(x, y) = x + 2y sometida a las restricciones:

A) y ≤ 4
B) x ≤ 3
C) x – y ≤ 3
D) x – y ≥ 0

A) y = 4
B) x = 3
c) x – y = 3

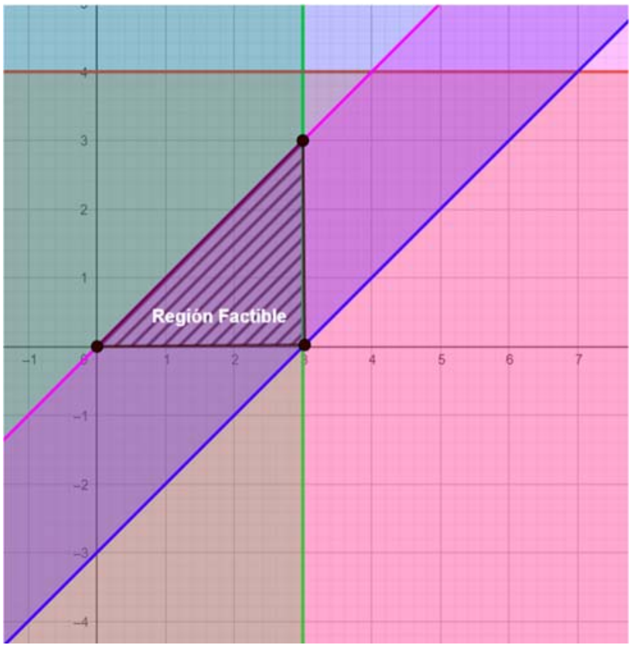
x	y
0	-3
3	0

0 - 0 ≤ 3 Si

d) x – y = 0

x	y
1	1
2	2

0– 0 ≥ 0 Si



f(x, y) = x + 2y
A= (0, 4)
B= (3, 0)
C= (3, -3)
D= (2, 1)

A= 0 + 2·4 = 8
B= 3 + 2·0 = 3

C= $3 + 2\cdot(-3) = -3$
D= $2 + 2\cdot1 = 4$
El máximo es el punto A y el mínimo es el punto C

5. Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenido vitamínico al día: 2 mg de vitamina A, 3mg de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D. Para ello se mezclan piensos de los tipos P y Q cuyo precio por kilogramo es para ambos de 30 céntimos, y cuyo contenido vitamínico por kilo se recoge en la tabla adjunta. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo? ¿Cuál es este gasto mínimo?

	A	B	C	D
P	1	1	20	2
Q	1	3	7,5	0

x --> pienso P (kg) // y --> pienso Q (kg) $f(x, y) = 30x + 30y$

$x \geq 0$; $y \geq 0$

Restricciones:
1º $x + y \geq 2$
2º $x + 3y \geq 3$
3º $20x + 7{,}5y \geq 30$
4º$2x\geq2$

1º $x + y = 2$

x	y
0	2
2	0

$0+ 0 \geq 2$ No

2º $x + 3y = 3$

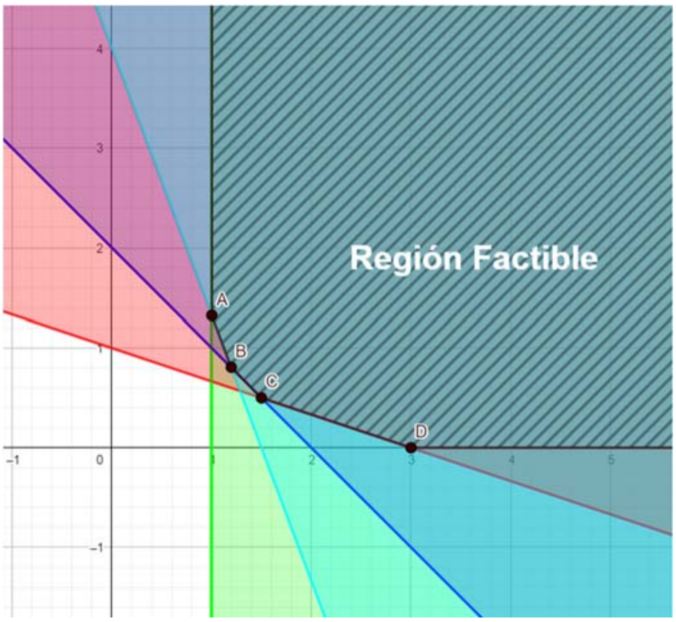
x	y
0	1
3	0

$0 + 3\cdot0 \geq 3$ No

3º $20x + 7{,}5y = 30$

x	y
0	4
1.5	0

4º 2x = 2
x= 1
0 ≥ 2 No



<u>Punto A</u>= Rectas 3º y 4º ----> 20x + 7,5y = 30 ; 2x = 2
x=1
20·1+7.5y =30
y= 4/3
A(1, 4/3)

<u>Punto B</u>= Rectas 1º y 3º ----> x + y = 2 ; 20x + 7,5y = 30
(-20) · x + y = 2
-20x –20y = -40
20x + 7.5y = 30
y = 4/5
x + 4/5 = 2
x= 6/5
B(6/5, 4/5)

<u>Punto C</u>= Rectas 1º y 2º ----> x + y = 2 ; x + 3y = 3
(-3) · x + y = 2
-3x –3y = -6
x + 3y = 3
x= 3/2
3/2 + y = 2
y= ½
C(3/2, ½)

<u>Punto D</u>= (3, 0)

f(x, y) = 30x + 30y

A= 30·1 + 30·4/3 = 70
B= 30·6/5 + 30·4/5 = 60
C= 30·3/2 + 30·1/2 = 60
D= 30·3 + 30·0 = 90

Como existen 2 soluciones, La solución sería todo lo que está comprendido entre la recta de los puntos B y C

6. Desde dos almacenes A y B se tiene que distribuir fruta a tres mercados de la ciudad. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diaria y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan diariamente 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El coste de transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado, en euros por tonelada, en el cuadro adjunto. Planifica el transporte para que el coste sea mínimo.

	M_1	M_2	M_3
A	10	15	20
B	15	10	10

SOLUCIÓN:

Disposición de fruta y necesidades de los mercados

	Toneladas disponibles
A	10
B	15

	M_1	M_2	M_3
Toneladas necesita	8	8	9

Sea, x: toneladas de fruta transportada de A a M_1 ; y: toneladas de A a M_2

Escribimos la tabla con todos los transportes

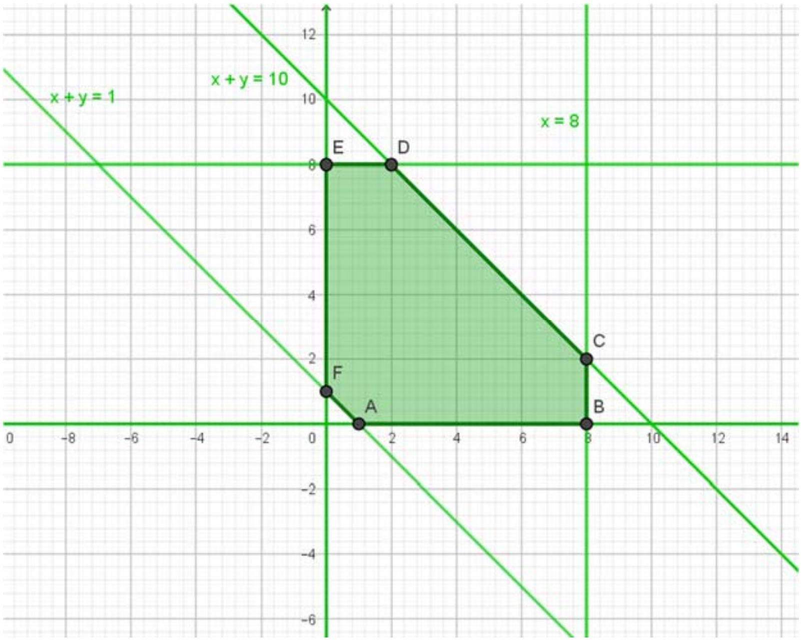
	M_1	M_2	M_3	Ofertas
A	x	y	10 – x – y	10
B	8 – x	8 – y	9 – (10 – x – y)	15
Demanda	8	8	9	
Costes	10x+15(8-x)	15y+10(8-y)	20(10-x-y)+10(x+y-1)	z

La función objetivo será la suma de los costes que ha de ser mínima:

$z = 10x+15(8-x)+ 15y+10(8-y)+20(10-x-y)+10(x+y-1) = -15x - 5y + 390$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10 - x - y \geq 0 \\ 8 - x \geq 0 \\ 8 - y \geq 0 \\ 9 - (10 - x - y) \geq 0 \end{cases} \quad \text{nos queda} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 8 \\ y \leq 8 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$$



Los vértices son los puntos:

A(1, 0) ; B(8, 0) ; C(8, 2) ; D(2, 8) ; E(0, 8) ; F(0, 1)

Hallamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

A: $-15\cdot1 - 5\cdot0 + 390 = 375$

B: $-15\cdot8 - 5\cdot0 + 390 = 270$

C: $-15\cdot8 - 5\cdot2 + 390 = 260$

D: $-15\cdot2 - 5\cdot8 + 390 = 320$

E: $-15\cdot0 - 5\cdot8 + 390 = 350$

F: $-15\cdot0 - 5\cdot1 + 390 = 385$

	M_1	M_2	M_3	Ofertas
A	**8**	**2**	**0**	10
B	**0**	**6**	**9**	15
Demanda	8	8	9	

Desde A: 8 toneladas al mercado 1, 2 toneladas al mercado 2 y 0 toneladas al mercado 3.

Desde B: 0 toneladas al mercado 1, 6 toneladas al mercado 2 y 9 toneladas al mercado 3

7. - Una empresa construye en dos factorías, F1 y F2, tres tipos de barcos deportivos (A, B y C). La factoría F1 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 5 del tipo B y 1 del tipo C, siendo su coste de mantenimiento mensual cuarenta mil euros. F2 construye en un mes: 1 barco del tipo A, 1 de tipo B y 2 de tipo C, siendo su coste mensual 20.000 euros. La empresa se ha comprometido a entregar anualmente a un club deportivo 3 barcos tipo A, 15 de tipo B y 12 de tipo C. ¿Cuántos meses deberá trabajar cada factoría, con objeto de que la empresa cumpla su compromiso con el mínimo coste?

DATOS:

	TIPO A	TIPO B	TIPO C	Costo
F1 (x)	1	5	1	40 (miles)
F2 (y)	1	1	2	20 (miles)
Encargo	3	15	12	

Función objetivo: F (x, y) = 40x+20y

$$\begin{Bmatrix} x+y\geq 3 \\ 5x+y\geq 15 \\ x+2y\geq 12 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{Bmatrix}\ sistema\ de\ inecuaciones$$

x	y	x	y	x	y
0	3	0	15	0	6
3	0	3	0	12	0

Para hallar el vértice B usaremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{Bmatrix} 5x+y=15 \\ x+2y=12 \end{Bmatrix}\ despejamos\ la\ \boldsymbol{y}\ de\ la\ 1ra\ ecuación\ y=15-5x$$

Reemplazamos el valor de **y** en la 2da ecuación.

$$x + 2(15 - 5x) = 12$$
$$x + 30 - 10x = 12$$
$$x - 10x = 12 - 30$$
$$x = -\frac{18}{-9}$$
$$x = 2$$

y reemplazamos el valor de **x** en la 2da

$$5(2) + y = 15$$
$$10 + y = 15$$
$$y = 15 - 10$$
$$y = 5$$

Entonces el vértice B es (2,5).

Ahora calcularemos cuantos meses deberá trabajar cada factoría usando los vértices y la función objetivo:

A (0,15) = 40·0 + 20·15 = 300 (miles de euros)

B (2,5) = 40·2 + 20·5 = 180 (miles de euros)

C (12,0) = 40·12 + 20· = 480 (miles de euros)

Por tanto, para que el costo de producción sea mínimo, la factoría 1 debe trabajar 2 meses y la factoría 2 debe trabajar 5 meses, en cuyo caso, dicho coste sería de 180 mil euros.

8. - En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se ha de tener almacenado un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje de un bidón de aceite de oliva es de 1 euro, y el de un bidón de aceite de girasol es de 0,5 euros, ¿cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea mínimo? ¿Y para que el gasto sea máximo?

DATOS:

	CANTIDAD	Costo
A. GIRASOL (x)	20	0,5
A. OLIVA (y)	40	1

Función objetivo: F (x, y) = 0,5x + y

$$\begin{Bmatrix} x + y \le 150 \\ y \ge \frac{x}{2} \\ x \ge 20 \\ y \ge 40 \end{Bmatrix}$$ sistema de inecuaciones

x	y
0	150
150	0

Para saber por dónde pasa la recta y=x/2 es necesario hallar los puntos por donde corta con la recta x +y = 150, y la recta y=40.

Empecemos con las ecuaciones x +y = 150 / y=x/2

$$\begin{Bmatrix} x + y = 150 \\ y = \frac{x}{2} \end{Bmatrix}$$ *despejamos la **x** de la 1ra ecuación* x=150 – y

Reemplazamos la **y** en la 2da ecuación

$$y = \frac{150-y}{2}$$
$$2y = 150 - y$$
$$2y - y = 150$$
$$3y = 150$$
$$y = 50$$

luego reemplazamos el valor de y en la 1ra ecuación.

$$x + 50 = 150$$
$$x = 150 - 50$$
$$x = 100$$

Ahora con las ecuaciones y=40 / y=x/2

$$\begin{Bmatrix} y = \frac{x}{2} \\ y = 40 \end{Bmatrix} \textit{ reemplazamos el valor de } \boldsymbol{y} \textit{ en la 1ra ecuación } \begin{matrix} 40 = \frac{x}{2} \\ 40 \cdot 2 = x \\ 80 = x \end{matrix}$$

Entonces la recta y=x/2 pasa por los vértices (100, 50) y (80, 40).

Ahora buscaremos los vértices y calcularemos el coste mínimo y máximo con la función objetivo:

A (20, 40) = 0,5 · 20 + 1 · 40 = 50 euros Sería el gasto mínimo si se almacenan 20 bidones de aceite de girasol y 40 bidones de aceite de oliva.

El vértice B lo calculamos mediante un sistema de ecuación con las rectas x + y = 150 / x=20.

$$\begin{Bmatrix} x + y = 150 \\ x = 20 \end{Bmatrix} \textit{ reemplazamos el valor de y en la 1ra ecuación } \begin{matrix} 20 + y = 150 \\ y = 150 - 20 \\ y = 130 \end{matrix}$$

B (20, 130) = 0,5 · 20 + 1 · 130 = 140 euros Sería el gasto máximo si se almacenan 20 bidones de aceite de girasol y 130 bidones de aceite de oliva.

C (100, 50) = 0,5 · 100 + 1 · 50 = 100 euros

D (80, 40) = 0,5 · 80 + 1 · 40 = 80 euros

9. - Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1000. Conoce que la demanda de ambos productos conjuntamente es mayor que 3000 unidades y menor que 6000 unidades. Asimismo, sabe que la cantidad que se demanda de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble de la del otro. Si la empresa desea vender toda la producción: a) ¿De cuántos modos puede organizar la producción? b) Para obtener los máximos beneficios, ¿cuánto ha de ser la producción de cada uno de los productos si uno se vende a un precio que es triple que el del otro?

DATOS:

Producto 1 (x)

Producto 2 (y)

$$\begin{Bmatrix} x+y>3 \\ x+y<6 \\ x>\frac{y}{2} \\ x<2y \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{Bmatrix}$$ sistema de inecuaciones

x	y
0	3
3	0

x	y
0	6
6	0

Para saber por dónde pasa la recta $x>\frac{y}{2}$ es necesario hallar los puntos por donde corta con la recta $x+y>3$ y la recta $x+y<6$ (miles) Empecemos con las rectas $x>\frac{y}{2}$ / $x+y>3$ (miles).

$\begin{Bmatrix} x+y=3 \\ x=\frac{y}{2} \end{Bmatrix}$ despejamos **x** de la 1ra ecuación $x=3-y$ luego la reemplazamos en la 2da.

$$\begin{Bmatrix} 3-y=\frac{x}{2} \\ 2(3-y)=y \\ 6-2y=y \\ 6=y+2y \\ 6=3y \\ \frac{6}{3}=Y \\ 2=y \end{Bmatrix}$$

Luego reemplazamos el valor de **y** en la 1ra ecuación $\begin{Bmatrix} x+2=3 \\ x=3-2 \\ x=1 \end{Bmatrix}$ Tenemos como resultado el punto (1,2).

Ahora con las rectas $\begin{Bmatrix} x+y=6 \\ x=\frac{y}{2} \end{Bmatrix}$ despejamos **x** de la 1ra ecuación $x=6-y$ luego la reemplazamos en la 2da.

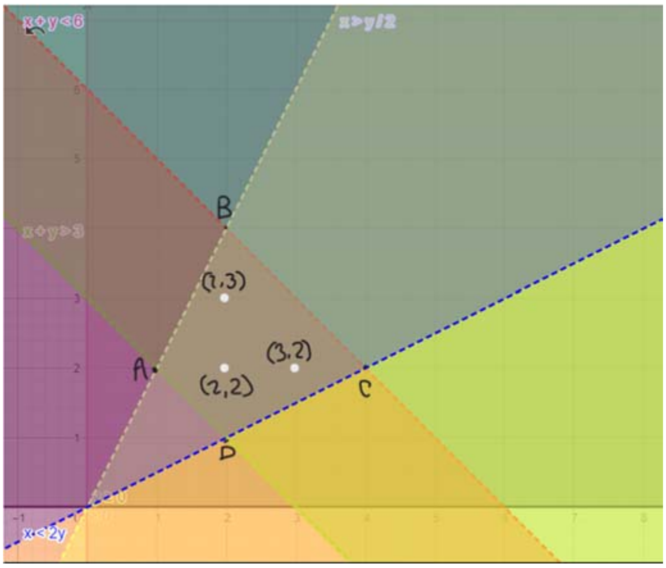
IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\begin{Bmatrix} 6 - y = \frac{x}{2} \\ 2(6 - y) = y \\ 12 - 2y = y \\ 12 = y + 2y \\ 12 = 3y \\ \frac{12}{3} = Y \\ 4 = y \end{Bmatrix}$ Luego reemplazamos el valor de **y** en la 1ra ecuación $\begin{Bmatrix} x + 4 = 6 \\ x = 6 - 4 \\ x = 2 \end{Bmatrix}$ Tenemos el punto (2, 4).

Y por último tenemos la recta x = 2y, la cual es opuesta a la recta $x > \frac{y}{2}$, por lo tanto, tiene los puntos opuestos: (2, 1) y (4, 2).



Tenemos dentro del conjunto 3 soluciones factibles representado gráficamente con las restricciones:

(2, 3), (3, 2) y (2, 2).

PRODUCTO 1	PRODUCTO 2
2000	3000
3000	2000
2000	2000

Aquí tenemos la respuesta a la pregunta “a”.

Ahora busquemos los máximos beneficios, ¿cuánto ha de ser la producción de cada uno de los productos si uno se vende a un precio que es triple que el del otro?

La función objetivo sería la siguiente: F (x, y) = k (x + 3y)

F (x, y) = k (2 + 3·3) = 2k +9k = 11k Se debe fabricar 2000 unidades del producto 1 y 3000 unidades del producto 2.

F (x, y) = k (3 + 3·2) = 3k +6k = 9k

F (x, y) = k (2 + 3·2) = 2k +6k = 8k

10. - Una empresa dedicada a la fabricación de piezas de automóvil tiene dos factorías que producen, respectivamente, 8000 y 15000 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres fábricas que necesitan 10000, 7000 y 6000 piezas respectivamente.

	Fáb. 1	Fáb. 2	Fáb. 3
Fact. 1	6	13	2
Fact. 2	4	4	12

Los costes de transporte, en céntimos de euro, por pieza son los que aparecen en el cuadro adjunto. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el coste sea mínimo?

X= nº piezas que la factoría 1 le entrega a la fábrica 1.

Y= nº piezas que entrega la factoría 1 a la fábrica 2.

RESTRICCIONES :

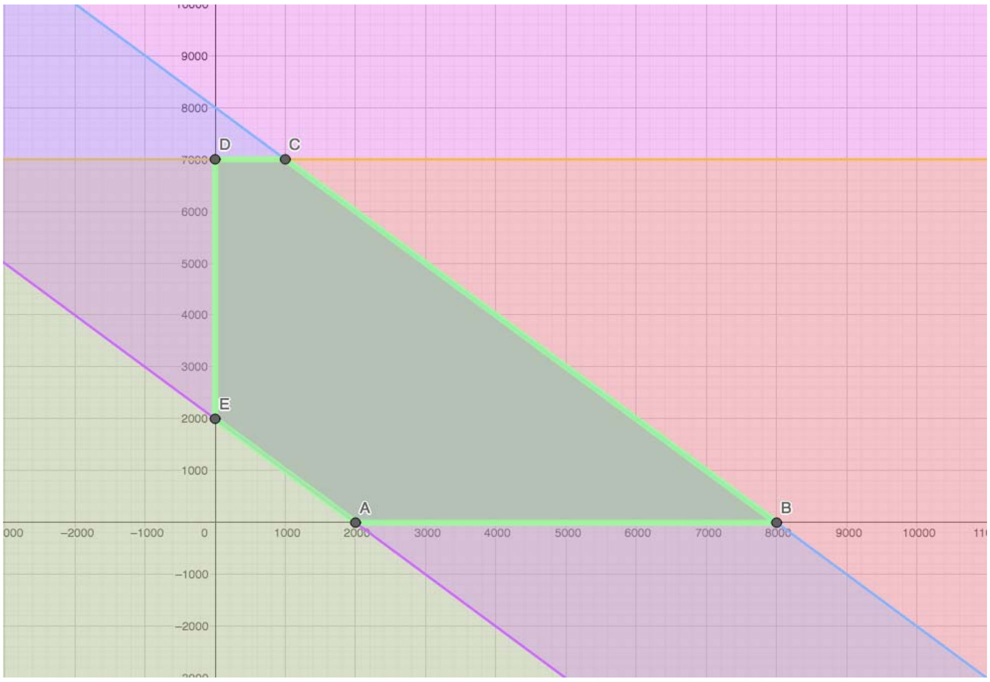
$\cdot x \leq 10\,000 \quad \cdot y \leq 7\,000$

$\cdot x + y \leq 8\,000$

$\cdot x + y \geq 2\,000$

$\cdot x \geq 0 \quad \cdot y \geq 0$

f.o= 12x + 19y +60 000



VÉRTICES DE LA REGIÓN FACTIBLE :

A. (2000, 0) B.(8000, 0) C.(1000,7000)

D.(0,7000) E.(0, 2000)

SOLUCIONES :

A. 12·2000 + 19·0 + 60.000= 84.000

B. 12·8000 + 19·0 + 60.000= 156.000

C. 12·1000 + 19·7000 + 60.000= 205.000

D. 12·0 + 19·7000 + 60.000= 193.000

E. 12·0 + 19·2000 + 60.000= 98.000

RESULTADO :

Para que el coste sea mínimo se deben transportar desde la factoría 1 : 2000 piezas a la fábrica 1 y ninguna pieza a la fábrica 2.

11. - Una persona va a iniciar una dieta y recibe las siguientes recomendaciones:

- Debe tomar una mezcla de dos compuestos D_1 y D_2
- La cantidad total diaria que puede ingerir, una vez mezclados los compuestos, no debe ser superior a 150 gramos ni inferior a 50 gramos.
- En la mezcla debe haber más cantidad de D_1 que de D_2
- La mezcla no debe contener más de 100 gramos de D_1

Se sabe que cada gramo de D_1 aporta 0,3 mg de vitaminas y 4,5 calorías y cada gramo de D_2 aporta 0,2 mg de vitaminas y 1,5 calorías. ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar para obtener la máxima cantidad de vitaminas? ¿Cuántos gramos de cada compuesto debe tomar si desea el mínimo posible de calorías?

RESTRICCIONES :

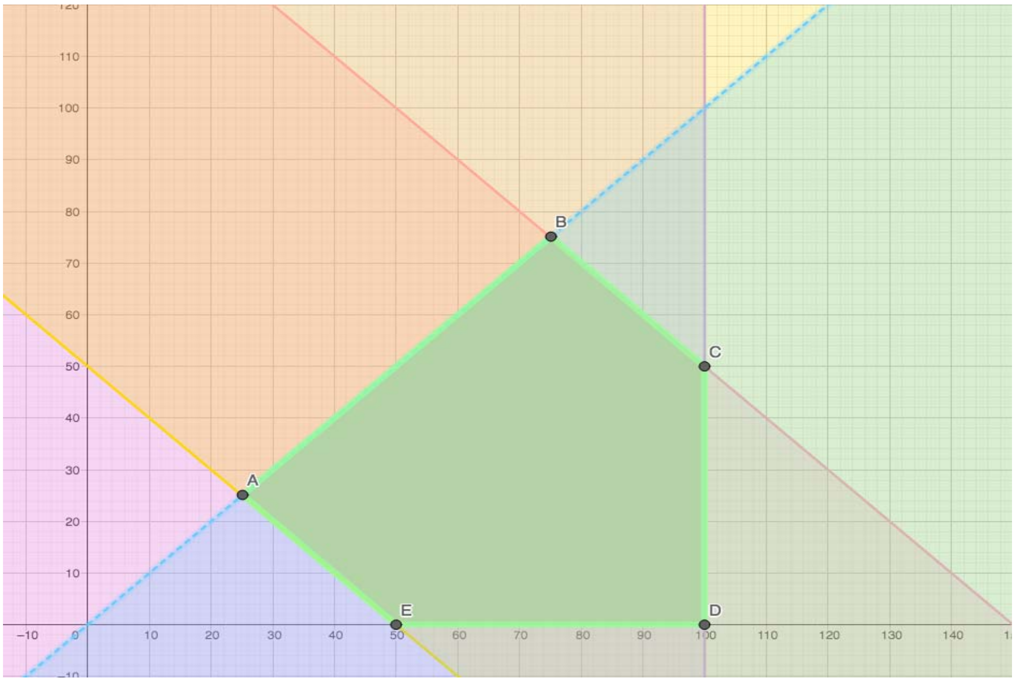
x=gramos compuesto D1

y=gramos compuesto D2

· $x + y \leq 150$ ·$x + y \geq 50$
·$x \leq 100$ ·$x > y$
·$x \geq 0$ · $y \geq 0$

FUNCIONES OBJETIVO :

-Vitaminas : 0,0003x + 0,0002y (máximizar) -Calorías : 0,0045x + 0,0015y (minimizar)



Vértices de la región factible : A.(25,25) B.(75,75) C.(100,50) D.(100,0) E.(50,0)

SOLUCIONES (Vitaminas) :

A. 0,0003·25 + 0,0002·25= 0,0125

B. 0,0003·75 + 0,0002·75= 0,0375

C. 0,0003·100 + 0,0002·50= 0,04

D. 0,0003·100 + 0,0002·0= 0,03

E. 0,0003·50 + 0,0002·0= 0,015

SOLUCIONES (Calorías) :

A. 0,0045·25 + 0,0015·25= 0,15

B. 0,0045·75 + 0,0015·75= 0,45

C. 0,0045·100 + 0,0015· 50= 0,525

D. 0,0045·100 + 0,0015·0= 0,45

E. 0,0045·50 + 0,0015·0= 0,225

RESULTADO : Si quiere obtener la máxima cantidad de vitaminas debe tomar 100gr del compuesto D1 y 50gr del com puesto D2.

Si desea el mínimo número posible de calorías debe tomar 25gr del compuesto D1 y 25gr del compuesto D2.

12. - Una promotora pretende diseñar una urbanización con a lo sumo 15 edificaciones entre chalets y bloques de pisos. Los bloques de pisos no deberían ser más de un 40% de las edificaciones que se construyan. La urbanización tendría como mucho 12 chalets y como poco 2 bloques de pisos.

a) ¿Qué combinaciones de cada tipo de viviendas son posibles? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Qué combinación hace mayor la diferencia entre el número de chalets y de bloques de pisos?

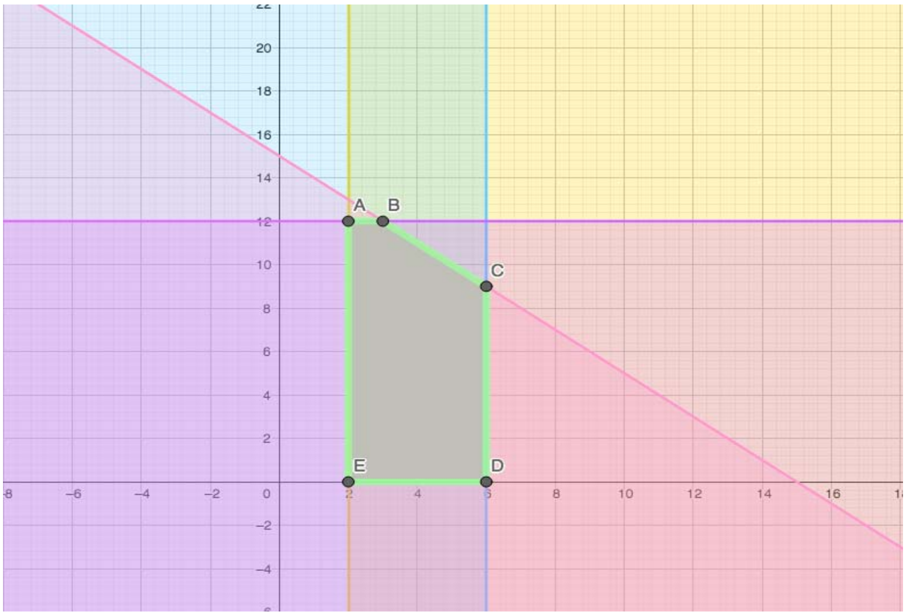
x= nº de bloques de pisos

y= nº de chalets

RESTRICCIONES :

$\cdot x + y \leq 15$ $\cdot x \geq 2$ $\cdot x \leq 6$

$\cdot y \leq 12$ $\cdot\ x \geq 0$



a) COMBINACIONES POSIBLES :

A. (2,12), 2 bloques de pisos y 12 chalets.

B. (3,12), 3 bloques de pisos y 12 chalets.

C. (6,9), 6 bloques de pisos y 9 chalets.

D. (6,0), 6 bloques de pisos y ningún chalet.

E. (2,0), 2 bloques de pisos y ningún chalet.

b) La combinación que hace mayor la diferencia entre el número de chalets y de bloques de pisos es la combinación A, en la que se harían 2 bloques de pisos y 12 chalets.

13. Para dotar mobiliario a cierta zona de una ciudad, se quiere colocar al menos 20 piezas entre farolas y jardineras. Hay 40 farolas y 12 jardineras disponibles. Se pretende que el número de jardineras colocadas no sea superior a una tercera parte del de farolas colocadas, pero de forma que por lo menos un 20% de las piezas que se coloquen sean jardineras.

a) ¿Qué combinaciones de piezas de cada tipo se pueden colocar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

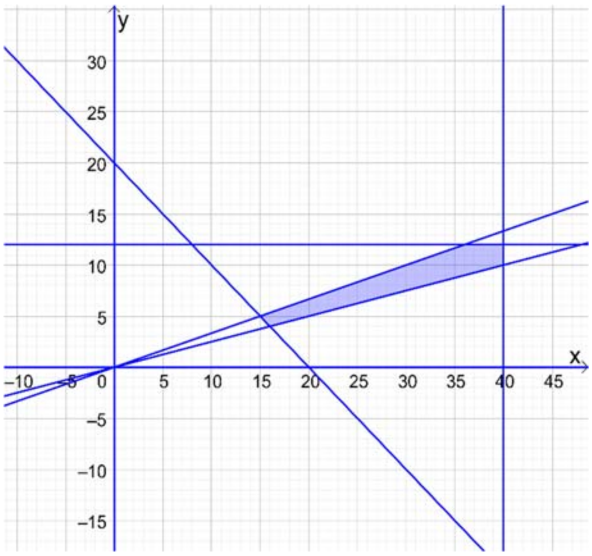
b) ¿Qué combinación hace que la diferencia entre el número de farolas y de jardineras colocadas sea mayor? ¿Es la combinación donde más piezas de mobiliario se colocan?

a)

Llamamos: x = número de farolas y = número de Jardineras

Condiciones:

$x + y \geq 20$
$x \leq 40$
$y \leq 12$
$y \leq x \div 3$
$y \geq 0{,}2\,(x + y)$
$x \geq 0$
$y \geq 0$



Calculamos los vértices de la zona sombreada:

Vértice A:
$y = x/3$

$x + y = 20$

Entonces:

$x = 15,\ y = 5$

Vértice B:

$x + y = 20$

$y >= 0'2\,(x + y)$

Entonces:

$x = 16,\ y = 4$

Vértice C:

$y = 0'2\,(x + y)$

$x = 40$

Entonces:

$x=40,\ y = 10$

Vértice D:

$x = 40$

$y = 12$

Entonces:

$x = 40,\ y = 12$

Vértice E:

$y = 12$

$y = x/3$

Entonces:

$x = 36,\ y = 12$

b) Si el objetivo es que la diferencia entre el número de farolas y el de jardineras sea máxima:

$f(x, y) = x-y$

En A(15,5)	f(15, 5) = 5
En B(16, 4)	f(16, 4) = 12
En C(40, 10)	f(40, 10) = 30
En D(40, 12)	f(40, 12) = 28
En E(36, 12)	f(36, 12) = 24

El valor máximo está en el vértice C(40,10) luego serán 40 farolas y 10 jardineras .
Para averiguar el mayor número de farolas y jardineras será:

$f(x, y) = x + y$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

En A(15, 5) f (15, 5) = 20
En B(16, 4) f (16, 4) = 20
En C(40, 10) f(40, 10) = 50
En D(40, 12) f(40, 12) = 52
En E(36, 12) f(36, 12) = 48

El valor máximo está en el vértice D(40, 12), es decir 40 farolas y 12 jardineras.

Luego NO coinciden

14. Un restaurante quiere adecuar, en parte o en su totalidad, una superficie de 1100 m2 para aparcamiento y área recreativa infantil. La superficie de área recreativa ha de ser de al menos 150 m2. El aparcamiento ha de tener como poco 300 m2 más que el área recreativa, y como mucho 700 m2 más que la misma. El aparcamiento le cuesta 15 euros por m2, y el área recreativa 45 euros por m2.

a) ¿Qué combinaciones de superficie dedicados a cada tipo de servicio se pueden adecuar? Plantea el problema y representa gráficamente las soluciones.

b) ¿Cuál es la combinación más cara? ¿Coincide con la que dedica más espacio al aparcamiento?

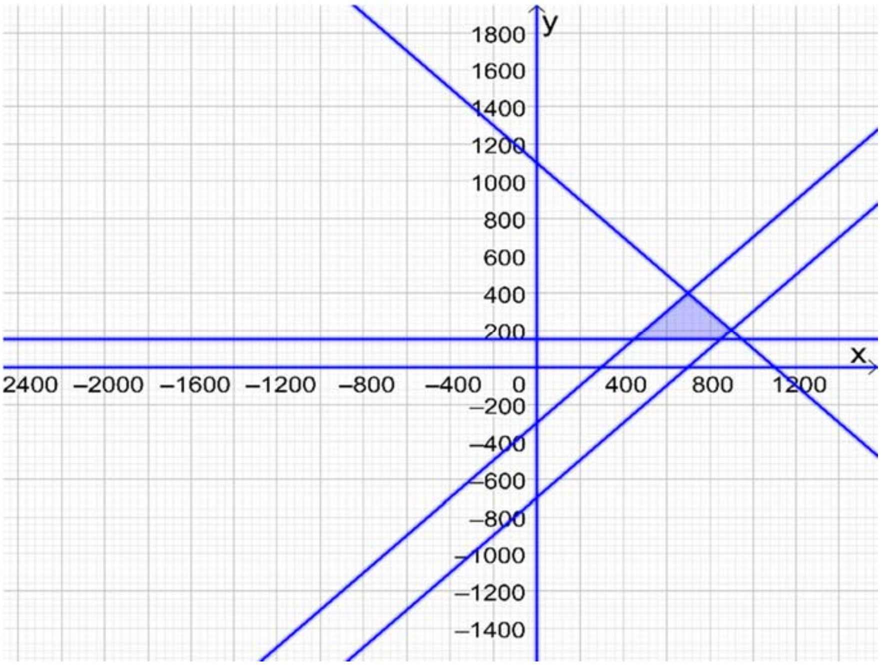
a) Llamamos:

x = Aparcamiento en m^2 y = Área recreativa en m^2

Condiciones:

$x + y \leq 1100$
$y \geq 150$
$x \geq y + 300$
$x \leq y + 700$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Con este sistema de inecuaciones obtenemos la siguiente gráfica:



La zona sombreada sería la solución, entonces calcularemos los distintos vértices:

Vértice A:

$x = y + 300$

$y = 150$

Entonces: $x = 450$ $y = 150$

Vértice B:

$y = 150$

$x = y + 700$

Entonces $x = 850$ $y = 150$

Vértice C:

$x = y + 700$

$x + y = 1100$

Entonces $x = 900$ $y = 200$

Vértice D:

$x + y = 1100$

$x = y + 300$

Entonces x = 700 y = 400

b)La solución más cara seria:

$f(x, y) = 15x + 45y$

Sustituyendo en los vértices:

A(450, 150) f(450, 150) = 13 500

B(850, 150) f(850, 150) = 19 500

C(900, 200) f(900, 200) = 22 500

D(700, 400) f(700, 400) = 28 500

El máximo sería el vértice D(700, 400) entonces la solución más cara será 700 m^2 de aparcamiento y 400 m^2 de área recreativa .

Si el aparcamiento debe ser máximo será el vértice C(900, 200)entonces dedicaremos 900 m2 al aparcamiento y 200 m2 al área recreativa .

NO coinciden.

15. Una empresa está seleccionando empleados con contrato eventual por un año y con contrato fijo. El sueldo anual (en miles de euros) de cada empleado eventual es 8 y de cada empleado fijo es 15. La empresa tiene un tope de 480 (miles de euros) para pagar los sueldos anuales de los empleados que contrate. Los empleados fijos han de ser por lo menos 10, y no más de 24. Además, el número de eventuales no puede superar en más de 14 al de fijos. a) ¿Qué combinaciones de empleados fijos y eventuales se puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratar 24 fijos y ningún eventual? b) Si el objetivo es contratar el mayor número total de empleados ¿cuántos ha de contratar de cada tipo? ¿Y si el objetivo es contratar el mayor número de eventuales?

a.) Llamamos: x = nº Contratos Eventuales y = nº Contratos Fijos

Condiciones:

$8x + 15y \leq 480$

$y \geq 10$

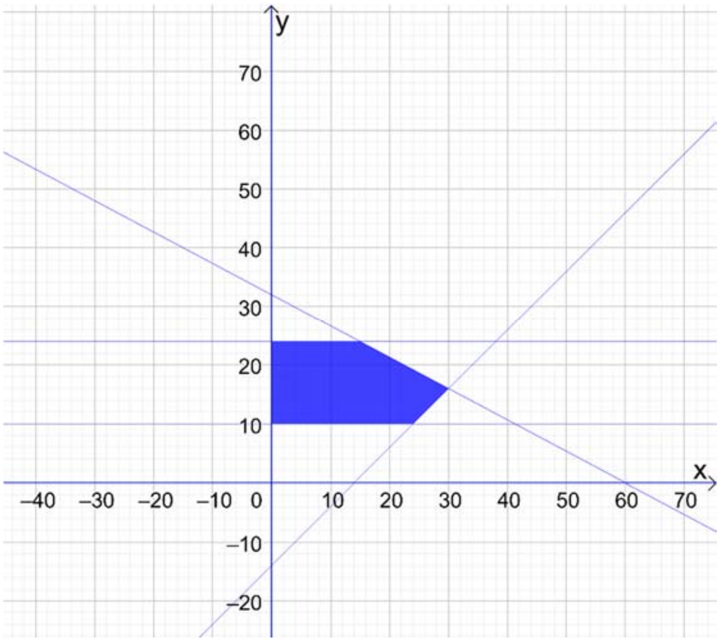
$y \geq 24$

$x \leq y + 14$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Calculamos los vértices de la zona sombreada:

vértice A:

y = 10

x = y + 14 x = 24 y = 10

vértice B:

x = y + 14

8x + 15y = 480 x = 30 y = 16

vértice C:

8x + 15y = 480

y = 24 x = 15 y = 24

vértice D:

y = 24

x = 0 x = 0 y = 24

vértice E:

x = 0

y = 10 x=0 y = 10

El punto (0, 24) está en la zona sombreada, luego podrá contratar a 24 empleados fijos y ninguno eventual.

b) Si se quiere contratar al mayor número de empleados sería:

f(x, y) = x + y

Luego:

En A(24, 10) f(24, 10) = 34

En B(30, 16) f(30, 16) = 46

En C(15, 24) f(15, 24) = 39
En D(0, 24) f(0, 24) = 24
En E(0, 10) f(0, 10) = 10

En el vértice B(30, 16), el valor es 46. Por lo tanto, habría que realizar 30 contratos eventuales y 16 contratos fijos.
Si se quiere contratar al mayor número de empleados eventuales será:

$$f(x, y) = x$$

Según los vértices:

En A(24, 10) f(24, 10) = 24
En B(30, 16) f(30, 16) = 30
En C(15, 24) f(15, 24) = 15
En D(0, 24) f(0, 24) = 0
En E(0, 10) f(0, 10) = 0

Cogeríamos el vértice B(30, 16), luego habría que realizar 30 contratos eventuales.

16. Una empresa de autobuses dispone de un vehículo para cubrir dos líneas (A y B) que puede trabajar en ellas, a lo sumo, 300 horas mensualmente.

Un servicio en la línea A lleva 2 horas, mientras que en la B supone 5 horas. Por otra parte, en la línea B se deben cubrir al menos 15 servicios mensualmente y, además, el autobús no puede prestar globalmente más de 90 servicios cada mes entre ambas líneas.

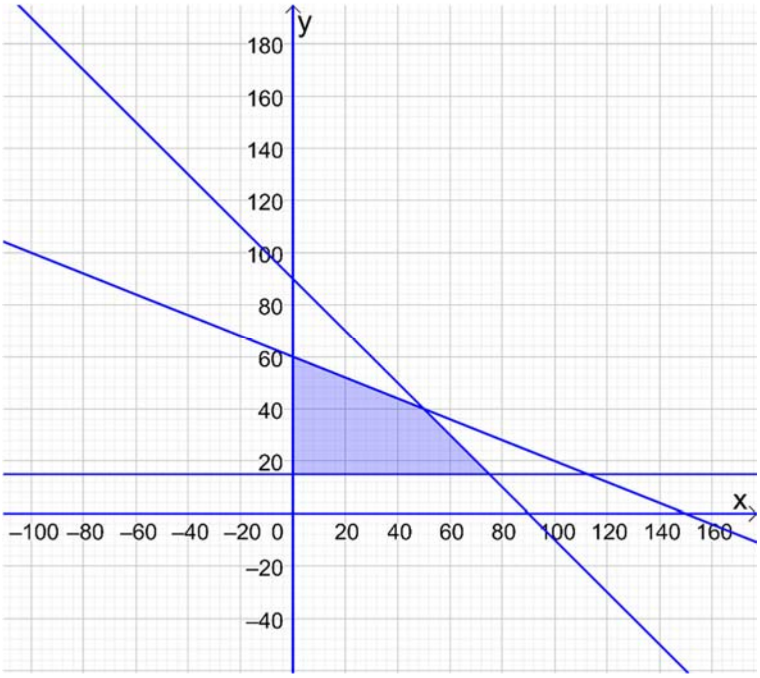
a) ¿Cuántos servicios puede prestar el vehículo al mes en cada una de las líneas? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) Sabiendo que la empresa obtiene un beneficio con cada servicio prestado de 60 euros y 180 euros en las líneas A y B respectivamente, ¿cuántos servicios le convendrá realizar en cada una para maximizar el beneficio total? ¿Cuál será su importe?

a) Llamamos: x = nº servicios Línea A y = nº servicios Línea B

Objetivo: $f(x, y) = 60x + 180y$
Condiciones:

$2x + 5y \leq 300$
$y \geq 15$
$x + y \leq 90$
$x \geq 0$
$y \geq 0$



Calculamos los vértices de la zona sombreada obtenida:

vértice A:

x = 0

y = 15

Entonces x = 0 y = 15

vértice B:

y = 15

x + y = 90

Entonces x = 75 y = 15

vértice C:

x + y = 90

2x + 5y = 300

Entonces x = 50 y = 40

vértice D:

2x + 5y = 300

x = 0

Entonces x = 0 y = 60

b.) Entonces la función a maximizar en cada uno de los Vértices

$f(x, y) = 60x + 180y$

En A(0, 15): f (0, 15) = 2700
En B(75, 15): f (75, 15) = 7200
En C(50, 40): f (50, 40) = 10200

En D(0, 60): f (0, 60) = 10800

Luego la solución sería el vértice D(0,60); ningún viaje la línea A y 60 la línea B .

El beneficio seria 10800€.

17. En una fábrica de cajas de cartón para embalaje y regalo se fabrican dos tipos de cajas: la caja A que requiere para su construcción 4 m de papel decorado y 0,25 m de rollo de cartón, que se vende a 8 euros, y la caja B que requiere 2 m de papel decorado y 0,5 m de rollo de cartón y que se vende a 12 euros. En el almacén disponen únicamente de 440 m de papel de regalo y de 65 m de rollo de cartón. Si suponemos que se vende toda la producción de cajas, ¿cuántas de cada tipo deberán de fabricarse para que el importe de las ventas sea máximo? ¿A cuánto ascenderá?

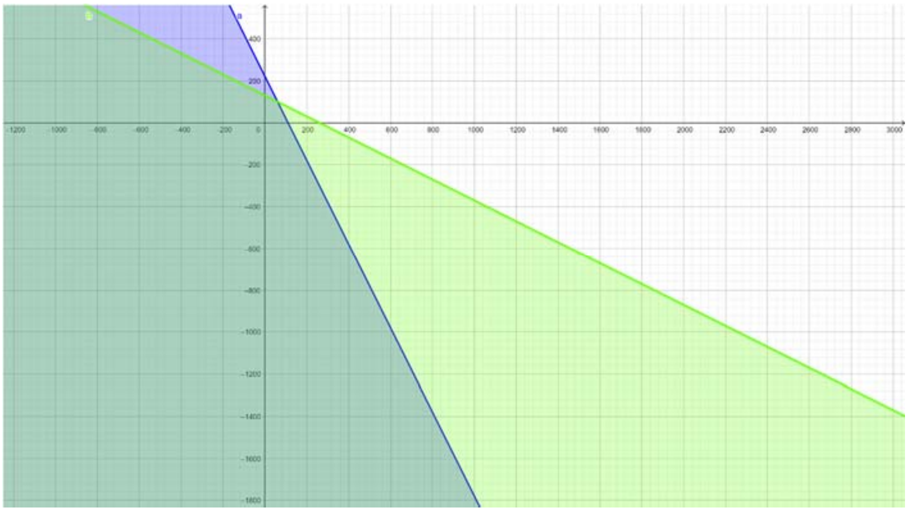
x = Número de cajas tipo A y = Número de cajas tipo B

$4x+2y \leq 440$

$0,25x+0,5y \leq 65$

$x \geq 0$
$y \geq 0$

Resultados
X=60
Y=100
1680$ en total de las ventas



18. Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A un precio de 9000 euros y el modelo B a 12000 euros. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 coches del modelo B, queriendo vender al menos tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir los gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos con ella deben ser, al menos, de 36000 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se podrán vender? Plantea el problema y representa gráficamente su conjunto de soluciones.

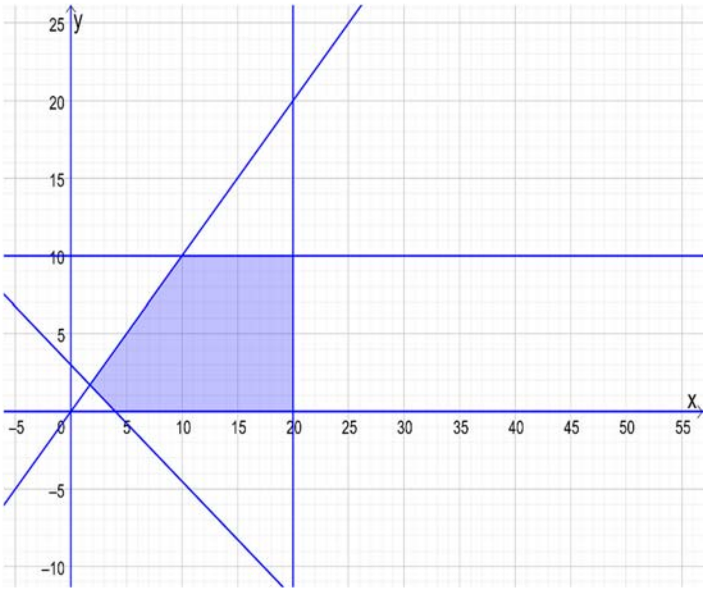
b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

a) Llamamos: x =coches a vender del modelo A y =coches a vender del modelo B

Objetivo: $f(x, y) = 9000x + 12000y$

Condiciones:

$x \leq 20$
$y \leq 10$
$x \geq y$
$9000x + 12000y \geq 36000$
$x \geq 0$
$y \geq 0$



Calculamos los vértices de la zona sombreada obtenida de 5 lados:

vértice A:

x = y

9000x + 12000y = 36000

vértice B:

9000x + 12000y =36000

y = 0

vértice C:

y = 0

x = 20

vértice D:

x = 20

y = 10

vértice E:

y = 10

x = y

a) Analizamos los vértices de la zona sombreada

f(x, y) = 9000x +12000y

En A(12/7,12/7)

En B(4, 0)

En C(20, 0)

En D(20, 10)

En E(10, 10)

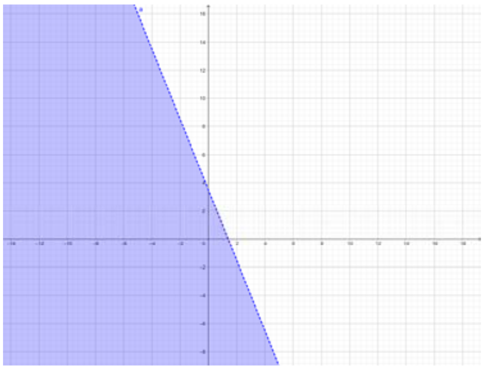
El valor máximo será en el vértice D(20, 10), es decir, debe vender 20 coches modelo A y 10 coches modelo B para que sus ingresos sean máximos(300000€).

AUTOEVALUACIÓN

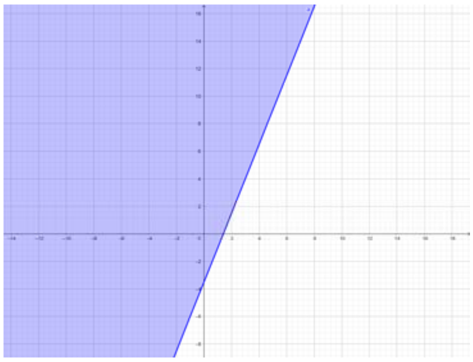
1. Indica cuál de las inecuaciones siguientes es estricta:

a) $5x + 2y < 7$

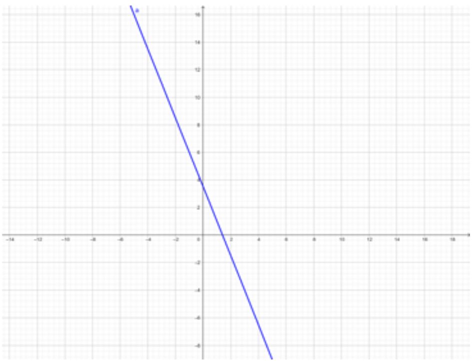
Esta inecuación es estricta



b) $5x – 2y \leq 7$

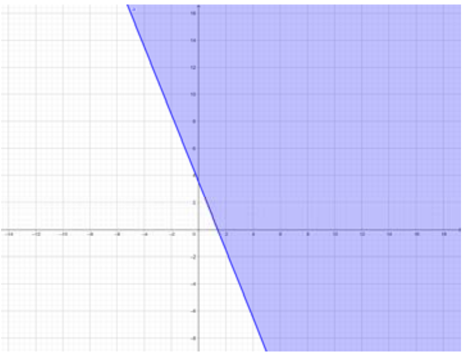


c) $5x + 2y = 7$



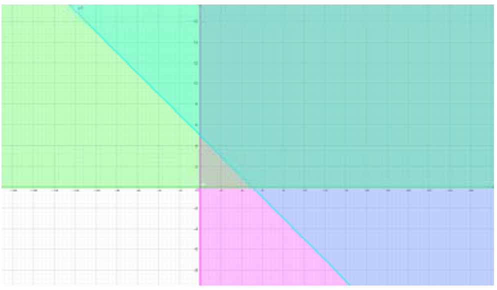
d) $5x + 2y \geq 7$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

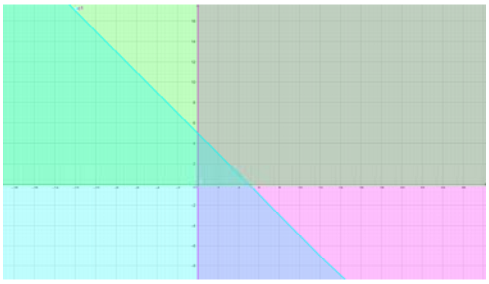


2. Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes es acotada:

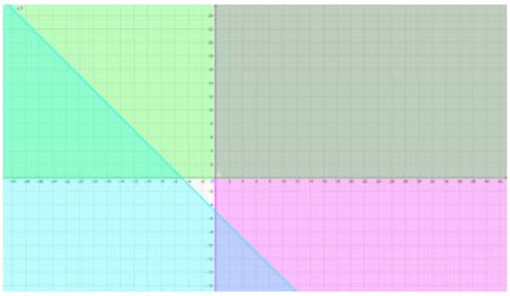
a) $\begin{cases} x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$



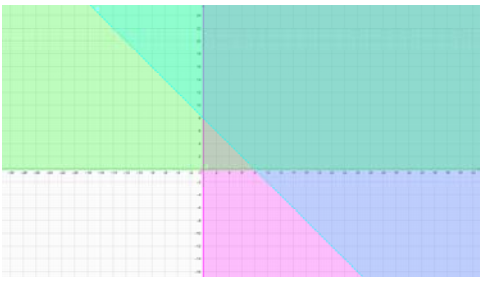
b) $\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$



c) $\begin{cases} x + y \leq -5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$



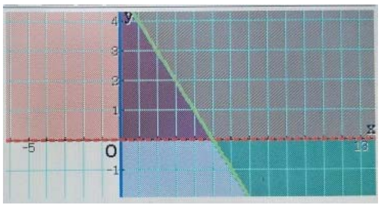
d) $\begin{cases} x+y>8 \\ x \geq 0 \\ y>0 \end{cases}$



Ninguna de las regiones factibles anteriores está acotada.

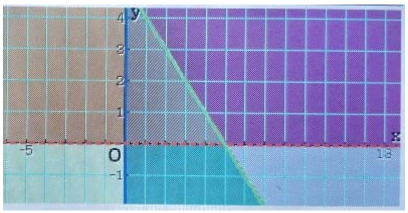
3. Indica cuál de las regiones factibles de los sistemas siguientes no posee solución:

a) $\begin{cases} x+y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$



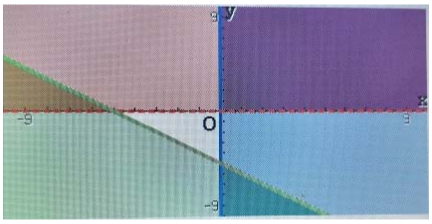
No tiene solución.

b) $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$



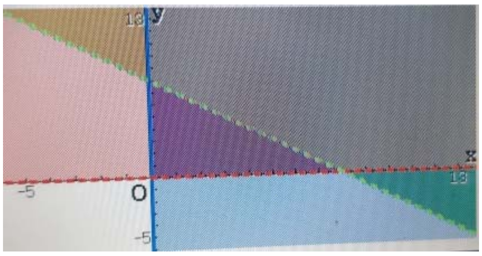
No tiene solución.

c) $\begin{cases} x+y \leq -5 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$



No tiene solución.

d) $\begin{cases} x+y > 8 \\ x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$



No tiene solución.

4.Indica cuál de las afirmaciones siguientes es cierta:

a) La solución de un programa lineal está siempre en un vértice.
No es cierta esta afirmación

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

La solución de un programa lineal está en la región factible

b) La solución óptima de un programa lineal siempre se encuentra en la frontera de la región factible. **Es cierta esta afirmación**

c) La región factible determina la función objetivo.
No es cierta esta afirmación. La región factible determina una serie de restricciones lineales.

d) En un programa lineal se optimiza la región factible.
No es cierta esta afirmación. En un programa lineal se optimiza la función objetivo

5. Una nueva granja estudia cuántos patos y gansos puede albergar. Cada pato consume 3 kg de pienso por semana y cada ganso 4 kg de pienso por semana. El presupuesto destinado a pienso permite comprar 700 kg semanales. Además, quieren que el número de patos sea mayor que el de gansos. Denomina x al número de patos e y al de gansos. ¿Cuál es el máximo de animales que podría albergar la granja?

x → N.º de patos y → N.º de gansos

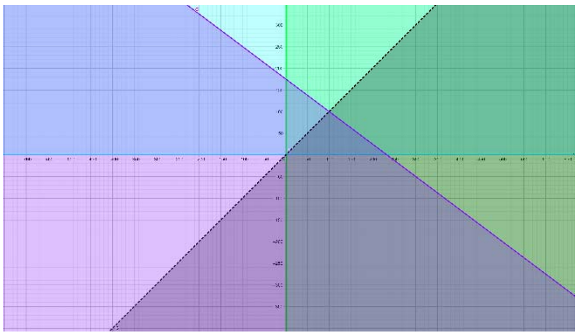
$x = y$ $3x + 4y = 700$

Restricciones

- $3x + 4y \leq 700$
- $x > y$
- $x \geq 0$ $y \geq 0$

x	y
0	0
50	50

x	y
0	175
233,3	0



$3x + 4y \leq 700$ Tomando como referencia (0,0)

$0+0 \leq 700$ Es correcto

$x > y$ Tomando como referencia (50,0)

$50 > 0$ Es correcto

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

6. Para este problema la función objetivo es:

b) $x + y \longrightarrow$ Max

Porque quiere meter el máximo número de gansos y patos.

7. Para este problema las restricciones son:

d) $\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ x > y \\ 3x + 4y \leq 700 \end{cases}$

8. Resuelve el problema e indica si la solución es:

VÉRTICES:

x = y   3x +4y = 700 ;   x = 100 ,   y = 100,   (100, 100)

y = 0   3x +4y = 700 ;   x = 700/3 , y = 0 ,   (700/3, 0)

x = 0   x = y   ;   x = 0   , y = 0 ,   (0, 0)

Sustituyendo en la función objetivo, z = x + y , el máximo en (700/3, 0) , luego la solución es:

c) 233 patos y ningún ganso.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales
2º Bachillerato
Capítulo 4: Límites y Continuidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, ALEJANDRA, JERÓNIMO, KASSANDRA, ÁLVARO, PATRICIA,

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-7) = -7$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{0} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{-\infty 10} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to -1} x^6 = (-1)^6 = 1$

k) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^3 = 0$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = \frac{1}{0^6} = +\infty$

2.- Halla los siguientes limites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^7 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^7 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[7]{x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[7]{x} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} 7^x = +\infty$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} 7^x = 0$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = +\infty$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = 0$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^5 = +\infty$

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$

ñ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

r) $\lim\limits_{x\to +\infty} 5^x = +\infty$

s) $\lim\limits_{x\to -\infty} 5^x = 0$

t) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

u) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

w) $\lim\limits_{x\to -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

3. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{1}{3}}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim_{x\to+\infty} 1 = \mathbf{1}$

h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{16}{x} = \mathbf{0}$

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{0}$

j) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{0}$

k) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim_{x\to+\infty} 1 = \mathbf{1}$

l) $\lim_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{16}{x} = \mathbf{0}$

4. Determina el límite de estas funciones:

a) $\lim_{x\to+\infty} (3x+1) = \infty + 1 = \infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x+1} = \frac{5}{-\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to+\infty} (x^2-5x+6) = \lim_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} (3-x+x^2-x^3) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3) = -(-\infty) = \infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} \left(3-\frac{x-4}{2}\right) = \left(3-\frac{\infty-4}{2}\right) = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty} 2^{x-1} = 2^{\infty} = \infty$

g) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{(-\infty)^2} = 0$

h) $\lim_{x\to+\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}} = 3^{\frac{2}{\infty}} = 3^0 = 1$

i) $\lim_{x\to-\infty} (x+3)(2x-3) = \lim_{x\to-\infty} (-\infty)(-\infty) = +\infty$

j) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminación.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

k) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3+1}$

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2x^3}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^3}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

l) $\lim_{x\to+\infty}(-x^3+8x^2-x+8)=-\infty$

m) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x-2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

n) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{3x^3-7x+1}=\frac{\infty}{\infty}=$ Indeterminación.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{3x^3-7x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{3x^3}==0$

ñ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-8x+16}{35}=+\infty$

o) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4}=\frac{\infty}{\infty}=$ Indeterminación.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}=-(+\infty)=-\infty$

5.- Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1}=+\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1}=+\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^{\frac{5}{3}}}=\lim_{x\to+\infty}2x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{0}=+\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\frac{1}{1}=1$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x}{2x}=\frac{7}{2}$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=\frac{2}{2}=1$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}+2x}{6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2x}{6x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{6x}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

6. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to0}x^{-4}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}=\infty$

$b)\ \lim_{x\to\infty}4x^4=+\infty$

$c)\lim_{x\to0}\frac{3}{x^3}=\frac{3}{0}=+\infty$

$d)\ \lim_{x\to0}\frac{x^{-2}}{5}=\lim_{x\to0}\frac{1}{5x^2}=\infty$

$e) \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{3} = \frac{0}{3} = 0$

$f) \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \infty$

$g) \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x^5} = 0$

$h) \lim_{x\to\infty} 3^{-x} = 0$

$i) \lim_{x\to -\infty} 3^{-x} = 3^{\infty} = \infty$

j) $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{2}{3}\right]^x = 0$

$k) \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \infty$

$l) \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2}\right) = \frac{2}{\infty} + \frac{3}{\infty} = 0$

7. Resuelve los siguientes límites.

$a) \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{24x^3-6x}{5x^4+5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{24}{5x} = 0$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{1-2x} : \frac{5x^3}{x^2+12} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+17x^2+60}{-10x^4+5x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{-10x^4} = -\frac{1}{10}$

$c) \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2+3}{5x} + \frac{6x-x^2}{3x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+30x^2+9x}{15x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{15} = \infty$

8. Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim_{x\to\infty} (x^3 - 12x) = \infty$
b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$
c) $\lim_{x\to\infty} (x^2 - 4x) = \infty$
d) $\lim_{x\to\infty} \left(x^3 - \frac{3}{x^2}\right) = (\infty - 0) = \infty$
e) $\lim_{x\to\infty} (x - x^2) = -\infty$
f) $\lim_{x\to\infty} (2x - 3)^x = (\infty)^{\infty} = \infty$
g) $\lim_{x\to\infty} (x^3 + 5x^2 - 3) = \infty$
h) $\lim_{x\to\infty} [(x^2 + 1)^2 + 4x] = \infty + \infty = \infty$

9.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} [2x^3 - 7x + 3] \to \lim_{x\to +\infty} 2x^3 = \infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{3x^2-5x+2} \to \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{3x^2} = \frac{2}{\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to-\infty}[4x^4-7x+5] \to \lim_{x\to-\infty} 4x^4 = \infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}[-3x^5+2x-4] \to \lim_{x\to-\infty}(-3x^5) = \infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}[-x^2+3x-2] \to \lim_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-2x^2} = -1$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+7}}{2x} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x} \to \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{4x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4}} = \sqrt[3]{\infty} = \infty$

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{7x^4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{7} = -\infty$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-5x+1}{2x^3-3} = \frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2\cdot\infty} = 0$

l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-x^3} = \frac{2}{-\infty} = 0$

10. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - \frac{1+2x^2}{2x-1}\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x} - \frac{1+2x^2}{2x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{[(x^2-1)(2x-1)]-[(1+2x^2)(x)]}{(x)(2x-1)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x+1-x-2x^3}{2x^2-x}\right) = = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{2x^2}\right) = \frac{-1}{2}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x-x^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}+\frac{x}{x}}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}+1}\right) = = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right) = \frac{-2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right) = \infty$ El orden de 2x es mayor que el de $\sqrt{4x}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right) = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{9x^2+3x}-3x)(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2+3x-9x^2}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+3x}}{x}+\frac{3x}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2+3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{x}}+3}\right) = = \frac{3}{\sqrt{9+0}+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty-\infty = -\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-x+\sqrt{(-x)^2-4(-x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+4x)-x^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x+x}\right) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

11. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1} = 1^{\infty}$ calculamos $e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-1\right)\cdot(2x-1)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^2$

$b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2} = 1^{\infty};\ e^{\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}-1\right)\cdot(6x+2)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-18x+6}{x}\right)} = e^{-18}$

$c)\ \lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} = 1^{\infty};\ e^{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}-1\right)\cdot(3x+2)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{4x}\right)} = e^{\frac{3}{4}}$

$d)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = 1^{\infty};\ e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\cdot(3x+1)} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-9x+3}{x+3}\right)} = e^{-9}$

$e)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} = 1^{\infty};\ e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)\cdot(x-1)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = e^0 = 1$

$f)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} = 1^{\infty};\ e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}-1\right)\cdot(x+6)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}\right)} = e^{-1}$

$g)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^{\infty}; e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{2(x^3+x)}\right)} = e^0 = 1$

$h)\ \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x} = 1^{\infty}; e^{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}-1\right)\cdot(1-x)} = e^{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-2}{x}\right)} = e^2$

12. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-x\right] = \infty-\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}\right) = \frac{2}{(\sqrt{1}+1)} = 1$$

b) $\lim_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \frac{-3^3+27}{-3^2-9} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{(x+3)(x^2-3x+3^2)}{(x-3)(x+3)}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{x^2-3x+3^2}{x-3}\right] = \frac{-3^2-3\cdot(-3)+3^2}{-3-3} = \frac{27}{-6} = \frac{-9}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}-\frac{3}{x+2}\right]=\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}=0-0=0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}\right]=\infty$ ya que grado del numerador > grado del denominador

13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4^x)=\infty+4^\infty=\infty+\infty=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=1^\infty\to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Calculamos $f(x)-1\to\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)-1=\frac{-x-5}{3x^2+x}$

Calculamos $g(x)\cdot[f(x)-1]\to(x^2-1)\cdot\left(\frac{-x-5}{3x^2+x}\right)=\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}}=e^{-\infty}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}=(1)^\infty\to$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)\cdot\left(1+\frac{2}{x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-x)\cdot 2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}}=e^{-2}$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3^{-x})=-\infty+\infty\to$ Indeterminación

Cambiamos x por $-x$; $x\to-\infty, -x\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x+3^{-(-x)}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(3^x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}3^x=\infty$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Indeterminación $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)\cdot\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}\right)^2-(2x-3)^2}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-4x^2+12x-9}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=$

$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}(12)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}\right)+2-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{-14\cdot 0+12}{\sqrt{4-5\cdot 0}+2-3\cdot 0}=3$

14- Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}\cdot\sqrt{x^2+1}=\frac{2}{\infty+1}\cdot\sqrt{\infty^2+1}=0\cdot\infty$ Indeterminación

-Multiplicamos los términos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{x^2}}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2} = 4$, luego el límite es 2.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{9x^2+2x-3}-3x = \infty-\infty$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x)(\sqrt{9x^2+2x-3}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x-3-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x+3x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x}) = \infty-\infty$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x+1}-\frac{x^2+1}{x} = \infty-\infty$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+2)x-(x^2+1)(x+1)}{(x+1)x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-x^3-x^2-x-1}{(x+1)x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2+x-1}{(x+1)x} =$ -1

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}} = 1^\infty$ Indeterminación

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x^2-6x-2x^2+x+5}{2x^2-x-5}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^3+5x^2}{2(2x^2-x-5)}} = e^{\frac{-5}{4}}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3} = 1^\infty$ Indeterminación

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\cdot(\frac{4-3x}{5-3x}-1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\cdot(\frac{4-3x-5+3x}{5-3x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x+3}{5-3x}} = e^{\frac{-1}{-3}} = e^{\frac{1}{3}}$

15. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{3x+3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{3x+3} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) = \frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to0}\frac{2(x+1)x}{(x-3)x} = -\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{5+x}}{-(5-x)} = \lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{5+x}}{-\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{10}}{0} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to3}2\left(\frac{x^2-9}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}\right) = \lim\limits_{x\to3}2(x^2-9)^{\frac{1}{2}} = 0$

16. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{3}{2\cdot\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \frac{0}{-3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+3)x}{(x-2)\cdot(x+2)^2} = \frac{-2}{0}$;

$\lim\limits_{x\to-2^-}f(x) = \frac{-2}{0^-} = \infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$; No existe el límite

d) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{0}{-6} = 0$

17.- Calcula estos límites:

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^-)^2-(2\cdot 2^-)+1}{2^--3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^+)^2-(2\cdot 2^+)+1}{2^+-3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

c) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^-)^2-(2\cdot 3^-)+1}{3^--3} \to \frac{4}{0^-} \to -\infty$

d) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^+)^2-(2\cdot 3^+)+1}{3^+-3} \to \frac{4}{0^+} \to +\infty$

e) $\lim_{x\to -1^-} \frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^--3}{(-1^--1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

f) $\lim_{x\to -1^+} \frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^+-3}{(-1^+-1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

g) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

h) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

Descomponemos factorialmente

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x+3)(x-2)}}{\cancel{(x+3)(x-2)}(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2-2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$$

g) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^--2} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$

h) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^+-2} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

18.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{3^2-3}{3+2} \to \frac{6}{5}$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^-)^2-3}{-2^-+2} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^+)^2-3}{-2^++2} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \to 1$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^-} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^+} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

19. Calcula los siguientes límites:

$\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} \to Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^3-1 \to (x-1)(x^2+x+1)$

$x^3+2x^2-3x \to x(x-1)(x+3)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{x(x+3)} = \frac{1+1+1}{1\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^3-2x^2-x} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2+x \to x(x+1)$

$$x^3 - 2x^2 - x \to x(x-1)(x-1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{5x^2-13x-6} = \frac{9-9}{45-39-6} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$$x^2 - 9 \to (x+3)(x-3)$$

$$5x^2 - 13x - 6 \to (5x+2)(x-3)$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(5x+2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)}{(5x+2)} = \frac{6}{17}$$

d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^4-1}{x^3+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$$x^4 - 1 \to (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$x^3 + 1 \to (x+1)(x^2-x+1)$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2+1)(x-1)}{(x^2-x+1)} = \frac{(1+1)(-1-1)}{(1+1+1)} = \frac{2\cdot(-2)}{3} = \frac{-4}{3}$$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-3x^2}{x^2+x} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$$x^4 - 3x^2 \to x^2(x^2-3)$$

$$x^2 + x \to x(x+1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-3)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-3)}{(x+1)} = \frac{0}{1} = 0$$

f) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4} = \frac{4-10+6}{4-8+4} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$$x^2 - 5x + 6 \to (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 4x + 4 \to (x-2)(x-2)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)}{(x-2)} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}}{2x} = \frac{\sqrt{1}}{0} = \frac{1}{0} = \pm\infty$

h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1-1}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$$x^2 - 1 \to (x+1)(x-1)$$

- Como $\sqrt{x} - 1$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1) = 2\cdot 2 = 4$$

i) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{9-9} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$$x^2 - 9 \to (x+3)(x-3)$$

- Como $\sqrt{x} - \sqrt{3}$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

j) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}=\frac{3-\sqrt{9}}{2-\sqrt{4}}=\frac{3-3}{2-2}=\frac{0}{0}=Indet.$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\frac{0}{0}=Indet.$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(2-\sqrt{8-x})(2+\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(4-8+x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(-4+x)(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{-(4-x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(2+\sqrt{8-x})}{-(3+\sqrt{5+x})}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$$

k) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}=\frac{0}{0}\ Ind$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x})^2-(\sqrt{2+x})^2}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

l) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2})^2-4}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)\left(\sqrt{2x}^2-4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)(2x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x}+2)}{2(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{2\sqrt{2}+2}{8}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

m) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}^2-9\right)(\sqrt{x+16}+4)}{\left(\sqrt{x+16}^2-16\right)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+16}+4)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

n) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

o) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}^2-9\right)(\sqrt{x+7}+3)}{\left(\sqrt{x+7}^2-9\right)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{24}{6}=4$$

20. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}=\frac{0}{0}Ind$ $\quad\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3X+9)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x^2-3X+9)}{x-3}=-\frac{27}{6}$

b) $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x+1)(x-2)x}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1)x}=\frac{4\cdot 8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}\ Ind$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

21.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{0}\to\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=\frac{2}{0}\to\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2+x}{x^2}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2+x}{x^2}=+\infty\to\lim\limits_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=\frac{8}{0}\to\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty\to\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}=1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3}{x-2}\right)((x-1)-1)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{x-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}=e^3$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}\to 1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+4}{x+4}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x(x^2-x)}{(x-1)(x+4)}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x+4}\right)}=e^{\frac{1}{5}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]=\infty-\infty\to\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)(x+1)-(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x-1)(x+1)}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=\frac{7}{0}\to\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=-\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{(x-2)\sqrt{2x-4}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=8$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x(2x+4)}{3x^2\cdot x}\right]=\frac{4}{0}\to\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\infty\cdot 0$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{5x}{5x}\right]^{3x}=1^\infty\to e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x)\left(\frac{5x-2}{5x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x+3}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x}\right)}=e^{-3}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\infty\cdot 0;$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2+2-x-2}{(x+2)(x^2+2)}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x^2(x+2)(x^2+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=-\infty;\quad\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=\infty\to\nexists\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]$

22.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{0}{0}\to\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\frac{-(1-x)(x^2+x+1)}{(1-x)(x+1)}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=+\infty$

23.- Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican

a) $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2x-2, & x<3\\ 2x, & x\geq 3\end{cases}}$ **en** $\mathbf{x=3}$ $\to\lim\limits_{x\to 3}f(x)\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-2)=4\\ \lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}2x=6\end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$, no existe $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ en x=3

b) $\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^2+3x-1, & x<1 \\ x+2, & x\geq 1 \end{cases}}$ **en** $\mathbf{x=1}$ $\rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+3x-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3 \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 3$ en x=1

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{\frac{3}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+2} = \frac{3^0-2}{3^0+2} = \frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}-4x}{4^{\frac{1}{x}}+3x-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}}+3x^2+1}{5^{\frac{3}{x}}-3+2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}}}{5^{\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{4^2}{5^3}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{8}{125}\right)^{-\infty} = \left(\frac{125}{8}\right)^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{4}{x}}-2x^2+3}{3^{\frac{1}{x}}-3-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

25. – Calcula el valor de los siguientes límites:

$$A)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3^2+7}-4}{2-3+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x^2+7})^2-4^2}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2+7-16}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{-(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \frac{3+3}{-(\sqrt{3^2+7}+4)} = \frac{9}{-8}$$

$$B)\ \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot 2^2+4} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{(2^x-4)(2^x-1)} \rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1}{2^x-1} = \frac{1}{3}$$

26.–Dada la función f(x)= $\begin{cases} \mathbf{3x-1\ \ si\ x<0} \\ \mathbf{0\ \ si\ x=0} \\ \mathbf{2x+5\ \ si\ x>0} \end{cases}$

Para x< 0 f es continua al ser una función polinómica

Para x> 0 f es continua al ser una función polinómica

En x=2

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(2x+5) = 9$

En x=0^-

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(3x-1) = -1$

En x=0^+

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x+5) = 5$

En x=-3

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3}(3x-1) = -1$

x=0

f(0)=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x+5) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(3x-1) = -1 \end{cases}$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el limite cuando x=0

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

A) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si\ x\leq 2 \\ x+2 & si\ x>2 \end{cases}}$

Para x<2 f es continua al ser una función polinómica
Para x>2 f es continua al ser una función polinómica
Estudiamos continuidad en x=2 y x=-2
En x=2
f(2)=$2^2-1=3$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4 \end{cases}$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

B) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x<2 \\ 2x-1 & si\ 2\leq x<4 \\ 5 & si\ x\geq 4 \end{cases}}$

Para x$<$ 2 f es continua al ser una función polinómica
Para 2$< x <$ 4 f es continua al ser una función polinómica
Para x$>$ 4 f es continua al ser una función constante.
Estudiamos continuidad en x=2 y en x=4

En x=2
f(2)=2·2-1=3

$$\lim_{x\to 2}(f)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-1)=3 \end{cases}$$

Para que exista, los límites laterales han de ser iguales, por lo tanto, al no ser iguales no existe el límite x→2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

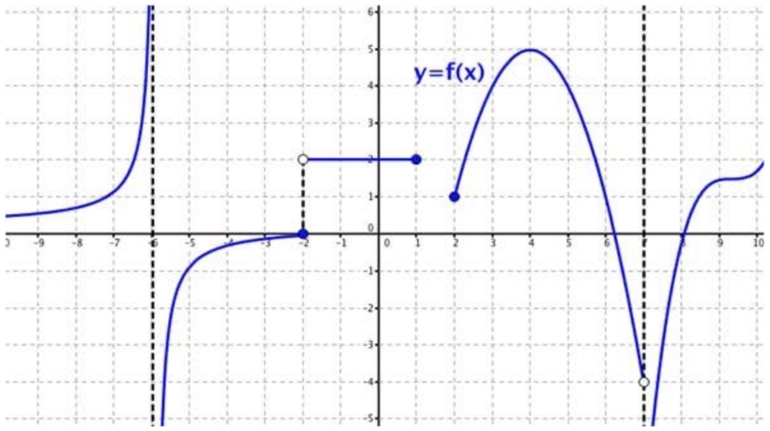
En x=4
f(4)=5

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(2x-1)=7 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 5=5 \end{cases}$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=4

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:



En x= -6 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
En x= -2 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
En x= 7 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

29. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si\ x<2 \\ x-2 & si\ 2\le x\le 4 \\ 5 & si\ x>4 \end{cases}$ **b)** $g(x)\begin{cases} \frac{5}{x-5} & si\ x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & si\ 0<x\le 3 \\ \frac{10}{x+2} & si\ x>3 \end{cases}$

a)

Continuidad en x=2

1º. $f(2)=2-2=0$

2º. $\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-4)=0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to x^+}(x-2)=0 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=0,\ \lim_{x\to 2} f(x)=0$

3º. Como $f(2)=0=\lim_{x\to 2} f(x),$ f es continua en $x=2$

Continuidad en x=4

1º. $f(4)=4-2=2$

2º. $\lim_{x\to 4} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(x-2)=2 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(5)=5 \end{cases}$

3º. Como $\lim_{x\to 4^-} f(x)\neq\lim_{x\to 4^+} f(x);\ \nexists \lim_{x\to 4} f(x),$ la función no es continua en $x=4$

Presenta una discontinuidad inevitable de la 1ª especie de salto finito.

b)

Continuidad en x=0

1º. $g(0)=\frac{5}{0-5}=-1$

2º. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{5}{x-5}\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-5}{\sqrt{x+1}}=-5\end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, no existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, , por lo que g(x)presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en $x=0$.

Continuidad en x=3

1º. $g(3)=\frac{3-5}{\sqrt{3+1}}=-1$

2º. $\lim\limits_{x\to 3}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x-5}{\sqrt{3+1}}=-1\\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{10}{x+2}=2\end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$, no existe $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$, por lo que g(x) no es continua y tiene discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en x=3.

30. Estudia la continuidad de las funciones.

a) $\boldsymbol{f(x)=\frac{x+1}{x^2+x}}$

Dominio, $\quad x^2+x\neq 0$

$x^2+x=0\to x(x+1)=0\begin{cases}x_1=0\\x_2=-1\end{cases}$

$\mathrm{Dom}=\mathbb{R}-\{0,-1\}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{0+1}{0^2+0}=\frac{1}{0}=\ \infty$, por lo que f no es continua en $x=0$.

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{-1+1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=$ Indeterminación (hay que factorizar)

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x}=\frac{1}{-1}=-1$

Como no existe f(-1) pero sí el límite, discontinuidad evitable

b) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}1 & si\quad x\in\mathbb{Z}\\ 0 & si\quad x\notin\mathbb{Z}\end{cases}}$

$\lim\limits_{x\to z} f(x)=1\qquad \lim\limits_{x\to x\notin z} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to z} f(x)=1\neq\lim\limits_{x\to x\notin z} f(x)=0$, f no es continua. Presenta una discontinuidad evitable de salto finito.

c) $\boldsymbol{f(x)=|x-3|}$

$f(x)=\begin{cases}x-3 & si\quad x>3\\ -x+3 & si\quad x\leq 3\end{cases}$

1º. Continuidad en x=3

$f(3) = 3 - 3 = 0$

2º. $\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(-x+3) = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(x-3) = 0 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

3º. Como $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0$, la función es continua en $x = 3$

d) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & si \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}}$

1º. $f(0) = 0$

2º. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = \infty \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$, la función presenta una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

e) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \leq 2 \\ x + 1 & si \quad x > 2 \end{cases}}$

1º. $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

2º. $\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+1) = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

3º. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$, existe $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, por lo que la función es continua en $x = 3$

31. Estudia la continuidad de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ en el intervalo (2, 5).

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, como 0 no pertenece al intervalo, $f(x)$ es continua en $(2, 5)$.

32. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \; si \; x \leq -1 \\ x^2 - 3 \; si \; x > -1 \end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1) = 0$

2.- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}(x+1) = 0$ $\quad\quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x^2 + 3x) = -2$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$, f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

b) $f(x)=\begin{cases} 3x-2\ si\ x<-1 \\ x^2+4x-1\ si\ -1\le x\le 2 \\ x+11\ si\ x>2 \end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1)=-4$

2.- $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(3x-2)=-5$ $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(x^2+4x-1)=-4$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=11$

2.- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+4x-1)=11$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+11)=13$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{4}{x-4}\ si\ x<0 \\ x-1\ si\ 0<x\le 3 \\ \frac{1}{x-3}\ si\ x>3 \end{cases}$

Continuidad en x=0

1.- f(0) no está definido.

2.- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$ $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{4}{x-4}=-1$ Por tanto $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$

No es continua, presenta una discontinuidad evitable.

Continuidad en x=3

1.- $f(3)=2$

2.- $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} x-1=2$ $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty$

3.-

Como uno de los límites laterales es infinito, f no es continua en x=3. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

d) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -2\ si\ x<-2 \\ -x^2+4\ si-2\le x\le 2 \\ 2\ si\ x>2 \end{cases}}$

Continuidad en x=-2

1.- $f(-2)=0$

2.- $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(-2)=-2$ $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(-x^2+4)=0$

Como $\lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=0$

2.- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x^2+4)=0$ $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 2=2$

Como $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

e) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & si\ x\neq 3\\ 6 & si\ x=3\end{cases}$

1.- $f(3)=6$

2.- $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0};\ \lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=6$

3.- Como f(3) = 6 = $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, f es continua en x=3.

f) $f(x)=\begin{cases}-5-\frac{|x|}{x} & si\ x\neq 0\\ 5 & si\ x=0\end{cases};\ f(x)=\begin{cases}5-\frac{-x}{x} & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 5-\frac{x}{x} & si\ x>0\end{cases}=\begin{cases}6 & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 4 & si\ x>0\end{cases}$

Continuidad en x=0

1.- $f(0)=5$

2.- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=6 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=4$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, f no es continua en x=0. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

g) $f(x)=|x^2-6x+5|$

Se trata del valor absoluto de una función polinómica, f es continua.

h) $f(x)=\begin{cases}|3-x| & si\ x\leq 5\\ \ln e^2 & si\ x>5\end{cases}$

Continuidad en x=5

1.- $f(5)=|3-5|=2$

2.- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}|3-x|=|3-5|=|-2|=2 \qquad \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\ln e^2=2\ln e=2(1)=2$

3.-

Como $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$, el límite existe. Como $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=f(5)$, por tanto, f es continua en x=5.

33.- Determina el valor de *a* para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

***f*(x)=**$\begin{cases}\frac{x+1}{x} & \text{si } x\leq -2\\ -x^2+a & \text{si } x>-2\end{cases}$

Para x < -2 f es continua por ser una función racional y no anularse el denominador

Para x > -2 f es continua por ser una función polinómica

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$ debe ser continua en x = -2, para ello $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{-2+1}{-2}=\frac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-x^2+a)=-4+a\end{cases}$$

$\frac{1}{2}=-4+a;\quad a=\frac{9}{2}$ Luego f es continua en todo $\mathbb{R}$ cuando $a=\frac{9}{2}$

34.- Determina el valor del parámetro *b* para que la función

$f(x)=\begin{cases}2x-3 & si\ x\leq 3\\ x+b & si\ x>3\end{cases}$ **sea continua en todo su dominio.**

f es continua en todo su dominio, salvo en x = 3, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas, hallamos b para que sea continua en 3

$$\lim_{x\to3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to3^-}(2x-3) = 3 \\ \lim_{x\to3^+}(x+b) = 3+b \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales, luego:

3 = 3 + *b*; *b* = 0

35.- Halla el valor de *k* para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & si\ x \neq -2 \\ k & si\ x = -2 \end{cases}$ sea continua en x=-2.

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x\to-2}(x-2) = -4$$

Como f(-2) = k, k = - 4.

36.- Calcula *m, n y p* para que la siguiente función sea continua en todo ℝ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & si\ x < -8 \\ -2m+3 & si -8 \leq x < -4 \\ x - \frac{1}{n} & si -4 \leq x < 2 \\ px & si\ 2 \leq x \end{cases}$$

f es continua en todo su dominio, salvo en x = -8, x = -4 y x = 2, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas.

Continuidad en x=-8

$$\lim_{x\to-8} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to-8^-} f(x) = \lim_{x\to-8^-} \frac{3}{x} = -\frac{3}{8} \\ \lim_{x\to-8^+} f(x) = \lim_{x\to-8^+}(-2m+3) = -2m+3 \end{cases}$$

$$-2m+3 = -\frac{3}{8}; \quad m = \frac{27}{16}$$

Continuidad en x=-4

$$\lim_{x\to-4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to-4^-} f(x) = \lim_{x\to-4^-}(-2m+3) = -2\cdot\frac{27}{16}+3 = -\frac{54}{16}+3 = -\frac{3}{8} \\ \lim_{x\to-4^+} f(x) = \lim_{x\to-4^+}\left(x-\frac{1}{n}\right) = -4-\frac{1}{n} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{8} = -4-\frac{1}{n}; \quad n = -\frac{8}{29}$$

Continuidad en x=2

$$\lim_{x\to2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to2^-}\left(x-\frac{1}{n}\right) = 2+\frac{29}{8} = \frac{45}{8} \\ \lim_{x\to2^+} px = 2p \end{cases}$$

$$2p = \frac{45}{8}; \quad p = \frac{45}{16}$$

Luego f es continua en todo ℝ cuando $m = \frac{27}{16}; \ n = -\frac{8}{29}; \quad p = \frac{45}{16}$

37. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo ℝ.

a) $f(x) = \begin{cases} kx-3 & si\ x < 4 \\ -x^2+10x-13 & si\ x \geq 4 \end{cases}$

f es continua en $x < 4$ por ser una función polinómica.

f es continua en x > 4 por ser una función polinómica.

Continuidad en x=4

1. $f(4)$= -$(4)^2 + 10(4) - 13 = 11$

2. $\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x); & \lim_{x\to 4^-}(kx-3) = 4k-3 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x)\,; & \lim_{x\to 4^+}(-x^2+10x-13) = (-(4)^2+10(4)-13) = 11 \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 4} f(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $4k-3=11$, $k=\frac{7}{2}$

3. f**(4) =**$\lim_{x\to 4} f(x) = 11$ **, luego** $f(x)$ **es continua en x=4 cuando k=**$\frac{7}{2}$**.**

b) $f(x) = \begin{cases} 1+|x| \; si \; x<0 \\ k \qquad si \; x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 \; si \; x>0 \end{cases}$

f **es continua en** $x<0$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en x**>0 **por ser una función polinómica.**
Continuidad en x=0

1. $f(0) = k$
2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x); \lim_{x\to 0^-}(1+|x|) = (1+|0|) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\,; \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x+1\right) = \left(\frac{3}{2}(0)+1\right) = 1 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\,;\ \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

3. Para que f sea continua $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, luego k =1.

38. El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & si \; 0 \le t < 2 \\ 3t+a & si \; 2 \le t \le 5 \\ -t^2+13t+b & si \; 5 < t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b, para que la función sea continua en t=2 y t=5.

f **es continua en** $0<t<2$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en** $2<t<5$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en** $5<t$ **por ser una función polinómica.**
Continuidad en t =2

1. $e(2) = 3(2)+a = 6+a$
2. $\lim_{t\to 2} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 2^-} e(t); & \lim_{t\to 2^-}(3t^2) = 12 \\ \lim_{t\to 2^+} e(t); & \lim_{t\to 2^+}(3t+a) = 6+a \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 2} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $6+a=12, a=6$

3. **Para que** e **sea continua** e**(2) =**$\lim_{t\to 2} e(t)$**= 12, luego** $e(a) = 6+a = 12; a=6$**, entonces** $e(t)$ **es continua cuando** **a** $=$ **6**

Continuidad en t =5

1. $e(5) = 3t+a = 3(5)+6 = 21$
2. $\lim_{t\to 5} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 5^-} e(t); \lim_{t\to 5^-}(3t+a) = 21 \\ \lim_{t\to 5^+} e(t)\,; \lim_{t\to 5^+}(-t^2+13t+b) = (-(5)^2+13(5)+b) = 40+b \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 5} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $40+b=21, b=-19$

4. **Para que** e **sea continua** e**(5) =**$\lim_{t\to 5} e(t)$**= 21, luego f es continua cuando b =-19.**

39. Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6€ por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 6x \;\; si\ 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{600 + ax^2} \;\; si\ x > 10 \end{cases}$$

a) **Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.**

C **es continua en** $0 < x < 10$ **por ser una función polinómica.**

$C\ es\ continua$ **en** $x > 10$ **por ser una función irracional con el radicando positivo, si a > 0.**

1. $C(10) = 6(10)$**= 60**
2. $\lim_{x\to 10} C(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 10^-} C(x); & \lim_{x\to 10^-}(6x) = 60 \\ \lim_{x\to 10^+} C(x); & \lim_{x\to 10^+}\left(\sqrt{600+ax^2}\right) = \sqrt{600+100a} \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 5} C(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego,

$\sqrt{600+100a} = 60;\ \left(\sqrt{600+100a}\right)^2 = (60)^2$ **;** $600 + 100a = 3600;\quad a = 30$

3. **Para que** C **sea continua** C**(10) =** $\lim_{x\to 10} C(x)$**= 60, luego C es continua cuando** $a = 30$**. Entonces el precio varía de forma continua al variar el número de unidades que se compran cuando a =30.**

b) **¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran ´´muchísimas´´ unidades?**

$\lim_{x\to\infty} C(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+ax^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+30a}\right) = \infty$

Cuando se compran muchísimas unidades el precio tiende a ∞.

40. Calcula

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-8}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} = \frac{0}{0}$**, indeterminación,**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^4+1}-1)\cdot(\sqrt{x^4+1}+1)}{x^4\cdot(\sqrt{x^4+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4+1-1}{x^4\cdot(\sqrt{x^4+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4\cdot(\sqrt{x^4+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x^4+1}+1)} = 1$$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \frac{0}{0}$**, indeterminación,**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)\cdot(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2\cdot(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x^2\cdot(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\cdot(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+1)} = 1$$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x} = \frac{0}{0}$**, indeterminación,**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x})(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}{9x\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(9+x)-(9-x)}{9x\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{9x\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{9\cdot(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\frac{2}{9\cdot 6}=\frac{1}{27}$$

41. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}3a+3^{\frac{2}{x}}\ si\ x<0\\ \frac{4}{2+2^x}\ si\ 0\le x\le 1\\ \frac{3}{b-2^{-x}}\ si\ x>1\end{cases}$$

a) Halla a y b para que la función sea continua.

f **es continua en** $x<0$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $0<x<1$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $x>1$ **por ser composición de funciones continuas.**
Continuidad en x=0

1. $f(0)=\frac{4}{2+2^{(0)}}=\frac{4}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x);\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right)=3a+3^{\frac{2}{0}}=3a+3^{\frac{2}{0^-}}=3a+0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x);\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{3}\end{cases}$

Para que $\exists \lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, **entonces** $3a=\frac{4}{3}$**, luego** $a=\frac{4}{9}$

3. **Como** $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{4}{3}$; f **es continua cuando** $a=\frac{4}{9}$

Continuidad en x=1

1. $f(a)=f(1)=\frac{4}{2+2^1}=1$
2. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{2+2^1}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right)=\frac{3}{b-2^{-1}}=\frac{3}{b-\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{2b-1}{2}}=\frac{6}{2b-1}\end{cases}$

Para que $\exists \lim\limits_{x\to 1}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, $luego\ 1=\frac{6}{2b-1}$, $b=\frac{7}{2}$

3. **Como** f**(1)=** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$; f **es continua, cuando b=**$\frac{7}{2}$

b) Calcula: $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\ y\ \lim\limits_{x\to 0,5}f(x)$.

$$\lim_{x\to -\infty}f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right)=3\left(\frac{4}{9}\right)+3^{\frac{-2}{\infty}}=\frac{12}{9}+1$$

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right)=\frac{3}{\frac{7}{2}-2^{-\infty}}=\frac{6}{7}$$

$$\lim_{x\to 0,5}f(x)=\lim_{x\to 0,5}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{2+2^{0,5}}=1,17$$

c) Si a=0 y b=$\frac{1}{8}$**, estudia las discontinuidades.**

$$f(x)=\begin{cases}3a+3^{\frac{2}{x}} \; si\ x<0\\ \frac{4}{2+2^x} \; si\ 0\le x\le 1\\ \frac{3}{b-2^{-x}} \; si\ x>1\end{cases} \quad f(x)=\begin{cases}3^{\frac{2}{x}} & si\ x<0\\ \frac{4}{2+2^x} & si\ 0\le x\le 1\\ \frac{24}{1-16^{-x}} & x>1\end{cases}$$

Continuidad en x=0

1. $f(0)=\frac{4}{2+2^0}=\frac{4}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3^{\frac{2}{x}}\right)=\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{3}\end{cases}$

   $\boldsymbol{P}or\ tanto\ f\ presenta\ una\ discontinuidad\ \boldsymbol{no\ evitable}\ de\ primera\ especie\ de\ salto\ infinito$

Continuidad en x=1

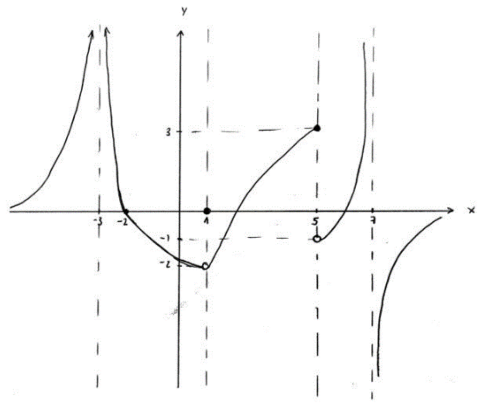
1. $f(1)=\frac{4}{2+2^1}=1$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{24}{1-16^{-x}}\right)=\frac{128}{5}\end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\ ;\ \nexists \lim\limits_{x\to 1}\boldsymbol{f(x)}$

Por tanto f presenta una discontinuidad **no evitable** de primera especie de salto **finito**

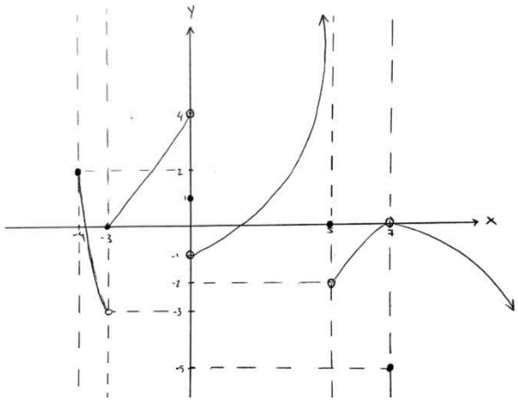
42.- Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

- **Continua en** $\mathbb{R}-\{-3,1,5,7\}$
- $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-2,\ f(1)=0$
- **Discontinuidad de salto finito en** $x=5$ **y de salto infinito en** $x=7$
- $f(-2)=0$



43.- Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ **tal que:**

- **Dom** $f(x)=\{x\in \mathbf{R}/x\geq 4\}$
- $f(-4)=2,\ f(0)=1,\ f(5)=0,\ f(7)=-5$
- $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-3 & \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=0 & \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=4 & \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1\\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=+\infty & \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=-2 & \lim\limits_{x\to 7} f(x)=0 & \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty\end{cases}$



44. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la función. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-3ax-6}{x-3}, & x < 3 \\ x^2-1, & x \geq 3 \end{cases}$

Determina los valores de a para que la función sea continua.

Continuidad en x=3

$\lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 3^+}(x^2-1) \Rightarrow 3^2-1 = 8$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-3ax-6}{x-3} \Rightarrow \frac{2(3)^2-3a(3)-6}{3-3} \Rightarrow \frac{18-9a-6}{3-3} \Rightarrow \frac{12-9a}{0}$

$\Rightarrow 12-9a = 0 \Rightarrow a = \frac{-12}{-9} \Rightarrow a = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{12-9\left(\frac{4}{3}\right)}{0} \Rightarrow \frac{12-12}{0} \Rightarrow \frac{0}{0}$ $INDETERMINACIÓN.$

En el caso de esta indeterminación $\frac{0}{0}$ podemos factorizar la función y así evitar la indeterminación:

$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3\left(\frac{4}{3}\right)x-6}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-4x-6}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x^2-2x-3)}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x^2+x-3x-3)}{x-3}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x(x+1)-(x+1))}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2(x+1)(x-3)}{x-3} \Rightarrow \lim_{x\to 3} 2(x+1) \Rightarrow \lim_{x\to 3}(2x+2) \Rightarrow 2\cdot 3+2 = 8$

Como los límites laterales $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$, entonces $\lim_{x\to 3} f(x) = 8$, por tanto la función es continua cuando $a = \frac{4}{3}$

45. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$, responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Para qué valores de a la función f(x) es continua en x=1?

x=1

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^-}(x+1) \Rightarrow 1+1 = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}(3-ax^2) \Rightarrow 3-a$

Para que exista el $\lim_{x\to 1} f(x)$ los límites laterales han de ser iguales, por tanto, $3-a = 2$, $a = 1$

(para que la función sea continua en x=1, el valor de a debe ser 1, $a = 1$)

b) Si f(x) es continua, cuando x→x_0 entonces no existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, ¿es cierto?

Todo lo contrario, pues condición para que f(x) sea continua es que exista $\lim_{x\to x_0} f(x)$

46. Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$\boldsymbol{T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} & si\ 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)} + 2 & si\ x > 30 \end{cases}}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

Para cualquier valor distinto de 30 la función es continua, es una función definida a trozos de funciones racionales cuyos denominadores no se anulan, donde están definidas.
Por lo que ahora vamos a calcular la continuidad en x=30.
¿T(x) continua en x=30?

1) $T(30) = \frac{300}{30+30} = 5$

2) $$\lim_{x\to 30} T(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 30^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 30^-} \left(\frac{300}{x+30}\right) = \frac{300}{30+30} = 5 \\ \lim\limits_{x\to 30^+} T(x) = \lim\limits_{x\to 30^+} \left(\frac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)} + 2\right) = \frac{1125}{(30-5)\cdot(30-15)} + 2 = 5 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x\to 30^-} T(x) = \lim\limits_{x\to 30^+} T(x)$; luego $\lim\limits_{x\to 30} T(x) = 5$

3) Como T(30) = 5 = $\lim\limits_{x\to 30} T(x)$, luego T es continua en x = 30

b) Por mucho que entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto? ¿Y en menos de 2?

$$\lim_{x\to\infty} T(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1125}{(x-5)\cdot(x-15)} + 2\right) = \frac{1125}{(\infty-5)\cdot(\infty-15)} + 2 = \frac{1125}{\infty} + 2 = 0 + 2 = 2$$

Por mucho que un deportista se entrene, lo mínimo sería 2 minutos.

47. El rendimiento de un estudiante en un examen de una hora de duración viene dado por la siguiente expresión ($\boldsymbol{f(x)}$ representa el rendimiento, en tanto por ciento, en el instante (x), medido en horas):

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 300x(1-x) & si\ 0 \le x \le 0,6 \\ 180(1-x) & si\ 0,6 < x < 1 \end{cases}}$$

a) ¿Es el rendimiento una función continua del tiempo?

1) $f(0{,}6) = 300 \cdot 0{,}6\,(1 - 0{,}6) = 180 \cdot 0{,}4 = 72$

2) $\lim_{x\to 0{,}6} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0{,}6^-} f(x) = \lim_{x\to 0{,}6^-} 300x(1-x) = 72 \\ \lim_{x\to 0{,}6^+} f(x) = \lim_{x\to 0{,}6^+} 180(1-x) = 72 \end{cases}$

El límite de f(x) en x = 0,6 existe porque el límite cuando x tiende a 0,6 por la izquierda es igual que cuando tiende por la derecha.

3) f(x) es continua porque $f(0{,}6) = \lim_{x\to 0{,}6} f(x) = 72$

El rendimiento sí que es una función continua del tiempo.

b) ¿En qué momentos aumenta y en qué momentos disminuye el rendimiento?¿Cuándo obtiene el mayor rendimiento y cuál es ese rendimiento?

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \begin{cases} (-600\mathrm{x}+300) & \text{si } 0 < \mathrm{x} < 0{,}6 \\ -180 & \text{si } 0{,}6 < \mathrm{x} < 1 \end{cases}$$

f(x) (0,6 , 1) es siempre decreciente

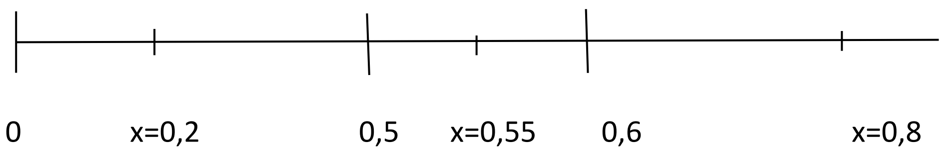
$$-600\mathrm{x}+300 = 0\,, \quad \mathrm{x} = 0{,}5$$

Cogemos valores entre los puntos que tenemos en x (0, 0,5, y 0,6) y los sustituimos en la función derivada para sacar su crecimiento y decrecimiento.

Entre x= 0 y x=0,5: x=0,2; -600·0,2+300= 180>0; de 0 a 0,5 la función es creciente

Entre x=0,5 y x=0,6: x=0,55; -600·0,55+300= -30<0; de 0,5 a 0,6 la función es decreciente

De x=0,6 a cualquier valor superior: x=0,8; -600·0,8+300= -180<0; desde 0,6 la función es decreciente.



f''(x)= -600, la función tiene un máximo en x = 0,5

El rendimiento es mayor y tiene un aumento desde las 0 horas hasta la media hora, desde ese momento el rendimiento va decreciendo. Además, tiene un rendimiento máximo de f(0,5) = 75%.

48. la energía que produce una placa solar viene descrita por la siguiente curva en función del tiempo transcurrido desde que amanece (f(x) es la energía producida a las x horas de haber amanecido):

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 10x - x^2, & si \quad 0 \le x \le 8 \\ \frac{1024}{x^2}, & si \quad 8 < x \le 12 \end{cases}}$$

a) Estudia la continuidad de f en su dominio.

b) ¿En qué momento del día la placa produce más energía? ¿Cuánto produce en ese momento?

a) f es continua en 0 < x < 8 por ser una función polinómica y también en 8 < x < 12 por ser una función racional y no anularse el denominador.

Estudiamos la continuidad en x = 8

i) f(8) = $10 \cdot 8 - 8^2 = 16$

ii) $\lim_{x\to 8} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} (10x - x^2) = 16 \\ \lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \frac{1024}{x^2} = 16 \end{cases}$

iii) $\lim_{x\to 8} f(x) = 16 = f(8)$ por tanto, f es continua también en x=8

b) Calculamos la derivada de f, $f'(x) = \begin{cases} 10 - 2x, & si \quad 0 < x < 8 \\ \frac{-2048}{x^3}, & si \quad 8 < x < 12 \end{cases}$ igualamos a 0 los trozos

$10 - 2x = 0$, $x = 5$; $f''(x) = -2$, $f''(5) = -2 < 0$, hay un máximo relativo en x=5

$\frac{-2048}{x^3}$ no se anula, por tanto no puede haber extremos en $8 < x < 12$

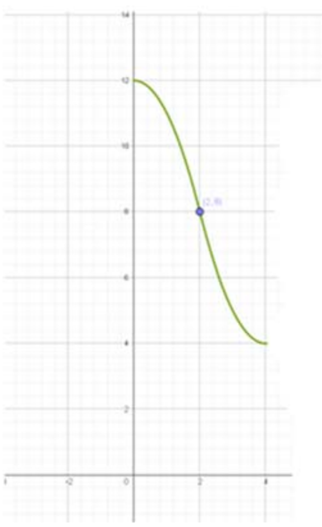
$f(5) = 10 \cdot 5 - 5^2 = 25$

La placa produce más energía a las 5 horas de haber amanecido con una producción de 25.

49. El tiempo que una persona tarda en realizar una tarea varía durante los cuatro primeros meses de contrato según su experiencia. Así, la función que relaciona el tiempo empleado en realizar la tarea con la experiencia de la persona es f (x), que representa el tiempo en horas, que tarda en realizar la tarea una persona que lleva contratada un tiempo x, medido en meses.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & si \ 0 < x \le 2 \\ (x-4)^2 + 4 & si \ 2 < x \le 4 \end{cases}}$$

a) Representa gráficamente la función f. ¿Es el tiempo necesario para realizar la tarea una función continua del tiempo de la experiencia?



1. $f(2) \to$ 12 - $2^2 = 8$

2. $\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (12 - x^2) = 8 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-4)^2 + 4 = 8 \end{cases}$

   Como los límites laterales son iguales, $\lim_{x\to 2} f(x) = 8$

3. $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$

Por tanto, f es continua

b) ¿En qué momento el tiempo necesario para realizar la tarea es mínimo?

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si\ \ 0 < x < 2 \\ 2x - 8 & si\ 2 < \ x < 4 \end{cases}$$

-2x = 0, x = 0 , no es válido.
2x – 8 = 0 , x = 4 , no es válido.
La derivada en los dos trozos es negativa, luego siempre es decreciente.
El tiempo mínimo para realizar se alcanza con 4 meses de experiencia.

c) ¿Cuánto tiempo le lleva finalizar la tarea ese instante?
f(4) = 4, tarda 4 horas.

d) ¿Consigue el empleado finalizar la tarea en menos de 3 horas en algún momento durante los cuatro primeros meses de contrato?
No, el mínimo es 4 horas y a los 4 meses.

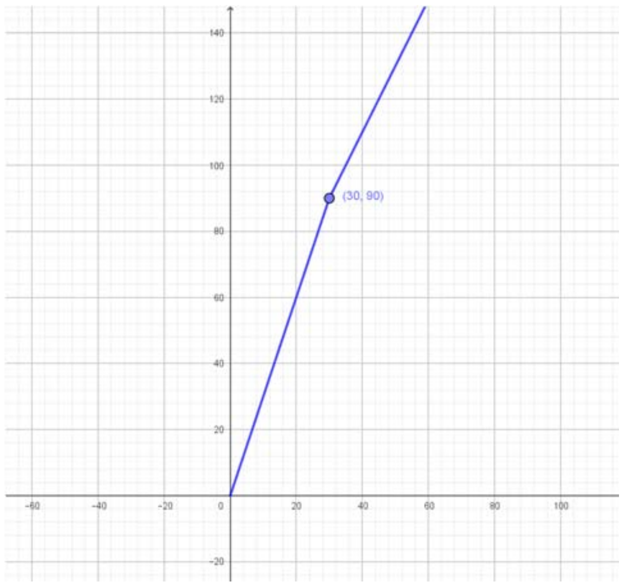
50. Un proveedor cobra el aceite según el volumen del pedido. Así, la función que relaciona el importe del pedido con el volumen del mismo es f(x) (en euros), de un pedido de x litros de aceite:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x, & si \quad 0 < x < 30 \\ 2x + 30, & si \quad 30 \le x \end{cases}}$$

a) ¿Es el importe una función continua del volumen del pedido?
b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y represéntala gráficamente.

a) En los 2 trozos es continua al ser funciones polinómicas, estudiamos en x = 30
   i. f(30) = 2 · 30 + 30 = 90
   ii. $\lim_{x\to 30} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 30^-} f(x) = \lim_{x\to 30^-} (3x) = 3 \cdot 30 = 90 \\ \lim_{x\to 30^+} f(x) = \lim_{x\to 30^+} (2x+30) = 2 \cdot 30 + 30 = 90 \end{cases}$
   iii. $\lim_{x\to 30} f(x) = 90 = f(30)$ por tanto, f es continua también en x=30

b) Calculamos la derivada de f, $f'(x) = \begin{cases} 3, & si \quad 0 < x < 30 \\ 2, & si \quad 30 < x \end{cases}$
La derivada es siempre positiva por tanto la función es siempre creciente.
Los 2 trozos son funciones lineales cuyas gráficas son una línea recta, dando 2 valores a x en cada trozo obtenemos su gráfica



51. La velocidad de un coche de carreras viene dada por la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}110+12x+6x^2 & si\ 1\le x\le 3\\ 350-\frac{450}{x} & si\ \ x>3\end{cases}}$$

, donde x representa el tiempo, en segundos, y f(x) la velocidad del coche, en Km/h.

a) ¿Es la velocidad una función continua del tiempo?

1. $f(3)=110+12\cdot 3+6\cdot 3^2=200$

2. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(110+12x+6x^2)=200\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(350-\frac{450}{x}\right)=200\end{cases}$

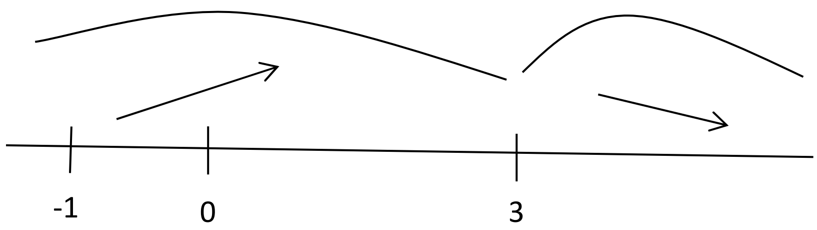
   Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=200$.

3. Como $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=200$, f(x) es una función continua del tiempo.

b) ¿Disminuye la velocidad del coche en algún instante? ¿Se podrían alcanzar los 350 Km/h de velocidad con este coche?

$$f(x)=\begin{cases}110+12x+6x^2\\ 350-\frac{450}{x}\end{cases} \qquad f'(x)=\begin{cases}12+12x & si\ 1<x<3\\ -\frac{450}{x^2} & si\ x>3\end{cases}$$

$$12+12x=0;\ x=\frac{-12}{12}=-1 \qquad -\frac{450}{x^2}=0;\ 450=0\to No\ tiene\ sol.$$



$f'(2) = 12 + 12 \cdot 2 = 36 > 0 \rightarrow Creciente$
$f'(10) = -\frac{450}{10^2} = -4{,}5 < 0 \rightarrow Decreciente$

$\lim_{x\to\infty}\left(350 - \frac{450}{x}\right) = 350 - \frac{450}{\infty} = 350 - 0 = 350$

Resultado. El coche disminuye su velocidad a partir de x=3 y no podría alcanzar los 350 km/h., pues sería en el infinito.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Los límites de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si\ x<0 \\ x^3-7x^2+3 & si\ x>0 \end{cases}$ a la izquierda de cero y a la derecha de cero valen:**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-3x+2)=2$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^3-7x^2+3)=3$$

c) 2 y 3

2. **El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)$ vale:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x-3^2}{3^{x+1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3^x}{3^{x+1}}-\frac{3^2}{3^{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{3^2}{3^{x+1}}\right)=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

b) $\frac{1}{3}$

3. **El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)$ vale:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x-5}{x-x^2+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{-x^2}\right)\to -3$$

a) -3

4. **El límite $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x}^2-\sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=0$$

a) 0

5. **El límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}$ vale:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)\to\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}^2-\sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}=$$
$$\frac{-1}{2\sqrt{4}}\to-\frac{1}{4}$$

d) $-\frac{1}{4}$

6. **Para que la función $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+a & si\ x<3 \\ 2x^2-1 & si\ x\geq 3 \end{cases}$ sea continua "a " debe valer:**

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^3-3x^2+a)=3^2-3(3)+a=0+a$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(2x^2-1)=2(3)^2-1=17$$

a debe valor 17 porque para ser continua tiene que existir el límite en 3 y para ello ser los dos límites iguales.

c) 17

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en x = 2.

a) $\lim_{x\to 2}\log(x-2)=\log(0)=-\infty$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2x}{1}=4$

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=0$

d) $\lim_{x\to 2}\sin(\cos(x-2))=0$

a) $\mathbf{f(x)=log}(x-2)$

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal en y = 2.

a) $\lim_{x\to\infty}\log(x-2)=\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4}{x^2-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2$

c) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-2}=\infty$

d) $\lim_{x\to\infty}\tan(\cos(x-2))=es\ divergente$

b) $\frac{2x^2-4}{x^2-2}$

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{27}+5}{e^x}=0$ Como la exponencial es de orden mayor que el polinomio el límite es 0.

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}=\frac{5}{\infty+\infty}=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=0$

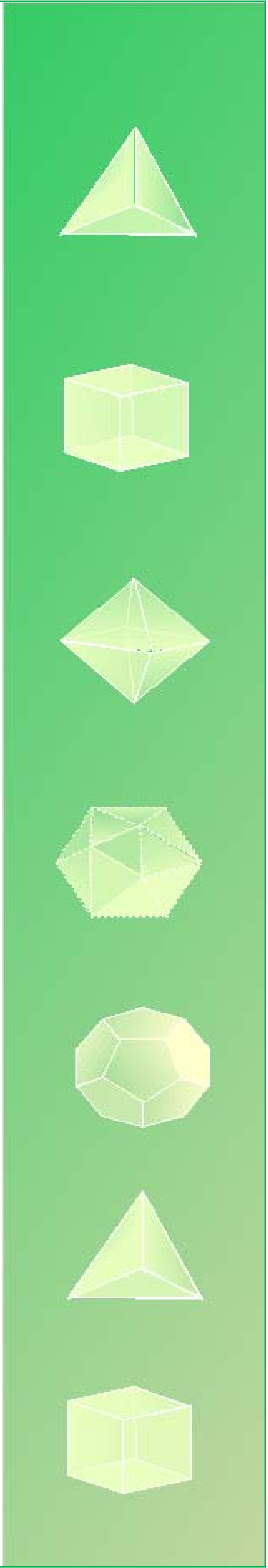
d) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{e^x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

d)

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=|x^2-9|$ son:

g(x) es el valor absoluto de una función polinómica y por tanto siempre continua

c) ninguno, es una función continua.



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 5: Derivadas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. CONCEPTO DE DERIVADA

1. C(x) = x² + 5x + 1 es la función de costes donde C(x) indica el coste de fabricación de x unidades. Calcula la tasa de variación media entre 0 y 500 unidades, y la tasa de variación media entre 200 y 800 unidades.

C(0) = 1; C(500) = 250 000 + 2 500 + 1 = 252 501; $TVM(0,500) = \frac{C(500)-C(0)}{500-0} = \frac{252\,501-1}{500-0} = 505$

C(200) = 40 000 + 1000 + 1 = 41 001; C(800) = 640 000 + 4 000 + 1 = 644 001

$TVM(200,800) = \frac{C(800)-C(200)}{800-200} = \frac{644\,001-41\,001}{500-0} = 1\,005$

2. La función de beneficios de una cierta empresa viene dada por: B(x) = x² + 3x + 2 , donde B(x) indica el beneficio que obtiene la empresa cuando fabrica x unidades. Calcula la tasa de variación media de los beneficios entre 10 y 50 unidades, y la tasa de variación media de los beneficios entre 100 y 400 unidades.

$TVM(10,50) = \frac{B(50)-B(10)}{50-10} = \frac{2652-132}{50-10} = 63{,}2$

$TVM(100,400) = \frac{B(400)-B(100)}{400-100} = \frac{17002-10302}{400-100} = 503{,}07$

3. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son C(x) = 2x +$\sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas también por trabajador contratado vienen dados por I(x) = 3x + x² . Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. (Observa que estas funciones no son continuas, no se pueden contratar 3.7 trabajadores, es una función escalonada, pero vamos a trabajar con ellas como si fueran continuas). Determina la tasa de variación media si se contratan entre 400 y 4 000 trabajadores.

B(x) = I(x) – C(x) = 3x + x² – (2x +$\sqrt{x}$) = x² – x – $\sqrt{x}$

$$TVM(400, 4\,000) = \frac{B(4\,000)-B(400)}{4\,000-400} = \frac{15995936.75-159580}{3\,600} \cong 4\,400$$

4. Calcula la derivada de la función f(x) = $|x|$ en x = 0 teniendo en cuenta la definición de dicha función:

$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x & si\ \ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}}$ **y comprueba que no es derivable.**

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

Como las derivadas laterales son distintas, la función no es derivable en x = 0.

5. Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

a) f(x) = x³ en x = 2 ⇒ f'(2) = 12. **b) g(x) = x + 2 en x = a ⇒ g'(a) = 1.**

a) $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$

b) $g'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{x+2-(a+2)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 1 = 1$

6. Estudia la derivabilidad en x = 0 de f(x) = │x³│.

$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} -x^3 \ si \ x < 0 \\ x^3 \ \ si \ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x^3|-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x^3|-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^3}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x^2) = 0$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en x = 0.

7. Dada la función f(x) = 6x² – x³. Halla un valor a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto (a, f(a)) sea paralela a la recta y = –15x.

La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de f, f'(x) = 12x – 3x², la pendiente de la recta y = -15x es -15, decir que sean para lelas es equivalente a tener la misma pendiente, luego buscamos a tal que

12a – 3a² = -15 , resolvemos y obtenemos a = 5 y a = -1,

8. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde m > 0 es una constante.

a) Para cada valor de m halla el valor de a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica f en el punto (a,f (a)) pase por el origen de coordenadas.

b) Halla el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de $f(x)$

a) $f(x) = x^2 + m\,;\, f(a) = a^2 + m;$ $f'(x) = 2x\,,\ f'(a) = 2a$

La ecuación de la recta tangente en (a, f(a)) es: $\mathrm{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$

De donde, como pasa por (0, 0), $0 = a^2 + \mathrm{m} + 2\mathrm{a}(0 - \mathrm{a})$, $a^2 + m - 2a^2 = 0$

$m - a^2 = 0,\ \ a = \pm\sqrt{m}\ \ , como\ a > 0,\ \ \boldsymbol{a = \sqrt{m}}$

b) Para que la recta sea tangente a la gráfica, $x = x^2 + m \quad x^2 - x + m = 0$ resolviendo $x = \frac{1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$, para que existan soluciones, 1- 4m > 0, dos soluciones, la recta y la gráfica son secantes;

1 – 4m = 0 , **m = ¼** , solución única, la recta es tangente.

9. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x+a} \to f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+a)^{n+1}}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(x+a)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x+a)^2} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{(-1)^1\ 1!}{(x+a)^{1+1}} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(x+a)^2\cdot 0 - (-1)\cdot(2(x+a)\cdot 1)}{((x+a)^2)^2} = \frac{2(x+a)}{(x+a)^4} = \frac{2}{(x+a)^3}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^{2}(x)=\frac{(-1)^{2}\,2!}{(x+a)^{2+1}}=\frac{2}{(x+a)^{3}}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x)=\frac{(x+a)^{3}\cdot 0-2\cdot(3(x+a)^{2}\cdot 1)}{((x+a)^{3})^{2}}=\frac{-6(x+a)^{2}}{(x+a)^{6}}=\frac{-6}{(x+a)^{4}}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^{3}(x)=\frac{(-1)^{3}\,3!}{(x+a)^{3+1}}=\frac{-6}{(x+a)^{4}}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1+x}{1-x}\rightarrow f^{n)}(x)=\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{(1-x)\cdot 1-(1+x)(-1)}{(1-x)^{2}}=\frac{(1-x)-(-1-x)}{(1-x)^{2}}=\frac{2}{(1-x)^{2}}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^{1}(x)=\frac{2\cdot 1!}{(1-x)^{1+1}}=\frac{2}{(1-x)^{2}}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(1-x)^{2}\cdot 0-2\cdot(1-x)\cdot(-1)\cdot 2}{((1-x)^{2})^{2}}=\frac{4(1-x)}{(1-x)^{4}}=\frac{4}{(1-x)^{3}}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^{2}(x)=\frac{2\cdot 2!}{(1-x)^{2+1}}=\frac{4}{(1-x)^{3}}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x)=\frac{(1-x)^{3}\cdot 0-2\cdot(1-x)^{2}\cdot(-1)\cdot 3}{((1-x)^{3})^{2}}=\frac{6(1-x)^{2}}{(1-x)^{6}}=\frac{6}{(1-x)^{4}}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^{3}(x)=\frac{2\cdot 3!}{(1-x)^{3+1}}=\frac{6}{(1-x)^{4}}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

2. CÁLCULO DE DERIVADAS

10. Si *f* y *g* son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que *f*(1) = 2, *f*(2) = 5, *g*(1) = 1, *g*(2) = 6, *f'*(1) = 3, *f'*(2) = 6, *f'*(6) = 4, *g'*(1) = 1, *g'*(2) = 3, *g'*(5) = 1. Determina el valor de:

a) $(f \text{ o } g)'(2) = f'\big(g(2)\big) \cdot g'(2) = f'(6) \cdot g'(2) = 4 \cdot 3 = 12$

b) $(g \text{ o } f)'(1) = g'\big(f(1)\big) \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 3 \cdot 3 = 9$

c) $(g \text{ o } f)'(2) = g'\big(f(2)\big) \cdot f'(2) = g'(5) \cdot f'(2) = 1 \cdot 6 = 6$

d) $(f \text{ o } f)'(1) = f'\big(f(1)\big) \cdot f'(1) = f'(2) \cdot f'(1) = 6 \cdot 3 = 18$

11. Sean *u*(x) y *v*(x) dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto *u*(x)·*v*(x) es derivable obteniendo la expresión de su derivada: D[*u*(x)·*v*(x)]=*u'*(x)·*v*(x)+*u*(x)·*v'*(x)

Si *u*(x) es derivable y *v*(x) es derivable, entonces *h*(x)=*u*(x)·*v*(x) también es derivable:

Escribimos la definición de derivada:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = \lim_{b\to x}\frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sumamos y restamos *f*(*x*)·*g*(*b*):

$$\lim_{b\to x}\frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(b) + f(x)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sacamos factor común *f*(*x*) y *g*(*b*):

$$\lim_{b\to x}\frac{\big(f(b)-f(x)\big)\cdot g(b) + f(x)\cdot\big(g(b)-g(x)\big)}{b-x} =$$

Aplicamos propiedades de los límites, el límite de una suma y el límite de un producto:

$$\lim_{b\to x}\frac{\big(f(b)-f(x)\big)}{b-x}\cdot\lim_{b\to x} g(b) + \lim_{b\to x} f(x)\cdot\lim_{b\to x}\frac{\big(g(b)-g(x)\big)}{b-x} =$$

Calculamos los límites:

f '(*x*) · *g*(*x*) + *f*(*x*) · *g'*(*x*), c.q.d.

Otra forma:

$$D[u(x)\cdot v(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))v(x+h) + u(x)(v(x+h)-v(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))}{h}\lim_{h\to 0} v(x+h) + \lim_{h\to 0} u(x)\lim_{h\to 0}\frac{(v(x+h)-v(x))}{h} = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

12. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{y = \log\left(x^5 - 7x^3\right)^{12}} = 12\log(x^5 - 7x^3)$

$$y' = 12\cdot\frac{5x^4 - 21x^2}{x^5 - 7x^3}\cdot\log(e)$$

b) $\mathbf{y = \log_2(3x^3 - 5x^2)^7} = 7\log_2(3x^3 - 5x^2)$

$$y' = 7\cdot\frac{9x^2-10x}{3x^3-5x^2}\cdot\log_2(e)$$

c) $\mathbf{y=\ln\sqrt{\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2}}} = \ln\left(\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(4x^5-8x^3)^5}{3x-2} = \frac{1}{2}(\ln(4x^5-8x^3)^5 - \ln(3x-2)) =$

$= \frac{1}{2}(5\ln(4x^5-8x^3) - \ln(3x-2))$

$$y' = \frac{1}{2}\left(5\cdot\frac{20x^4-24x^2}{4x^5-8x^3} - \frac{3}{3x-2}\right)$$

d) $\mathbf{y=\ln\sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4}} = \ln(2x^2+4x^7)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\cdot\ln(2x^2+4x^7)$

$$y' = \frac{4}{3}\cdot\frac{4x+28x^6}{2x^2+4x^7}$$

13. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=\sqrt[6]{5x^{11}}} = (5x^{11})^{\frac{1}{6}};$

$y' = \frac{1}{6}(5x^{11})^{-\frac{5}{6}}\cdot 55x^{10} = \frac{55x^{10}}{6(5x^{11})^{\frac{5}{6}}} = \frac{55x^{10}}{6\sqrt[6]{5^5\cdot x^{55}}} = \frac{55x^{10}}{6x^9\sqrt[6]{5^5x}} = \frac{55x}{6\sqrt[6]{5^5x}}$

b) $\boldsymbol{y=\frac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7}} = \frac{(3x^2)^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x}{3x^3+7};$

$y' = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot(3x^3+7) - 3^{\frac{1}{4}}x(9x^2)}{(3x^3+7)^2} = \frac{\sqrt[4]{3}(-6x^3+7)}{(3x^3+7)^2}$

c) $\boldsymbol{y=\frac{(3x^4-4)\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}} = \frac{(3x^4-4)x^{\frac{1}{2}}}{(7x^5)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3x^{\frac{9}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}} = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{9}{2}-\frac{5}{3}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}} = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{17}{6}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{-\frac{7}{6}};$

$y' = \frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}} - \frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\left(-\frac{7}{6}\right)x^{-\frac{13}{6}}$

d) $\boldsymbol{y=\frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}} = \frac{(x^7)^{\frac{1}{3}}}{2x+5} = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{2x+5};$

$y' = \frac{\left(\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}\right)\cdot(2x+5) - \left(x^{\frac{7}{3}}\right)\cdot 2}{(2x+5)^2} = \frac{\frac{14}{3}x^{\frac{7}{3}}+35x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{7}{3}}}{(2x+5)^2} = \frac{\frac{8}{3}\cdot\sqrt[3]{x^7}+35\cdot\sqrt[3]{x^4}}{(2x+5)^2}$

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{y=\sqrt{\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3}} = \left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot$

$\cdot\left[\frac{(6x^2-63x^8)(4x^5+6)-(2x^3-7x^9)(20x^4)}{(4x^5+6)^2}(3x^7-5x^5)^3 + \frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}3(3x^7-5x^5)^2(21x^6-25x^4)\right] =$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$=\frac{\frac{(6x^2-63x^8)(4x^5+6)-(2x^3-7x^9)(20x^4)}{(4x^5+6)^2}\cdot(3x^7-5x^5)^3+\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}3(3x^7-5x^5)^2(21x^6-25x^4)}{2\cdot\sqrt{\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3}}$$

b) $\boldsymbol{y=\sqrt{\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}}=\left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{[(3x^2+5)(4x^3-6x)+(x^3+5x)(12x^2-6)](2x^4-5x)-(x^3+5x)(4x^3-6x)(8x^3-5)}{(2x^4-5x)^2}$$

c) $\boldsymbol{y=\sqrt{\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}}=\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^{\frac{4}{2}}=\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^2$

$$y'=2\cdot\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\cdot\frac{(12x^3+10x)(4x^2-6x^5)-(3x^4+5x^2)(8x-30x^4)}{(4x^2-6x^5)^2}$$

d) $\mathbf{y}=\sqrt[3]{\mathbf{5}+\sqrt{\mathbf{5x}-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{x^5}}}}=\left(5+(5x-5x^{-5})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$y'=\frac{1}{3}\cdot\left(5+(5x-5x^{-5})^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot(5x-5x^{-5})^{-\frac{1}{2}}\cdot(5+25x^{-6})=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\frac{5}{x^5}}}}\right)^2\sqrt{\frac{x^5}{5x^6-5}}\left[\frac{5x^6+25}{x^6}\right]$$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{f(x)=\log\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}}=log(1+e^{3x})-log(1-e^{3x})$

$f'(x)=\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}loge-\frac{-3e^{3x}}{1-e^{3x}}loge=\frac{6e^{3x}}{1-e^{6x}}\mathrm{loge}$

b) $\mathbf{f(x)=(2-3x)\log(2-3x)}$

$f'(x)=2\cdot log(2-3x)+(2-3x)\cdot\frac{-3}{2-3x}loge$

c) $\mathbf{f(x)=\log\frac{\sqrt{4-9senx}}{3+2cosx}}=\frac{1}{2}\mathrm{log}(4-9\mathrm{senx})-\mathrm{log}(3+2\mathrm{cosx})$

$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{-9cosx}{4-9senx}-\frac{-2senx}{3+2cosx}$

d) $\mathbf{f(x)=\frac{senx-xcosx}{cosx+xsenx}}$

$$f'(x)=\frac{(\cos(x)-1\cos(x)+x(\mathrm{sen}(x)))(\cos(x)+x\,\mathrm{sen}(x))-(\mathrm{sen}(x)-x\cos(x))(-\mathrm{sen}(x)+\mathrm{sen}(x)+x\cos(x))}{(\cos(x)+x\,\mathrm{sen}(x))^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2}{(\cos(x)+x\,\mathrm{sen}(x))^2}$$

16. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=(3x)^{x^5-9x^3}}$; $\ln(f(x))=\ln\left(3x^{(x^5-9x^3)}\right)\to\ln(f(x))=(x^5-9x^3)\cdot\ln(3x)$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=(5x^4-27x^2)\cdot\ln(3x)+(x^5-9x^3)\cdot\frac{3}{3x}$$

$$f'(x)=(3x)^{x^5-9x^3}\left[(5x^4-27x^2)\cdot\ln(3x)+(x^5-9x^3)\cdot\frac{3}{3x}\right]$$

b) $\boldsymbol{y=\left((2x+7)^{5x^3-6x^2}\right)}\to\ln(f(x))=\ln\left(2x+7^{(5x^3-6x^2)}\right)\to$

$\ln(f(x))=(5x^3-6x^2)\cdot\ln(2x+7)\to\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=(15x^2-12x)\cdot\ln(2x+7)+(5x^3-6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7}$

$\to f'(x)=(3x)^{x^5-9x^3}\left[(15x^2-12x)\cdot\ln(2x+7)+(5x^3-6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7}\right]$

c) $\boldsymbol{y=(x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}}\to\ln(f(x))=ln(x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}=(4x^5-8x^3)^5\cdot\ln(x+e)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=5\cdot(4x^5-8x^3)^4\cdot(20x^4-24x^2)\cdot\ln(x+e)+(4x^5-8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}$$

$$f'(x)=(x+e)^{(4x^5-8x^3)^5}\cdot\left[5\cdot(4x^5-8x^3)^4\cdot(20x^4-24x^2)\cdot\ln(x+e)+(4x^5-8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}\right]$$

d) $\boldsymbol{f(x)=(x^x)^x}=x^{x^2}\to\ln(f(x))=lnx^{x^2}=x^2\cdot lnx\to\frac{f'(x)}{f(x)}=(2x)\cdot\ln(x)+(x)^2\cdot\frac{1}{x}$

$$f'(x)=(x^x)^x\cdot\left[(2x)\cdot\ln(x)+(x^2)\cdot\frac{1}{x}\right]$$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=\log_2\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}}=\log_2\left(\frac{4+senx}{4-senx}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2\frac{4+senx}{4-senx}=\frac{1}{2}(\log_2(4+\mathrm{sen}x)-\log_2(4-senx))$

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{cosx}{4+senx}-\frac{-cosx}{4-senx}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{cosx(4-senx)+cosx(4+senx)}{(4+senx)(4-senx)}\right)=\frac{1}{2}\frac{8cosx}{16-sen^2x}=\frac{4cosx}{16-sen^2x}$$

b) $\boldsymbol{y=e^{\sqrt{6x+8}}}$; $\quad y'=e^{\sqrt{6x+8}}\cdot\frac{6}{2\sqrt{6x+8}}=\frac{3e^{\sqrt{6x+8}}}{\sqrt{6x+8}}$

c) $\boldsymbol{y=sen\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)}=sen\left(\ln(7x)-\frac{1}{2}\ln(1-2x^2)\right)$;

$$y'=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{7}{7x}-\frac{1}{2}\frac{-4x}{1-2x^2}\right)=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2x}{1-2x^2}\right)=$$

$$=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1-2x^2+2x^2}{x(1-2x^2)}\right)=cos\left(ln\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{x(1-2x^2)}\right)$$

d) $\boldsymbol{y=ln\frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}}=\ln(5x)-\frac{1}{2}\ln(16-x^2)$

$$y' = \frac{5}{5x} - \frac{1}{2}\frac{-2x}{16-x^2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{16-x^2} = \frac{16-x^2+x^2}{16-x^2} = \frac{16}{16-x^2}$$

3. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

18. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 + 27x$. ¿Cómo es en x = 0? ¿Y en x = 3? ¿Y en x = -3?

$f(x) = x^3 + 27x$ $f'(x) = 3x^2 + 27$; $3x^2 + 27 = 0$; $x = 3, x = -3$ $f''(x) = 6x$;
$f''(-3) = -18 < 0$ Máximo. $f''(3) = 18 > 0$ Mínimo.
Creciente en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ Decreciente en $(-3, 3)$
En x = 0 creciente. En x = -3 hay un máx. relativo. En x = 3 hay un min relativo.

19. Una empresa determina que los costes de producción por trabajador contratado son C(x) = x +$\sqrt{x}$, y que los ingresos por ventas, también por trabajador contratado, vienen dados por I(x) = 3x + x². Por tanto, los beneficios B(x) por trabajador contratado son ingresos menos costes. La función beneficios B(x) respecto del número de trabajadores contratados, ¿es creciente o decreciente?

B(x) = I(x) - C(x) = 3x + x² – (x +$\sqrt{x}$) = 2x + x² – $\sqrt{x}$

B'(x) = 2 + 2x – 1/2$\sqrt{x}$; 2 + 2x – 1/2$\sqrt{x}$ = 0 ; 2 + 2x = 1/2$\sqrt{x}$; $(2+2x)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2$

$4 + 8x + 4x^2 = \frac{1}{4x} \to 16x + 32x^2 + 16x^3 = 1 \to 16x^3 + 32x^2 + 16x - 1 = 0 \to x \approx 0{,}06$

Intervalos (0, 0,06) y (0,06, ∞) pues x no puede tomar valores negativos,
Para x < 0,06 B' es negativa, luego B es decreciente
Para x > 0,06 B' es positiva, luego B es creciente.

20. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:
a) y = x⁴ – 1; b) y = 3x³ + 9; c) y = 4x⁴ – 2x² + 5; d) y = 9x³ – 3x².

a) $f(x) = x^4 - 1$
$f'(x) = 4x^3$; $4x^3 = 0$; x=0 ; $f''(x) = 12x^2$; $f''(0) = 12 \cdot 0 = 0$ $f'''(x) = 24x$; $f''''(x) = 24$; $f''''(0) = 24 > 0$ Mínimo.

b) $f(x) = 3x^3 + 9$
$f'(x) = 9x^2$; $9x^2 = 0$; x=0 ; $f''(x) = 18x$; $f''(0) = 0$; No tiene ni máximos ni mínimos.

c) $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 5$
$f'(x) = 16x^3 - 4x$; $16x^3 - 4x$ =0 ; $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ $f''(x) = 48x^2 - 4$;
$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ Mínimo. $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ Mínimo. $f''(0) = -4 < 0$ Máximo.

d) $f(x) = 9x^3 - 3x^2$
$f'(x) = 27x^2 - 6x$; $x = \frac{2}{9}, x = 0$
$f''(x) = 54x - 6$;
$f''\left(\frac{2}{9}\right) = 6 > 0$ Mínimo.
$f''(0) = -6 < 0$ Máximo

21. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

Suma: x + y ; x·y = k ; $y = \frac{k}{x}$; $f(x) = x + \frac{k}{x}$;

$f'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$; $1 - \frac{k}{x^2} = 0$; $x^2 = k$; $x = \sqrt{k}$, pues ha de ser positivo.

$f''(x) = \frac{2k}{x^3}$ $f''(\sqrt{k}) = \frac{2k}{(\sqrt{k})^3} > 0$ luego es un mínimo.

$y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$, Por tanto, han de ser iguales.

22. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [-5,5] y en el intervalo [1,4].

f(x) es continua y derivable en todos los puntos por ser una función polinómica.

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72; f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm i\sqrt{47}}{2}$, no real.

Luego f(x) no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Sabiendo que f(x) es creciente en todo su dominio:

Cuando f(x) definida en el intervalo [-5,5]

Mín. absoluto: $f(-5) = 2(-5)^3 - 3(-5)^2 + 72(-5) = -685 \rightarrow$ Punto (-5, -685)

Máx. absoluto: $f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 535 \rightarrow$ Punto (5, 535)

Cuando f(x) definida en el intervalo [1,4]

Mín. absoluto: $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 72(1) = 71 \rightarrow$ Punto (1, 71)

Máx. absoluto: $f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 + 72(4) = 368 \rightarrow$ Punto (4, 368)

23. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

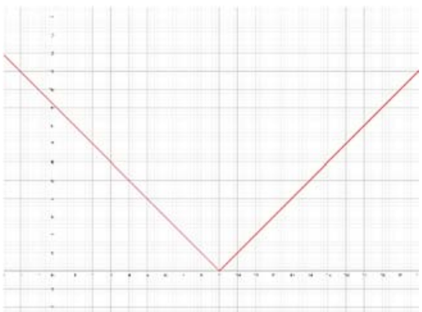
a) $y = |x - 9|$ **b)** $y = |x + 2| + |x - 3|$

a) $\mathbf{y = |x - 9|}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 9 & si \quad x < 9 \\ x - 9 & si \quad x > 9 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos por ser una función polinómica, sin embargo, no es derivable en $x = 9$, puesto que sus derivadas laterales son distintas $f'_-(9) \neq f'_+(9); -1 \neq 1$

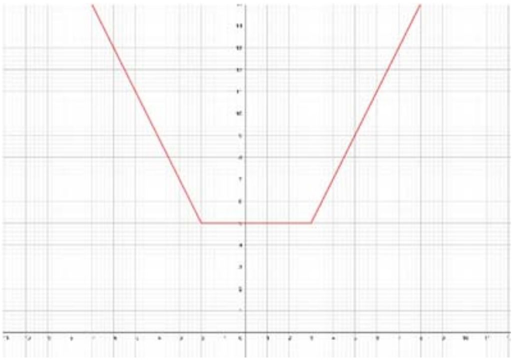
No obstante, en dicho punto tiene un mínimo a la vez relativo y absoluto. Sus coordenadas son P (9, 0)



b) $\mathbf{y = |x + 2| + |x - 3|}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & si \quad x < -2 \\ 5 & si \quad -2 \le x \le 3 \\ 2x - 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos por ser una función polinómica. Al ser una suma de funciones en valor absoluto, no es derivable ni en -2 ni en 3, no tiene máximos ni mínimos.



24. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x+2|$, en el intervalo [-4,4].

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} -x-2 & si \ \ x < -2 \\ x+2 & si \ \ x > -2 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos al ser una función polinómica, pero no es derivable en $\mathrm{x} = -2$, puesto que las derivadas laterales no son iguales $\mathrm{f}'_{-}(-2) \neq \mathrm{f}'_{+}(-2)$; $-1 \neq 1$

En dicho punto, cuenta con un mínimo que es a la vez relativo y absoluto cuyas coordenadas son P (-2, 0).

Teniendo en cuenta que f(x) es decreciente en $(-\infty, -2)$ y creciente en $(-2, \infty)$:

Para f(x) definida en el intervalo $[-4, 4]$:

Máx. Absoluto:

$\mathrm{f}(4) = |4+2| = 6 \rightarrow$ B (4, 6)

25. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x}-1 & si \ \ x \le 0 \\ x^2+x & si \ \ x > 0 \end{cases}$. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto x=0? b) ¿Es derivable en el punto x=0? c) ¿Alcanza algún extremo?

a) Continuidad en $\mathrm{x} = 0$

$\mathrm{f}(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^{-x}-1) = e^0 - 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +} (x^2+x) = 0^2 + 0 = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^-} \mathrm{f(x)} = \lim\limits_{\mathrm{x}\to 0^+} \mathrm{f(x)}$; luego $\exists \lim\limits_{\mathrm{x}\to 0} \mathrm{f(x)}$. Como $\mathrm{f}(0) = \lim\limits_{\mathrm{x}\to \mathrm{o}}$, f(x) es continua en $\mathrm{x} = 0$

b) Derivabilidad en $\mathrm{x} = 0$

f(x) es continua en todo su dominio. Calculamos $\mathrm{f}'(\mathrm{x})$:

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \begin{cases} -e^{-x} & si \ \ x < 0 \\ 2x+1 & si \ \ x > 0 \end{cases}$$

Para que f(x) sea derivable en $\mathrm{x} = 0$, $\mathrm{f}'_{-}(0) = f'_{+}(0)$

$$\begin{cases} \mathrm{f}'_{-}(0) = -e^0 = -1 \\ \mathrm{f}'_{+}(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

Como $-1 \neq 1$; $\mathrm{f}'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$ y, por lo tanto, f(x) no es derivable en $\mathrm{x} = 0$

c) Extremos

Sí, alcanza un mínimo en $\mathrm{x} = 0$

26. Sabiendo que una función f(x) tiene como derivada $f'(x) = (x-4)^2(x^2-8x+7)$,

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b) Halla los máximos y mínimos relativos de f

c) ¿Es el punto x = 4 un punto de inflexión de f? Justifica razonadamente la respuesta.

a) $(x-4)^2(x^2-8x+7) = 0$; $x = 4$, solución doble; $x = 1$, $x = 7$,

Obtenemos los intervalos $(-\infty, 1)$ $(1, 4)$ $(4, 7)$ $(7, \infty)$ estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos

$(-\infty, 1)$, $f'(0) > 0$ f es creciente

$(1, 4)$, $f'(3) < 0$ f es decreciente

$(4, 7)$, $f'(5) < 0$ f es decreciente

$(7, \infty)$, $f'(10) > 0$ f es creciente

b) En x = 1 hay máximo relativo

En x = 7 hay un mínimo relativo

c) $f'(4) = 0$, $f''(x) = 2(x-4)(x^2-8x+7) + (x-4)^2(2x-8)$; $f''(4) = 0$. $f''(x) = (x-4)(4x^2-32x+46)$

$f'''(x) = 1\cdot(4x^2-32x+46) + (x-4)(8x-32)$, $f'''(4) \neq 0$, en x = 4 hay un punto de inflexión.

27. Determina los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 11$; b) $y = x^3 - 7x + 8$; c) $y = x^5 + 2$; d) $y = x^4 - 3$.

a) $y' = 3x^2 - 6x + 6$

La derivada primera no se anula en ningún punto, luego no tiene máximos ni mínimos relativos.

$y'' = 6x - 6$, $6x - 6 = 0$, $x = 1$. $y''' = 6$ $y'''(1) \neq 0$, hay punto de inflexión en (1, 15)

b) $y' = 3x^2 - 7$, $3x^2 - 7 = 0$, $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

Obtenemos los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \infty\right)$ estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos

$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, $y'(-10) > 0$ f es creciente

$\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$, $y'(0) < 0$ f es decreciente

$\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, \infty\right)$, $y'(10) > 0$ f es creciente

En $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ hay un máximo relativo,

En $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ hay un mínimo relativo

$y'' = 6x$, $6x = 0$, $x = 0$; $y''' = 6 \neq 0$, en x = 0 hay un punto de inflexión.

c) $y' = 5x^4$, $5x^4 = 0$, $x = 0$, como $5x^4$ es siempre positiva, la función es creciente siempre, no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{iv} = 120x$, $y^{v} = 120 \neq 0$, en x = 0 hay un punto de inflexión.

d) **y' = $4x^3$** , $4x^3 = 0$, x = 0

Obtenemos los intervalos $(-\infty, 0)$ $(0, \infty)$ estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos

$(-\infty, 0)$ y'(-10) < 0 f es decreciente

$(0, \infty)$ y'(10) > 0 f es creciente

En x = 0 hay un mínimo relativo.

No hay puntos de inflexión, pues y'' se anula en x = 0 y también y'''.

28. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) f(x) = $3x^3 - 2x^2 + 5$, **b) f(x) = cotg x,** **c)** $f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$,

d) $f(x) = \sqrt{x+5}$ **,** **e)** $f(x) = 2^{\frac{x+2}{x-3}}$ **,** **f) f(x) = log(x+1).**

a) f(x) = $3x^3 - 2x^2 + 5$, es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathscr{R}$

b) f(x) = cotgx = $\frac{cosx}{senx}$ no existe donde se anula el denominador, x = kπ, Dom = $\mathscr{R}$ - {x = kπ }

c) $x^2 - 4 = 0$, $x = -2$, $x = 2$ Dom = $\mathscr{R}$ - {-2, 2 }

d) $x + 5 \geq 0$, $x \geq -5$, Dom = {x ∈ $\mathscr{R}$, $x \geq -5$} = [-5, ∞)

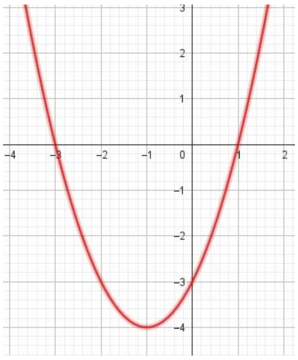
e) $x - 3 = 0$, $x = 3$, Dom = $\mathscr{R}$ - {3 }

f) $x + 1 > 0$, $x > -1$, Dom = {x ∈ $\mathscr{R}$, $x > -1$} = (-1, ∞)

29. Determina el conjunto imagen (o recorrido) de las siguientes funciones:

a) f(x) = $x^2 + 2x - 3$, **b) f(x) = $3x^3 - 2x^2 + 5$,** **c) f(x) =** $\sqrt{x-1}$

a) f(x) = $x^2 + 2x - 3$



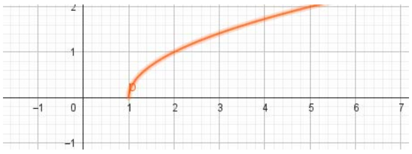
Img = [-4, ∞)

b) f(x) = $3x^3 - 2x^2 + 5$

Img = $\mathscr{R}$

c) f(x) = $\sqrt{x-1}$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Img = [0, ∞)

30. Analiza la simetría de las siguientes funciones:

a) f(x) = x² **b) f(x) = x³** **c) f(x) = x² – 6x + 5**

a) $f(x) = x^2$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ como $f(x) = f(-x)$ f es par

b) $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$, $-f(-x) = -(-x^3) = x^3$ como $f(x) = -f(-x)$ f es impar

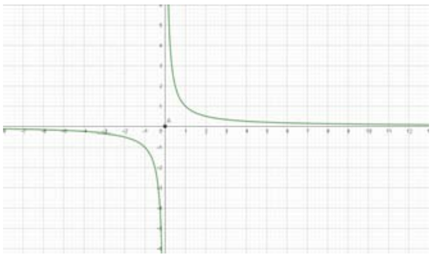
c) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $f(-x) = (-x)^2 - 6(-x) + 5 = x^2 + 6x + 5$, $-f(-x) = -(x^2 + 6x + 5) = -x^2 - 6x - 5$

como $f(x) \neq f(-x)$ y $f(x) \neq -f(-x)$ f no es par ni impar

31. Estudia las asíntotas y el comportamiento en el infinito de las siguientes funciones.

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}}$ Asíntota Vertical: Hacemos el denominador igual a 0, **x = 0** ;

Asíntota Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, **y = 0**



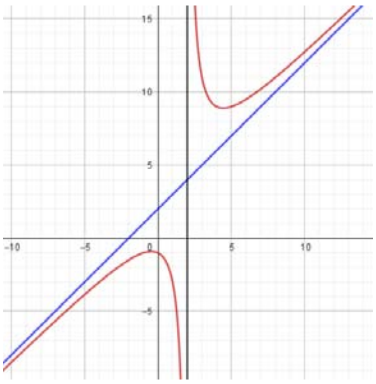
b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+2}{x-2}}$; Asíntota Vertical: Hacemos el denominador igual a 0, x – 2 = 0 , **x = 2.**

Asíntota Horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-2} = \infty$, no tiene.

Asíntota oblicua: y = mx + n , $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x^2-2} = 1$, $m = 1$,

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{x-2} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{x-2} = 2 , \quad n = 2$$

y = x + 2

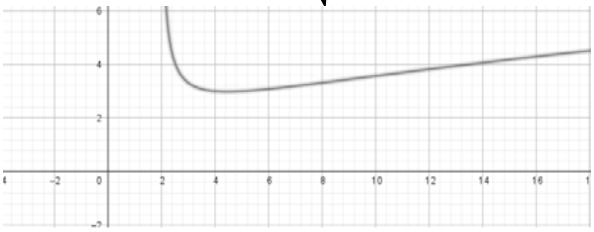


c) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x-2}}}$ El dominio es $(2, \infty)$

Asíntota Vertical: Hacemos el denominador igual a 0, x – 2 = 0 , **x = 2.**

Asíntota Horizontal: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2}{x-2}} = \infty$, no tiene.

Asíntota oblicua: y = mx + n , $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x-2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2}{x^3-2x^2}} = 0$, no tiene.

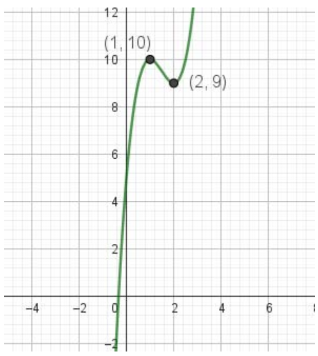


32. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos y la concavidad de:

a) $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5}$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$, $6x^2 - 18x + 12 = 0$; $x = 1$, $x = 2$
obtenemos los intervalos: $(-\infty, 1)$ (1, 2) $(2, \infty)$
estudiamos el signo de la primera derivada en cada uno de los intervalos:
$(-\infty, 1)$, f'(-10) > 0 f es creciente
(1, 2) , f'(1,5) < 0 f es decreciente
$(2, \infty)$, f'(10) > 0 f es creciente
En x = 1 hay un máximo relativo, (1, 10)
En x = 2 hay un mínimo relativo, (2, 9)

$f''(x) = 12x - 18$, $12x - 18 = 0$; $x = 1{,}5$ obtenemos los intervalos: (-∞, 1,5) (1,5, ∞)
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos:
(-∞, 1,5) , f''(0) < 0 Cóncava
(1,5, ∞) , f''(10) > 0 Convexa

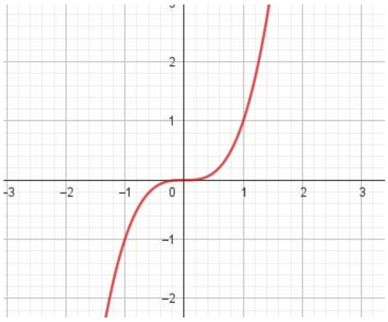


b) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$

$f'(x) = 3x^2$, como siempre es positiva, f es siempre creciente.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$f''(x) = 6x$, $6x = 0$; $x =$ obtenemos los intervalos: (-∞, 0) (0, ∞)
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos:
(-∞, 0) , f''(-10) < 0 Cóncava
(0, ∞) , f''(10) > 0 Convexa



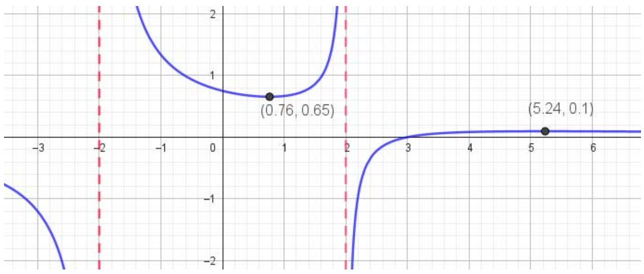
c) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x-3}{x^2-4}}$

El dominio es todos los números reales menos el – 2 y el 2.

d) $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-4)-2x\cdot(x-3)}{(x^2-4)^2} = \frac{(-x^2+6x-4)}{(x^2-4)^2}$, $-x^2+6x-4=0$, $x = 0{,}76$, $x = 5{,}24$
estudiamos el signo de la primera derivada en cada uno de los intervalos:
$(-\infty, -2)$, f'(-10) < 0 f es decreciente
(-2, 0,76) , f'(0) < 0 f es decreciente
(0,76, 2) , f'(1) > 0 f es creciente
(2, 5,24) , f'(5) > 0 f es creciente
(5,24, ∞) , f'(10) < 0 f es decreciente
En x = 0,76 hay un mínimo relativo,
En x = 5,24 hay un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{(-2x+6)\cdot(x^2-4)^2-(-x^2+6x-4)\cdot 2x\cdot(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{(-2x+6)\cdot(x^2-4)-(-x^2+6x-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^3} \neq 0$$

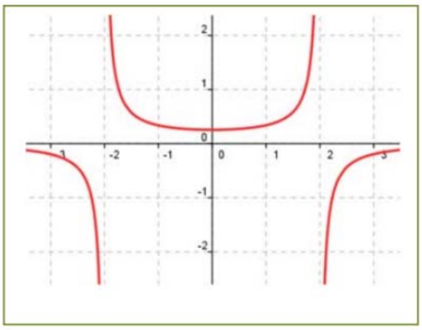
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos: (-∞, -2) (-2, 2) (2, ∞)
(-∞, -2) , f''(-10) < 0 Cóncava
(-2, 2) , f''(0) > 0 Convexa
(2, ∞) , f''(10) > 0 Cóncava



33. Se considera la función f(x) = $\boldsymbol{\frac{1}{4-x^2}}$
a) Indicar el dominio de definición de la función f y sus asíntotas
b) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.
c) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absoluto en el intervalo [–1, 1].

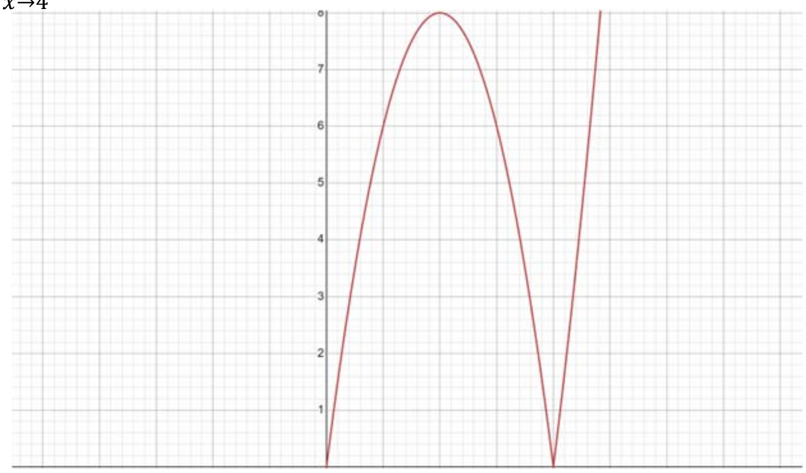
a) $4-x^2=0$, $x=-2$, $x=2$; Dom f = R – {2, –2};
Asíntotas verticales: x = 2, x = –2;
Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4-x^2}=0$, y = 0;
b) $f'(x)=\frac{2x}{(4-x^2)^2}$; $\frac{2x}{(4-x^2)^2}=0$; $2x=0$, $x=0$
Estudiamos el signo de la primera derivada en cada uno de los intervalos: (-∞, -2) (-2, 0) (0, 2) (2, ∞)
(-∞, -2) f'(-10) < 0 decreciente
(-2, 0) f'(-1) < 0 decreciente
(0, 2) f'(1) > 0 creciente
(2, ∞) f'(10) > 0 creciente
Mínimo relativo: (0, 1/4);
$$f''(x)=\frac{2\cdot(4-x^2)^2-2x\cdot2\cdot(-2x)\cdot(4-x^2)}{(4-x^2)^4}=\frac{2\cdot(4-x^2)+2x\cdot2\cdot2x\cdot}{(4-x^2)^3}=\frac{(8+6x^2)}{(4-x^2)^3}\neq 0$$
Estudiamos el signo de la segunda derivada en cada uno de los intervalos: (-∞, -2) (-2, 2) (2, ∞)
(-∞, -2) f''(-10) > 0 Cóncava
(-2, 2) f''(0) < 0 Convexa
(2, ∞) f''(10) > 0 Cóncava
Cóncava: (–∞,–2) ∪ (2, +∞); Convexa: (–2, 2); No tiene puntos de inflexión;

c) Mínimo absoluto: (0, 1/4) que en ese intervalo coincide con el mínimo relativo;
Máximos absolutos: (–1, 1/3), (1, 1/3), se alcanzan en los extremos del intervalo.



34. Sea la función $f(x)=2x|4-x|$ Estudia su continuidad y derivabilidad.
$$2x|4-x|=\begin{cases}-2x(4-x), & x>4\\ 2x(4-x), & x\leq 4\end{cases}$$
$$2x|4-x|=\begin{cases}2x^2-8x, & x>4\\ 8x-2x^2, & x\leq 4\end{cases}$$
Estudiar su continuidad en x = 4
$$f(4)=8\cdot4-2\cdot4^2=0$$
$$\lim_{x\to4}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to4^+}(2x^2-8x)=2\cdot4^2-8\cdot4=0\\ \lim_{x\to4^-}(8x-2x^2)=8\cdot4-2\cdot4^2=0\end{cases}$$
Como $f(4)=\lim_{x\to4^+}f(x)=\lim_{x\to4^-}f(x)$ *entonces* $f(x)$ *es continua en* $x=4$
Estudiar su derivabilidad en x = 4
$$\lim_{x\to4}f'(x)=\begin{cases}\lim_{x\to4^+}(4x-8)=4\cdot4-8=8\\ \lim_{x\to4^-}(8-4x)=8-4\cdot4=-8\end{cases}$$

$Como \lim_{x\to 4^+} f'(x) \neq \lim_{x\to 4^-} f'(x)$ *entonces* $f(x)$ *no es derivable en* $x = 4$



35. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función f(x).

Asíntotas:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 + 1} = 1$$

Por tanto, tiene asíntota horizontal en y=1. No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Máximos y mínimos:

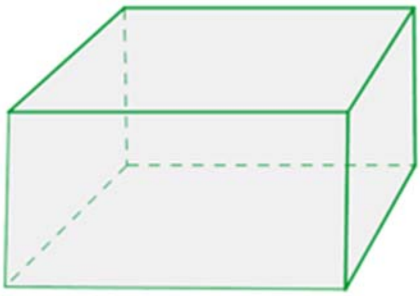
$$f'(x) = \frac{(8x-4)\cdot(4x^2+1)-(8x)\cdot(4x^2-4x+1)}{(4x^2+1)^2} = \frac{32x^3+8x-16x^2-4-(32x^3-32x^2+8x)}{(4x^2+1)^2} = \frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}$$

$$\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2} = 0 \to 16x^2 - 4 = 0; \quad x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{32x\cdot(4x^2+1)^2-(16x^2-4)\cdot 2\cdot(4x^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^4} = \frac{32x\cdot(4x^2+1)-(16x^2-4)\cdot 16x}{(4x^2+1)^3}$$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, mínimo $\qquad f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ máximo

36. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.



x= largo = profundo / y= altura

V= 2 litros = $2dm^3$

Volumen:$2 = x^2 \cdot y \to y = \frac{2}{x^2}$

Superficie = $2(x^2 + 2yx) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x^2}x\right)$

$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = 2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{4}{x}$

$f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} \qquad 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \to \frac{4x^3-4}{x^2} = 0 \to 4x^3 - 4 = 0 \to x = 1$

$f''(x) = 4 + \frac{8}{x^3}$ $\quad f''(1) = 4 + \frac{8}{(1)^3} > 0 \rightarrow Por\ lo\ tanto\ tenemos\ un\ mínimo\ para\ x = 1$

$y = \frac{2}{(1)^2} = 2$ Lado de la base: 1 dm, altura: 2 dm

37. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R= 5cm.

V= $\frac{h \cdot \pi \cdot r^2}{3}$; $h = R + x \rightarrow h = 5 + x$; $r^2 = R^2 - x^2 \rightarrow r^2 = 25 - x^2$

$$V = \frac{(5+x) \cdot \pi \cdot r^2}{3} = \frac{(5+x) \cdot \pi \cdot (25 - x^2)}{3}$$

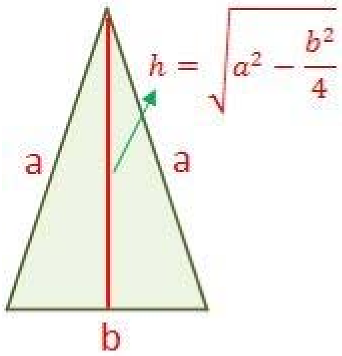
$$f'^{(x)} = \frac{-10\pi x + 25\pi}{3} - \pi x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0{,}66\ ; \quad x_2 = -3{,}99$$

La opción negativa no es válida.

$f''(x) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi x$ $\quad f''(0{,}66) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi(0{,}66) < 0 \rightarrow Hay\ un\ máximo\ relativo\ para\ 0{,}66.$

$h = 5 + 0{,}66 = 5{,}66\ cm$ $\quad r^2 = 25 - (0{,}66)^2 = 24{,}564;$ $\quad r = 4{,}9cm$

38. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



perímetro= b+2a

8= b+2a→ $a = \frac{8-b}{2}$

A=$\frac{1}{2} b \cdot h = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2} = \frac{b \cdot \sqrt{\left(\frac{8-b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}}}{2}$

$$f(x) = \frac{b \cdot \sqrt{\frac{64-16b}{4}}}{2} = \frac{\frac{b}{2} \cdot \sqrt{64-16b}}{2} = \frac{\frac{b}{2} \cdot \sqrt{16(4-b)}}{2} = b \cdot \sqrt{4-b}$$

$$f'(x) = \sqrt{4-b} + b\left(\sqrt{4-b}\right) = \sqrt{4-b} + \frac{b \cdot (-1)}{\sqrt{4-b}} = \frac{4-b-b}{\sqrt{4-b}} \rightarrow \frac{4-2b}{\sqrt{4-b}} = 0$$

$$4 - 2b = 0 \rightarrow 4 = 2b \rightarrow b = 2$$

$$f''(x) = \frac{-6 + b}{\sqrt{4-b} \cdot (4-b)}$$

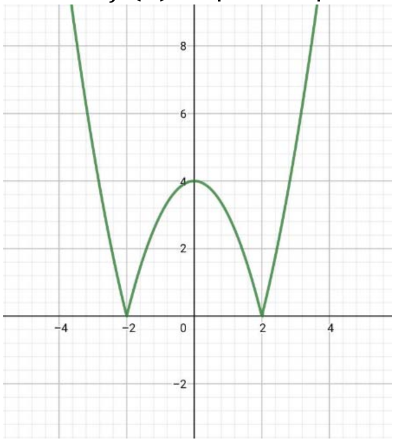
$$f''(b) < 0\ \rightarrow Por\ tanto\ tenemos\ un\ máximo\ para\ b = 2$$

$a = \frac{8-b}{2} = \frac{8-2}{2} = 3$; $h = \sqrt{9 - \frac{4}{4}} = \sqrt{8}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Es el caso de las funciones en valor absoluto: $f(x) = |x^2 - 4|$



Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = -2$ y en $x = 2$, ya que esos dos puntos no tienen una única recta tangente.

2.- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5$ ... ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

$f'(5) = \lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = +\infty;$

$$No\ se\ puede\ obtener\ la\ derivada\ en\ x = 0$$

3.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ x \le 1 \\ 2 & si\ x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en x=1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en x=1 ni derivable en dicho punto.

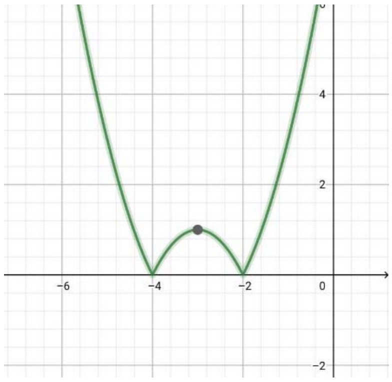
$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x > 1 \end{cases}$ $\qquad f_-'(1) = 2(1-1) = 0; \qquad f_+'(1) = 0$

$f_-'^{(1)} = f_+'^{(1)} = 0$; las derivadas laterales tienen el mismo valor.

Sin embargo, f no es continua en 1 y por tanto tampoco derivable, la respuesta correcta es la b.

4.- ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



Como podemos observar, la función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en los puntos $x = -4$ y $x = -2$, ya que esos dos puntos tienen dos rectas tangentes.

5.- Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 5$

$$\boldsymbol{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

$f(5) = 5 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 2 = 125$
$f'(x) = 10x + 3 \rightarrow f'(5) = 10 \cdot 5 + 3 = 53$
$y = 125 + 53(x - 5) = 125 + 53x - 265 = 53x - 140$
$y = 53x - 140$

6. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por:$y = 30x - 0'5x^2$(x e y en km). La dirección del vehículo nos proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.
Dada la función $f(x) = 30x - 0'5x^2$ hacemos la derivada $f(x)' = 30 - x$ y sustituimos x=4
$f'(4) = 30 - 4 = 26$ y hallamos la dirección del vehículo.

7. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:
Fórmula de la recta tangente: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

a) $y = x^3 + 5$ en x = 2
$y' = 3x^2$
$y(2) = 2^3 + 5 = 13$ $\qquad$ $y'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

$y = 13 + 12(x - 2) \rightarrow y = 12x - 11$

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en x = 1

$y(1) = 1^3 + 5 = 6$

$y' = 6x + 7$; $y'(1) = 6 + 7 = 13$

$$y = 6 + 13(x - 1) \rightarrow \quad y = 13x - 5$$

c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en x = 0

$$y(0) = 2 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$y' = 6x^2 - 5x$ $\qquad$ $y'(0) = 6 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 = 0$

$y = 4 + 0(x - 0) \rightarrow y = 4$

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

8. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta y = 0 ; b) a la recta y = 2x.

$$y = x^3 - 3x + 2$$

a) Paralela y = 0 → $m = 0$ $y' = 3x^2 - 3$; $3x^2 - 3 = 0$; $3x = 3$; $x = 1$, $x = -1$

Puntos: (-1, 4) y (1, 0)

b) y = 2x → $m = 2$ $y' = 3x^2 - 3$; $3x^2 - 3 = 2$; $3x^2 = 5$; $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$

Puntos: $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 2\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + 2\right)$

9. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt{4x^3}$ en x=0

La función no es derivable en x = 0 pero existe recta tangente

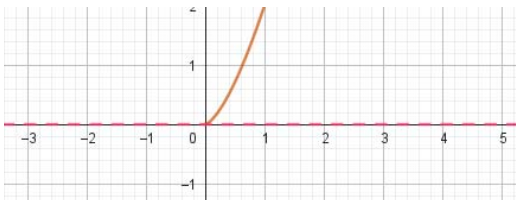
$$y(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$y' = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3}} = \frac{12x^2}{2 \cdot 2\sqrt{x^3}} = (x^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{1/2}) = 3\sqrt{x}$$

$$y'(0) = 3\sqrt{0} = 0$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$$



10. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

$f(x) = 4x^3 - 12x$ m = 12

$f'(x) = 12x^2 - 12$; $12x^2 - 12 = 12$; $12x^2 = 24$; $x = \pm\sqrt{2}$

Puntos: $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

Rectas tangentes: $y = 4\sqrt{2} + 12(x + \sqrt{2})$ y $y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2})$;

$f'(x) = 12x^2 - 12$ *el menor valor que puede tener la pendiente es en* $x = 0$ y vale -12

11. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A(1,2) y es tangente a la recta y = x en el punto O(0,0).

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

Punto O(0, 0) $f(0) = 0 \rightarrow c = 0$

Tangente y = x , m = 1 $\quad f'(0) = b \quad \to 1 = b$

$Punto\ A(1,2) \quad f(1) = 2 \quad \to a = 1$

12. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $\boldsymbol{f(x) = x^3 + bx + a}$ y $\boldsymbol{g(x) = cx - x^2}$ tengan la misma recta tangente en el punto A(1, 0).

$f(x) = x^3 + bx + a\,; \quad f(1) = 0\,;\ 0 = 1^3 + b(1) + a\,; \quad 0 = a - 3 + 1\,; \quad a = 2$

$g(x) = cx - x^2 \ ;\ g(1) = 0\,; \quad c - 1 = 0\,; \quad c = 1$

$f(x) = x^3 + bx + a\,; \quad f'(x) = 3x^2 + b\,;\ f'(1) = 3 + b$

$g'(x) = c - 2x = 1 - 2x \qquad g'(1) = -1\ ; \quad 3 + b = -1\,; \quad b = -4$

13. Determina el coeficiente a, para que la función $\boldsymbol{f(x) = x^2 + a}$, sea tangente a la recta y=x.

$y = x \to m = 1$

$f(x) = x^2 + a\,; f'(x) = 2x\,; 2x = 1\,; x = \frac{1}{2} \ ; \ f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{4} + a$

En los puntos de la forma $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + a\right)$ la recta y = x es tangente a la función.

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = 3x^2 + 5x - 7}$

$y' = 6x + 5$

b) $\boldsymbol{y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2}$

$y' = 15x^2 - 8x + 3$

c) $\boldsymbol{y = 6x^2 - 4x + 7}$

$y' = 12x - 4$

d) $\boldsymbol{y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3}$

$y' = 63x^7 - 24x^5 - 6x^2$

15. Calcula:

a) $\boldsymbol{D(3x^2 + 6x^4 - 9x)}$

$y' = 6x + 24x^3 - 9$

b) $\boldsymbol{D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3)}$

$y' = 35x^4 - 10x + 3 + 6x^2$

c) $\boldsymbol{D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3)}$

$y' = 25x^4 - 16x^3 + 9x^2$

c) $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8)}$

$y' = 21x^2 - 48^5 - 72x^7$

16. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = 5x^2 + 4x - \frac{3}{x}}$; $y' = 10x + 4 + \frac{3}{x^2}$

b) $\boldsymbol{y = \frac{(2x^2+5)(7x-3)}{5x-8}}$; $y = \frac{14x^3-6x^2+35x-15}{5x-8}$; $y' = \frac{(42x^2-12x+35)(5x-8)-(14x^3-6x^2+35x-15)(5)}{(5x-8)^2}$

c) $\boldsymbol{y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)(x^2-3x+1)}}$; $y = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{(x^3-3x^2+x+2x^2-6x+2)}$; $y' = \frac{\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3-x^2-5x+2)-\left(6x^{\frac{1}{2}}\right)(3x^2-2x-5)}{(x^3-x^2-5x+2)^2}$

d) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{x}(x+3)}{(x^2-3)}}$; $y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x+3)}{(x^2-3)}$; $y = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x^2-3)}$; $y' = \frac{\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^2-3)-\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)(2x)}{(x^2-3)^2}$

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=\frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}}$

$y'=\frac{(1\cdot(2x-4)+(x-3)\cdot 2)\cdot(x-5)-((x-3)\cdot(2x-4))\cdot 1}{(x+5)^2}$ $\quad y'=\frac{2x^2+20x-62}{(x+5)^2}$

$\boldsymbol{b)\ y=\frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}}$

$y'=\frac{(4x\cdot(7x-3)+(2x^2+5)\cdot 7)\cdot(5x-8)-((2x^2+5)\cdot(7x-3))\cdot 5}{(5x-8)^2}$, $\quad y'=\frac{140x^3-366x^2+96x-205}{(5x-8)^2}$

$\boldsymbol{c)\ y=\frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}}$

$y'=\frac{((2+6x)\cdot(4x^5-5)+(2x+3x^2)\cdot 20x^4)\cdot(6x+7)-((2x+3x^2)\cdot(4x^5-5))\cdot 6}{(6x+7)^2}$

$y'=\frac{432x^7+828x^6+366x^5-90x^2-210x-70}{(6x+7)^2}$

$\boldsymbol{d)\ y=\frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}}$

$y'=\frac{5}{2}\cdot\frac{(1\cdot(4x-6)+(x+2)\cdot 4)\cdot((x+5)\cdot(6x+3))-((x+2)\cdot(4x-6))\cdot(1\cdot(6x+3)+(x+5)\cdot 6)}{((x+5)\cdot(6x+3))^2}$

$y'=\frac{5(20x^2+44x+71)}{3(x+5)^2\cdot(2x+1)^2}$

18. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=(x^3+5)\cdot(8x^6-7)}$

$y'=(3x^2\cdot(8x^6-7)+(x^3+5)\cdot 48x^5)$ $\quad y'=72x^8+240x^5-21x^2$

$\boldsymbol{b)\ y=(9x^3-3)\cdot(7x^4+6)}$

$y'=(27x^2\cdot(7x^4+6)+(9x^3-3)\cdot 28x^3)$ $\quad y'=441x^6-84x^3+162x^2$

19. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=\frac{x-2}{x+2}}$ $\quad y'=\frac{(1)\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}$ $\quad y'=\frac{4}{(x+2)^2}$

$\boldsymbol{b)\ y=\sqrt{x-2}\cdot(6x^3-3x)}$

$y'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(6x^3-3x)+(\sqrt{x-2})\cdot(18x^2-3)\right)$ $\quad y'=\frac{42x^3-72x^2-9x+12}{2\sqrt{x-2}}$

$\boldsymbol{c)\ y=\frac{(4x^3-7x^2)}{(8x^4-4x^3)}}$

$y'=\frac{(12x^2-14x)\cdot(8x^4-4x^3)-(4x^3-7x^2)\cdot(32x^3-12x^2)}{(8x^4-4x^3)^2}$ $\quad y'=\frac{8x^2-28x+7}{4x^2(2x-1)^2}$

$\boldsymbol{d)\ y=\frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4}}$ $\quad y'=\frac{2\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)\cdot(3x+4)-(2\sqrt{x^3})\cdot 3}{(3x+4)^2}$ $\quad y'=\frac{3x\sqrt{x}+12\sqrt{x}}{(3x+4)^2}$

20. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y=(x^6-5x^2)^9}$ $\quad y'=(9\cdot(x^6-5x^2)^8\cdot(6x^5-10x))$

$\boldsymbol{b)\ y = (2x^4 - 7x^6)^5}$ $\qquad y' = (5 \cdot (2x^4 - 7x^6)^4 \cdot (8x^3 - 42x^5))$

$\boldsymbol{c)\ y = \sqrt{(2x^7 - 6x^5)^3}}$ $\qquad y' = \left(\frac{3}{2} \cdot (2x^7 - 6x^5)^{\frac{1}{2}} \cdot (14x^6 - 30x^4)\right)$

$\boldsymbol{d)\ y = \sqrt[5]{(3x^4 + 6x^9)^7}}$ $\qquad y' = \left(\frac{7 \cdot (3x^4 + 6x^9)^{\frac{2}{5}} \cdot (12x^3 - 54x^8)}{5}\right)$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \sqrt{2x^3 + 3} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6} \to (2x^3 + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot (4x^7 + 6x^2)^6 \to$

$$y' = \frac{1}{2}(2x^3 + 3)^{-1/2} \cdot (6x^2) \cdot (4x^7 + 6x^2)^6 + (2x^3 + 3)^{\frac{1}{2}} \cdot 6(4x^7 + 6x^2)^5 \cdot (28x^6 + 12x)$$

b) $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{3x + 4}} \to y' = \frac{\frac{15x^2 + 14x}{3\sqrt[3]{(5x^3 + 7x^2 - 2)^2}} \cdot (3x + 4) - 3 \cdot \sqrt[3]{5x^3 + 7x^2 - 2}}{(3x + 4)^2}$

c) $\boldsymbol{y = (7x^3 + 3)^5 \cdot (4x^5 - 8x^8)}$

$$y' = 5 \cdot (7x^3 + 3)^4 \cdot 21x^2 \cdot (4x^5 - 8x^8) + (7x^3 + 3)^5 \cdot (20x^4 - 64x^7)$$

d) $\boldsymbol{y = \frac{(5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^2}} \to y' = \frac{9(5x^3 - 7x^2)^8 \cdot (15x^2 - 14x) \cdot (9x^4 - 3x^3)^2 - 2(9x^4 - 3x^3) \cdot (36x^3 - 9x^2) \cdot (5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^4}$

$$y' = \frac{9(5x^3 - 7x^2)^8 \cdot (15x^2 - 14x) \cdot (9x^4 - 3x^3) - 2 \cdot (36x^3 - 9x^2) \cdot (5x^3 - 7x^2)^9}{(9x^4 - 3x^3)^3}$$

22. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{y = (5x)^{x^5 - 3x^3}} \to Ly = L(5x)^{x^5 - 3x} \to Ly = (x^5 - 3x^3) \cdot L(5x)$

$\frac{y'}{y} = (5x^4 - 9x^2) \cdot L(5x) + (x^5 - 3x^3) \cdot \frac{5}{5x} \to y' = y\left[(5x^4 - 9x^2) \cdot L5x + (x^5 - 3x^3) \cdot \frac{5}{5x}\right]$

$y' = ((5x)^{x^5 - 3x^3}) \cdot \left[(5x^4 - 9x^2) \cdot L(5x) + (x^5 - 3x^3) \cdot \frac{1}{x}\right]$

b) $\boldsymbol{y = (3x + 6)^{4x^3 + 2x^2}} \to Ly = L(3x + 6)^{4x^3 + 2x^2} \to Ly = (4x^3 + 2x^2) \cdot L(3x + 6)$

$\frac{y'}{y} = (12x^2 + 4x) \cdot L(3x + 6) + (4x^3 + 2x^2) \cdot \frac{3}{3x + 6}$

$y' = y \cdot \left[(12x^2 + 4x) \cdot (3x + 6) + (4x^3 + 2x^2) \cdot \frac{3}{3x + 6}\right]$

$y' = \left[(12x^2 + 4x) \cdot (3x + 6) + (4x^3 + 2x^2) \cdot \frac{3}{3x + 6}\right] \cdot (3x + 6)^{4x^3 + 2x^2}$

c) $\boldsymbol{y = e^{(3x^5 - 6x^3)^5}} \to Ly = Ln\, e^{(3x^5 - 6x^3)^5} \to Ly = (3x^5 - 6x^3)^5 \to$

$\frac{y'}{y} = 5 \cdot (3x^5 - 6x^3)^4 (15x^4 - 18x^2) \to y' = y \cdot (3x^5 - 6x^3)^4 [75x^4 - 90x^2]$

$y' = (e^{(3x^5 - 6x^3)^5}) \cdot (3x^5 - 6x^3)^4 (75x^4 - 90x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}} = (5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to Ly = L(5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to$

$Ly = \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot L(5x+1)$

$\frac{y'}{y} = \frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3 - 30x^4) \cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot \frac{5}{5x+1}$

$y' = y \cdot \left[\frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3 - 30x^4) \cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot \frac{5}{5x+1}\right]$

$y' = \left[(4x^7+6x^5)^2(28x^3 - 30x^4) \cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3} \cdot \frac{5}{5x+1}\right] \cdot \sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}}$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+7x^3} \quad \to \quad y' = e^{x^5+7x^3} \cdot (5x^4 + 21x^2)$

b) $y = \left(e^{3x^3-5x^2}\right)^7 \quad \to y' = e^{(3x^3-5x^2)^7} \cdot (7(3x^3-5x^2)^6) \cdot (9x^2 - 10x)$

c) $y = \left(e^{4x^5+8x^3}\right)^5 \quad \to y' = e^{(4x^5+8x^3)^5} \cdot (5(4x^5+8x^5)^4) \cdot (20x^4 + 24x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}} \quad \to y' = \frac{2(5x^5-3x^8)\cdot(24x^4-24x^7)}{3\sqrt[3]{\left(e^{5x^5-3x^8}\right)^2}}$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = ln((5x^5 - 3x^3)^{12}(3x+1))$ b) $y = \ln\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}$

c) $y = \ln\sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}}$ d) $y = \ln\sqrt[3]{(3x^4-5x^5)^2}$

a) $y' = \frac{12(5x^5-3x^3)^{11}(25x^4-9x^2)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)^{12}}{(5x^5-3x^3)^{12}(3x+1)} = \frac{12(25x^4-9x^2)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)}{(5x^5-3x^3)(3x+1)}$

b) $y = \frac{3}{2}ln(2x^3+5x^2) \Rightarrow y' = \frac{3}{2}\frac{6x^2+10x}{2x^3+5x^2} = \frac{9x+15}{2x^2+5x}$

c) $y = \frac{1}{2}ln\left(\frac{7x^5-5x}{2x-3}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\frac{\frac{(35x^4-5)(2x-3)-(7x^5-5x)2}{(2x-3)^2}}{\frac{7x^5-5x}{2x-3}} = \frac{70x^6-14x^5-105x^4+15}{2(2x-3)(7x^5-5x)}$

d) $y = \frac{2}{3}ln(3x^4-5x^5) \Rightarrow y' = \frac{2}{3}\frac{12x^3-25x^4}{3x^4-5x^5} = \frac{24-50x}{9x-15x^2}$

25. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln \dfrac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}$ b) $f(x) = (2x-3x^2)\ln(5x-7x^2)$

c) $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{16-9senx}}{4+3x}$ d) $y = \sqrt{\ln(5x)}$

a) $f(x) = ln\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}} = ln(5+3e^{3x}) - ln(5-3e^{3x})$; $f'(x) = \frac{9e^{3x}}{5+3e^{3x}} + \frac{9e^{3x}}{5-3e^{3x}}$

b) $f'(x) = (2-6x)\ln(5x-7x^2) + \frac{(5-14x)(2x-3x^2)}{5x-7x^2}$

c) $f(x) = ln\frac{\sqrt{16-9senx}}{4+3x} = \frac{1}{2}\ln(16-9senx) - \ln(4+3x)$; $f'(x) = \frac{-9cosx}{2(16-9senx)} - \frac{3}{4+3x}$

d) $y' = \frac{\frac{5}{5x}}{2\sqrt{ln(5x)}} = \frac{1}{2x\sqrt{ln(5x)}}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$ b) $y = \ln(7e^{2x-3})$ c) $f(x) = 5\ln\dfrac{3senx+5}{5-3senx}$ d) $y = \ln(\ln\sqrt[3]{4x-5})$

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{ln(arccos(5x))}} \dfrac{-\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}}{arccos(5x)} = -\dfrac{5}{2\sqrt{ln(arccos(5x))}\left(1-25x^2\right)arccos(5x)}$

b) $y = ln(7e^{2x-3}) = ln7 + lne^{2x-3} = ln7 + 2x - 3$; $y' = 2$

c) $y = 5ln\frac{3senx+5}{5-3senx} = 5[\ln(3senx+5) - \ln(5-3senx)]$

$y' = 5\left(\frac{3cosx}{3senx+5} - \frac{-3cosx}{5-3senx}\right) = 5\left(\frac{3cosx(5-3senx)+3cosx(3senx+5)}{(3senx+5)(5-3senx)}\right) = 5\frac{30cosx}{25-9sen^2x}$

d) $y' = \dfrac{1}{ln(\sqrt[3]{4x-5})}\dfrac{4}{3(4x-5)}$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = \log(x^3-5x^5)^8}$

$y' = \frac{8\cdot(x^3-5x^5)^7\cdot(3x^2-25x^4)}{(x^3-5x^5)^8}\cdot ln\,10 \to y' = \frac{8\cdot(3x^2-25x^4)}{x^3-5x^5}\cdot ln10$

b) $\boldsymbol{y = \log_2(8x^2-3x^3)^2}$

$y' = \frac{2(8x^2-3x^3)\cdot(16x-9x^2)}{(8x^2-3x^3)^2}\cdot ln(2) = \frac{2\cdot(16x-9x^2)}{8x^2-3x^3}\cdot ln(2)$

c) $\mathbf{y = ln\sqrt{\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1} = \frac{1}{2}(\ln(3x^6-7x^2)^4 - \ln(2x-1)) =$

$= \frac{1}{2}(4\ln(3x^6-7x^2) - \ln(2x-1))$

$y' = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{18x^5-14x}{3x^6-7x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1} = 2\cdot\frac{18x^4-14}{3x^5-7x} - \frac{1}{2x-1}$

d) $\boldsymbol{y = ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}}$ $\qquad y = \frac{7}{4}ln(3x^3+5x^9)$

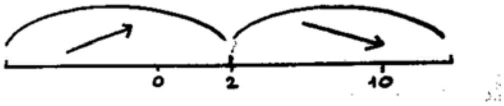
$$y' = \frac{7}{4}\cdot\frac{9x^2+45x^8}{3x^3+5x^9} = \frac{7}{4}\cdot\frac{9+45x^6}{3x+5x^7}$$

28. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = $\boldsymbol{\frac{1}{(x-2)^2}}$ **.**

$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$; $f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}$; f'(x) no se anula, tomamos los ceros del denominador:

y'(0) > 0 Creciente : (-∞, 2)

y'(10) <0 Decreciente : (2, ∞)

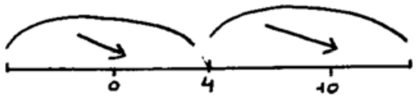


29. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = $\boldsymbol{\frac{(x+3)}{(x-4)}}$**.**

$f(x) = \frac{(x+3)}{(x-4)}$; $f'(x) = -\frac{7}{(x-4)^2}$; f'(x) no se anula, tomamos los ceros del denominador

Como $(x-4)^2$ es siempre > 0, f'(x) es siempre < 0,

Decreciente : $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$



30.Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = 2x^3**– 3x**^{2} **+ 5. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.**

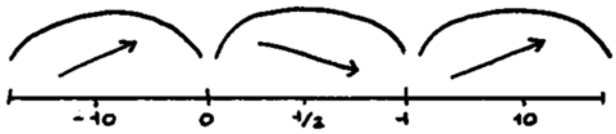
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$; $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $6x^2 - 6x = 0$; x = 1 , x = 0

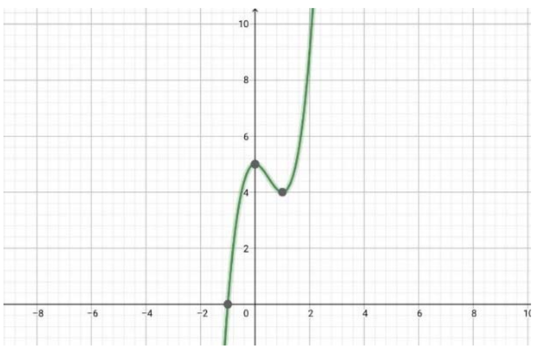
Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Decreciente : (0,1)

Máximo en x = 0 ; (0,5)

Mínimo en x = 1 ; (1,4)

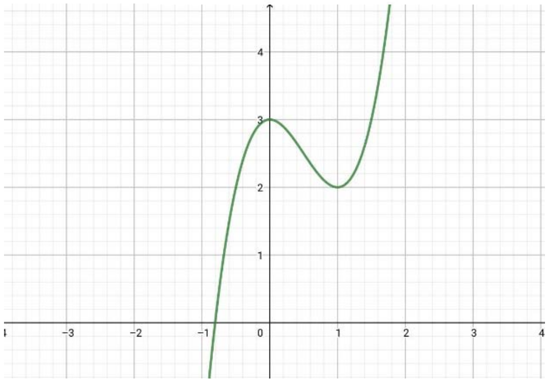




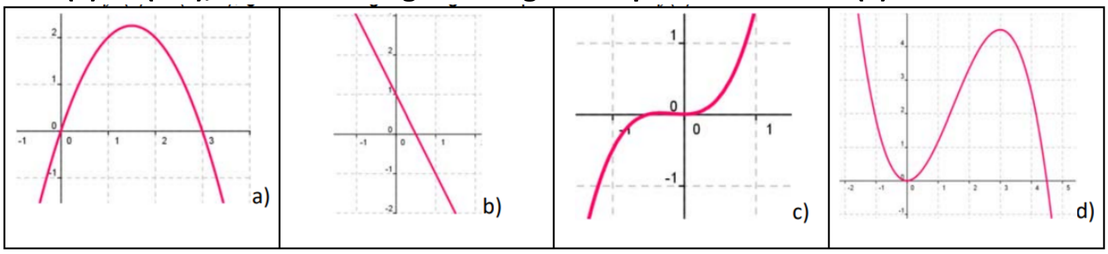
31.Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) = 2x3– 3x2 + 3. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3 \qquad f'(x) = 6x^2 - 6x$; $6x^2 - 6x = 0 \qquad x = 1 \quad x = 0$

Creciente : $(-\infty,0)$ U $(1,\infty)$
Decreciente : (0,1)
Máximo en x = 0 ; (0,3)
Mínimo en x = 1 ; (1,2)



32. Si f’(x) = x(3-x), ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de f(x)?



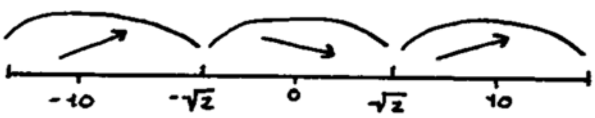
Como f’(x) se anula en x = 0 y en x = 3, ahí debe haber extremos relativos, por tanto, la respuesta es la gráfica d).

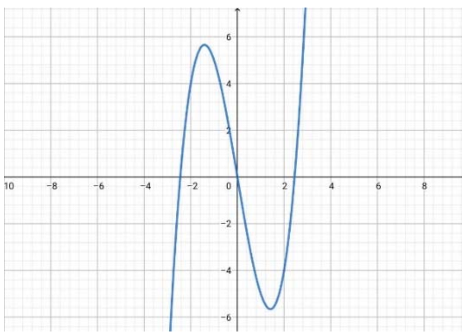
33. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

$f(x) = x^3 - 6x$; $f'(x) = 3x^2 - 6$; $3x^2 - 6 = 0$; $x = \pm\sqrt{2}$

Creciente :$(-\infty, -\sqrt{2})$ U $(\sqrt{2}, \infty)$ Decreciente : $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Máximo en x = $-\sqrt{2}$; $(-\sqrt{2}, 5{,}66)$ Mínimo en x = $\sqrt{2}$; $(\sqrt{2}, -5{,}66)$



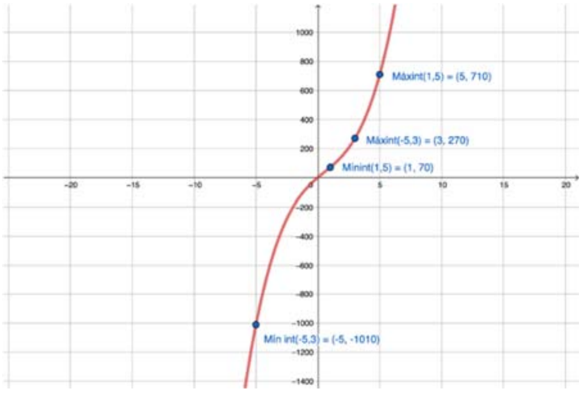


34. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo [-5, 3] y en el intervalo [1, 5]

f’(x) = $12x^2 - 12x + 72 = 12(x^2 - x + 6)$ que es siempre > 0 por tanto,

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

La función es creciente en todo R; No tiene ni máximos ni mínimos relativos.
El mínimo absoluto en [–5, 3] es (–5, f(–5)) = (–5, –1010);
El máximo absoluto en [–5, 3] es (3, f(3)) = (–5, 270)
El mínimo absoluto en [1, 5] es (1, f(1)) = (1, 70);
El mínimo absoluto en [1, 5] es (5, f(5)) = (5, 710).



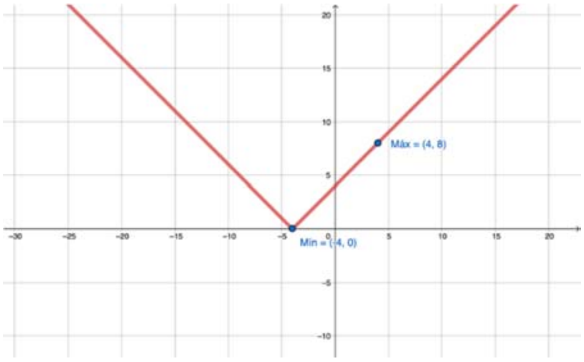
35. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

- Se define la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \geq -4 \\ -x - 4, & x < -4 \end{cases}$
- Se calcula la derivada de la función: $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > -4 \\ -1, & x < -4 \end{cases}$

La derivada no se anula en ningún punto.

- Se estudian los extremos del intervalo, -4 y 4:
  $f(-4) = 0; f(4) = 8$
- **En el intervalo$[-4, 4]$:**

Mínimo absoluto: (-4,0) Máximo absoluto: (4,8)



36. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: y=8t+0,3t^2.¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120km?

- Función espacio: $y = 8t + 0{,}3\, t^2$
- La velocidad de un móvil viene dada por $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} \to v = \frac{dy}{dt} = 8 + 0{,}6\, t$
- <u>Al pasar por el control</u>, t=0; $v(0) = 8 + 0{,}6 \cdot 0 = 8\, m/s$
- <u>A los tres segundos</u>, t=3; $v(3) = 8 + 0{,}6 \cdot 3 = 9{,}8\, m/s$
- Cuando $v = 120 \frac{km}{h} \to v = 120 \frac{km}{h} \cdot \frac{1000\, m}{1\, km} \cdot \frac{1\, h}{3600\, s} = 33{,}33\, m/s$
- Sustituimos en la ecuación de la velocidad y calculamos el tiempo:
  $33{,}33 = 8 + 0{,}6\, t \to t = 42{,}22\, s$. A partir de este momento la velocidad pasará de 120 km/h

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

37. La distancia d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por d=$5t^2$.Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57m de altura),¿a qué velocidad llegaría al suelo?¿Y si cayera desde la segunda plataforma(que está a 115m)?¿Y desde la tercera plataforma(que está a 274m)?

- Desde la primera plataforma (57 m):

$57 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{57}{5}} = 3{,}37\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 3{,}37 = 33{,}7\ m/s$

- Desde la segunda plataforma (115 m):

$115 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{115}{5}} = 4{,}79\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 4{,}79 = 47{,}9\ m/s$

- Desde la tercera plataforma (247 m):

$247 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{247}{5}} = 7{,}03\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 7{,}03 = 70{,}3\ m/s$

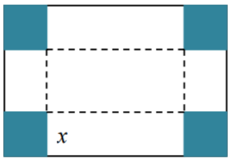
38. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0,3 m^3 por minuto. ¿A que velocidad varia la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

Vol: 0,3 m^3/min el volumen de un cilindro es Vol = $\pi r^2 h$ luego $h = \frac{Vol}{\pi r^2}$

$h = \frac{0{,}3m^3/min}{25\pi m^2} = \frac{0{,}3}{25\pi}$ = m/min = $\frac{0{,}3}{78{,}5}$ = 0,0038 m/min

La velocidad es constante

39. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo?



$vol: (20 - 2x) \cdot (25 - 2x) \cdot x = 500x - 90x^2 + 4x^3$

$f'(x) = 500 - 180x + 12x^2 = 0;\ \ x = 11{,}38;\ \ x = 3{,}68$; $x = 11{,}38$ no válido.

$f''(x) = 24x - 180 = 0;$

$f''(3{,}68) = -91{,}68;\ es\ un\ máximo$

Para que contenga el vol. Max x = 3,68 cm

40. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿Cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

V = 200l = 200$dm^3 = \pi^2 h$; h = $\frac{200}{\pi r^2}$

Superficie mínima = 2Sb + Sl = $2\pi r^2 + 2\pi r h$

S =$2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{200}{\pi r^2}$; S = $2\pi r^2 + \frac{400}{r}$

$S' = 4\pi r - \frac{400}{r^2} = 0$; $4\pi r = \frac{400}{r^2};\ \ r^3 = \frac{400}{4\pi}$; $r = \sqrt[3]{\frac{400}{4\pi}}$

r = $\frac{200}{\pi(3{,}17^2)}$, r = 3,17 dm ; $h = \frac{200}{\pi r^2} = \frac{200}{\pi(3{,}17)^2} = 6{,}37dm$

AUTOEVALUACIÓN

1. La tasa de variación media de la función y = 3x³ + 3x² – x + 5 en el intervalo [0, 3] es:

a) 15 b) 70 c) 35 d) –35

$TVM(0,3) = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{110-5}{3} = 35$ Respuesta: c)

2. La derivada de la función $\frac{Lx}{x}$ en x = 1

a) no existe b) 0 c) –1 d) 1

$\left(\frac{Lx}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot Lx}{x^2} = \frac{1-Lx}{x^2}$; $\left(\frac{Lx}{x}\right)'(1) = \frac{1-L1}{1^2} = 1$ Respuesta: d)

3. La derivada de la función $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ en x = 1 es

a) e/2 b) no existe c) – e/2 d) e

$f'(x) = \frac{e^x\sqrt{x} - e^x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$; $f'(1) = \frac{e^1\sqrt{1} - e^1\frac{1}{2\sqrt{1}}}{1} = \frac{e}{2}$ Respuesta: a)

4. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

a) b = –6, d = 3 b) b = 3, d = –1 c) b = 6, d = –3 d) b = –3, d = 2

$f(1) = -b$

$\lim_{x\to 1^-}(-bx) = -b$ $\lim_{x\to 1^+}(3x^2 + d) = 3 + d$

$f'(x) = \begin{cases} -b & x < 1 \\ 6x & x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-}(-b) = -b$ $\lim_{x\to 1^+} 6x = 6$ b = - 6 para que sea derivable

3 + d = 6 para que sea continua $3 + d = 6 \to d = 3$

Respuesta: a) b = - 6, d = 3

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función y = x² – 2x³ en x = 0 es:

a) y = 2x b) y = x – 6 c) y = 0 d) y = 2 + 6x

y' = 2x – 6x² ; y(0) = 0 ; y'(0) = 0

Ecuación recta tangente: y = f(a) + f'(a)(x – a) ; y = 0 + 0(x – 0) ; y = 0

Respuesta: c)

6. La función y = – 7x³ + 3x² – x + 5 en x = 0 es:

a) cóncava b) tiene un punto de inflexión de tangente horizontal

c) convexa d) tiene un punto de inflexión de tangente oblicua

y' = –21x² + 6x – 1 ; y'' = -42x + 6 ; y''(0) = 6 > 0

Respuesta: a)

7. La función y = 3x³ + 3x² – x + 5 en x = 0 es:

a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo

y’ = $6x^2 + 6x - 1$ y’(1) = 6 + 6 – 1 = 11 > 0 Respuesta: a)

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x-4)(x+2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

a) x < –2, decreciente; –2 < x < 4, decreciente; x > 4, creciente

b) x < –2, decreciente; –2 < x < 4, creciente; x > 4, decreciente

c) x < –2, creciente; –2 < x < 4, creciente; x > 4, decreciente

d) x < –2, creciente; –2 < x < 4, decreciente; x > 4, creciente

$(x-4)(x+2) = 0 \to x = 4, \qquad x = -2$

intervalos→ $(-\infty, -2)(-2, 4)(4, \infty)$

$y'(-3) = (-3-4)(-3+2) = (-7)(-1) = + \to$ creciente

$y'(2) = (2-4)(2+2) = (-2)(4) = - \to$ decreciente

$y'(5) = (5-4)(5+2) = (1)(7) = + \to$ creciente

Respuesta: d) Creciente, decreciente, creciente

9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

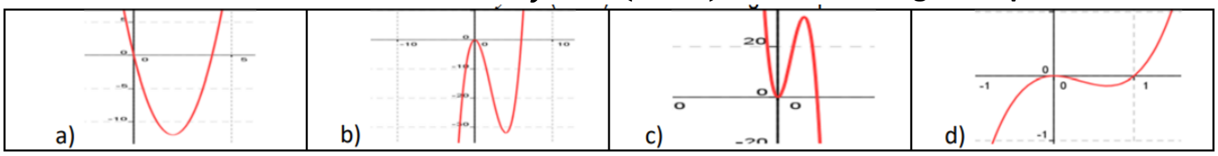
a) x = 1/2 b) x = –1/2 c) x = 1 d) x = 0

$y = 3x^2 - 2x^3 \qquad y' = 6x - 6x^2$

$y'' = 6 - 12x = 0 \to x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \qquad y''' = -12 \neq 0$

Respuesta: a) x = $\frac{1}{2}$

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x-4)x$ entonces su gráfica puede ser:



$y' = 3(x-4)x = 0 \quad ; \quad x = 4, \qquad x = 0$

Intervalos → $(-\infty, 0)(0, 4)(4, \infty)$

$y(-2) = 3(-2)^2 - 12(-2) = +$ Creciente

$y(2) = 3(2)^2 - 12(2) = -$ Decreciente

$y(5) = 3(5)^2 - 12(5) = +$ Creciente

Respuesta: b)

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 7: Integrales

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: IRENE, CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, NEREA, ISMAEL, AITANA, ROSA, ANDREA, OLIVIA, LUCÍA, NATALIA.
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas *software* libre (GeoGebra)

Actividades propuestas

1. Calcula el área de la región limitada por cada una de las funciones $f(x)=a$, $g(x)=a\cdot x$ y $h(x)=a\cdot x+b$ (con a y $b\in\mathbb{R}$) entre el origen de coordenadas y un punto genérico de abscisa x.

- $\int_0^x a\,dt = a\cdot t|_0^x = a\cdot x - a\cdot 0 = a\cdot x$
- $\int_0^x a\cdot t\,dt = a\cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = a\cdot\frac{x^2}{2} - a\cdot 0 = a\cdot\frac{x^2}{2}$
- $\int_0^x (a\cdot t+b)dt = a\cdot\left(\frac{t^2}{2}+b\cdot t\right)\Big|_0^x = a\cdot(\frac{x^2}{2}+b\cdot x) - a\cdot 0 = a\cdot(\frac{x^2}{2}+b\cdot x)$

2. Calcula las siguientes primitivas:

a) $\int 4x^3dx$ b) $\int 3x^2dx$ c) $\int 5x^4dx$ d) $\int(5x^4-4x^3+3x^2)dx$

a) $\int \mathbf{4x^3\,dx} = x^4 + C$

b) $\int \mathbf{3x^2\,dx} = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C$

c) $\int \mathbf{5x^4dx} = \frac{5x^5}{5} + C = x^5 + C$

d) $\int \mathbf{(5x^4-4x^3+3x^2)dx} = x^5 - x^4 + x^3 + C$

3. Dada $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$, calcula la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que verifica $F(0)=4$.

$F(x) = \int \mathbf{(x^3-3x^2+2x+1)dx} = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x + C$

Como F(0) = 4 , F(0) = $\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 + 0 + C = 4$, luego C = 4 , de donde,

$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + 4$

4. Comprueba si $F(x)=4x^3+2x^2-x+5$ es una primitiva de $f(x)=12x^2+4x+3$. En caso negativo, explica por qué.

Si derivamos F(x) obtenemos $F'(x) = 12x^2 + 4x - 1 \neq f(x)$
Por tanto, F(x) no es una primitiva de f(x)

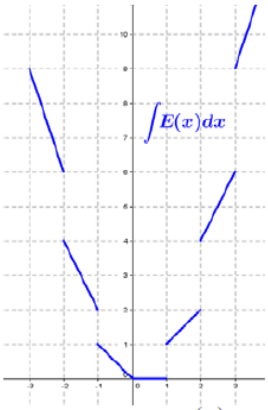
5. Determina los valores de a, b, c y d para los que $F(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es una primitiva de la función $f(x)=4x^2-5x+3$.

$F(x) = \int(4x^2-5x+3)dx = 4\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x + C$ *, por tanto,*

$a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{-5}{2}$, $c = 3$, $d = C$

6. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quién tiene bien el ejercicio.
Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

7. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función "parte entera de x", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):

$\int 1dx = x$ $\quad \int 2dx = 2x$ $\quad \int 3dx = 3x$ $\quad \int(-1)dx = -x$ $\quad \int(-2)dx = -2x$

8. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$ haciendo $x = t^{12}$.

$x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$, sustituyendo, obtenemos $\int \frac{\sqrt{t^{12}}-\sqrt[3]{t^{12}}}{\sqrt[4]{t^{12}}} \cdot 12t^{11}dt$, simplificando,

$\int \frac{t^6-t^4}{t^3} 12t^{11}dt = \int (t^6-t^4)12t^8dt = 12\int(t^{14}-t^{12})dt = 12\left(\frac{t^{15}}{15}-\frac{t^{13}}{13}\right) + C$

$x = t^{12}$, $t = \sqrt[12]{x}$, deshaciendo el cambio, $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} \cdot dx = 12\left(\frac{\left(\sqrt[12]{x}\right)^{15}}{15} - \frac{\left(\sqrt[12]{x}\right)^{13}}{13}\right) + C$

b) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

$e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}$ sustituyendo,

$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+\frac{1}{t}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{\frac{t^2+1}{t}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg(t) + C = arctg(e^x) + C$

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx$ haciendo $1+2x = t^2$

$1 + 2x = t^2$, $2dx = 2tdt$, $dx = tdt$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $t = \sqrt{1+2x}$

$\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx = \int \frac{5\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^4}{\sqrt{t^2}}tdt = 5\int \frac{(t^2-1)^4}{2^4}dt = \frac{5}{16}\int (t^8-4t^6+6t^4-4t^2+1)dt =$

$= \frac{5}{16}\left(\frac{t^9}{9} - 4\frac{t^7}{7} + 6\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^3}{3} + t\right) + C =$

$= \frac{5}{16}\left(\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^9}{9} - 4\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^7}{7} + 6\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^5}{5} - 4\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^3}{3} + \sqrt{1+2x}\right) + C$

d) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ haciendo $x+\sqrt{x^2-1} = t$

$x + \sqrt{x^2-1} = t$, $\sqrt{x^2-1} = t - x$, $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 = (t-x)^2$,

$x^2 - 1 = t^2 + x^2 - 2xt$, $2xt = t^2 + 1$, $x = \frac{t^2+1}{2t}$,

$dx = \frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)\cdot 2}{4t^2}dt = \frac{(2t^2-2)}{4t^2}dt = \frac{t^2-1}{2t^2}dt$, de donde,

$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{t^2}{t^3} - \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t} - t^{-3}\right)dt = \frac{1}{2}\left(ln|t| + \frac{t^{-2}}{2}\right) + C$

Deshaciendo el cambio, $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\left(ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \frac{1}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}\right) + C$

e) $\int (2\,\mathrm{sen}^3 x + 3\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\, x + 3)\cos x\, dx$ haciendo $\mathrm{sen}\, x = t$

$senx = t$, $cosxdx = dt$, sustituyendo, nos queda,

$$\int (2t^3 + 3t^2 - t + 3)dt = 2\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3t + C = \frac{sen^4x}{2} + sen^3x - \frac{sen^2x}{2} + 3senx + C$$

9. Elige el cambio que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3+1}{(x^4+2x)^3}dx$

$t = x^4 + 2x$, $dt = (4x^3+2)dx = 2(2x^3+1)dx$

b) $\int \frac{e^{\mathrm{tg}\, x}}{\cos^2 x}dx$

$t = tgx$, $dt = \frac{1}{cos^2x}dx$

c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\cdot \ln x}dx$

$t = ln(lnx)$, $dt = \frac{\frac{1}{x}}{lnx}dx = \frac{1}{xlnx}dx$

d) $\int 2x^3\sqrt{x^4-49}\cdot dx$

$t = x^4 - 49$, $dt = 4x^3dx$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2}dx$

$t^3 = x + 1$, $3t^2dt = dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

$t = 1 - 4x^2$, $dt = -8xdx$

10. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ SÍ.

b) $\int\frac{\ln x}{x}dx$ SÍ $\left(\int\frac{lnx}{x}dx=\int lnx\cdot\frac{1}{x}dx\right)$

c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ SÍ

d) $\int\frac{\ln(x+1)}{x}dx$ NO

e) $\int\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ NO

f) $\int\frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$ SÍ $[x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2]$

g) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ NO

h) $\int e^{x^2}dx$ NO

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^x dx$, $t=e^x, dt=e^x dx, \int(t^3+t^2+t)dt=\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+C=\frac{e^{4x}}{4}+\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+C$

b) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$, $t=e^{x^2},\ dt=2xe^{x^2}dx$, $\frac{1}{2}\int costdt=\frac{1}{2}sent+C=\frac{1}{2}sen(e^{x^2})+C$

c) $\int\ln(\cos x)\operatorname{tg}x\,dx$, $t=\ln(cosx)$, $dt=-\frac{senx}{cosx}dx=-tgxdx=$

$=-\int tdt=-\frac{t^2}{2}+C=-\frac{(\ln(cosx))^2}{2}+C$

d) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$ $=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+(x^2)^2}dx=\frac{1}{2}arctg(x^2)+C$

i) $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ $=\int\frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx=arctg(e^x)+C$

j) $\int(\ln x+2)\frac{dx}{x}$ $=\frac{(lnx+2)^2}{2}+C$

12. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(x^2+x+1\right)e^x dx$ $\begin{Bmatrix} u=x^2+x+1 & \rightarrow & du=(2x+1)dx \\ dv=e^x dx & \rightarrow & v=\int e^x dx=e^x \end{Bmatrix}$

$\int(x^2+x+1)e^x dx=(x^2+x+1)e^x-\int(2x+1)e^x dx=$

$$\left\{\begin{matrix} u = 2x+1 & \to & du = 2dx \\ dv = e^x dx & \to & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix}\right\} = (x^2+x+1)e^x - [(2x+1)e^x - \int 2e^x dx] =$$

$$= (x^2+x+1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C = (x^2-x+2)e^x + C$$

b) $\int \ln x\, dx$ $\left\{\begin{matrix} u = lnx & \to & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \to & v = \int dx = x \end{matrix}\right\}$ $\int lnxdx = ln|x|x - \int x\frac{1}{x}dx = xln|x| - x + C$

c) $\int x\cos x dx$ $\left\{\begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = cosxdx & \to & v = \int cosxdx = senx \end{matrix}\right\}$

$\int xcosxdx = xsenx - \int senxdx = xsenx + cosx + C$

d) Curiosidad – idea feliz: Resuelve la primitiva $\int \cos(\ln x)dx$.

Para ello, multiplica y divide el integrando por x: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\cdot x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x \to du = \dots \\ dv = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \to v = \dots \end{matrix} \right\rangle$

$I = \int \cos(lnx)\,dx = \int \frac{\cos(lnx)}{x}\cdot xdx =$ $\left\{\begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \frac{\cos(lnx)}{x}dx & \to & v = sen(lnx) \end{matrix}\right\}$

$= xsen(lnx) - \int sen(lnx)dx.$

$\int sen(lnx)dx = \int \frac{sen(lnx)}{x}\cdot xdx =$ $\left\{\begin{matrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \frac{sen(lnx)}{x}dx & \to & v = -cos(lnx) \end{matrix}\right\}$

$= -xcos(lnx) + \int \cos(lnx)\,dx.$

$I = xsen(lnx) + xcos(lnx) - I$, $2I = xsen(lnx) + xcos(lnx)$

$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}x(sen(lnx) + cos(lnx)) + C}$

13. Sea $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 8$, justifica si es primitiva de alguna de las siguientes funciones:

$$g(x) = e^{2x} - 4x + 8 \qquad h(x) = 2e^{2x} - 4x$$

$f'(x) = 2e^{2x} - 4x$, f(x) es una primitiva de h(x).

14. Dada la función $f(x) = (x+1)\cdot(3x-2)$.

a) Calcula una primitiva de $f(x)$.

b) Justifica que la función $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ no es primitiva de $f(x)$.

a) $\int (x+1)(3x+2)dx = \int (3x^2+5x+2)dx = 3\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 2x + C$

b) $F'(x) = 3x^2 + 4x \neq f(x)$, no es una primitiva.

15. Dada la función $f(x)=(x+a)\cos x$, donde a es una constante,

a) Encuentra una primitiva de f.

b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también $G(x)=F(x)+2x$?

a) $\int (x+a)cosxdx = \begin{Bmatrix} u = x+a & \rightarrow & du = dx \\ dv = cosxdx & \rightarrow & v = \int cosxdx = senx \end{Bmatrix}$

$= (x+a)senx - \int senxdx = (x+a)senx + cosx + C$

b) Ha de ser G'(x) = f(x), sin embargo, G'(x) = F'(x) + 2 = f(x) + 2.

16. Sea $f(x)=x^2+bx$ donde b es una constante. Encuentra b, sabiendo que hay una primitiva F de f con $F(0)=2$ y $F(3)=20$. Encuentra también la expresión de F.

$F(x) = \int (x^2+bx)dx = \frac{x^3}{3} + bx^2 + C$

$F(0) = \frac{0^3}{3} + b\cdot 0^2 + C = 2 \qquad F(3) = \frac{3^3}{3} + b\cdot 3^2 + C = 20$

C = 2 y 9 + 9 b + C = 20 , de donde, b = 1 y $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2$

17. Dada la función $f(x)=25-x^2+\frac{a}{x^2}$ $(x\neq 0)$, donde a es una constante, encuentra una primitiva de f. Posteriormente, encuentra a para que si f' es la derivada de f, entonces $f'(1)=-2$.

$F(x) = \int \left(25 - x^2 + \frac{a}{x^2}\right) dx = 25x - \frac{x^3}{3} - \frac{a}{x} + C$

$f'(x) = -2x - 2\frac{a}{x^3} \qquad f'(1) = -2\cdot 1 - 2\frac{a}{1^3} = -2 - 2a = -2\,, \qquad a = 0$

18. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 (x^2+x+1)dx$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_0^6 = \left(\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} + 6\right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 0\right) = 92$

b) $\int_{-1}^1 (x^2+x+1)dx$ $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) = \frac{8}{3}$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ $= \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left[\left(((\sqrt{3})^2+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left((0^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)\right] = \frac{7}{3}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ $= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+2x+2|\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2}[(ln5) - (ln1)] = \frac{ln5}{2}$

e) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ $= -cosx|_0^{\pi} = -cos\pi + cos0 = 2$

f) $\int_1^e \ln x\,dx$ $\int lnxdx = \begin{Bmatrix} u = lnx & \rightarrow & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \rightarrow & v = \int dx = x \end{Bmatrix} = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x + C$

$\int_1^e lnxdx = xlnx - x]_1^e = (elne - e) - (1ln1 - 1) = 1$

19. Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c)\cdot(5-0)$ y razona su interpretación geométrica.

$\int_0^5 (2x+1)dx = x^2 + x|_0^5 = 30$, f(c) = 2c + 1, 30 = (2c + 1)·5 , $c = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

20. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula f'(x) si $f(x) = \int_2^{e^x} \frac{dt}{lnt}$

La función $g(t) = \frac{1}{lnt}$ es continua en [2,b] , $g(x) = e^x$ es derivable,

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(e^x)} \cdot e^x$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Ejercicio 1:

1) $\int \boldsymbol{x^5}\mathbf{dx} = \frac{x^6}{6} + C$

2) $\int \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{x^5}}\mathbf{dx} = \int 4x^{-5}dx = 4\cdot\frac{x^{-4}}{-4} = \frac{-1}{x^4} + C$

3) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2}} = \int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C$

4) $\int \mathbf{37dx} = 37x + C$

5) $\int \boldsymbol{6x^7}\mathbf{dx} = 6\cdot\frac{x^8}{8} + C$

6) $\int \boldsymbol{5x^{\frac{1}{4}}}\,\mathbf{dx} = 5\cdot\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = 4\sqrt[4]{x^5} + C$

7) $\int \mathbf{5}\cdot\sqrt{\boldsymbol{x^3}}\mathbf{dx} = \int 5x^{\frac{3}{2}}\,dx = 5\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = 2\sqrt{x^5} + C$

8) $\int(\mathbf{3}-\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x^4})\boldsymbol{dx} = 3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + C = 3x - x^2 - \frac{x^5}{5} + C$

9) $\int\left(\mathbf{2x^5}-\mathbf{5x}+\mathbf{3}\right)\mathbf{dx} = \frac{2x^6}{6} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

10) $\int(2+\mathbf{3x^3})^2\mathbf{dx} = \int 4 + 9x^6 + 12x^3dx = 4x + 9\frac{x^7}{7} + 12\frac{x^4}{4} + C = 4x + \frac{9x^7}{7} + 3x^4 + C$

11) $\int(\mathbf{2}\cdot(\boldsymbol{x^2}+\mathbf{2})^3\mathbf{dx} = \int 2\cdot((x^2)^3+(3x^2)^2\cdot 2+3x^2\cdot 2^2+2^3)dx = \int 2\cdot(x^6+18x^4+12x^2+8)dx =$

$\int(2x^6 + 36x^4 + 24x^2 + 16)dx = 2\cdot\frac{x^7}{7} + 36\cdot\frac{x^5}{5} + 24\cdot\frac{x^3}{3} + 16x + C$

12) $\int(\mathbf{1}-\boldsymbol{x^3})^2\mathbf{dx} = \int 1-2x^3+(x^3)^2dx = x - 2\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C$

13) $\int\frac{\boldsymbol{x^3-x+2}}{\boldsymbol{x^3}}\mathbf{dx} = \int\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}dx - \int\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}dx + \int\frac{2}{x^3}dx = \int 1dx - \int\frac{1}{x^2}dx + \int\frac{2}{x^3}dx = \int(1-x^{-2}+2x^{-3})dx =$

$= x + \frac{x^{-1}}{1} + 2\cdot\frac{x^{-2}}{-2} = x + \frac{x^{-1}}{1} - x^{-2} + C$

14) $\int(\mathbf{-4}\boldsymbol{x^{\frac{2}{3}}}\mathbf{+2x})\mathbf{dx} = -4\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} + C = -\frac{12X^{\frac{5}{3}}}{5} + x^2 + C$

15) $\int(\mathbf{3a}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{3e^2}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x^a})\mathbf{dx} = (3a-\frac{1}{3e^2})x + 2\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

16) $\int -\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x^3}} + \mathbf{2} - \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx} = \int -3x^{-3} + 2 - 3x^{\frac{-1}{2}}dx = -3\frac{x^{-2}}{-2} + 2x - 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$

$= \frac{3}{2x^2} + 2x - 6\sqrt{x} + C$

17) $\int(\mathbf{3}\boldsymbol{x^5} - \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{3x^2}} + \mathbf{2}\sqrt[5]{\boldsymbol{x^2}})\mathbf{dx} = \frac{3x^6}{6} - 12\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 2\cdot\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{x^6}{2} - \frac{12}{x} + \frac{10x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$

18) $\int(1-x)\sqrt{x}dx = \int\sqrt{x} - x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

19) $\int\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx = \int\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}dx + \int\frac{5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}dx - \int\frac{4}{x^2}dx = \int x\,dx + \int 5\,dx - \int 4x^{-2}dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 5x - 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4}{x} + C$

20) $\int(5e^x + \frac{2x^3-3x^2+5}{4x^2})dx = \int 5e^x dx + \int\frac{2x^{\cancel{3}}}{4\cancel{x^2}}dx - \int\frac{3\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}dx + \int\frac{5}{4x^2}dx =$

$= \int 5e^x dx + \int\frac{2x}{4}dx - \int\frac{3}{4}dx + \int\frac{5x^{-2}}{4}dx = 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5x^{-1}}{4} =$

$= 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4x} + C$

21. $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int(x^2+2x+1)\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C$

22. $\int(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}})dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x + 2x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{4} + \frac{2x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{4} + 4\sqrt{x} + C$

23. $\int\sqrt{x}(x^3+1)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}\right)(x^3+1)dx = \int\left(x^{\frac{7}{2}}\right) + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{9/2}}{9/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C =$

$= \frac{2\sqrt{x^9}}{9} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

24. $\int\left(\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{2x^{\frac{-1}{2}}}{3}\right)dx = \frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{2x^{1/2}}{3\cdot 1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} - \frac{4\sqrt{x}}{3} + C$

25. $\int\sqrt{x}(3-5x)dx = \int(x^{\frac{1}{2}})(3-5x)dx = \int\left(3x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{3x^{3/2}}{3/2} - \frac{5x^{5/2}}{5/2} + C =$

$= 2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x^5} + C$

26. $\int\frac{(x+1)+(x-2)}{\sqrt{x}}dx \qquad \int(x^2+x-2)\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{2x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4\sqrt{x} + C$

27. $\int(3x+4)^2dx = \int 3(3x+4)^2dx = \frac{(3x+4)^3}{3\cdot 3} + C = \frac{(3x+4)^3}{9} + C$

28. $\int(3x-7)^4dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-7)^4dx = \frac{(3x-7)^5}{3\cdot 5} + C = \frac{(3x-7)^5}{15} + C$

29. $\int x(x^2-4)^3dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2-4)^3dx = \frac{(x^2-4)^4}{2\cdot 4} + C = \frac{(x^2-4)^4}{8} + C$

30. $\int 3x(x^2+2)^3dx = \frac{3}{2}\int 2x(x^2+2)^3dx = \frac{3(x^2+2)^4}{2\cdot 4} + C = \frac{3(x^2+2)^4}{8} + C$

31. $\int(x^3+2)^2x^2dx = \frac{1}{3}\int(x^3+2)^2 3x^2dx = \frac{(x^3+2)^3}{3\cdot 3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{9} + C$

32. $\int (x^3+3)\,x^2\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+3)3x^2dx = \frac{(x^3+3)^2}{3\cdot 2} + C = \frac{(x^3+3)^2}{6} + C$

33. $\int (x-2)^{3/2}dx = \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + C$

34. $\int (a+x)^3\,dx = \frac{(a+x)^4}{4} + C$

35. $\int [(x+2)^3 - (x+2)^2]\,dx = \frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+2)^3}{3} + C$

36. $\int \sqrt{3x+12}\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x+12)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(3x+12)^{3/2}}{3\cdot 3/2} + C = \frac{2\sqrt{(3x+12)^3}}{9} + C$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = \int (x+3)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{(x+3)^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x+3} + C$

38. $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int (x-1)^{-3}dx = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x-1)^2} + C$

39. $\int (x^2+x)^4\,(2x+1)\,dx = \frac{(x^2-x)^5}{5} + C$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^2dx = \frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3} + C$

41. $\int \frac{x^3}{(x^4-1)^2}dx = \int x^3(x^4-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(x^4-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x^4-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{(x^4-1)^{-1}}{-4} + c = \frac{1}{4(x^4-1)} + c$

42. $\int \frac{x}{(x^2+4)^3}dx = \int x(x^2+4)^{-3}dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+4)^{-3}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)^{-2}}{-2} + c = \frac{(x^2+4)^{-2}}{-4} + c = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + c$

43. $\int x\sqrt{x^2-7}dx = \int x(x^2-7)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-7)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{3} + c$

44. $\int (x-1)(x^2-2x+3)^4\,dx =$

$\frac{1}{2}\int (2x-2)(x^2-2x+3)^4\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-2x+3\right)^5}{5} + c = \frac{\left(x^2-2x+3\right)^5}{10} + c$

45. $\int \frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}}dx = \int 3x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$\frac{3}{14}\int 14x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{14}\cdot\frac{(1+7x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3\sqrt{1+7x^2}}{7} + c$

46. $\int \frac{8x^2}{\left(x^3+2\right)^2}dx = \int 8x^2\,(x^3+2)^{-2}dx =$

$\frac{8}{3}\int 3x^2\,(x^3+2)^{-2}dx = \frac{8}{3}\cdot\frac{\left(x^3+2\right)^{-1}}{-1} + c = -\frac{8}{3(x^3+2)} + c$

47. $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+3}}dx = \int 3x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\int 2x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\,dx =$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{9\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}{4} + c$

48. $\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \int x(1-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{4} + c$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}}dx = \int x^2(x^3+5)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^2+5)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+5)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{4\sqrt[4]{(x^3+5)^3}}{9} + c$

50. $\int x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}}dx =$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3-1)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5\sqrt[5]{(x^3-1)^8}}{24} + c$

51. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx = \int \sqrt{x^2(1-2x^2)}\,dx = \int x\sqrt{1-2x^2}dx = \int x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{4}\int -4x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{6} + c$

52. $\int (e^x+1)^3e^x dx = \frac{(e^x+1)^4}{4} + c$

53. $\int sen^3x(cos\,x)\,dx = \frac{sen^4x}{4} + c$

54. $\int x(cos^4x^2)sen\,x^2\,dx = -\frac{1}{2}\int 2x\,(cos^4x^2)(-sen\,x^2)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{cos^5x^2}{5} + c = -\frac{cos^5x^2}{10} + c$

55. $\int \frac{x\cdot ln(x^2+3)}{x^2+3}\,dx = \int ln\,(x^2+3)\cdot\frac{x}{x^2+3}dx =$

$\frac{1}{2}\int \ln(x^2+3)\cdot\frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{ln^2|x^2+3|}{2} + c = \frac{ln^2|x^2+3|}{4} + c$

56. $\int \frac{sen\,x}{cos^3x}dx = \int cos^{-3}x(sen\,x)dx =$

$-1\int cos^{-3}x(-sen\,x)dx = -1\cdot\frac{cos^{-2}x}{-2} + c = \frac{cos^{-2}x}{2} + c = \frac{1}{2cos^2x} + c$

57. $\int \frac{e^x}{2e^x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{2e^x-3}dx = \frac{1}{2}\cdot ln|2e^x-3| + c$

58. $\int tg^5x(sec^2x)dx = \frac{tg^6x}{6} + c$

59. $\int \frac{sec^2\,3x}{tg\,3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cdot sec^2\,3x}{tg\,3x}dx = \frac{1}{3}\cdot ln\,|tg\,3x| + c$

60. $\int \frac{ln(x)}{3x}dx = \frac{1}{3}\int ln\,|x|\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{ln^2|x|}{2} + c = \frac{ln^2|x|}{6} + c$

Ejercicio 2

$1)\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x+2}} = \int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x+2| + C$

$2)\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{2x-3}} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

$3)\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x-1}} = \int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1| + C$

$4)\int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

$5)\int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1-2x^3}}\mathbf{dx} = \frac{-1}{6}\int \frac{-6x^2}{1-2x^3} = \frac{-1}{6}\ln|2x^3-1| + C$

$6)\int \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{1-x^3}}\mathbf{dx} = \frac{-1}{3}\int \frac{3x^2}{1-x^3}dx = \frac{-1}{3}\ln|x^3-1| + C$

$7)\int \frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{x^2+2}}\mathbf{dx} = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + C$

$\mathbf{8)}\int \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3x+5}}\mathbf{dx} = \frac{4}{3}\int \frac{3}{3x+5}dx = \frac{4}{3}\ln|3x+5| + C$

$9)\int \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2+2x+2}}\mathbf{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + C$

$10)\int \left(\sqrt{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right)\mathbf{dx} = \int \sqrt{x}dx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x| + C$

$11)\int \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^2}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{x}}\right)\mathbf{dx} = \int 3x^{-2} + \frac{2}{x} + x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{3x^{-1}}{-1} + 2\ln(x) + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -3x^{-1} + 2\ln(x) + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

$12)\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{xlnx}} = \ln(|\ln|x||) + C$

$13)\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x}}(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{x}})} = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}dx = -2\int \frac{-1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}dx = -\,2\ln(|1-\sqrt{x}|) + C$

$14)\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x+1}}\mathbf{dx} = \frac{1}{2}(\int \frac{2}{(2x-1)}dx - \int \frac{2}{(2x-1)}dx) = \frac{1}{2}\ln(|2x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|2x+1|) + C$

$15)\int \frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{e^x+1}}\mathbf{dx} = \ln(e^x+1) + C$

$16)\int \frac{\mathbf{e^{2x}}}{\mathbf{e^{2x}+3}}\mathbf{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3) + C$

$17)\int \mathbf{tan(x)\,dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$

$18)\int \frac{\mathbf{cos(x)}}{\mathbf{sin(x)}}\mathbf{dx} = \ln(|\sin(x)|) + C$

19) $\int \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{xln(x)}}\mathbf{dx} = 5\ln(|\ln(x)|) + C$

20) $\int \frac{\mathbf{sin(x)+cos(x)}}{\mathbf{cos(x)}}\mathbf{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx + \int 1dx = -\ln(|\cos(x)|) + x + C$

21) $\int \frac{\mathbf{2\,sin(x)\,cos(x)}}{\mathbf{1+sin(x^2)}}\mathbf{dx} = \ln(|1 + \sin(x^2)|) + C$

22) $\int \frac{\mathbf{sin(x)-cos(x)}}{\mathbf{sin(x)+cos(x)}}\mathbf{dx} = -\ln(|\sin(x) + \cos(x)|) + C$

23) $\int \mathbf{x\cot x^2\,dx} = \frac{1}{2}\int 2x\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}dx = \frac{\ln(|\sin x^2|)}{2} + C$

Ejercicio 3

Si $\int e^x\,dx = e^x + C,\qquad \int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C,$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\quad y\quad \int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C,$ calcula:

1. $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$
2. $\int a^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4(a^{4x})dx = \frac{a^{4x}}{4\ln a} + C$
3. $\int e^{-x}dx = -1\int(-1)(e^{-x})dx = \frac{-1}{e^x} + C$
4. $\int 4e^{3x}dx = 4(\frac{1}{3})\int 3(e^{3x})dx = \frac{4e^{3x}}{3} + C$
5. $\int(3x^2 \cdot e^{x^3+2})\,dx = e^{x^3+2} + C$
6. $\int(4e^{4-x})dx = 4 \cdot (-1)\int(-1)(e^{4-x})dx = -4(e^{4-x}) + C$
7. $\int(x^2e^{x^3})\,dx = \frac{1}{3}\int\left[3x^2(e^{x^3})\right]dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$
8. $\int(e^x + 1)^2\,dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(1) + 1^2]dx = \int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx =$

   $= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + C$
9. $\int\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \int(e^x + e^{-x})^2 dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2]dx$

   $= \int e^{2x}\,dx + \int 2dx + \int e^{-2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} + C$
10. $\int(e^x + x^6)^2 dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(x^6) + (x^6)^2]dx =$

    $= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + \int 2(e^x)(x^6)\,dx\;(por\ partes) + \int x^{12}dx =$

    $= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x(x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720\,) + \frac{x^{13}}{13} + C$ -

11. $\int e^{-x^2+2}\,xdx = \frac{-1}{2}\int e^{-x^2+2}\,(-2x)dx = \frac{-\left(e^{-x^2+2}\right)}{2} + C$

12. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = \int \frac{x}{x}dx = \int dx = x + C$

13. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3}dx = \frac{-1}{2}\int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3}dx = \frac{-1}{2}e^{\frac{1}{x^2}} + C$

14. $\int xe^{\sin x^2}\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{\sin x^2}\cos x^2\,dx = \frac{e^{\sin x^2}}{2} + C$

15. $\int (e^{3\cos 2x}\sin 2x)dx = \frac{-1}{6}\int (-6)\,(e^{3\cos 2x}\sin 2x)dx = \frac{-e^{3\cos 2x}}{6} + C$

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}dx = \frac{1}{5}\cdot 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{5} + C$

17. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int e^{\cos x}\,(-\sin x)\,dx = -e^{\cos x} + C$

18. $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x-3}\right)dx = \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e}x - e^{x-3} + C$

19. $\int e^{\tan 2x}\sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{\tan 2x}\sec^2 2x\,dx = \frac{e^{\tan 2x}}{2} + C$

20. $\int \frac{2x}{3}(3^{3+5x^2})dx = \frac{2}{3}\int x(3^{3+5x^2})dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)\int 10x(3^{3+5x^2})dx = \frac{1}{15}\left(\frac{3^{3+5x^2}}{\ln 3}\right) + C$

$$\int \frac{x}{2}(2^{3-5x^2})dx = \frac{1}{2}\int x\left(2^{3-5x^2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\int (-10x)\left(2^{3-5x^2}\right)dx = \frac{-1}{20}\left(\frac{2^{3-5x^2}}{\ln 2}\right) + C$$

Ejercicio 4

Sabiendo que $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int f'(x)\cdot\sin f(x) = -\cos f(x) + C$,

$\int \cos x dx = \sin x + C$ y $\int \cos f(x)\cdot f'(x) = \sin f(x) + C$ calcula:

1. $\int \sin(2x+8)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+8)2dx = \frac{-\cos(2x+8)}{2} + C$

2. $\int \sin\frac{x}{2}dx = 2\int \sin(\frac{x}{2})(\frac{1}{2})dx = -2\cos\frac{x}{2} + C$

3. $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3(\cos(3x)dx) = \frac{\sin 3x}{3} + C$

4. $\int x\sin x^2dx = \frac{1}{2}\int 2x(\sin x^2)\,dx = \frac{-\cos x^2}{2} + C$

5. $\int (\frac{3\sin x - 2\cos x}{4})dx = \frac{1}{4}\int (3\sin x - 2\cos x)dx = \frac{-3\cos x}{4} - \frac{\sin x}{2} + C$

6. $\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(\sin 2x)dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C$

7. $\int e^x\cos e^x\,dx = \sin e^x + C$

8. $\int x\cos(2x^2)\cdot\sin(2x^2)dx = \frac{1}{4}\int 4x\cos(2x^2)\cdot\sin(2x^2)dx = -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + C$

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot\sin(lnx)\,dx = -\cos(lnx) + C$

Ejercicio 5

1) $\int x(1+\tan x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+\tan x^2)\,dx = \frac{1}{2}tan(x^2)+C$

2) $\int (1+\tan x)^2\,dx = \int (1+tan^2x+2\tan x)dx = \int ((1+tan^2x)+2\tan x)dx = \tan x - 2\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \tan x - 2\ln|\cos x| + C$

3) $\int tan^2\,3x\,dx = \int (1-1+tan^2\,3x)dx = \frac{1}{3}\int 3(1+tan^2\,3x)\,dx - \int 1\,dx =$

$= \frac{1}{3}\cdot \tan 3x - x + C$

Ejercicio 6.

Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

1) $\int (2+5x)^4dx = \int t^4\cdot\frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int t^4dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^5}{5} = \frac{t^5}{25} = \frac{(2+5x)^5}{25}+c$

t = 2+5x , dt = 5 dx $\rightarrow dx = \frac{1}{5}dt$

2) $\int (3+4x)^6dx = \int t^6\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^6dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^7}{7} = \frac{t^7}{28} = \frac{(3+4x)^7}{28}+c$

t = 3+4x , dt = 4x dx $\rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

3) $\int 6x(3+x^2)^5dx = \int 6x\cdot t^5\cdot\frac{1}{2x}dt = \int 3t^5dt = 3\int t^5dt = \frac{3t^6}{6} = \frac{t^6}{2} = \frac{(3+x^2)^6}{2}+c$

t =3 + x^2 , dt = 2x dx $\rightarrow dx = \frac{1}{2x}dt$

4) $\int [\frac{3}{5+4x}+\frac{3}{(5+4x)^3}]dx = \int [\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{4}]dt + \int [\frac{3}{t^3}\cdot\frac{1}{4}]dt = \int [\frac{3}{4t}]dt + \int [\frac{3}{4t^3}]dt =$

$\frac{3}{4}\int [\frac{1}{t}]dt + \frac{3}{4}\int [\frac{1}{t^3}] = \frac{3}{4}\int [\frac{1}{t}]dt + \frac{3}{4}\int [t^{-3}]dt = \frac{3}{4}\ln|t| + \frac{3}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} = \frac{3}{4}\ln|t| - \frac{3t^{-2}}{8} =$

$\frac{3}{4}\ln|t| - \frac{3}{8t^2} = \frac{3}{4}\ln|5+4x| - \frac{3}{8(5+4x)^2}+c$

t = 5+4x , dt = 4 dx $\rightarrow dx = \frac{1}{4}dt$

5) $\int (\sqrt{3+2x}+\sqrt[3]{3+2x})dx = \int (\sqrt{t}+\sqrt[3]{t})\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int (t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{3}})dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} =$

$$=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{8}=\frac{\sqrt{t^3}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8}=\frac{\sqrt{(3+2x)^3}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{(3+2x)^4}}{8}+c$$

t = 3+2x , dt = 2 dx $\rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

6) $\int(\frac{e^x-4}{e^{2x}})dx=\int(\frac{t-4}{t^2})\cdot\frac{1}{t}dt=\int(\frac{t-4}{t^3})dt=\int(\frac{t}{t^3})dt-\int(\frac{4}{t^3})dt=$

$$=\int(\frac{1}{t^2})dt-4\int(\frac{1}{t^3})dt=\int t^{-2}dt-4\int t^{-3}dt=\frac{t^{-1}}{-1}-\frac{4t^{-2}}{-2}=\frac{-1}{t}+\frac{2}{t^2}=\frac{-1}{e^x}+\frac{2}{e^{2x}}+c$$

$t=e^x$, $dt=e^x dx\rightarrow dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t}dt$

7) $\int\sin^3(x)\cdot\cos(x)dx=\int t^3\cdot\cos(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}dt=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}=\frac{\sin^4(x)}{4}+c$

$t=\sin(x)$, $dt=\cos(x)dx\rightarrow dx=\frac{1}{\cos(x)}dt$

8) $\int(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})dx=\int(\frac{\sin(x)}{t})\cdot\frac{-1}{\sin(x)}dt=\int\frac{-1}{t}dt=-\ln|t|=-\ln|\cos(x)|+c$

$t=\cos(x)$, $dt=-\sin(x)dx\rightarrow dx=\frac{-1}{\sin(x)}dt$

9) $\int(\frac{\cos(x)}{\sin^4(x)})dx=\int(\frac{\cos(x)}{t^4})\cdot\frac{1}{\cos(X)}dt=\int(\frac{1}{t^4})dt=\int t^{-4}dt=\frac{t^{-3}}{-3}=\frac{-1}{3t^3}=\frac{-1}{3\sin^3(x)}+c$

$t=\sin(x)$, $dt=\cos(x)dx\rightarrow dx=\frac{1}{\cos(x)}dt$

10) $\int x\sqrt{x^2+4}dx=\int x\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2x}dt=\int(\frac{\sqrt{t}}{2})dt=\int(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2})dt=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 2}=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}{3}+c$

$t=x^2+4$, dt = 2x dx $\rightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$

11) $\int(\frac{e^x+3}{e^{2x}})dx=\int(\frac{t+3}{t^2}\cdot\frac{1}{t})dt=\int(\frac{t+3}{t^3})dt=\int(\frac{t}{t^3})dt+\int(\frac{3}{t^3})dt=$

$$\int t\cdot t^{-3}dt+\int 3t^{-3}dt=\int t^{-2}dt+\int 3t^{-3}dt=\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{3t^{-2}}{-2}=\frac{-1}{t}-\frac{3}{2t^2}=\frac{-1}{e^x}-\frac{3}{2e^{2x}}+c$$

$t=e^x$, $dt=e^x dx\rightarrow dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t}dt$

12) $\int(\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}})dx=\int(\frac{-t+2}{t^3}\cdot\frac{1}{t})dt=\int(\frac{-t+2}{t^4})dt=\int(\frac{-t}{t^4})dt+\int(\frac{2}{t^4})dt=$

$$\int(-t)\cdot t^{-4}dt+\int 2t^{-4}dt=\int(-t^{-3})dt+\int 2t^{-4}dt=\frac{t^{-2}}{2}-\frac{2t^{-3}}{3}=\frac{e^{-2x}}{2}-\frac{2e^{-3x}}{3}+c$$

$$t = e^x \qquad , \qquad dt = e^x dx \to dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$$

Ejercicio 7.

1) $\int 3x \cos x \, dx =$

dv = cos x dx u = 3x ; v = sen x du = 3 dx

=3x · (sen x) - ∫ sen x · 3 dx = 3x · sen x + 3 · cos x + C

2) $\int x^2 \cdot \text{sen } x \, dx =$

dv = sen x dx u = x² ; v = -cos x du = 2x dx

=x² · (-cos x) - ∫ (- cos x)· 2x dx =

dv = -cos x dx u = 2x ; v = - sen x du = 2

= (x² · (- cos x)) – [2x · (- sen x) - ∫ (- sen x) · 2 dx]=
= x² · (- cos x) + 2x · (sen x) - 2 · (-cos x) + C =
= - x² cos x + 2x sen x + 2 cos x + C

3) $\int x^2 \ln x \, dx =$

dv = x² dx u = lnx ; $v = \frac{x^3}{3}$ $du = \frac{1}{x}$

$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3x} dx =$

$= \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$

4) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x \, dx =$

$dv = \sqrt{x} \, dx = x^{\frac{1}{2}} dx$ u = lnx; $v = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ $du = \frac{1}{x} dx$

$= \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3} dx =$

$= \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \ln x \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

5) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx =$

$dv = x^{-2} dx$ u = lnx ; $v = \frac{x^{-1}}{-1}$ $du = \frac{1}{x} dx$

$= \int \ln x \cdot x^{-2} dx = \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{x^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \int \frac{x^{-1}}{-x} dx =$

$= \ln x \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\ln x \, \frac{1}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\ln x \, \frac{1}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} + C =$

$= -\ln x \, \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + C$

6) $\int 2e^x \cdot \cos x\, dx =$ (cambios 1)

$2e^x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x \cdot 2e^x dx =$ (cambios 2)

$= 2e^x \cdot \text{sen } x - [2e^x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot 2e^x\, dx\,] =$

$= 2e^x \cdot \text{sen } x - [2e^x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \cdot 2e^x\, dx\,] =$

$2e^x \cdot \text{sen } x + 2e^x \cdot \cos x - \int \cos x \cdot 2e^x\, dx\,]$ (haciendo $\boxed{\int \cos x \cdot 2e^x dx = I}$)

$I = 2e^x \cdot \text{sen } x + 2e^x \cdot \cos x - I$

$2I = 2e^x \cdot \text{sen } x + 2e^x \cdot \cos x$

$I = e^x \cdot \text{sen } x - e^x \cdot \cos x + C$

Cambios 1
dv = cos x dx
$u = 2e^x$
v = sen x
$du = 2e^x dx$

Cambios 2
dv = sen x
$u = 2e^x$
v = - cos x
$du = 2e^x\, dx$

Ejercicio 8

1) $\int_1^3 \frac{dx}{2x} = \int_1^3 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\ln(|x|)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\ln(|3|) - \frac{1}{2}\ln(|1|) = \frac{1}{2}\ln(3)$

2) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln(|t|)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln(|x^2-1|)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln(|3^2-1|) - \frac{1}{2}\ln(|2^2-1|) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{3} dt = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\, dt = \frac{1}{3}(-\cos(t))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}(-\cos(3x))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)}{3} - \left(-\frac{\cos\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$

5) $\int_{-4}^{4} |x|\, dx = \int_{-4}^{0} -x\, dx + \int_0^4 x\, dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8 + 8 = 16$

6) $\int_{-1}^{1}\left(3x^2 - 2x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1} 3x^2\, dx - \int_{-1}^{1} 2x\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dx = \left(x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(1^3 - 1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1\right) - \left((-1)^3 - (-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot(-1)\right) = 3$

7) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x-3}\right) dx = \int_{-1}^{2} \frac{2}{x+2} dx - \int_{-1}^{2} \frac{3}{x-3} dx = (2\ln(|x+2|) - 3\ln(|x-3|))\Big|_{-1}^{2} = 10\ln(2)$

8) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{3a}{5} - \frac{x}{2}\right) dx = \int_{-2}^{2} \frac{3a}{5} dx - \int_{-2}^{2} \frac{x}{2} dx =$

$$\left(\frac{3ax}{5}-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|\begin{matrix}2\\-2\end{matrix}=\frac{3a\cdot 2}{5}-\frac{2^2}{4}-\left(\frac{3a\cdot(-2)}{5}-\frac{(-2)^2}{4}\right)=\frac{12}{5}a$$

Ejercicio 9

Halla el valor de b para que se cumpla $\int_{-1}^{b}(2bx-3x^2)dx=-12$.

1. Se resuelve la integral con la incógnita b:

$$\int_{-1}^{b}(2bx-3x^2)dx=2b\frac{x^2}{2}-3\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{b}=bx^2-x^3]_{-1}^{b}$$

2. Sustituimos los límites de integración:

$$(b\cdot b^2-b^3)-(b\cdot(-1)^2-(-1)^3)=b^3-b^3-b-1=-b-1$$

3. Igualamos el resultado a -12:

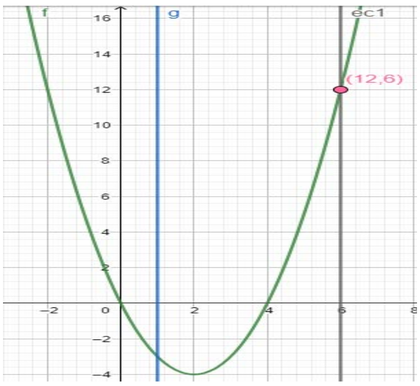
$$-b-1=-12\rightarrow -b=-12+1\rightarrow -b=-11\rightarrow b=11$$

Resultado: b=11

Ejercicio 10

Halla el área entre la función $f(x)=x^2-4x$, el eje de abscisas, y las rectas x=1 y x=6.

1. Hacemos el gráfico:



2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:

$$f(x)=x^2-4x\rightarrow x^2-4x=0\rightarrow x(x-4)=0\rightarrow x_1=0,\qquad x_2=4$$

3. Hallamos el área de las dos zonas de áreas obtenidas; de x=1 a x=4, y de x=4 a x=6:

$\int_1^4(x^2-4x)dx=\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}\Big]_1^4=\frac{x^3}{3}-2x^2]_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-2\cdot 1^2\right)=-9u^2$

Como es un área tomamos su valor positivo.

$\int_4^6(x^2-4x)dx=\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}\Big]_4^6=\frac{x^3}{3}-2x^2]_4^6=\left(\frac{6^3}{3}-2\cdot 6^2\right)-\left(\frac{4^3}{3}-2\cdot 4^2\right)=\frac{32}{3}u^2$

4. Sumamos ambas áreas:

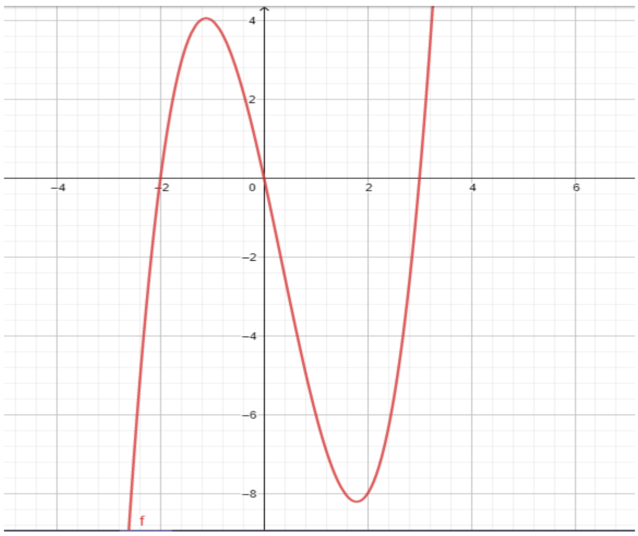
$$\frac{32}{3} + (9) = \frac{59}{3}\ u.a.$$

Resultado: El área es $\frac{59}{3}$ u.a.

Ejercicio 11

Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abscisas.

1. Hacemos el gráfico:



2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:
$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \to x^3 - x^2 - 6x = 0 \to x(x^2 - x - 6) = 0 \to \quad x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$

3. Hallamos el área de las dos zonas obtenidas; de x=-2 a x=0, y de x=0 a x=3:

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)dx =$$

$$\left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-2}^{0} - \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right)\right]_{0}^{3} =$$

$$\left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3 \cdot (-2)^2\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 3^2\right) = 10{,}42u^2$$

Resultado: El área es $\frac{125}{12}$ u.a.

Ejercicio 12

Halla el área delimitada por las gráficas:

a) $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ **e** $y - x - 1 = 0$

Ponemos las ecuaciones en función de x.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

$$g(x) = x + 1$$

Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte: $\frac{1}{2}x^2 - x + 1 = x + 1$

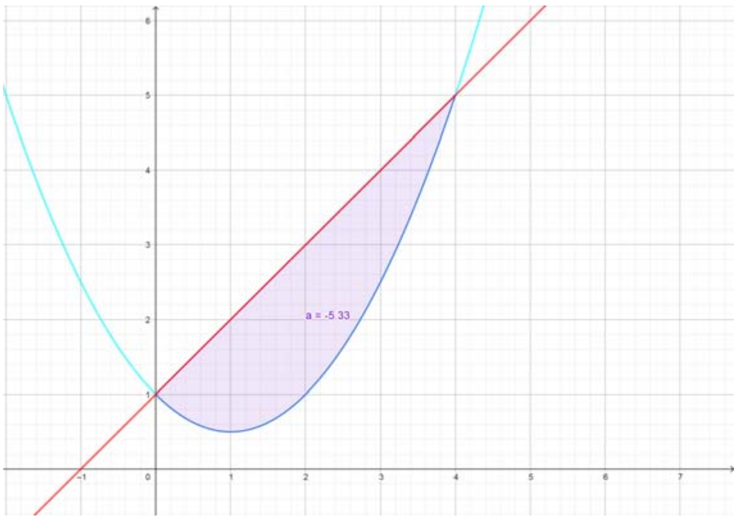
$$\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0 \quad ; \quad x\left(\frac{1}{2}x - 2\right) = 0$$

$$x = 0$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0 \ ; \quad \frac{x}{2} = 2 \ ; \quad x = 2 \cdot 2 \quad ; \quad x = 4$$

Los puntos de corte son x=0 y x=4.

Área=$\left|\int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx\right| = \left|\int_0^4 \left(\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) - (x+1)\right)dx\right| = \left|\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1 - x - 1\right)dx\right| = \left|\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)dx\right| = \left|\frac{x^3}{6} - x^2\right]_0^4\right| = \left|\left(\frac{4^3}{6} - 4^2\right) - \left(\frac{0^3}{6} - 0^2\right)\right| = \left|\left(\frac{64}{6} - 16\right) - (0)\right| = \left|\left(-\frac{16}{3}\right) - 0\right| = \left|-\frac{16}{3}\right| = \frac{16}{3}\ u.a. = 5{,}3\ u.a.$



b)

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x} \quad y \quad g(x) = x^2}$$

Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte:

$$\sqrt{x} = x^2 \ ; \ \left(\sqrt{x}\right)^2 = (x^2)^2 \quad ; \quad x = x^4 \quad ; \quad x^4 - x = 0 \quad ; \quad x(x^3 - 1) = 0$$

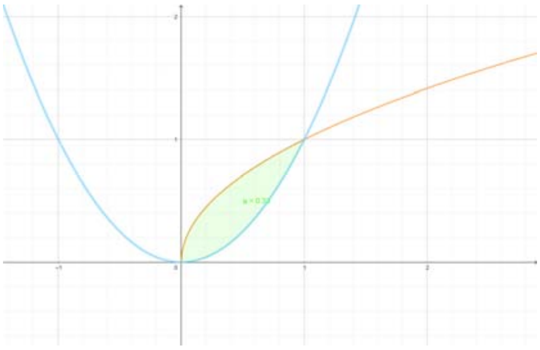
$$x = 0$$

$$(x^3 - 1) = 0 \ ; \quad x^3 = 1 \ ; \ x = \sqrt[3]{1} \quad ; \quad x = 1$$

Los puntos de corte son x=0 y x=1.

Área=$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2\sqrt{x^3} - x^3}{3}\Big]_0^1 =$

$$\left(\frac{2\sqrt{1^3}-1^3}{3}\right)-\left(\frac{2\sqrt{0^3}-0^3}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)-(0)=\frac{1}{3}u.a.$$



c)

$$\mathbf{f(x)=x^2+x+4 \quad y \quad g(x)=-x^2+2x+5}$$

Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte:

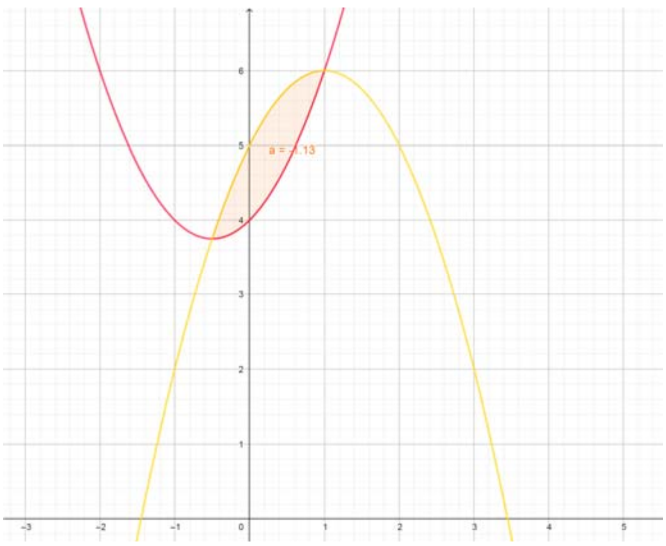
$x^2+x+4=-x^2+2x+5 \quad ; \quad 2x^2-x-1=0$

$x=1$

$x=-\frac{1}{2}$

Los puntos de corte son x=1 y x=$-\frac{1}{2}$

$$\text{Área}=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(f(x)-g(x))dx\right|=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}((x^2+x+4)-(-x^2+2x+5))\,dx\right|=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(x^2+x+4+x^2-2x-$$
$$5)\,dx\right|=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-x-1)\,dx\right|=\left|\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1}\right|=\left|\left(\frac{2\cdot1^3}{3}-\frac{1^2}{2}-1\right)-\left(\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right|=$$
$$\left|\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{7}{24}\right)\right|=\left|-\frac{5}{6}-\frac{7}{24}\right|=\left|-\frac{9}{8}\right|=\frac{9}{8}\ u.a.=1{,}125\ u.a.$$



Ejercicio 13

Halla el área de la región limitada por la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje de abcisas.

<u>**1er paso**</u>: Se igualan las funciones para saber los puntos de corte:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \qquad \rightarrow \qquad x^3 - x^2 - 6x = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 0};\ \boldsymbol{x = -2};\ \boldsymbol{x = 3}$$

$$g(x) = o$$

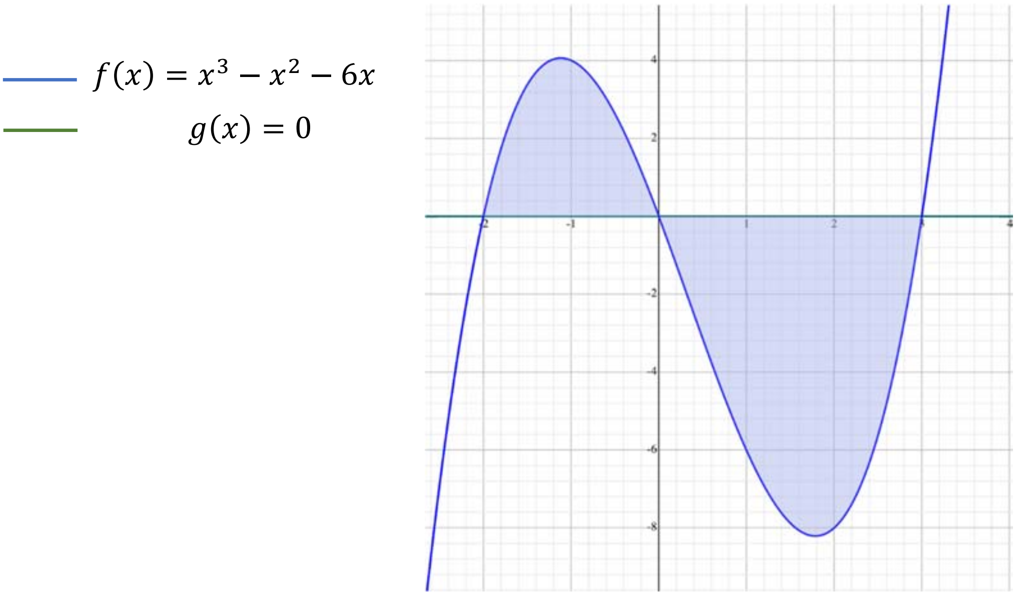
<u>**2º paso:**</u> Se calcula el área entre las curvas como:

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \right|$$

$$A = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)\ dx\right| + \left|\int_0^3 (x^3 - x^2 - 6x)\ dx\right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{0}^{3} \right| =$$

$$= \left|0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2\right]\right| + \left|0 - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3(-2)^2\right]\right| = \frac{253}{12} = \boldsymbol{21,0833\ u^2}$$



Ejercicio14

Calcula el área de la porción del plano que limitan las curvas $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

e $y - x - 1 = 0$ $(y = x + 1)$

<u>**1er paso**</u>: Se igualan las funciones para saber los puntos de corte:

$$f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x^2 - x + 1} \qquad g(x) = x + 1 \rightarrow \frac{1}{2}\boldsymbol{x^2 - x + 1} = x + 1 \rightarrow \frac{1}{2}\boldsymbol{x^2 - x + 1 = o}$$

$\boldsymbol{x = 0}$; $\boldsymbol{x = 4}$

<u>2º paso:</u> Se calcula el área entre las curvas como:

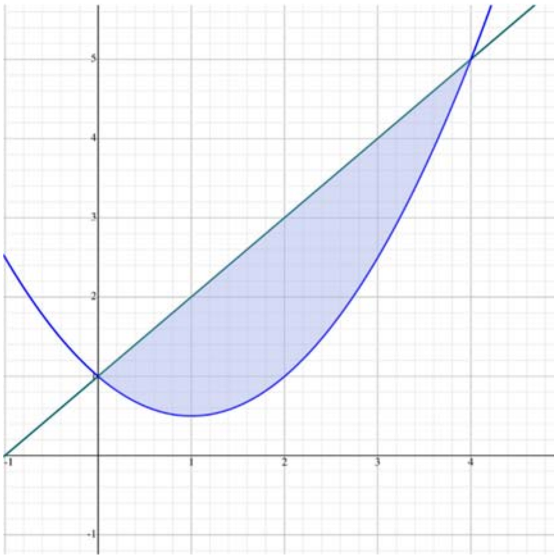
$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^4 \left[\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{1} \right) - (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}) \right]\ dx \right| = \left| \int_0^4 \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{2x} \right) dx \right| = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_0^4 =$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4^3}{3} - 4^2 \right) - 0 = \frac{16}{3} = \boldsymbol{5,3\ u^2}$$

$f(x) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{1}$

$g(x) = x + 1$



IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Ejercicios Autoevaluación

1) Los valores de a, b y c para los que $\mathrm{F}(x) = ax^3 - be^x + c\sin x$ es una primitiva de la función $f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5\cos x$ son:

$\mathrm{F}(x) = ax^3 - be^x + c\sin x$
$f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5\cos x$

F'(x)= f(x)

$$\mathrm{F}'(x) = 3ax^2 - be^x + c\cos x$$

a= 1 b=7 c=5

La respuesta correcta es la b)

2) La integral indefinida $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$ vale:

$$\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx = \int x(2x^2+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+3)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6} + C$$

La respuesta correcta es la b)

3) La integral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ vale:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}dx = \int \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}dx$$

A (1+x) + B(1-x) = 1

x=1 2B = 1 B=$\frac{1}{2}$

x= -1 2A = 1 A=$\frac{1}{2}$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{1+x}dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

La respuesta correcta es la d)

4) Al integrar por partes $\int x\cdot\sin x\,dx$ se obtiene:

$u = x \qquad du = 1\,dx$
$dv = \sin x \qquad v = -\cos x$

$$\int x\cdot\sin x\,dx = x\cdot(-\cos x) + \int \cos x\cdot dx$$

$$x\cdot(-cosx) + senx = -x\cdot cosx + senx + C$$

La respuesta correcta es la c)

5) La integral $\int (x^2 + 4x + 13)\,dx$ vale:

$$\int (x^2+4x+13)\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 13x + C$$

La respuesta correcta es la d)

6) La integral $\int e^x \cos e^x \, dx$ vale:

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + C$$

Con esta fórmula podemos ver que la derivada de f(x) en este caso e^x es la misma e^x

Luego $\int e^x \cos e^x \, dx = \sin e^x + C$

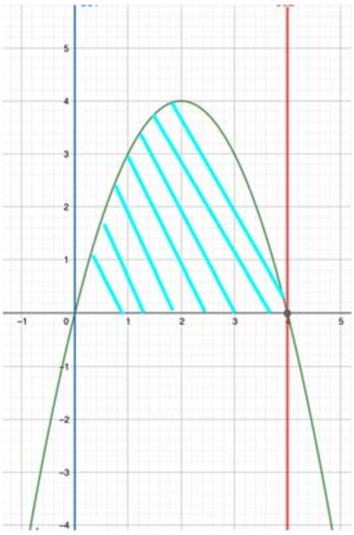
La respuesta correcta es la a)

7) La integral definida $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$ vale:

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin x\Big]_0^{\pi} = \sin \pi - (\sin 0) = 0$$

La respuesta correcta es la c)

8) Para hallar el área comprendida entre la función $f(x) = -x^2 + 4x$, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=4, debemos representar dicha función y ver el área que comprende:



Una vez que tenemos la gráfica, y vemos el dónde corta la función con el eje y con las rectas, comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

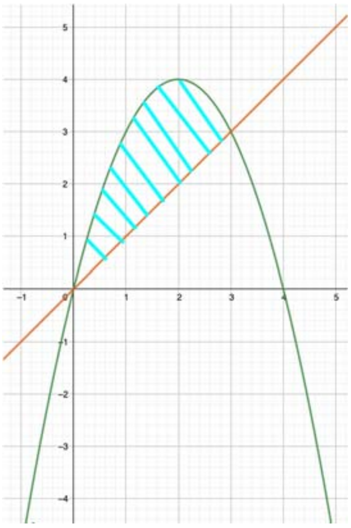
$$\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\Big]_0^4$$

$$\left(-\frac{4^3}{3} + \frac{4 \cdot 4^2}{2}\right) - (0) = \frac{32}{3}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

La respuesta correcta es la b)

9) Para hallar el área comprendida entre las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$, debemos representar ambas funciones y ver el área que comprenden:



Una vez que tenemos la gráfica, y vemos el dónde corta f(x) con g(x), debemos sacar los puntos de corte y, una vez hallados comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

Puntos de corte: Para hallarlos debemos igualar las funciones y despejar la incógnita "x".

$$-x^2 + 4x = x$$

$$0 = x^2 - 3x$$

$$0 = x(x-3)$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

Ahora ya podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^3 [(-x^2+4x)-(x)]\,dx = \int_0^3 (-x^2+3x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^3$$

$$\left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3\cdot 3^2}{2}\right) - (0) = \frac{9}{2}$$

La respuesta correcta es la a)

10) La regla de Barrow sirve para…:

resolver integrales definidas.

La respuesta correcta es la c)

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 7: Probabilidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: ADRIAN, ADRIANA, ALICIA, ÁLVARO, ARÍSTIDES, JAIME, KASSANDRA, LUCÍA, LUIS, PALOMA, PATRICIA, SARA, TERESA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

- **a)** El número de habitantes de las provincias de España. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$
- **b)** El área de un cuadrado del que se conoce el lado. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$
- **c)** Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos. $Si\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$
- **d)** Saber si el próximo año es bisiesto. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$

2.- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: *"Escribir en seis tarjetas cada una de las letras la palabra MONEDA y sacar una al azar".*

Suceso A {salir **m**}, suceso B {salir **o**}, suceso C {salir **n**}, suceso D {salir **e**} y suceso E {salir **d**}, suceso I {salir **a**},

Espacio muestral {M, O, N, E, D, A}

3.- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: "Sacar una bola de una bosa que tiene bolas rojas, negras y blancas ".

Suceso A {sacar una bola **roja**}, suceso B {sacar una bola **negra**}, suceso C {sacar una bola **blanca**},
Espacio muestral {R, N, B}

4.- Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos dados.*

Suceso A {entre los dos dados obtener una **suma mayor que 6**}, suceso B {sacar un **1** en uno de los dos dados}

5. Comprueba, utilizando el ejemplo anterior, que se verifican las 10 propiedades del Algebra Sucesos. Por ejemplo: Vamos a comprobar la ley de Morgan: $\boldsymbol{A \cap B^C = A^C \cap B^C}$

Suceso A obtener par. $\boldsymbol{A = \{2, 4, 6\}}$ Suceso B obtener múltiplo de 3. $\boldsymbol{B = \{3, 6\}}$
Suceso C obtener impar. $\boldsymbol{C = \{1, 3, 5\}}$
$\boldsymbol{A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}}$, $\boldsymbol{A \cap B = \{6\}}$, $A - B = \{2,4\}$

Ley de Morgan
FÓRMULA:$\boldsymbol{(A \cap B)^C = A^C \cup B^C}$
$A \cap B = \{6\} \to (A \cap B)^C = \{1,2,3,4,5\}$
$A = \{2,4,6\} \to A^C = \{1,3,5\}; B = \{3,6\} \to B^C = \{1,2,4,5\}; A^C \cup B^C = \{1,2,3,4,5\}$

PROPIEDAD ASOCIATIVA
FÓRMULA: $\boldsymbol{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$
$(A \cup B) = \{2,3,4,6\}$, $C = \{1,3,5\}$; $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$
$A = \{2,4,6\}$, $(B \cup C) = \{1,3,5,6\}$; $A \cup (B \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\}$

PROPIEDAD CONMUTATIVA
FÓRMULA: $A \cup B = B \cup A$

$A \cup B = \{2,3,4,6\}$
$B \cup A = \{2,3,4,6\}$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA
FÓRMULA: $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$
$A = \{2,4,6\}$, $(B \cap C) = \{3\}$; $A \cup (B \cap C) = \{2,3,4,6\}$
$(A \cup B) = \{2,3,4,6\}$, $(A \cup C) = \{1,2,3,4,5,6\}$; $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{2,3,4,6\}$

PROPIEDAD SIMPLIFICATIVA
FÓRMULA: $\boldsymbol{A \cup (B \cap A) = A}$
$\boldsymbol{A} = \{2,4,6\}$, $(B \cap A) = \{6\}$; $A \cup (B \cap A) = \{2,4,6\}$
$\boldsymbol{A} = \{2,4,6\}$

6. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un oro y A al suceso sacar un rey. Escribe los sucesos: A ∪ B, A ∩ B, A – B, $\boldsymbol{A^C}$, $\boldsymbol{(A \cup B)^C}$, $\boldsymbol{A^C \cup B^C}$.

B= $\{2O, 3O, 4O, 5O, 6O, SO, CO, RO, As\ de\ Oro\}$

A= $\{RO, RC, RE, RB\}$

A ∪ B= $\{1O, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, SO, CO, RO, As\ de\ Oro, RC, RE, RB\}$

A ∩ B=

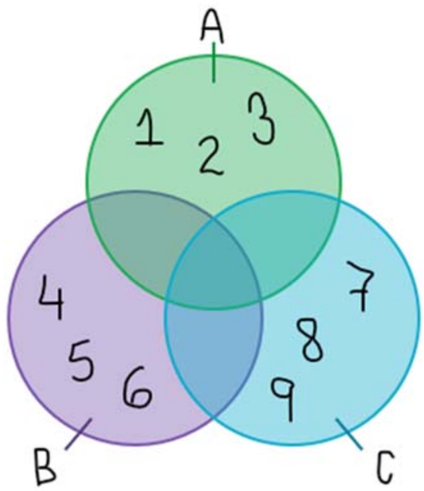
A – B= $\{RC, RE, RB\}$

A^C = $\left\{\begin{matrix} 1O, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, SO, CO, As\ de\ Oro, 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, SC, CC, \\ As\ de\ Copas, 1E, 2E, 3E, 4E, 5E, 6E, SE, CE, As\ de\ Espadas, \\ 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, SB, CB. As\ de\ Bastos. \end{matrix}\right\}$

$(A \cup B)^C$ =$\left\{\begin{matrix} 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, SC, CC, As\ de\ Copas, \\ 1E, 2E, 3E, 4E, 5E, 6E, SE, CE, As\ de\ Espadas, \\ 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, SB, CB, As\ de\ Bastos. \end{matrix}\right\}$

$A^C \cup B^C$ =$\left\{\begin{matrix} 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, SC, CC, RC, As\ de\ Copas, \\ 1E, 2E, 3E, 4E, 5E, 6E, SE, CE, RE, As\ de\ Espadas, \\ 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, SB, CB, RB, As\ de\ Bastos. \end{matrix}\right\}$

7. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $\boldsymbol{A \cup B \cup C}$ como unión de conjuntos disjuntos.
Respuesta:
En teoría de conjuntos, dos conjuntos son disjuntos o ajenos si no tienen ningún elemento en común. Un ejemplo sería la siguiente imagen:

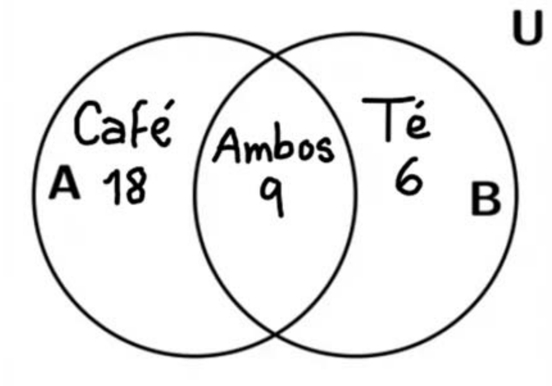


8. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que, en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas A que toman té, 27 que toman café B y 2 personas que no toman ninguna bebida: (A ∪ B) C.

A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas? Escríbelo en función de A y B, y represéntalo en el diagrama de Venn.

Respuesta:

Café: 27 personas. Té: 15 personas.



27 + 15 = 42

Hay 2 personas que no toman nada, por lo tanto 33 personas en total toman alguna bebida.

42 – 33 = 9

Hay 9 personas que toman café y té.

B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?

Respuesta:

Café: 27 – 9 = 18 Té: 15 – 9 = 6

C) Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados:

Toman café: A = 27 Toman té: B = 15

a) Toman café y té.

Respuesta:

A ∩ B= 9

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

b) No toman ni café ni té.
Respuesta:
$\overline{A} \cap \overline{B} = 2$

c) Toman té o bien toman té.
Respuesta:
A ∪ B = 42

d) Toman té y no toman café.
Respuesta:
$A \cap \overline{B} = 6$

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.
Respuesta:
Toman café 27, únicamente café 18, toman café y té 9 personas; A/B = 9.

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras e indícalo en el diagrama.
Respuesta:
Toman únicamente té: $A \cap \overline{B} = 6$
No toman nada: $\overline{A} \cap \overline{B} = 2$
No toman café: $\overline{B} = 8$

F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos medidas.
Respuesta:
No toman ninguna de las dos bebidas: 2
Solo toman café: 18
Solo toman té: 6
Toman las dos: 9
En total 33 personas toman una de las dos bebidas frente a las 2 personas que no toman ninguna de las dos, que suman las 35 personas.

9. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.
Como hay cuatro palos y las espadas son uno de ellos, entonces dividimos 1 entre 4:

$$P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

10. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?
Respuesta:
En la de frecuencias relativas, porque si hubiese la misma probabilidad de ser zurdo que de ser diestro, habría aproximadamente los mismos zurdos que diestros.

11 Calcula la probabilidad de, al tirar un dado dos veces, sacar un 6 doble

Un dado tiene 6 caras, en este caso como el dado se lanza dos veces
6 x 6 = 36 posibles resultados
Mientras que solo hay un resultado favorable
Probabilidad = Casos favorables/Casos posibles
Por lo tanto, el resultado es **1/36**

12 Al tirar un dado, calcula la probabilidad de que salga un múltiplo de 2 o bien un múltiplo de 3

Los casos posibles al lanzar un dado son: 1,2,3,4,5,6
Entre estos solo el 2, 4 y 6 son múltiplos de 2
Por lo tanto, aplicando la fórmula, la probabilidad de que salga un múltiplo de dos es: **3/6** (Casos favorables/ Casos posibles)

¿Y la probabilidad de que salga un múltiplo de 3?
Los múltiplos de 3 son el 3 y el 6 por lo tanto la probabilidad es de: **2/6**

13 Al tirar un dado calcula la probabilidad de que salga un múltiplo de dos y además un múltiplo de 3
Los múltiplos de 2 son: 2,4 y el **6**
Los múltiplos de 3 son: 3 y **6**
Como solo coincide el 6 solo tenemos un caso favorable por lo tanto si la probabilidad es: Casos favorables/Casos posibles
El resultado es **1/6**

14 Al tirar un dado, calcula la probabilidad de que salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2
Un dado tiene 6 caras, por lo tanto:
Números menores que le 4 solo están: **3**,2 y 1
Números mayores que 2: **3**,4,5 y 6
El único número que coincide es el 3 por lo tanto la probabilidad es de **1/6** (Casos favorables/ Casos posibles)

15. Al tirar un dado, calcula la probabilidad de salga un número menor que 4 y además un número mayor que 2.

Si suponemos que es un dado de 6 caras:

A = {menor que 4 y mayor que 2} = { 3 } P(A) = 1/6

16. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea 7.

Antes de todo, sabemos que hay 36 casos posibles y después buscamos los casos favorables, los cuales son (*1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 y 6+1*).

Entonces, utilizando la Regla de Laplace $P(Suceso) = \frac{Casos favorables}{Casos posbiles}$, la probabilidad es $\frac{6}{36} \rightarrow \frac{1}{6}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

17. Tiramos dos dados. Calcula la probabilidad de que la suma de sus caras superiores sea menor que 7.

Antes de todo, hacemos esta tabla para buscar la suma de los dos dados.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	7
2	**3**	**4**	**5**	**6**	7	8
3	**4**	**5**	**6**	7	8	9
4	**5**	**6**	7	8	9	10
5	**6**	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Como sabemos que todos estos sucesos son equiprobables, podemos utilizar la Regla de Laplace $P(Suceso) = \frac{Casos favorables}{Casos posbiles}$, por lo tanto, la probabilidad es $\frac{15}{36} \rightarrow \frac{5}{12}$

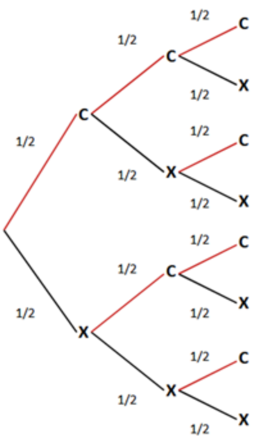
18 ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 6 al tirar un dado? ¿Y de sacar un 7? ¿Y de sacar un número menor que 5 o bien un número mayor que 3?

Si el dado tiene 6 caras, la probabilidad de no sacar un 6 es: $\frac{5}{6}$.

Sacar un 7 en un dado es un caso imposible, por lo cual la probabilidad es 0.

A = {menor que 5 o mayor que 3} = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } P(A) = 1

19. Al tirar una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.



La probabilidad de no sacar ninguna cara es

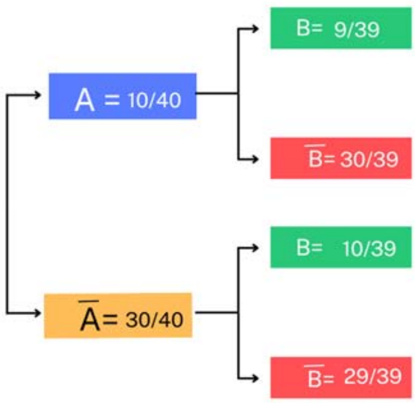
$$P(3X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

La probabilidad de sacar al menos una cara es

$$P(Almenos 1C) = 1 - P(Ninguna Cara) = 1 - \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow P(Almenos 1 cara) = \frac{7}{8}$$

20. En tu cuaderno haz un diagrama en árbol similar al anterior con los sucesos A y B: A = sacar un oro en la primera extracción, $\overline{A}$ = no sacar oro, y B = sacar un oro en la segunda extracción, $\overline{B}$= no sacar oro en la segunda extracción. ¿Cuál es la probabilidad de sacar oro en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Y la de no sacar oro en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos oros? ¿Y la de sacar un solo oro? ¿Y la de sacar al menos un oro?



a) Probabilidad de sacar oro en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera:

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A})\cdot P(B/\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{30}{40}\cdot\frac{10}{39}}{\frac{30}{40}} = \frac{10}{39}$$

b) Probabilidad de no sacar oro en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera:

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B}\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}/\bar{A})}{P(\bar{A})} = = \frac{29}{39}$$

c) Probabilidad de sacar dos oros:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39} = \frac{90}{1560} = \frac{3}{52}$$

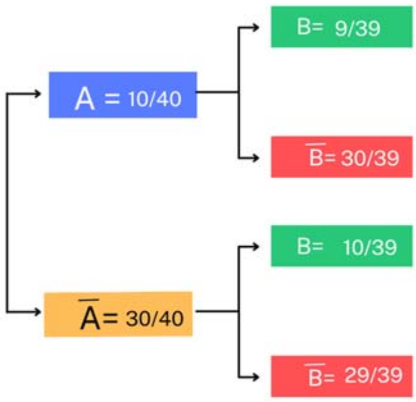
d) Probabilidad de sacar un oro:

$$P(A\cap\bar{B}) + P(\bar{A}\cap B) = P(A)\cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A})\cdot P(B) = \frac{10}{40}\cdot\frac{30}{39} + \frac{30}{40}\cdot\frac{10}{39} = \frac{300}{1560} + \frac{300}{1560} = \frac{600}{1560} = \frac{5}{13}$$

e) Probabilidad de sacar al menos un oro:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{10}{40} + \frac{9}{39} - \frac{3}{52} = \frac{390}{1560} + \frac{360}{1560} - \frac{90}{1560} = \frac{640}{1560} = \frac{16}{39}$$

21. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de “no salen 2 oros” y la de “no sale ningún oro”.



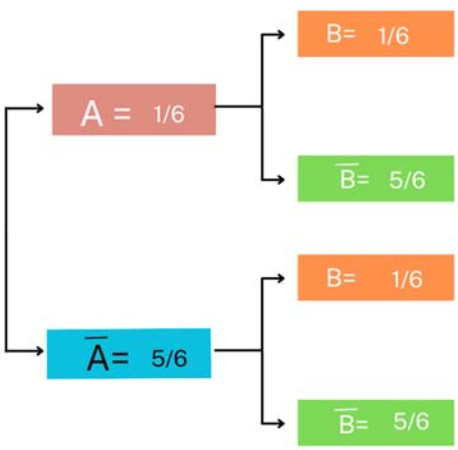
a) Probabilidad de que no salgan dos oros:

$$1 - P(A \cap B) = 1 - (\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - (\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39}) = 1 - \frac{3}{52} = \frac{49}{52}$$

b) Probabilidad de que no salga ningún oro:

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} = \frac{870}{1560} = \frac{29}{52}$

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. Ayuda: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de no sacar ningún 6, y utilizar el suceso contrario.



Suceso A= sacar un seis en la 1a tirada.
Suceso B= sacar un seis en la 2a tirada.

P (al menos un 6)= 1- P(ningún 6)=

$$1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \cdot \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) =$$
$$= 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 10, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. Calcula:

a) $\boldsymbol{P(A)}$ ***y*** $\boldsymbol{P(B)}$:

Suceso A={5,5; 4,6; 6,4}
Suceso B={1,3; 3,1; 2,4; 4,2; 3,5; 5,3; 4,6; 6,4}

Del total de posibilidades (6·6=36 posibilidades), la probabilidad de que ocurra el suceso A, $P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, y la probabilidad de que ocurra el suceso B, $P(B)$=$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

b) $\boldsymbol{P(A \cap B)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{108} = \frac{1}{54}$

$$P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{108}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = \frac{11}{12} \cdot \frac{2}{9} = \frac{22}{108} = \frac{11}{54}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{11}{12} \cdot \frac{7}{9} = \frac{77}{108}$$

c) $\boldsymbol{P(A/B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/54}{2/9} = \frac{9}{108} = \frac{1}{12}$

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{7/108}{7/9} = \frac{63}{756} = \frac{9}{108}$$

$$P(\overline{A}/B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{11/54}{2/9} = \frac{99}{108} = \frac{11}{12}$$

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:
(a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.
(b) La probabilidad de que no ocurra B.
(c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.
(d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{16}{24} + \frac{18}{24} - \frac{15}{24} = \frac{19}{24}$

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

d) $P(A/B) = = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5/8}{3/4} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14 % de los clientes compra el producto A y un 12 % compra el producto B. Además, un 4 % compra A y B, un 2 % compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B.

$P(A) = 0.14, P(B) = 0.12, P(A \cap B) = 0.04, P(A \cap C) = 0.02, P(B \cap C) = 0 \;\; P(A \cup B \cup C) = 1$

(a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B?

Sólo es B= 12 - 4 = 8% clientes.

(b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C pero no B?

Sabiendo que es de A que haya comprado en C pero no

$$P(C \cap \overline{B}/A) = \frac{2}{100} = 0.02$$

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio.
Sabiendo que $p(A)=\frac{1}{3}$, $p(B)=\frac{1}{5}$ y $p(A\cup B)=\frac{7}{15}$, hallar:

a) La probabilidad de que se verifique A y B.

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{7}{15}$;

$P(A\cap B)=\frac{1}{15}$

b) La probabilidad de que se verifique A y no B.

$P(A\cap \bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$

c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}\right)=\frac{8}{15}$

d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B.

$P\left(\frac{\bar{A}}{\bar{B}}\right)=\frac{P(\bar{A}-\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{\frac{11}{15}}{\frac{4}{5}}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A)=\frac{3}{4}$; $P(B)=\frac{1}{2}$; $P(\bar{A}\cap \bar{B})=\frac{1}{20}$ Calcular: $P(A\cup B)$, $P(A\cap B)$, $P(\bar{A}/B)$, $P(\bar{B}/A)$.

$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{1}{20}$

$P(A\cup B)=1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{19}{20}=\frac{3}{10}$

$P(\bar{A}/B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$

$P(\bar{B}/A)=\frac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{3}{10}}{\frac{3}{4}}=\frac{3}{5}$

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B/A)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.
Calcula razonadamente: a) $P(A\cap B)$. b) $P(B)$. c) $P(\bar{B}/A)$ d) $P(\bar{A}/\bar{B})$
Nota. $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T .

a) $P(A\cap B)=P(A).P(B/A)=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

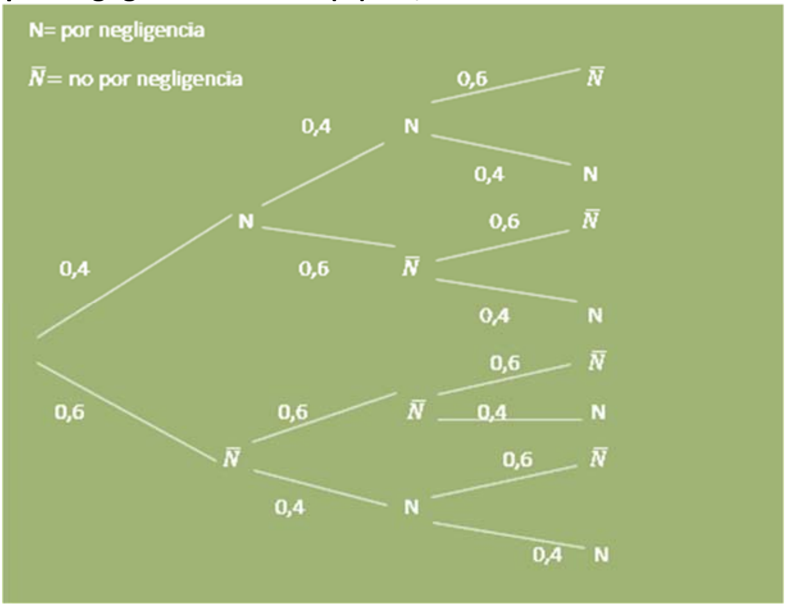
$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{12}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=P(B)$; $P(B)=\frac{1}{4}$

c) $P(\bar{B}/A)=\frac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)-P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$

d) $P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{P(\bar{B})}=\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$

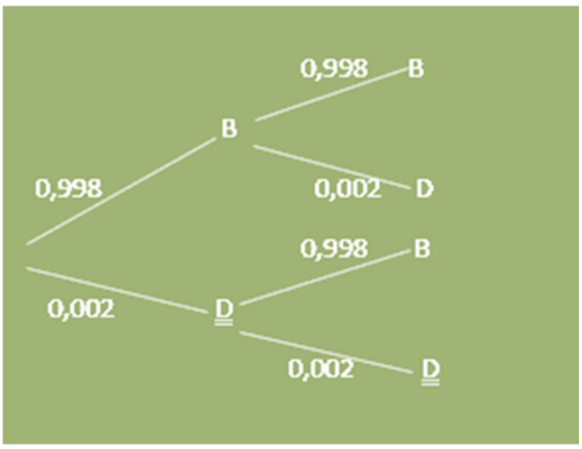
29.Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo P(N) = 0,4



P(N) = 0,4
P(al menos 1 intencionado) = 1 – P(ninguno intencionado) = 1 – (0,6·0,6·0,6) = 0,784

30.Una fábrica de móviles desecha normalmente el 0,02 % de su producción por fallos debidos al azar . Calcula la probabilidad de que:
a) Al coger dos móviles al azar haya que desechar ambos.
b) Al coger dos móviles al azar haya que desechar sólo uno.
c) Al coger dos móviles al azar no haya que desechar ninguno.
d) Verificamos 3 móviles, calcula la probabilidad de desechar los tres.
e) Calcula la probabilidad de al verificar 3 móviles rechazar sólo el tercero.

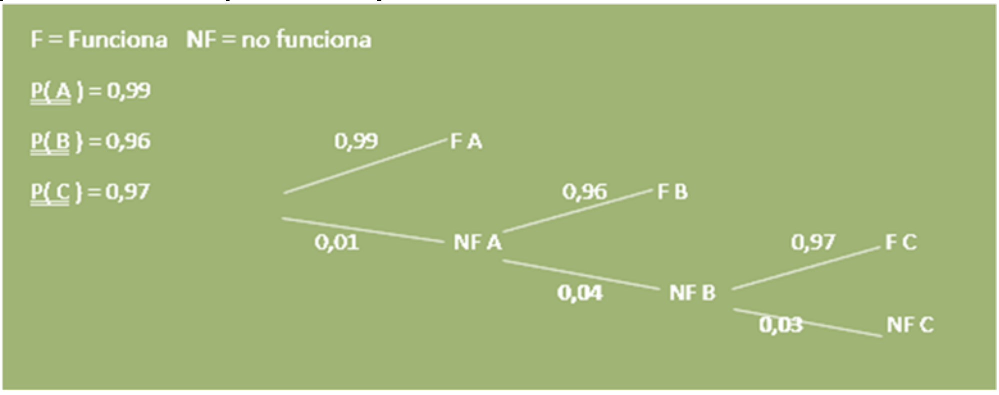
B= Bueno 0,02% de la producción defectuosa D= Defectuoso



a) P (D∩D) = P(D) · P(D) = 0,002 · 0,002 = 0,000004
b) P(B∩D) + P(D∩B) = 2 · P(B) · P(D) = 2(0,998 · 0,002) = 0,003992
c) P(B∩B) = P(B) · P(B) = 0,998 · 0,998 = 0,996004

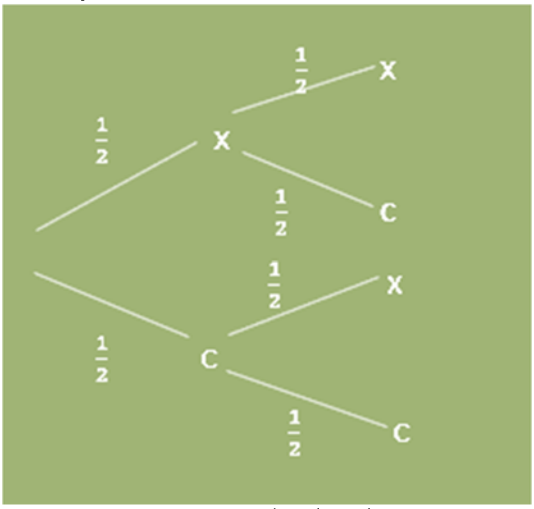
d) P(D∩D∩D) = P(D) · P(D) · P(D) = 0,002 · 0,002 · 0,002 = 0,000000008
e) P (defectuoso el tercero) = P(B) · P(B) · P(D) = 0,998 · 0.998 · 0,002 = 0,001992008

31.En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: P(A) = 0.99; P(B) = 0.96 y P(C) = 0.97.
a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos.
b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.



a) P(fallen los 3) = P(NF A ∩ NF B ∩ NF C) = 0,01 · 0,04 · 0,03 = 0,000012
b) P(todo F) = 1 – P(fallen los 3) = 1 – 0,000012 = 0,999988

32.Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que:
A) La experiencia termine al segundo lanzamiento.
B) Termine al tercer lanzamiento.
C) Termine en el cuarto.
D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento).



a) P(C∩C) + P(X∩X) = P(C) · P(C) + P(X) · P(X) = $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$
b) P(termine en el tercero) = P(C) · P(X) · P(C) + P(C) · P(X) · P(X) = $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

c) P(termine en el cuarto) = P(C) · P(X) · P(X) · P(C) + P(X) · P(C) P(C) · P(X) = $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$

d) P(a lo sumo en el cuarto) = P(segundo) + P(tercero) +P(cuarto) = $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

33. Se ha hecho un estudio sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes posibilidades reflejadas en la tabla de contingencia.
a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

	Accidentes en carretera (C)	Accidentes en zona urbana (U)	Totales
Accidentes con víctimas (V)	0.3	0.1	0.4
Accidentes con solo daños materiales (M)	0.4	0.2	0.6
Totales	0.7	0.3	1

b) Determina las siguientes probabilidades;

1. $P(V \cap C) = 0.3$
2. $P(V \cap U) = 0.1$
3. $P(M \cap C) = 0.4$
4. $P(M \cap U) = 0.2$
5. $P(V) = 0.4$
6. $P(M) = 0.6$
7. $P(C) = 0.7$
8. $P(U) = 0.3$

c) Calcula

1. $P(U/V) = P(U \cap V)/P(V) = 0.1 \div 0.4 = \frac{1}{4} = 0.25$
2. $P(C/V) = P(C \cap V)/P(V) = 0.3 \div 0.4 = \frac{3}{4} = 0.75$
3. $P(V/U) = P(V \cap U)/P(U) = 0.1 \div 0.3 = \frac{1}{3}$
4. $P(V/C) = P(V \cap C)/P(C) = 0.3 \div 0.7 = \frac{3}{7}$

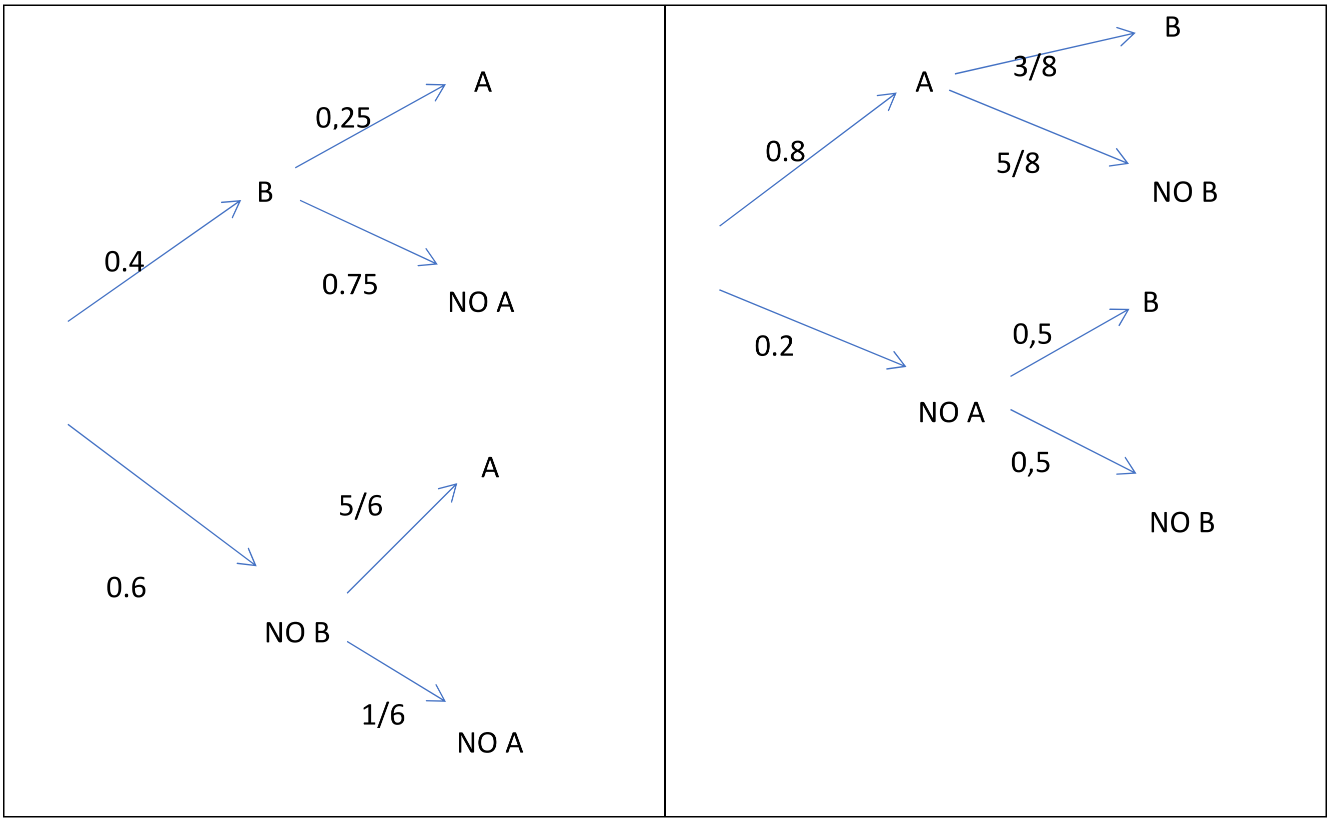
¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?
Se puede afirmar que accidente con víctimas (V) y accidente en carretera (C) son dependientes ya que;
$P(V \cap C) = 0.3$ Y $P(V) \times P(C) = 0.4 \times 0{,}7 = 0.28$
Luego $P(V \cap C) \neq P(V) \times P(C)$

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes pueden ser de carretera (C) o urbanos (U) pero que ahora los clasificamos en leves (L), graves (G) y mortales (M). Observa que lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

	Accidentes en carretera (C)	Accidentes urbanos (U)	Totales
Leves (L)	0.2	0.1	0.3
Graves (G)	0.3	0.2	0.5
Mortales (M)	0.1	0.1	0.2
Totales	0.6	0.4	1

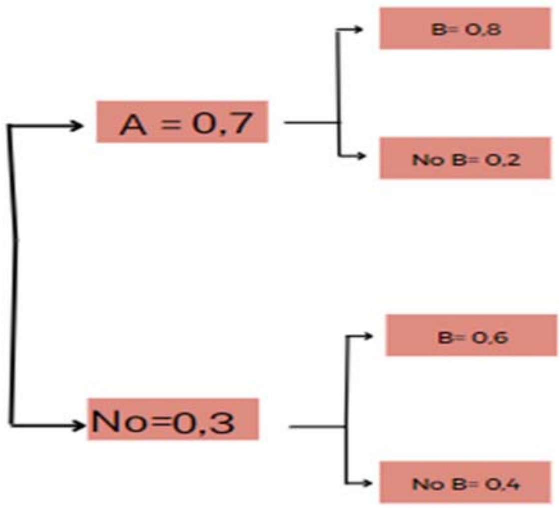
35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol

	A	NO A=Ā	Totales
B	0.3	0.1	0.4
NO B=¯B	0.5	0.1	0.6
Totales	0.8	0.2	1



36. Dado el diagrama de árbol del margen, complétalo calculando las probabilidades de las intersecciones, construye la tabla de contingencia asociada, y después otro diagrama de árbol.

	A	$\overline{A}$	
B	0,56	0,24	0,8
$\overline{B}$	0,14	0,06	0,2
	0,7	0,3	1



P (A∩B)= P (A). P (B/A) =0,7. 0,8 = 0,56
P (A ∩ $\overline{B}$)=P (A). P ($\overline{B}$/A)= 0,7. 0,2= 0,14
P ($\overline{A}$ ∩B)= P ($\overline{A}$). P (B/$\overline{A}$) =0,3. 0,6 = 0,18
P ($\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$)= P ($\overline{A \cup B}$)=1- P (A∩ B)=1-0,56=0,44

37. Se sabe que, en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

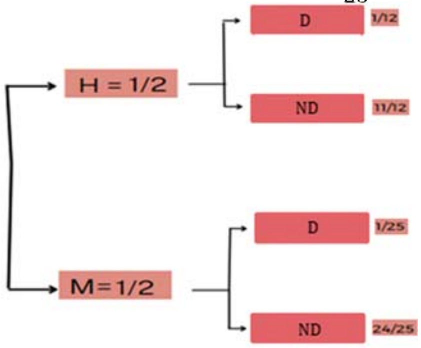
a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

H= Hombre , M= Mujer ; D= Daltónico , ND= No daltónico

$\mathrm{P}\,(\mathrm{D} \cap \mathrm{H}) = \frac{1}{12}$, $\mathrm{P}\,(\mathrm{D} \cap \mathrm{M}) = \frac{1}{25}$

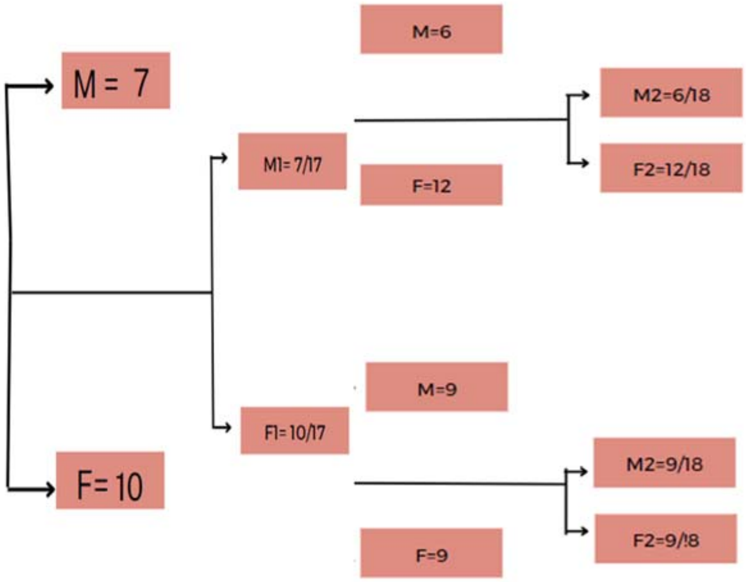


a) P (D/H)= $\frac{P\,(D\cap H)}{P\,(H)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$

b) P (D/M)= $\frac{P\,(D\cap M)}{P\,(M)} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{25}$

c) P(D) = P(H∩D)+ P(M∩D) = $\frac{1}{12} + \frac{1}{25} = \frac{37}{300}$

38. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación, se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:



a) El segundo caramelo sea de fresa.

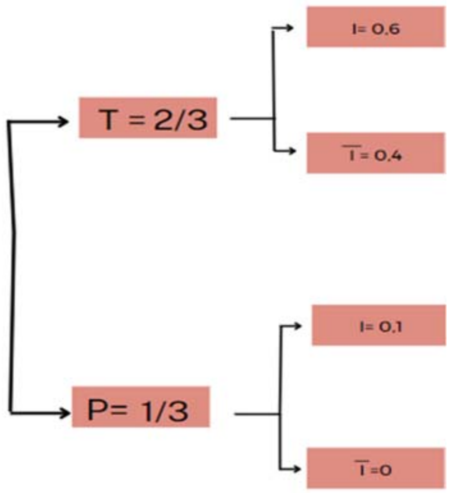
P (F2)= P (M1∩ F2) + P (F1∩F2)= P (M1). P (F2/M1)+ P (F1). P (F2/F1) = $\frac{7}{17}\frac{2}{3}.\frac{10}{17}.\frac{1}{2} = \frac{29}{51}$

b) El segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero.

P ((M1∩ M2)∪ (F1∩F2))= P (M1∩ M2) + P (F1∩F2)= P (M1). P (M2/M1)+ P (F1). P (F2/F1) = $\frac{7}{17}\frac{1}{3} + \frac{10}{17}.\frac{1}{2} = \frac{22}{51}$

39. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40 % de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.

T= Turista; P= Preferente; I= Inglés



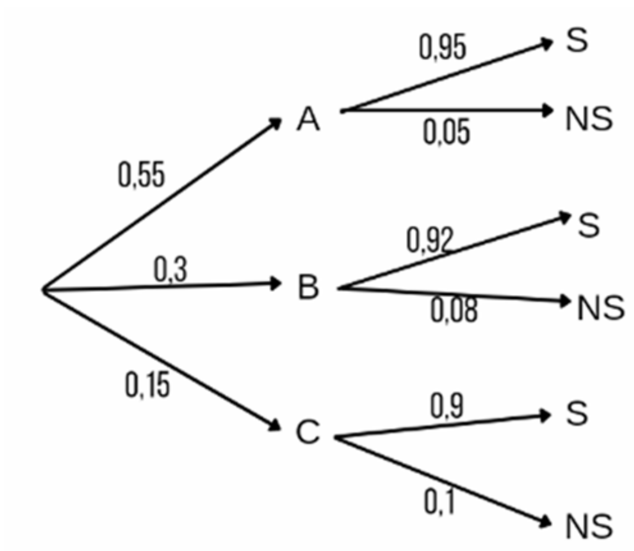
a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

P (I)= P (T). P (I/T) +P (P). P (I/P)=$\frac{2}{3}.0,6+\frac{1}{3}.1=0,733$

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

P (T/I)= $\frac{\mathrm{P\ (T\cap I)}}{\mathrm{P\ (I)}}$ = $\frac{\mathrm{P\ (T/I)}}{\mathrm{P\ (T),P\ (T/I)+P(P).P(I/P)}}=\frac{\frac{2}{3}.0,6}{0,733}=0,545$

40. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B ni el 10% de los restantes del C. El 55% de los arreglos se encargan al sastre A, el 30% al B y el 15% restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:
a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo
b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A



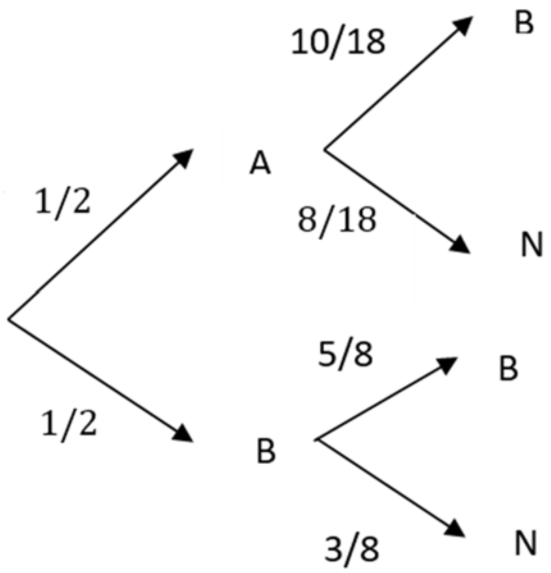
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

a) P(NS) = P(A ∩NS) + P(B ∩NS) + P(C ∩NS) = P(A) · P(NS/A) + P(B) · P(NS/B) + P (C) · P (NS/C) =
= 0,55 · 0,05 + 0,3 · 0,15 · 0,1 = **0,0665**

b) P (A/NS) = $\frac{P(A \cap NS)}{P(NS)} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}05}{0{,}0665}$ = **0,413**

La probabilidad de que el cliente no quede satisfecho con el arreglo es de 0,0665 y si el cliente no queda satisfecho la probabilidad de que el arreglo lo hiciera el sastre A es de 0,413.

41. Tenemos dos urnas, *A* y *B*. La primera con 10 bolas blancas y 8 bolas negras. La segunda con 5 bolas blancas y 3 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?



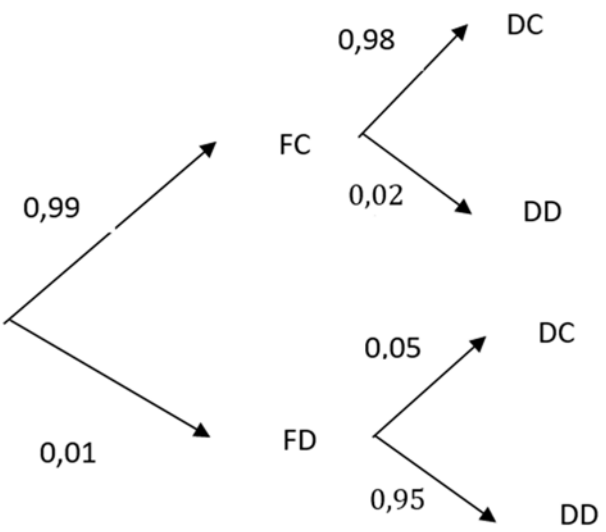
P(A/N) = $\frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{18}}{\frac{77}{144}} = \frac{32}{77}$

P(N) = P(A ∩N) + P(B ∩N) = P(A) · P(N/A) + P(B) · P(N/B) = $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{18}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}\right) = \frac{77}{144}$

La probabilidad de que proceda de la urna A es de $\frac{32}{77}$

42. En un proceso de fabricación de bombillas se detecta que el 1 % salen defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 95 % de las bombillas defectuosas, pero señala como defectuosas un 2 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcta una bombilla que el dispositivo ha calificado como defectuosa. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuosa una bombilla que el dispositivo ha calificado como correcta. Ay*uda:* Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra



	Fabricado Correcto(FC)	FabricadoDefectuoso (FD)	
DETECTADO como Correcto(DC)	**0,9702**	**0,0005**	**0,9707**
DETECTADO como Defectuoso (DD)	**0,0198**	**0,0095**	**0,0293**
	0,99	0,01	**1**

A) P (FC/DD) = $\frac{P(FC\cap DD)}{P(DD)} = \frac{P(FC)\cdot P(DD/FC)}{P(DD)} = \frac{0{,}99\cdot 0{,}02}{0{,}0293}$ = 0,6757

P(DD) = P(FC∩DD) + P(FD∩DD) = P(FC) · P(DD/FC) + P(FD) · P(DD/FD) =

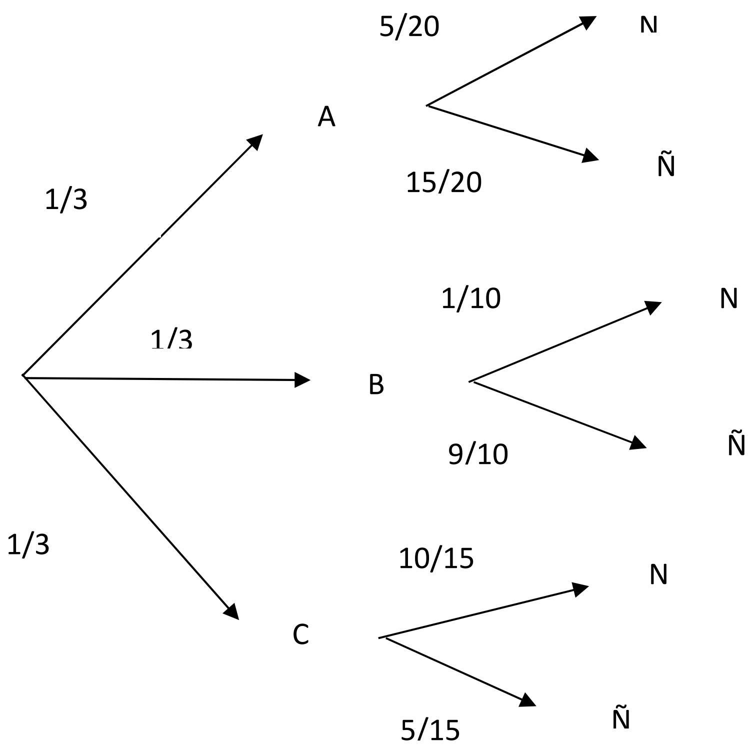
= $(0{,}99\cdot\ 0{,}02) + (0{,}01\ \cdot 0{,}95)\ = 0{,}0293$

B) P(FD/DC) = P$\frac{P(FD\cap DC)}{P(DC)} = \frac{0{,}0005}{0{,}9707} = 0{,}000515$

P(DC) = 1 - P(DD) = 1 – 0,0293 = 0,9707

43. Se tienen 3 cajas, *A*, *B* y *C*. La caja *A* tiene 20 bolas de las cuales 5 son negras. La caja *B* tiene 10 bolas con una bola negra. La caja *C* tiene 15 bolas con 10 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar, y es negra. Calcula la probabilidad de que se haya sacado de la caja C.

.



$$P(C/N) = \frac{P(C\cap N)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{15}}{\frac{61}{180}} = \frac{40}{61}$$

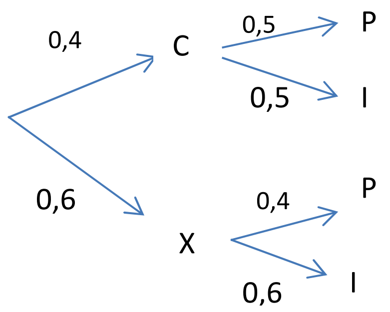
P(N) = P(A ∩N) + P(B ∩N) + P(C ∩N) = P(A) · P(N/A) + P(B) · P(N/B) + P(C) · P(N/C) =

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{20}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15}\right) = \frac{61}{180}$$

La probabilidad de que se haya sacado de la caja C es de $\frac{40}{61}$

44. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es 0,4. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 10, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 5. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.

C=Cara ; X=Cruz ; P=Par ; I=Impar



$$P(I) = P(C\cap I) + P(X\cap I) = (0{,}4\cdot 0{,}5) + (0{,}6\cdot 0{,}6) = 0{,}2 + 0{,}36 = 0{,}56$$

Resultado. La probabilidad de que el número escogido sea impar es del 56%.

45. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55% de los trabajadores se clasifican como deportistas o lectores, el 40% como deportistas y el 30% lectores. Se elige un trabajador al azar:

L= Lector D= Deportista

P(D U L)= 0,55 ; P (D)= 0,4 ; P (L)= 0,3

a) **Calcúlese la probabilidad de que sea deportista y no lector.**

$$P(D \cap L) = P(D) + P(L) - P(D \cup L) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}55 = 0{,}15$$
$$P(D \cap No\ L) = P(D) - P(D \cap L) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25$$

Resultado. La probabilidad de que sea deportista y no lector es del 25%.

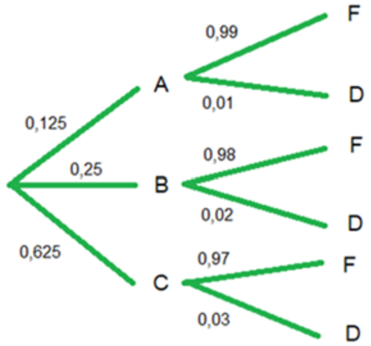
b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

$$P\left({}^{D}/_{L}\right) = \frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$$

Resultado. La probabilidad de que sea deportista, sabiendo que es lector es del 50%.

46. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0,01, de que lo sea uno fabricado en B es 0,02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0,03. En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 e la C.

$$P(A) = \frac{15}{120} = 12{,}5\% \quad ; \quad P(B) = \frac{30}{120} = 25\% \quad ; \quad P(C) = \frac{75}{120} = 62{,}5\%$$



F = Funcional

D = Defectuoso

a) **Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso.**

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) = (0{,}125 \cdot 0{,}99) + (0{,}25 \cdot 0{,}98) + (0{,}625 \cdot 0{,}97) = 0{,}975$$

Resultado. La probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea funcional es del 97,5%.

b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

$$P(D) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$$
$$P\left({}^{B}/_{D}\right) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}02}{0{,}025} = 0{,}2$$

Resultado. La probabilidad de que sea de la máquina B, sabiendo que es defectuoso, es del 20%.

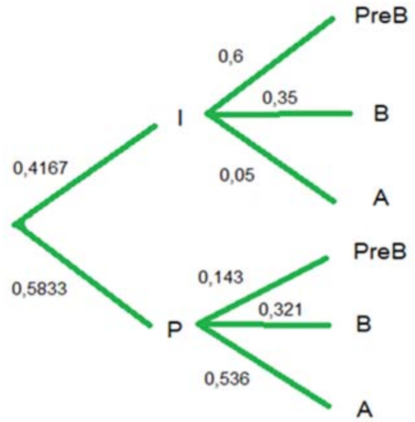
47. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías prebenjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.
I=Iniciación ; P=Perfeccionamiento ; PreB= Prebenjamín ; B= Benjamín ; A= Alevín

$P(I) = \frac{200}{480} = 0{,}4167 = 41{,}67\%$; $P(P) = \frac{280}{480} = 0{,}5834 = 58{,}34\%$

$P(PreB) = \frac{160}{480} = 0{,}3333$; $P(B) = \frac{160}{480} = 0{,}3333$; $P(A) = \frac{160}{480} = 0{,}3333$



a) **¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?**

$P(I) = \frac{200}{480} = 0{,}4167$

Resultado. La probabilidad de que esté en el curso de iniciación es de 41,67%.

b) **¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?**

$P(P \cup A) = P(P) + P(A) - P(P \cap A) = \frac{280}{480} + \frac{160}{480} - \frac{150}{480} = \frac{290}{480} = 0{,}6$

Resultado. La probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o sea alevín es del 60%.

c) **Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?**

$P\left({}^{P}/_{B}\right) = \frac{P(B \cap P)}{P(B)} = \frac{0{,}583 \cdot 0{,}321}{(0{,}583 \cdot 0{,}321) + (0{,}417 \cdot 0{,}35)} = 0{,}562$

Resultado. La probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento sabiendo que es benjamín es del 56,2%.

d) **Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?**

$P\left({}^{B}/_{I}\right) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}4167}{0{,}4167} = 0{,}35$

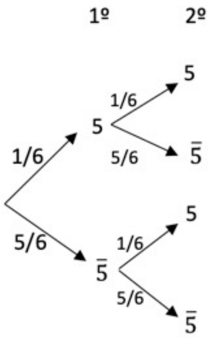
Resultado. La probabilidad de que sea benjamín sabiendo que está en el curso de iniciación es del 35%.

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 **b) 11/36** **c) 25/36** **d) 30/36**

A= al menos un 5



$$P(A) = P(5 \cap 5) + P\left(5 \cap \bar{5}\right) + P\left(\bar{5} \cap 5\right)$$

$$P(A) = P(5) \cdot P(5/5) + P(5) \cdot P\left(\bar{5}/5\right) + P\left(\bar{5}\right) \cdot P\left(5/\bar{5}\right)$$

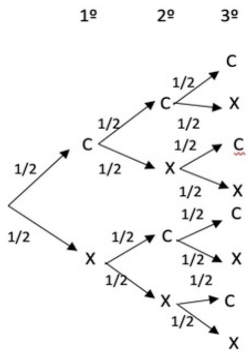
$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

b) 11/36

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 **b) 3/4** **c) 3/8** **d) 5/8**

A = sacar dos caras



$$P(A) = P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(X/CC) + P(C) \cdot P(X/C) \cdot P(C/CX) + P(X) \cdot P(C/X) \cdot P(C/XC)$$

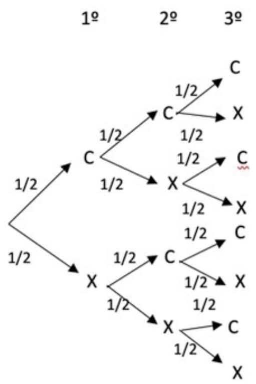
$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

c) 3/8

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 **b) 3/4** **c) 3/8** **d) 5/8**

A = sacar al menos 2 caras



$$P(A) = P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(C/CC) + P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(X/CC) + +P(C) \cdot P(X/C) \cdot P(C/CX) + P(X) \cdot P(C/X) \cdot P(C/XC)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

a) 1/2

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

O = $\{Sacar\ oro\}$ M = $\{Salir\ múltiplo\ de\ 2\}$

$P(O) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ $P(M) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$$P(O \cup M) = P(O) + P(M) - P(O \cap M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{10} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{d)1/4}$$

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es siempre correcta:

a) $P(A) + P(noA) = 1$

b)$P(A\ y\ B) = P(A) \cdot P(B)$

c) $P(A \ \cup \ B) = P(A) + P(B)$

La afirmación verdadera es la **a)** $\boldsymbol{P(A) + P(noA) = 1}$ puesto que es la suma del suceso y su contrario, entonces siempre dará 1.

6. El enunciado del teorema de Bayes es:

a)$P(A_i/C) = \frac{P(C/A_i)\cdot P(A_i)}{P(C)} = \frac{P(C/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(C/A_k)\cdot P(A_k)}$

b)$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_2)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$

c)$P(A_i\ /B) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_3)}{P(B)}$

d)$P(A_i/A) = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/A_k)\cdot P(A_k)}$

El enunciado correcto del teorema de Bayes es:

$$\textbf{a)}\boldsymbol{P(A_i/C) = \frac{P(C/A_i)\cdot P(A_i)}{P(C)} = \frac{P(C/A_i)\cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(C/A_k)\cdot P(A_k)}}$$

7. En una urna hay 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se sacan dos bolas. Llamamos A al suceso sacar una bola roja, y B a sacar una bola negra. Los sucesos A y B son:

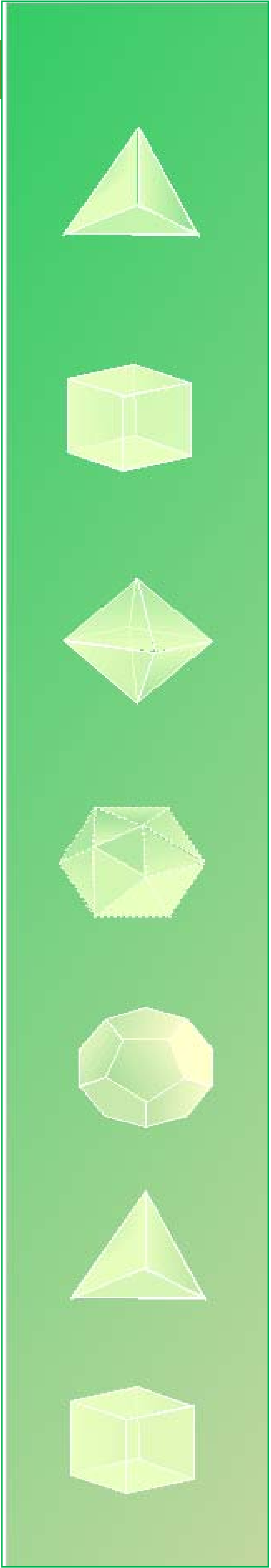
a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

Los sucesos A y B son **d) dependientes** debido a que la probabilidad de un suceso depende del resultado anterior.

8. Sacamos una carta de una baraja. Llamamos A al suceso sacar un rey y B a sacar una sota. Los sucesos A y B son:

a) Contrarios b) Incompatibles c) Independientes d) Dependientes

Los sucesos A y B son **b) incompatibles** debido a que no pueden ocurrir simultáneamente.



Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
2º Bachillerato
Capítulo 8: Estimación. Intervalos de confianza

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: ADRIAN, ADRIANA, ALICIA, ÁLVARO, ARÍSTIDES, JAIME, KASSANDRA, LUCÍA, LUIS, PALOMA, PATRICIA, SARA, TERESA.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra:
a) El diámetro de los tornillos que fabrica una máquina diariamente.
Muestra, pues sería muy costoso medir todos los tornillos de la producción
b) La altura de un grupo de seis amigos.
Población, ya que solo hay 6 elementos

2.- Se puede leer el siguiente titular en el periódico que publica tu instituto: "La nota media de los alumnos de 2º de Bachillerato de la Comunidad de Madrid es de 7'9". ¿Cómo se ha llegado a esta conclusión? ¿Se ha estudiado a toda la población? Si hubieran seleccionado para su cálculo solo a las mujeres, ¿sería representativo su valor?
No podemos saber seguro que método han utilizado, pero probablemente hayan cogido las notas de todos los estudiantes ya que cada Comunidad tiene las calificaciones de toda la población y están abiertas para todo el público. Si solo se cogen a mujeres no sería una muestra representativa

3.- Para estudiar el número de accidentes de una población de mil conductores, de los cuales la mitad tiene carnet de conducir entre 5 y 20 años, la cuarta parte lo tiene más de 20 años y la otra cuarta parte lo tiene menos de 5 años. Se quiere elegir por muestreo aleatorio estratificado proporcional, 50 conductores, ¿cuántos seleccionarías de cada grupo?

Datos
1/2 tienen carnet entre 5 y 20 años $\frac{1}{2} \times 50 = 25\, personas$
1/4 tienen carnet más de 20 años $\frac{1}{4} \times 50 = 12{,}5\, personas$
1/4 tienen carnet menos de 5 años $\frac{1}{4} \times 50 = 12{,}5\, personas$
Se eligen 50 conductores
Solución: Seleccionamos 25 personas con carnet entre 5 y 20 años, 13 personas con carnet por mas de 20 años y 13 personas con carnet por menos de 20 años

4.-Los parámetros de una distribución son μ = 20 y desviación típica σ = 3. Se extrae una muestra de 400 individuos. Calcula P (19.9 < $\bar{x}$< 20.3).

Por el teorema Central del Límite sabemos que la media muestral de una población normal se distribuye según otra distribución normal $\mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{N}\left(20, \frac{3}{\sqrt{400}}\right) = (20, 0{,}15)$
Para calcular la probabilidad pedida, tipificamos y buscamos en la tabla de la normal.

$$P\,(19.9 < \bar{x} < 20.3) = \mathrm{P}\left(\frac{19{,}9-20}{0{,}15} < \mathrm{z} < \frac{20{,}3-20}{0{,}15}\right) = \mathrm{P}(-0{,}66 < \mathrm{z} < 2) =$$
$$= P(z < 2) - [1 - P(z < 0{,}6)] = 0{,}9772 - (1 - 0{,}7454) = 0{,}7312$$
$$P\,(19.9 < \bar{x} < 20.3) = 0{,}7312$$

5. Los pesos de las ovejas de una cierta ganadería tienen una media de 50 kg con una desviación típica de 4. Elegimos al azar una muestra aleatoria simple de 100 ovejas. A) Determina la probabilidad de que su media sea superior a 51 kg. B) Sea inferior a 56 kg. C) Sea superior a 48 kg. D) Esté entre 48 kg y 52 kg.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Por el teorema Central del Límite sabemos que la media muestral de una población normal se distribuye según otra distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(50, \frac{4}{\sqrt{100}}\right) = (50, 0{,}4)$

Para calcular la probabilidad pedida, tipificamos y buscamos en la tabla de la normal

a) $P(\bar{x} > 51) = P\left(z > \frac{51-50}{0{,}4}\right) = P(z > 2{,}5) = 1 - P(z < 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$; $\boldsymbol{P(\bar{x} > 51) = 0{,}0062}$

b) $P(\bar{x} < 56) = P\left(z < \frac{56-50}{0{,}4}\right) = 15; si\ z \geq 4\ la\ probailidad\ es\ 1; \boldsymbol{P(\bar{x} < 51) = 1}$

c) $P(\bar{x} > 48) = P\left(z > \frac{48-50}{0{,}4}\right) = P(z > -5) = 1 - (1 - P(z < 5) = 1 - (1 - 1) = 1$; $\boldsymbol{P(\bar{x} > 48) = 1}$

d) $P\,(48 < \bar{x} < 52) = \mathrm{P}\left(\frac{48-50}{0{,}4} < \mathrm{z} < \frac{52-50}{0{,}4}\right) = \mathrm{P}(-5 < \mathrm{z} < 5) = P(z < 5) - [1 - P(z < 5)] = 1 - (1 - 1) = 1$; $\boldsymbol{P\,(48 < \bar{x} < 52) = 1}$

6. Una población tiene una media $\boldsymbol{\mu = 400}$ y una desviación típica $\boldsymbol{\sigma = 20}$. Extraemos una muestra de 1000 individuos. Halla el intervalo característico, para una probabilidad de 0.95, de la media muestral. Lo mismo para una probabilidad del 0.99.

Respuesta:

Como $n > 30$, las medias muestrales se distribuyen según una normal de media $\mu = 400$ y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{1000}} = \frac{20}{10\sqrt{10}} = 0{,}63$; es decir: $\bar{x}$ es $N(400; 0{,}63)$.

Para $\boldsymbol{1 - \alpha = 0{,}95} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025\,;\ 0{,}95 + 0{,}025 = 0{,}975 \rightarrow \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma;\ \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right) = (400 - 1{,}96 \cdot 0{,}63;\ 400 + 1{,}96 \cdot 0{,}63) =$$

$= (400 - 1{,}23\,;\ 400 + 1{,}23) = (398{,}77;\ 401{,}2)$

$Este\ es\ el\ intervalo\ característico\ de\ N(400; 0{,}63)\ con\ una\ probabilidad\ del\ 0.95$

Para $\boldsymbol{1 - \alpha = 0{,}99} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}99}{2} = 0{,}005\,;\ 0{,}99 + 0{,}005 = 0{,}995 \rightarrow \mathrm{Z}_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$

$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right) = (400 - 2{,}58 \cdot 0{,}63;\ 400 + 2{,}58 \cdot 0{,}63) =$

$= (400 - 1{,}62; 400 + 1{,}62) = (398{,}4;\ 401{,}6)$

$Este\ es\ el\ intervalo\ característico\ de\ N(400; 0{,}63)\ con\ una\ probabilidad\ del\ 0.99$

7. El peso de una población tiene una media $\boldsymbol{\mu = 70\ kg}$ y una desviación típica $\boldsymbol{\sigma = 10}$. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 individuos y se pesan todos juntos. Calcula la probabilidad de que dicho peso sea superior a 7010kg.

Respuesta:

$\sum x_i \rightarrow N\left(n \cdot \mu; n \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow N(7000; 100)$

$P\left(z > \frac{7010-7000}{100}\right) = P\left(z > \frac{10}{100}\right) = 1 - P(z < 0{,}1) = 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$

$P(\sum x_i > 7010) = 0{,}4602$

8. En los exámenes de selectividad la proporción de aprobados es del 98%. Un centro escolar presenta a 78 estudiantes al examen.

a) ¿Qué distribución sigue la proporción de aprobados?

Respuesta:

La muestra es aleatoria y n =78 > 30, por tanto:

$\hat{P}=N\left(p;\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)=N\left(0{,}98;\sqrt{\frac{0{,}98(1-0{,}98)}{78}}\right)=$ $N(0{,}98;0{,}016)$; para suspensos es $N(0{,}02;0{,}016)$

b) Calcula la probabilidad de que la muestra elegida haya menos de 3 suspensos.

Respuesta:

$P\left(\hat{p}<\frac{3}{78}\right)=P(z<0{,}038)=P\left(z<\frac{0{,}038-0{,}02}{0{,}016}\right)=P(z<1{,}125)$

$y\ buscamos\ 0, en\ la\ tabla\ N(0{,}1) y\ nos\ da\ un\ resultado\ de$ 0,8697, $por\ tanto\ existe$ $una\ probabilidad\ del$ 86,97% $de\ que\ hayan\ menos\ de\ 3\ suspensos\ en\ la\ muestra.$

c) Calcula la probabilidad de que la muestra elegida haya más de 10 suspensos.

Respuesta:

$P\left(\hat{p}>\frac{10}{78}\right)=P(z>0{,}128)=P\left(z>\frac{0{,}128-0{,}02}{0{,}016}\right)=P(z>6{,}75)=1-P(z<6{,}75)=1-1=0$

$por\ tanto,\ existe\ una\ probabilidad\ del$ 0% $de\ que\ hayan\ más\ de\ 10\ suspensos\ en\ la\ prueba.$

d) Calcula la probabilidad de que la muestra elegida no haya ningún suspenso.

Respuesta:

$P\left(\hat{p}=\frac{0}{78}\right)=P(\hat{p}=0)=P(-0{,}05<\hat{p}<0{,}05)=P\left(\frac{-0{,}05-0{,}02}{0{,}016}<z<\frac{0{,}05-0{,}02}{0{,}016}\right)=$

$P(-4{,}375<z<1{,}875)=1-0{,}9696=0{,}1304$

$por\ tanto\ existe\ una\ probabilidad\ del$ 13,04% $de\ que\ no\ haya\ ningún\ suspenso\ en\ la\ muestra.$

9. En una fábrica de bombillas de bajo consumo hay que rechazar por defectos al 2% de la producción. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 bombillas.

a) ¿Qué distribución sigue la proporción de bombillas defectuosas?

Respuesta:

$\hat{P}=N\left(p;\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)=N\left(0{,}02;\sqrt{\frac{0{,}02(1-0{,}02)}{100}}\right)=$ $N(0{,}02;0{,}014)$

b) Calcula la probabilidad de que en la muestra elegida haya menos de 5 bombillas defectuosas?

Respuesta:

$\mathrm{P}\left(\hat{\mathrm{p}}<\frac{5}{100}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{z}<0{,}05)=\mathrm{P}\left(\mathrm{z}<\frac{0{,}05-0{,}02}{0{,}014}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{z}<2{,}14)$

y buscamos 2,14 en la tabla N(0,1)y nos da un resultado de 0,9838, por tanto existe

una probabilidad del 98,38% de que haya menos de 5 bombillas defectuosas en la muestra.

10 Determina la eficiencia de la media muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la desviación típica poblacional es 2.

n=100 σ =2 Determinar la eficiencia: $100/2^2$=**25**

11 Determina la eficiencia de la proporción muestral si el tamaño de la muestra es 100 y la proporción poblacional es 50 %.

n = 100 p = 50% = 0,5 Determinar la eficiencia: 100/0,5(1 - 0,5) = **400**

12. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95 % de una N (5, 0,01). Determina el margen de error.

Nivel de confianza 95% N (5, 0,01) µ=5 σ =0,01

¿I.C.? ¿E?

Zd/2 = 1+95/100 /2 = 0,975 (mirar tabla) = 1,96

E= Zd/2 × σ /$\sqrt{n}$ = 1,96× 0,01= 0,0196

IC 95%= (µ ± E) = (5-0,0196; 5+0,0196) = (4,9804; 5,0196)

13. Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99 % de una N (100, 4). Determina el margen de error.

N(100,4) µ=100 σ =4 IC 99%? ¿E?

$\frac{1+99/100}{2}$ = 0,995 Zd= $\frac{2,57+2,58}{2}$= 2,575

E= Zd/2 × σ /$\sqrt{n}$ = 2,575 × 4 = 10,3

IC= (µ ±E) = (100 – 10,3; 100 + 10,3) = (89,7; 110,3)

14. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95% de una población de desviación típica conocida, $\sigma = 2$, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50,5.

$\bar{x} = 50{,}5$; $\sigma = 2$; $n = 400$; $1 - \alpha = 0.95$; $\alpha = 0.05$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$; $Z_{0.975} = 1{,}96$

$$\mu \in \left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(50{,}5 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}}; 50{,}5 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}}\right) = (50.304\,,\ 50.696)$$

Tenemos la confianza de que el 98% de los casos la media poblacional pertenecerá al intervalo:

$$(50.304\,,\ 50.696).$$

15. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 98% de una población de desviación típica conocida, $\sigma = 2$, si hemos escogido una muestra aleatoria simple de tamaño 400 y calculado la media muestral que es 50,5. Compara con el anterior intervalo de confianza.

$\bar{x} = 50{,}5$; $\sigma = 2$; $n = 400$; $1 - \alpha = 0.98$; $\alpha = 0.02$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.999$; $Z_{0.999} = 3{,}09$

$$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(50{,}5 - 3{,}09 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}};\ 50{,}5 + 3{,}09 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}}\right) = (50.191\ ,\ 50.809)$$

Tenemos la confianza de que el 98% de los casos la media poblacional pertenecerá al intervalo:

$$(50.191\ ,\ 50.809).$$

Al aumentar el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo.

16. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 16 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para los trastornos del sueño que sufren. Los resultados han sido:

280; 285; 295; 330; 290; 350; 360; 320; 295; 310; 300; 305; 295; 280; 315; 305.

Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación típica 34,5 días. Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95% para la media poblacional.

$$\overline{x} = \frac{280+285+295+330+290+350+360+320+295+310+300+305+295+280+315+305}{16} = 307{,}19$$

$$\overline{x} = 307{,}19\ ;\ \sigma = 34{,}5\ ;\ n = 16\ ;\ 1-\alpha = 0.95\ ;\ \alpha = 0.05\ ;\ 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975\ ;\ Z_{0.976} = 1{,}96$$

$$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(307{,}19 - 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{16}};\ 307{,}19 + 1{,}96 \cdot \frac{34{,}5}{\sqrt{16}}\right) = (290{,}53,\ 323{,}85)$$

17. ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 0,1 unidades, con un nivel de confianza del 95 %, sabiendo que la desviación típica poblacional es conocida y vale 4?

n = ¿? ; $\sigma = 4$ E = 0,1 $1-\alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$; $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$; $Z_{0{,}95} = 1{,}96$

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad 0{,}1 = 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} \quad n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 4}{0{,}1}\right)^2 = 6.146{,}56$$

Debemos tomar una muestra de tamaño 6147 o mayor

18. Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.02 con un nivel de confianza del 90 % sabiendo que la población se distribuye según una normal de desviación típica 0.4.

n = ¿? ; $\sigma = 0{,}4$ E = 0,02 $1-\alpha = 0{,}9$; $\alpha = 0{,}1$; $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}95$; $Z_{0{,}95} = 1{,}65$

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad 0{,}02 = 1{,}65 \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} \quad n = \left(\frac{1{,}65 \cdot 0{,}4}{0{,}02}\right)^2 = 1089$$

Debemos tomar una muestra de tamaño 1089 o mayor

19. En el estudio anterior se toma una muestra de 49 individuos. Queremos que el error máximo admisible sea de 0.02. ¿Cuál será el nivel de confianza?

n = 49 ; $\sigma = 0{,}4$ $\quad E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\quad$ E = 0,02

sustituyendo $\quad 0{,}02 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0{,}4}{\sqrt{49}} \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 0{,}35$ buscamos en la tabla

$$P(z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha \quad ; \quad P(z < 0{,}35) = 0{,}6368$$

El nivel de confianza es del 63,68%

20. Determina el intervalo de confianza para la proporción de árboles enfermos en Madrid con un nivel de confianza del 95 %, si se ha elegido una muestra aleatoria simple de 100 árboles de los que hay 20 enfermos.

$1 - \alpha = 95\% \quad (0.95) \quad \alpha = 5\% \quad (0.05) \quad n = 100\; p = 20 \;\; q = 80$

$$1 - \alpha = 95\%(0.95) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}},\; p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \rightarrow \left(20 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 80}{100}}, 20 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 80}{100}}\right)$$

$\rightarrow I.C.(12.16,\;\; 27.84)$

Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95%, podemos decir que la proporción de árboles enfermos en Madrid se encuentra en el intervalo del 12.2% al 27.8% aproximadamente.

21. Se quiere estudiar la proporción de estudiantes que hacen actividades extraescolares. Para ello se ha seleccionado una muestra de 400 estudiantes de los cuales 100 hacen actividades extraescolares. Determina el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza del 95 %

$1 - \alpha = 95\%(0.95) \quad \alpha = 5\%(0.05) \quad n = 400 \quad p = 100 \quad q = 300$

$$1 - \alpha = 95\%(0.95) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \rightarrow \left(100 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 300}{400}}, 100 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 300}{400}}\right)$$

$\rightarrow I.C.(83.02, \quad 116.97)$

Por lo tanto, con un nivel de confianza del 95%, podemos decir que la proporción de estudiantes que hacen actividades extraescolares se encuentra en el intervalo del 21.1% al 28.9% aproximadamente.

22. ¿Cuántas veces se debe lanzar una moneda para que la proporción de caras no se aparte de la teórica, 1/2, más de una centésima, con un grado de certeza no inferior al 95 %? ¿Cuántas, con el mismo margen de error y una certeza no inferior al 99 %? ¿Lo mismo con 99,9 % de certeza? (Soluciones: n ≥ 9 504, n ≥ 16 412, n ≥ 26 632)

$e(Error) = 0.01 \qquad p = \frac{1}{2}$

a) $1-\alpha = 95\%(0.95)\ \ 1-\alpha = 95\%(0.95) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\frac{e\cdot n+0.5}{\sqrt{n\cdot p(1-p)}} \geq 1{,}96 \rightarrow \frac{0.01n+0.5}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} \geq 1{,}96 \rightarrow 0.01n+0.5 \geq 1{,}96\cdot\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}$

$\rightarrow 0.01n+0.5 \geq 1.96\cdot\sqrt{\frac{n}{4}} \rightarrow 0.01n+0{,}5 \geq \frac{49}{25}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2} \quad \rightarrow 0{,}01n+0{,}5 \geq \frac{49\cdot\sqrt{n}}{50} \rightarrow$

$100\cdot\left(0{,}01n+0{,}05 \geq \frac{49\cdot\sqrt{n}}{50}\right) \rightarrow \quad n+50 \geq 98\sqrt{n} \rightarrow \quad 98\sqrt{n} = n+50$

$\rightarrow 9604n = n^2-100n-2500 = 0 \rightarrow n^2-9504n+2500 = 0\,\frac{\rightarrow}{2a} \rightarrow n = \frac{9504\pm\sqrt{9504^2-10000}}{2}$

$n = \frac{9504\pm\sqrt{4^2\cdot(2376^2-625)}}{2} \rightarrow n = \frac{9504\pm4\sqrt{2376^2-625}}{2} \rightarrow$

$n = 4752+2\sqrt{2376^2-625};\ \ n = 4752-2\sqrt{2376^2-625}$

$n1 \geq 0{,}26; n2 \geq 9504$

b) $1-\alpha = 99\%(0.99)\ \ 1-\alpha = 99\%(0.99) \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.99}{2} = 0.995 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.57$

$\frac{e\cdot n+0.5}{\sqrt{n\cdot p(1-p)}} \geq 2.57 \rightarrow \frac{0.01n+0.5}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} \geq 2.57 \rightarrow 0.01n+0.5 \geq 2.57\cdot\sqrt{n\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)} \rightarrow$

$0.01n+0.5 \geq 2.57\cdot\sqrt{\frac{n}{4}} \rightarrow 0.01n+0{,}5 \geq \frac{257}{100}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2} \rightarrow 0{,}01n+0{,}5 \geq \frac{257\cdot\sqrt{n}}{200} \rightarrow$

$200\cdot\left(0{,}01n+0.5 \geq \frac{129\cdot\sqrt{n}}{100}\right) \rightarrow 2n+100 \geq 257\sqrt{n} \rightarrow 257\sqrt{n} = 2n+100 \rightarrow$

$66049n = 4n^2+400n+10000 \rightarrow 66049n-4n^2-400n-10000 = 0 \ \rightarrow$

$65649n-4n^2-10000 = 0 \rightarrow 4n^2-65649n+10000 = 0 \rightarrow$

$n = -(-65649) \pm \frac{\sqrt{(-65649)^2-4\cdot4\cdot10000}}{2\cdot4} \rightarrow n = 65649 \pm \frac{\sqrt{65649^2-160000}}{8} \rightarrow$

$n1 \geq 0{,}15; n2 \geq 16412$

c) $1-\alpha = 99\%(0.99)$ $1-\alpha = 99.9\%(0.999) \to \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.999}{2} = 0.9995 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 3.27$

$\frac{e \cdot n+0.5}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}} \geq 3.27 \to \frac{0.01n+0.5}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}} \geq 3.27 \to 0.01n + 0.5 \geq 3.27 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)} \to$

$0.01n + 0.5 \geq 3.27 \cdot \sqrt{\frac{n}{4}} \to 0.01n + 0{,}5 \geq \frac{327}{100} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2} \to$

$0{,}01n \geq \frac{327 \cdot \sqrt{n}}{200} \to 200 \cdot (0{,}01n \geq \frac{327 \cdot \sqrt{n}}{200}) \to 2n + 100 \geq 327\sqrt{n} \to 327\sqrt{n} \geq 2n + 100$

$\to 327^2 n = 4n^2 + 400n + 10000 \to 327^2 n - 4n^2 + 400n + 10000 = 0$
$\to (327^2 - 400) \cdot n - 4^2 - 10000 = 0$

$\to (327^2 - 400)n - 4n^2 - 10000 = 0 \to -4n^2 + (327^2 - 400)n + 10000 = 0$

$$\to n = \frac{-(-(327^2-400)) \pm \sqrt{(327^2-400)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10000}}{2 \cdot 4} \to n = \frac{327^2 - 400 \pm \sqrt{(327^2-400)^2 - 160000}}{8}$$

$$\to n = \frac{327^2 - 400 + \sqrt{(3272^4 - 800 \cdot 327^2 + 400^2 - 160000)}}{8}; n = \frac{327^2 - 400 - \sqrt{(3272^4 - 800 \cdot 327^2 + 400^2 - 160000)}}{8}$$

$n1 \geq 0.09; n2 \geq 26632$

23. Rehaz los cálculos de la actividad anterior para un nivel de confianza del 99 %

$1-\alpha = 99\%(0.99)$ $\alpha = 1\%(0.01)$

$$p = \frac{700}{2000} \to p = 35(0.35); 0.35 \cdot 8000000 = 2800000 votos$$

$$q = \frac{1300}{2000} \to q = 65(0.65)$$

$\mu = n \cdot p \to 2000 \cdot p; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to \sqrt{2000 \cdot p \cdot q}$

$$P(\mu - k \cdot \sigma - 0.5 \leq X \leq \mu + k \cdot \sigma + 0.5) \geq 0.99 \to P(\frac{-k \cdot \sigma - 0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{+k \cdot \sigma + 0.5}{\sigma}) \geq 0.99$$

$\to k \cdot \sigma + 0.5 \geq 2.58\sigma \to 0.2183 \leq p \leq 0.5503$

24. Se investigan los hábitos de consumo de una población de dos millones de personas. Se pasa una encuesta a mil personas y se les pregunta si en su domicilio se cocina con gas, de los que 600 responden afirmativamente. Qué puedes afirmar sobre el número de personas en las que en su domicilio se usa gas con un nivel de confianza del 95 %

$$1-\alpha = 95\%\ (0.95) \quad \alpha = 5\%\ (0.05) \quad 1-\alpha = 95\%(0.95) \to \frac{\alpha}{2} = \frac{1+0.95}{2} = 0.975 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$n = 1000 \qquad p = \frac{600}{1000} = 0{,}6 \qquad q = \frac{400}{1000} = 0{,}4$$

$$I.C. = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right) \to$$

$$\left(0{,}6 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{1000}}, 0{,}6 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0{,}4}{1000}}\right) \to I.C. = (0{,}569,\ 0{,}630)$$

Podemos afirmar, con un nivel de confianza del 95%, que entre el 56,9% y el 63% de los domicilios se cocina con gas.

25. Repite los cálculos de una actividad anterior para comprobar si una moneda no está trucada, con un nivel de significación del 5%. Para ello lanzamos la moneda al aire 100 veces y obtenemos 65 caras. ¿Se puede asegurar que sea una moneda de probabilidad ½?

$$\mathrm{H}_0\colon \mu = \frac{1}{2} \qquad \mu = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$H_1 : \mu > o < 1/2 \qquad \sigma^2 = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25 \to \sigma = \sqrt{25} = 5$$

$$Como\ hemos\ obtenido\ 65\ caras\ que\ supera\ en\ 15\ al\ valor\ medio(50) \to$$

$$P(x-50 > 15) + P(x+50 < -15)$$

$$P(x > 65) + P(x < -65) = P(x \geq 65{,}5) + P(x \leq -64{,}5) =$$

$$= P\left(z \geq \frac{65{,}5-50}{5}\right) + P\left(z \leq \frac{-64{,}5+50}{5}\right) = P(z \geq 3{,}1) + P(z \leq -3{,}1) = 2 \cdot P(z \geq 3{,}1) - 1 =$$

$$= 2 \cdot 0{,}99903 - 1 = 0{,}99806$$

$$1-\alpha = 0{,}998;\ \alpha = 1 - 0{,}998 = 0{,}002 \to 0{,}2\%$$

Resultado. Como el nivel de significación de la hipótesis no supera el 5%, se rechaza esta hipótesis.

26. Se ha calculado que entre los deportistas que juegan al fútbol hay un porcentaje de accidentes del 22%. Se han estudiado el número de accidentes entre 400 personas que practican la natación y han resultado accidentadas 36 personas. ¿Es la natación igual de peligrosa que el fútbol?

$$H_0\colon \mu = 22 \qquad p = \frac{36}{400} = 0{,}09 \to 9\% \qquad q = 1 - p = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$$

$$H_1\colon \mu \neq 22 \qquad \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{400 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}91} = 5{,}72$$

$P\left(z \geq \frac{22-9}{5,72}\right) + P\left(z \leq \frac{-22+9}{5,72}\right) = P(z \geq 2,27) + P(z \leq -2,27) =$

$= 2 \cdot P(z \geq 2,27) - 1 = 2 \cdot (1 - 0,9884) = 0,0464$

La probabilidad es muy pequeña por lo que rechazamos la hipótesis de que la natación es igual de peligrosa que el futbol.

27. La tasa de natalidad de una región ha sido del 8,7 por mil habitantes durante un cierto año. Suponemos que la tasa de natalidad es la misma al año siguiente, ¿hasta qué número de nacimientos entre 3000 habitantes estarías dispuesto a confirmar dicha hipótesis?

$H_0: \mu = 3000 \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{3000 \cdot 0,0087 \cdot 0,13} = 1,84$

$H_1: \mu < o > 3000 \qquad q = 1 - p = 1 - 0,87 = 0,13$

$P\left(z \geq \frac{3-8,7}{1,84}\right) + P\left(z \leq \frac{-3+8,7}{1,84}\right) = P(z \geq -3,09) + P(z \leq 3,09) =$

$= 2 \cdot \mathrm{P}(\mathrm{z} \geq 3,09) - 1 = 2 \cdot 0,999 - 1 = 0,998$

$$1 - \alpha = 0,998;\ \alpha = 1 - 0,998 = 0,002 \to 0,2\%$$

$$3000 \cdot 0,002 = 6$$

Resultado. Estaríamos dispuestos a confirmar dicha hipótesis entre los 2994 y los 3006 nacimientos.

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza las tablas de la normal estándar y comprueba las probabilidades siguientes:

a) $P(z < 1) = 0.8413$; b) $P(z \leq 0.7) = 0.7580$; c) $P(z > 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$; d) $P(z \geq 1.86) = 0.0314$;

e) $P(-1.83 < z < -1) = 0.1251$; f) $P(z > 1.38) = 0.0838$; g) $P(-1.83 \leq z < 0.75) = 0.7398$.

a) ***P*(*z*<1)** = 0.8413

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438
1,1	0,8643	0,8665

b) ***P*(*z*≤0.7)** = 0.7580

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910

c) ***P*(*z*>1)** = 1 – P(z<1) = 1 - 0.8413 = 0.1587

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186
1,0	0,8413	0,8438

d) ***P*(*z*≥*1*.86)** =1 – P(z<1) = 1-0.9686 = 0.0314

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

e) ***P*(-1.83<*z*<-1)=** $P(z<-1) - P(z<-1.83) = P(z>1) - P(z>1.83) = (1-P(z<1)) – (1- P(z<1.83)) =$
$= (1-0.8413) – (1- 0,9664) = 0,1587-0,0336 = 0.1251$

a	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732

f) ***P*(*z*>1.38)** $= 1- P(z<1.38) = 1-0.9162 = 0.0838$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	$\boxed{0,9162}$
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306

g) ***P*(-1.83< *z*<-1)** =*P*(*z*<-1) - *P*(*z*≤-1.83) =*P*(*z*<-1) - *P*(*z*≥1.83) =*1-P*(*z*<1) –(1- *P*(*z*≤1.83))= =1-0.8413 - (1-0.9664) =0.1587 – 0.0336 = 0.1251

a	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	$\boxed{0,8413}$	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	$\boxed{0,9664}$
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732

2. Utiliza las tablas de la normal estándar para calcular las probabilidades siguientes:

a) $P(z < 0.72)$; b) $P(z \leq 1.21)$; c) $P(z > 0.93)$; d) $P(z \geq -1.86)$;

e) $P(-1{,}02 < z < -0.85)$; f) $P(0.65 < z < 1.42)$; g) $P(1.76 > z > 0.72)$; h) $P(-0.9 > z > -0.51)$.

a) ***P*(*z*<0.72)** = 0.7642

a	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	$\boxed{0,7642}$

b) ***P*(*z*≤1.21)** = 0.8869

a	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	[illegible]	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	[illegible]	0,9066
1,4	0,9192	0,9207	0,9222

c) ***P*(*z*>0.93)** = 1 – *P*(*z*<0.93) = 1 – 0.8238 = 0.1762

a	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238

d) ***P*(*z*≥-1.86)** = 1 - *P*(z≤1.86) = 1 – 0.9686 = 0.0314

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

e) ***P*(-1.02<*z*< -0.85)** = P(z< -0,85) – P(z<-1,02) = 1 – P(z< 0,85) – (1 – *P*(*z*<1.02)) =
1 – 0.8023 – (1 – 0,8461) = 0,1977 – 0,1539 = 0,0436

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265

f) $\boldsymbol{P(0.64<z<1.42)} = P(z<1.42) - P(z<0.64) = 0.9222 - 0.7389 = 0.1833$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251

g) $\boldsymbol{P(1.76>z>0.72)} = P(0.72<z<1.76)$ $P(z<1.76) - P(z<0,72) = 0.9608 - 0.7642 = 0,1966$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608

h) $\boldsymbol{P(-0.9>z>-0.51)} = P(-0,51< z < -0,9) = P(z<-0.51) - P(z<-0,9) = 1 - P(z<0,51) - [1 - P(z<0,9)]$ =

$= 1 - 0.695 - [1 - 0.8159] = 0,305 - 0,1841 = 0,1509$

a	0,00	0,01
0,0	0,5000	0,5040
0,1	0,5398	0,5438
0,2	0,5793	0,5832
0,3	0,6179	0,6217
0,4	0,6554	0,6591
0,5	0,6915	0,6950
0,6	0,7257	0,7291
0,7	0,7580	0,7611
0,8	0,7881	0,7910
0,9	0,8159	0,8186

3. Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 5 y desviación típica 0.5. Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(X < 6)$; b) $P(X \leq 4)$; c) $P(X > 3)$; d) $P(X \geq 5.5)$;

e) $P(-3 < X < -1)$; f) $P(X > 2)$; g) $P(3 \leq X < 7)$; h) $P(6 > X > 2)$.

Datos: $\mu = 5$ $\sigma = 0{,}5$ $Fórmula\ empleada: Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

a) P (X < 6) = $P(z < \frac{6-5}{0{,}5}) = P(z < 2) = 0{,}9772$

b) P (X ≤ 4) = $P(z \leq \frac{4-5}{0{,}5}) = P(z \leq -2) = P(z \geq 2) = 1 - P(z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

c) P (X > 3) = $P\left(z > \frac{3-5}{0{,}5}\right) = P(z > -4) = P(z < 4) = 1$

d) P (X ≥ 5.5) =$P(z \geq \frac{5{,}5-5}{0{,}5}) = P(x \geq 1) = 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

e) P (–3 < X < –1) = $P(x < -1) - P(x < -3) = P(x < 3) - P(x < 1) = P\left(z < \frac{3-5}{0{,}5}\right) - P\left(z < \frac{1-5}{0{,}5}\right)$

$= P(z < -4) - P(z < -8) = 0 - 0 = 0$

f) P (X > 2) = 1 – P(z<$\frac{2-5}{0{,}5}$) = P(z<-6) = 1 – 0 = 1

g) P (3 ≤ X < 7) = $P\left(\frac{3-5}{0{,}5} \leq z \leq \frac{7-5}{0{,}5}\right) = P(-4 \leq z \leq 4) = 1 - 0 = 1$

h) P (6 > X > 2) = $P(2 < x < 6) = P\left(\frac{2-5}{0{,}5} \leq z \leq \frac{6-5}{0{,}5}\right) = P(-6 \leq z \leq 2) =$

$= P(z \leq 2) - P(z \leq -6) = 0{,}9772 - 0 = 0{,}9772$

4. En un centro escolar hay 900 estudiantes, que son 600 de ESO y 300 de Bachillerato. Se quiere tomar una muestra aleatoria por muestreo estratificado proporcional de tamaño 50. ¿Cuántos estudiantes se deben escoger de forma aleatoria de ESO y cuántos de bachillerato?

	Alumnos	Muestreo
ESO	600	**33**
Bachillerato	300	**17**
Total	900	50

Se realiza una regla de 3 para averiguar el muestreo:

ESO **Bachillerato**

900---------50 x= $\frac{600 \cdot 50}{900}$ = 33,3 900---------50 x= $\frac{300 \cdot 50}{900}$ = 16,6

600---------x 300---------x

Los resultados se redondean, de tal forma que sean números enteros, (33,3 = 33) y (16,6 = 17)
Se deben escoger 33 alumnos de la ESO y 17 alumnos de Bachillerato.

5. El número de megabytes (Mb) descargados mensualmente por un grupo de clientes de una compañía de telefonía móvil se aproxima por una distribución normal con media 4 Mb y desviación típica igual a 1.5 Mb. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 3,5 Mb?
b) ¿Sea superior a 4,5 Mb?
c) Se supone ahora que la media poblacional es desconocida y que la media muestral toma el valor 3,7 Mb. Obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media de la población. Obtén también un intervalo de confianza al 99 % para la media de la población. ¿Es mayor o menor que el anterior? Explica este resultado.

Media poblacional: μ = 4Mb Desviación típica: σ = 1,5Mb Tamaño de la muestra: n= 64

a) P(x< 3,5)

$\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) ; $\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (4, $\frac{1,5}{\sqrt{64}}$) = N (4, 0’18)

p (X < 3’5) = Tipificamos = p(Z < $\frac{3'5-4}{0'18}$) = p(Z < -2’7)

; 1 – p(Z ≤ 2’7) = 1- 0’9965 = **0,0035**

b) P(x> 4’5)

$\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) ; $\boldsymbol{\bar{X}}$ **~ N** (4, $\frac{1,5}{\sqrt{64}}$) = N (4,0’18)

p(X > 4’5) = Tipificamos = p(Z> $\frac{4'5-4}{0'18}$) = p(Z > 2’7)

; 1 – 0’9965 = **0’0035**

c) Media muestral: $\bar{x}$ = 3’7Mb

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1’96

El intervalo de confianza es el siguiente:

I.C = $\left(\boldsymbol{\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ , } \boldsymbol{\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$ = (3’7 – 1’96 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$, 3’7 + 1’96 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$)

I.C = **(3’3325, 4’0675)**

Ahora con nivel de confianza mayor (99%)

Nivel de confianza: 1 – α = 0,99; α = 0,01

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{1-0'005} = Z_{0'995}$ = 2’58

I.C = $\left(\boldsymbol{\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ , } \boldsymbol{\bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right)$ = (3’7 – 2’58 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$, 3’7 + 2’58 · $\frac{1'5}{\sqrt{64}}$)

I.C = **(3’21, 4’18)**

Este intervalo de confianza es mayor al anterior debido a que el nivel de confianza es superior.

6. La duración en horas de un cierto tipo de bombillas de bajo consumo se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 3600 horas. Se toma una muestra aleatoria simple.
a) ¿Qué tamaño muestral se necesitaría como mínimo para que, con un nivel de confianza del 95 %, el valor absoluto de la diferencia entre μ y la duración media observada X de esas bombillas sea inferior a 100 horas?
b) Si el tamaño de la muestra es 121 y la duración media observada X es de 4000 horas, obtén un intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional μ.

a) **Variable aleatoria**: $\bar{X}$ ~ N(μ,3600)
Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05
; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975} = 1'96$
Desviación típica: σ = 3600
E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} < 100$; $n > \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot \mathbf{3600}}{100}\right)^2$ = **4978'7 …… 4979**

b) **Tamaño de la muestra**: n = 121
Duración media observada: $\bar{x}$ = 4000
Desviación típica: σ = 3600
Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05
; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975} = 1'96$
Se pide el intervalo de confianza:
I.C = $\left(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{Z}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}},\ \bar{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{Z}_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right) = \left(4000 - 1'96 \cdot \frac{3600}{\sqrt{121}},\ 4000 + 1'96 \cdot \frac{3600}{\sqrt{121}}\right)$
I.C = **(3358, 4641)**

7. La longitud, en milímetros (mm), de los individuos de una determinada plantación de mejillones se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 3 mm.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 mejillones y se obtiene una media muestral igual a 70 mm. Determina un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 99 %. Determina también un intervalo de confianza para la media poblacional de la longitud de los mejillones con un nivel de confianza del 95 %.
b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor o igual que 5 mm con un nivel de confianza del 95 %.

a) **Tamaño de la muestra**: n = 64
Duración media observada: $\bar{x}$ = 70
Desviación típica: σ = 3
Nivel de confianza: 1 – α = 0,99; α = 0,01
; ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{1-0'005} = Z_{0'995} = 2'58$
Se pide el intervalo de confianza:
I.C = $\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(70 - 2'58 \cdot \frac{3}{\sqrt{64}},\ 70 + 2'58 \cdot \frac{3}{\sqrt{64}}\right)$

I.C = **(69'03, 70'96)**

Ahora con nivel de confianza menor (95%)

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1'96

I.C = ($\bar{X}$ - $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{X}$ + $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = (70 – 1'96 · $\frac{3}{\sqrt{64}}$, 70 + 1'96 · $\frac{3}{\sqrt{64}}$)

I.C = **(69'2, 70'7)**

b) Tamaño muestral mínimo:

E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ ≤ 5 ; n ≥ ($\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E}$)^2 = ($\frac{1'96 \cdot \mathbf{3}}{5}$)^2 = **1'38**

8. El consumo mensual de leche (en litros) de los alumnos de un determinado colegio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 3 litros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (16; 20) para estimar μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcula la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 81. Calcula el error máximo cometido en la estimación de μ mediante la media muestral con un nivel de confianza del 95 %.

Variable aleatoria: $\bar{X}$ ~ N(μ,3)

a) I.C = **(16, 20)**

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1'96

I.C = ($\bar{X}$ – 1'96 · $\frac{3}{\sqrt{n}}$, $\bar{X}$ + 1'96 · $\frac{3}{\sqrt{n}}$) = (16, 20)

Debemos resolver un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 16 \\ \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 20 \end{array}\right\} \quad (-)| \quad \begin{array}{l} -\bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = -16 \\ \bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 20 \end{array}$$

$$3'92 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 4$$

3'92· $\frac{3}{\sqrt{n}}$ = 4 ; $\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{4}{3'92}$; $\frac{3}{1'02} = \sqrt{n}$; ($\frac{\mathbf{3}}{1'02}$)^2 = n ; n = **8,65**

$\bar{x} + 1'96 \cdot \frac{3}{\sqrt{8,65}} = 20$; $\bar{x}$ +2 = 20 ; $\bar{x}$ = **18**

La media muestral es de **18l** y el tamaño de la muestra elegida es de **8,65**

b) Tamaño de la muestra: n = 81

Nivel de confianza: 1 – α = 0,95; α = 0,05

; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0'025} = Z_{0'975}$ = 1'96

E **=** $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$ = 1'96 · $\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{81}}}$ = **0'653**

El error máximo es 0’653

9. El consumo familiar diario de electricidad (en kW) en cierta ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ = 6.3 kW y desviación típica 0.9 kW. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100. Calcula:
a) La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW.
b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo de confianza (6.1; 6.6) para la media del consumo familiar diario.

a) La media de la muestra se puede aproximar a una distribución normal con media μ = 6.3 kW y desviación típica σ/√n = 0.9/√100 = 0.09 kW, según el Teorema del Límite Central. Entonces, la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW es:

$P(6 \leq \bar{X} \leq 6.6) = P[(6 - 6.3) / 0.09 \leq (\bar{X} - 6.3) / 0.09 \leq (6.6 - 6.3) / 0.09] = P[-3.33 \leq Z \leq 3.33] = 0.9981$

Donde $\bar{X}$ es la media de la muestra y Z es la variable aleatoria estándar normal correspondiente. Por lo tanto, la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 6 kW y 6.6 kW es del 99.81%.

b) El intervalo de confianza (6.1; 6.6) indica que la media poblacional μ está comprendida en este intervalo con un nivel de confianza $1 - \alpha$. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$P(6.1 \leq \mu \leq 6.6) = 1 - \alpha$ como el I.C. = $\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

El error cometido es 6,6 – 6,3 = 0,3 = $Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ de donde, 0,3 = $Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{0,9}{\sqrt{100}}$ $Z_{1-\frac{\propto}{2}} = 3,33$

Mirando en la tabla $1 - \frac{\propto}{2} = 0,9996$, $\frac{\propto}{2} = 0,0004$, $\propto = 0,0008$ $1 - \alpha = 0,9992$

Se ha tomado un nivel de confianza del 99,92%

10. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 pacientes y se ha anotado el número de días que han recibido tratamiento para trastornos digestivos que sufren. Los resultados han sido:
100, 98, 75, 103, 84, 95, 105, 82, 107.
Se sabe que la duración, en días, del tratamiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 9 días.
a) Determina un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.
b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95 %?

a)

Media muestral ($\bar{x}$) = (100 + 98 + 75 + 103 + 84 + 95 + 105 + 82 + 107) / 9 = 92.9 días

$$\sigma = 9 \quad 1 - \alpha = 0,95 \ ; \quad Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,05}{2}} = Z_{1-0,025} = Z_{0,975} = 1,96$$

I.C = ($\bar{x}$ - $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = (92,9 – 1,96 · $\frac{9}{\sqrt{9}}$, 92,9 + 1,96 · $\frac{9}{\sqrt{9}}$) = (87,02, 98,78)

Por lo tanto, el intervalo de confianza con un nivel del 95% para μ es (87,02, 98,78).

b) Para determinar el tamaño mínimo de muestra necesario para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95%, utilizaremos la fórmula:

E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 5$; n ≥ $\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \cdot 9}{5}\right)^2 = 12{,}44$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de muestra necesario para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor de 5 días, con un nivel de confianza del 95%, es de 13 pacientes.

11. El tiempo de renovación de un teléfono móvil, expresado en años, se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica 0.2 años
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 usuarios y se obtiene una media muestral igual a 1.8 años. Determina un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil
b) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre a media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.03 años con un nivel de confianza del 95 %.

a) σ = 0,2 ; n = 81 ; $\bar{x} = 1{,}8$ 1 - α = 0,95 ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{1-0{,}025} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$

Para calcular el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil, utilizamos la fórmula:

I.C = $\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{81}},\ 1{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}2}{\sqrt{81}}\right) = (1{,}756,\ 1{,}844)$

Por lo tanto, el intervalo de confianza al 95% para el tiempo medio de renovación de un teléfono móvil es (1,756, 1,844).

b) Para calcular el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.03 años con un nivel de confianza del 95%, utilizamos la fórmula:

E = $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}03$; n ≥ $\left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96 \cdot 0{,}2}{0{,}03}\right)^2 = 170{,}\ 73$

Por lo tanto, el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual a 0.03 años con un nivel de confianza del 95% es 171.

12. Se considera una variable aleatoria con distribución normal μ y desviación típica igual a 1,2. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 elementos.
a) Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y μ sea mayor o igual que 4.

$$x \sim N(\mu, 1.2) \qquad \overline{x} \sim N\left(\mu, \frac{1.2}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu,\ 0.12\ )$$

$$P(|\overline{x} - \mu| \leq 4) = P(-4 \leq \overline{x} - \mu \leq 4) = P\left(\frac{-4}{0.12} \leq \frac{\overline{x} - \mu}{0.12} \leq \frac{4}{0{,}12}\right) = P\left(\frac{-4}{0.12} \leq Z \leq \frac{4}{0.12}\right) = 1$$

Luego $P(|\overline{x} - \mu| \geq 4) = 1 - P(|\overline{x} - \mu| \leq 4) = 1 - 1 = 0$

b) Determina un intervalo de confianza del 90% para μ; si la media muestral es igual a 50.

$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \quad \overline{x} = 50\,, \quad \sigma = 1.2\,, \quad n = 100$

$$1 - \alpha = 0.9 \ ; \ \alpha = 0.1 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \ ; \ Z_{0.95} = 1.65$$

$$I.C.: \left(50 - 1.65 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{100}};\ 50 + 1.65 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{100}}\right) = (50 - 1.65 \cdot 0.12\,;\ 50 + 1.65 \cdot 0.12) =$$
$$= (50 - 0.198\,;\ 50 + 0.198) = (49.802\,,\ 50.198)$$

Tenemos la confianza de que el 90% de los casos la media muestral pertenecerá al intervalo:

(49.802, 50.198).

13. La estatura en centímetros (cm) de los varones mayores de edad de una determinada población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 15cm.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 100 individuos obteniéndose una media muestral de 174cm. Determina un intervalo de confianza al 95% para μ.

$\mu \in \left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\ \overline{x} = 174\ ,\ \sigma = 15\ ,\ n = 100$

$$1 - \alpha = 0.95 \ ; \ \alpha = 0.05 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \ ; \ Z_{0.975} = 1.96$$

$$\left(174 - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}};\ 174 + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}\right) = (174 - 1.96 \cdot 1.5\,;\ 174 + 1.96 \cdot 1.5) =$$
$$= (174 - 2.94\,;\ 174 + 2.94) = (171.06\,,\ 176.94)$$

Tenemos la confianza de que el 95% de los casos la media poblacional pertenecerá al intervalo: (171.06, 176.94).

b) ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 5 cm, con un nivel de confianza del 90%?

$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 \quad \sigma = 15\ ,\ E = 5$

$$1 - \alpha = 0.9 \ ; \ \alpha = 0.1 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \ ; \ Z_{0.95} = 1.65$$

$$n \geq \left(1.65 \cdot \frac{15}{5}\right)^2 \ ; \ n \geq (1.65 \cdot 3)^2 \ ; \ n \geq 4.95^2 \ ; \ n \geq 24.5025$$

La muestra debe de tener al menos 25 varones mayores de edad.

14. El mínimo tamaño muestral necesario para estimar la media de una determinada característica de una población que puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ, con un error máximo de 2.27 y un nivel de confianza del 90%, supera en 1000 unidades al que se necesitaría si el nivel de confianza fuera del 95% y el error máximo fuera de 5,23. Expresa los tamaños muestrales en función de la desviación típica σ y calcula la desviación de la población y los tamaños muestrales respectivos.

a) Error = 2.27 $\quad 1 - \alpha = 0.9 \ ; \ \alpha = 0.1 \ ; \ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \ ; \ Z_{0.95} = 1.65$

n+1000

$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $2.27 = 1.65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n+1000}}$

b) Error = 5.23

$1 - \alpha = 0.95$; $\alpha = 0.05$; $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$; $Z_{0.975} = 1.96$

n

$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $5.23 = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$\begin{cases} 2.27 = 1.65 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n+1000}} \rightarrow \sigma = \frac{2.27 \cdot \sqrt{n+1000}}{1.65} \\ 5.23 = 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \sigma = \frac{5.23 \cdot \sqrt{n}}{1.96} \end{cases}$$

$\frac{2.27 \cdot \sqrt{n+1000}}{1.65} = \frac{5.23 \cdot \sqrt{n}}{1.96}$; $\left(1.375 \cdot \sqrt{n+1000}\right)^2 = \left(2.668 \cdot \sqrt{n}\right)^2$

$1.89 \cdot (n + 1000) = 7.11n$; $1.89n + 1890 = 7.11n$; $1890 = 7.11n - 1.89n$ $1890 = 5.22n$; $\frac{1890}{5.22} = n$; $362.06 = n$

$$\sigma = \frac{2.27 \cdot \sqrt{362.06 + 1000}}{1.65} = \frac{2.27 \cdot 36.90}{1.65} = 50.76$$

Los tamaños muestrales serían de 1363 y 363 como mínimo respectivamente con una desviación típica $\sigma = 50.76$

AUTOEVALUACIÓN

1. **Indica cuál de los siguientes motivos no es por el que se recurre a una muestra:**
   a) El proceso de medición es destructivo
   b) La población es muy numerosa
   c) La población es imposible o difícil de controlar
   d) La población tiene mal carácter

   d) *El motivo por el cual no es por el que se recurre a una muestra es porque la población tiene mal carácter.*

2. **Una ganadería tiene diez mil ovejas de diferentes razas. Queremos extraer una muestra de 100 ovejas. Indica el tipo de muestreo más adecuado:**
   a) muestreo aleatorio sistemático
   b) muestreo aleatorio estratificado
   c) muestreo no aleatorio
   d) muestreo aleatorio por conglomerados

   b) *El tipo de muestreo más apropiado es el aleatorio estratificado.*

3. **Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa en la distribución N(0,1):**
   a) $P(z < 0) = 1$
   b) $P(z < 0) = 0{,}5$
   c) $P(z = \sigma) = 0$
   d) $P(z > 0) = 0{,}5$

   a) *La afirmación falsa en la distribución N(0,1) es P(z<0)=1.*

4. **De una población de media 69 y desviación típica 8 se toma una muestra de tamaño 12. La probabilidad de que un individuo de la muestra tenga un valor mayor que 93 es:**
   a) $P(x > 93) = 0{,}9987$
   b) $P(x > 93) = 0{,}6501$
   c) $P(x > 93) = 0{,}1293$
   d) $P(x > 93) = 0{,}0013$

   d) *La probabilidad de que un individuo de la muestra tenga un valor mayor que 93 es* $P(x > 93) = 0{,}0013$

5. Los parámetros de una distribución son μ=10 y desviación típica σ =20. Se extrae una muestra de 100 individuos.
El valor de P (8≤ $\bar{x}$≤ 12) es:

μ=10 σ =20 n=100 $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; $N\left(10, \frac{20}{\sqrt{100}}\right)$= (10, 2)

P (8≤ $\bar{x}$≤ 12)=P$\left(\frac{8-10}{2} \leq z \leq \frac{12-10}{2}\right)$ =P (-1< $z < 1$)= P (z< 1)- P (z< 1)=0,8413-$[1 - \text{P}\ (z < 1)]$=

0,8413-$[1 - 0{,}8413]$=0,8413-$[0{,}1587]$=0,6838

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **b).***

6. En el control de calidad de una fábrica de chocolate se envasan tabletas de 100 gramos con una

desviación típica de 2 gramos. Se toma una muestra de 50 tabletas. Calcula probabilidad de que el peso medio de las tabletas sea menor de 99 gramos:

μ=100 σ =2 n=50 $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; N $\left(100, \frac{2}{\sqrt{50}}\right)$= (100, 0,28)

P (x<99)= P$\left(z < \frac{99-100}{0,28}\right)$= P (z$< -3,57$) =1 – P (z$< -3,57$)= 1- 0,9998=0,0002

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **a).***

7. En el control de calidad de una envasadora de estuches de jamón, se envasan en estuches de 100 gramos con una desviación típica de 2 gramos. La probabilidad de que un lote de 400 estuches pese más de 40100 gramos es de:

μ =100 σ =2 n=400 $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; N$\left(100, \frac{2}{\sqrt{400}}\right)$=N (100, 0,1)

P (x>100,25)= P$\left(z > \frac{100,25-100}{0,1}\right)$= P (z $> 2,5$) =1 – P (z$< -2,5$)= 1- 0,9938=0,0062

El numero 100,25 sale del cálculo realizado para saber cuál es el precio medio de los estuches ya que antes nos dan el total de los estuches. X= $\frac{40100}{400} = 100,25$

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **b).***

8 Determina un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 0,95 de una N (2, 0,1)

1-α=0,95; N (2, 0,1)

<u>Intervalo de confianza</u>

N (μ, σ); $\left(\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma < x < \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right)$

p $\left(z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$=$\frac{0,95+1}{2}$; p $\left(z < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$= 0,975 ; $Z_{\frac{\alpha}{2}}$= 1,96

2- $1,96 \cdot 0,1 < x < 2 + 1,96 \cdot\ 0,1$ (2-$1,96 \cdot 0,1 < x < 2 + 1,96 \cdot\ 0,1$)

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **a)** (1,8$< x < 2,19$)= 0,95*

9. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 1000 componentes y en ella se ha obtenido que la proporción de defectuosos es del 3,7%. Determina el intervalo de confianza al 99% para la proporción de componentes defectuosos que se producen en una fábrica

n=1000 , 3,7% defectuosos , $\hat{p} = 0,037$,

1 – α = 0,99; α = 0,01 ; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,01}{2}} = Z_{1-0,005} = Z_{0,995}$ = 2,58

$$I.C = \left(\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$$I.C. = \left(0,037 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,037 \cdot 0,963}{1000}}, 0,037 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,037 \cdot 0,963}{1000}}\right) = (0.0216, 0.0524)$$

- *La solución de este ejercicio sería el apartado **c)*** $(0.0216, 0.0524)$

10. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra en una población de 8 millones de votantes para conocer si tienen la intención de votar a un determinado partido político con una probabilidad de acierto del 0,95 y un margen de error inferior a 0,02?

$1 - \alpha = 0{,}95$; $\alpha = 0{,}05$; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0{,}05}{2}} = Z_{1-0{,}025} = Z_{0{,}975} = 1{,}96$

Tomamos la desigualdad (1) de la página 277 de los apuntes

$$\frac{0.02n+0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \geq 1.96 \Rightarrow 0.02n + 0.5 \geq 1.96\sqrt{np(1-p)}$$

Donde tenemos dos variables n y p. Vamos a acotar $p(1 - p)$. Dibujamos la parábola $y = x(1 - x)$ que alcanza su valor máximo, 1/4, para $x = 1/2$, por lo que $p(1 - p) \leq 1/4$. Sustituimos este valor.

$$0.02n + 0.5 \geq 1.96\sqrt{np(1-p)} \geq 1.96\sqrt{\frac{n}{4}}$$

Eliminamos 0.5 (para simplificar cálculos), elevamos al cuadrado, y obtenemos que: $n \geq 2\,401$.

La encuesta debe de realizarse para más de 2 401 votantes.