RESPUESTAS MATEMÁTICAS II

2º de Bachillerato

LOMLOE

www.apuntesmareaverde.org.es

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-069507

Fecha y hora de registro: 2015-07-09 13:48:48.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

ÍNDICE

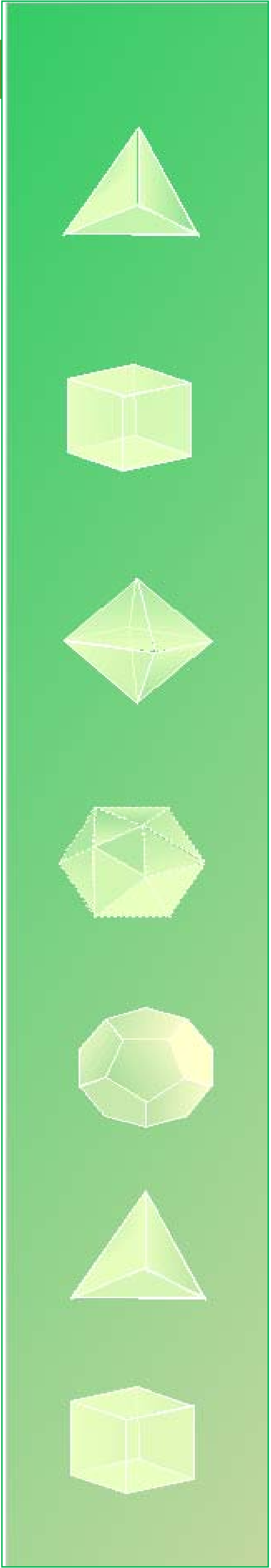
Bloque 1. Álgebra lineal

Bloque 2. Geometría

Bloque 3. Análisis

Bloque 4. Estadística y probabilidad

Textos Marea Verde



Matemáticas II

2º Bachillerato

Capítulo 1: Matrices

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Utiliza matrices para representar la información siguiente: Un agricultor cultiva lechugas, naranjas y melones. Durante el año 2014 ha recogido 1000 lechugas, 2000 Kg de naranjas y 500 melones. En los años anteriores su producción ha sido de 500, 1000 y 400. Por cada lechuga recibe 1 céntimo, por cada Kg de naranjas 3 céntimos y por cada melón 5 céntimos. Escribe la matriz de sus ganancias en el año de 2014.

Solución:

	LECHUGAS	NARANJAS (KG)	MELONES
CANTIDAD 2014	1000	2000	500
CANT. ANTES	500	1000	400
DINERO (CENTS)	1	3	5
GANANCIAS 2014 (CENTS)	1000	3000	5000

2. Analiza los siguientes elementos de tu entorno y determina si son matrices o no.

Solución:

Son matrices a) y g); b), c) y f) se pueden representar como matrices intercambiando por números los datos; y d), e), h) e i) podrían representarse como matrices, aunque no sean numéricos, teniendo en cuenta que se disponen en filas y columnas.

3. Propón otros elementos de tu entorno que sean matrices o puedan representarse como matrices.

Solución: Respuesta libre. Ejemplos: Podrían representarse como matrices la cuadrícula de un cuaderno, un tablero de ajedrez, un casillero de tres en raya, las caras laterales de un cubo de Rubik... etc.

4. Escribe tres matrices fila

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$A = (7\ 1); \quad B = (8\quad 4\quad -3); \quad C = (9\quad 20\quad -12\quad 0)$$

5. Escribe tres matrices columna

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

6. Escribe tres matrices cuadradas de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

Solución: Respuesta libre. Ejemplos:

$$A_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix};\quad B_3=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&0&1\\3&4&3\end{pmatrix};\quad C_4=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\2&4&3&6\\0&1&7&-1\\7&-2&0&0\end{pmatrix}$$

7. Escribe la matriz unidad de dimensión 2, 3 y 4.

Solución:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

8. Escribe la matriz nula de dimensión 2, 3 y 4

Solución:

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

9. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&-5\\7&3&-3\end{pmatrix}$

calcula: a) $A+3B$, b)$2A+B-5C$.

Solución:

a) $$\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&3&3\\6&6&-6\\-9&9&9\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}2+3&1+3&0+3\\9+6&0+6&-3-6\\-2-9&0+9&7+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&3\\15&6&-9\\-11&9&16\end{pmatrix}$$

b) $$2\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&3\\-2&0&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&-5\\7&3&-3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}4&2&0\\18&0&-6\\-4&0&14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&0&0\\10&20&-25\\35&15&-15\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4+1-5&2+1-0&0+1-0\\18+2-10&0+2-20&-6-2+25\\-4-3-35&0+3-15&14+3+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&1\\10&-18&17\\-42&-12&32\end{pmatrix}$$

Textos Marea Verde

10. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$ calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$ ¿es el producto conmutativo?

Solución:

a) $A\cdot B\rightarrow\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4&0\\18&0&0\\-23&19&19\end{pmatrix}$

b) $B\cdot A\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1&4\\26&2&-20\\15&-3&12\end{pmatrix}$

Podemos observar que el producto no es commutativo.

11. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix}\text{ y }B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}$$

calcula $3\cdot A^t-B^2$.

1. Calculamos la matriz traspuesta de A: $A^t=\begin{pmatrix}2&9&-2\\1&0&0\\0&-3&7\end{pmatrix}$
2. Calculamos $B^2: B\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6&2\\12&0&-8\\-6&12&0\end{pmatrix}$
3. Calculamos la operación propuesta: $3\cdot\begin{pmatrix}2&9&-2\\1&0&0\\0&-3&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6&2\\12&0&-8\\-6&12&0\end{pmatrix}=$
4. $=\begin{pmatrix}6&27&-6\\3&0&0\\0&-9&21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6&2\\12&0&-8\\-6&12&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&21&-8\\-9&0&8\\6&-21&21\end{pmatrix}$
5. Respuesta: $\begin{pmatrix}6&21&-8\\-9&0&8\\6&-21&21\end{pmatrix}$

Textos Marea Verde

12. Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

- Inversa de A $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{7}{57}&\frac{1}{19}\\1&-\frac{14}{57}&-\frac{2}{19}\\0&\frac{2}{57}&\frac{3}{19}\end{pmatrix}$

- Inversa de B: $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-3&3&3&0&0&1\end{array}\right)\to \begin{matrix}-2F_1+F_2\\3F_1+F_3\end{matrix};\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&0&-4&-2&1&0\\0&6&6&3&0&1\end{array}\right)\to$

$$F_3+F_2\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&6&2&1&1&0\\0&6&6&3&0&1\end{array}\right)\to\frac{1}{6}F_2\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&6&6&3&0&1\end{array}\right)\to -6F_2+F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&0&4&2&-1&-1\end{array}\right)\to\frac{1}{4}F_3\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$$\to\begin{matrix}-\frac{1}{3}F_3+F_2\\-F_3+F_1\end{matrix};\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\to$$

$$-F_2+F_1\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\qquad \mathbf{B^{-1}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{12}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

- Inversa de C: $\left(\begin{array}{cc|cc}2&3&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\to\frac{1}{2}F_1\ \left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\to -F_1+F_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\to\ F_2+F_1\ \left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&0&-1\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\to-\frac{2}{3}F_2\ \left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&0&-1\\0&1&3&-\frac{2}{3}\end{array}\right)$$

- $\boldsymbol{C^{-1}}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{-1}\\\mathbf{3}&-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

- Inversa de D: ∄, ya que siempre nos dará como resultado (al hacer gauss-jordan) 0 en las filas 2 y 3

13. Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo:

$$M=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&0&7\end{pmatrix},\ N=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

1. Despejamos X: $M \cdot X = P - N$, $X = M^{-1}(P-N)$
2. Restamos las matrices : $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\6&0&0\end{pmatrix}$
3. Calculamos la inversa de M: $M^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{7}{57}&\frac{1}{19}\\1&-\frac{14}{57}&-\frac{2}{19}\\0&\frac{2}{57}&\frac{3}{19}\end{pmatrix}$
4. Resolvemos: $X=\begin{pmatrix}0&\frac{7}{57}&\frac{1}{19}\\1&-\frac{14}{57}&-\frac{2}{57}\\0&\frac{2}{57}&\frac{3}{19}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\6&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{19}&0&\frac{28}{57}\\-\frac{4}{19}&0&-\frac{56}{57}\\\frac{18}{19}&0&\frac{8}{57}\end{pmatrix}$

14. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$$

Rango de A: $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\-2&-1&0\end{pmatrix}\rightarrow F_1+F_3\quad\begin{pmatrix}2&1&0\\9&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\rightarrow 9F_1-2F_2\quad\begin{pmatrix}2&1&0\\0&9&6\\0&0&0\end{pmatrix}$ Por lo que r(A)=2

- Rango de B: $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-2\\-3&3&3\end{pmatrix}-2F_1+F_2\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-4\\-3&3&3\end{pmatrix}\rightarrow$

  $3F_1+F_3\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-4\\0&6&6\end{pmatrix}\rightarrow\quad F_2\leftrightarrow F_3\begin{pmatrix}1&1&1\\0&6&6\\0&0&-4\end{pmatrix}$ Por lo que r(B)= 3

- Rango de C: $C=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}\quad-2F_1+F_2\quad\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}$ Por lo que r(C)=1
- Rango de D: $D=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}-2F_1+F_2\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\3&3&3\end{pmatrix}\rightarrow -3F_1+F_3\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

  Por lo que r(D)=1

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dadas las matrices

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Calcula:

a) A + B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -1+0 \\ 0-1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) A-B-C= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4+1 & -1-0-2 \\ 0+1+2 & 3+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) 3·A+5·B-6·C=3·$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+20+6 & -3+0-12 \\ 0-5+12 & 9-10-18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 29 & -15 \\ 7 & -19 \end{pmatrix}$$

2. Para las matrices

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{pmatrix}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ **Calcula A·B y B·A. ¿Es el producto conmutativo?**

A·B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 1\cdot 0 & 1\cdot(-1) - 1\cdot 5 & 1\cdot 2 - 1\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 0 & 2\cdot(-1) + 3\cdot 5 & 2\cdot 2 + 3\cdot 3 \\ 0\cdot 4 + 4\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 4\cdot 5 & 0\cdot 2 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 8 & 13 & 13 \\ 0 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

B·A= $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 - 1\cdot 2 + 2\cdot 0 & 4\cdot(-1) - 1\cdot 3 + 2\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 5\cdot 2 + 3\cdot 0 & 0\cdot(-1) + 5\cdot 3 + 3\cdot 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$$

A·B$\neq B \cdot A$ El producto no es conmutativo

Textos Marea Verde

3. Calcula los productos posibles entre las matrices:

A=$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

$- A_{3x3} \cdot B_{3x1} = M_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$- B_{3x1} \cdot A_{3x3}$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de B con las filas de A

$- A_{3x3} \cdot C_{2x3}$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A con las filas de C.

$- C_{2x3} \cdot A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 12 & 15 & 8 \end{pmatrix}$

-$B_{3x1} \cdot C_{2x3} =$ No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de B con las filas de C.

-$C_{2x3} \cdot B_{3x1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **y** $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **Calcula 3·A^t – B^2.**

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 =$

$$3\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&3\\3&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&-1\\-6&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\9&12&9\\9&9&12\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot2+2\cdot(-6) & 1\cdot1+1\cdot0+2\cdot(-1) & 1\cdot2+1\cdot(-1)+2\cdot0\\ 2\cdot1+0\cdot2+(-1)\cdot(-6) & 2\cdot1+0\cdot0+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot2+0\cdot(-1)+(-1)\cdot0\\ (-6)\cdot1+(-1)\cdot2+0\cdot(-6) & (-6)\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot(-1) & (-6)\cdot2+(-1)\cdot(-1)+0\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&3&3\\9&12&9\\9&9&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9&-1&1\\8&3&4\\-8&-6&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&4&2\\1&9&5\\17&15&23\end{pmatrix}$$

5. Para las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}\\\mathbf{4}&\mathbf{0}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}\text{, }\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{4}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\text{, }\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{-5}&\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{-2}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}\text{ y }\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones si es posible:

a) A+B = $\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1+0&-1+3&2+4\\4+(-1)&0+(-2)&(-3)+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&6\\3&-2&0\end{pmatrix}$$

b) $3\cdot A-4\cdot B=3\cdot\begin{pmatrix}1&-1&2\\4&0&-3\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}0&3&4\\-1&-2&3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}3&-3&6\\12&0&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-12&-16\\4&8&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-15&-10\\16&8&-21\end{pmatrix}$$

c) **A · B =** No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A con las filas de B

d) **A · D =** $\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{2}\\\mathbf{4}&\mathbf{0}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{1\cdot2+(-1)\cdot1+2\cdot3}\\\mathbf{4\cdot2+0\cdot1+(-3)\cdot3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

e) **B · C =** $\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{3}&\mathbf{4}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{-5}&\mathbf{1}&\mathbf{4}&\mathbf{-2}\\\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0\cdot2+3\cdot(-5)+4\cdot1} & \mathbf{0\cdot3+3\cdot1+4\cdot0} & \mathbf{0\cdot0+3\cdot4+4\cdot0} & \mathbf{0\cdot1+3\cdot(-2)+4\cdot(-3)}\\ \mathbf{(-1)\cdot2+(-2)\cdot(-5)+3\cdot1} & \mathbf{-1\cdot3+(-2)\cdot1+3\cdot0} & \mathbf{(-1)\cdot0+(-2)\cdot4+3\cdot0} & \mathbf{(-1)\cdot1+(-2)\cdot(-2)+3\cdot(-3)}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{-11}&\mathbf{3}&\mathbf{12}&\mathbf{-18}\\\mathbf{11}&\mathbf{-5}&\mathbf{-8}&\mathbf{-6}\end{pmatrix}$$

f) $\mathbf{C\cdot D} = \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ = No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de C con las filas de D.

g) $\mathbf{A^t \cdot C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ = No se puede multiplicar porque no coinciden las columnas de A^t con las filas de C.

6. ¿Es posible que para dos matrices A y B no cuadradas pueda existir A·B y B·A?

SÍ es posible, ejemplo:

$A_{mxn} \cdot B_{nxm} = C_m$

$B_{nxm} \cdot A_{mxn} = D_n$

7.

a) Calcula $A^{50}\ y\ A^{97}$

Para resolver este ejercicio hay que ir haciendo las potencias de la matriz hasta ver que patrón siguen.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Ahora resolvemos:

$A^{50} = A^{12\cdot 4+2} = A^{12\cdot 4} \cdot A^2 = (A^4)^{12} \cdot A^2 = I^{12} \cdot A^2 = A^2$

$A^{97} = A^{24\cdot 4+1} = A^{24\cdot 4} \cdot A^1 = (A^4)^{24} \cdot A = I^{24} \cdot A = A$

b) Encuentra los valores a y b para que la matriz A conmute con la matriz B= $\begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Que conmuten significa que $A * B = B * A$ entonces primero realizamos las multiplicaciones.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & -1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{pmatrix} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} -b = 0 \\ a = 1 \\ -1 = -a \\ 0 = -b \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \text{ luego } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Calcula A^n, para $n \in N$, siendo A las siguientes matrices:

Hay que ir calculando potencias hasta encontrar el patrón

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \}$ $\quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. *Se dice que dos matrices A y B conmutan si*:

$A \cdot B = B \cdot A$. *Dada la matriz A halla las matrices B que comuten con A.*

$$\left\{\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} a+2c = a \\ b+2d = 2a+b \\ c = c \\ d = 2c+d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} a = a \\ b = b \\ c = 0 \\ d = a \end{array}\right\} B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

10. encuentra todas las matrices, del orden correspondiente, que conmuten con estas matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} a+c = a \\ b+d = a+b \\ c = c \\ d = c+d \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} a = a \\ b = b \\ c = 0 \\ d = a \end{array}\right\} B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} A * B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix} \\ B * A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & c & 0 \\ e+f & f & 0 \\ h+i & i & 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} b+c = 0 \\ c = 0 \\ 0 \\ a = e+f \\ b = f \\ c = 0 \\ a+d = h+i \\ b+e = i \\ c+f = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{c} a = a \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = d \\ e = a \\ f = 0 \\ g = g \\ e = d \\ i = a \end{array}\right\}$$

$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

11.- Sean las matrices

$$\boldsymbol{A} = 2\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{10x} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{10}\cdot\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{m} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = (\boldsymbol{3} \quad \boldsymbol{m})$$

Calcula cada uno de los productos $\boldsymbol{A\cdot B, D\cdot E, E\cdot B, C\cdot E}$.

$A\cdot B$:

$A_{2\times\mathbf{2}},\ B_{\mathbf{2}\times 1} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$A = 2\cdot\begin{pmatrix} x & 2 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 4 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x+4y \\ 2my \end{pmatrix}$$

$D\cdot E$:

$D_{2\times\mathbf{1}},\ E_{\mathbf{1}\times 2} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$D = 10\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10m \end{pmatrix}(3 \quad m) = \begin{pmatrix} 30 & 10m \\ 30m & 10m^2 \end{pmatrix}$$

$E\cdot B$

$E_{1\times\mathbf{2}},\ B_{\mathbf{2}\times 1} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$(3 \quad m)\begin{pmatrix} 5 \\ y \end{pmatrix} = (15my)$$

$C\cdot E$

$C_{2\times\mathbf{1}},\ E_{\mathbf{1}\times 2} \rightarrow$ Sí se pueden multiplicar.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10x \end{pmatrix}(3 \quad m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 30x & 10xm \end{pmatrix}$$

12.- Sean

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{y} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{5} \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{z} & \boldsymbol{x+z} \end{pmatrix}$$

dos matrices de orden $\boldsymbol{2\times 3}$, en las que $\boldsymbol{x, y, z}$ denotan valores numéricos desconocidos.

- **a) Determina, razonadamente, los valores de $\boldsymbol{x, y, z} \in \mathbb{R}$ de manera que $\boldsymbol{A = B}$.**
- **b) ¿Es posible el cálculo de $\boldsymbol{A\cdot B}$? Razona la respuesta.**

a) $x = 2;\ z = 3;\ y = 3$

Para que dos matrices sean iguales todos sus elementos tienen que ser iguales uno a uno.

b) No es posible el cálculo de $A\cdot B$ por que el número de columnas de A no es igual al número de filas de B, requisito necesario para multiplicar dos matrices.

13.- Sea la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

Calcula, si existen, las siguientes matrices:

a) Una matriz $\boldsymbol{X}$, tal que

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A}=(\mathbf{1}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{-1})$$

b) Una matriz $\boldsymbol{Y}$, tal que

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

a) $X_{1\times 3},\ A_{3\times 3}$ → Sí se pueden multiplicar.

$$X=(a\quad b\quad c)$$

$$(a\quad b\quad c)\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 0\end{pmatrix}=(1\quad 0\quad -1)$$

$$\left.\begin{matrix}2a+2b-5c=1\\ a-c=0\\ 2a-b=-1\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}2a+2b-5c=1\\ a=c\\ 2a-b=-1\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}2a+2b-5a=1\\ 2a-b=-1\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}-3a+2b=1\\ 2a-b=-1\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}-3a+2b=1\\ 4a-2b=-2\end{matrix}\right\}$$

$a=-1\,;c=-1\,;b=2a+1=2(-1)+1=-1$

$$X=(-1\quad -1\quad -1)$$

b) No se pueden multiplicar, ya que el producto de dos matrices debe tener el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz, y en este caso, el producto solo tiene dos filas, no como la primera matriz (A) que tiene tres filas.

$$A_{3\times 3}\cdot Y_{x\times y}\neq B_{2\times 3}$$

Para poder multiplicar $A\cdot Y$, el resultado debería tener 3 filas

14.- Calcula las matrices inversas, si existen, de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{a})\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{b})\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{8}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{c})\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{d})\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

$a)\ \left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right);\ F_2=F_2+F_1\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);\ F_1=\frac{1}{2}F_2+F_1\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right);$

$F_2=\frac{1}{2}F_2\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right);\ F_2=-1F_1+F_2\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{array}\right);\ F_2=-1F_2\rightarrow$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right);\ F_1=2F_1\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right);\ F_1=-3F_2+F_1\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right);\ F_1=\frac{1}{2}F_1\rightarrow$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r} a+2c=1 \\ 4a+8c=0 \end{array}\right\} a = 1-2c \to 4(1-2c)+8c=0;\ -8c+4+8c=0;\quad \mathbf{4=0}$$

$$\left.\begin{array}{r} b+2d=0 \\ 4b+8d=1 \end{array}\right\} b = -2d \to 4(-2d)+8d=1;\ -8d+8d=1;\quad \mathbf{0=1}$$

$No\ existe\ su\ matriz\ inversa.$

$c)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);\ \begin{array}{l} F_2 = F_1 + F_2 \to \\ F_3 = 4F_1 + F_3 \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right);\ F_3 = -5F_2 + F_3 \to$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right); F_1 = -1F_1 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right); F_3 = -\frac{1}{16}F_3 \to$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \end{array}\right);\ F_1 = F_2 + F_1 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \end{array}\right);$

$F_1 = -3F_1 + F_1 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \end{array}\right);\ F_2 = -5F_3 + F_2 \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \end{array}\right) \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ \frac{11}{16} & -\frac{9}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$d)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);\ F_1 = -1F_1 + F_2 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);\ \begin{array}{l} F_2 = -3F_1 + F_2 \to \\ F_3 = -4F_1 + F_3 \to \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right);\ F_2 = -\frac{1}{5}F_2 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -8 & -7 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right);$

$$F_3 = 8F_2 + F_3 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right);\ F_3 = -\frac{5}{3}F_3 \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);\ F_2 = -\frac{4}{5}F_3 + F_2 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);$$

$$F_1 = -2F_3 + F_1 \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right);\ F_1 = -2F_2 + F_1 \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \qquad D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

15.- Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

calcula $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^t$ y $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1}$.

$A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)^t$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A \cdot B)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{r} 7a + 7c = 1 \\ 3a + c = 0 \end{array}\right\}\ c = -3a \to 7a + 7(-3a) = 1;\ 7a - 21a = 1;\ -14a = 1;\ a = -\dfrac{1}{14};$

$\left.\begin{array}{r} 7b + 7d = 0 \\ 3b + d = 1 \end{array}\right\}\ d = 1 - 3b \to 7b + 7(1 - 3b) = 0;\ \ 7b + 7 - 21b = 0;\ \ 7b - 21b = -7;$

$-14b = -7;\ \ b = \frac{7}{14};\qquad c = -3\left(-\frac{1}{14}\right); c = \frac{3}{14}\qquad d = 1 - 3\left(\frac{7}{14}\right);\ d = 1 - \frac{3}{2};\ d = -\frac{1}{2}$

Textos Marea Verde

$$(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{14} & \frac{7}{14}\\ \frac{3}{14} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

16.- Dada la matriz

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

a) **Halla la matriz inversa de $\boldsymbol{A}$**
b) **Comprueba que $\boldsymbol{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I}$**
c) **Halla una matriz $\boldsymbol{X}$ tal que $\boldsymbol{A\cdot X=B}$, siendo**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$$

a) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix}2a-c=1\\ a+c=0\end{matrix}\right\}\ a=-c\rightarrow\ 2(-c)-c=1;\ -2c-c=1;\ -3c=1;c=-\frac{1}{3}$

$\left.\begin{matrix}2b-d=0\\ b+d=1\end{matrix}\right\}\ b=1-d\rightarrow 2(1-d)-d=0;\ 2-2d-d=0;\ 2d+d=2;\ \ 3d=2;$

$d=\frac{2}{3}$ $\qquad a=-\left(-\frac{1}{3}\right);\ \ a=\frac{1}{3}$ $\qquad b=1-\frac{2}{3};\ \ b=\frac{1}{3}$ $\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c) $A\cdot X=B,\quad Sea\ B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$\left.\begin{matrix}2a-c=4\\ a+c=0\end{matrix}\right\}\ a=-c;2(-c)-c=4;\ -2c-c=4;\ -3c=4;c=-\frac{4}{3}$

$\left.\begin{matrix}2b-d=2\\ b+d=-2\end{matrix}\right\}\ b=-2-d;\ 2(-2-d)-d=2;\ -4-2d-d=2;\ -3d=6;\ d=-\frac{6}{3}$

$a=-\left(-\frac{4}{3}\right);a=\frac{4}{3}$ $\qquad b=-2-\left(-\frac{6}{3}\right);b=-2+\frac{6}{3};\ b=4$

$$B=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 4\\ -\frac{4}{3} & -2\end{pmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

17. Calcula la matriz inversa de

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Procedimiento:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F3-F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F3+F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F2-2F3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{3F1-F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}\cdot F1\\ \frac{1}{3}\cdot F2\\ \frac{1}{3}\cdot F3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa es:

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

18. Dadas las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{pmatrix}\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$ **Obtén, si procede, $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1}$.**

Tenemos que hallar C^{-1} entonces, primero multiplicamos B·A=C= $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

Luego hallamos la inversa de C:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F2-F1}\left(\begin{array}{cc|cc}3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{5F1+F2}\left(\begin{array}{cc|cc}15 & 0 & 4 & 1\\ 0 & 10 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\substack{\frac{F1}{15}\\ \frac{F2}{10}}}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{15}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\end{array}\right)$$

$$(\mathrm{B}\cdot\mathrm{A})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{15} & \frac{1}{15}\\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

Textos Marea Verde

19. Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

a) **Calcula la matriz inversa de A·B**
b) **Halla el producto de la inversa de B por la inversa de A. ¿Qué relación existe entre la matriz del apartado anterior y esta matriz? Justifica la respuesta.**

a) La matriz inversa de $(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1}$ = C^{-1}

Primero multiplicamos A·B=$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ahora obtenemos C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-2F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Tenemos que hallar la inversa de B y la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2-2F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$:

$$\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Observamos que el resultado de multiplicar $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1} = \ \mathrm{C}^{-1}$

En el apartado "a" obtenemos la matriz inversa de C realizando este proceso: A · B = C y se halla su inversa.

En el apartado "b" también se obtiene la inversa de C, pero en lugar de multiplicar B · A, se multiplica directamente las inversas de B y A, es decir, $\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$:

$\mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1} = \ \mathrm{C}^{-1}$

La relación que existe entre la matriz de ambos apartados es que obtenemos el mismo resultado tanto si seguimos el proceso del apartado "a" como el del apartado "b", es decir,

$(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\cdot\ \mathrm{A}^{-1}$

20. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprueba que $A^t = A^{-1}$ y calcula $(A \cdot A^t)^{2003}$.

Primero hallamos la matriz traspuesta de A:

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Para comprobar que $A^t = A^{-1}$ nos falta obtener la matriz inversa de A, entonces:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 \leftrightarrow F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F3 \leftrightarrow F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Efectivamente $A^t = A^{-1}$

Ahora tenemos que obtener $(A \cdot A^t)^{2003}$. Como $A^t = A^{-1}$, $(A \cdot A^t)^{2003} = (A \cdot A^{-1})^{2003} = (I)^{2003} = I$

21. Sean las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **Halla C^{-1} y D^{-1}**
b) **Calcula la matriz inversa de C·D**
c) **Comprueba que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$.**
a) Hallamos la matriz inversa de C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1+2F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{F1}{-3}\ \frac{F2}{-1}\ \frac{F3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Textos Marea Verde

Ahora hallamos la matriz inversa de D:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F3+F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+2F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\frac{F1}{6} \\ \frac{F2}{3}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Para calcular la matriz inversa de C·D primero multiplicamos C·D=E = $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

A continuación, hallamos la matriz inversa de E:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F2+3F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{4F3-F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3F3+5F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{2F2-F3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{6F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -24 & 0 & 0 & 12 & 12 & 12 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 8 & 12 & 20 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{\frac{F1}{-24} \\ \frac{F2}{-6} \\ \frac{F3}{8}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

c) Sabemos que $(C \cdot D)^{-1} = E^{-1}$, es decir, $(C \cdot D)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Ahora tenemos que comprobar si $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$, es decir, $D^{-1} \cdot C^{-1} = E^{-1}$
Para ello, multiplicamos $D^{-1} \cdot C^{-1}$:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Obtenemos $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, es decir, E^{-1}.

Por lo tanto, hemos comprobado que $(C \cdot D)^{-1} = D^{-1} \cdot C^{-1}$

22.- Resuelve la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } P = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M \cdot X + N = P\ ;\quad M \cdot X = P - N\ ;\quad M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot (P - N)$

$X = M^{-1} \cdot (P - N)$

$M^{-1} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$-a = 1;\quad -b = 0;\quad -c = 0;\quad -d = 1$

$M^{-1} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$(P - N) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

23. - Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$

b) Determina la matriz X para que $X \cdot A = A + I$

a) $A^{-1} \cdot (2 \cdot B + 3 \cdot I)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\ ,\quad 2B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\quad 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\quad (2B + 3I) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot (2b + 3I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot A = A + I\quad ;\quad X \cdot A \cdot A^{-1} = (A + I) \cdot A^{-1}\quad ;\quad X = (A + I) \cdot A^{-1}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\ ;\ (A + I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$X = (A + I) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

24. - Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $X\cdot A\cdot B-X\cdot C=2\cdot C$

$$X\cdot A\cdot B-X\cdot C=2\cdot C\ ;\quad X\cdot(A\cdot B-C)=2\cdot C\ ;$$

$$X\cdot(A\cdot B-C)\cdot(A\cdot B-C)^{-1}=2\cdot C\cdot(A\cdot B-C)^{-1}\ ;\quad X=2\cdot C\cdot(A\cdot B-C)^{-1}$$

$$(A\cdot B-C)^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\right]^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$$2\cdot C\cdot(A\cdot B-C)^{-1}=\begin{pmatrix}0&2\\-2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&1\end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

25. - Calcula el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&-1\\0&4&2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&0&1&0\\2&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

a) $rango\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}-2F_1+F_2=F'_2\rightarrow rango\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\end{pmatrix}=2;\ R(A)=2$

b) $rango\begin{pmatrix}0&2&1\\1&0&-1\\0&4&2\end{pmatrix}\ C_2\leftrightarrow C_1;\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&-1\\4&0&2\end{pmatrix}\ F_3-2F_1=F'_3\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix};R(A)=2$

c) $rango\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&0&1&0\\2&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ F_3\leftrightarrow F_2\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\2&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}-1F_1+F_2\begin{pmatrix}2&-1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad R(C)=4$

26. - Calcula el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro a:

a) $\begin{pmatrix}2&0&0&1\\2&1&3&1\\a&1&3&2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2a&1&1\\2&a&1\\2&1&a\end{pmatrix}$

$$a)\begin{pmatrix}2&0&0&1\\2&1&3&1\\a&1&3&2\end{pmatrix};C_4\leftrightarrow C_1\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\1&1&3&2\\2&1&3&a\end{pmatrix}\ \begin{matrix}F'_2=-F_1+F_2\\F'_3=-2F_1+F_3\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&3&0\\0&-1&-3&a-4\end{pmatrix}$$

$$F''_3 = F'_1 + F'_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix};\ C_4 \leftrightarrow C_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a-4 & 0 \end{pmatrix}$$

$si\ a \neq 4; rango = 3 \quad si\ a = 4;\ rango = 2$

$$b) \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} C_3 \leftrightarrow C_1 \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{matrix} F'_2 = -F_1 + F_2 \\ F'_3 = -aF_1 + F_3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 0 & 1-a & 2-2a \\ 0 & 1-a^2 & 2-2a^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \cdot a \\ 0 & 1-a & 2 \cdot (1-a) \\ 0 & 1-a^2 & 2 \cdot (1-a^2) \end{pmatrix};\ C_2 - 2C_3 \to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $a \neq 1, \quad rango = 2$

2. $a = 1, \quad rango = 1$

27.- Determina las matrices A y B que son soluciones del siguiente sistema:

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} -8 & 7 & -1 \\ 9 & -18 & 1 \\ 14 & 9 & -14 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 4 \\ -8 & 2 & 17 \\ 14 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3A - 2B = C \\ 2A + B = D \end{cases};\ E'_2 = E_1 + 2E_2;\ \begin{cases} 3A - 2B = C \\ 7A = C + 2D \end{cases};\ A = \tfrac{1}{7}(2D + C); \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 5 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3A - 2B = C \\ 2A + B = D \end{cases};\ E'_2 = -2E_1 + 3E_2;\ \begin{cases} 3A - 2B = C \\ 7B = -2C + 3D \end{cases};\ B = \tfrac{1}{7} \cdot (3D - 2C); \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -6 & 6 & 7 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

***28.** Obtén las matrices X e Y para que verifiquen los siguientes sistemas matriciales.*

a)

$$\begin{Bmatrix} 2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

1º Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$\boxed{C \to}$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{D \to}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de x e y en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$-\begin{Bmatrix} 2x - 3y = C \\ x - y = D \end{Bmatrix} \to$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -3 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{array}{rrcr} 2X & -3Y & = & C \\ -3X & +3Y & = & -3D \\ \hline & -X & = & C - 3D \end{array} \to$$ *cambiamos el signo*

$$X = -C + 3D$$

3º Se resuelve.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo que sustituir.

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{array}{rrcr} 2X & -3Y & = & C \\ -2X & +2Y & = & -2D \\ \hline & -Y & = & C-2D \end{array} \to Y = -C + 2D \to \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{Bmatrix} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

1º; Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$C \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $D \to \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de x e y en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$\begin{Bmatrix} X + Y = C \\ X - Y = D \end{Bmatrix} \to$$

En este caso se deja como está

$$\to \begin{array}{rrcr} X & +Y & = & C \\ X & -Y & = & D \\ \hline & 2X & = & C+D \end{array} \to$$

Despejamos

$$\to X = \frac{1}{2} \cdot (C + D)$$

3º Se resuelve.

$$\cdot X \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo.

Multiplicamos la segunda ecuación por -1 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{array}{rrcr} X & +Y & = & C \\ -X & +Y & = & -D \\ \hline & 2Y & = & C-D \end{array} \to Y = \frac{1}{2} \cdot (C - D) \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{Bmatrix} 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{Bmatrix}$$

1º; Nombramos las matrices para que sea más cómodo de hacer la operación;

$C \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $D \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

2º Se realiza como una operación normal de *x* e *y* en reducción para calcular x, que ahora mostraremos los pasos;

$$\begin{Bmatrix} 2X + Y = C \\ X + 2Y = D \end{Bmatrix} \to$$

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 y la primera la dejamos como está.

$$\to \begin{Bmatrix} 2X+Y=C \\ -2X-4Y=-2D \\ \hline -3Y=C-2D \end{Bmatrix} \to \quad Y = \frac{1}{-3} \cdot (C - 2D)$$

3º Se resuelve.

$$\cdot Y \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -4/3 & 8/3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1/-3 & 1/-3 \\ -4/3 & 10/3 \end{pmatrix}$$

4º Se hace lo mismo para la Y debido a que es más sencillo.

Multiplicamos la segunda ecuación por -1/2 y la primera la dejamos como está

$$\rightarrow \frac{\begin{array}{c} 2X+Y=C \\ -\frac{1}{2}X-Y=-\frac{1}{2}C \end{array}}{\frac{3}{2}X=C-\frac{1}{2}D} \rightarrow X = \frac{2}{3}\cdot\left(C-\frac{1}{2}D\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

29. Utilizando las operaciones elementales por filas, obtén matrices triangulares equivalentes a las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1º Lo que hay que hacer en estos ejercicios es dejar en 0 todos los números debajo de la diagonal principal. Sumando, multiplicando en (positivo o negativo) las sumas… En este caso tenemos que multiplicar la $F_1 \cdot (-3)$ y sumársela a F_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (-3 \quad -6) + (3 \quad 4) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{F1}+\mathrm{F2} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2\cdot\mathrm{F1}+\mathrm{F3} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$-\frac{1}{2}\mathrm{F2}+\mathrm{F3} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -3\cdot\mathrm{F1}+\mathrm{F2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow -4\cdot\mathrm{F1}+\mathrm{F3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$

$-1\cdot\mathrm{F2}+\mathrm{F3} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2\cdot\mathrm{F3}+\mathrm{F2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{F3}\cdot 3+\mathrm{F4} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow -\mathrm{F2}+\mathrm{F4} \rightarrow$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\-1&1&2&1\\0&3&2&0\end{pmatrix}\rightarrow -F2+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\-1&1&2&1\\0&1&-3&-5\end{pmatrix}\rightarrow -\frac{1}{2}\cdot F2+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\-1&1&2&1\\0&0&-\frac{11}{2}&-\frac{15}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F1+F3\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\0&2&0&2\\0&0&-\frac{11}{2}&-\frac{15}{2}\end{pmatrix}\rightarrow -F2+F3\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\0&0&-5&-3\\0&0&-\frac{11}{2}&-\frac{15}{2}\end{pmatrix}\rightarrow -\frac{11}{10}\cdot F3+F4\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-2&1\\0&2&5&5\\0&0&-5&-3\\0&0&0&-\frac{21}{5}\end{pmatrix}$$

30.

30. - En una academia de idiomas se imparten inglés y alemán en cuatro niveles y dos modalidades: grupos reducidos y grupos normales. La matriz $A=\begin{pmatrix}130&160\\120&80\\210&130\\100&60\end{pmatrix}$ expresa el número de personas, según el tipo de grupo, donde la primera columna corresponde a los cursos de inglés, la segunda a los de alemán y las filas, a los niveles primero, segundo, tercero y cuarto respectivamente. Las columnas de la matriz $B=\begin{pmatrix}0.2&0.25&0.4&0.75\\0.8&0.75&0.6&0.25\end{pmatrix}$ reflejan el tanto por uno de estudiantes (común para ambos idiomas) que siguen curso reducido (primera fila) y curso normal (segunda fila) para cada uno de los niveles.

a) Obtener la matriz que proporciona el número de estudiantes por modalidad e idioma.

b) Sabiendo que la academia cobra 30 euros por persona en grupos reducidos y 20 euros por persona en grupo normal, hallar la cantidad que obtiene la academia en cada uno de los idiomas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{ing.} & \text{al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}1º\\2º\\3º\\4º\end{array} & \begin{pmatrix}130&160\\120&80\\210&130\\100&60\end{pmatrix}\end{array}\qquad\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1º&2º&3º&4º\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{red.}\\\text{nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}0{,}2&0{,}25&0{,}4&0{,}75\\0{,}8&0{,}75&0{,}6&0{,}25\end{pmatrix}\end{array}$$

a) *Para obtener esta matriz debemos hacer un producto de matrices la cual se multiplicaría la matriz B por la A:* ***$B_{2x4}\cdot A_{4x2}$***

$$\begin{pmatrix}(130\cdot0{,}2)+(120\cdot0{,}25)+(210\cdot0{,}4)+(100\cdot0{,}75) & (130\cdot0{,}8)+(120\cdot0{,}75)+(210\cdot0{,}6)+(100\cdot0{,}25)\\(160\cdot0{,}2)+(80\cdot0{,}25)+(130\cdot0{,}4)+(60\cdot0{,}75) & (160\cdot0{,}8)+(80\cdot0{,}75)+(130\cdot0{,}6)+(60\cdot0{,}25)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{Red.}\\\text{Nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}215&345\\149&281\end{pmatrix}\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cc}\text{red.} & \text{nor.}\\ (30 & 20)\end{array}\cdot\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\end{array}\\ \begin{array}{c}\text{red.}\\\text{nor.}\end{array} & \begin{pmatrix}215&345\\149&281\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{cc}\text{Ing.} & \text{Al.}\\ (13350 & 10090)\end{array}$$

Respuesta: *La academia de idiomas gana dando ingles un total de 13350€ y en alemán 10090€.*

Textos Marea Verde

31.

31. - Tres escritores presentan a un editor, al acabar la enciclopedia, la minuta que se recoge en la tabla adjunta:

	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 75 euros, la conferencia a 300 euros y el viaje a 250 euros. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20 % y el 10 % de lo que correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T & C & V \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 10 & 5 \\ 80 & 15 & 8 \\ 100 & 25 & 10 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} T \\ C \\ V \end{array} \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8525 \end{pmatrix}$$

Respuesta: El editor se gasta 8525€

32.

32. - Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, *A* y *B*, en tres terminaciones: *N*, *L* y *S*. Produce del modelo *A*: 400 unidades en la terminación *N*, 200 unidades en la terminación *L* y 50 unidades en la terminación *S*. Produce del modelo *B*: 300 unidades en la terminación *N*, 100 en la *L* y 30 en la *S*. La terminación *N* lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación *L* lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación *S* lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

a) Representa la información en dos matrices.

b) Halla una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

a)

$$A = \begin{array}{c} \\ N \\ L \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 200 & 100 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{Taller} \\ \text{Admn.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} N & L & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 25 & 30 & 33 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) *Debemos hacer el producto de B y A.*

$$B \cdot A = \cdot \begin{pmatrix} 25 & 30 & 33 \\ 1 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 & 300 \\ 200 & 100 \\ 50 & 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (400 \cdot 25) + (200 \cdot 30) + (50 \cdot 33) & (300 \cdot 25) + (100 \cdot 30) + (30 \cdot 33) \\ (400 \cdot 1) + (200 \cdot 1{,}2) + (50 \cdot 1{,}3) & (300 \cdot 1) + (100 \cdot 1.2) + (30 \cdot 1.3) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \\ \text{Taller} \\ \text{Admn.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 17650 & 11490 \\ 705 & 459 \end{pmatrix} \end{array}$$

33.

33. - Sean A y B dos matrices de igual orden, y λ un número. Se sabe que $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$. Justifica el resultado.

Dada una matriz $A \in E_{mxn}$, $A = (a_{ij})$ y $\alpha \in K$, se define el producto del escalar α por la matriz A y se denota por $\alpha \cdot A$ a la matriz $B \in E_{mxn}$, cuyos elementos $b_{ij} = \alpha \cdot aij$ se obtienen a partir de los elementos de A multiplicando a todos ellos por el escalar α.

Justificamos el resultado con la siguiente formula;

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \qquad \rightarrow \qquad \forall\, \alpha \in K \wedge \forall\, A, B \in E_{mxn}$$

Textos Marea Verde

34. Sean *A* y *B* dos matrices cuadradas de igual tamaño. Si *A* y *B* son simétricas, analiza si, entonces, también lo es su producto *A*·*B*. Si la respuesta es afirmativa, justifíquese; en caso contrario, dese un contraejemplo que lo confirme.

$Si\ \ A = A^t\ \ y\ B = \ B^t\ \ tenemos\ que\ \ A\cdot B = \ A^t\, B^t$

$Sin\ embargo\ \ (A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t\ \ que\ no\ tiene\ que\ ser\ igual\ a\ A^t\cdot\ B^t$

Contraejemplo:

A=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$

B=$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$

A·B=$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}1\cdot 2+1\cdot 3+3\cdot 4 & 1\cdot 3+1\cdot 4+3\cdot 5 & 1\cdot 4+1\cdot 5+3\cdot 6\\ 1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 4 & 1\cdot 3+2\cdot 4+4\cdot 5 & 1\cdot 4+2\cdot 5+4\cdot 6\\ 3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4 & 3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5 & 3\cdot 4+4\cdot 5+5\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 22 & 27\\ 24 & 31 & 38\\ 38 & 50 & 62\end{pmatrix}$

$(A\cdot B)^t$=$\begin{pmatrix}18 & 24 & 38\\ 22 & 31 & 50\\ 27 & 38 & 62\end{pmatrix}$ luego A·B no es simétrica.

35. Sea la matriz M=$\begin{pmatrix}0 & r\\ s & 0\end{pmatrix}$, siendo *r* y *s* dos números reales tales que *r*·*s* ≠1.

Calcula M^2, M^3, M^4 y M^{2k} para $k \in$ N.

M^2=M·M= $\begin{pmatrix}0 & r\\ s & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & r\\ s & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 0+rs & 0\cdot r\\ s0+0s & s\cdot r+0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rs & 0\\ 0 & sr\end{pmatrix}$

M^3=M^2·M=$\begin{pmatrix}rs & 0\\ 0 & sr\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & r\\ s & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}rs\cdot 0+0\cdot s & rs\cdot r+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+sr\cdot s & 0\cdot r+sr\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & r^2s\\ rs^2 & 0\end{pmatrix}$

M^4=$M^3\cdot M = \begin{pmatrix}0 & r^2s\\ rs^2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & r\\ s & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0+r^2s\cdot s & 0\cdot r+r^2s\cdot 0\\ rs^2\cdot 0+0\cdot s & rs^2\cdot r+0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r^2s^2 & 0\\ 0 & r^2s^2\end{pmatrix}$

M^{2K}=$\begin{pmatrix}r^ks^k & 0\\ 0 & r^ks^k\end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

36. Sea el conjunto de matrices definido por: M=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R\right\}$

a) Comprueba que si A, B ∈ M, también $A + B$ ∈ M y $A \cdot B$ ∈ M

b) Encuentra todas las matrices C ∈ M, tales que $C^2 = C$.

a) Sean las matrices A=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}; a, b \in R$ y B=$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}; c, d \in R$

A+B=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$, efectivamente ∈ M

A·B=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+bd & bd+ac \end{pmatrix}$, efectivamente ∈ M

b) Sea la matriz C=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

C·C=$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+ba \\ ba+ab & b^2+a^2 \end{pmatrix}$

C^2 = C

$$\begin{cases} a^2+b^2=a \\ ab+ba=b \\ ab+ba=b \\ a^2+b^2=a \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+b^2=a \\ 2ab=b \\ 2ab=b \\ a^2+b^2=a \end{cases} \qquad \boldsymbol{Si\ b \neq 0} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4}+b^2=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Si\ b=0} \qquad \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=0 \\ a=-1 \end{cases}$$

Las matrices son: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

37. Se dice que una matriz cuadrada A es ortogonal si se verifica que $A \cdot A^t = I$ donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad. Si A y B son dos matrices ortogonales de igual tamaño, analiza si $A \cdot B$ es una matriz ortogonal.

A ortogonal $A \cdot A^t = I$ B ortogonal $B \cdot B^t = I$

Textos Marea Verde
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$¿A \cdot B \cdot (A \cdot B)^t = I?$$

$$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Sí, A·B es ortogonal

38. Considera las matrices *A*, *B* y *C* definidas como: $A_{3\times 3}$

$A_{3x3} = (a_{ij} = i+j), \forall\ i, j=1, 2, 3.$

$B_{2x3} = (b_{ij} = i-j), \forall i=1, 2; j=1, 2, 3.$

$C_{3x2} = (c_{ij} = 2i+j), \forall i=1, 2, 3; j=1, 2.$

a) Construye las tres matrices.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) Halla las traspuestas A^t, B^t y C^t y determina cuál (o cuáles) de las matrices es simétrica.

A^t=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ A es simétrica, no lo son B, B^t=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ni C, C^t=$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

c) Analiza cuáles de los productos *A·A*, *A·B*, *A·C*, *B·A*, *B·B*, *B·C*, *C·A*, *C·B* o *C·C* pueden realizarse.

A·A: sí se puede, son dos matrices de orden 3

A·B: no se puede calcular ya que una matriz es de 3x3 y la otra es de 2x3

A·C: sí se puede, ya que una matriz es de 3x3 y la otra es de 3x2

B·A: sí se puede, ya que una matriz es de 2x3 y la otra es de 3x3

B·B: No se puede calcular porque una matriz es de 2x3 y la otra matriz también es de 2x3

B·C: sí se puede, ya que una matriz es de 2x3 y la otra es de 3x2

C·A: no se puede, ya que una matriz es de 3x2 y la otra de 3x3

C·B: sí se puede, ya que una matriz es de 3x2 y la otra es de 2x3

Textos Marea Verde

C·C: No se puede calcular porque una matriz es de 3x2 y la otra matriz también es de 3x2

d) Determina el rango de las tres matrices *A*, *B* y *C*

A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2F1+F3 \rightarrow F3 \\ 2F2-3F1 \rightarrow F2 \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \{2F2-3F1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$
$-F2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ →R(A)=2

B=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F1 \leftrightarrow F2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ →R(B)=2

C=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow C1 \leftrightarrow C2 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -3F1+2F2 \\ -2F1+F3 \end{cases} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ →R(C)=2

39.Dada la matriz: M=$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ En la que se verifica $x^2+y^2+z^2=1$.

a) Calcula M^2.

b) Calcula $P = M^2 + I$.

c) Comprueba que $P^2 = P$.

d) Comprueba que $P \times M = M \times P = O$.

a)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{pmatrix}$$

b) $P = M^2 + I = \begin{pmatrix} -y^2-z^2 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -y^2-z^2+1 & xy & xz \\ xy & -x^2-z^2+1 & yz \\ xz & yz & -x^2-y^2+1 \end{pmatrix}$$

como $x^2+y^2+z^2 = 1$, sustituimos y nos queda $P = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$

c) $P^2 = P$

$$P \cdot P = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & zy \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^4 + x^2y^2 + x^2z^2 & x^3y + xy^3 + xyz^2 & x^3z + xy^2z + xz^3 \\ x^3y + xy^3 + xyz^2 & x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 & x^2yz + zy^3 + z^3y \\ x^2z + xy^2z + xz^3 & x^2yz + y^3z + y^2z^2 & x^2z^2 + y^2z^2 + z^4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2(x^2 + y^2 + z^2) & xy(x^2 + y^2 + z^2) & xz(x^2 + y^2 + z^2) \\ xy(x^2 + y^2 + z^2) & y^2(x^2 + y^2 + z^2) & yz(x^2 + y^2 + z^2) \\ xz(x^2 + y^2 + z^2) & zy(x^2 + y^2 + z^2) & z^2(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

$d)\ \ P \times M = M \times P = 0$

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & zy & z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & zy & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad ; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. La dimensión de la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz A es 2x3 porque está compuesta por 2 filas y 3 columnas.

La respuesta correcta es c) 2x3

2. La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \to Matriz\ rectangular$$

La respuesta correcta es d) rectangular

3. La suma de las matrices $A\ y\ B$ es:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+1 & -2+3 & 0+5 \\ 3+0 & 4+1 & -7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es b) $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$

4. El producto $3A$ es:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix}$$

La respuesta correcta es c) $3A$=$\begin{pmatrix} 15 & -6 & 0 \\ 9 & 12 & -21 \end{pmatrix}$

5. Indica qué afirmación es cierta:

La respuesta correcta es b) Las matrices $A\ y\ B$ no se pueden multiplicar.

Ya que el número de columnas de la matriz A **no es igual** al número de filas de matriz B.

Dadas las matrices:

C = $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; E = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; F = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

6. La matriz identidad es la matriz: D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

·Explicación: Ya que la matriz identidad o unidad es la matriz escalar en la que los elementos no nulos son iguales a 1.

7. El producto de las matrices E y F es:

E · F = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0 & 3+0+3 & 1+2+12 \\ 4+0+0 & 12+0+1 & 4+0+4 \\ 2+0+0 & 6+0+4 & 2+3+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

- Respuesta: d) E·F = $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 \\ 4 & 13 & 8 \\ 2 & 10 & 21 \end{pmatrix}$

8. La matriz inversa de la matriz F es:

F = $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boldsymbol{F_2 + F_3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boldsymbol{-F_2 + F_3} \rightarrow$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-F_3} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-5F_3 + F_2} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-F_3 + F_1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \boldsymbol{-3F_2 + F_1} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 11 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

La respuesta es: a) $F^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 11 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

9. La matriz traspuesta de la matriz F es:

F = $\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ Matriz traspuesta→ $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ d)$F^t = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$

·Explicación: Dada una matriz A de dimensiones m x n, se llama matriz traspuesta de A y se representa por A^ta la matriz que se obtiene al cambiar las filas de A por sus columnas, por lo que la matriz, será de dimensión n x m.

10. El rango de la matriz C es:

C = $\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix} -F_2 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} -F_1 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

- Respuesta: La matriz es de rango 1, es c) 1.

Textos Marea Verde

Matemáticas II

2º Bachillerato

Capítulo 2: Determinantes

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR,ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1 Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 6 - (-1) = 7$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-3) = 3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

2 Calcula los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot (0) + 1 \cdot 2 \cdot 3) - \big(0 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \cdot (-2) +$
$3 \cdot 2 \cdot (-2)\big) = (-6 + 6) - (4 - 12) = -(-8) = 8$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 5 \cdot 4) - (2 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) \cdot (-2) + 5 \cdot$
$(-2) \cdot (-1)) = 8 - 10 = -2$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) \cdot (-2) + 2 \cdot$
$(-1) \cdot 4 = -24 - (4 - 8) = -20$

3 Comprueba que ocurre en un determinante de orden dos cuando haces dos permutaciones de filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A|$$

Al ser solo 2 filas solo hay 1 posibilidad de permutación y al hacerlo dos veces vuelve a su forma original.

4 Comprueba qué ocurre en un determinante de orden dos cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = |A|$$

El resultado sería el mismo ya que da igual hacer $a \cdot d - b \cdot c$ que $d \cdot a - c \cdot b$ debido a que en ambos casos se va a restar el mismo número menos el mismo número.

5 Comprueba que ocurre en un determinante de orden tres cuando haces dos permutaciones de filas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} f_2 \leftrightarrow f_3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot |A| = |A|$$

6 Comprueba que ocurre en un determinante de orden tres cuando haces una permutación de filas seguida de una permutación de columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} f_1 \leftrightarrow f_2 \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} C_1 \leftrightarrow C_2 \begin{vmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & g & i \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot |A| = |A|$$

7. Razona por qué esta propiedad puede deducirse de la propiedad número 5.

Porque la propiedad 5 dice: "Si en una matriz se permutan dos filas (o columnas) el determinante cambia de signo. Ejemplo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 8 \quad \rightarrow \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} = -8$$

Sea A la matriz inicial y B la matriz obtenida permutando dos filas, entonces $|A| = -|B|$ Ahora permutamos dos columnas de la matriz B obteniendo la matriz D, entonces:$|B| = -|D|$ Por tanto$|A| = -|B| = -(-|D|) = |D|$.

8. Comprueba que en un determinante de orden 3 que la propiedad se verifica también cuando hay dos columnas iguales. Hazlo de dos formas diferentes: desarrollando el determinante y utilizando la propiedad del determinante de la matriz traspuesta.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{vmatrix} = [(1 \cdot 5 \cdot 8) + (4 \cdot 8 \cdot 2) + (2 \cdot 5 \cdot 7)] - [(7 \cdot 5 \cdot 2) - (8 \cdot 5 \cdot 1) - (2 \cdot 4 \cdot 8)]$$
$$= 174 - 174 = 0$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = [(1 \cdot 5 \cdot 8) + (4 \cdot 8 \cdot 2) + (2 \cdot 5 \cdot 7)] - [(7 \cdot 5 \cdot 2) - (8 \cdot 5 \cdot 1) - (2 \cdot 4 \cdot 8)]$$
$$= 174 - 174 = 0$$

9. Demuestra estas propiedades para determinantes de orden tres.

Propiedad 7, si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 8 & 20 \\ 1 & 4 & 15 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= [(1 \cdot 2 \cdot 8) + (2 \cdot 6 \cdot 2) + (4 \cdot 4 \cdot 3)] - [(3 \cdot 8 \cdot 2) - (6 \cdot 4 \cdot 1) - (2 \cdot 4 \cdot 3)] = 5 \cdot 0 = 0$$

Propiedad 8, si lo elementos de una línea son combinación lineal de las restantes líneas paralelas, el determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & 2+3=5 \\ \rightarrow & 5+1=6 \\ \rightarrow & 1+4=5 \end{matrix}$$

$$|A| = [(2 \cdot 1 \cdot 5) + (5 \cdot 4 \cdot 5) + (3 \cdot 6 \cdot 1)] - [(1 \cdot 1 \cdot 5) - (2 \cdot 6 \cdot 4) - (5 \cdot 3 \cdot 5)] = 128 - 128 = 0$$

10. Comprueba que el valor del segundo determinante, obtenido del primero con la transformación indicada, es el mismo que el determinante de partida.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [(6 \cdot (-2) \cdot 0) + (7 \cdot (-3) \cdot 5) + (1 \cdot 1 \cdot (-4))] - [(5 \cdot (-2) \cdot (-4)) - (1 \cdot (-3) \cdot 6) - (7 \cdot 1 \cdot 0)] = -131$$

Textos Marea Verde

$|B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 13 \\ 7 & -2 & 4 \\ -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} =$

$= [(6 \cdot (-2) \cdot (-10) + (7 \cdot (-3) \cdot 13) + (1 \cdot 4 \cdot (-4))] - [(13 \cdot (-2) \cdot (-4)) - (4 \cdot (-3) \cdot 6) - (7 \cdot 1 \cdot (-10)] = -131$

11. Comprueba esta propiedad para las siguientes matrices cuadradas de orden tres:

<u>PROPIEDAD</u>: *El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices:* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

a) A=$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $y \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$|A \cdot B|$=$\begin{vmatrix} 6 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 0 + 0 + 5 \cdot (-2) & 6 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 0 \\ 7 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 + 0 + 1 \cdot (-2) & 7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + 0 \\ (-4) \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 0 & 0 + 0 + 0 & (-4) \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 0 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 23 & -10 & 11 \\ 14 & -2 & 16 \\ -11 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -11 \cdot \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -2 & 16 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 23 & -10 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} =$

$= -11(-160 - (11 \cdot (-2)) - 5(23 \cdot (-2) - (14 \cdot (-10))$ =-11(-160+22)-5(-46+140)=

1518-470=1048

$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-21 - 8) - (-18 + 4)$ =-131

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2 - 2) = -8$

$|A| \cdot |B| = -131 \cdot (-8) = 1048$

b) A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 2) - (3 + 1) = -5$

Textos Marea Verde

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad |A| \cdot |B| = 1 \cdot (-5) = -5$$

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0+0+2\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0 \\ 0+0-2\cdot 2 & 0+0+(-2)\cdot(-2) & 0+0+0 \\ 2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 0 & 0+0+0 & 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 0 \end{vmatrix}$$

$= \begin{vmatrix} 9 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ =Fila2= Fila 2 + Fila 1= $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4(25-9) = 64$

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$$

$|A| \cdot |B|$= (-8)·(-8)=64

12. Razona si es posible que para dos matrices A y B existan los productos A·B y B·A, pero no se verifique que $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}|$

Para que existan los productos A·B y B·A es necesario que las matrices A y B sean:

a) Cuadradas y del mismo orden: A_{nxn} y B_{nxn}, en cuyo caso existen los productos A·B y B·A y se cumple que $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B}| \cdot |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}|$

b) O que sean A_{mxn} y B_{nxm}, en cuyo caso existen los productos A·B y B·A, pero no son iguales porque A·B es de orden m y B·A es de orden n, y por tanto no se cumple que $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}|$

13. Dadas las matrices A y B, cuadradas y de igual dimensión, razona si las siguientes expresiones son ciertas o no.

$\boldsymbol{a})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2$ ⟶ Falso, porque: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$\boldsymbol{b})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 + 2\boldsymbol{AB}$ ⟶ Falso, porque: $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$\boldsymbol{c})$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ ⟶ Falso, porque: $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

$\boldsymbol{d})$ $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 - 2\boldsymbol{AB}$ ⟶ Falso, porque: $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$\boldsymbol{e)}$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ ⟶ Falso, porque: $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$

$\boldsymbol{f)}$ $|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2|=|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A+B)^2|=|(A+B)(A+B)|=|A+B||A+B|$

$\boldsymbol{g)}$ $|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2|=|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2+2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ⟶ Falso porque: $|(A+B)^2|=|(A+B)(A+B)|=|A+B||A+B|$

$\boldsymbol{h)}$ $|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2|=|\boldsymbol{A}|^2-|\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A-B)^2|=|(A+B)(A-B)|=|A+B||A-B|$

$\boldsymbol{i)}$ $|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2|=|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2-2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ ⟶ Falso, porque: $|(A-B)^2|=|(A+B)(A-B)|=|A+B||A-B|$

$\boldsymbol{j)}$ $|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})|=|\boldsymbol{A}|^2-|\boldsymbol{B}|^2$ ⟶ Falso, porque: $|(A+B)(A-B)|=|A+B||A-B|$

14. Calcula por adjuntos el valor de este determinante:

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-3\\0&0&2&3\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&-2&-3\\0&2&3\\0&0&-2\end{vmatrix}=1\cdot\left(-1\cdot\begin{vmatrix}2&3\\0&-2\end{vmatrix}\right)=1\cdot(-1\cdot2\cdot(-2))=4$$

15. Halla el valor de a que verifica:

$$\begin{vmatrix}1&-38&53&-78\\0&-4&87&-39\\0&0&a&93\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=24$$

$$\begin{vmatrix}1&-38&53&-78\\0&-4&87&-39\\0&0&a&93\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=1\cdot(-4)\cdot(-2)\cdot a\quad;\quad 1\cdot(-4)\cdot(-2)\cdot a=24\quad;\quad 8a=24\to a=3$$

16. Para las matrices A y B del ejemplo, determina :

$A=\begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&5&1\\3&6&-2\end{pmatrix}$

a) $|\boldsymbol{A}|\ \ \boldsymbol{y}\ \ |\boldsymbol{B}|$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&5\\1&4\end{vmatrix}=(8-5)=3$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&5&1\\3&6&-2\end{vmatrix}=((-10)-18+6)-(45+6+4)=-77$$

b) $[\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A})]^t\ \ \boldsymbol{y}\ \ [\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{B})]^t$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}4&-1\\-5&2\end{pmatrix}\ ;\ [Adj(A)]^t=\begin{pmatrix}4&-5\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$Adj(B)=\begin{pmatrix}-16 & 1 & -21\\ 22 & -11 & 0\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}\ ;\ [Adj(B)]^t=\begin{pmatrix}-16 & 22 & -13\\ 1 & -11 & -4\\ -21 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

c) $\mathbf{A}\cdot[\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A})]^t$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{B}\cdot[\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{B})]^t$

$$A\cdot[Adj(A)]^t=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-5 & -10+10\\ 4-4 & -5+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$B\cdot[Adj(B)]^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 1\\ 3 & 6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-16 & 22 & -13\\ 1 & -11 & -4\\ -21 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-16+2-63 & 22-22 & -13-8+21\\ 16+5-21 & -22-55 & 13-20+7\\ -48+6+42 & 66-66 & -39-24-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-77 & 0 & 0\\ 0 & -77 & 0\\ 0 & 0 & -77\end{pmatrix}$$

17. a) Calcula la matriz adjunta de:

$$C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

1º. Ahora mostraremos algunos ejemplos del menor complementario (en los que tenemos que realizar en todos los elementos de la matriz), y ya realizaremos la primera parte del ejercicio.

$$\alpha_{11}\begin{pmatrix}\cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0}\\ \cancel{-1} & 0 & 2\\ \cancel{1} & 1 & 1\end{pmatrix}\ ;\ \alpha_{12}\begin{pmatrix}\cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0}\\ -1 & \cancel{0} & 2\\ 1 & \cancel{1} & 1\end{pmatrix}\ ;\ \alpha_{13}\begin{pmatrix}\cancel{2} & \cancel{-1} & \cancel{0}\\ -1 & 0 & \cancel{2}\\ 1 & 1 & \cancel{1}\end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}(1\cdot 0-2\cdot 1) & (-1\cdot 1-2\cdot 1) & (-1\cdot 1-0\cdot 1)\\ (1\cdot 1-0\cdot 1) & (2\cdot 1-1\cdot 0) & (2\cdot 1-(-1)\cdot 1)\\ (1\cdot 2-0\cdot 0) & (2\cdot 2-0\cdot 1) & (2\cdot 0-(-1\cdot -1))\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

2º. Ahora tendremos que asignar los signos. Lo que indica el + es que no varía su signo y el –, lo contrario, que sí se tiene que cambiar en la matriz adjunta.

$$\begin{bmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{bmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & -4 & -1\end{pmatrix}$$

b) Halla $|C|$, $[\mathrm{Adj(C)}]^t$y efectúa el producto $\mathrm{C}\cdot[\mathrm{Adj(C)}]^t$

1º. Primero realizaremos el determinante de la matriz con la **Regla de Sarrus**.

- 1º $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \to$ ((2·0·1) + (-1·1·0) + (1·-1·2)) = -2
- 2º $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} \to$ $((\mathbf{0}\cdot\mathbf{0}\cdot\mathbf{1})$ + (-1·-1·1) + (2·2·1)) = 5
- 3º (-2) – (5)= -7

2º. Para hallar la traspuesta de la matriz adjunta solo debemos de colocar las filas donde las columnas y las columnas donde las filas.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C\cdot[\mathrm{Adj}(C)]^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((-2\cdot 2)+(-1\cdot 3)+(0\cdot -1)) & ((2\cdot 1)+(-1\cdot 2)+(0\cdot -3)) & ((2\cdot -2)+(-1\cdot -4)+(0\cdot -1)) \\ ((-1\cdot -2)+(0\cdot 3)+(2\cdot -1)) & ((-1\cdot 1)+(0\cdot 2)+(3\cdot 2)) & ((-1\cdot -2)+(0\cdot -4)+(-1\cdot 2)) \\ ((1\cdot -2)+(3\cdot 1)+(-1\cdot 1)) & ((1\cdot 1)+(2\cdot 1)+(1\cdot -3)) & ((1\cdot -2)+(-4\cdot 1)+(1\cdot -1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

c) ¿Qué observas?

-Lo primero que podemos apreciar es una matriz escalar.

Podemos apreciar que -7 es el valor del determinante de la matriz, esto quiere indicar que el producto de una matriz por la traspuesta de su adjunta nos da el valor del determinante por la matriz identidad.

$$\mathbf{C}\cdot[\mathbf{Adj}(\mathbf{C})]^{\mathbf{t}} = |\mathbf{C}|\cdot\mathbf{I}$$

18. Comprueba para los ejemplos anteriores que $A\cdot A^{-1}=I$ y $B\cdot B^{-1}=I$.

a) $A\cdot A^{-1}=I$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (1\cdot -1)+(1\cdot 2) & (1\cdot 1)+(-1\cdot 1) \\ (2\cdot -1)+(1\cdot 2) & (1\cdot 2)+(1\cdot -1) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B\cdot B^{-1}=I$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16/77 & -22/77 & 13/77 \\ -1/77 & 11/77 & 4/77 \\ 21/77 & 0 & -7/77 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 16/77 + 2\cdot -1/77 + 3\cdot 21/77 & -1\cdot 16/77 + 5\cdot -1/77 + 1\cdot 21/77 & 3\cdot 16/77 + 6\cdot -1/77 \pm 2\cdot 21/77 \\ 1\cdot -22/77 + 2\cdot 11/77 + 3\cdot 4/77 & -1\cdot -22/77 + 5\cdot 11/77 + 1\cdot 4/77 & 3\cdot -22/77 + 6\cdot 11/77 \pm 2\cdot 4/77 \\ 1\cdot 13/77 + 2\cdot 0 + 3\cdot -7/77 & -1\cdot 13/77 + 5\cdot 0 + 1\cdot -7/77 & 3\cdot 13/77 + 6\cdot 0 \pm 2\cdot -7/77 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$\boldsymbol{a})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix} \to |A| = (1 \cdot 4) - (2 \cdot 3) = 4 - 6 = -2$

$\boldsymbol{b})\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \to |B| = (2 \cdot 5) - \big(4 \cdot (-3)\big) = 10 + 12 = 22$

$\boldsymbol{c})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \to |C| = (a \cdot b) - \big(5 \cdot (-5)\big) = ab + 25$

$\boldsymbol{d})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to |D| = (a \cdot a) - (b \cdot b) = a^2 - b^2$

$\boldsymbol{e})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{m^2} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{m} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to |E| = (m^2 \cdot 1) - (m \cdot m) = m^2 - m^2 = 0$

$\boldsymbol{f})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to |F| = [(1 \cdot 0 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot 0) + (1 \cdot 1 \cdot 0)] - [(0 \cdot 0 \cdot 0) + (1 \cdot 1 \cdot 1) +$
$(1 \cdot 1 \cdot 1)] = 0 - 2 = -2$

$\boldsymbol{g})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \to |G| = [(1 \cdot 1 \cdot 5) + (0 \cdot 4 \cdot 1) + (0 \cdot 0 \cdot 3)] - [(3 \cdot 1 \cdot 1) + (0 \cdot 0 \cdot 5) +$
$(0 \cdot 4 \cdot 1)] = 5 - 3 = 2$

$\boldsymbol{h})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \to |H| = \big[(1 \cdot 3 \cdot 5) + (0 \cdot 1 \cdot 3) + \big((-2) \cdot 4(-4)\big)\big] - \big[\big(3 \cdot 3(-4)\big) +$
$\big((-2) \cdot 0 \cdot 5\big) + (4 \cdot 1 \cdot 1)\big] = (15 + 32) - (-36 + 4) = 47 - (-32) = 47 + 32 = 79$

$\boldsymbol{i})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to |I| = [(a \cdot a \cdot a) + (1 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot 1)] - [(1 \cdot a \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot a) +$
$(1 \cdot 1 \cdot a)] = (a^3 + 1 + 1) - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2$

$\boldsymbol{j})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix} \to |J| = [(m \cdot (-1) \cdot m) + (1(-3) \cdot 3) + (1(-1) \cdot 5)] - [(3(-1) \cdot 5) +$
$(1 \cdot 1 \cdot m) + ((-1)(-3)m)] = [(-m^2) + (-9) + (-5)] - [(-15) + (m) + (3m)] =$
$(-m^2 - 14) - (4m - 15) = -m^2 - 4m + 1$

2.- Prueba, sin desarrollarlos, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

$\mathbf{a})\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a} & \mathbf{b+c} \\ \mathbf{1} & \mathbf{b} & \mathbf{c+a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{c} & \mathbf{a+b} \end{pmatrix} \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 \to \begin{vmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{a+b+c} \\ 1 & \mathrm{b} & \mathrm{a+b+c} \\ 1 & \mathrm{c} & \mathrm{a+b+c} \end{vmatrix} = 0$ Porque C_1 y C_3 son proporcionales

$\boldsymbol{b})\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c+d} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b+d} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b+c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} \to a \begin{vmatrix} 1 & c+d & b \\ 1 & b+d & c \\ 1 & b+c & d \end{vmatrix} C_2 + C_3 \to a \begin{vmatrix} 1 & c+d+b & b \\ 1 & b+d+c & c \\ 1 & b+c+d & d \end{vmatrix} = a \cdot 0 = 0$

Porque C_2 y C_1 son proporcionales

Textos Marea Verde

3.- Demuestra sin desarrollar que los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

son múltiplos de 15.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 5 como factor común $\rightarrow 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$ Restamos la columna 2 a la columna 3 $\rightarrow$

$-C_2 + C_3 \rightarrow 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 3 factor común $\rightarrow 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 5 y el 3 factor común $\rightarrow 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4.- Prueba sin desarrollar que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow$ Como 121; 198 y 506 son divisibles entre 11 $\rightarrow 100C_1 + 10C_2 + C_3 \rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} \rightarrow$ Sacamos el 11 factor común $\rightarrow 11 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -2F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3 \\ -F_1 + F_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & -12 & -1 & 2 \\ 0 & -16 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = C_1 \leftrightarrow C_2 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & 2 \\ 0 & -1 & -16 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} =$

$$-F_2 + F_3 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -F_3 + F_4 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -4 \cdot 11$$

5.- Comprueba, a partir de las propiedades de los determinantes, que $A_1 = 0$ y que $A_2 = \dot{5}$.

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

1. $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \to$ Sacamos el $\frac{1}{5} \to \frac{1}{5}\begin{vmatrix} -40 & 25 & 40 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \to$

Como hay dos columnas iguales se anula el determinante por lo que $\to A_1 = 0$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \to F_2 + F_3 \to \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \to$ Sacamos 5 factor común $\to 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6. Sabiendo que: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3$ **calcula, sin desarrollar, el valor de:** $\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ c & a & b \end{vmatrix}=3\left(\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ c & a & b \end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} + |0|\right) = 3\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} i & g & h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = F3 \leftrightarrow F1 \to$$

$$-\begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} = C1 \leftrightarrow C3 \to -\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} = C1 \leftrightarrow C2 \to -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

7. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$***, calcula sin desarrollar:***

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ -p & -r & -q \end{vmatrix} = F2 \leftrightarrow F3 \to -\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & q & r \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

$$=C3 \leftrightarrow C2 \to -\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} x & a-3p & -a \\ y & b-3q & -b \\ z & c-3r & -c \end{vmatrix} = -2\left(\begin{vmatrix} x & a & a \\ y & b & b \\ z & c & c \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}\right) =$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$-3\left(|0|-3\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}\right) \rightarrow cambiamos\ fila\ por\ columna \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} \rightarrow F1 \leftrightarrow F3 = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-2p+3a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-3p} \\ \boldsymbol{z-2r+3c} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{-3r} \\ \boldsymbol{y-2q+3b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-3q} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-2p+3a & a & -3p \\ z-2r+3c & c & -3r \\ y-2q+3b & b & -3q \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x-2p & a & -3p \\ z-2r & c & -3r \\ y-2q & b & -3q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a & a & -3p \\ 3c & c & -3r \\ 3b & b & -3q \end{vmatrix}\right) = \text{2º determ. Columna 1 y 2 proporcionales}$$

$$= \begin{vmatrix} x-2p & a & -3p \\ z-2r & c & -3r \\ y-2q & b & -3q \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x & -a & -3p \\ z & -c & -3r \\ y & -b & -3q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2p & a & -3p \\ -2r & c & -3r \\ -2q & b & -3q \end{vmatrix}\right) = \text{2º determ. Columna 1 y 3 proporcionales}$$

$$3\begin{vmatrix} x & -a & -p \\ z & -c & -r \\ y & -b & -q \end{vmatrix} \rightarrow cambiamos\ filas\ por\ columnas \rightarrow (-3)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ p & r & q \end{vmatrix} =$$

$$C2 \leftrightarrow C3 = (-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} F1 \leftrightarrow F2 = 3\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} F2 \leftrightarrow F3 = 3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) = -6$$

8. ¿Cuál será el orden de una matriz cuadrada A si sabemos que su determinante vale –5 y que el determinante de la matriz $3\cdot A^t$ vale –1215?

$|A| = -5 \qquad |3\cdot A^T| = -1215 \qquad |3\cdot A^T| = 3^n\cdot|A^t| = 3^n\cdot(-5) = -1215$

$2^n = \frac{-1215}{-5} = 243 \qquad 3^n = 3^5 \qquad n = 5$

9. justifica sin realizar cálculo alguno, que $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{y^2} & \boldsymbol{z^2} \\ \boldsymbol{x^3} & \boldsymbol{y^3} & \boldsymbol{z^3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{x\cdot y\cdot z}\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{y^2} & \boldsymbol{z^2} \end{vmatrix}$.

Sacamos ***x*** de la primera columna, ***y*** de la segunda y ***z*** de la tercera.

10. Dadas las matrices A y B de orden 4x4 con $|A| = 3\ y\ |B| = 2$ y calcula $|A^{-1}|$, $|B^tA|$ y $|(AB^{-1})^t|$.

$$\boldsymbol{A\cdot A^{-1}} = I \rightarrow |A\cdot A^{-1}| = |I| \rightarrow |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$$

$$|\boldsymbol{B^tA}| = |B^t|\cdot|A| = |B|\cdot|A| = 2\cdot 3 = 6$$

$$|(\boldsymbol{AB^{-1}})^{\boldsymbol{t}}| = |AB^{-1}| = |A|\cdot\frac{1}{|B|} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

11. Obtén, en función de a, b y c el valor del determinante: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a+b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a+c} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -C_3+C_1 \\ -C_3+C_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & a \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

12.- Demuestra que:

$$\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix} = a^2\cdot b^2 \text{ y } \begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix} = (a-1)^3\cdot(a+3)$$

a) $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}$ calculamos : $-C_4+C_3;\ \ -C_4+C_2;\ \ -C_4+C_1;$

$$\to \begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 1\\ 0 & -a & 0 & 1\\ 0 & 0 & b & 1\\ b & b & b & (1-b)\end{vmatrix} = a\cdot\begin{vmatrix}-a & 0 & 1\\ 0 & b & 1\\ b & 0 & -b\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & -a & 0\\ 0 & 0 & b\\ b & b & b\end{vmatrix} \to \quad (a\cdot b)\begin{vmatrix}-a & 1\\ b & -b\end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix}-a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix} =$$

$$(a\cdot b)\begin{vmatrix}-a & 1\\ b & -b\end{vmatrix} = (ab\cdot b)\cdot ab \quad ; \quad b\cdot\begin{vmatrix}-a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix} = (-ab)\cdot -b$$

$$= ab(ab-b) - b(-ab) = (ab)^2 - (ab)^2 + (ab)^2 = (ab)^2$$

b) $\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix} \to$ Calculamos : $-F_1+F_2;\ -F_1+F_3;\ -F_1+F_4$

$$\to \begin{vmatrix}a & 1 & 1 & 1\\ -a+1 & a-1 & 0 & 0\\ -a+1 & 0 & a-1 & 0\\ -a+1 & 0 & 0 & a-1\end{vmatrix};$$ Calculamos: $C_1+C_2+C_3+C_4$

$$\begin{vmatrix}a+3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{vmatrix} = (a+3)\cdot(a-1)(a-1)(a-1) = (a+3)\cdot(a-1)^3$$

13.- Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

se pide:

a) Calcula: $|A|;\ \alpha_{32}\ ;\ \alpha_{13}\ ;\ A_{22}\ ;\ A_{12}$

b) Resuelve la siguiente ecuación: $|A|\cdot x + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13}\cdot x$

a) $|A| = \begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 28; \qquad |A| = 28$

$\alpha_{32} = \begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 0\end{vmatrix} = 9; \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix} = -8$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -12$$

b) $|A| \cdot X + A_{23} + 3\alpha_{11} = -2 + A_{13} \cdot X \rightarrow$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$|A| = 28; \qquad A_{23} = 5; \qquad \alpha_{11} = 8; \qquad a_{13} = -8$$

$\rightarrow 28x + 5 + 24 = -2 - 8x; \qquad 28x + 8x = -2 + 3 - 24 \qquad 36x = -31 \qquad x = -\frac{31}{36}$

14. Sea la matriz simétrica $A \in M_{3x3}$ cuyo determinante es $-\frac{1}{3}$.

Comprueba si es verdadero o falso y si son falsas, indica la respuesta correcta.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- $|-3A| = 9\,; -3A = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3b & -3d & -3e \\ -3c & -3e & -3f \end{pmatrix};\, |-3A| = \begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ -3b & -3d & -3e \\ -3c & -3e & -3f \end{vmatrix} = -3 \cdot$
  $\begin{vmatrix} a & -3b & -3c \\ b & -3d & -3e \\ c & -3e & -3f \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-3)\cdot \begin{vmatrix} a & b & -3c \\ b & d & -3e \\ c & e & -3f \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = (-3)^3 \cdot$
  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = -27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{-27}{-3} = 9;\ Verdadero$
- $\frac{|A \cdot A^t|}{3} = 3^{-3}\,;\ |A| = |A^t|\,;\ \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}{3} = \frac{\frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}\,; Verdadero$
- $A^3 \notin M_{3x3}\,;\ A_{3x3}\,;\ A^2 = A_{3x3} \cdot A_{3x3} = A'_{3x3}\,; A^3 = A'_{3x3} \cdot A_{3x3} = A''_{3x3}\,;$

  Falso (ya que al multiplicar una matriz cuadrada por sí misma, la dimensión de esta no varía)
- $4|A| - 7|A^t| = 1\,;\ |A| = |A^t|\,;\ 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{3}{3} = 1\,;$

  Verdadero
- $2A \in M_{6x6};\ 2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{pmatrix} \neq M_{6x6}\,;\ Falso$
- $|4A - A^t| = -3^2\,; A = A^t\,; 4A - A^t = \begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3b & 3d & 3e \\ 3c & 3e & 3f \end{pmatrix} =$
  $3A\,; |3A| = \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3b & 3d & 3e \\ 3c & 3e & 3f \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & 3b & 3c \\ b & 3d & 3e \\ c & 3e & 3f \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & 3c \\ b & d & 3e \\ c & e & 3f \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 3^3 \cdot$
  $\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3^3}{3} = -3^2 = -9\,;\ Verdadero$
- $|A^{-1}| = -3^{-1}\,;\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{1} = -3\,;$ Falso

- $\left|\frac{3A-A^t}{3A+A^t}\right| = (-2)^{-3}$; $A = A^t$; $|A| = |A^t|$; $\frac{3A-A^t}{3A+A^t} = \frac{2A}{4A}$; $2A = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{pmatrix}$ $y\ 4A =$ $\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{pmatrix}$; $\left|\frac{2A}{4A}\right| = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2b & 2d & 2e \\ 2c & 2e & 2f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ 4b & 4d & 4e \\ 4c & 4e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ b & 2d & 2e \\ c & 2e & 2f \end{vmatrix}}{4\begin{vmatrix} a & 4b & 4c \\ b & 4d & 4e \\ c & 4e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ b & d & 2e \\ c & e & 2f \end{vmatrix}}{4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & 4c \\ b & d & 4e \\ c & e & 4f \end{vmatrix}} = \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}}{4\cdot 4\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}} = \frac{2^3\left(-\frac{1}{3}\right)}{4^3\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{2^3}{4^3} =$ $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$; *Falso*
- $\frac{1}{9}|A^{-1}| - 6|A^t|^2 = 1$; $|A| = |A^t|$; $|A^{-1}| = -3$ (apartado anterior) ; $\frac{1}{9}\cdot(-3) - 6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{3}{9} - 6\cdot\frac{1}{9} = -\frac{3}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{9}{9} = -1$; *Falso*
- $|3^{-2}\cdot A^t| = -\frac{1}{3^7}$; $A = A^t$; $|A| = |A^t|$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-2}\cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3^2}a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ \frac{1}{3^2}c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{pmatrix}$; $|3^{-2}\cdot A^t| =$ $\begin{vmatrix} \frac{1}{3^2}a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ \frac{1}{3^2}c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & \frac{1}{3^2}b & \frac{1}{3^2}c \\ b & \frac{1}{3^2}d & \frac{1}{3^2}e \\ c & \frac{1}{3^2}e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & \frac{1}{3^2}c \\ b & d & \frac{1}{3^2}e \\ c & e & \frac{1}{3^2}f \end{vmatrix} = \frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} =$ $\frac{1}{3^6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3^7}$; *Verdadero*

15. Sean las matrices A y B $\in$ $\mathbf{M_{3x3}}$ tales que $|\mathbf{A}| = -3^{-2}$ y $|\mathbf{B}| = 3$.
Con estos datos calcula de forma razonada:
$|\mathbf{A^{-1}}|$; $|\mathbf{B^{-1}}|$; $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|^{-1}$; $|\mathbf{3B^{-1}}\cdot\mathbf{A^t}|$; $|\mathbf{3A}\cdot\mathbf{B^t}|$; $|(\mathbf{B^{-1}}\cdot\mathbf{A^{-1}})^{\mathbf{t}}|$

- $|\mathrm{A}^{-1}| = (-3^{-2})^{-1} = \frac{1}{-3^{-2}} = \frac{1}{-\frac{1}{3^2}} = -\frac{3^2}{1} = -9$
- $|\mathrm{B}^{-1}| = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
- $|\mathrm{A}|\cdot|\mathrm{B}|^{-1} = -3^{-2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3^3} = -\frac{1}{27}$
- $|3\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A^t}| = |3\mathrm{B}^{-1}|\cdot|\mathrm{A^t}| = 3^3\cdot|\mathrm{B}^{-1}|\cdot|\mathrm{A^t}| = 3^3\cdot 3^{-1}(-3^{-2}) = -1$
- $|3\mathrm{A}\cdot\mathrm{B^t}| = 3^3\cdot|\mathrm{A}|\cdot\ |\mathrm{B}| = 3^3\cdot(-3^{-2})\ \cdot 3 = -3^2 = -9$
- $|(\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{t}}|$; $|A| = |A^t|$; $|B| = |B^t|$; $|(\mathrm{B}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{t}}| = 3^{-1}\cdot(-9) =$

  $= 3^{-1}\cdot(-3)^2 = -3^1 = -3$

16. Sean F_1, F_2, F_3 y F_4 las cuatro filas de una matriz cuadrada A, cuyo determinante vale -2. Se pide

Textos Marea Verde

calcular de forma razonada:

a) El determinante de la matriz - $\frac{3A}{2}$.

$\left|-\frac{3A}{2}\right| = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot |A| = \left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot (-2) = -\frac{81}{8}$.

b) El determinante de la matriz inversa de A.

$|A^{-1}| = |A|^{-1} = = (-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$.

c) El determinante de la matriz $\frac{A^2}{6}$.

$\left|\frac{A^2}{6}\right| = \left|\frac{1}{6}A \cdot A\right| = \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot |A| \cdot |A| = \left(\frac{1}{6}\right)^4 (-2) \cdot (-2) = \frac{1}{324}$.

d) El determinante de una matriz cuyas filas son: $2F_2$, $-3F_1 + 4F_3$, $-F_4$, $2F_3$.

$\det(2F_2, -3F_1 + 4F_3, -F_4, 2F_3) =$

$= \det(2F_2, -3F_1, -F_4, 2F_3) + \det(2F_2, 4F_3, -F_4, 2F_3) =$

(El determinante segundo es 0 porque $4F_3$ y $2F_3$ son proporcionales)

$= 2 \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot \det(F_2, F_1, F_4, F_3) + 0 =$ $\rightarrow (F_1 \leftrightarrow F_2, F_3 \leftrightarrow F_4)$

$= (-) \cdot (-) \cdot 12 \cdot \det(F_1, F_2, F_3, F_4) = 12 \cdot |A| = 12 \cdot (-2) = -24$.

17. Para los determinantes

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{vmatrix} \qquad A_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & -c & d \\ a & b & 0 & 1 \\ a^2 & b & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) Halla los menores complementarios de los elementos a_{11}, a_{23}, a_{32} y a_{12} cuando existan.

A_1: $\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$ $\qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2$

$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = ab - b^2$ $\qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = ab - b^2$

A_2: $\alpha_{11} = b$ $\qquad \alpha_{23}$= *no existe* $\qquad \alpha_{32}$= *no existe* $\qquad \alpha_{12}$ =*a*

A_3:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \\ b & -c & d \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-bd) + (-bc)] - (-b) = -bd - bc + b$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & 1 \\ a^2 & b & 0 \\ a & b & d \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (abd + a^2b) - (a^2bd + ab) = ab - abd$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

$$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \\ a & c & d \\ -a & -c & d \end{vmatrix} = (ad + a^2cd) - (-a^2cd + ad) = 2a^2cd$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \\ -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-ad) - (a^2c)] - (a) = -ad - a^2c - a$$

b) Halla los adjuntos de dichos elementos, cuando existan.

Primero vamos a hallar los de A_1:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$ $\qquad$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & b \end{vmatrix} = -ab + b^2$ $\qquad$ $A_{12} = -\begin{vmatrix} b & b \\ b & a \end{vmatrix} = -ab + b^2$

Ahora los de A_2:

$A_{11} = +|b| = b$ $\quad$ $A_{23} =$ no existe $\quad$ $A_{32} =$ no existe $\quad$ $A_{12} = -|a| = -a$

Y finalmente los de A_3:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} b & -c & d \\ b & 0 & 1 \\ b & -1 & 0 \\ b & -c & d \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-bd) + (-bc)] - (-b) = -bd - bc + b$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a & b & d \\ a & b & 1 \\ a^2 & b & 0 \\ a & b & d \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (abd + a^2b) - (a^2bd + ab) = -ab+abd$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} a & c & d \\ -a & -c & d \\ a^2 & -1 & 0 \\ a & c & d \\ -a & -c & d \end{vmatrix} = (ad + a^2cd) - (-a^2cd + ad) = -2a^2cd$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & -1 & 0 \\ -a & -c & d \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(-ad) - (a^2c)] - (a) = ad + a^2c + a$$

18. a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.

Para que $A^2 = A$, la matriz A debe ser cuadrada y $|A^2| = |A|$, es decir, $|A|^2 = |A|$ por lo que:

$|A^2| = |A|$ $\quad$ $|A \cdot A| = |A|$ $\quad$ $|A||A| = |A|$ $\quad$ $|A|^2 - |A| = 0$ $\quad$ $|A|(|A| - |I|) = 0$

Las dos posibles soluciones son:

$|A| = 0 \qquad |A| = 1$

b) La matriz A verifica que $A \cdot A^t = I$. Halla los posibles valores del determinante de A.

$|A| = |A^t|$

$A \cdot A^t = I \qquad |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A||A| = |A|^2 = |I| = 1$, por tanto, $|A| = 1 \quad o \quad |A| = -1$

19. Dada la matriz A= $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **calcula el determinante de la matriz A de las siguientes maneras:**

a) Aplicando la regla de Sarrus.

$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [(-3)(2)(1) + (2)(-3)(-2) + (1)(1)(1)] - [(1)(2)(-2) + (1)(2)(1) + (-3)(1)(-3)] = [-6 + 12 + 1] - [-4 + 2 + 9] = 7 - 7 = 0$

b) Desarrollando por los elementos de la 3 fila y de la 2 columna.

3 fila; $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-8) - 1(8) + 1(-8) = 0$

2 columna; $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2(-5) + 2(-1) - 1(8) = 0$

20. Dadas las matrices A=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$**, B=**$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **se pide calcular el valor de los siguientes determinantes:** $|A \cdot B|$; $|C|$; $|A^t \cdot B^t|$; $|C \cdot B \cdot A|$; $|C|^2$.

$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -3 & -19 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$

$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = [(2)(1)(3) + (-3)(-1)(0) + (-2)(2)(1) -] - [(0)(1)(1) + (-2)(-3)(3) + (2)(-1)(2)] = 2 - 14 = -12$

$|A^t \cdot B^t| = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -6 \\ 8 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = [(-3)(-2)(6) + (8)(1)(-6) + (-1)(-5)(3)] - [(-6)(-2)(3) + (-1)(8)(6) + (-5)(1)(-3)] = 0$

$|C \cdot B \cdot A| = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -16 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot (A) = \begin{vmatrix} -6 & 16 & 6 \\ -4 & -36 & 4 \\ -20 & -5 & 20 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 16 & 6 \\ 4 & -36 & 4 \\ 20 & -5 & 20 \end{vmatrix} = la\ primera\ y\ tercera\ columna\ son\ iguales\ por\ tanto = 0$

$|C|^2$ = (-12)·(-12) = 144

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{vmatrix}$ **= 2-3x;**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = [(1\cdot 3\cdot 3) + (-1\cdot 0\cdot x) + (2\cdot 2\cdot 2)] - [(x\cdot 3\cdot 2) + (-1\cdot 2\cdot 3) + (2\cdot 0\cdot 1)] = 2 - 3x;$

$[9 + 8 + 0] - [6x - 6 + 0] = 2 - 3x;\ \ 17 - 6x - 6 = 2 - 3x;\ \ -6x + 11 = 2 - 3x;$ -3x=-9; x=-3

b) $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-3} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} \mathbf{+ 5 = 5}\boldsymbol{x}\mathbf{ - 3;}$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & \mathrm{x} & -3 \\ \mathrm{x} & 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 = [(2)(\mathrm{x})(4) + (-1)(1)(2) + (-1)(-3)(\mathrm{x})] - [(2)(\mathrm{x})(\mathrm{x}) + (-1)(-1)(4) + (-3)(1)(2)] + 5$

$[(8x) + (-2) + (3x)] - [(2x^2) + (4) + (-6)] + 5 = 5x - 3 \quad 6x + 8 - 2x^2 = 0 \quad x = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

22. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0\,;$

$\begin{vmatrix} 3 & x & 2 \\ x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = [(3)(2)(x) + (x)(3)(2) + (x)(3)(2)] - [(2)(2)(2) + (x)(x)(x) + (3)(3)(3)] = 0$

$$18x - 35 - x^3 = 0; x = \begin{cases} -5 \\ \dfrac{5 + \sqrt{3}i}{2} \\ \dfrac{5 + \sqrt{3}i}{2} \end{cases}$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 1 & 2 \\ -x & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 11;\ x^2 + 4x - 11 - 2x^2 - 3 = 11;\ -x^2 + 4x - 14 = 11;$

$-x^2 + 4x - 25 = 0; x = \begin{cases} 2 + \sqrt{21}i \\ 2 - \sqrt{21}i \end{cases}$

23. Resuelve la siguiente ecuación $|\mathbf{A} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{I}| = \mathbf{0}$, siendo A = $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$ **e I la matriz unidad.**

Textos Marea Verde

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to x\cdot I=x\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}$$

$$|\mathrm{A}-\mathrm{x}\cdot\mathrm{I}|=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathrm{x}&0&0\\0&\mathrm{x}&0\\0&0&\mathrm{x}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1-\mathrm{x}&0&0\\3&2-\mathrm{x}&1\\-2&1&2-\mathrm{x}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-x)\cdot\begin{vmatrix}2-x&1\\1&2-x\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}3&1\\-2&2-x\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}3&2-x\\-2&1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1-x)\cdot(3-4x+x^2)+0+0=(-1-x)\cdot(3-4x+x^2)=$$

$$=-3+4x-x^2-3x+4x^2-x^3=\mathbf{-3+x+3x^2-x^3}$$

$$\mathbf{-3+x+3x^2-x^3=0}\ \to \mathbf{x=1};\quad \mathbf{x=-1};\quad \mathbf{x=3}$$

24. Halla los determinantes de las siguientes matrices

$A;\ \begin{vmatrix}1&4\\2&3\end{vmatrix}=[3\cdot1-2\cdot4]=3-8=\mathbf{-5}$

$B;\ \begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}=[3\cdot1-0\cdot1]=\mathbf{3}$

$D;\ \begin{vmatrix}1&1&2\\3&0&1\\2&1&0\end{vmatrix}=[1\cdot0\cdot0+3\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot1]-[2\cdot0\cdot2+1\cdot1\cdot1+1\cdot3\cdot0]=8-1=\mathbf{7}$

$E;\ \begin{vmatrix}-1&3&-2\\0&-1&2\\1&4&2\end{vmatrix}=[(-1)\cdot(-1)\cdot2+0\cdot4\cdot(-2)+1\cdot2\cdot3]-[(-2)\cdot(-1)\cdot1+2\cdot4\cdot(-1)+3\cdot 0\cdot2]=8-(-6)=\mathbf{14}$

$F;\ \begin{vmatrix}2&1&-1\\3&-2&-2\\-1&2&0\end{vmatrix}=[2\cdot(-2)\cdot0+3\cdot2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)\cdot1]-[(-1)\cdot(-2)\cdot(-1)+(-2)\cdot2\cdot 2+1\cdot3\cdot0=(-4)-(-10)]=\mathbf{6}$

$G;\ \begin{vmatrix}2&1&3\\0&-1&-5\\0&0&2\end{vmatrix}=[2\cdot(-1)\cdot2+0\cdot0\cdot3+0\cdot(-5)\cdot1]-[3\cdot(-1)\cdot0+(-5)\cdot0\cdot2+1\cdot0\cdot2]= (-4)-0=\mathbf{-4}$

$$H;\ \begin{vmatrix}1&2&1&2\\3&0&0&1\\0&2&1&0\\-1&2&3&1\end{vmatrix}=\begin{matrix}-3\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_2\\2\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&2&1&0\\0&4&4&3\end{vmatrix}=\begin{matrix}\mathrm{F}_2+3\mathrm{F}_3\\2\mathrm{F}_2+3\mathrm{F}_4\end{matrix}\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&0&0&-5\\0&0&6&-1\end{vmatrix}=$$

$$\mathrm{F}_3\leftrightarrow\mathrm{F}_4\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&-6&-3&-5\\0&0&6&-1\\0&0&0&-5\end{vmatrix}=1\cdot(-6)\cdot6\cdot(-5)=180$$

$$J;\ \begin{vmatrix}-1&3&0&2\\0&-2&3&1\\2&1&-4&2\\-1&5&-2&3\end{vmatrix}=\begin{matrix}2\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_3\\-\mathrm{F}_1+\mathrm{F}_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&3&0&2\\0&-2&3&1\\0&7&-4&6\\0&2&-2&1\end{vmatrix}=\mathrm{C}_4\leftrightarrow\mathrm{C}_2=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&3&-2\\0&6&-4&7\\0&1&-2&2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{matrix}-6F_2+F_3\\-F_2+F_4\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&3&-2\\0&0&-22&19\\0&0&-5&4\end{vmatrix}=-5F_3+22F_4=\begin{vmatrix}-1&2&0&3\\0&1&3&-2\\0&0&-22&19\\0&0&0&-11\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot 1\cdot(-22)\cdot(-11)=-242$$

25. Aplicando propiedades, calcula el valor del determinante:

a) Indicando los pasos a realizar, hasta llegar a uno de orden 2

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&-3&0&2\\-3&1&2&1\\0&-2&-1&3\\-1&4&2&0\end{vmatrix}\to\begin{matrix}2F_3+F_2\\2F_3+F_4\end{matrix}\to\begin{vmatrix}-2&-3&0&2\\-3&-3&0&7\\0&-2&-1&3\\-1&0&0&6\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&2\\-3&-3&7\\-1&0&6\end{vmatrix}$$

$$-F_1+F_2\to(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&2\\-1&0&5\\-1&0&6\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\-1&6\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-6+5)=3$$

b) Desarrollando por los elementos de una línea

$$|A|=\begin{vmatrix}-2&-3&0&2\\-3&1&2&1\\0&-2&-1&3\\-1&4&2&0\end{vmatrix}=\text{desarrollando por la tercera fila}=$$

$$=0\cdot\begin{vmatrix}-3&0&2\\1&2&1\\4&2&0\end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix}-2&0&2\\-3&2&1\\-1&2&0\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&2\\-3&1&1\\-1&4&0\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}-2&-3&0\\-3&1&2\\-1&4&2\end{vmatrix}=$$

$$=0+2\cdot(-4)+(-1)\cdot(-11)-3\cdot 0=-8+11-0=-8+11=\mathbf{3}\quad;\qquad |\boldsymbol{A}|=\mathbf{3}$$

26. Comprobar el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\4&1&-2&3\\2&3&0&4\end{vmatrix}=137;\qquad\qquad \begin{vmatrix}2&1&3&2\\1&-2&1&2\\-3&2&-2&1\\-1&3&0&-3\end{vmatrix}=27$$

a) $$\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\4&1&-2&3\\2&3&0&4\end{vmatrix}\to F_2+F_4\to\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\4&1&-2&3\\0&3&3&5\end{vmatrix}\to 2F_2+F_3\to\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\-2&0&3&1\\0&1&4&5\\0&3&3&5\end{vmatrix}\to$$

$$\tfrac{2}{3}F_1+F_2\to\begin{vmatrix}3&-2&2&-3\\0&-4/3&13/3&-1\\0&1&4&5\\0&3&3&5\end{vmatrix}\qquad |A|=3\begin{vmatrix}-4/3&13/3&-1\\1&4&5\\3&3&5\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot\left[\left(-{}^{4}/_{3}\cdot 4\cdot 5\right)+\left(1\cdot 3\cdot(-1)\right)+\left(\frac{13}{3}\cdot 5\cdot 3\right)\right]-$$

$$-\left[\left(3\cdot 4\cdot(-1)\right)+\left(5\cdot 3\cdot\left(-{}^{4}/_{3}\right)\right)+\left(1\cdot 13/3\cdot 5\right)\right]=3\cdot\left[\frac{106}{3}-\left(-\frac{31}{3}\right)\right]=137$$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} \to F_2 + F_4 \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \to \frac{-1}{2} F_1 + F_2$

$\to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \to \frac{3}{2} F_1 + F_3 \to \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 7/2 & 5/2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$|A| = 2 \begin{vmatrix} -5/2 & -1/2 & 1 \\ 7/2 & 5/2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot \left[\left(-5/2 \cdot 5/2 (-1)\right) + (7/2 \cdot 1 \cdot 1) + (4 \cdot (-1/2) \cdot 1)\right] -$

$- \left[(1 \cdot 5/2 \cdot 1) + \left(7/2 \cdot (-1/2) \cdot (-1)\right) + \left(-5/2 \cdot 4 \cdot 1\right)\right] = 2(27/2) = 27$

27. Calcula el determinante: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to -3F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to 2F_1 + F_2$

$\to \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 13 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ -18 & 7 & 1 & -19 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to \frac{3}{5} F_2 + F_4 \to 1 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ -18 & 7 & 1 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix} \to \frac{18}{5} F_2 + F_3$

$\to \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 5 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & -131/5 \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix} \to \frac{-5}{13} F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 13 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & -20/13 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -131/5 \\ 0 & 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix}$

$|A| = 13 \begin{vmatrix} 0 & -20/13 & 3 \\ 7 & 1 & -131/5 \\ 0 & 0 & -6/5 \end{vmatrix} = 13 \cdot \left[0 - \left(0 + 7 \cdot (-20/13) \cdot -6/5 + 0\right)\right] = -168$

28. Calcula los determinantes siguientes:

Textos Marea Verde

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \to F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \to -2F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \to$

$-5F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -15 & 13 & -24 \\ 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

$|\mathrm{A}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} -15 & 13 & -24 \\ -1 & 10 & -7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$

$= [(-15 \cdot 10 \cdot 7) + (-24 \cdot 1 \cdot (-1)) + (-7 \cdot 13 \cdot 5)] - [(-24 \cdot 10 \cdot 5) + (-1 \cdot 13 \cdot 7) + (-15 \cdot (-7) \cdot 1)] =$

$= (-1050 + 24 - 455) - (-1200 + 105 - 91) = -295$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_3 \to$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_4 \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \to F_1 + F_5 \to$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$ $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \mathrm{x}+1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \mathrm{x}+1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathrm{x}+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{x}+1 \end{vmatrix} \to |A| = (x+1)^4$

29.Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & \mathrm{x} \\ 5 & 2\mathrm{x} & 7 \\ -1 & 3 & \mathrm{x} \end{vmatrix} = 5\mathrm{x} + 6$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & \mathrm{x} & 4 \\ -1 & 3 & \mathrm{x} \end{vmatrix} = 0$

Solución:

a) $|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & \mathrm{x} \\ 5 & 2\mathrm{x} & 7 \\ -1 & 3 & \mathrm{x} \end{vmatrix} = [(3 \cdot 2x \cdot x) + (-1 \cdot (-1) \cdot 7) + (5 \cdot 3 \cdot x)] - [(-1 \cdot 2x \cdot x) + (5 \cdot (-1) \cdot$ $x) + (3 \cdot 7 \cdot 3)] = [(6x^2 + 7 + 15x) - (-2x^2 + (5x) + 63)] = 8x^2 + 20x - 56$

Textos Marea Verde

$8x^2 - 20x - 56 = 5x + 6 \rightarrow 8x^2 + 15x - 62 = 0; x_1 = 2; x_2 \approx -3{,}875$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} \rightarrow F_1 + F_3 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & x & 4 \\ 0 & 3 & 4+x \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 4 \\ 3 & 4+x \end{vmatrix} = \big(x(4+x)\big) - 12$

$\big(x(4+x)\big) - 12 = 0 \rightarrow 4x + x^2 - 12 = 0;\ x_1 = 2\,; x_2 = -6$

30.Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 7x$

Solución:

a) $|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow 2C_2 + C_1 \rightarrow \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 2x \\ 2x+6 & x-1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 2x \\ 2x+6 & 5 \end{vmatrix} =$

$(x+2)5 - (2x+6)2x = 5x + 10 - (4x^2 + 12x)$

$5x + 10 - (4x^2 + 12x) = 67 \rightarrow -4x^2 + 7x - 57 = 0;\ x_1 = 3; x_2 = -4{,}75$

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow C_1 + C_2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x-1 & x-1 & x+3 \\ 1 & x-1 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow -2C_1 + C_2 \rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-1 & x-1 & -x+5 \\ 1 & x-1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & -x+5 \\ x-1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-1) - [(x-1)(-x+5)] =$

$= (2x-2) - (-x^2 + 5x + x - 5) = x^2 - 4x + 3$

$x^2 - 4x + 3 = 1 - 7x \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -2$

31-Halla las matrices inversas de las matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t\,; \qquad |A| = 6$

$Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow traspuesta \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$|A|=(-20+10+0)-(-75+24+0)= 41

Textos Marea Verde

$$Adj(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -20 & -7 & -25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \textit{traspuesta}\begin{pmatrix} -20 & -8 & 17 \\ -7 & -11 & 8 \\ -25 & 10 & -11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{41}\cdot\begin{pmatrix} -20 & -8 & 17 \\ -7 & -11 & 8 \\ -25 & 10 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{20}{41} & -\frac{8}{41} & \frac{17}{41} \\ -\frac{7}{41} & -\frac{11}{41} & \frac{8}{41} \\ -\frac{25}{41} & \frac{10}{41} & -\frac{11}{41} \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & c \end{pmatrix} \rightarrow |A|=(ac+c^2+b^2)-(ab+cb+c^2)=\ (c-b)(a-b)$

Adjunta de A:

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & c \\ b & c \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} c & b \\ b & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & b \\ a & c \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bc & 0 & b-a \\ -c^2+b^2 & c-b & -b+c \\ c^2-ab & -cc+b & a-c \end{pmatrix}$$ Simplificamos y

$$\rightarrow \textit{traspuesta}\begin{pmatrix} c(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2-ab \\ 0 & c-b & -c+b \\ b-a & -b+c & a-c \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(c-b)(a-b)}\cdot\begin{pmatrix} c(a-b) & (b+c)(b-c) & c^2-ab \\ 0 & c-b & -c+b \\ b-a & -b+c & a-c \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{c\cancel{(a-b)}}{(c-b)\cancel{(a-b)}} & \frac{(b+c)\cancel{(b-c)}}{\cancel{(c-b)}-(a-b)} & \frac{c^2-ab}{(c-b)(a-b)} \\ 0 & \frac{\cancel{c-b}}{\cancel{(c-b)}(a-b)} & \frac{\cancel{-c+b}}{\cancel{(c-b)}-(a-b)} \\ \frac{\cancel{b-a}}{-(c-b)\cancel{(a-b)}} & \frac{\cancel{-b+c}}{\cancel{(c-b)}(a-b)} & \frac{a-c}{(c-b)(a-b)} \end{pmatrix}$$

- Solución = $\begin{pmatrix} \frac{c}{c-b} & \frac{b+c}{-a+b} & \frac{c^2-ab}{(c-b)(a-b)} \\ 0 & \frac{1}{a-b} & \frac{1}{-a+b} \\ \frac{1}{-c+b} & \frac{1}{a-b} & \frac{a-c}{(c-b)(a-b)} \end{pmatrix}$

32- Siendo las matrices. $A=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) **¿Es cierto que det(A·B)= det(B·A)?**

$AB=\begin{pmatrix} 1+6+0+2 & 0-3+0-2 \\ 2+4+0+4 & 0-2+3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 & 0+0 & -2+0 \\ 2-2 & 6-2 & 0-1 & -4+4 \\ 0+6 & 0+6 & 0+3 & 2-4 \\ -1+2 & -3+2 & 0+1 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

- Solución: No es cierto, ya que:

$\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) **Calcula, si es posible, la inversa de A·B.**

$|A| =$ -27-(-50)= 23 ; $Adj(A)=\begin{pmatrix} -3 & -(10) \\ -(-5) & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow traspuesta \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{5}{23} \\ \frac{10}{23} & -\frac{3}{23} \end{pmatrix}$

33- Halla los valores de t para los cuales A no tiene inversa. $A=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{-t} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & t \\ -t & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ =(0+2+t^2)-(0+2 $-3t) = t^2 + 3t;$ $t(t+3) = 0;$ $t = 0;$ $t = -3$

- Solución:

  Cuando t$\neq$ $0 \; y \; t \neq -3, \; existe \; A^{-1}$.

34. Dada la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{-\lambda} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **averigua para que valores de λ existe A^{-1}, y calcúlala para λ=-3.**

a)

$|A| = (1\cdot(-\lambda)\cdot 1 + (-2)\cdot 1\cdot 1 + \lambda\cdot(-2)\cdot 0) - (1\cdot(-\lambda)\cdot\lambda + 0\cdot 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2)\cdot 1)=$

$=(-\lambda - 2) - (-\lambda^2 + 4) = \lambda^2 - \lambda - 6$ $\quad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

$\lambda = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$ $\quad \lambda = \frac{1+5}{2} = 3$ $\quad \lambda = \frac{1-5}{2} = -2$ $\quad$ Si λ vale 3 o -2 no existe A^{-1}

Textos Marea Verde

b) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 3 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$

$$|A|=(-3)^2-(-3)-6=6$$

$A^t=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ 2 & 4 & -2\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ 2 & 4 & -2\\ 7 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{7}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-1}{6}\end{pmatrix}$

35. Calcula la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1\cdot1\cdot1+0\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot2)-(1\cdot1\cdot0+1\cdot0\cdot2+0\cdot1\cdot1)=3$$

$A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad Adj(A^t)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix};\ A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

36. ¿Para qué valores de a la matriz $\begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ **tiene inversa? Halla la inversa para a=2**

$$|A|=\begin{vmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & a & 0\end{vmatrix}=(a\cdot1\cdot0+0\cdot a\cdot0+1\cdot1\cdot1)-(0\cdot1\cdot1+1\cdot a\cdot a+0\cdot1\cdot0)=1-a^2$$

$1-a^2=0\rightarrow a^2=1\rightarrow\ a=1\ \ y\ a=-1$, Existe la matriz inversa cuando $a\neq1\ \ y\ a\neq-1$

Inversa para a=2

$(A)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$ $\quad |A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=1-2^2=-3$

$(A^t)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix};\ Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix};\ A^{-1}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{-3} & 0 & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{-3} & -1 & \frac{2}{-3}\end{pmatrix}$

37. Dada la matriz $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$

a) Comprueba si es una matriz regular o inversible. En caso afirmativo, halla su inversa.

Textos Marea Verde

$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3\cdot(-1)\cdot(-2) + 1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 3) - (0\cdot(-1)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 3 + (-2)\cdot 2\cdot 1) = 18 - 5 = 13 \;\; |M| \neq 0\,, \quad \textit{tiene inversa}$

$$M^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}; Adj(M^t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & 9 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{4}{13} & \frac{-6}{13} \\ \frac{-4}{13} & \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{-1}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

b) Descompón la matriz $|M|$ en suma de dos matrices, una simétrica y otra antisimétrica

Matriz simétrica: $A = A^t$ Matriz antisimétrica: $B = -B^t$

Fórmulas: $A = \frac{M+M^t}{2}$ $B = \frac{M-M^t}{2}$

$$M + M^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \textit{Matriz simétrica}$$

$$M - M^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{Matriz antisimétrica}$$

c) Descompón $|M|$ en suma de dos determinantes $|P|$ y $|Q|$, tales que sus elementos sean todos no nulos y que el valor de uno de ellos sea nulo.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \to |M| = \begin{vmatrix} 2+1 & 3-1 & -3+3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4 + (-3) + 18) - (6 + 6 - 6) + 0 = 13 - 0 = 13$$

d) Comprueba si: $|M| = |P| + |Q|$ y $|M| = |P|\cdot|Q|$

$13 = 13 + 0 \to 13 = 13 \to |M| = |P| + |Q|$

$13 = 13 \cdot 0 \ \rightarrow 13 \neq 0 \rightarrow |M| \neq |P| \cdot |Q|$

e) Resuelve la ecuación: $\alpha_{13}x^2 - |M|x + 4A_{32} = 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} x^2 - 13x + 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$; $3x^2 - 13x + 4 \cdot (-9) = 2$; $3x^2 - 13x - 38 = 0$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-38)}}{2 \cdot 3} = \frac{13 \pm 25}{6}$ $\quad x = \frac{13+25}{6} = \frac{19}{3}$; $x = \frac{13-25}{6} = -2$

38.- a) ¿Para qué valores del parámetro a no es invertible la matriz A?

b) Para los valores de a encontrados calcular los determinantes de $A \cdot A^t$ y de $A^t \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} . Adj(A^t)$

$$|A| = 60 - 2a - 14 - (21a - 16 + 5) = 57 - 19a$$

$57 - 19a = 0$; $-19a = -57$; $a = \frac{-57}{-19} = 3$

$a = 3$ Para que A no sea invertible.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Si $a = 3$ $\quad |A| = 0 \quad |A^t| = 0 \quad |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = 0$

Si $a \neq 3$ $\quad |A| = 57 - 19a \quad |A^t| = |A| = 57 - 19a$

$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = (57 - 19a)^2$

39.- Sea C la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & m \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m no tiene inversa la matriz C?

b) Calcula la inversa de C para $m = 2$.

a) $|C| = -2 + m - (-2 - 1) = -2 + m + 3 = m + 1$

$m + 1 = 0$; $m = -1$

$m = -1$ Es el valor para el que C no tiene inversa.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |C| = 3$

Textos Marea Verde

$$AdjC = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AdjC)^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

40.- Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

donde x es un número real, halla:

a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa

b) La inversa de A para x=2

c) Con x=5, el valor de $b \in R$ para que la matriz b·A tenga determinante 1.

a) $|A| = -x^2 + 4x - 3 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = 3 \quad , x = 1$$

Los valores de x tienen que ser distintos de 1 y 3, para que A posea inversa.

b) $x = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1$

$$AdjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & -6 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & -6 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $b \cdot A = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow |b \cdot A| = \left| b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \right| = b^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

$$|A| = -25 - (-20 + 3) = -8$$

$$b^3 \cdot (-8) = 1 \quad ; \quad b^3 = \frac{1}{-8} \quad ; \quad b = \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} = \frac{1}{-2}$$

41. Dadas las matrices A, B y C ∈ M_{3x3}, plantea la resolución de las siguientes ecuaciones utilizando la matriz inversa:

a) $\boldsymbol{X \cdot A = B} \longrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \longrightarrow X = B \cdot A^{-1}$

b) $\boldsymbol{B \cdot X - 2B = 3X} \longrightarrow B \cdot X - 3X = 2B \longrightarrow (B - 3I) \cdot X = 2B \longrightarrow$

$(B - 3I)^{-1}(B - 3I) \cdot X = (B - 3I)^{-1} \cdot 2B$; $X = (B - 3I)^{-1} \cdot 2B$

c) $\boldsymbol{A \cdot X \cdot C = 2B^t + A} \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1}(2B^t + A) \cdot C^{-1}$; $X = A^{-1}(2B^t + A) \cdot C^{-1}$

42. Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coinciden con su inversa. Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ La fórmula para calcular la matriz inversa es: $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(adj(A))^t}$

- Calculamos el **valor del determinante** A.

$A = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = (ab) - (0 \cdot 0) = ab \longrightarrow |A| = ab$

- Hallamos el **adjunto** del determinante con la fórmula: $\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}}$, siendo “i” las filas y “j” las columnas

$a_{1,1} = (-1)^2(b) = b$

$a_{1,2} = (-1)^3(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad Adj(A) = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \longrightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$

$a_{2,1} = (-1)^3(0) = 0$

$a_{2,2} = (-1)^4(a) = a$

Por lo que $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|ab|} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}}$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \qquad A = A^{-1} \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a = \frac{1}{a} \longrightarrow a^2 = 1;\ \boldsymbol{a = 1, -1} \\ b = \frac{1}{b} \longrightarrow b^2 = 1;\ \boldsymbol{b = 1, -1} \end{cases}$

Por lo tanto, existen cuatro matrices diagonales que coinciden con su inversa:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

43. a) Halla, si existe, la matriz inversa de M.

Textos Marea Verde

b) Calcula la matriz X que cumple $X \cdot M + M = 2M^2$ $\quad M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

a)

$$|M| = [(0 \cdot 1(-2)) + (1(-2) \cdot 1) + ((-1) \cdot 2 \cdot 1)] - [(1 \cdot 1(-1)) + (1(-2) \cdot 0) + ((-2) \cdot 2 \cdot 1)] =$$

$= -4 - (-5) \Rightarrow |\boldsymbol{M}| = \mathbf{1}$

$\boldsymbol{M^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{M}|} \cdot (\boldsymbol{adj}(\boldsymbol{M}))^{\boldsymbol{t}}$

Hallamos el adjunto de la matriz:

$a_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) = -4$ $\qquad a_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

$a_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$ $\qquad a_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-3) = 3$

$a_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1) = 1$ $\qquad a_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot (2) = -2$

$a_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1) = 1$ $\qquad a_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-1) = 1$

$a_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2$

$$Adj(M) = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow (Adj(M))^t = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

b) $\quad \mathrm{X} \cdot \mathrm{M} + \mathrm{M} = 2M^2 \qquad \mathrm{X} \cdot \mathrm{M} = 2M^2 - \mathrm{M} \qquad \mathrm{X} = (2M^2 - \mathrm{M}) \cdot M^{-1} \qquad \mathrm{X} = 2M^2 \cdot M^{-1} - M \cdot M^{-1}$

$$\mathrm{X} = 2\mathrm{M} - \mathrm{I} \longrightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

44. Dadas las matrices:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué valores de *a* hacen singular la matriz?

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz *B* para que la ecuación $A \cdot B \cdot C = D$ tenga sentido?

c) Calcula *B* para el valor *a = 1*?

a)

$$|C| = (0 + 4a + 2) - (2a^2 + 0 + 2)$$
$$4a + 2 - 2a^2 - 2 = 0$$
$$4a - 2a^2 = 0 \rightarrow a(4 - 2a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

b) $\mathrm{A \cdot B \cdot C = D}$

$$(2 \cdot 2) \cdot (?\cdot ?) \cdot (3 \cdot 3) = (2 \cdot 3)$$

Para poder multiplicar la **matriz B** por la matriz A y por la matriz C, sus dimensiones tendrán que ser **2x3**

c)

$$A \cdot B \cdot C = D$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1} \implies \boldsymbol{B = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1}}$$

$$\mathrm{A^{-1}} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} \cdot (\mathrm{Adj\ (A)})^t \qquad |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{11} = (-1)^2 \cdot (1) = 1 \qquad a_{12} = (-1)^3 \cdot (-2) = 2$$
$$a_{21} = (-1)^3 \cdot (0) = 0 \qquad a_{22} = (-1)^4 \cdot (1) = 1$$

$$\mathrm{Adj\ (A)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\mathrm{Adj(A)}\right)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{A^{-1}} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C^{-1}} = \frac{1}{|\mathrm{C}|} \cdot (\mathrm{Adj\ (C)})^t$$

$$|\mathrm{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathrm{a} \\ 2 & \mathrm{a} & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 4\mathrm{a} + 2) - (2\mathrm{a}^2 + 0 + 2) \rightarrow (4\mathrm{a} + 2) - (2\mathrm{a}^2 + 2)$$
$$\rightarrow (4 \cdot 1 + 2) - (2 \cdot 1^2 + 2) \rightarrow |\mathrm{C}| = 2$$

$$\mathrm{Adj(C)} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\mathrm{Adj(C)}\right)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{C^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{C^{-1}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\boldsymbol{B = A^{-1} \cdot D \cdot C^{-1}} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix}$$

45. Resuelve las siguientes ecuaciones :

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{5} & \boldsymbol{x} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{7} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

$((5 \cdot 3 \cdot 7) + (4 \cdot 0 \cdot (-2) \cdot (9 \cdot x \cdot 1)) — 2 \cdot 3 \cdot 1 + (9 \cdot 0 \cdot 5) \cdot (7 \cdot x \cdot 4) = 0$

$105 + 9x + 6 - 28x = 0 \qquad 105 + 6 = 28x - 9x \qquad 111 = 19x \qquad x = \frac{111}{19}$

b) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x-2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$; F1+F2 $\rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ 1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$

(-1)·C3+C2 $\rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ 1 & 3-x & x-2 \end{vmatrix}$; F2+F3 $\rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ x+4 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ x+3 & x-3 & 0 \\ x+4 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ x+4 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3) \cdot (x^2 - 5x - 6)$$

$(x-3) = 0 \ \rightarrow x = 3$

$(x^2 - 5x - 6) = 0 \ \rightarrow x = -1\,; x = 6$

c) $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{x} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \boldsymbol{x+3} \end{vmatrix}$**=0**

$$C3 \cdot (-1) + C1 \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & x & 2 & 2 \\ 3-x & 5 & x & 3 \\ 0 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & x & 2 & 2 \\ 3-x & 5 & x & 3 \\ 0 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 2 & 2 \\ 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} \ ; \ C2 \cdot (-1) + C1 \ \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x-2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x-2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x) \cdot ((x-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ 4 & x+3 \end{vmatrix} = (3-x) \cdot ((x-2) \cdot (-3x+3))$$

$(3-x) = 0 \ \rightarrow x = 3 \qquad (x-2) = 0 \ \rightarrow x = 2 \qquad (-3x+3) = 0 \ \rightarrow x = 1$

46. Halla el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \to 0+4\ ;\ \ 4 \neq 0\ \ rg(a)=2$

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to\ |1| = 1\ \neq 0\ \to rg\ (b) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\ \ rg(A) = 2$; No puede tener rango mayor que 2 pues solo hay 2 filas.

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to |2| = 2\ \neq 0\ \to rg(c) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3\ \neq 0\ \ \to rg(c) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (10-6) = 4\ \neq 0\ \to\ \ rg\ (c) =\ 3$

d) $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to |3| = 3\ \neq 0\ \to rg(d) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \to 9-4\ \neq 0\ rg(d) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \to (18+4+16) - (24+6+8) = 0$

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \to (18-16) - (-6+8) = 0\ \ rg(d) = 2$

47. Halla el rango de las siguientes matrices :

a) A=$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \to |3| \neq 0\ \ \ \ rg \geq 1$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \to 6-6 = 0$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} \to 12-12 = 0$ Rg(A)=1

b) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to\ |1| \neq 0$ rg ≥ 1

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \to (-1) - (4) = -5 \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \to (-2+12+24) - (-9+8+8) = 27\ \neq 0\ \ \ rg = 3$

$$c)\ \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} & \mathbf{12} & \mathbf{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{vmatrix} \to |1| \neq 0 \qquad rg(c) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \to 3+2=5 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

la fila 4 es igual a la suma de la 1 y la 2; la fila 3 es igual a la fila 1 multiplicada por 3.

Por tanto $\mathrm{rg}(C) = 2$

48. Halla el rango de las matrices en función del parámetro:

a) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to (a \cdot 1) - (1 \cdot 1) = 0\,;\ \ a = 1$

$1.\,Si\ a = 1\ \ rg = 1 \qquad 2.\,Si\ a\ \neq 1\ \ rg = 2$

b) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{6} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (\ a \cdot 0) - (3 \cdot 0) = 0$

$\begin{vmatrix} a & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (a \cdot 6) - (4 \cdot 3) = 0\,; a = 2$

$Si\ a = 2\ \ rg = 1\ \ \ ;\ \ Si\ a \neq 2\ \ rg = 2$

c) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & a \end{vmatrix} = (1 \cdot a) - (3 \cdot 1) = 0\,; a = 3$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \big(1 \cdot (-1)\big) - (1 \cdot 0) = 0\ \ Si\ \ a = 3\ \to\ rg =\ 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = (1 \cdot a \cdot a + 0 + 0) - (0 - 2 + 3a)$

$a^2 - 3a + 2 = 0\ \ a = 2\,; a = 1$

$Si\ a = 2\ o\ a = 1 \to\ \ rg =\ 2$

$Si\ a \neq 1\,, a \neq 2, a \neq 3\ \ entonces\ rg = 3$

d) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1) - (1 \cdot a) = 0\ \ a = 1\,; Si\ a = 1\ \ rg = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} =\ (1 + 1 + a^3) - (a + a + a) \qquad 2 + a^3 - 3a = 0 \qquad a = -2\,; \quad a = 1$

Si a = -2 entonces rg = 2

Si a ≠ -2 o a ≠ 1 entonces rg = 3

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

49.Determina el rango de las matrices siguientes en función del parámetro correspondiente:

$$A=\begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix};C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) $A=\begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to |A|=0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-(-x)\cdot\begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$

$=0+x+x\cdot(x-3)=x+x^2-3x=-2x+x^2$

$$-2x+x^2=0\to -x\cdot(2-x)=0\to x=0;\ 2-x=0\ \to\quad \boldsymbol{x=0};\quad \boldsymbol{x=2}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$$

1. Para x = 0 o x = 2 rg(A) = 2
2. Para x ≠ 0 y x ≠ 2 rg(A) = 3

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix}\to\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix}\to C_4\leftrightarrow C_1\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & x & x & 1 \end{pmatrix}\to \begin{matrix} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & x-1 & x-1 & 0 \end{pmatrix}$

$(-x+1)F_2+F_3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4x+4 \end{pmatrix}\to -4x+4=0\ ;\quad x=1$

1. $Para\ x=1\ rg(B)=2$
2. Para $x\neq 1\ rg(B)=3$

c) $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\to |C|=0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$

$=0-(3a-2)+(-1)\cdot 0=-3a+2+(-1)\cdot 0=-3a+2+0=-3a+2$

$$-3a+2=0\to -3a=-2\to \boldsymbol{a=\frac{2}{3}}$$

1. Para $a=\frac{2}{3}$, $rg(C)=2$

2. Para $a\neq\frac{2}{3}$ $rg(C)=3$

50. Dada la matriz $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}}$

a) Resuelve la ecuación det (A)=0

$|A|=\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix}\begin{matrix} -x & 1 \\ 1 & -x \\ 1 & 1 \end{matrix}\to$

$|A|=\ -x^3+1+1-(-x-x-x)=-x^3+2-(-3x)\to A=-x^3+2+3x$

Textos Marea Verde

$|A| = -x^3 + 2 + 3x = 0$; $\mathbf{x = 2}$; $\mathbf{x = -1}$ **doble**

b) Calcula el rango de la matriz A según los valores de x

1. $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \to$ Para $x = -1$, $rg(A) = 2$
2. $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix} \to$ Para $x = 2$, $rg(A) = 2$
3. Para $x \neq -1$ y $x \neq 2$ $rg(A) = 3$

51. Dada las matrices $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix}}$; $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$

a) Discute el rango de A según los valores de m

$$A = \begin{vmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} m & 2 \\ 2 & m \\ 2 & m \end{matrix} = 6m^2 + 16 + 12m - (12m + 4m^2 + 24) =$$

$= 6m^2 + 16 - 4m^2 - 24 = 2m^2 - 8$ = 2(m-2) (m+2) ; 2(m-2) (m+2)= 0 ; $\mathbf{m = 2}$; $\mathbf{m = -2}$

$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

1. Para m = 2 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $rg(A) = 2$
2. Para m = -2 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $rg(A) = 2$
3. Para $m \neq 2$ y $m \neq -2$ $rg(A) = 3$

b) ¿Qué dimensiones debe tener la matriz X para que sea posible la ecuación A·X = B?

Las dimensión que debe tener es de 3x2 (3x3)·(3x2) = (3x2)

c) Calcula X para m=0

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{5}{2}} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

52. Resuelve las ecuaciones:

a) $\boldsymbol{A \cdot X = B}$ ***siendo*** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}$ ***y*** $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \to X \cdot I = A^{-1} \cdot B \to X = A^{-1} \cdot B$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$|A| = 1 \cdot 5 - (2 \cdot 2) = 1$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj(A)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}}$$

b) $\boldsymbol{B \cdot X = C \text{ siendo } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot C \to I \cdot X = B^{-1} \cdot C \to X = B^{-1} \cdot C$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_2 - 2 \cdot F_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_3 - F_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = B^{-1} \cdot C \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) $\boldsymbol{A \cdot X = B + 2C \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}(B + 2 \cdot C) \to X = A^{-1} \cdot (B + 2 \cdot C)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \frac{1}{2} \cdot F_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_3 - F_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\frac{1}{3} \cdot F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}; \quad B + 2 \cdot C \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

d) $\boldsymbol{A \cdot X + B = 2C \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Textos Marea Verde

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (2C - B)$; $X = A^{-1} \cdot (2C - B)$

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to F_1 \frac{1}{2} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to F_2 + F_3$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right)$$

$$2C - B \to 2 \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (2 \cdot C - B) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \ ; \qquad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{5}{2}} & \boldsymbol{-\frac{3}{2}} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{\frac{3}{2}} & \boldsymbol{\frac{1}{2}} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. **El valor del determinante de la matriz A es: a) 4 b) 0 c) – 4 d) 8**

$|A| = (2^3 + 1^3 + 1^3) - (1^2 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2) = (8 + 1 + 1) - (2 + 2 + 2) = 10 - 6 = 4$; **a) 4**

2. **El adjunto B_{23} del determinante de la matriz B es**

a) 0 b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) – 4 d) $-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$B_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ **a) 0**

3. **El valor del determinante de la matriz B es:**

a) 4 b) 0 c) 8 d) – 8

Como tiene una columna de ceros el determinante vale 0. **b) 0**

4. **El rango de B es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4**

(Buscamos el determinante no nulo de mayor dimensión dentro del determinante)

$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = [2 \cdot (-2)] - [(-2) \cdot 7] = -4 + 14 = 10$

$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = [2 \cdot (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 0] - [4 \cdot (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot 7 \cdot 3] = (-12 - 16) — 12 - 42 = -28 + 12 + 42 = -28 + 54 = 26$

Como el determinante tiene una columna de ceros no hay más determinantes distintos de cero

$rg(B) = 3$; **c) 3**

5. **La matriz inversa de A es:**

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A^t)]$; $|A| = 4$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$[Adj(A^t)] \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} (2^2-1^2) & -(2\cdot1-1^2) & (1^2-1\cdot2) \\ -(1\cdot2-1^2) & (2^2-1^2) & -(2\cdot1-1^2) \\ (1^2-1\cdot2) & -(2\cdot1-1^2) & (2^2-1^2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (4-1) & -(2-1) & (1-2) \\ -(2-1) & (4-1) & -(2-1) \\ (1-2) & -(2-1) & (4-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}; \qquad \text{d)} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

6. La matriz inversa de A es:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{A}|}\cdot \boldsymbol{Adj}; (\boldsymbol{A^t}) \qquad |A| = 4, en\ el\ ejercicio\ 1.$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t); \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$ opción b)

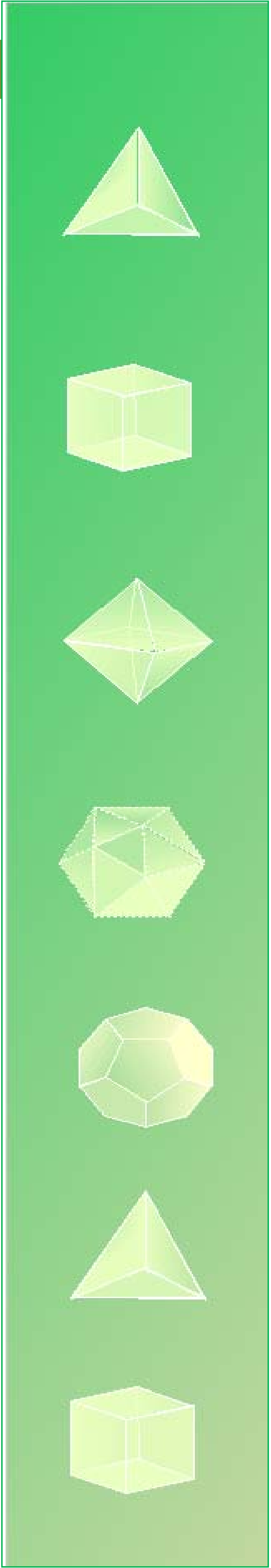
Dadas las matrices: $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

7. La matriz inversa de la matriz F es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad F^{-1} = \frac{1}{|F|}\cdot Adj(F^t) \qquad |F| = -1$$

$$F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Adj; (F^t) = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ $F^{-1} = opción\ a)$

Textos Marea Verde



Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 3: Sistemas de ecuaciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR,ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA, CELIA S, ANDREA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Analiza y resuelve, cuando sea posible, los sistemas siguientes.

a) $\begin{cases}-x+2y=-3\\ 2x-3y=3\end{cases}$; $-\frac{1}{2}\neq\frac{2}{-3}$ Por lo que es un S. C. D. y tiene una única solución

$2F1+F2 \quad \begin{cases}-x+2y=-3\\ y=-3\end{cases}$

$-x+2(-3)=-3$; $-x-6=-3$; $-x=+6-3$; $-x=3$; $\mathbf{x=-3}$; $\mathbf{y=-3}$

b) $\begin{cases}x-2y=-14\\ -x+3y=10\end{cases}$; $\frac{1}{-1}\neq-\frac{2}{3}$ Por lo que es un s. c. d. y tiene una única solución ;

$F1+F2: \quad \begin{cases}x-2y=-14\\ y=-4\end{cases}$

$x-2(-4)=-14$; $x+8=-14$; $x=-14-8$; $\mathbf{x=-22}$; $\mathbf{y=-4}$

c) $\begin{cases}-3x+y=6\\ 3x-y=-7\end{cases}$; $-\frac{3}{3}=\frac{1}{-1}\neq\frac{6}{-7}$ Por lo que es un s. incompatible y no tiene solución.

d) $\begin{cases}9y+6x=33\\ 3y+2x=11\end{cases}$; $\frac{9}{3}=\frac{6}{-1}=\frac{33}{11}$

Por lo que es un s. c. i. y tiene infinitas soluciones ; hacemos $\begin{matrix}y&=&\lambda\\ 2x+3\lambda&=&11\end{matrix}$; $\begin{cases}y=\lambda\\ x=-\frac{3}{2}\lambda+\frac{11}{2}\end{cases}$

2. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes.

(A: matriz / A*: matriz ampliada)

a) $\begin{cases}-x+2y=-3\\ 2x-3y=3\end{cases}$; $A=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$ $\quad A^*=\left(\begin{array}{cc|c}-1&2&-3\\2&-3&3\end{array}\right)$

b) $\begin{cases}x-2y=-14\\ -x+3y=10\end{cases}$; $B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$ $\quad B^*=\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&-14\\2&-3&10\end{array}\right)$

c) $\begin{cases}-3x+y=6\\ 3x-y=11\end{cases}$; $C=\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}$ $\quad C^*=\left(\begin{array}{cc|c}-3&1&6\\3&-1&11\end{array}\right)$

d) $\begin{cases}9y+6x=33\\ 3y+2x=11\end{cases}$; $D=\begin{pmatrix}9&6\\3&2\end{pmatrix}$ $\quad D^*=\left(\begin{array}{cc|c}9&6&33\\3&2&11\end{array}\right)$

***3.* Para los sistemas anteriores, calcula el determinante de la matriz A que has obtenido y utiliza la expresión:** $x=\frac{\begin{vmatrix}c1&b1\\c2&b2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a1&b1\\a2&b2\end{vmatrix}}$ *e* $y=\frac{\begin{vmatrix}a1&c1\\a2&c2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a1&b1\\a2&b2\end{vmatrix}}$ **para intentar resolverlos.**

a) $\begin{cases}\mathbf{-x+2y=-3}\\ \mathbf{2x-3y=3}\end{cases}$

$|A|=\begin{vmatrix}-1&2\\2&-3\end{vmatrix}=(3)-(4)=-1$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}}; \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(+9)-(6)}{(+3)-(4)} = \frac{3}{-1} = -3\,;\ x\text{=-}3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(-3)-(-6)}{(+3)-(4)} = \frac{3}{-1} = -3; y = -3$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

b) $\begin{cases} \mathbf{x - 2y = -14} \\ \mathbf{-x + 3y = 10} \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (3) - (2) = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -14 & -2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(-42)-(-20)}{(3)-(2)} = \frac{-22}{1} = -22; x = -22$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -14 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{(10)-(14)}{(3)-(2)} = \frac{-4}{1} = -4; y = -4$$

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

c) $\begin{cases} \mathbf{-3x + y = 6} \\ \mathbf{3x - y = -7} \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (3) - (3) = 0 \qquad \begin{vmatrix} -3 & \mathbf{6} \\ 3 & \mathbf{-7} \end{vmatrix} = \mathbf{21 - 18 = 3 \neq 0}$$

SISTEMA INCOMPATIBLE

d) $\begin{cases} \mathbf{6x + 9y = 33} \\ \mathbf{2x + 3y = 11} \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (18) - (18) = 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & \mathbf{33} \\ 2 & \mathbf{11} \end{vmatrix} = \mathbf{66 - 66 = 0}$$

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

4. Para los sistemas anteriores, analiza qué relación existe entre el valor del determinante de la matriz a y la clasificación como sistema compatible o sistema incompatible que hiciste en la primera actividad propuesta.

Cuando los sistemas son compatibles el determinante de la matriz a es distinto de 0, mientras que cuando son incompatibles es 0.

5. Para los sistemas anteriores, determina el rango de la matriz ampliada que has obtenido y analiza qué relación existe entre dicho rango, el de la matriz A y la clasificación como Sistema Compatible Determinado, Sistema Compatible Indeterminado o Sistema Incompatible.

Sistemas anteriores:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 2y = -14 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$c)\ \begin{cases}-3x+y=6\\3x-y=-7\end{cases}$ $\quad d)\ \begin{cases}9y+6x=33\\3y+2x=11\end{cases}$

Hay que convertir en cero los elementos que estén debajo de la diagonal principal

a) $\begin{cases}-x+2y=-3\\ \ 2x-3y=3\end{cases};\ \left(\begin{matrix}-1&2\\2&-3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-3\\3\end{matrix}\right)$ $2F_1+F_2$ $\left(\begin{matrix}-1&2\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-3\\-3\end{matrix}\right)$ r(A)=2 r(A*) =2

r(A) = 2 = r(A) = nº incógnitas → S. C. D.*

b) $\begin{cases}x-2y=-14\\-x+3y=10\end{cases},\ \left(\begin{matrix}1&-2\\-1&3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-14\\10\end{matrix}\right)$ F_1+F_2 $\left(\begin{matrix}1&-2\\0&1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}-14\\-4\end{matrix}\right)$ r(A)=2 r(A*) =2

r(A) = 2 = r(A) = nº incógnitas → S. C. D.*

c) $\begin{cases}-3x+y=6\\3x-y=-7\end{cases};\ \left(\begin{matrix}-3&1\\3&-1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}6\\-7\end{matrix}\right)$ F_1+F_2 $\left(\begin{matrix}-3&1\\0&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}6\\-1\end{matrix}\right)$ r(A)=1 r(A*) =2

r(A) ≠ r(A) → S. I.*

d) $\begin{cases}9y+6x=33\\3y+2x=11\end{cases};\ \left(\begin{matrix}9&6\\3&2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}33\\11\end{matrix}\right)$ F_1-3F_2 $\left(\begin{matrix}9&6\\0&0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}33\\0\end{matrix}\right)$ r(A)=1 r(A*) =1

r(A) = r(A) < nº incógnitas → S. C. I.*

6. Decide cuales de los siguientes sistemas de ecuaciones pueden resolverse con esta metodología matricial:

$a)\ \begin{cases}x^2+2xy=3x\\2x+y=3-y\end{cases}$

Esta no se puede resolver porque es un sistema con ecuaciones de 2º grado.

$b)\ \begin{Bmatrix}x+y=-4\\x+3y=1\end{Bmatrix}$ Esta sí se puede resolver

$c)\ \begin{cases}x\cdot y=\ -4\\ x+y=1\end{cases}$

Esta no se puede resolver porque es un sistema con una ecuación no lineal.

$d)\ \begin{cases}x^2-y^2=12\\ \ x+y=3\end{cases}$

Esta no se puede resolver porque es un sistema con ecuaciones de 2º grado.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

7. Dada las siguientes matrices A, B y A^*, determina los siguientes sistemas lineales asociados.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to \left.\begin{matrix} (1 \cdot x) + (-1 \cdot y) = 0 \\ (1 \cdot x) + (3 \cdot y) = 1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x - y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{matrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} \to \left.\begin{matrix} (0 \cdot x) + (3 \cdot y) = 3 \\ (2 \cdot x) + (-2 \cdot y) = 12 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 3y = 3 \\ 2x - 2y = 12 \end{matrix}$$

c) $A^* = \left(\begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}\right)$

$$A^* = \left(\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \left.\begin{matrix} (-1 \cdot x) + (1 \cdot y) = 3 \\ (2 \cdot x) + (-1 \cdot y) = 4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{matrix}$$

d) $A^* = \left(\begin{matrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix}\right)$

$$A^* = \left(\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left.\begin{matrix} (3 \cdot x) + (2 \cdot y) = -1 \\ (-1 \cdot x) + (-1 \cdot y) = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 3x + 2y = -1 \\ -x - y = 0 \end{matrix}$$

8. Escribe en forma matricial y encuentra la matriz ampliada de los sistemas siguientes:

a) $\begin{cases} \mathbf{-x + 2y} & = & \mathbf{-3x + y + 5} \\ \mathbf{2x - 3y + 15} & = & \mathbf{3x + 2y} \end{cases}$

1º- En el sistema de ecuaciones se tiene que pasar las incógnitas a un miembro y los números al otro.

$$\begin{cases} 2x + y & = & 5 \\ x + 5y & = & 15 \end{cases}$$

2º- Ahora ya podemos escribir la matriz ampliada y la expresión matricial.

$$\mathrm{A}^* \to \left(\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 5 \\ 15 \end{matrix}\right) \qquad \mathrm{A \cdot X = B} \to \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Sol.} \to \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{15} \end{pmatrix}$$

b) $\begin{cases} \mathbf{x - 2y = 4 + x + y} \\ \mathbf{3 - x + 2y = y - x} \end{cases} \to \begin{cases} -3y = 4 \\ -y = 3 \end{cases}$

$$\mathrm{A}^* \to \left(\begin{matrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}\right) \qquad \mathrm{A \cdot X = B} \to \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}; \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Sol.} \to \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

c) $\begin{cases} \mathbf{12 + x - 4y = 3 - 2x + 4y} \\ \mathbf{7 - y + 4x = 7 + y - x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$

$$A^* \rightarrow \left(\begin{matrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 9 \\ 0 \end{matrix}\right) \rightarrow A \cdot X = B \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Sol.} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

d) $\begin{cases} \mathbf{5 = 3x + 3y} \\ \mathbf{3 = x - y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

$$A^* \rightarrow \left(\begin{matrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix}\right) \; A \cdot X = B \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Sol.} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

9. Razona que valores debe tener el parámetro m para que el sistema sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

a) $\begin{cases} -x + 2y = -3 \\ mx - 3y = 3 \end{cases}$

$$\left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ m & -3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -3 \\ 3 \end{matrix}\right) \rightarrow (m \cdot F1) + F2 \rightarrow \left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 2m - 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 \\ -3m + 3 \end{matrix}\right)$$

$$2m - 3 = 0 \rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$1^{\text{o}}.- \mathrm{m} \neq \frac{3}{2}; \; \mathrm{r(A) = r(A^*) = n^{o}\ incógnitas \rightarrow S.C.D}$$

$$2^{\text{o}}.\; m = \frac{3}{2}; \left(\begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \end{matrix}\right) \qquad r(A) \neq r(A^*) \rightarrow S.I.$$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y = -3} \\ \boldsymbol{-x + y = m} \end{cases}$

$$\left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -14 \\ \mathrm{m} \end{matrix}\right) \rightarrow F1 + F2 \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -14 \\ \mathrm{m} - 14 \end{matrix}\right)$$

$\mathrm{r(A) = (A^*) \rightarrow S.C.D.}$ para cualquier valor de m

c) $\begin{cases} \boldsymbol{mx + y = 6} \\ \boldsymbol{3x - y = -7} \end{cases}$

$$\left(\begin{matrix} \mathrm{m} & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 6 \\ -7 \end{matrix}\right) \rightarrow F1 \leftrightarrow F2 \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & \mathrm{m} \\ -1 & 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 6 \\ -7 \end{matrix}\right) \rightarrow F1 + F2 \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & \mathrm{m} \\ 0 & \mathrm{m} + 3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 6 \\ -1 \end{matrix}\right) \; \mathrm{m + 3 = 0 \rightarrow m = -3}$$

$$1^{\text{o}}\ \mathrm{m} \neq -3 \rightarrow \quad \mathrm{r(A) = (A^*) \rightarrow S.C.D.}$$

$$2^{\text{o}}\ \mathrm{m} = -3 \rightarrow \left(\begin{matrix} 1 & \mathrm{m} \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 6 \\ -1 \end{matrix}\right) \quad \mathrm{r(A) \neq (A^*) \rightarrow S.I.}$$

d) $\begin{cases} \mathbf{9y + 6x = 33} \\ \boldsymbol{3y + mx = 11} \end{cases}$

$$\left(\begin{matrix} 9 & 6 \\ 3 & \mathrm{m} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 33 \\ 11 \end{matrix}\right) \rightarrow F1 - 3F2 \rightarrow \left(\begin{matrix} 9 & 6 \\ 0 & -3\mathrm{m} + 6 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 33 \\ 0 \end{matrix}\right) \rightarrow \; -3\mathrm{m} + 6 = 0 \quad \mathrm{m} = 2$$

$$1^{\text{o}}\ m \neq 2 \rightarrow r(A) = (A^*) \rightarrow S.C.D$$

$$2^{\text{o}}\ m = 2 \rightarrow \left(\begin{matrix} 9 & 6 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 33 \\ 0 \end{matrix}\right) \quad r(A) = r(A^*) < n^{\text{o}} \text{ incógnitas} \rightarrow \text{S. C. Indeterminado}$$

10. Determina si los sistemas siguientes son equivalentes o no:

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x + y = -2 \\ x + 3y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x + 3y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -E1 + E2 \\ -2E1 + E3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ 2y = -2 \\ -3y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = -2 \\ 2y = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \rightarrow 2E1 + E2 \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -3 \\ -7y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = -1 \end{matrix}$$

Son equivalentes ya que tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero es solución del segundo.

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 4z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x - 9y + 5z = -3 \\ x + 3y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 3x - y + 4z = 6 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3F1+F2 \\ 2F1+F3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} -x - 3y - z = 1 \\ 8y + z = 9 \\ 8y + z = 9 \end{cases} \rightarrow \textit{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} x - 9y + 5z = -3 \\ x + 3y - z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -E1+E2 \\ -F1+F3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x - 9y + 5z = -3 \\ 0 + 12y - 6z = 6 \\ 0 + 8y - 4z = 5 \end{cases} \rightarrow -2F2 + 3F3 \rightarrow \begin{cases} x - 9 + 5z = -3 \\ 12y - 6z = 6 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

Sistema incompatible. Por tanto, no son equivalentes.

11. Determina el valor de *m* para que los sistemas siguientes sean equivalentes:

A) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + my = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -x + my = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 - (-1) = 3 \\ -1 + m \cdot (-1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2+1=3 \\ -1-m=1 \\ -1-1=m \\ m=-2 \end{matrix}$$

B) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - y - z = m \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (3 + 4 - 2) - (2 - 6 + 2) = 7$$

Textos Marea Verde

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3&2&-1\\1&1&1\\2&1&-3\end{vmatrix}}{7}=\frac{8}{7}\ ;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&3&-1\\1&1&1\\2&1&-3\end{vmatrix}}{7}=\frac{12}{7}\ ;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&3\\1&-1&1\\2&1&-3\end{vmatrix}}{7}=\frac{11}{7}$$

$$\begin{cases}8-12+11=1\\ 8-12-11=m\rightarrow m=-\dfrac{15}{7}\\ -8+12+2\cdot 11=\dfrac{26}{7}\neq 2\end{cases}$$

No existe un valor de m tal que estos sistemas sean equivalentes.

12. Analiza y resuelve mediante el método de Gauss los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}\boldsymbol{-x+2y-5x=-3}\\ \boldsymbol{2x-3y+z=3}\\ \boldsymbol{-5x+2y-5z=-4}\end{cases}$ E2= 2E1 +E2 $\begin{cases}-x+2y-5z=-3\\ y-9z=-3\\ -5x+2y-5z=-4\end{cases}$ E3= -5(E1)+E3

$\begin{cases}-x+2y-5z=-3\\ y-9z=-3\\ -8y+20z=11\end{cases}$ E3=8·E2+E3 $\begin{cases}-x+2y-5z=-3\\ y-9z=-3\\ -52z=-13\end{cases}$ **Es un S.C.D.**

$$\boldsymbol{z=\frac{1}{4}}\ ;\ y-9\cdot\frac{1}{4}=-3\ ;\ \boldsymbol{y=-\frac{3}{4}}\ ;\ -x+2\cdot\frac{-3}{4}-5\frac{1}{4}=-3\ ;\ \boldsymbol{x=\frac{1}{4}}$$

b) $\begin{cases}\boldsymbol{x-2y+3z=-14}\\ \boldsymbol{-x+3y-z=10}\\ \boldsymbol{2x-y+6z=-22}\end{cases}$ E2=E1+E2 $\begin{cases}x-2y+3z=-14\\ y+2z=-4\\ 2x-y+6z=-22\end{cases}$ E3=-2·E1+E3

$\begin{cases}x-2y+3z=-14\\ y+2z=-4\\ 3y\quad=6\end{cases}$ E3=E2·(-3)+E3 $\begin{cases}x-2y+3z=-14\\ y+2z=-4\\ -6z=18\end{cases}$ **Es un S.C.D.**

$$\boldsymbol{z=-3}\ ;\ y+2(-3)=-4\ ;\ \boldsymbol{y=2}\ ;\ x-2\cdot(2)+3\cdot(-3)=-14\ ;\ \boldsymbol{x=-1}$$

c) $\begin{cases}\boldsymbol{-x+3y-z=-6}\\ \boldsymbol{3x-y+4z=7}\\ \boldsymbol{2x+2y+3z=-9}\end{cases}$ E2=3E1+E2 $\begin{cases}-x+3y-z=-6\\ 8y+z=-11\\ 2x+2y+3z=-9\end{cases}$ E3=E1·2+E3

$\begin{cases}-x+3y-z=-6\\ 8y+z=-11\\ 8y+z=-25\end{cases}$ - E2 + E3 = E3 $\begin{matrix}-x+3y-z=-6\\ 8y+z=-11\\ 0=-25\end{matrix}$

Se trata de un **S.I.** por lo que no tiene solución.

d) $\begin{cases}\boldsymbol{x-9y+5z=33}\\ \boldsymbol{x+3y-z=-9}\\ \boldsymbol{x-y+z=5}\end{cases}$ E2=-E1+E2 E3=-E1+E3 $\begin{cases}x-9y+5z=33\\ 12y-6z=-42\\ 8y-4z=-28\end{cases}$

E3=-2E2+3E3 $\begin{cases}x-9y+5z=33\\ 12y-6z=-42\\ 0=0\end{cases}$ **Es un S.C.I.**

Hacemos z=t $\begin{cases}x-9y=33-5t\\ 12y=-42+6t\end{cases}$ $\boldsymbol{y}=\frac{-42+6t}{12}=\boldsymbol{-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}t}$

Textos Marea Verde

$x-9\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}t\right)=33-5t$; $\boldsymbol{x=\frac{129}{2}-\frac{1}{2}t}$; $\boldsymbol{z=t}$

e) $\left\{\begin{array}{l}\mathbf{2x-y+z=3}\\ \mathbf{-x+3y+3z=2}\\ \mathbf{x-3y+4z=5}\\ \mathbf{-2x-3y-3z-5}\end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\-1&3&3&2\\1&-3&4&5\\-2&-3&-3&-5\end{array}\right)$ F2+($\frac{1}{2}$)·F1 = F2

$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\1&-3&4&5\\-2&-3&-3&-5\end{array}\right)$ F3-($\frac{1}{2}$) $\cdot F1=F3$ $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\1&-\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\-2&-3&-3&-5\end{array}\right)$ F4+F1=F4

$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\0&-\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)$ F3+F2=F3 $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\0&0&7&7\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)$ F4+($\frac{8}{5}$) $\cdot F2=F4$

$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\0&0&7&7\\0&0&\frac{18}{5}&\frac{18}{5}\end{array}\right)$ F4-($\frac{18}{35}$) $\cdot F3=F4$ $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&3\\0&\frac{5}{2}&\frac{7}{2}&\frac{7}{2}\\0&0&7&7\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\left\{\begin{array}{l}2x-y+z=3\\ \frac{5}{2}y+\frac{7}{2}z=\frac{7}{2}\\ 7z=7\end{array}\right.$ **es un S.C.D.** **z=1** ; $\frac{5}{2}y+\frac{7}{2}\cdot 1=\frac{7}{2}$; **y=0** ; $2x-0+1=3$; **x= 1**

f) $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{x+y+3z=3}\\ \boldsymbol{x+3y+2z=0}\\ \boldsymbol{2x+3y+z=-1}\\ \boldsymbol{x-3y-3z=5}\end{array}\right.$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\1&3&2&0\\2&3&1&-1\\1&-3&-3&-5\end{array}\right)$ F2-F1=F2

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&2&-1&-3\\2&3&1&-1\\1&-3&-3&-5\end{array}\right)$ F3-2·F1=F3 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&2&-1&-3\\0&1&-5&-7\\1&-3&-3&-5\end{array}\right)$ F4-F1=F4

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&2&-1&-3\\0&1&-5&-7\\0&-4&-6&2\end{array}\right)$ F3-($\frac{1}{2}$) · F2= F3 $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&2&-1&-3\\0&0&\frac{-9}{2}&\frac{-11}{2}\\0&-4&-6&2\end{array}\right)$ F4+2F2=F4

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&2&-1&-3\\0&0&\frac{-9}{2}&\frac{-11}{2}\\0&0&-8&-4\end{array}\right)$ F4- ($\frac{16}{9}$) $\cdot F3=F4$ $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&3\\0&2&-1&-3\\0&0&\frac{-9}{2}&\frac{-11}{2}\\0&0&0&\frac{52}{9}\end{array}\right)$

Nos encontramos con un **S.I.** por lo que no tiene soluciones.

Textos Marea Verde

g) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+3z=3} \\ \boldsymbol{x-y+z=1} \end{cases}$ es un **S.C.I.** z=t $\begin{cases} x+y=3-3t \\ x-y=1-t \end{cases}$ E2=E1-E2

$\begin{cases} x+y=3-3t \\ 2y=2-2t \end{cases}$ $\boldsymbol{y=1-t}$ $x+1-t=3-3t$ $\boldsymbol{x=2-2t}$ $\boldsymbol{z=t}$

h) $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+3z=3} \\ \boldsymbol{2x+2y+6z=1} \end{cases}$ -2E1+E2=E2 $\begin{cases} x+y+3z=3 \\ 0=-5 \end{cases}$ es un **S.I.**

i) $\begin{cases} w-x+y+z=5 \\ w+x-y-z=3 \end{cases}$ es un **S.C.I.** $\boldsymbol{y=\alpha}$; $\boldsymbol{z=t}$

$\begin{cases} w-x+\alpha+t=5 \\ w+x-\alpha-t=3 \end{cases}$ $\begin{cases} w-x=5-\alpha-t \\ w+x=3+\alpha+t \end{cases}$ E2=E1-E2 $\begin{cases} w-x+\alpha+t=5 \\ -2x=2-2\alpha-2t \end{cases}$

$\boldsymbol{x=\alpha+t-1}$ $\boldsymbol{w=4}$

13. Resuelve el sistema anterior y comprueba que el aspirante deberá contestar 50 preguntas correctamente, 30 erróneamente y dejar 10 preguntas sin contestar para alcanzar los 210 puntos.

x = preguntas contestadas correctamente
y = preguntas contestadas erróneamente
z = preguntas NO contestadas

$\begin{cases} x+y+z=90 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ E3=-E1+E3

$\begin{cases} x+y+z=90 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ -3y=-90 \end{cases}$ E1= E1·(-6)+E2 $\begin{cases} -8{,}5y-7{,}5z=-330 \\ 6x-2{,}5y-1{,}5z=210 \\ -3y=-90 \end{cases}$

$\boldsymbol{y=30}$ $-8{,}5\cdot 30-7{,}5z=-330$; $\boldsymbol{z=10}$ $6x-2{,}5\cdot 30-1{,}5\cdot 10=210$; $\boldsymbol{x=50}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación o de Gauss:

a) $$\begin{cases} \mathbf{-x+2y-5z=-3} \\ \mathbf{2x-3y+z=3} \\ \mathbf{-5x+2y-5z=-4} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2E1+E2 \\ -5E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ y-9z=-3 \\ -8y+20z=11 \end{cases} \rightarrow$$

$$(8E2+E3) \rightarrow \begin{cases} -x+2y-5z=-3 \\ y-9z=-3 \\ -52z=-13 \end{cases} ; \qquad z=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

$$y-9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)=-3 \quad ; \qquad y=-3+\frac{9}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$-x+2\left(-\frac{3}{4}\right)-5\left(\frac{1}{4}\right)=-3 \quad ; \quad -x-\frac{11}{4}=-3 \quad ; \quad x=\frac{1}{4}$$

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \qquad \mathbf{y}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \qquad \mathbf{z}=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{52}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

b) $$\begin{cases} \boldsymbol{x-2y+3z=-14} \\ \boldsymbol{-x+3y-z=10} \\ \boldsymbol{2x-y+6z=-22} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1+E2 \\ -2E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=-14 \\ y+2z=-4 \\ 3y \quad =6 \end{cases}$$

$$3y=6 \quad ; \quad \boldsymbol{y}=\frac{6}{3}=\mathbf{2} \qquad 2+2z=-4 \quad ; \quad 2z=-6 \quad ; \quad \boldsymbol{z}=-\frac{6}{2}=\mathbf{-3}$$

$$x-2\cdot(2)+3\cdot(-3)=-14 \quad ; \quad x=\ -14+4+9 \quad ; \quad \boldsymbol{x=-1}$$

$$\mathbf{x=-1} \qquad \mathbf{y=2} \qquad \mathbf{z=-3}$$

c) $$\begin{cases} \mathbf{-x+3y-z=6} \\ \mathbf{3x-y+4z=7} \\ \mathbf{2x+6y-z=-9} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 3E1+E2 \\ 2E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} -x+3y-z=6 \\ 8y+z=25 \\ 12y-3z=9 \end{cases} \ 3E2+E3 \rightarrow \begin{cases} -x+3y-z=6 \\ 8y+z=25 \\ 36y \quad =84 \end{cases}$$

$$\mathbf{y}=\frac{84}{36}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} \ ; \qquad 8\cdot\left(\frac{7}{3}\right)+z=25 \quad ; \quad \mathbf{z}=25-\frac{56}{3}=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{3}}$$

$$-x+3\frac{7}{3}-\frac{19}{3}=6 \quad ; \quad -x=6-7+\frac{19}{3} \quad ; \quad \mathbf{x}=\ -\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{x}=-\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}} \qquad \mathbf{y}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} \qquad \mathbf{z}=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{3}}$$

d) $$\begin{cases} \boldsymbol{x-9y+5z=33} \\ \boldsymbol{x+3y-z=-9} \\ \boldsymbol{x-y+z=5} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -E1+E2 \\ -E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x-9y+5z=33 \\ 12y-6z=-42 \\ 8y-4z=-28 \end{cases} \rightarrow$$

$$8E2-12E3 \ \begin{cases} x-9y+5z=33 \\ 12y-6z=-42 \\ 0=0 \end{cases} \quad \textit{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Simplificamos la segunda ecuación e igualamos z a t; z = t.

$$\begin{cases} x-9y+5t=33 \\ 2y-t=-7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-9y=33-5t \\ 2y=-7+t \end{cases} ; \quad y=\frac{-7+t}{2} \qquad x=33-5t+9\left(\frac{-7+t}{2}\right)=\frac{3-t}{2}$$

Textos Marea Verde

$$\mathbf{x = \frac{3-t}{2}\ ; \quad y = \frac{-7+t}{2}\ ; \quad z = t}$$

2.-Dados los sistemas siguientes

a) Exprésalos en forma matricial y comprueba que son sistemas de Cramer
b) Resuélvelos utilizando la matriz inversa y aplicando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} \mathbf{-4x+3y=-5} \\ \mathbf{3x-4y=2} \end{cases}$ $;\begin{pmatrix} -4 & 3 & \vdots & -5 \\ 3 & -4 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = 16-9=7\neq 0$

$$AdjA = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \to traspuesta \to \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-4}{7} \end{pmatrix} \to X = A^{-1}\cdot B \ \to \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{-4}{7} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Cramer: $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{14}{7} = \mathbf{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{7}{7} = \mathbf{1}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{-2x-y=-4y} \\ \boldsymbol{5+2y=3x} \end{cases}$ $;\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -3x+2y=-5 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & \vdots & 0 \\ -3 & 2 & \vdots & -5 \end{pmatrix} \to |A| = 13$

Adj A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to traspuesta \to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \ A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \ X = A^{-1}\cdot B$

$$X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{15}{13}} \\ \mathbf{\frac{-10}{13}} \end{pmatrix}$$

Cramer: $\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}}{13} = \mathbf{\frac{15}{13}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}}{13} = \mathbf{\frac{-10}{13}}$

c) $\begin{cases} \boldsymbol{y+2z=-3} \\ \boldsymbol{2x+y=3} \\ \boldsymbol{x+3y-4z=3} \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right) \to \ |A| = 12-(2-8) = 18$

Adj A = $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 5 \\ 10 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to (AdjA)^t \to \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 8 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$A^{-1}=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 10 & -2\\ 8 & -2 & 4\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{9}\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\cdot B\rightarrow\ x=\begin{pmatrix}\frac{-2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

Cramer: $X=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & 3 & -4\end{vmatrix}}{18}=\frac{12+18-(6-12)}{18}=\frac{36}{18}=\mathbf{2}$ $\quad y=\frac{\begin{vmatrix}0 & -3 & 2\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 3 & -4\end{vmatrix}}{18}=\frac{12-(6+24)}{18}=\frac{-18}{18}=\mathbf{-1}$

$Z=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{vmatrix}}{18}=\frac{-18+3-(-3+6)}{18}=\frac{-18}{18}=\mathbf{-1}$

3.- Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}-2x+y=-3\\ 6x-3y=9\end{cases}$ usamos el método de reducción: $3F_1=F_1'$

$\begin{cases}-6x+3y=-9\\ 6x-3y=9\end{cases}$ sumamos las ecuaciones $\begin{cases}-6x+3y=-9\\ 0=0\end{cases}$

hacemos $\mathbf{x=t}$, $\mathbf{y}=\frac{-9+6t}{3}=\mathbf{-3++2t}$

b) $\begin{cases}-4x-6y=-6\\ -2x+3y=-3\end{cases}$ usamos el método de reducción: $-2F_2=F_2'$

$\begin{cases}-4x-6y=-6\\ 4x-6y=+6\end{cases}$ $\quad\begin{cases}-4x-6y=-6\\ -12y=0\end{cases}$ $\quad\mathbf{y=0}\quad -4x=-6;\quad \mathbf{x}=\frac{6}{4}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

c) $\begin{cases}3x-2y=-2\\ 9x-6y=6\\ 6x+4y=3\end{cases}$ $\quad\begin{matrix}-3F_1+F_2=F_2'\\ -2F_1+F_3=F_3'\end{matrix}$ $\quad\begin{cases}3x-2y=-2\\ \mathbf{0=12}\\ 8y=7\end{cases}$

No es posible resolver este sistema ya que es incompatible

4.- Resuelve los siguientes sistemas aplicando, si es posible la regla de Cramer:

$\boldsymbol{a)}\begin{cases}\boldsymbol{-x-2y+3z=6}\\ \boldsymbol{3x-4y+2z=7}\\ \boldsymbol{4x+y-z=-1}\end{cases}$ $\quad\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & -2 & 3 & 6\\ 3 & -4 & 2 & 7\\ 4 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$ $\quad|A|=33$

$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & -2 & 3\\ 7 & -4 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{33}=\frac{11}{33}=\frac{1}{3};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 6 & 3\\ 3 & 7 & 2\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}}{33}=-\frac{22}{33}=-\frac{2}{3};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -2 & 6\\ 3 & -4 & 7\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}}{33}=\frac{55}{22}=\frac{5}{2}$

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{3};y=-\frac{2}{3};z=\frac{5}{2}}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$b)\begin{cases}2x-3y+z=-29\\ 3x+y-5z=21\\ -x+2y-4z=32\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -3 & 1 & -29\\ 3 & 1 & -5 & 21\\ -1 & 2 & -4 & 32\end{array}\right)\qquad |B|=-32$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-29 & -3 & 1\\ 21 & 1 & -5\\ 32 & 2 & -4\end{vmatrix}}{-32}=\frac{64}{-32}=-2;\ y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -29 & 1\\ 3 & 21 & -5\\ -1 & 32 & -4\end{vmatrix}}{-32}=\frac{-224}{-32}=7;\ z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3 & -29\\ 3 & 1 & 21\\ -1 & 2 & 32\end{vmatrix}}{-32}=\frac{128}{-32}=-4$$

$$\boldsymbol{x=-2;\ y=7;\ z=-4}$$

$$c)\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+3y-4z=9\\ x-y+z=-1\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4 & 9\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{array}\right)\qquad |C|=-12$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & 3 & -4\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{-12}{-12}=1;\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 9 & -4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{-12}{-12}=1;\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 9\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}}{-12}=\frac{12}{-12}=-1$$

$$\boldsymbol{x=1;\ \ y=1;\ \ z=-1}$$

$$d)\begin{cases}3x+2y+z=1\\ 5x+3y+4z=2\\ x+y-z=1\end{cases}\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\qquad |D|=-1$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{4}{-1}=-4;\ \ y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-6}{-1}=6;\ \ z=\frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$\boldsymbol{x=-4;\ \ y=6;\ \ z=1}$$

5. – Discute y resuelve los sistemas en los casos que sea posible:

$$\text{a)}\begin{cases}2x+3y-4z=1\\ 4x+6y-az=2\\ x+y+az=10\end{cases}\qquad \text{b)}\begin{cases}5x+4y+2z=0\\ 2x+3y+z=0\\ 4x-y+m^2z=m-1\end{cases}$$

a) $\begin{vmatrix}2 & 3 & -4\\ 4 & 6 & -a\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=-a+8\ \rightarrow\ -a+8=0,\quad a=8$

1. $Para\ a\ \neq 8\ es\ un\ SCD$

$$|A_x|=-2a+248\qquad |A_y|=19a-152\qquad |A_z|=0\qquad |A|=(-8+a)$$

$$\mathbf{x=\frac{248-a}{8-a}\ \ ,\ \ y=\frac{19a-152}{8-a}\ \ ,\ \ z=0}$$

2. $Para\ a=8$

$$\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0\,,\ \ R(A)=2$$

Textos Marea Verde
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0\,, R(A^*) = 2;\ R(A) = R(A^*) < Nº\ de\ incognitas\ es\ un\ SCI$$

Suprimimos la 2ª ecuación que es doble de la primera y hacemos $z = \lambda$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ x + y + 8z = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 1 + 4\lambda \\ x + y = 10 - 8\lambda \end{matrix} \quad E1 - 2E2 \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 1 + 4\lambda \\ y = -19 + 20\lambda \end{matrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación y despejando x obtenemos

$$\boldsymbol{x = 29 - 28\lambda\,, \qquad y = -19 + 20\lambda \;\;, \quad z = \lambda}$$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & m^2 \end{vmatrix} = m^2 - 1 \to m^2 - 1 = 0\,,\ \ m = \pm 1$

1. Para $\mathrm{m} \neq 1$ y $\mathrm{m} \neq -1$ $\mathrm{R(A) = 3}$ y por tanto es un $\mathbf{S.C.D.}$

$$|\mathrm{A_x}| = -2(\mathrm{m}-1) \quad |\mathrm{A_y}| = (\mathrm{m}-1) \quad |\mathrm{A_z}| = 7(\mathrm{m}-1) \quad |\mathrm{A}| = \mathrm{m}^2 - 1 = (\mathrm{m}-1)(\mathrm{m}+1)$$

$$\mathbf{x} = \frac{-2(\mathrm{m}-1)}{(\mathrm{m}-1)(\mathrm{m}+1)} = \frac{\mathbf{-2}}{\mathbf{m+1}}\ ;\ \mathbf{y} = \frac{(\mathrm{m}-1)}{(\mathrm{m}-1)(\mathrm{m}+1)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{m+1}}\ ;\ \mathbf{z} = \frac{7(\mathrm{m}-1)}{(\mathrm{m}-1)(\mathrm{m}+1)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{m+1}}$$

2. para $\mathrm{m} = 1$

$\mathrm{R(A) = 2; R(A^*) = 2 \to\ R(A) = R(A^*) <}$ Nº de incognitas es un $\mathbf{S.C.I.}$

Cogemos dos ecuaciones $\begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$ hacemos $\mathbf{z = \lambda}$ $\begin{cases} 5x + 4y = -2\lambda \\ 2x + 3y = -\lambda \end{cases}$ -2F1+5F2

$$\begin{cases} 5x + 4y = -2\lambda \\ 7y = -\lambda \end{cases} \ ;\quad \mathbf{y} = -\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{\lambda} \quad ;\quad \mathbf{x} = -\tfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{\lambda}$$

3. para $\mathrm{m} = -1$

$\to \mathrm{R(A) \neq R(A^*)}$es un $\mathbf{S.I.}$

6. – Dado el sistema

$$\begin{cases} (a+2)x + (a-1)y - z = 3 \\ ax - y + z = 3 \\ x + ay - z = 1 \end{cases}$$

a) Estudia su compatibilidad según los valores de a.

b) Resuélvelo para el caso $a = -1$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} a+2 & a-1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (a^2 + 2a + 1) - (-a^2 + a) = a(-a-1)$

$$a(-a-1) = 0; \quad a = 0; \quad a = -1$$

1. **Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$.** El determinante será $\neq 0 \rightarrow r(A) = 3$ **SCD**

2. **Si $a = -1$**

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3; R(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; R(A^*) = 2$$ Como el $R(A) = R(A)^* <$ Nº de incógnitas es un **SCI**

3. **Si $a = 0$**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2; R(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\ ;\ R(A^*) = 3\ ;$$ Como el $R(A) \neq R(A)^*$ es un **SI**

b) Nos quedamos con 2 ecuaciones $\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ hacemos $z = \lambda$

$$\begin{cases} -x - y = 3 - \lambda \\ x - y = 1 - \lambda \end{cases} \quad E1 + E2 \quad \begin{cases} -x - y = 3 - \lambda \\ -2y = 4 - 2\lambda \end{cases}; \quad y = -2 + \lambda \quad , \quad x = -1$$

$$\boldsymbol{x = -1 \quad , \quad y = -2 + \lambda \quad , \quad z = \lambda}$$

7. Dadas las ecuaciones $\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$ se pide:

a) Añade una ecuación para que resulte un sistema incompatible.

$$\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{vmatrix} 6 & -9 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ Rg(A) < 3 $\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ = -3 Rg (A) = 2 $\begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = 12 Rg(A*) =3

Rg (A)≠ Rg(A*) Sistema incompatible

b) Añade una ecuación para que resulte un sistema compatible determinado

$$\begin{cases} 6x - 9y + 2z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 6 & -9 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \ \textit{Sistema compatible determinado}$$

Textos Marea Verde

8. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{2x+3y-z=-2} \\ \boldsymbol{x+2y+2z=1} \end{cases}$ **se pide**

a) Discútelo y resuélvelo cuando sea posible

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0$$

Rg (A) = Rg (A*) = 2 < nº de incógnitas → Sistema compatible indeterminado ∞ soluciones

$$\text{Z}=\lambda \qquad \begin{cases} 2x+3y-\lambda=-2 \\ x+2y+2\lambda=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x+3y=-2+\lambda \\ x+2y=1-2\lambda \end{matrix}$$

$$\text{X}=\frac{\begin{vmatrix} -2+\lambda & 3 \\ 1-2\lambda & 2 \end{vmatrix}}{1} = (-4+2\lambda)-(3-6\lambda) = -7+8\lambda$$

$$\text{y}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2+\lambda \\ 1 & 1-2\lambda \end{vmatrix}}{1} = (2-4\lambda)-(-2+\lambda) = 4-5\lambda$$

b) Añade una ecuación lineal para que el sistema resultante tenga:

i) una solución

$$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ z=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$$

Rg (A) = Rg (A*) = S.C.D

ii) Muchas soluciones

(Añadimos una ecuación que sea la combinación de las otras dos para no añadir información)

$$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ 3x+5y+z=-1 \end{matrix}$$

iii) no tenga solución

$$\begin{matrix} 2x+3y-z=-2 \\ x+2y+2z=1 \\ x+2y+2z=0 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ Rg(A) < 3} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \text{ Rg (A) = 2} \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \text{ Rg(A*) =3}$$

Rg (A)≠ Rg(A*) Sistema incompatible

9. Discute y resuelve los siguientes sistemas homogéneos.

a) $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ -2x-3y+z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow 2F_1+F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$-3F_1+F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow -F_2+F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Como es homogénea y el rango de la matriz de coeficientes es 3; **x=0, y=0 y z=0.**

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

b) $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ 2y-z=0 \\ -2x+3y-4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow F_1+F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -F_2+F_3 \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow S.C.I.\ hacemos\ t=z \begin{cases} 2x-y=-3t \\ 2y=t \end{cases}$

$y=\frac{t}{2}$; $2x=y-3t=\frac{t}{2}-3t=-\frac{5t}{2}$; $x=-\frac{5t}{4}$ $\quad \boldsymbol{x=-\frac{5t}{4}}$, $\boldsymbol{y=\frac{t}{2}}$, $\boldsymbol{z=t}$

c) $\begin{cases} y=x+3z-y \\ x=z-2y+x \\ z=x-2y-2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-y+3z=0 \\ x-x-2y-2z=0 \\ x-2y-2z-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ -2y+z=0 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow -F_1+$

$F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$

Como es homogénea y el rango de la matriz de coeficientes es 3; **x=0, y=0 y z=0.**

10. Sean las matrices:

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{-y} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y-2} \\ \boldsymbol{-m} \end{pmatrix}, \boldsymbol{D}\begin{pmatrix} \boldsymbol{3x} \\ \boldsymbol{4x} \end{pmatrix}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{4}).$

a) Calcula cada uno de los tres productos $\boldsymbol{A\cdot B, E\cdot D, D\cdot E}$;

$A\cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix}$

$E\cdot D=(1 \quad 4)\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}=(3x+16x)=(19x)$

$D\cdot E=\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}(1 \quad 4)=\begin{pmatrix} 3x & 12x \\ 4x & 16x \end{pmatrix}$

b) Si C-2AB=-D plantea un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas (representadas por x, y) en función de m. ¿Para qué valores de m el sistema tiene solución? ¿Es siempre única?

$\begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} x & 1 \\ x & m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -y \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y-2 \\ -m \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} x-y \\ x-my \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 3x \\ 4x \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y-2-2(x-y)=-3x \\ m-2(x-my)=-4x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y-2-2x+2y+3y=0 \\ m-2x+2my+4x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+2my=-m \end{cases}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2m & -m \end{array}\right) \rightarrow \quad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2m \end{vmatrix}=2\mathrm{m}-6 \quad \rightarrow si\ 2m-6=0 \rightarrow m=\frac{6}{2}=3$

1. Para $m=3$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{array}\right)$ $-2F_1+F_2$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$ El sistema es Incompatible.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

11. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix};C=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix};D=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};E=\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}$$

a) **Sabiendo que $(AB-C)D=2E$, plantea un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas (representadas por x, y, z) en función de a**

$$(AB-C)D=2E\rightarrow\left[\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A\cdot B};\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&0&z\\0&y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\x&y&z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB-C};\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\x&y&z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&-y&-z\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&y&z\\0&y&z\\x&y&z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(AB-C)D};\begin{pmatrix}0&y&z\\0&y&z\\x&y&z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\y+z\\x+y+z\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{2E};2\cdot\begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2a\\2a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{y+z}\\\boldsymbol{y+z}\\\boldsymbol{x+y+z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{2a}\\\boldsymbol{2a}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{y+z=0}\\\boldsymbol{y+z=2a}\\\boldsymbol{x+z+y=2a}\end{cases}$$

b) **¿Para algún valor de a el sistema tiene solución única?**

$$A=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}\rightarrow0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0+0+\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0+0+0=\boldsymbol{0}$$

$$A_a=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&2a\\1&1&2a\end{vmatrix}=0\rightarrow0\cdot\begin{vmatrix}1&2a\\1&2a\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}0&2a\\1&2a\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}=0\rightarrow0-(-2a)+0=0$$

$$\rightarrow-(-2a)=0\ \rightarrow2a=0\rightarrow\boldsymbol{a=0}$$

- $\underline{\boldsymbol{Si\ a\neq0}}$

$rg(A)=2$, ya que es posible encontrar un menor complementario de orden 2 y distinto de cero

$rg(A_a)=3$, ya que es posible encontrar un menor complementario de orden 3 y distinto de cero

$$Como\ rg(A)\neq rg(A_a), no\ tiene\ solución$$

- $\underline{\boldsymbol{Si\ a=0}}$

$$rg(A)=no\ varia\ su\ valor$$

$rg(A_a)=$ no es posible encontrar un menor complementario de orden 3 distinto de cero

$$Como\ rg(A)=rg(A_a)<número\ de\ incógnitas\ tiene\ infinitas\ soluciones$$

El sistema no tiene una única solución, puesto que para ningún valor da un resultado compatible

c) **Para $\boldsymbol{a=0}$ encuentra una solución del sistema con $\boldsymbol{z\neq0}$**

$$Si\ a = 0$$

$$\begin{cases} y+z=0 \\ y+z=0 \\ x+z+y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x+y=-z \end{cases} \rightarrow \{\boldsymbol{x=0; y=-k; z=k}$$

12. El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000€. Averigua el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 101 es el doble que el número de billetes de 20 euros.

$$\begin{cases} x \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 50\ euros \\ y \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 20\ euros \\ z \rightarrow número\ de\ billetes\ de\ 10\ euros \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50x+20y+10z=7000 \\ x+y+z=225 \\ x+z=2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+2y+z=700 \\ x+y+z=225 \\ x+z=2y \end{cases} \quad ordenando\ las\ ecuaciones \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 700 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} -F_1+F_2 \\ -5F_1+F_3 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \\ 0 & -3 & -4 & -425 \end{array}\right) reordenando \rightarrow \begin{cases} x+z+y=225 \\ 4z\ +3y=425 \\ 3y=225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z+y=225 \\ 4z+3y=425 \\ \boldsymbol{y=75} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+z+75=225 \\ 40z+30\cdot 75=425 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+z=150 \\ \boldsymbol{z=50} \end{cases} \rightarrow x+50=150 \rightarrow \boldsymbol{x=100}$$

$$\begin{cases} 100+50+75=225 \\ 4\cdot 50+3\cdot 75=425 \\ 3\cdot 75=225 \end{cases} = \begin{cases} 225=225 \\ 425=425 \\ 225=225 \end{cases} \qquad (x,y,z)=(100{,}75{,}50)$$

$$\boldsymbol{Se\ obtiene\ \rightarrow 100\ billetes\ de\ 50€;\ \ 75\ billetes\ de\ 20€;\ 50\ billetes\ de\ 10€}$$

13. Se dispone de tres billeteras A, B y C con billetes de 10, 20 y 50 euros respectivamente. Si pasamos 5 billetes de B a A, el número de billetes en esta es igual a la suma de los otros dos, pero si pasamos 10 billetes de A a C, el número de billetes en esta también es igual a la suma de los otros dos. Averigua cuántos billetes hay en cada billetera si se sabe que en total hay 1550 euros.

$x \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ A$

$y \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ B$

$z \rightarrow nº\ billetes\ en\ la\ cartera\ C$

$$\begin{cases} x+5=y-5+z \\ z+10=x-10+y \\ 10x+20y+50z=1550 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-y-z=\ -10 \\ -x-y+z=\ -20 \\ 10x+20y+50z=1550 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & -20 \\ 10 & 20 & 50 & 1550 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & -20 \\ 1 & 2 & 5 & 155 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & -30 \\ 0 & 3 & 6 & 165 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-y-z=-10 \\ \quad -2y \quad = -30 \\ \quad 3y+6z=165 \end{cases} \qquad y=15; \quad z=20; \quad x=25$$

SOLUCIÓN: Hay 25 billetes en la billetera A, 15 billetes en la billetera B y 20 billetes en la billetera C.

14. La suma de las tres cifras de un número es 18. La cifra de las unidades es igual a la suma de las decenas más las centenas. Si se invierte el orden de las cifras el número aumenta en 594 unidades. Halla el número.

Datos: Número = xyz

*Escribimos el sistema:

- $x+y+z=18$
- $z=x+y$
- $100z+10y+x=100x+10y+z+594$ (zyx = xyz + 594)

*Lo simplificamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ -99x & 0 & 99z & 594 \end{array}\right) \to 99F_1+F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ 0 & 99y & 198z & 2376 \end{array}\right) \to \frac{1}{99}F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ -x & -y & z & 0 \\ 0 & y & 2z & 24 \end{array}\right)$$

$$\to F_1+F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & 18 \\ 0 & 0 & 2z & 18 \\ 0 & y & 2z & 24 \end{array}\right)$$

*Con F_2 podemos sacar el valor de z: $2z=18;\ z=9$

*Con F_3 sacamos el valor de y: $y+2z=24;\ y=24-18;\ y=6$

*Hallamos el valor de x: $x+y+z=18;\ x=18-9-6;\ x=3$

El número es 369

15- Un examen de Matemáticas II va a consistir en un test de 60 preguntas. Por cada acierto se darán 5 puntos, por cada fallo se quitarán 2 puntos y por cada pregunta no contestada se quitará 1 punto. Para aprobar hay que obtener 150 puntos. ¿Cuántas preguntas habrá que contestar correctamente para obtener los 150 puntos y que el número de fallos más el quíntuple del número de preguntas no contestadas sea igual al número de aciertos?

nº aciertos: x; nº fallos: y; nº no respondidas: z.

Para aprobar se necesitan 150 puntos.

- $x+y+z=60$
- $y+5z=x$
- $5x-2y-z=150$

Textos Marea Verde

$$\begin{pmatrix} x & y & z & | & 60 \\ -x & y & 5z & | & 0 \\ 5x & -2y & -z & | & 150 \end{pmatrix} \to -5F_1+F_3 \begin{pmatrix} x & y & z & | & 60 \\ -x & y & 5z & | & 0 \\ 0 & -7y & -6z & | & 150 \end{pmatrix}$$

$$\to F_2+F_1 \begin{pmatrix} 0 & 2y & 6z & | & 60 \\ -x & y & 5z & | & 0 \\ 0 & -7y & -6z & | & -150 \end{pmatrix} \to F_1+F_3 \begin{pmatrix} 0 & 2y & 6z & | & 60 \\ -x & y & 5z & | & 0 \\ 0 & -5y & 0 & | & -90 \end{pmatrix}$$

*Cogemos F_3 y sacamos el valor de y:

$$y=\frac{90}{5}=18;\ y=18$$

*Hallamos las demás incógnitas:

$$2\cdot 18+6z=60;\ z=\frac{60-36}{6}=4;\ z=4$$

$$x=18+5\cdot 4;\ x=38$$

- Solución: 38 aciertos, 18 fallos y 4 preguntas sin contestar. En total son 230 puntos obtenidos.

16. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne, pescado y verdura:

- **Alimento Migato:600g de carne, 300g de pescado y 100g de verdura**
- **Alimento Catomeal:300g de carne, 400g de pescado y 300g de verdura**
- **Alimento Comecat:200g de carne, 600g de pescado y 200g de verdura**

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470g de carne, 370g de pescado y 160g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada?

Solución:

$x=$ % comida Migato; $y=$ % comida Catomeal; $z=$ % comida Comecat

Una vez determinadas las incógnitas se escribe el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 600x+300y+200z=470 \\ 300x+400y+600z=370 \\ 100x+300y+200z=160 \end{cases}$$

Para resolver el sistema escribimos las matrices asociada y ampliada y hacemos Gauss:

$$\begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | & 470 \\ 300 & 400 & 600 & | & 370 \\ 100 & 300 & 200 & | & 160 \end{pmatrix} \to -F_1+6F_3 \to \begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | & 470 \\ 300 & 400 & 600 & | & 370 \\ 0 & 1500 & 1000 & | & 490 \end{pmatrix} \to -F_1+2F_2 \to$$
$$\begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | & 470 \\ 0 & 500 & 1000 & | & 270 \\ 0 & 1500 & 1000 & | & 490 \end{pmatrix} \to F_3+F_2 \to \begin{pmatrix} 600 & 300 & 200 & | & 470 \\ 0 & 500 & 1000 & | & 270 \\ 0 & 1000 & 0 & | & 220 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} 600x+300y+200z=470 \\ 500y+1000z=270 \\ 1000y=220 \end{cases}$

Despejamos la y: $y=\frac{220}{1000}=0{,}22 \to 0{,}22\cdot\ 100=22\%$

Despejamos la z: $z = \frac{270-110}{1000} = 0{,}16 \to 0{,}16 \cdot\ 100 = 16\%$

Despejamos la x: $X = \frac{470-66-32}{1000} = 0{,}62 \to 0{,}62 \cdot 100 = 62\%$

Entonces, para realizar la mezcla, necesitamos un 62% de Migato, un 22% de Catomeal y un 16% de Comecat.

17. Calcula las edades de una familia (padre, madre e hija), sabiendo que entre los tres suman 70 años, que hace cuatro años la edad del padre era siete veces la de la hija y que dentro de quince años la edad de la hija será la cuarta parte de la suma de las edades del padre y de la madre.
Solución:

$$\mathrm{x} = \text{Edad padre; } \mathrm{y} = \text{Edad madre; } \mathrm{z} = \text{Edad hija}$$

Una vez determinadas las incógnitas se escribe el siguiente sistema y se desarrolla:

$$\begin{cases} \mathrm{x+y+z=70} \\ (\mathrm{x}-4) = 7(\mathrm{z}-4) \\ (\mathrm{z}+15) = \frac{1}{4}\left((\mathrm{x}+15)+(\mathrm{y}+15)\right) \end{cases} \to \begin{cases} x+y+z=70 \\ x-7z=-24 \\ -\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y+z=-\frac{15}{2} \end{cases}$$

Para resolver el sistema escribimos las matrices asociada y ampliada y hacemos Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 70 \\ 1 & 0 & -7 & | & -24 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & | & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \to F_1 - F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 1 & 8 & | & 94 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & | & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$\to \frac{1}{4}F_1 + F_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 70 \\ 0 & 1 & 8 & | & 94 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & | & 10 \end{pmatrix}$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} \mathrm{x+y+z=70} \\ \mathrm{y+8z=94} \\ \frac{5}{4}\mathrm{z}=10 \end{cases}$

Despejamos la z: $\mathrm{z} = \frac{10\cdot 4}{5} = 8$
Despejamos la y: $\mathrm{y} = 94 - 64 = 30$
Despejamos la x: $\mathrm{x} = 70 - 30 - 8 = 32$
Por lo tanto, la edad del padre es 32 años, la de la madre es 30 años y la de la hija 8 años.

18. Una persona invirtió 72000€ repartidos en 3 empresas y obtuvo 5520€ de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa sabiendo que en la empresa B hizo el triple de inversión que en la A y C juntas, y que los beneficios de las empresas fueron del 10% en la empresa A, el 8% en la empresa B y el 5% en la empresa C.

1. Datos:
    a. € invertidos en la empresa A= x
    b. € invertidos en la empresa B= y
    c. € invertidos en la empresa C= z
2. Determinamos el sistema de ecuaciones:

Textos Marea Verde

$$x+y+z=72000$$
$$y=3(x+z)\rightarrow\ -3x+y-3z=0$$
$$0{,}1x+0{,}08y+0{,}05z=5520$$

3. Resolvemos mediante el método de preferencia, en este caso voy a utilizar Rouché–Frobenius.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&72000\\-3&1&-3&0\\0{,}1&0{,}08&0{,}05&5520\end{array}\right)\rightarrow C_2\leftrightarrow C_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&72000\\-3&-3&1&0\\0{,}1&0{,}05&0{,}08&5520\end{array}\right)\rightarrow F_2\leftrightarrow F_3$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&72000\\0{,}1&0{,}05&0{,}08&5520\\-3&-3&1&0\end{array}\right)\rightarrow 3F_1+F_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&72000\\0{,}1&0{,}05&0{,}08&5520\\0&0&4&216000\end{array}\right)\rightarrow -0{,}1F_1+F_2$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&72000\\0&-0{,}05&-0{,}02&-1680\\0&0&4&216000\end{array}\right)$$

a. Como: $r(A)=r(A^{*})=nº\ incógnitas\rightarrow S.C.D$

b. Obtenemos el sistema resultante:

$$x+y+z=72000$$
$$-0{,}02y-0{,}05z=-1680$$
$$4y=216000$$

c. Resolvemos y obtenemos que: $x=6000; y=54000; z=12000$

Invierte 6000€ en la empresa A, 54000€ en la B y 12000€ en la C.

19. Se tienen tres tipos de café: el de la clase A, que cuesta 6 €/kg, el de clase B, que cuesta 8 €/kg y el de la clase C que cuesta 10 €/kg. Se desea hacer una mezcla para vender 80 kg de café a 7 €/kg. ¿Cuántos kg de cada clase se deben poner si del primer tipo debe entrar el doble del segundo más el tercero?

1. Datos:
   a. Kg de café clase A= x
   b. Kg de café clase B= y
   c. Kg de café clase C= z
2. Determinamos el sistema de ecuaciones:

$$x+y+z=80$$
$$6x+8y+10z=560$$
$$x-2y-1z=0$$

3. Resolvemos mediante el método de preferencia, en este caso voy a utilizar Rouché–Frobenius.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&80\\6&8&10&560\\1&-2&-1&0\end{array}\right)\rightarrow -6F_1+F_2\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&80\\0&2&4&80\\1&-2&-1&0\end{array}\right)\rightarrow -F_1+F_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&80\\0&2&4&80\\0&-3&-2&-80\end{array}\right)$$

$$\rightarrow 3F_2+2F_3\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&80\\0&2&4&80\\0&0&4&80\end{array}\right)$$

a. Como $r(A)=r(A^{*})=nº\ incógnitas\rightarrow$ S.C.D

b. Obtenemos el siguiente sistema:

$$x+y+z=80$$
$$2y+4z=80$$
$$4z=80$$

c. Resolvemos y obtenemos que: x = 60; y = 0; z = 20

Debe poner 60 kg del tipo A, ninguno del tipo B y 20 kg del tipo C.

20. Calcula las edades actuales de una madre y sus dos hijos, sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

SOLUCIÓN:

En la siguiente tabla se introducen los datos del problema y sus relaciones:

Edades	Madre	Hijo 1	Hijo 2	Relación
Actual	x	y	z	
Hace 14 años	x-14	y-14	z-14	x-14=5(y-14 + z-14)
Dentro de 10 años	x+10	y+10	z+10	x+10= y+10+z+10
Dentro de (x-y) años		x	42	z+(x-y) =42

El sistema de ecuaciones que resulta es:

$$\begin{cases} x-14=5(y- \\ x+10=y+ \\ z+(x- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-14=5y-70+5z-70 \\ x-y-z=10+10-10 \\ z+x-y=42 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-5y-5z=-126 \\ x-y-z=10 \\ x-y+z=42 \end{cases}$$

Escribimos la matriz C y la Ampliada y resolvemos por el método de Gauss, por eliminación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 1 & -1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 1 & -1 & 1 & 42 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 4 & 6 & 168 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & -126 \\ 0 & 4 & 4 & 136 \\ 0 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right)$$

La última fila de la matriz corresponde a la ecuación:

$$2z=32 \to \boldsymbol{z=16}$$

Con la segunda fila sacamos el valor de la y:

$$4y+4z=136 \to 4y+4\cdot 16=136 \to 4y+64=136 \to \boldsymbol{y=18}$$

Con la primera fila sacamos el valor de la x:

$$x-5y-5z=-126 \to x-5\cdot 18-5\cdot 16=-126 \to \boldsymbol{x=44}$$

Edad de la madre 44 años, el hijo mayor 18 años y el menor 16

21. En una farmacia se comercializan 3 tipos de champú de cierta marca: normal, con vitaminas y anticaspa. Se sabe que el precio al que se vende el normal es de 2 euros y el de vitaminas es de 3 euros. Se desconoce el precio al que se vende el anticaspa. Por otro lado, el dinero total obtenido por las ventas de los 3 tipos de champú el mes pasado fue de 112 euros y el dinero obtenido en ventas con el champú normal fue 56 euros inferior al dinero total obtenido en ventas con el resto. Además,

el dinero total obtenido en ventas con el champú de vitaminas y el anticaspa fue el mismo que el que hubiera obtenido vendiendo 28 unidades del anticaspa y ninguna de los demás.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función del precio desconocido del champú anticaspa, que puedes llamar por ejemplo m) donde las incógnitas (x, y, z) sean las unidades vendidas el mes pasado de cada tipo de champú.

b) ¿Qué puedes concluir sobre el precio del champú anticaspa a partir de un estudio de la compatibilidad del sistema?

c) Si se sabe que el número de unidades vendidas del anticaspa fue 20, utiliza el resultado del apartado (b) para calcular las unidades vendidas de los otros dos.

SOLUCIÓN:

a) Llamamos **m**= precio desconocido del champú anticaspa.
x= unidades vendidas el mes pasado del champú normal.
y= unidades vendidas el mes pasado del champú con vitaminas
z= unidades vendidas el mes pasado del champú anticaspa.

Siguiendo el enunciado del problema se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x + 56 = 3y + mz \\ 3y + mz = 28M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - mz = -56 \\ 3y + mz = 28m \end{cases}$$

b) Se pasa el sistema de ecuaciones a forma matricial y se estudia en función del parámetro m. Para ello se calcula el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & m \\ 2 & -3 & -m \\ 0 & 3 & m \end{vmatrix} = -6m + 6m - (-6m + 6m) = 0 \qquad \text{R(C)= 2 porque } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ahora analizamos el determinante de la ampliada:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 112 \\ 2 & -3 & -56 \\ 0 & 3 & 28m \end{vmatrix} = -168m + 672 - (-336 + 168m) = -336m + 1008$$

$$-336m + 1008 = 0 \rightarrow m = 3$$

- Si m=3, R(C)=2= R(A)=2 $< n^{\text{o}}\ incógnitas. \rightarrow\ S.C.I.$
  Es decir, si el precio del champú anticaspa es 3 euros, habrá infinitas soluciones, es decir, habrá infinitos valores de unidades de champú de cada tipo que puedan venderse y obtener lo que aparece en el enunciado
- Si m$\neq 3, R(C) = 2 \neq R(A) = 3 \rightarrow S.I.$
  Es decir, el precio del champú anticaspa no puede tener un precio diferente a 3 euros porque si no, el sistema de ecuaciones no tendría solución.

c) Z=20 y sabemos que m=3, el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x + 3y + mz = 112 \\ 2x - 3y - mz = -56 \\ 3y + mz = 28m \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 112 \\ 2x - 3y - 3 \cdot 20 = -56 \\ 3y + 3 \cdot 20 = 28 \cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 112 \\ 2x - 3y - 60 = -56 \\ 3y + 60 = 84 \end{cases}$$

De la tercera ecuación despejamos y:

$3y = 84 - 60 \rightarrow y = \frac{24}{3} \rightarrow y = 8$

De la segunda ecuación despejamos x:

$2x - 3 \cdot 8 - 60 = -56 \rightarrow x = \frac{28}{2} \rightarrow x = 14$

14 unidades de champú normal, 8 unidades del de vitaminas y 20 unidades del anticaspa

22. En el trayecto que hay entre su casa y el trabajo, un individuo puede repostar gasolina en tres estaciones de servicio (A, B y C). El individuo recuerda que este mes el precio de la gasolina en A ha sido de 1.20 euros/litro y el precio de la gasolina en B de 1.18 euros/litro, pero ha olvidado el precio de C. (Supongamos que es de *m* euros/litro). También recuerda que:

- la suma del gasto en litros de gasolina en las estaciones A y B superó en 46.80 € el gasto en C.

- el número de litros de gasolina consumidos en B fue el mismo que en C.

- el gasto de litros en A superó al de B en 12.60 euros.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de *m*) para determinar los litros consumidos en cada gasolinera.

Litros en gasolinera A → x ; Litros en gasolinera B → y ; Litros en gasolinera C → z

$$\begin{cases} 1{,}20x + 1{,}18y - mC = 46{,}80 \\ 1{,}18y - mC = 0 \\ 1{,}20x - 1{,}18y = 12{,}60 \end{cases}$$

b) Estudiar la compatibilidad del sistema en función de *m*. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido la gasolina en la gasolinera C?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 1{,}20 & -1{,}18 & 0 & 12{,}60 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 0 & 2{,}36 & m & -34{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}20 & 1{,}18 & -m & 46{,}80 \\ 0 & 1{,}18 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m & -34{,}2 \end{array}\right)$$

$-m = 0 \rightarrow m = 0$

Si m = 0 → Rg(A) ≠ Rg(A*) → Es un sistema incompatible.

Si m ≠ 0 → Rg(A) = Rg(A*) → Es un sistema compatible determinado.

Por lo tanto, es imposible vender la gasolina en la gasolinera C a 0€.

23. En una cafetería los ocupantes de una mesa abonaron 4 € por 2 cafés, 1 tostada y 2 refrescos, mientras que los de la otra mesa pagaron 9 € por 4 cafés, 3 tostadas y 3 refrescos.

a) ¿Cuánto tienen que pagar los clientes de una tercera mesa si han consumido 2 cafés y 3 tostadas?

x → precio del café y →precio de la tostada z → precio del refresco

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 9 \\ 2x + 3y = a \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & (a-4) \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & (a-4) \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-6) \end{array}\right)$$

$a - 6 = 0 \rightarrow a = 6$

Los clientes de la tercera mesa deben pagar 6€.

Textos Marea Verde

b) Con los datos que se dan, ¿se puede calcular cuánto vale un café? Justifica las respuestas.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 4 \\ 4x + 3y + 3z = 9 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como Rg(A) = Rg(A*) $<$ número de incógnitas → Es un sistema compatible indeterminado.

Lo que significa que con los datos que nos dan no podemos calcular el precio del café.

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=6} \\ \boldsymbol{x+2z+2y=5} \\ \boldsymbol{2y-x+z=11} \end{cases}$

1.- Su matriz de coeficientes es:

1)Organizamos el sistema: $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+2y+2z=5 \\ -x+2y+z=11 \end{cases}$

2)Cogemos los coeficientes del sistema:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **Solución:** Opción d

2.- Su matriz ampliada es:

1)Añadimos a la matriz de coeficientes la columna de los términos independientes:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ **Solución:** Opción d

3.- Si aplicamos el método de Gauss la nueva matriz ampliada obtenida es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \underset{F_1+F_2}{\xrightarrow{-F_1+F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3F_2+F_3}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 20 \end{pmatrix}$ **Solución:** Opción d

4.- El sistema es:

1) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$, como no puede ser mayor, el $Rg(A^*)$ también es 3

2) Como sabemos que este sistema tiene 3 incógnitas; tenemos que:

$Rg(A) = Rg(A^*) = Nº\ incógnitas = 3$; luego es un S.C.D

Solución: Opción a

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \boldsymbol{2x-y=-4y} \\ \boldsymbol{5+2y+z=3x} \end{cases}$

5.- Su forma matricial es:

1) Organizamos el sistema: $\begin{cases} 2x+3y=0 \\ -3x+2y+z=-5 \end{cases}$

Textos Marea Verde

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$ **Solución:** Opción b

6.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible determinado:

Solución: Opción b

$$b)\ x - y = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1)Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [0 + 0 + 3] - [0 + (-2) + 0] = 5 \neq 0; R(A) = 3$$

2)Rango de la matriz ampliada también 3: $Rg(A^*) = 3$.

$Como\ Rg(A) = Rg(A^*) = 3 = nº\ de\ incógnitas; luego\ es\ un\ S.C.D$

7.- Al añadir la ecuación indicada el sistema es compatible indeterminado:

Solución: Opción c

$$\mathrm{c)} - \mathrm{x} + 5\mathrm{y} + \mathrm{z} = -5$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

1) Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = [4 + 0 - 3] - [0 + 10 - 9] = 0; Rg(A) = 2$$

2)Rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}F_1+F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1+F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1F_2+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; Rg(A^*) = 2$$

$Rg(A) = Rg(A^*) = 2 < nº\ de\ incógnitas\ = 3; luego\ es\ un\ S.C.I$

8.-Al añadir la ecuación indicada el sistema es incompatible:

Solución: Opción a)

$$a)3y + 2x = 7$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Rango de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = [0+0+6]-[0+6+0] = 0; Rg(A) = 2$$

2) Rango de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1F_1+F_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}F_1+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 13/2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; Rg(A^*) = 3$$

$$Rg(A) \neq Rg(A^*); luego\ es\ un\ sistema\ incompatible.$$

9.- Indica la afirmación que es correcta:

Solución: c) Un sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Esto es el teorema de Rouché-Frobenius.

$$Sistema\ compatible\ \leftrightarrow R(C) = R(A)$$

Textos Marea Verde
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 4: Vectores

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Calcula las componentes y el módulo de un vector de origen A(-1, 1, 2) y extremo B(3, 1, -4).

$\overrightarrow{OB} = (3, 1, -4)$ $\overrightarrow{OA} = (-1, 1, 2)$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4, 0, -6)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$

2. Dados los puntos P = (2, 2, 3), Q = (2, 0, 5) y R = (-2, 3, 4) y los vectores $\vec{v} = (1, -1, 3)$, $\vec{w} = (0, -2, 1)$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

$\mathbf{a)}\ \overrightarrow{\mathbf{QP}}$ $\mathbf{b)}\ 3\vec{\mathbf{v}} - 2\vec{\mathbf{w}}$ $\mathbf{c)}\ \vec{\mathbf{v}} - \overrightarrow{\mathbf{RP}}$ $\mathbf{d)}\ \mathbf{P} + \vec{\mathbf{v}}$ $\mathbf{e)}\ \mathbf{R} + \overrightarrow{\mathbf{PQ}} + \vec{\mathbf{w}}$

$a)\ \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (1, 2, -2)$ Vector.

$b)\ 3\vec{v} - 2\vec{w} = (3, 1, 7)$ Vector. $3\vec{v} = (3, -3, 9)$ $2\vec{w} = (0, -4, 2)$

$c)\ \vec{v} - \overrightarrow{RP} = (-3, 0, 4)$ Vector. $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = (4, -1, -1)$

$d)\ P + \vec{v} \rightarrow$ No se puede operar con un punto y un vector.

$e)\ R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w} \rightarrow$ No se puede operar con un punto y un vector.

3. Dados tres puntos genéricos, P = (p_1, p_2, p_3), Q = (q_1, q_2, q_3) y R = (r_1, r_2, r_3), demuestra:

$\boldsymbol{a)}\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{QR}} = \overrightarrow{\boldsymbol{PR}}$ $\boldsymbol{b)}\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = (-1)\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}$ $\boldsymbol{c)}\overrightarrow{\boldsymbol{PP}} = \vec{\mathbf{0}}$ $\boldsymbol{d)}\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} + \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = 2\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$

$\boldsymbol{a)}\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{PQ}(Q - P) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ $\overrightarrow{QR}(R - Q) = (r_1 - q_1, r_2 - q_2, r_3 - q_3)$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) += (r_1 - q_1, r_2 - q_2, r_3 - q_3) = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$

$\overrightarrow{PR}(R - P) = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$

$\boldsymbol{b)}\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{PQ}(Q - P) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

$(-1)\overrightarrow{QP}(P - Q) = (p_1 - q_1, p_2 - q_2, p_3 - q_3)(-1);$

$(-1)\overrightarrow{QP}(P - Q) = (-p_1 + q_1, -p_2 + q_2, -p_3 + q_3)$

$\boldsymbol{c)}\overrightarrow{PP} = \vec{0}$

$\overrightarrow{PP} = (p_1 - p_1, p_2 - p_2, p_3 - p_3) = (0, 0, 0)$

$\boldsymbol{d)}\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PQ}(Q - P) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) + (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) = (2q_1 - 2p_1, 2\,q_2 - 2p_2, 2\,q_3 - 2p_3) = 2\overrightarrow{PQ}$

4. Dados los vectores $\vec{u}$(1, -3, 0) , $\vec{v}$ (-6, 3, 0), $\vec{w}$ (7, 2, 1).

$\mathbf{a)}\ 3\vec{\mathbf{u}} - 2\vec{\mathbf{v}} + 5\vec{\mathbf{w}}$

$3\vec{u} = (3, -9, 15)$; $-2\vec{v} = (12, -6, 0)$; $5\vec{w} = (35, 10, -5)$

$3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w} = (50, -5, 10)$

$\mathbf{b)}\ 2\vec{\mathbf{u}} - 2\vec{\mathbf{v}} + 2\vec{\mathbf{w}}$

$2\vec{u} = (2, -6, 0)$; $-2\vec{v} = (12, -6, 0)$; $2\vec{w} = (14,\ 4\,, -2)$

$2\vec{u} - 2\vec{v} + 2\vec{w} = (28, -8, 8)$

Textos Marea Verde

c) $\mathbf{3(\vec{u}-2\vec{v})+3\vec{w}}$
$3\vec{u}=(3,-9,15)$; $-6\vec{v}=(36,-18,0)$; $3\vec{w}=(21,6,-3)$
$3(\vec{u}-2\vec{v})+3\vec{w}=(60,-21,12)$
d) $\mathbf{3\vec{u}-2(\vec{v}+\vec{w})}$
$3\vec{u}=(3.-9,15)$; $-2\vec{v}=(12,-6,0)$; $2\vec{w}=(14,\ 4\ ,-2)$
$3\vec{u}-2(\vec{v}+\vec{w})=(1,-19,17)$

5. Dados los puntos A(0, -2, 6) y B(4, 8, -4) determina el punto medio del segmento AB.
$M=\frac{A+B}{2}$ $M(x,y,z)=\left(\frac{0+4}{2},\frac{-2+8}{2},\frac{6-4}{2}\right)=M(2,3,5/2)$

6. Comprueba si los puntos A (3, 2, 1), B(4, 4, 2) y C (4, -1, 3) están alineados.
Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son proporcionales estarán alineados
$\frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}=\frac{b_2-a_2}{c_2-a_2}=\frac{b_3-a_3}{c_3-a_3}$; $\frac{4-3}{4-3}=\frac{4-2}{-1-2}=\frac{-2-1}{3-1}$; $1\neq\frac{2}{-3}\neq-\frac{3}{2}$
Al no ser proporcionales no están alineados.

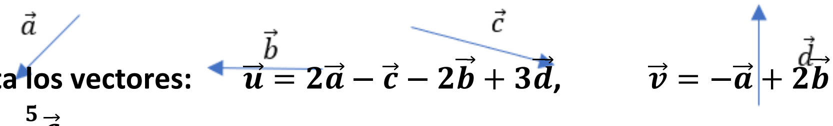
7. Determina si son linealmente independientes o no los conjuntos de vectores siguientes:
$\boldsymbol{A=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}, con\ \vec{u}=(1,2,0),\vec{v}=(3,0,1)\ y\ \vec{w}=(4,2,-7).}$
$$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&1\\4&2&-7\end{pmatrix}\text{-3F}_1\text{+F}_2\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&0\\4&2&-7\end{pmatrix}\text{-4F}_1\text{+F}_3\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&0\\0&-6&-7\end{pmatrix}\text{-F}_2\text{+F}_3\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&0\\0&0&-7\end{pmatrix}$$
Como el rango es 3 este conjunto de vectores es independiente.
$B=\{\vec{u},\vec{v}\}, con\ \vec{u}=(1,2,0)\ y\ \vec{v}=(2,4,0).$
$$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\end{pmatrix}\text{-2F}_1\text{+F}_2\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
Como el rango es 1 este conjunto de vectores es dependiente.
$\mathbf{C=\{\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{x}\},\ con\ \vec{u}=(1,2,0),\vec{v}=(4,1,3)\ y\ \vec{w}=(4,2,-7)\ y\ \vec{x}=(0,0,1).}$
Al ser un conjunto de cuatro vectores en un espacio de tres dimensiones son linealmente dependientes.

8. Calcula el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{\vec{u}=(0,1,-3)\ y\ \vec{v}=(-3,4,6)}$
$\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,1,-3)\cdot(-3,4,6)=0(-3)+1\cdot4+6(-3)=\ -14$
El producto escalar es -14.

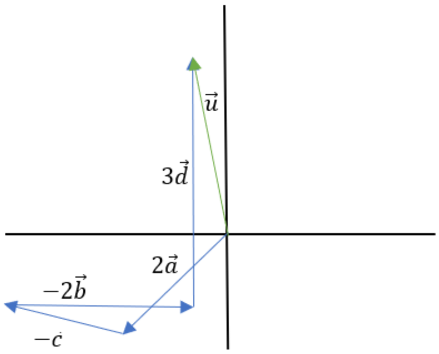
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

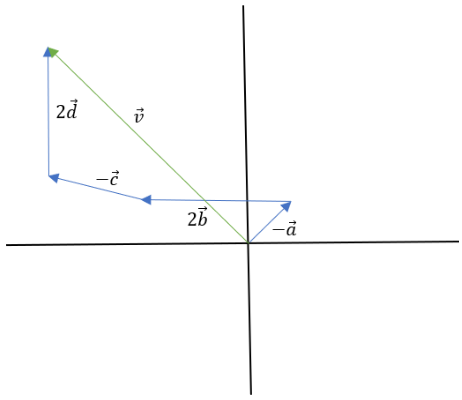
EJERCICIOS Y PROBLEMAS

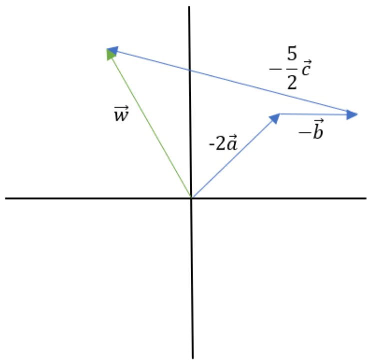
1. Dados los vectores libres:



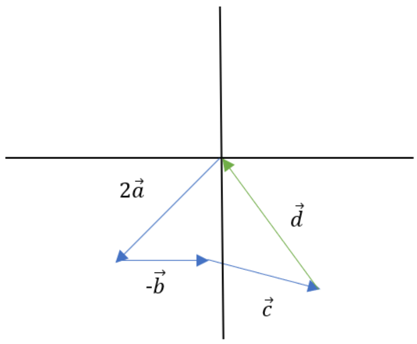
a) **Representa los vectores:** $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{c} - 2\vec{b} + 3\vec{d}$, $\vec{v} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{d}$, $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b} - \frac{5}{2}\vec{c}$







b) **Halla un vector $\vec{d}$ tal que $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$**



2. Dados $\underline{a} = (2, -1)$ y $\underline{b} = (-3, m)$, halla el valor de m para que sean linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & m \end{vmatrix} = 0;\ 2m - (+3) = 2m - 3 = 0; \quad m = \frac{3}{2}$$

3. Comprueba si son o no linealmente independientes los siguientes vectores:

a) $\underline{u} = (-2,3)$ y $\underline{v} = (6,-9)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-9) - 3\cdot 6 = 18\cdot(-18) = 0$$

Son linealmente dependientes ya que su determinante es igual a 0.

b) ▯ $= (-1,2,3)$, ▯$(-2,0,1)$, ▯ $= (2,-4,5)$ ▯ ▯ $= (3,2,-4)$

Son linealmente dependientes, ya que son 4 vectores dados en un espacio de 3 dimensiones, por lo que al menos 1 será dependiente de otro.

c) ▯ $= (2,1,0,\ -1)$, ▯$(1,\ -3,\ -1,0)$, ▯ $= (3,-2,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F1-2F2 \\ F1+2F2 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} F2+7F3 \\ -2F2+7F3 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$$

Los vectores son linealmente independientes entre sí, pues el rango de la matriz es 3.

4. a) Dado los vectores $\vec{x} = (1,3,-2)$ *e* $\vec{y} = (3,m,-6)$, halla el valor de m para que los dos vectores sean linealmente independientes.

$$\begin{matrix} \vec{x} = (1,3,-2) \\ \vec{y} = (3,m,-6) \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & m & -6 \end{pmatrix} \to -3\cdot F_1 + F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3-3 & m-9 & -6+6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & m-9 & 0 \end{pmatrix} \qquad * \ m - 9 = 0 \to m = 9$$

- **Si m ≠ 9 son independientes.** **Si m = 9 son dependientes.**

b) Si $m = -2$, ¿ Se puede expresar el vector $\vec{z} = (-1,8,1)$ como combinación lineal de $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$?

$$\vec{z} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} \to (-1,8,1) = a\cdot(1,3,-2) + b\cdot(3,\mathbf{-2},-6)$$

$$\left.\begin{matrix} -1 = a\cdot 1 + 3b \\ 8 = 3a - 2b \\ 1 = -2a - 6b \end{matrix}\right\} \to \frac{\begin{matrix} -3\cdot(a+3b=1) \\ 1\cdot(3a-2b=8) \end{matrix}}{0-11b=11} \to \cdot\, b = -1$$

$1 = -2a + 6 \to a = 5/2 \qquad 8 = 3a + 2 \to a = 2 \qquad -1 = \mathrm{a} - 3 \to \mathrm{a} = 2$

- El vector $\vec{z}$ no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ si m = -2.

5. Dados los vectores $\vec{u} = (-3,4,0)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$ *y* $\vec{w} = (0,-m,1)$, calcula el valor de m para que el vector $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\vec{u} = a\cdot\vec{v} + b\cdot\vec{w} \ \to \ (-3,4,0) = a\cdot(1,-2,2) + b\cdot(0,-m,1)$$

1º. Realizamos un sistema de ecuaciones y lo resolvemos;

$$\left.\begin{matrix} -3 = a \\ 4 = -2a - mb \\ 0 = 2a + b \end{matrix}\right\} \ \to \ a = -3$$

$$b = -2\cdot -3 \ \to \ b = 6$$

$$\vec{u} = -3\cdot\vec{v} + 6\cdot\vec{w} \ \to \ (-3,6,-6)^{es\ \vec{v}\cdot -3} + (0,6\cdot m,6)^{es\ \vec{w}\cdot 6}$$

Para que $\vec{u}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, m debe de ser $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$.

6. Dados los vectores $\vec{x} = (1,-2,0)$, $\vec{y} = (3,-1,2)$ *y* $\vec{w} = (-m,-1,-2)$, halla el valor de m para que los tres vectores sean linealmente dependientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -m & -1 & -2 \end{pmatrix} \to F2 \leftrightarrow F3 \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -m & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to C1 \leftrightarrow C2 \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -m & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow \begin{matrix} -2\cdot F2+F1 \\ -2\cdot F3+F1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1+2m & 4 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow F2+F3 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1+2m & 4 \\ 0 & -4+2m & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C2 \leftrightarrow C3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1+2m \\ 0 & 0 & -4+2m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1+2m \\ 0 & 0 & -4+2m \end{pmatrix} \rightarrow -4+2m=0 \rightarrow m=2$$

- Si m $\neq$ 2; Independientes. Si m = 2; Dependientes.

7. Dados los vectores $\bar{u}=(1,1,m), \bar{v}=(0,m,-1)$ y $\bar{w}=(1,2m,0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = (0+0-1)-(m^2-2m+0) = -1-m^2+2m$$

Luego:

$$-1-m^2+2m=0;\ \ -m^2+2m-1=0;\ \ m^2-2m+1=0\ \rightarrow m=1\ doble$$

Si $m\neq 1$ son linealmente independientes

b) El vector $\bar{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{w}$, y halla dicha combinación.

$\bar{v}=a\bar{u}+b\bar{w}$

$(0,m,-1)=a(1,1,m)+b(1,2m,0)$

$(0,m,-1)=(a,a,am)+(b,2mb,0)$

$(0,m,-1)=(a+b,a+2mb,am)$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a+2mb=m \\ am=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-b \\ -b+2mb=m \\ -bm=-1 \end{cases} \rightarrow m=\frac{1}{b} \rightarrow -b+2=\frac{1}{b} \rightarrow -b^2+2b-1=0$$

$b=1; a=-1; m=1$

c) Sean coplanarios

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \end{vmatrix} = (0+0-1)-(m^2-2m+0) = -1-m^2+2m$$

Luego:

$-1-m^2+2m=0;\ \ -m^2+2m-1=0;\ \ m^2-2m+1=0\ \rightarrow m=1$

8. Los vectores $\bar{x}=(1,0,0), \bar{y}=(-1,0,1)$ y $\bar{z}=(2,1,1)$, ¿forman una base V^3? En caso afirmativo:

a)Halla las componentes del vector $\bar{u}=(3,-2,5)$ respecto de dicha base.

b)Halla las componentes de la base canónica $\{\bar{\imath},\bar{\jmath},\bar{k}\}$ del vector $\bar{v}$, si sus coordenadas en la base $\{\bar{x},\bar{y},\bar{z}\}$ son 2, -3 y 2 respectivamente

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0+0+0)-(0+1+0) = -1 \neq 0$$

Como el determinante no es nulo, el rango es 3, son vectores linealmente independientes y por tanto sí forman una base V^3

A)

$\bar{u}=x(1,0,0)+y(-1,0,1)+z(2,1,1)$

$(3,-2,5)=(x,0,0)+(-y,0,y)+(2z,z,z)$

$(3,-2,5)=(x-y+2z,z,y+z)$

$$\begin{cases} x-y+2z=3 \\ z=-2 \\ y+z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} y=5-z \\ y=5-(-2) \\ y=7 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x-7+2(-2)=3 \\ x=3+7+4 \\ x=14 \end{matrix} \rightarrow \bar{\boldsymbol{u}}=(14,7,-2)$$

B)

$\bar{v} = \overline{\mathbf{2x}} - \mathbf{3\bar{y}} + \mathbf{2\bar{z}} = 2(1,0,0) - 3(-1,0,1) + 2(2,1,1)$

$\bar{v} = (2,0,0) - (-3,0,3) + (4,2,2)$

$\bar{v} = (9, 2, -1)$

9. Halla un punto C que esté alineado con A y B, y otro punto D que no lo esté.

(respuesta libre)

Para que los tres puntos estén alineados se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{c_2 - a_2} = \frac{b_3 - a_3}{c_3 - a_3}$$

Luego, por ejemplo, si tomamos como puntos $C\left(\frac{7}{2}, 3, -\frac{1}{2}\right), A(3,2,1)\ y\ B(4,4,-2)$

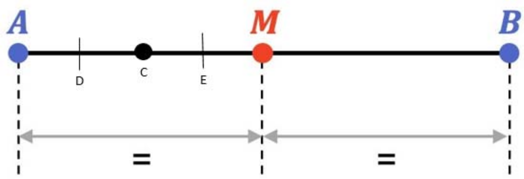
$$\frac{4-3}{\frac{7}{2}-3} = \frac{4-2}{3-2} = \frac{-2-1}{-\frac{1}{2}-1} \rightarrow 2 = 2 = 2 \rightarrow Están\ alineados$$

Si $D(4,-1,6)$

$$\frac{4-3}{4-3} = \frac{4-2}{-1-2} = \frac{-2-1}{6-1} \rightarrow 1 \neq -\frac{2}{3} \neq -\frac{3}{5} \rightarrow No\ están\ alineados$$

10. De un segmento $\overline{AB}$, el punto B tiene coordenadas (-2,0,6) y el punto medio del segmento tiene coordenadas M(-3,2,2). Halla las coordenadas del punto A y divide el segmento $\overline{AM}$ en cuatro partes iguales.

$$(-3,2,2) = \left(\frac{x_1+(-2)}{2}, \frac{y_1+0}{2}, \frac{z_1+6}{2}\right) \qquad \begin{cases} \frac{x_1+(-2)}{2} = -3;\ x_1 = -4 \\ \frac{y_1+0}{2} = 2;\ y_1 = 4 \\ \frac{z_1+6}{2} = 2;\ z_1 = -2 \end{cases} \rightarrow A(-4,4,-2)$$



$$C = \left(\frac{-4-3}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \rightarrow C(-3.5\ , 3{,}0)$$

$$D = \left(\frac{-4-3.5}{2}, \frac{4+3}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) \rightarrow D(-3.75\ , 3.5\ , -1) \qquad E = \left(\frac{-3.5-3}{2}, \frac{3+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \rightarrow E(-3.25\ , 2.5, 1)$$

11. De un segmento AB , se sabe que AB = (3,–4,–2) y que el punto medio del segmento tiene de coordenadas M (–1,0,3). Halla las coordenadas de A y B y divide el segmento AB en 3 partes iguales

A(x_1, y_1, z_1) ; B(x_2, y_2, z_2) $\quad por\ AB: \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = -4 \\ z_2 - z_1 = -2 \end{cases} ;\ por\ M: \begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} = -1 \\ \frac{y_2+y_1}{2} = 0 \\ \frac{z_2+z_1}{2} = 3 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow x_2 = 3 + x_1 \rightarrow x_1 + 3 + x_1 = -2 \rightarrow 2x_1 = -5 \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-5}{2} \quad \rightarrow \quad x_2 + \frac{5}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = -4 \\ y_2 + y_1 = 0 \end{cases} \rightarrow y_2 = -4 + y_1 \rightarrow -4 + y_1 + y_1 = 0 \rightarrow$$
$$-4 + 2y_1 = 0 \rightarrow 2y_1 = 4 \rightarrow \quad y_1 = 2 \quad \rightarrow \quad y_2 - 2 = -4 \quad \rightarrow \quad y_2 = -2$$

$$\begin{cases} z_2 - z_1 = -2 \\ z_2 + z_1 = 6 \end{cases} \rightarrow z_2 = -2 + z_1 \rightarrow -2 + z_1 + z_1 = 6 \rightarrow -2 + 2z_1 = 6 \rightarrow$$

$$2z_1 = 8 \rightarrow z_1 = 4 \rightarrow z_2 - 4 = -2 \rightarrow z_2 = 2$$

$$A\left(-\tfrac{5}{2},\ 2,\ 4\right) \quad B\left(\tfrac{1}{2}, -2,\ 2\right) \qquad \overrightarrow{AB}(3, -4, -2)$$

Sean P y Q los puntos que dividen AB en 3 partes iguales,

$$3\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}\ ;\ 3\left(x + \tfrac{5}{2},\ y - 2,\ z - 4\right) = (3, -4, -2) \rightarrow P = \left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{10}{3}\right)$$

$$3\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB} \ \rightarrow 3(\tfrac{1}{2} - x, -2 - y,\ 2 - z) = (3, -4, -2) \rightarrow Q = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{8}{3}\right)$$

12. - Dados los puntos A (2,0,1) y B (0,–2,3), halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro (D) esté situado a la izquierda de A.

$$M = \frac{A+B}{2} \rightarrow M = \frac{(2,0,1)+(0,-2,3)}{2} \rightarrow M\,\frac{(2,-2,4)}{2} \rightarrow M\left(1, -1, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{D+C}{2} = A \rightarrow D = (A - C)\cdot 2 \rightarrow D = \left((2,0,1) - \left(1, -1, \tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot 2 \rightarrow D = (2,2,-1)$$

13. De los vectores u ρ y v ρ se sabe que u = 3 ρ , u · v = –12 ρ ρ y los dos vectores forman un ángulo de 120°. Halla v ρ , proy u v ρ ρ y proy 2 u ρ ρ v .

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\overline{u}|\cdot|\overline{v}|\cdot cos\alpha \rightarrow -12 = 3\cdot|\overline{v}|\cdot\cos 120 \rightarrow \frac{-12}{3\cdot\cos 120} = |\overline{v}| \rightarrow |\overline{v}| = 8$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\overline{v}|\cdot proy_{\overline{v}}\overline{u} = -12 = 8\cdot proy_{\overline{v}}\overline{u} \rightarrow proy_{\overline{v}}\overline{u} = -\frac{3}{2}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\overline{u}|\cdot proy_{\overline{u}}\overline{v} \rightarrow -12 = 3\cdot proy_{\overline{u}}\overline{v} \rightarrow proy_{\overline{u}}\overline{v} = -4$$

14. ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 8 siendo $|\vec{u}\,| = 3\ y\ |\vec{v}\,| = 2$?

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 8 $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}\,|\cdot|\vec{v}\,|\cdot\cos\alpha$; $\quad 8 = 3\cdot 2\cdot\cos\alpha \quad \rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{3}$

El coseno de un ángulo no puede ser > 1 , luego no puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = 8 siendo $|\vec{u}\,| = 3\ y\ |\vec{v}\,| = 2$.

15. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 6)\ \ y\ \ \vec{v} = (3, -6, 2)$, calcula:
a) El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}$
c) El ángulo formado por ellos
d) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{u} - \vec{v}$
e) Un vector perpendicular a $\vec{v}$ que tenga módulo 3. ¿Cuántas soluciones hay?

a) producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 3 + (-3)(-6) + 6\cdot 2 = 36$

b) $|\vec{u}\,| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7 \qquad |\vec{v}\,| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = 7$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$; $\alpha = \arccos(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|})$; ; $\alpha = \arccos(\frac{36}{7\cdot 7}) = 42{,}71°$

d) $\vec{u}-\vec{v} = (-1,3,3)$ $|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+3^2+3^2} = \sqrt{10}$

$\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 10$ $\alpha = \arccos(\frac{10}{7\cdot\sqrt{10}}) = 63{,}14°$

e) $\vec{w}(a,b,c)$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

$\begin{cases} 3a-6b+2c=0 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=3 \end{cases}$; $\begin{matrix} 3a-6b+2c=0 \\ a^2+b^2+c^2=9 \end{matrix}$

Al ser la representación de un plano (primera ecuación) que corta a una esfera (segunda ecuación), vemos que hay infinitas soluciones donde el vector perpendicular a $\vec{v}$ tenga módulo 3. Obtenemos una circunferencia.

16. Dados los vectores $\vec{u} = (1,-2,2)$ y $\vec{v} = (4,-4,-2)$, calcula:

a) El producto escalar $2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$

b) El módulo de $\vec{u}$ y el módulo de $\vec{v}-\vec{u}$

c) El ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}+\vec{v}$

d) Los cosenos directores de $\vec{v}$

e) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$ que tenga módulo 6.

a) $\overrightarrow{2u}\cdot 3\vec{v}$ $\overrightarrow{2u} = (2,-4,4)$ $\overrightarrow{3v} = (12,-12,-6)$ $\overrightarrow{2u}\cdot 3\vec{v} = 48$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ $\vec{v}-\vec{u} = (3,-2,-4)$; $|\vec{v}-\vec{u}| = \sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{29}$

c) $\alpha = \arccos(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}-\vec{u}|}$; $\arccos(\frac{-1}{3\cdot\sqrt{29}} = 86{,}6°$

d) $\cos\alpha = \frac{V_1}{|\vec{V}|}$; $\cos\beta = \frac{V_2}{|\vec{V}|}$; $\cos\gamma = \frac{V_3}{|\vec{V}|}$ $|\vec{V}| = \sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2} = 6$

$\cos\alpha = \frac{4}{6}$; $\cos\beta = \frac{-4}{6}$; $\cos\gamma = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

e) $\vec{u}\,x\,\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 12i+10j+4k \to (12,10,4)$; $(12k,10k,4k)$

$\sqrt{(12k)^2+(10k)^2+(4k)^2} = 6$; $144k^2+100k^2+16k^2 = 36$; $280k^2 = 36$

$k = \sqrt{\frac{36}{280}} = \frac{3\sqrt{70}}{70}$ $\vec{w} = (12\cdot\frac{3\sqrt{70}}{70}, 10\cdot\frac{3\sqrt{70}}{70}, 4\cdot\frac{3\sqrt{70}}{70})$

17. Calcula las componentes de un vector $\vec{v}$ que tenga la misma dirección que el vector $\vec{u} = (4,-2,1)$ y su módulo sea 3 y las de otro vector $\vec{w}$ que sea unitario, pero con sentido opuesto al vector $\vec{u}$. ¿Cuáles son los cosenos directores de $\vec{u}$?

a) Primero: Para que dos vectores tengan la misma dirección, deben ser proporcionales, es decir, $\boldsymbol{\vec{v} = k\,\vec{u}}$. Por lo tanto, $\vec{v} = k(4,-2,1) \to \vec{v} = (4k,-2k,k)$

Segundo: Si queremos que su módulo sea 3, se debe cumplir que:

$$\sqrt{(4k)^2+(-2k)^2+k^2} = 3 \to \sqrt{21}k = 3 \to k = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Tercero: Sustituir: $\boldsymbol{\vec{v} = \left(\frac{4\sqrt{21}}{7}, -\frac{2\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7}\right)}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

b) Primero: Para que sea unitario y con sentido contrario a $\vec{u}$, se debe cumplir que:

$\vec{w} = -\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$

Segundo: Se calcula $|\vec{u}| \to |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$

Tercero: Se sustituye y calcula: $\boldsymbol{\vec{w}} = \left(-\frac{\mathbf{4}}{\sqrt{\mathbf{21}}}, \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{21}}}, -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{21}}}\right)$

c) Primero: Los cosenos directores de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son:

$$cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}};\ cos\beta = \frac{v_2}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}};\ cos\gamma = \frac{v_3}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}};$$

Segundo: Sustituyendo los valores del vector $\vec{u}$:

$$\boldsymbol{cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{21}};\ cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{21}};\ cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{21}}}$$

18. Los cosenos directores del vector $\boldsymbol{\vec{u}}$ son: $\boldsymbol{cos\alpha = 0,2;\ cos\beta = 0,3\ y\ cos\gamma = 0,87}$. Si $|\boldsymbol{\vec{u}}| = \mathbf{6}$, ¿cuáles son sus componentes?

Primero: Los cosenos directores de un vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son:

$$cos\alpha = \frac{v_1}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}};\ cos\beta = \frac{v_2}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}};\ cos\gamma = \frac{v_3}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}};$$

Segundo: Sustituimos los valores del vector $\boldsymbol{\vec{u}}$: $0,2 = \frac{u_1}{6};\ 0,3 = \frac{u_2}{6};\ 0,87 = \frac{u_3}{6}$

Tercero: Despejamos las componentes: $u_1 = 1,2;\ u_2 = 1,8; u_3 = 5,22 \to$

$\vec{u}$ =(1,2 , 1,8 , 5,22)

19. Un vector $\boldsymbol{\vec{u}}$ forma con los vectores $\boldsymbol{\vec{u}_2}$ y $\boldsymbol{\vec{u_3}}$ de la base ortonormal ángulos de 45º y 60º, y con el vector $\boldsymbol{\vec{u}_1}$ un ángulo agudo. Si $|\boldsymbol{\vec{u}}| = \mathbf{4}$, determina las componentes del vector $\boldsymbol{\vec{u}}$.

Primero: Los ángulos dados corresponden a los de los cosenos directores, de modo que:

$$cos\alpha = \frac{u_1}{|\vec{u}|};\ cos\beta = \frac{u_2}{|\vec{u}|};\ cos\gamma = \frac{u_3}{|\vec{u}|};$$

Segundo: Se sustituyen los valores y se despejan las coordenadas:

$$cos\beta = \frac{u_2}{|\vec{u}|} \to cos45º = \frac{u_2}{4} \to \boldsymbol{u_2 = 2\sqrt{2}}$$

$$cos\gamma = \frac{u_3}{|\vec{u}|} \to cos60º = \frac{u_3}{4} \to \boldsymbol{u_3 = 2}$$

Tercero: u_1 se calcula con el módulo del vector:

$$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = 4 \to 16 = {u_1}^2 + 8 + 4 \to \boldsymbol{u_1 = 2}$$

$\boldsymbol{\vec{u} = (2,\quad 2\sqrt{2},\quad 2)}$

20. Determina, si es posible, el valor de *m* de modo que $\boldsymbol{\vec{u} = (m, -2, 3)}$ y $\boldsymbol{\vec{v} = (-1, m, 1)}$ sean:

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

a) Primero: Para que dos vectores sean paralelos deben ser proporcionales: $\vec{u} = k\,\vec{v}$.
Segundo: Aplicamos lo anterior a los vectores dados:
$(m, -2, 3) = k(-1, m, 1) \to m = -k; -2 = km; 3 = k.$
Si k=3, m debería tener dos valores distintos, $m = -3\ y\ m = -2/3$ lo cual no es posible, por tanto, no pueden ser paralelos.

b) Primero: Para que dos vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
Segundo: Aplicamos lo anterior a los vectores dados:
$(m, -2,3) \cdot (-1, m, 1) = 0 \to -m - 2m + 3 = 0 \to \boldsymbol{m = 1}$

21. a) Calcula el valor de m para que los vectores $\bar{u} = (-1, m, 4)$ y $\bar{v}(m, -3, 2)$ sean perpendiculares.

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \qquad -m - 3m + 8 = 0 \qquad -4m = -8 \qquad m = 2$

b) ¿Qué ángulo formarán para m = 0 los vectores $(\bar{u} + 2\bar{v})\ y\ (\bar{u} - \bar{v})$?

$\bar{u} = (-1, 0, 4)\ ;\ \bar{v} = (0, -3, 2)$
$(\bar{u} + 2\bar{v}) = (-1 + 0, 0 - 6, 4 + 4) = (-1, -6, 8) = \bar{a}$
$(\bar{u} - \bar{v}) = (-1 - 0, 0 + 3, 4 - 2) = (-1, 3, 2) = \bar{b}$

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{|(-1 \cdot (-1)) + (-6 \cdot 3) + (8 \cdot 2)|}{\sqrt{1 + 6^2 + 8^2} \cdot \sqrt{1 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 18 + 16|}{\sqrt{1 + 36 + 64} \cdot \sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{101} \cdot \sqrt{14}};$$

$$ángulo = 1{,}54419\ radianes = 88{,}476\ grados$$

22. De dos vectores ortogonales se sabe que $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = 7\ y\ |\bar{u} + \bar{v}| = 5$. Halla $|\bar{u}|\ y\ |\bar{v}|$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$
$(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{v} = 7 \to |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 7$
$|\bar{u} + \bar{v}| = 5\ ;\ \sqrt{((\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}))} = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{v} - \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{v}} = 5$
$|\bar{u}|^2 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 = 25 \to |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 = 25$

$$\left.\begin{aligned} |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 7 \\ |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 = 25 \end{aligned}\right\} +$$

$2|\bar{u}|^2 = 32\ ;\ |\bar{u}|^2 = 16;\ |\bar{u}| = 4$
$|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 = 25;\ \ 16 + |\bar{v}|^2 = 25\ ;\ |\bar{v}|^2 = 9;\ |\bar{v}| = 3$

23. Dados dos vectores $\bar{u}\ y\ \bar{v}$, tales que $|\bar{u}| = 16$ y $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} - \bar{v}) = 24$, Calcula el módulo de $\bar{v}$

$|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}\ ; \quad \bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2 \quad ; \quad |\bar{u}| = \bar{u} \cdot \bar{v}\ ; \quad 16^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}$
$\bar{u} \cdot \bar{u} - \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{v} \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{v} = 24$
$16^2 - |\bar{v}|^2 = 24\ ; \qquad |\bar{v}|^2 = 16^2 - 24 \qquad |\bar{v}|^2 = 232\ ; \qquad |\bar{v}| = \sqrt{232}$

24. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 8)$ y $\vec{v} = (-1, 2, 0)$ calcula:

a) Las componentes de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{v}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} \to \quad \vec{v}\,' = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$

b) Un vector de la misma dirección que $\vec{v}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$|\vec{v}\,'| = Proy_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2} = \sqrt{77}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{2(-1)+3\cdot 2+8\cdot 0}{\sqrt{77}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{385}}$$

$$|\vec{v}'| = |\vec{v}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{5}\cdot\frac{4}{\sqrt{385}} = 0{,}456$$

$$\vec{v}' = \left(-\frac{0{,}456}{\sqrt{5}}, \frac{2\cdot 0{,}456}{\sqrt{5}}, 0\right) \to \vec{v}' = \left(-\frac{0{,}456}{\sqrt{5}}, \frac{0{,}912}{\ }, 0\right)$$

c) Un vector perpendicular a ambos y de módulo 2.

$|\vec{v}'| = 2$

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-16, 8, 7)$$

$\vec{w} = \left(\frac{-16}{3\sqrt{41}}, \frac{8}{3\sqrt{41}}, \frac{7}{3\sqrt{41}}\right)$ sería unitario

$$\vec{v}' = \left(\frac{2(-16)}{3\sqrt{41}}, \frac{2\cdot 8}{3\sqrt{41}}, \frac{2\cdot 7}{3\sqrt{41}}\right) \to \vec{v}' = \left(\frac{-32}{3\sqrt{41}}, \frac{16}{3\sqrt{41}}, \frac{14}{3\sqrt{41}}\right)$$

25. Sea $\boldsymbol{B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}}$una base de vectores tal que $\boldsymbol{|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 1}$ y además verifica que $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = 4, \vec{u}\cdot\vec{w} = 3, \vec{v}\cdot\vec{w} = 12}$. Calcula el valor de $\boldsymbol{m}$ para que los vectores $\boldsymbol{\vec{a} = 11\vec{u} + m\vec{v} + 3\vec{w}}$ y $\boldsymbol{\vec{b} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}}$ sean ortogonales.

$B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$; $\quad |\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 3, |\vec{w}| = 1 \qquad m?$

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \to |\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = 2^2 = 4$

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} \to |\vec{v}|^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = 3^2 = 9$

$|\vec{w}| = \sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}} \to |\vec{w}|^2 = \vec{w}\cdot\vec{w} = 1^2 = 1$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= 11\vec{u} + m\vec{v} + 3\vec{w} \\ \vec{b} &= \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} \end{aligned}\right\} \text{ortogonales}$$

$11\vec{u}\cdot\vec{u} + 22\vec{u}\cdot\vec{v} + 11\vec{u}\cdot\vec{w} + m\vec{v}\cdot\vec{u} + 2m\vec{v}\cdot\vec{v} + m\vec{v}\cdot\vec{w} + 3\vec{w}\cdot\vec{u} + 6\vec{w}\cdot\vec{v} + 3\vec{w}\cdot\vec{w} = 0$

$11\cdot 4 + 22\cdot 4 + 11\cdot 3 + 4m + 2m\cdot 9 + 12m + 3\cdot 3 + 6\cdot 12 + 3 = 0$

$44 + 88 + 33 + 4m + 18m + 12m + 9 + 72 + 3 = 0$

$249 + 34m = 0 \to 34m = -249 \to m = -\frac{249}{34}$

26. Dados los vectores $\boldsymbol{\vec{a} = (1,0,1), \vec{b} = (2,-1,2)}$, y $\boldsymbol{\vec{c} = (1,-3,2)}$, determina un vector unitario que siendo coplanario con $\boldsymbol{\vec{a}}$ y $\boldsymbol{\vec{b}}$, sea ortogonal a $\boldsymbol{\vec{c}}$.

$\vec{a} = (1,0,1); \quad \vec{b} = (2,-1,2); \quad \vec{c} = (1,-3,2)$

$\vec{a} + k\vec{b} = \vec{d};$

$(1,0,1) + k(2,-1,2) = (2k+1, -k, 2k+1)$

$\vec{d}\cdot\vec{c} = 0$

$(2k+1)\cdot 1 - k\cdot 3 + (2k+1)\cdot 2 = 0; \quad (2k+1+3k+4k+2) = 0; \quad 9k+3 = 0$

$9k = -3; \quad k = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{2}$

$\vec{d} = (2k+1, -k, 2k+1) = \left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+1, -\left(-\frac{1}{2}\right), 2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right); \quad \vec{d} = \left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$

Tiene que ser un vector unitario:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$|\vec{d}| = \sqrt{1^2 + \frac{1}{2}^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $\vec{d}' = \left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right)$

27.- Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son tales que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u}+\vec{v}| = 7$. ¿Qué ángulo forman?

$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

$|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{|\vec{u}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+|\vec{v}|^2} =$

$= \sqrt{16+2\vec{u}\cdot\vec{v}+25} = 7$; $16+2\vec{u}\cdot\vec{v}+25 = 49$; $2\vec{u}\cdot\vec{v} = 8$; $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4$

$\cos\alpha = \frac{4}{4\cdot 5} = 0{,}2$ $\alpha = \arccos 0{,}2 = 1{,}37°$

28.Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que $|\vec{u}| = \sqrt{3}$ y $|\vec{v}| = 4$.
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de 30°, halla:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos(30)\cdot\sqrt{3}\cdot 4 = 6$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot 2\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v}$

$\vec{u}\cdot 2\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|2\vec{u}|\cdot\cos 0 = \sqrt{3}\cdot 2\cdot\sqrt{3} = 6$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos 0 = 4\cdot 4\cdot 1 = 16$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 6$; $\vec{v}\cdot 2\vec{u} = 12$

$(\vec{u}-\vec{v})\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = 6 - 18 + 16 = 4$

$|\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})} = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{3-6-6+16} = \sqrt{7}$

$|2\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{(\overrightarrow{2u}-\vec{v})\cdot(\overrightarrow{2u}-\vec{v})} = \sqrt{4\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{12-24+16} = \sqrt{4} = 2$

29.- Determina, si es posible, el valor de α de modo que los vectores $\vec{u} = (1, \alpha, 2)$ y $\vec{v}(1, -2, -\alpha)$:

a) Sean paralelos: $\frac{1}{1} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{2}{-\alpha}$; $\alpha = -2$

b) Sean perpendiculares: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{u_y}\cdot\overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{v_z} = 0$;

$1\cdot 1 + (-2\alpha) + (-2\alpha) = 0; 1 - 4\alpha = 0$; $\alpha = \frac{1}{4}$

c) Formen un ángulo de 60°: $\cos 60° = \frac{(1\cdot 1)+(-2\alpha)+(-2\alpha)}{\left(\sqrt{1^2+\alpha^2+2^2}\right)\left(\sqrt{1^2+(-2)^2+(-\alpha)^2}\right)} = \frac{1-4\alpha}{5+\alpha^2}$;

$\frac{1}{2} = \frac{1-4\alpha}{5+\alpha^2}$; $2 - 8\alpha = 5 + \alpha^2$; $\alpha^2 + 8\alpha + 3 = 0$; $\alpha = -4 \pm \sqrt{13}$

30. Halla todos los vectores de módulo 3 que formen un ángulo de 30° con $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y de 135° con $\vec{v} = (-1, 1, 0)$

vectores de módulo 3 $\rightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 3 \rightarrow a^2+b^2+c^2 = 9$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{w}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}$$

vectores que formen un ángulo de 30° con $\vec{u} = (1,-1,1) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a-b+c}{3\sqrt{3}} \rightarrow 2a-2b+2c = 9$

vectores que formen un ángulo de 135° con $\vec{v} = (-1,1,0) \rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a+c}{3\sqrt{2}} \rightarrow -2a+2b = -6$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2 = 9 \\ 2a-2b+2c = 9 \\ a-b \quad\quad = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a = 2{,}56066 & a = 0{,}43934 \\ b = -0{,}43934 & b = -2{,}56066 \\ c = 1{,}5 & c = 1{,}5 \end{array}$$

por lo tanto $\vec{w} = (2{,}56066, -0{,}43934, 1{,}5)$ y $\overrightarrow{w_1} = (0{,}43934, -2{,}56066, 1{,}5)$

Textos Marea Verde

31. Halla todos los vectores de módulo 6 que formen un ángulo de 90° con $\vec{u} = (1, -1, 0)$ y de 45° con $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

vectores de módulo 6 $\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3 \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 36$

vectores que formen un ángulo de 90° con $\vec{u} = (1, -1, 0) \rightarrow 0 = \dfrac{a - b}{6\sqrt{2}} \rightarrow a - b = 0$

vectores que formen un ángulo de 45° con $\vec{v} = (-1, 0, 1) \rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{-a + c}{6\sqrt{2}} \rightarrow -2a + 2c = 12$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 = 36 \\ a - b \qquad\quad = 0 \\ a \qquad\quad - c = -6 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} a = 0 & a = -4 \\ b = 0 & b = -4 \\ c = 6 & c = 2 \end{array}$$

por lo tanto $\vec{w} = (0, 0, 6)$ y $\vec{w_1} = (-4, -4, 2)$

32. - Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, -2)$, $\vec{v} = (-1, 0, 3)$ y $\vec{w} = (2, -1, -2)$, calcula:

a) $|\vec{u}|$, $|\vec{w} x \vec{v}|$ y $|(\vec{u} x \vec{v}) x \vec{w}|$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{u} x \vec{w})$ y $|(\vec{u} x \vec{v}) \cdot (\vec{v} x \vec{w})|$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$

$$(\vec{w} x \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} = (-3, -4, -1)$$

$|\vec{w} x \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$

$$(\vec{u} x \vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = (6, -1, 2)$$

$$(\vec{u} x \vec{v}) x \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 16\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 16, -4)$$

$|(\vec{u} x \vec{v}) x \vec{w}| = \sqrt{4^2 + 16^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 256 + 16} = \sqrt{288}$

b) $$(\vec{u} x \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k} = (6, -1, 2)$$

$\vec{v} \cdot (\vec{u} x \vec{w}) = (-1, 0, 3) \cdot (6, -1, 2) = -6 + 0 + 6 = 0$

$(\vec{u} x \vec{v}) = (6, -1, 2)$ $\qquad$ $$(\vec{v} x \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} = (3, 4, 1)$$

$(\vec{u} x \vec{v}) \cdot (\vec{v} x \vec{w}) = (6, -1, 2) \cdot (3, 4, 1) = 18 - 4 + 2 = 16$

33. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 4, -8)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, -1)$ halla:

a) $|\vec{v}|$ y $(\vec{u} x \vec{v}) \cdot (\vec{v} x \vec{w})$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-\vec{k} - 8\vec{\jmath}) - (4\vec{k} + 8\vec{\imath}) = -8\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} - 5\vec{k} = (-8,-8,-5)$$

$$(\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\vec{\imath} + \vec{k}) - (-2\vec{k} - \vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k} = (1,1,3)$$

$$(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w}) = (-8,-8,-5) \cdot (1,1,3) = -8 - 8 - 15 = -31$$

b) $|\vec{u}|, |\vec{v}x\vec{w}|$ y $|(\vec{u}x\vec{w})x\vec{v}|$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{1 + 16 + 64} = \sqrt{81} = 9$$

$$(\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (\vec{\imath} + \vec{k}) - (-2\vec{k} - \vec{\jmath}) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k} = (1,1,3)$$

$$|\vec{v}x\vec{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{11}$$

$$(\vec{u}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4\vec{\imath} + \vec{k} - 16\vec{\jmath}) - (8\vec{k} - 8\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 4\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} - 7\vec{k} = (4,-15,-7)$$

$$(\vec{u}x\vec{w})x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -15 & -7 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-4\vec{k} - 7\vec{\jmath}) - (-15\vec{k} + 7\vec{\imath}) = -7\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 11\vec{k} = (-7,-7,11)$$

$$|(\vec{u}x\vec{w})x\vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 11^2} = \sqrt{49 + 49 + 121} = \sqrt{219}$$

34. Dados los vectores $\vec{u} = (1,-3,3)$, $\vec{v} = (4,0,-3)$ y $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

a) $|\vec{w}|, |\vec{w}x\vec{v}|$ y $|\vec{w}x(\vec{u}x\vec{v})|$

$$\vec{w} = (-2,6,-6) + (12,0,-9) = (10,6,-15)$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{10^2 + 6^2 + (-15)^2} = \sqrt{100 + 36 + 225} = \sqrt{361} = 19$$

$$\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v} \quad ; \quad -2\vec{u} = (-2) \cdot (1,-3,3) = (-2,6,-6) \quad ; \quad 3\vec{v} = 3 \cdot (4,0,-3) = (12,0,-9)$$

$$\vec{w} = (-2,6,-6) + (12,0,-9) = (10,6,-15)$$

$$(\vec{w}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 10 & 6 & -15 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-18\vec{\imath} - 60\vec{\jmath}) - (24\vec{k} - 30\vec{\jmath}) = -18\vec{\imath} - 30\vec{\jmath} - 24\vec{k} = (-18,-30,-24)$$

$$|\vec{w}x\vec{v}| = \sqrt{(-18)^2 + (-30)^2 + (-24)^2} = \sqrt{324 + 900 + 576} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$$

$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (9\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}) - (-12\vec{k} - 3\vec{\jmath}) = 9\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} + 12\vec{k} = (9,15,12)$$

$$\vec{w}x(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 10 & 6 & -15 \\ 9 & 15 & 12 \end{vmatrix} = (72\vec{\imath} + 150\vec{k} - 135\vec{\jmath}) - (54\vec{k} - 225\vec{\imath} + 120\vec{\jmath}) = 297\vec{\imath} - 255\vec{\jmath} +$$

$96\vec{k} = (297, -255, 96)$
$|\vec{w}x(\vec{u}x\vec{v})| = \sqrt{297^2 + (-255)^2 + 96^2} = \sqrt{88209 + 65025 + 9216} = \sqrt{162450}$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{u}x\vec{w}), \vec{v}x(\vec{u} - \vec{w})$ y $|(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})|$

$$(\vec{u}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 10 & 6 & -15 \end{vmatrix} = (45\vec{\imath} + 6\vec{k} + 30\vec{\jmath}) - (-30\vec{k} + 18\vec{\imath} - 15\vec{\jmath}) = 27\vec{\imath} + 45\vec{\jmath} + 36\vec{k} =$$
$(27, 45, 36)$
$\vec{v} \cdot (\vec{u}x\vec{w}) = (4, 0, -3) \cdot (27, 45, 36) = 108 + 0 - 108 = 0$

$$\vec{v}x(\vec{u} - \vec{w})$$
$$(\vec{u} - \vec{w}) = (1, -3, 3) - (10, 6, -15) = (-9, -9, 18)$$
$$\vec{v}x(\vec{u} - \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -9 & -9 & 18 \end{vmatrix} = (-36\vec{k} + 27\vec{\jmath}) - (27\vec{\imath} + 72\vec{\jmath}) = -27\vec{\imath} - 45\vec{\jmath} - 36\vec{k}$$
$$= (-27, -45, -36)$$

$$|(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})|$$
$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (9\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}) - (-12\vec{k} - 3\vec{\jmath}) = 9\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} + 12\vec{k} = (9, 15, 12)$$
$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$$
$$-2\vec{u} = (-2) \cdot (1, -3, 3) = (-2, 6, -6)$$
$$3\vec{v} = 3 \cdot (4, 0, -3) = (12, 0, -9)$$
$$\vec{w} = (-2, 6, -6) + (12, 0, -9) = (10, 6, -15)$$
$$(\vec{v}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 10 & 6 & -15 \end{vmatrix} = (24\vec{k} - 30\vec{\jmath}) - (-18\vec{\imath} - 60\vec{\jmath}) = 18\vec{\imath} + 30\vec{\jmath} + 24\vec{k} = (18, 30, 24)$$
$$(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w}) = (9, 15, 12) \cdot (18, 30, 24) = 162 + 450 + 288 = 900$$
$$|(\vec{u}x\vec{v}) \cdot (\vec{v}x\vec{w})| = \sqrt{900^2} = 900$$

35. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$ calcula:
a) El módulo de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ y el ángulo que forman.
Calculamos los módulos:
$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$ $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$
Ahora calculamos el ángulo que forman con la fórmula:
$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$; $\cos\alpha = \frac{(1,-1,1) \cdot (2,3,4)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{29}}$; $\cos\alpha = \frac{2-3+4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{29}}$; $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{87}}$
$$\arccos\frac{3}{\sqrt{87}} = 71{,}24°$$
b) El producto vectorial de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$.
$$(\vec{u}x\vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-4\vec{\imath} + 3\vec{k} + 2\vec{\jmath}) - (-2\vec{k} + 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = -7\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (-7, -2, 5)$$
c) Un vector unitario que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para hallar el vector unitario necesitamos el producto vectorial y su módulo:

$|\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{49+4+25} = \sqrt{78}$

El vector es : $\left(\frac{-7}{\sqrt{78}}, \frac{-2}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}\right)$

d) El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El área de un paralelogramo es $|\vec{u}x\vec{v}|$, resolvemos:

$$(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-4\vec{\imath} + 3\vec{k} + 2\vec{\jmath}) - (-2\vec{k} + 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) = -7\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 5\vec{k} = (-7, -2, 5)$$

$|\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{49+4+25} = \sqrt{78}$

Solución: El área del paralelogramo es de $\sqrt{78}\,u^2$

36. Dados los vectores $\vec{u} = (-1, m, 2)$, $\vec{v} = (2, -1, -4)$ y $\vec{w} = (3, -1, -5)$, se pide:

a) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan distinta dirección.

Para que la dirección sea distinta $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no pueden ser proporcionales.

$\frac{-1}{2} = \frac{m}{-1} = \frac{2}{-4} \to 1 = 2m \to m = 0{,}5$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección si $m \neq 0{,}5$.

b) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, m, 2)(2, -1, -4) \to -2 - m - 8 = 0 \to m = -10$

c) Un vector que tenga módulo $3\sqrt{6}$ y que sea perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $2\vec{v} - \vec{w}$.

$2\vec{v} - \vec{w} \to 2(2, -1, -4) - (3, -1, -5) \to (4, -2, -8) - (3, -1, -5) \to (1, -1, -3)$

$$\vec{v}x(2\vec{v} - \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (3\vec{\imath} - 2\vec{k} - 4\vec{\jmath}) - (-\vec{k} + 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}) = 3\vec{\imath} - 2\vec{k} - 4\vec{\jmath} + \vec{k} - 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} =$$

$= -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 7\vec{\jmath} = (-1, 2, 7)$

$|(-1, 2, 7)| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$, luego este es el vector pedido.

37. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, m)$, $\vec{v} = (0, m, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2m, 0)$, determina el valor de m para que:

a) Sean linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2m \\ m & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2m \\ m & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 2m \end{vmatrix} = -1 - (m^2 - 2m) = -m^2 + 2m - 1 = 0 \to m = 1$$

Para que sean linealmente independientes m$\neq$ 1

b) El vector $\vec{v}$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$. Halla dicha combinación.

$\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{w}$

$(0, m, -1) = a(1,1,m) + b(1,2m,0) \to (0, m, -1) = (a, a, am) + (b, 2mb, 0) \to$

$(0, m, -1) = (a + b, a + 2mb, am)$

Textos Marea Verde

$\rightarrow$

$\rightarrow m = -\frac{1}{m} + 2m\left(\frac{1}{m}\right) \rightarrow m = -\frac{1}{m} + \frac{2m}{m} \rightarrow\rightarrow a = \pm 1 \quad ; \quad b = \frac{1}{m} \rightarrow b = \pm 1$

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ m = a + 2mb \\ -1 = am \ \rightarrow \ a = -\frac{1}{m} \end{cases} \quad b = -a\,; \ b = \frac{1}{m} \qquad m = a + 2mb \ ; \ m = -\frac{1}{m} + 2m\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$m^2 = -1 + 2m \rightarrow m = 1 \ ; \ b = 1; \quad a = -1$$

c) Sean coplanarios.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 2m & 0 \\ 1 & 1 & m \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix} = -1 - (m^2 - 2m) = -m^2 + 2m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

d) El área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ valga $125u^2$.

$|\vec{u} \times \vec{w}| = 125$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 2m & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \left(2m\vec{k} + m\vec{j}\right) - \left(\vec{k} + 2m^2\vec{i}\right) = (-2m^2, m, 2m - 1)$$

$$\sqrt{(-2m^2)^2 + (m)^2 + (2m-1)^2} = 125 \rightarrow \left(\sqrt{(-2m^2)^2 + (m)^2 + (2m-1)^2}\right)^2 = 125^2 \rightarrow$$
$$(-2m^2)^2 + (m)^2 + (2m-1)^2 = 15625 \rightarrow 4m^4 + m^2 + 4m^2 - 4m + 1 = 15625 \rightarrow$$
$$m = 9{,}4; m = -9{,}4$$

38. En un sistema de referencia ortogonal $R = \{O, \overrightarrow{u_1}, \vec{u}_2, \overrightarrow{u_3}\}$, donde $|\overrightarrow{u_1}| = 1$, $|\overrightarrow{u_2}| = 2$ y $|\overrightarrow{u_3}| = 2$, tenemos los vectores $\vec{a} = \overrightarrow{u_1} + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$ y $\vec{b} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \vec{u}_3$. Con estos datos se pide:

a) $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3}$.

b) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c) $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$, $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$, $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$, $\overrightarrow{u_2} \times \vec{u}_3$ y área del triángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) Repite los apartados anteriores en el caso de ser un sistema de referencia ortonormal.

a)

$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}$ →Ambos vectores son perpendiculares, luego $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$

$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3}$ →Ambos vectores son perpendiculares, luego $\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0$

$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = |\overrightarrow{u_2}| \cdot |\overrightarrow{u_2}| \cdot \cos 0° = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

$\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = |\overrightarrow{u_3}| \cdot |\overrightarrow{u_3}| \cdot \cos 0° = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

b)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\overrightarrow{u_1} + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}) = 2 \cdot \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} - 2 \cdot \overrightarrow{u_3} \cdot \vec{u}_3 = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \ = 2 - 4 - 8 = -10$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\overrightarrow{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (2\overrightarrow{u_3})^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$

$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{(2\overrightarrow{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (\overrightarrow{u_3})^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$

$\cos\alpha = \frac{-10}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{12}} = -\frac{5\sqrt{7}}{21} \rightarrow \alpha = \cos^{-1} - \frac{5\sqrt{7}}{21} = 129{,}046°$

c) Puesto que los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ son perpendiculares dos a dos, se tiene que el producto vectorial de dos de ellos da el tercero:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \qquad \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \qquad \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = -\vec{u_1} \times \vec{u}_3 = -\vec{u_2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2)\vec{u_1} - (1+2)\vec{u}_2 + (-1-2)\vec{u}_3 = -\vec{u_1} - 3\vec{u}_2 - 3\vec{u_3}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = \vec{u}_1, +3\vec{u}_2 + 3\vec{u_3}$$

$$a_{triang} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{u_1^2 + (3u_2)^2 + (3u_3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 4} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

d) Al ser un sistema de referencia ortonormal, $|\vec{u_1}| = 1$, $|\vec{u_2}| = 1$ y $|\vec{u_3}| = 1$, teniendo esto en cuenta repetimos el ejercicio:

$\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}$ →Ambos vectores son perpendiculares, luego $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2} = 0$

$\vec{u_2} \cdot \vec{u_3}$ →Ambos vectores son perpendiculares, luego $\vec{u_2} \cdot \vec{u_3} = 0$

$\vec{u_2} \cdot \vec{u_2} = |\vec{u_2}| \cdot |\vec{u_2}| \cdot \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$\vec{u_3} \cdot \vec{u_3} = |\vec{u_3}| \cdot |\vec{u_3}| \cdot \cos 0° = -1 \cdot -1 \cdot -1 = -1$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{u_1} + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3) \cdot (2\vec{u_1} - \vec{u_2} + \vec{u_3}) = 2 \cdot \vec{u_1} \cdot \vec{u_1} - \vec{u_2} \cdot \vec{u_2} - 2 \cdot \vec{u_3} \cdot \vec{u}_3$$
$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot -1 \cdot -1 = 2 - 1 - 2 = -1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(\vec{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (2\vec{u_3})^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{(2\vec{u_1})^2 + (\vec{u}_2)^2 + (\vec{u_3})^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{6} \to \alpha = \cos^{-1} -\frac{1}{6} = 99{,}59^{\circ}$$

$$\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \qquad \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3 \qquad \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = -\vec{u_1} \times \vec{u}_3 = -\vec{u_2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1-2)\vec{u_1} - (1+2)\vec{u}_2 + (-1-2)\vec{u}_3 = -\vec{u_1} - 3\vec{u}_2 - 3\vec{u_3}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = \vec{u}_1, +3\vec{u}_2 + 3\vec{u_3}$$

$$a_{triang} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{u_1^2 + (3u_2)^2 + (3u_3)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 1} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

39. Encuentra un vector $\vec{x}$ que tenga de módulo 3, y tal que si $\vec{y} = (3, -3, 0)$ verifique $\vec{x} \times \vec{y} = (6, 6, 3)$

Sea $\vec{x} = (a, b, c)$:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a & b & c \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (6,6,3) \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ -3 & 0 \end{vmatrix}\bar{\imath} - \begin{vmatrix} a & c \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a & b \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\bar{k} = (6,6,3) = -(-3c)\bar{\imath} - (-3c)\bar{\jmath} + (-3a)(-3b)\,\bar{k} = (6,6,3)$$

Del determinante obtenemos:

$\bar{\imath} \to 3c = 6 \to c = 2 \qquad \bar{\jmath} \to 3c = 6 \qquad \bar{k} \to -3a - 3b = 3 \to -3a = 3b + 3 \to a = -b - 1$

Calculamos el módulo:

$|\vec{x}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 4} = 3 \to a^2 + b^2 + 4 = 3^2 \to a^2 + b^2 = 5 \to (-b-1)^2 + b^2 = 5 \to 2b^2 + 2b + 1 = 5 \to 2b^2 + 2b - 4 = 0$

$$2b^2 + 2b - 4 = 0,\ b_1 = 1, b_2 = -2$$

Sustituimos los valores de b en $a = -b - 1$:

$$a_1 = -1 - 1 = -2\ ;\ a_2 = -(-2) - 1 = 1$$

El vector será $\vec{x}_1 = (-2,1,2)$ y $\vec{x}_2 = (1,-2,2)$

Textos Marea Verde

40. Sean A(m-2, m, -5), B(m, 1, -5) y C(-1, 3, m) los vértices de un triángulo ABC. ¿Cuánto vale m para que el triángulo sea rectángulo en B?

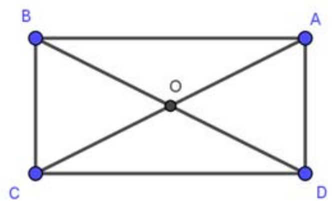
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,;\ \ (2,\ 1-m,\ 0) \cdot (-1-m,\ 2,\ m+5) = \ -2-2m+2-2m+0 = 0$

$-4m = 0\,;\ \ m = 0$

41. Los vértices de un triángulo ABC son A(λ , 2, -1), B(5, 3, -4) y C(7, λ, -2). ¿Cuánto vale λ para que el triángulo sea rectángulo en B?

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,; (5-\lambda, 1, -3) \cdot (2, \lambda-3, 2) = 10 - 2\lambda + \lambda - 3 - 6 = 0$ **λ = 1**

42. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 1, 1) y B(0, 2, 0). Si O(0,0,1) es el centro de dicho paralelogramo, halla las coordenadas de los otros dos vértices y el área del paralelogramo.



O es el punto medio de AC y BD, luego

C(-1, -1, 1) y D(0, -2, 2)

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

Luego el área es: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}$

43. Dados los puntos A(-4, 2, 1), B(-1, 1, 1) y C(2, m, 3), se pide el valor de m para que los tres puntos:

a) estén alineados.

b) formen un triángulo rectángulo en B.

c) formen un triángulo isósceles, siendo A el ángulo desigual.

d) formen un triángulo de área $\sqrt{52}\ u^2$.

a) Sabemos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AC}$ para que los puntos estén alineados, $\overrightarrow{AB} = (3, -1, 0), \overrightarrow{AC} = (6, m-2, 2)$

obtenemos: $\frac{3}{6} = \frac{-1}{m-2} = \frac{0}{2}$ no existe el valor de m.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\,;\ \ (3, -1, 0) \cdot (3, m-1, 2) = 9 - m + 1 + 0 = 0\,;\ \ m = 10$

c) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|\,;\ |(3, -1, 0)| = |(6, m-2, 2)|\ ;\ \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{6^2 + (m-2)^2 + 2^2}$

$m^2 - 4m + 34 = 0$, no existe el valor de m

d) Fórmula de Herón, $área = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}\ \ donde\ S = \frac{a+b+c}{2}$

$a = \left|\overrightarrow{BC}\right|;\ b = \left|\overrightarrow{AC}\right|; c = \left|\overrightarrow{AB}\right|$

$a = \left|\overrightarrow{BC}\right| = |(3, m-1, 2)| = \sqrt{3^2 + (m-1)^2 + 2^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 14}$

$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = |(6, m-2, 2)| = \sqrt{6^2 + (m-2)^2 + 2^2} = \sqrt{m^2 - 4m + 44}$

$c = \left|\overrightarrow{AB}\right| = |(3, -1, 0)| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$

$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \sqrt{52}\ ;\ \ S(S-a)(S-b)(S-c) = 52$

44. Dados los puntos A(1,1,-1),B(-1,-1,0) y C(3,m,-2)

a) Hallar para qué valores del parámetro m están alineados.

Sabemos que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AC}$ para que los puntos estén alineados,

Textos Marea Verde

obtenemos: $-\frac{2}{2} = \frac{-2}{m-1} = \frac{1}{-1}$

i. Escogemos 2 fracciones de las 3 obtenidas y operamos:$-\frac{2}{2} = \frac{-2}{m-1}; \frac{-2(m-1)}{2} = -2; -2m = -6; m = 3$

b) Hallar si existen valores de m para los cuales A,B y C son tres vértices de un paralelogramo de área $2\sqrt{5}u^2$ y, en caso afirmativo calcularlos

El área de un paralelogramo es: $|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}|$por lo que:$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & m-1 & -1 \end{vmatrix}$

i. Calculamos el determinante y obtenemos un nuevo vector:$\bar{u}(1-m, 0, -2m+6)$

ii. Calculamos el módulo del vector y lo igualamos al valor del área: $\sqrt{(1-m)^2 + (-2m+6)^2} = 2\sqrt{5}$

Operamos y obtenemos la siguiente ecuación:$5m^2 - 26m + 17 = 0 \rightarrow m = \frac{13 \pm 2\sqrt{21}}{5}$

45. Dados los puntos A(0, 0, -1), B(1, 1, 0), C(-1,1,0) y D(1,-2,2), calcula:

a) El área y el perímetro del triángulo de vértices A, B y C.

Sabemos que el área es:$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}|$

i. Calculamos los vectores y obtenemos $\overrightarrow{AB}(1,1,1)$; $\overrightarrow{AC}(-1,1,1)$

ii. Calculamos el determinante: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ y obtenemos:$\vec{v}(0,-2,2)$

iii. Calculamos su módulo $\sqrt{0^2 + (-2)^2 + (2)^2}$ y tenemos como resultado:$\sqrt{8}$

iv. Por lo que el área será: $\frac{\sqrt{8}}{2}u^2$

Sabemos que el perímetro es la suma de todos sus lados: $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}|$

v. Calculamos $\overrightarrow{BC}(-2,0,0)$

vi. Calculamos sus módulos $\left(\sqrt{1^2+1^2+1^2} + \sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} + \sqrt{(-2)^2+0^2+0^2}\right) = \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$ = 2+2$\sqrt{3}$

y obtenemos que el perímetro es: (2+2$\sqrt{3}$) u

b) El volumen del tetraedro cuyos vértices son A, B, C y D.

Sabemos que el volumen de un tetraedro es:$\frac{1}{6}|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$

i. Calculamos $\overrightarrow{AD}(1,-2,3)$

ii. Hallamos el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -10$

iii. Por lo que el volumen es: $\frac{10}{6} \rightarrow \frac{5}{3}u^3$

c) El volumen del paralelepípedo determinado por esos cuatro puntos.

El volumen del paralelepípedo es $|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]|$

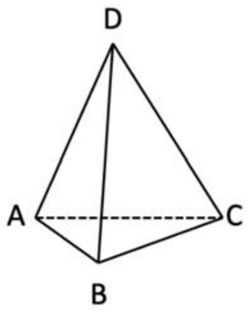
Como ya lo hemos calculado en el apartado anterior sabemos que: $|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]| = 10\ u^3$

d) El área de una de las caras laterales.

El área es: $|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}|$

Como ya lo hemos calculado anteriormente en el apartado a) sabemos que $|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}| = \sqrt{8}\,u^2$

46. Sea la pirámide de vértices $A(0,1,-1), B(1,1,0), C(-1,1,0)y\ D(1,-2,2)$; calcula:
a) El área del paralelogramo determinado por los puntos $A, B\ y\ C$.
b) El área de cada cara.
c) Su volumen.



a) Área paralelogramo= $|\overline{AB} \times \overline{AC}|$

$\overline{AB} = (1,1,0) - (0,1,-1) = (1,0,1)$ $\overline{AC} = (-1,1,0) - (0,1,-1) = (-1,0,1)$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0+0-j) - (0+0+j) = -2j = (0,-2,0)$$

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 0^2} = \boldsymbol{2u^2}$$

b) Área de cada cara

- Área base $\widehat{BAC}$

$\overline{BA} = (0,1,-1) - (1,1,0) = (-1,0,-1)$ $\overline{BC} = (-1,1,0) - (1,1,0) = (-2,0,0)$

$$\overline{w} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0+0+2j) - (0+0+0) = 2j = (0,2,0)$$

$$|\overline{w}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2 \rightarrow Área\ base = \frac{1}{2} \cdot 2 = \boldsymbol{1u^2}$$

- Área lado $\widehat{BAD}$

$\overline{BA} = (0,1,-1) - (1,1,0) = (-1,0,-1)$ $\overline{BD} = (1,-2,2) - (1,1,0) = (0,-3,2)$

$$\overline{w'} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0+3k+0) - (0+3i-2j) = 3k - 3i + 2j = (-3,2,3)$$

$$|\overline{w'}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (3)^2} = \sqrt{22} \rightarrow Área\ \widehat{BAD} = \sqrt{22} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{22}}{2}\ u^2}$$

- Área lado $\widehat{CBD}$

$\overline{CB} = (1,1,0) - (-1,1,0) = (2,0,0)$ $\overline{CD} = (1,-2,2) - (-1,1,0) = (2,-3,2)$

$$\overline{w''} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (0-6k+0) - (0+0+4j) = -6k - 4j = (0,-4,-6)$$

$$|\overline{w''}| = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13} \rightarrow Área\ \widehat{CBD} = 2\sqrt{13} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\sqrt{13}\ u^2}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

- Área lado $\widehat{ACD}$

$\overline{AC} = (-1,1,0) - (0,1,-1) = (-1,0,1)$ $\overline{AD} = (1,-2,2) - (-1,1,0) = (1,-3,3)$

$$\overline{w}''' = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 3k + j) - (0 - 3i - 3j) = 3k + 4j + 3i = (3,4,3)$$

$$|\overline{w}'''| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (3)^2} = \sqrt{34} \rightarrow Área\ \widehat{ACD} = \sqrt{34} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{34}}{2}\ u^2}$$

c) Volumen

Volumen= $\frac{1}{6}[\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}]$

$\overline{AB} = (1,1,0) - (0,1,-1) = (1,0,1)$ $\overline{AC} = (-1,1,0) - (0,1,-1) = (-1,0,1)$

$\overline{AD} = (1,-2,2) - (-1,1,0) = (1,-3,3)$

Volumen= $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|(0 + 3 + 0) - (0 - 3 + 0)| = \frac{1}{6}|3 + 3| = \frac{1}{6} \cdot 6 = \boldsymbol{1\ u^3}$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los vectores de componentes (1,3,-2) y (3,x,-6), indica el valor de x para que los dos vectores sean linealmente independientes.

Los vectores son linealmente dependientes cuando cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto. Entonces observamos que la respuesta b)9 encaja con esta definición ya que:

3·(1,3,-2)= (3,9,-6) **b)9**

2. El módulo del vector de origen A(-2,3,-2) y extremo B(2,0,-2) es:

$\overline{AB} = B - A = (2{,}0,-2) - (-2{,}3,-2) = (4,-3{,}0)$

$\overline{|AB|} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$

d)5

3. Dados los vectores $\overline{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{5}),\overline{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{6},\mathbf{3},\mathbf{0})\boldsymbol{el\ vector}\ \overline{\boldsymbol{w}} = \mathbf{3}\overline{\boldsymbol{u}} - \mathbf{2}\overline{\boldsymbol{v}}$ tiene de componentes:

$\overline{w} = 3\overline{u} - 2\overline{v} = 3(1,-3{,}5) - 2(-6{,}3{,}0) = (3,-9{,}15) - (-12{,}6{,}0) = (15,-15{,}15)$

a) $(\mathbf{15},-\mathbf{15},\mathbf{15})$

4. Dados los puntos A (4, -1, 5) y B (2, 7, -5), las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

a) (3, 3, 0) b) (6, -6, 10) c) (3, 4, 0) d) (6, -4, 10)

$\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} = \frac{(4,-1{,}5)+(2{,}7,-5)}{2} = \frac{(6{,}6{,}0)}{2} = (3,3,0)$ *Opción a) (3, 3, 0)*

5. Dados los vectores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{5})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{6},\mathbf{3},\mathbf{0})$, su producto escalar es:

a) 15 b) -15 c) -3 d) -6

$u^{\rightarrow} \cdot v^{\rightarrow} = (1,-3,5) \cdot (-6,3,0) = -6 - 9 + 0 = -15$ *Opción b) -15*

6. Dado el vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{6},\mathbf{3},\mathbf{0})$ indica cuál de los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}$ es ortogonal a él :

a) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1},-\mathbf{3},\mathbf{5})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \cdot -6) + (-3 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = -15$

Para que dos vectores sean ortogonales se tiene que cumplir que el producto escalar sea 0.Por lo tanto no es ortogonal a $\vec{v}$.

b) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1},-\mathbf{2},\mathbf{5})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \cdot -6) + (-2 \cdot 3) + (5 \cdot 0) = -12$

Ídem a

c) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{7})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \cdot -6) + (2 \cdot 3) + (7 \cdot 0) = 0$ Por lo tanto si es ortogonal a $\vec{v}$.

d) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2},\mathbf{5},\mathbf{5})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2 \cdot -6) + (5 \cdot 3) + (5 \cdot 0) = 3$

Ídem a

c) $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{7})$

7. Dados los puntos $\boldsymbol{A}(\mathbf{4},-\mathbf{1},\mathbf{5}),\boldsymbol{B}(\mathbf{2},\mathbf{7},-\mathbf{5})\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{C}(\mathbf{6},-\mathbf{7},\mathbf{16})$ el área del triángulo constituido sobre ellos es:

a)150 b)201 c)30 d)$\sqrt{201}$

$\overrightarrow{AB} = (4,-1,5) - (2,7,-5) = (2,-8,10)$ $\overrightarrow{AC} = (4,-1,5) - (6,-7,16) = (-2,6,-11)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -8 & 10 \\ -2 & 6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 10 \\ 6 & -11 \end{vmatrix}\vec{\imath} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -2 & -11 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$28\vec{\imath}-2\vec{\jmath}-4\vec{k}=(28,-2,-4)$ $\quad |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|(28,-2,-4)|=\sqrt{28^2+2^2+4^2}=2\sqrt{201}$

$$Área=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\frac{2\sqrt{201}}{2}=\sqrt{201}\,u^2$$

d)$\sqrt{201}$

8. Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,5)$, $\vec{v}=(-6,3,0)$, su producto vectorial es:

a) $\vec{u}\times\vec{v}=(-15,-30,-15)$ b) $\vec{u}\times\vec{v}=(15,15,15)$ c) $\vec{u}\times\vec{v}=(-15,30,-15)$
d) $\vec{u}\times\vec{v}=(15,-30,15)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\1&-3&5\\-6&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3&10\\6&-11\end{vmatrix}\vec{\imath}+\begin{vmatrix}1&5\\-6&0\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}1&-3\\-6&3\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$=-15\vec{\imath}+(-30)\vec{\jmath}+(-15)\vec{k}=(-15,-30,-15)$

d) $\vec{u}\times\vec{v}=(15,-30,15)$

9. Dados los vectores $\bar{u}=(1,-3,5)$, $\bar{v}=(-6,3,0)$, $\bar{w}=(1,1,1)$, su producto mixto es:

$[\bar{u},\bar{v},\bar{w}]=\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})$; Realizamos el producto vectorial de $\bar{v}$ y $\bar{w}$.

$$\bar{v}\times\bar{w}=\begin{vmatrix}\bar{\imath}&\bar{\jmath}&\bar{k}\\-6&3&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}\bar{\imath}+\begin{vmatrix}-6&0\\1&1\end{vmatrix}\bar{\jmath}+\begin{vmatrix}-6&3\\1&1\end{vmatrix}\bar{k}=3\bar{\imath}+6\bar{\jmath}-9\bar{k};$$

Ahora realizamos el producto escalar con el resultado y $\bar{u}$.

$\bar{u}\cdot(\bar{v}\times\bar{w})=(1,-3,5)\cdot(3,6,-9)=1\cdot3+(-3)\cdot6+5\cdot(-9)=3-18-45=-60$

a) -60

10. Dados los vectores $\bar{u}=(1,-3,5)$, $\bar{v}=(-6,3,0)$, $\bar{w}=(1,1,1)$, el volumen del paralelepípedo construido sobre ellos es:

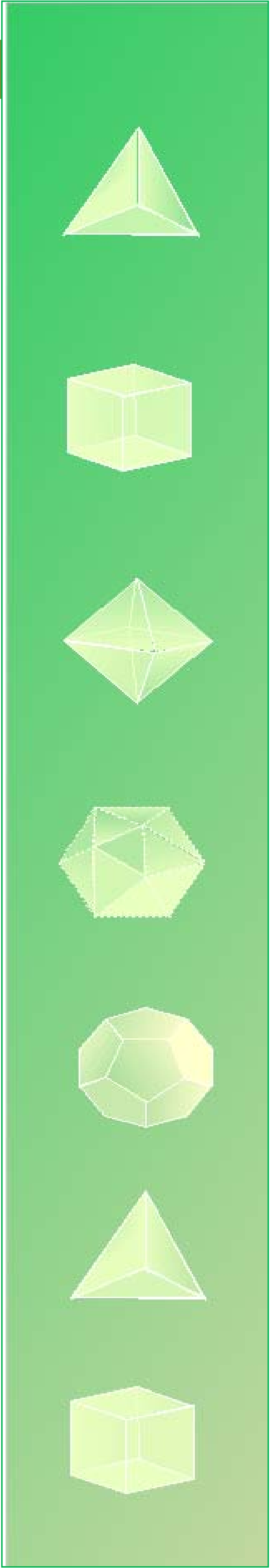
Calculamos el determinante en valor absoluto

$$\left|\begin{vmatrix}1&-3&5\\-6&3&0\\1&1&1\end{vmatrix}\right|=|(1\cdot3\cdot1-3\cdot0\cdot1-6\cdot1\cdot5)-(5\cdot3\cdot1-3\cdot(-6)\cdot1+0\cdot1\cdot1)|=$$

$=|(3-0-30)-(15+0+18)|=|-27-33|=|-60|=60$

a) 60

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde



Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 5: Rectas y Planos

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (-1,-4,2) y tiene por vector director v = (-3,-1,5).

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v(x,y,z) = (-1,-4{,}2) + \lambda(-3,-1{,}5)$
Ecuaciones paramétricas: $(x,y,z) = (-1,-4{,}2)(-3,-1{,}5)$;

$$x = -1 - 3\lambda$$
$$y = -4 - \lambda$$
$$z = 2 + \lambda$$

Ecuación continua: Despejamos λ
$\lambda = \frac{x-1}{-3}$; $\lambda = \frac{y+4}{-1}$; $\lambda = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{1}$

Ecuaciones implícitas:
$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \qquad x - 3y - 11 = 0 \;\; ; \quad y + z + 2 = 0$

2. **Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (4,-3,-2) y tiene por vector director v = (-1,0,6).**

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v(x,y,z) = (4,-3,-2) + \lambda(-1{,}0{,}6)$
Ecuaciones paramétricas: $(x,y,z) = (4,-3,-2) + \lambda(-1{,}0{,}6) \Rightarrow$

$$x = 4 - \lambda$$
$$y = -3$$
$$z = -2 + 6\lambda$$

Ecuación continua: Despejamos λ
$\lambda = \frac{x-4}{-1} = \frac{z+2}{6}, y = -3$

Ecuaciones implícitas: $\Rightarrow \frac{x-4}{-1} = \frac{z+2}{6} \quad \Rightarrow 6x - 24 = -z - 2 \Rightarrow 6x + z - 22 = 0 \;\; ; \;\; \frac{y+3}{0} = \frac{z+2}{6}$

$$6x + z - 22 = 0$$
$$y - 3 = 0$$

3. **Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A (0,1,0) y tiene por vector director v = (-2,0,0).**

Ecuación vectorial: $OP = OP_0 + v \Rightarrow (x,y,z) = (0{,}1{,}0) + \lambda(-2{,}0{,}0)$
Ecuaciones paramétricas: $(x,y,z) = (0{,}1{,}0) + \lambda(-2{,}0{,}0) \Rightarrow$

$$x = -2\lambda$$
$$y = 1$$
$$z = 0$$

Ecuación continua:

$$\frac{x}{-2} = \lambda;\; y = 1;\;\; z = 0$$

Ecuaciones implícitas:

$$y = 1$$
$$z = 0$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

4. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(0,0,0)$ y $B(3,-4,1)$.

$\overrightarrow{AB} = (3-0,-4-0,1-0) = (3,-4,1)$

Vectorial: $(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(3,-4,1)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3\lambda \\ y = -4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda = \dfrac{x}{3} \\ \lambda = \dfrac{y}{-4} \\ \lambda = z \end{array}\right\} \frac{x}{3} = \frac{y}{-4} = z$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-4} \\ \dfrac{x}{3} = z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4x = 3y \\ x = 3z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{array}\right\}$$

5. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(3,-2,6)$ y $B(1,-5,7)$.

$\overrightarrow{AB} = (1-3,-5+2,7-6) = (-2,-3,1)$

Vectorial: $(x,y,z) = (3,-2,6) + \lambda(-2,-3,1)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 - 2\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 6 + 1\lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda = \dfrac{x-3}{-2} \\ \lambda = \dfrac{y+2}{-3} \\ \lambda = z - 6 \end{array}\right\} \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{-3} = z - 6$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{-3} \\ \dfrac{x-3}{-2} = z - 6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x + 9 = -2y - 4 \\ x - 3 = -2z + 12 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x + 2y = 13 \\ x + 2z = 15 \end{array}\right\}$$

6. Escribe las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(2,-1,6)$ y $B(7,-2,-1)$.

$\overrightarrow{AB} = (7-2,-2+1,-1-6) = (5,-1,-7)$

Vectorial: $(x,y,z) = (2,-1,6) + \lambda(5,-1,-7)$

Paramétricas:

$$\left.\begin{array}{r} x = 2 + 5\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 6 - 7\lambda \end{array}\right\}$$

Continua:

Textos Marea Verde

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = \dfrac{x-2}{5} \\ \lambda = \dfrac{y+1}{-1} \\ \lambda = \dfrac{z-6}{-7}\end{array}\right\} \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-6}{-7}$$

Implícitas:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y+1}{-1} \\ \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{z-6}{-7}\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}-x+2=5y+5 \\ -7x+14=5z-30\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c}-x-5y=3 \\ -7x-5z=-44\end{array}\right\}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A(-1, -4, 2) y tiene por vector director $\vec{v}$= (-3, -1, 5)

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (-1, -4, 2) \ + t(-3, -1, 5)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -4 - t \\ z = 2 + 5t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} -x + 3y + 11 = 0 \\ 5x + \quad 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

2. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita de la recta que pasa por el punto A(4, -3, 2) y tiene por vector director $\vec{v}$ = (-1, 0, 6)

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (4, -3, 2) \ + t(-1, 0, 6)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = \quad -3 \\ z = 2 + 6t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$\frac{x-4}{-1} = \frac{z-2}{6}; y = -3$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} 6x \ \ + z - 26 = 0 \\ \ y \quad + 3 \ \ = 0 \end{cases}$$

3. Dados los puntos A(2, 0, 1) y B(0, -2, 3), se pide:

a) Expresa de todas las formas posibles la recta que pasa por ambos puntos.

$\overline{AB} = \vec{v} = (0, -2, 3) - (2, 0, 1) = (-2, -2, 2)$

Ecuación vectorial:

$(x, y, z) = (2, 0, 1) + t(-2, -2, 2)$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} -2x + 2y + 4 = 0 \\ 2x + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

b) Halla dos puntos C y D que estén alineados con A y B, de manera que uno de ellos (C) esté situado entre ambos y el otro esté situado a la izquierda de A.

Para que C esté situado entre ambos puntos A y B calculamos el punto medio:

$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right) \to \left(\frac{2+0}{2},\frac{0-2}{2},\frac{1+3}{2}\right) \to C(1,-1,2)$

Para que D esté a la izquierda de A proponemos que A sea el punto medio de C y D

$\left(\frac{x_1+1}{2},\frac{y_1-1}{2},\frac{z_1+2}{2}\right) = (2,0,1);\ \ x_1 = 3\ ;\ \ y_1 = 1\ ;\ z_1 = 0\ ;\quad D(3,1,0)$

4. expresa de todas las formas posibles las siguientes rectas:

a) r:$\begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases}$ b)s:$\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ $c)r$:$\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ d)s:$\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$

a) IMPLÍCITAS r:$\begin{cases} x-2z=2 \\ y+z=-1 \end{cases} \to \lambda = z$ PARAMÉTRICA $\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

$CONTINUA\ \ \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{1} \qquad \to VECTORIAL\ \ (x,y,z)=(2,-1,0)+\lambda(2,-1,1)$

b) PARAMÉTRICA $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$ $CONTINUA\ \ \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}\to$

$IMPLíCITAS\ \ (x+1)\cdot 2=(y-3)\cdot 1 \to 2x+2=y-3\to 2x-y=-5$

$(x+1)\cdot(-1)=(z-2)\cdot 1\to -x-1=z-2\to -x-z=-1\to \begin{cases} 2x-y=-5 \\ -x-z=-1 \end{cases}$

$VECTORIAL\ \ (x,y,z)=(-1,3,2)+\lambda(1,2,-1)$

c) PARAMÉTRICA $\begin{cases} x=3-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$ $CONTINUA\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

$IMPLíCITAS\ \ (x-3)\cdot 1=(y-1)\cdot(-1)\to x-3=-y+1\to x+y=4\to$

$(x-3)\cdot 2=(z-1)\cdot 8-1)\to 2x-6=-z+1\to 2x+z=7$ $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=7 \end{cases}$

$VECTORIAL\ (x,y,z)=(3,1,1)+\lambda(-1,1,2)$

d) $IMPLíCITAS\ s$:$\begin{cases} x+2y=-2 \\ y-2z=1 \end{cases}\to y=\lambda \quad \to PARAMéTRICA \begin{cases} x=-2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \end{cases}$

$CONTINUA\ \frac{x+2}{-2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\quad VECTORIAL\ (x,y,z)=(-2,0,1)+\lambda(-2,1,\frac{1}{2})$

5) Expresa de todas las formas posibles la recta $r=\frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ y además halla:

Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP}=(-1,-1,2)+t(-2,3,1)$

Ecuación paramétrica:

$\begin{cases} x=-1-2t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$

Ecuaciones implícitas:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$$

a) Un punto de dicha recta tal que su segunda coordenada sea -4.

$y = -1 + 3t = -4 \rightarrow t = -1$

$t = -1;\ -1(-2,3,1) = (2,-3,-1); (-1,-1,2) + (2,-3,-1)$

$P(1,-4,1)$

b) Un punto de dicha recta tal que la suma de sus coordenadas valga 2.

Calculamos el punto genérico:

$P(-1-2t, -1+3t, 2+t) \quad -1-2t-1+3t, +2+t = 2\,; 2t-2 = 0\,, t = 1$

$P(-3,2,3)$

6.- Expresa de todas las formas posibles la recta de ecuación $r \equiv \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1}$ y halla un punto de ésta, cuya primera coordenada sea -4.

$$r \equiv \frac{2x-1}{5} = \frac{3-y}{2} = \frac{3z}{1} \rightarrow \ r \equiv \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

$$P = \left(\frac{1}{2}, 3, 0\right); \quad \vec{v} = \left(\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{3}\right)$$

ecuación vectorial de la recta:

$$r = \left(\frac{1}{2}, 3, 0\right) + \lambda\left(\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{3}\right)$$

ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = \frac{1}{3}\lambda \end{array}\right\}$$

ecuación continua de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} \\ \lambda = \frac{y-3}{-2} \\ \lambda = \frac{z}{\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \qquad r \equiv \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{\frac{1}{3}}$$

ecuaciones implícitas de la recta:

$$\left.\begin{array}{l} -2x + 1 = \frac{5}{2}y - \frac{15}{2} \\ \frac{1}{3}y - 1 = -2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x + \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} \\ \frac{1}{3}y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

$\text{primera coordenada sea } -4$:

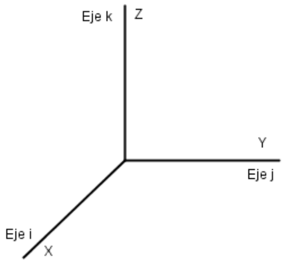
$x = -4 \rightarrow P = (-4, y, z)$

$$2(-4) + \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} \rightarrow \quad \frac{5}{2}y = \frac{17}{2} + 8 \rightarrow \quad y = \frac{33}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{33}{5}$$

$$\frac{1}{3}y + 2z = 1 \rightarrow \quad 2z = 1 - \frac{1}{3}y \rightarrow \quad 2z = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{33}{5}\right) = -\frac{6}{5} \rightarrow z = \ -\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{5}$$

$$P = \left(-4, \frac{33}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

7. Halla las ecuaciones de los OX, OY y OZ y exprésala en todas las formas posibles.



Eje x; tomamos el punto (3, 0 ,0)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (3{,}0{,}0) + \gimel(1{,}0{,}0)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + \gimel \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- **Ecuación continua**

$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$

- **Ecuación general**

$0(x-3) = 1(y-0); \quad 0 = y - 0; \quad y = 0$

$0(x-3) = 1(z-0); \quad 0 = z - 0; \quad z = 0$

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Eje y; supongamos el punto (0, 1, 0)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (0{,}1{,}0) + \gimel(0{,}1{,}0)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \gimel \\ z = 0 \end{cases}$$

- **Ecuación general**

$1(x-0) = 0(y-1); x - 0 = 0; x = 0$

$0(y-1) = 1(z-0); 0 = z - 0, z = 0$

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Eje z; supongamos el punto (0, 0, 5)

- **Ecuación vectorial**

$(x, y, z) = (0, 0, 5) + \gimel(0{,}0{,}1)$

- **Ecuación paramétrica**

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 5 + \gimel \end{cases}$$

- **Ecuación general**

$0(x-0) = 0(y-0); 0 = 0$

$1(y-0) = 0(z-5); y - 0 = 0; y = 0$

$r \equiv \{y = 0$

8. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2, 1, -1) y es paralela:

a) Al eje OY

Que dos rectas sean paralelas significa que tienen el mismo vector director, como el vector director del eje OY es $\vec{v}(0,1,0)$, el vector de la recta será $\vec{u}(0,1,0)$.

Luego sus ecuaciones serán:

- **Ecuación vectorial:**

$$(x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(0,1,0)$$

- **Ecuación paramétrica:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

- **Ecuación general:**

$$1(x-2) = 0(y-1); x - 2 = 0$$
$$0(y-1) = 1(z+1); 0 = z + 1$$
$$r \equiv \begin{cases} x - 2 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) A la recta de ecuación r: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2z = 0} \\ \boldsymbol{y - 3z = 0} \end{cases}$

Primero calculamos el vector director de la recta r,

$$\begin{cases} 3(x+2z) = 0 \\ 2(y-3z) = 0 \end{cases}; 3x + 2y = 0; y = \lambda; x = \frac{-2\lambda}{3}; z = \frac{\lambda}{3} \begin{cases} x = \frac{-2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{\lambda}{3} \end{cases}$$

El vector de la recta r es $\vec{v} = (\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3})$

Luego pasa por el punto A (2, 1, -1) y tiene el vector $\vec{v} = (\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3})$

- **Ecuación vectorial:**

$$(x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda(\frac{-2}{3}, 1, \frac{1}{3})$$

- **Ecuación paramétrica:**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\frac{-2}{3}\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + \frac{\lambda}{3} \end{cases}$$

- **Ecuación continua:**

$$r \equiv \frac{x-2}{\frac{-2}{3}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{\frac{1}{3}}$$

- **Ecuación general:**

$$1(x-2) = \frac{-2}{3}(y-1); x - 2 = \frac{-2}{3}y + \frac{2}{3} = x\frac{+2}{3}y + \frac{8}{3}$$
$$\frac{1}{3}(y-1) = 1(z+1); \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} = z + 1 = \frac{1}{3}y - z - \frac{2}{3}$$
$$r \equiv \begin{cases} x + \frac{2}{3}y + \frac{8}{3} = 0 \\ \frac{1}{3}y - z - \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

9.- Dada la recta $\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{3}} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{-1}} = \frac{\boldsymbol{z+2}}{\boldsymbol{-1}}$ **se pide:**

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

a) Expresa dicha recta de todas las formas posibles.

a. Vectorial

i. Obtenemos el punto y el vector director de la recta

1. $P(1,0,-2);\quad \vec{v}(3,-1,-1)$

ii. $(x,y,z):(1,0,-2)+t(3,-1,-1)$

b. Paramétrica

i. $\begin{cases} x=1+3t \\ y=-t \\ z=-2-t \end{cases}$

c. Implícitas

i. $\begin{cases} -1(x-1)=3y \to x+3y=1 \\ -y=-1(z+2) \to y-z=-2 \end{cases}$

b) Halla un punto de dicha recta cuya suma de sus coordenadas valga 4.

a. Sabemos que $P(1+3t,-t,-2-t)$

i. Sumamos los valores del punto e igualamos a 4

1. $1+3t-t-2-t=4 \to t=5$

ii. Sustituimos t=5 en la ecuación paramétrica

1. $\begin{cases} x=1+3\cdot 5 \\ y=-5 \\ z=-2-5 \end{cases}$

2. Obtenemos $P(16,-5,-7)$

c) Halla la ecuación de una recta paralela y que pase por el punto $B(1,-2,0)$.

a. Tomamos el mismo vector director $\vec{v}(3,-1,-1)$

b. Ecuación vectorial: $(x,y,z):(1,-2,0)+t(3,-1,-1)$

10.- Expresa de todas las formas posibles la recta r: $\begin{cases} x+y-2z=2 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ y halla la ecuación de una recta s que pasando por el punto $B(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

a) Hallamos el vector director con el determinante

a. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4i-3j-3k \to \vec{v}(4,-3,-3)$

b) Hallamos un punto perteneciente a la recta, debemos dar un valor a x, y o z.

a. z=0

i. $\begin{cases} x+y=2 \to x+y-2=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

ii. Resolvemos el sistema y obtenemos $x=\frac{4}{3}; y=\frac{2}{3}$

b. $P\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)$

c) Vectorial

a. $(x,y,z):\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)+t(4,-3,-3)$

d) Paramétrica

a. $\begin{cases} x=\frac{4}{3}+4t \\ y=\frac{2}{3}-3t \\ z=-3t \end{cases}$

Textos Marea Verde

e) Continua

a. $\frac{x-\frac{4}{3}}{4}=\frac{y-\frac{2}{3}}{-3}=\frac{z}{-3}$

f) Implícita

a. $\begin{cases} 4\left(y-\frac{2}{3}\right)=-3\left(x-\frac{4}{3}\right)\to 4y-\frac{8}{3}=-3x+4\to y=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}x+1 \\ -3\left(y-\frac{2}{3}\right)=-3z\to -3y+\frac{2}{3}=-3z\to z=y-\frac{2}{9} \end{cases}$

g) Ecuación de una recta s que pasando por el punto $B(1,-2,-1)$ tenga como vector director el de la recta r.

a. La ecuación vectorial de la recta es:

i. $(x,y,z):(1,-2,-1)+t(4,-3,-3)$

11.Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano $\pi: 2x-y+3z-6=0$ y halla 3 puntos de ese plano que estén alineados.

$2x-y+3z-6=0;$
$y=2x+3z-6;$
$x=t;$
$z=s;$
$y=2t+3s-6;$

Ecuaciones paramétricas

$\begin{cases} x= \quad t \\ y=2t+3s-6; \\ z= \qquad s \end{cases}$

$P=(0,-6,0) \qquad \vec{u}=(1,2,0) \qquad \vec{v}=(0,3,1)$

Ecuación vectorial

$(x,y,z)=(0,-6,0)+t(1,2,0)+s(0,2,1)$

3 puntos alineados: t = 0 y s = 0, P(0, -6, 0); t = 1 y s = 0, Q(1, -4, 0) M(1/2, -5, 0) (punto medio)

12. Halla la ecuación del plano (expresarlo de todas las formas posibles) en los siguientes casos:
a) Pasa por el punto A(3, 2, -1) y tiene como vectores directores $\vec{u}=(-1,1,0)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$.
b) Pasa por los puntos A(1, 2, 0) y B(-1, 1, 2) y uno de sus vectores directores es $\vec{u}=(1,-2,-1)$
c) Pasa por los puntos A(0, -2, 1), B(-2, 0, -1) y C(1, -2, 0).

a) Vectorial

$(x,y,z)=(3,2,-1)+t(-1,1,0)+s(2,0,-1)$

Paramétrica

$\begin{cases} x=-t+2s+3 \\ y\ =t+\quad 2 \\ z= \qquad -s-1 \end{cases}$

Implícita

$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$

$-x+3-\left((2(z+1)+y-2)\right)=0;\ -x+3-2z-2-y+2=0;\ \ x+y+2z-3=0$

b) Hacemos el vector $\overrightarrow{AB}$ $\qquad \overrightarrow{AB}=(-2,-1,2)$

Vectorial

Textos Marea Verde

$(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, -2, -1) + s(-2, -1, 2)$
Paramétrica
$$\begin{cases} x = t - 2s + 1 \\ y = -2t - s + 2 \\ z = -t + 2s \end{cases}$$
Implícita
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$(-4x - z + 4 + 2y - 4 - (4z + x - 1 + 2y - 4) = 0;$
$(-4x - z + 4 + 2y - 4 - 4z - x + 1 - 2y + 4) = 0;$
$4x + z - 4 - 2y + 4 + 4z + x - 1 + 2y - 4 = 0;$
$4x + x - 2y + 2y + 4z + z - 4 + 4 - 1 - 4 = 0;$
$5x + 5z - 5 = 0; \quad x + z - 1 = 0$

c) Hacemos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. $\quad \overrightarrow{AB} = (-2, 2, -2) \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$
Vectorial
$(x, y, z) = (0, -2, 1) + t(-2, 2, -2) + s(1, 0, -1)$
Paramétrica
$$\begin{cases} x = -2t + s \\ y = 2t - 2 \\ z = -2t - s + 1 \end{cases}$$
Implícita
$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z-1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
$\big(-2x - 2y - 4 - (2z - 2 + 2y + 4)\big) = 0; \quad (-2x - 2y - 4 - 2z + 2 - 2y - 4) = 0;$
$2x + 2y + 4 + 2z - 2 + 2y + 4 = 0;$
$2x + 2y + 2y + 2z + 4 + 4 = 0; \quad x + 2y + z + 4 = 0$

13. Halla las ecuaciones de los planos OXY, OXZ, OYZ y exprésalos de todas las formas posibles.

PLANO OXY
Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$
Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$
Ecuación implícita: $z = 0$

PLANO OXZ
Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,0) + \mu(0,0,1)$
Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$
Ecuación implícita: $y = 0$

PLANO OYZ
Ecuación vectorial: $(X, Y, Z) = (0,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(0,0,1)$
Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$
Ecuación implícita: $x = 0$

Textos Marea Verde

14. Encuentra las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto *P* (8,9,1) y es paralelo a las rectas:

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \qquad y \qquad s: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1-3\lambda \end{cases}$$

Vector director de la recta *r* : $\bar{d}_r(-2,-1,2)$

Vector director de la recta *s* : $\bar{d}_s(-1,3,-3)$ $\qquad$ *P* (8,9,1)

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 8-2\lambda-\mu \\ y = 9-\lambda+3\mu \\ z = 1+2\lambda-3\mu \end{cases}$

15. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-2,0,1)$ y contiene a la recta r de la ecuación $r: \frac{x}{2} = y-1 = 2-z$

$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3} \to \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$

$$\left.\mathrm{B}(0,1,2)\ \vec{\mathrm{v}}(2,1,-1)\right\}\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}(-2,-1,-1)\ \ \vec{\mathrm{v}}(2,1,-1) \to r: \begin{vmatrix} 2 & -2 & x+2 \\ 1 & -1 & y \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \to$$

$-2x+4y-4=0 \qquad x-2y+2=0$

16. Expresa todas las formas posibles de la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$

Ecuación vectorial del plano: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + (v_x,v_y,v_z)t + (u_x,u_y,u_z)s$

$$\left.\begin{matrix} A(3,-2,-1) \\ \vec{v}(3,-2,1) \\ O(0,0,0) \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} A(3,-2,-1) \\ \vec{v}(3,-2,1) \\ \overrightarrow{OA}(3,-2-1) \end{matrix}\right\} (x,y,z) = (3,-2,-1) + (3,-2,1)t + (3,-2,-1)s$$

Ecuación paramétrica:

$$\left.\begin{matrix} x = x_0 + v_x t + u_x s \\ y = y_0 + v_y t + u_y s \\ z = z_0 + v_z t + u_z s \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 3+3t+3s \\ y = -2-2t-2s \\ z = -1+t-s \end{matrix}\right\}$$

Ecuación general:

$$\left.\begin{matrix} 3t+3s = x-3 \\ -2t-2s = y+2 \\ t-s = z+1 \end{matrix}\right\} \to \begin{vmatrix} 3 & 3 & x-3 \\ -2 & -2 & y+2 \\ 1 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x+3y+3=0$$

17. Expresa de todas las formas posibles la ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y contiene a la recta r: $-x+2 = 3y = 1-z$

$$-x+2 = 3y = 1-z \ \to \ \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{-1}$$

$$P(-2,0,-1) \qquad \bar{V}\left(-1,\frac{1}{3},-1\right) \qquad O(0,0,0)$$

$$\bar{u} = \overline{PO} \to \ \bar{u} = \big(0-(-2), 0-0, 0-(-1)\big) = (2,0,1)$$

$$\bar{v}x\bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}i + j - \frac{2}{3}k \to i+3j-2k$$

$$1\cdot(x-0) + 3(y-0) - 2(z-0) \to x-3y-2z=0$$

18. Halla la ecuación del plano que contiene al punto $M(-1,2,1)$ y a la recta r: $\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases}$

$$r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} \rightarrow \frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-3}$$

$$P(0,2,1) \quad \bar{V}(-2,1,-3) \quad M(-1,2,1)$$

$$\bar{u}=\overline{PM} \rightarrow \bar{u}=(-1-0,2-2,1-1)=(-1,0,0)$$

$$\bar{v}x\bar{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0i+3j+1k$$

$$0(x-(-1))+3(y-2)+1(z-1) \rightarrow 3y+z-7=0$$

19. Calcula para qué valor de m los puntos A (1, m, 2), B(2, 3, m) y C(-1, -9, 8) están alineados. En el caso de que m=0, halla la ecuación del plano que contiene a dichos puntos. ¿Pertenece el punto M (2, 1, -2) a dicho plano?

$\overline{AB}(1,3-M,M-2)$; $\overline{AC}(-2,-9-M,6)$

$$\frac{1}{-2}=\frac{3-M}{-9-M}=\frac{M-2}{6}$$

$$\frac{1}{m-2}=\frac{-8}{9}; \qquad 9=-8m+16; \qquad m=\frac{-16+9}{-8}=\frac{7}{8}; \qquad m=\frac{7}{8}$$

- Para m=0:

A(1,0,2) B (2,3,0) C(-1,-9,8)

$\overline{AB}=(1,3,-2)$

$\overline{AC}=(-2,-9,6)$

- Cogemos el punto A y hacemos la ecuación paramétrica del plano:

x= 1+$\lambda-2\mu$
y= $3\lambda-9\mu$
z= 2-$2\lambda+6\mu$

20. Halla el plano que contiene a la recta r: $\begin{cases} y=1+x \\ z=-1-2x \end{cases}$ y es paralelo a s: $\frac{x+1}{3}=1-y=\frac{z}{3}$.

- Ecuación paramétrica recta r:

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$$

- Sacamos un punto de r; $\lambda=0$; $P(0,1,-1)$
- Cogemos el vector de la recta r: $\bar{V}_1(1,1,-2)$
- Cogemos el vector de la recta s: $\bar{V}_2(3,1,3)$
- Ecuación vectorial del plano: (x, y, z)=$(0,1,-1)+(3,1,3)t+(1,1,-2)s$

21. Calcula m y n para que la recta r: $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$ esté contenida en el plano π, cuya ecuación es $\pi: mx+2y-4z-2n=0$.

- Cogemos el vector y hallamos un punto de la recta r: $\bar{V}_1(4,-4,1)$ P(3,1,-3)

$$\bar{V}_1\cdot\bar{n}=0 \qquad (4,-4,1)\cdot(m,2,-4)=0; 4m+8-16-4m-8+16+m+2-4=0;$$

$$m-2=0; m=2$$

Textos Marea Verde

- En la ecuación del plano sustituimos con el valor de m y el punto: 2(3)+2·1-4·(-3)-2n=0

6+2+12-2n=0 20-2n=0 n=10

22. Estudia la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ y $s: x+2=-2y=z-1$, y halla la ecuación del plano que las contiene.

$r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ $\quad s: x+2=-2y=z-1$

$$\vec{V_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,1)$$

$$s: x+2=-2y=z-1 \quad \rightarrow \quad s: \frac{x+2}{1}=\frac{y}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{1} \quad \rightarrow \quad \vec{V_s}=\left(1,-\frac{1}{2},1\right)$$

$$Q_{(s)}=(-2,0,1)$$

$$r:\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=3 \\ z=-4 \end{cases} \quad P_{(r)}=(3,0,-4)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3)=(-5,0,5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}=\frac{5}{2}\neq 0$$

Los vectores $\vec{V_r}\ \vec{V_s}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes, luego las dos rectas se cruzan.
No existe un plano que contenga a las dos rectas

23.-Halla la posición relativa, según los valores de m y n, de las rectas:

$r: \frac{x+m}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{n}$ $\quad s:\begin{cases} -x+y-z+2=0 \\ 2x+4y-3z-5=0 \end{cases}$

$r:\ \ 2x+2m=2y\ ,\ yn=2z$ $\quad r:\begin{cases} 2x-2y+2m=0 \\ yn-2z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & 2m \\ 0 & n & -2 & 0 \end{array}\right) 2F1+F2\,,2F1+F3 \quad \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & 2m \\ 0 & n & -2 & 0 \end{array}\right) C2\leftrightarrow C3\ \ y-F3+F4$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2m+4 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{array}\right) -2F2+5F3 \quad \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 10m+22 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{array}\right) \quad nF3+12F4$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 10m+22 \\ 0 & 0 & 0 & 10mn+22n \end{array}\right) \quad n(10m+22)=0 \quad ;m=\frac{22}{10}=\frac{11}{5} \quad \text{n = 0}$$

a) Para n≠ 0

$1)m\neq\frac{11}{5} \quad r(C)=3\neq r(A)=4 \quad S.I\ (\,se\ cruzan)$

$2) m = \frac{11}{5} \quad r(C) = 3 = r(A) \quad S.C.D$ (se cortan)

$b) \; Para\; n = 0 \;\; r(C) = 3 = r(A) \quad S.C.D$ (se cortan)

24. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y planos:

$\boldsymbol{a)\; \pi: x + 4y + z + 2 = 0}$

$\boldsymbol{r: \begin{cases} -x + 2y = 5 \\ -2y - z = 4 \end{cases}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4, \; Al\ ser\ distinto\ de\ 0\ el\ rag(A) = 3$$

Se trata de un S.C.D entonces la posición de la recta y el plano es **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases} -x & +2y & 0 & = 5 \\ 0 & -2y & -z & = 4 \\ +x & +4y & +z & = -2 \end{cases} \; ; x = \frac{-7}{2}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{5}{2} \;\; ; \;\; P\left(\frac{-7}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-5}{2}\right)$$

$\boldsymbol{b)\; \pi: 2x + y - z - 2 = 0}$

$\boldsymbol{r: \begin{cases} -x + 3y - z + 2 = 0 \\ x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 17;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$b) \begin{cases} -x & +3y & -z & = -2 \\ x & +y & +2z & = 4 \\ 2x & +y & -z & = 2 \end{cases} \; ; x = \frac{32}{17}, y = -\frac{8}{17}, z = \frac{22}{17} \qquad P\left(\frac{32}{17}, -\frac{8}{17}, \frac{22}{17}\right)$$

$\boldsymbol{c)\; \pi = 2x + y + z - 2 = 0}$

$\boldsymbol{r: \begin{cases} -x + 2y + z - 4 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12\,;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases} -x & +2y & +z & = 4 \\ x & -y & +2z & = -2 \\ +2x & +y & +z & = 2 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 2, z = 0 \;\; P(0, 2, 0)$$

$\boldsymbol{d)\; \pi: x - 4y - 3z = 5}$

$\boldsymbol{r: \begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2y - z = 2 \end{cases}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} = 4;$$

Se trata de un S.C.D entonces recta y plano son **secantes,** el punto es:

$$\begin{cases} 1x & -4y & -3x & =5 \\ 1x & -2y & +0 & =3 \\ 0 & -2y & +1z & =2 \end{cases} \qquad x=1\ ,y=-1\ \ ,z=0\ ;\ P(1,-1,0)$$

25. Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+4y-6z=-4 \\ \pi_2: \quad x-2y+3z=2 \end{cases}$ $\frac{-2}{1}=\frac{4}{-2}=\frac{-6}{3}=\frac{-4}{2}$ Ambos planos son coincidentes

b) $\begin{cases} \pi_1: \quad 2x-y+z=1 \\ \pi_2: -6x+3y-3z=3 \end{cases}$ $\frac{2}{-6}=\frac{-1}{3}=\frac{1}{-3}\neq\frac{1}{3}$ Ambos planos son paralelos

c) $\begin{cases} \pi_1: \quad x-y+3z=4 \\ \pi_2: -2x+3y-z=3 \\ \pi_3: 3x-4y+4z=-1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 4 \\ -2 & 3 & -1 & | & 3 \\ 3 & -4 & 4 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 11 \\ 0 & -1 & -5 & | & -13 \end{pmatrix} F_2+F_3$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$

$Rg\ (C)=2\neq Rg(A)=3$ Por ello, el sistema es incompatible y los planos se cortarían 2 a 2 en tres rectas paralelas formando un prisma puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

d) $\begin{cases} \pi_1: 3x-y+z=-1 \\ \pi_2: \ x+y-5z=1 \\ \pi_3: 2x-3y-z=-1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 1 & -5 & | & 1 \\ 2 & -3 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1-3F_2 \\ -2F_1+3F_3 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -4 & 16 & | & -4 \\ 0 & -7 & -5 & | & -1 \end{pmatrix} -7F_2+4F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & -1 \\ 0 & -4 & 16 & | & -4 \\ 0 & 0 & -132 & | & 24 \end{pmatrix}$

$Rg\ (C)=Rg(A)=3$ Luego el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

26. Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de los siguientes planos:

a) $\begin{cases} \pi_1: -2x+2\lambda y-4z=2 \\ \pi_2: \quad x-2y+\lambda z=-1 \end{cases}$

$$-\frac{2}{1}=\frac{2\lambda}{-2}=\frac{-4}{\lambda}=\frac{-2}{1}\rightarrow\frac{-4}{\lambda}=\frac{-4}{2}=\frac{-2}{1}\rightarrow -4\lambda=-8\,;\lambda=2$$

Para $\lambda=2$: Ambos planos son coincidentes, puesto que los coeficientes de sus variables son proporcionales

Para $\lambda\neq 2$: Los planos se cortan en una recta, ya que los coeficientes de las variables no son proporcionales

b) $\begin{cases} \pi_1: -x+2y+z=2 \\ \pi_2: \quad x+\lambda_y-2z=1 \\ \pi_3: \lambda x-y-4z=-3 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 1 & \lambda & -2 & | & 1 \\ \lambda & -1 & -4 & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow F_1+F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3 \\ \lambda & -1 & -4 & | & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda F_1+F_3 \rightarrow$

Textos Marea Verde

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2\lambda-1 & \lambda-4 & | & 2\lambda-3 \end{pmatrix} \to F_3 - F_2 \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 & | & 2\lambda-6 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & \lambda+2 & -1 & | & 3 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 & | & 2(\lambda-3) \end{pmatrix} \qquad \lambda-3=0 \to \lambda=3$$

Para $\lambda = 3$: $Rg(C) = 2 = Rg(A)$ Entonces, el sistema sería compatible indeterminado y los planos se cortarían en una recta puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

Para $\lambda \neq 3$: $Rg\ (C) = Rg(A) = 3$ Luego el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

c) $\begin{cases} \pi_1: & x - y + 2z = 4 \\ \pi_2: & 2x + y + z = 3 \\ \pi_3: & 3x + \lambda y + 6z = -8 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 4 \\ 2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & \lambda & 6 & | & -8 \end{pmatrix} -2F_1 + F_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & | & -5 \\ 3 & \lambda & 6 & | & -8 \end{pmatrix} -3F_1 + F_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 3 & -3 & | & -5 \\ 0 & \lambda+3 & 0 & | & -14 \end{pmatrix}$$

$$\lambda + 3 = 0 \to \lambda = -3$$

Para $\lambda = -3$:$Rg\ (C) = 2 \neq Rg(A) = 3$ Por ello, el sistema es incompatible y el plano π_2 cortaría a los otros dos en rectas paralelas, puesto que los coeficientes de las variables de los planos π_1, π_3 son proporcionales a excepción de sus términos independientes, planos paralelos.

Para $\lambda \neq -3$: $Rg\ (C) = Rg(A) = 3$ Luego, el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

d) $\begin{cases} \pi_1: & x + \lambda y - z = 2 \\ \pi_2: & 2x - y + \lambda z = 5 \\ \pi_3: & x + 10y - 6z = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & | & 5 \\ 1 & 10 & -6 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 2 \\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda+2 & | & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \to (10-\lambda)F_2 + (2\lambda+1)F_3 \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & | & 2 \\ 0 & -2\lambda-1 & \lambda+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-2x+15 & | & -3\lambda+9 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda^2 - 2\lambda + 15 = 0 \to \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3\,; \qquad -3\lambda + 9 = 0 \to \lambda = 3$$

Para $\lambda \neq 3, \lambda \neq -5$: $Rg\ (C) = Rg(A) = 3$ Luego, el sistema sería compatible determinado y los tres planos se cortarían en un punto.

Para $\lambda = 3$: $Rg(C) = Rg(A) = 2$ Entonces, el sistema sería compatible indeterminado, y los planos serían distintos y se cortarían en una recta puesto que los coeficientes de las variables no son proporcionales.

Para $\lambda = -5$: $Rg\ (C) = 2 \neq Rg(A) = 3$ Por ello, el sistema es incompatible y los planos se cortarían 2 a 2 en tres rectas paralelas formando un prisma puesto que los coeficientes de sus variables no son proporcionales.

27. -Estudia, según los valores de λ, la posición relativa de las siguientes rectas y planos, calculando (cuando sea posible), el punto de intersección.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{r: x+1 = -y-2 = \frac{z}{2}} \\ \boldsymbol{\pi: x-3+\lambda z+2=0} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{r:} \begin{cases} \boldsymbol{2x+y-2z+4=0} \\ \boldsymbol{x-y+z-4=0} \end{cases} \\ \boldsymbol{\pi: x+4y+\lambda z-2=0} \end{cases}$

a) Recta: $\begin{cases} x+1 = -y-2 \ \rightarrow\ x+y+3=0 \\ -y-2 = \frac{z}{2} \ \rightarrow\ -2y-4 = z \ \rightarrow 2y+z+4=0 \end{cases}$

Plano: π = $x-3y+\lambda z+2=0$

Matriz (A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & \lambda \end{pmatrix}$$

Matriz Ampliada (A*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & \lambda & 2 \end{array}\right)$$

Rango A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda+0+1\ -\ (0+0\ -\ 3) = 2\lambda+1+3 = 2\lambda+4 \rightarrow 2\lambda+4=0 \rightarrow \lambda=-2$$

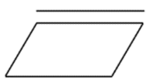
- Si $\lambda=-2$, el Rg (A) $\neq$ 3, y podemos comprobar que la matriz es de Rg = 2
- Para que Rg (A) = 3, λ tiene que ser $\neq$ - 2

Conclusión:

1) Cuando $\lambda \neq -2$ el $Rg\ (A)\ = 3 = Rg\ (A*) \rightarrow\ la\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes$ (S.C.D.)

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x+y \quad = -3 \\ 2y+z = -4 \\ x-3y+\ \lambda z = -2 \end{cases}$ $x = \frac{-2\lambda-7}{2(\lambda+2)}$; $y = \frac{-4\lambda-1}{2(\lambda+2)}$; $z = \frac{-7}{2(\lambda+2)}$

2) Cuando $\lambda=-2$ Rg (A) = 2 y Rg (A*) = 3, por lo que Rg (A) $\neq$ Rg (A*) y la recta y el plano son paralelos (S.I.)



b) Recta: $\begin{cases} 2x+y\ -\ 2z+4=0 \\ x-y+z\ -\ 4=0 \end{cases}$ Plano: π = $x+4y\ -\ \lambda z\ -\ 2=0$

Matriz (A)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda \end{pmatrix}$$ Dependiendo de λ, esta matriz será de Rango 2 o 3.

Determinante $|A|$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \rightarrow |A| = (2\lambda+1-8)-(2+8-\lambda) = 2\lambda-7-2-8+\lambda = 3\lambda-17$$

$3\lambda-17=0$; $\lambda = \frac{17}{3}$

- La matriz A no es de Rg = 3 para ese valor de λ;

en el resto de los casos, es decir, cuando $\lambda\ \neq \frac{17}{3}$, sí es de Rg = 3.

Matriz (A*)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & \lambda & 2 \end{array}\right)$$

Textos Marea Verde

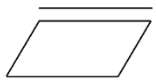
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-4+16-4)-(-\,4\,-\,32+2) = 16\,-\,8+36\,-\,2 = 42$$

<u>Conclusión</u>:

1) Si $\lambda \neq \frac{17}{3}$, ambas matrices son Rg = 3, por tanto, el plano y la recta son secantes (S.C.D.)

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x+y-2z=-4 \\ x-y+z\ =4 \\ x+4y-\ \lambda z=2 \end{cases}$ $x=\frac{18}{-3\lambda+17}\ ; y=\frac{12\lambda+4}{-3\lambda+17}\ ;\ z=\frac{54}{-3\lambda+17}$

2) Si $\lambda = \frac{-17}{3}$, Rg (A) = 2 $\neq$ Rg (A*) = 3, por tanto, el plano y la recta son paralelos (S.I.)



28. Dadas las rectas r: $\frac{x}{2}=y-3=\frac{z+3}{-1}$ y s: $x+1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$ se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

b) Ecuación del plano que contiene a dichas rectas.

a) <u>Primero</u>: Sacamos un punto y un vector de cada recta:

Recta r: $P(0,3,-3)$; $\vec{v}\,(2,1,-1)$

Recta s: $Q(-1,1,0)$; $\vec{w}(1,-1,2)$

<u>Segundo:</u> Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$M=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1-q_1 & p_2-q_2 & p_3-q_3 \end{pmatrix}$

<u>Tercero</u>: Calculamos el determinante M*:

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ R(M)=2=R(M*)→ Las rectas son **secantes**.

b) <u>Primero</u>: Para calcular la ecuación del plano que contiene a dichas rectas necesitamos un punto de una de las rectas y dos vectores, uno de cada recta:

$P(0,3,-3)$; $\vec{v}\,(2,1,-1)$; $\vec{w}(1,-1,2)$

<u>Segundo</u>: Calculamos la ecuación general del plano para este caso de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Tercero</u>: Sustituimos los valores dados:

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z+3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x-2(z+3)-(y-3)-[(z+3)+x+4(y-3)] = 0 \rightarrow$$

$\boldsymbol{x-5y-3z+6=0}$

29. Dadas las rectas r y s de ecuaciones r: $x=y=z$ y s: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$

a) Estudia su posición relativa.

b) Halla la recta que corta a r y s y es paralela a la recta t: $(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(1,2,-1)$

Textos Marea Verde

a) Primero: Sacamos un punto y un vector de cada recta:

Recta r: $P(0,0,0)$; $\vec{v}\,(1,1,1)$

Recta s: $Q(1,2,0)$; $\vec{w}(1,2,2)$

Segundo: Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$$M=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{ y } M^*=\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1-q_1 & p_2-q_2 & p_3-q_3 \end{pmatrix}$$

Tercero: Calculamos el determinante M*:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=2\rightarrow$ R(M)=2≠R(M*)=3→ **Las rectas se cruzan**

b) Primero: Pasamos a paramétricas las rectas r y s para ver las coordenadas de un punto de cada recta:

Recta r: $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ cualquier punto de la recta r será: P (t, t, t)

Recta s: $\begin{cases} x-1=s \\ y-2=2s \\ z=2s \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=1+s \\ y=2+2s \\ z=2s \end{cases}$ cualquier punto de la recta s será Q(1+s, 2+2s, 2s)

Segundo: El vector $\overrightarrow{PQ}$ debe ser paralelo al vector director de la recta t: (1, 2, -1):

$\overrightarrow{PQ}=(1+s-t,\quad 2+2s-t,\quad 2s-t)$

$\dfrac{1+s-t}{1}=\dfrac{2+2s-t}{2}=\dfrac{2s-t}{-1}$

Tercero: se resuelve el sistema ecuaciones:

$2+2s-2t=2+2s-t\rightarrow \boldsymbol{t=0}$

$-2-2s+t=4s-2t\rightarrow \boldsymbol{s=-\frac{1}{3}}$

Cuarto: Se sustituye y se toma el punto P(0,0,0) y el vector (1,2,-1) y la recta será:

30. Dados los planos $\pi_1=3x+2y-z=6$ y $\pi_2=-2x+y+3z-6=0$, halla la ecuación de una recta r que pasando por el punto M(1, 0, -1) es paralela a los dos planos.

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow(7,-7,7);$ *vector perpendicular a los vectores normales* y por tanto paralelo a los dos planos, la recta tendrá de ecuación

$r:(x,y,z)=\lambda\cdot(7,-7,7)+(1,0,-1)$ ecuación vectorial

$r=\begin{cases} x=7\lambda+1 \\ y=-7\lambda \\ z=7\lambda-1 \end{cases}\rightarrow$ *Ecuaciones paramétricas*

31. Dadas las rectas r y s de ecuaciones $r:\frac{x}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{m}$ y $s: x+1=-y=z-2$, hallar:

a) El valor de m para que ambas rectas se corten:

$r=\begin{cases} x=4\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=m\lambda \end{cases}$; $s=\begin{cases} x=\beta-1 \\ y=-\beta \\ z=\beta+2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{r}4\lambda=\beta-1\\1-2\lambda=-\beta\\m\lambda=\beta+2\end{array}\right\}\begin{array}{r}4\lambda-\beta=-1\\-2\lambda+\beta=-1\\m\lambda-\beta=2\end{array}$$

$2\lambda=-2;\ \lambda=-1$

$-2\cdot(-1)+\beta=-1\to 2+\beta=-1; \beta=-3$

$m\cdot(-1)+3=2;\ -m=-1; m=1$

b) Para ese valor de m, el plano π que contiene a s y r

$$\pi\begin{cases}Pr=(0,1,0)\\\vec{d}r=(4,-2,1)\\\vec{d}s=(1,-1,1)\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}4 & 1 & x\\-2 & -1 & y-1\\1 & 1 & z\end{vmatrix}=0\to -4z-2x+y-1+x-4y+4+2z=0$$

$-2z-x-3y+3=0$

c) La ecuación de la recta que pasa por el punto M (1,1,1) y es perpendicular al plano π

$\pi=\ -x-3y-2z+3=0\to(-1,-3,-2);\ vector\ perpendicular\ al\ plano$

$r:(x,y,z)=(1,1,1)+\lambda(-1,-3,-2), \lambda\in R$

32. Dada la recta r: $\begin{cases}\boldsymbol{x-y+3z+4=0}\\\boldsymbol{-2x+y-z+2=0}\end{cases}$ **y el plano** : $\pi: 4x-my+5z-n=0$ calcula:

a) Valores de m y n para que la recta y el plano sean:

i) paralelos ii) perpendiculares iii) la recta esté contenida en el plano.

b) Para m = -1 y n = 2, el punto de intersección de la recta y el plano.

c) Punto de intersección de la recta r, con el plano OYZ.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 3\\-2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-2i-5j-k\to(-2,-5,-1)\to(2,5,1)\qquad \overrightarrow{n_\pi}=(4,-m,5)$$

a) i) $\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{n_\pi}=0\quad (2,5,1)\cdot(4,-m,5)=8-5m+5=0\qquad m=\frac{13}{5}$

ii) $\frac{2}{4}=\frac{5}{-m}=\frac{1}{5}$ no tiene solución.

iii) El sistema formado por las 3 ecuaciones ha de ser compatible indeterminado.

$$\begin{vmatrix}4 & -m & 5\\1 & -1 & 3\\-2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-8+5m-5=0\,;\quad m=\frac{13}{5}$$

$$\begin{vmatrix}4 & 5 & -n\\1 & 3 & 4\\-2 & -1 & 2\end{vmatrix}=24+n-40-6n+16-10=0\,;\quad n=-2$$

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases}4x+y+5z=2\\x-y+3z=-4\\-2x+y-z=-2\end{cases}$ $\quad x=\frac{86}{9}\,;y=\frac{170}{9}\,;z=\frac{16}{9}$

c) **c** Resolvemos el sistema $\begin{cases}x\qquad\qquad=0\\x-y+3z=-4\\-2x+y-z=-2\end{cases}$ $\quad x=0\,;y=-5\,;z=-3$

33. Dadas las rectas r: $\boldsymbol{\frac{x}{2}=y-3=\frac{z+3}{-1}}$ **, y s:** $\boldsymbol{x+1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}}$**, calcula la ecuación de la recta que**

pasa por el punto M(-1, 1, 1) y es perpendicular a ambas rectas.

$\overrightarrow{dr} = (2,1,-1)$ $\overrightarrow{ds} = (1,-1,2)$ $\overrightarrow{dr}x\overrightarrow{ds}$ es un vector perpendicular a ambos

$$\overrightarrow{dr}x\overrightarrow{ds} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3i - 5j - 3k \to (3,-5,-3)$$

De donde las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son: $\begin{Bmatrix} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{Bmatrix}$

34.- Dadas las rectas r: $\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ y s: $\frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$, se pide:

a) Posición relativa de ambas rectas.

r: $\begin{cases} y = -1 + x \\ z = 2 - 3x \end{cases}$ s: $\frac{x-2}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$

$\vec{u} = (1,1,-3)$; $\vec{v} = (2,1,2)$; $\overrightarrow{AB} = (2,0,-2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2' = F_2 - F_1 \\ F_3' = F_3 + 3F_1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} F_3' = F_3 - 8F_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Es de rango tres, lo que indica que las rectas se cruzan.

b) Ecuación de la recta que pasa por $M = (-1,-1,0)$ y es perpendicular a ambas rectas.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5i - 8j - k \to \quad \vec{w} = (5,-8,-1)\ y\ M = (-1,-1,0)$$

Ecuación de la recta: $(x,y,z) = (-1,-1,0) + \lambda(5,-8,-1)$

35. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A (1,0,-1), B (1,1,0) y el tercer vértice es el punto de corte con el plano 0XZ con la recta r: $x = 2y - 2 = z - 1$.

$$\begin{matrix} x = \gamma \\ y = 0 \\ z = \mu \end{matrix} \to \begin{matrix} x = 2y + 2 \to x = 2 \\ x = z - 1 \to z = x + 1 \to z = 2 + 1 = 3 \end{matrix}$$

C (2,0,3)

$\overline{AB} \to B - A \to (1,1,0) - (1,0,-1) = (0,1,1)$ $\overline{BC} \to C - B \to (2,0,3) - (1,1,0) = (1,-1,3)$

$$\begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath} - (\bar{k} - \bar{\imath}) = 4\bar{\imath} + \bar{\jmath} - \bar{k} \qquad A = \frac{1}{2}|\bar{u}\ x\ \bar{v}| \to \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{18}$$

36. Dados los puntos A (-1,2,0), B (-3,3,-1) y C (1, a,1), se pide:

a) Calcula el valor de a para que los tres puntos estén alineados.

$\overline{AB} \to B - A \to (-3,3,-1) - (-1,2,0) = (-2,1,-1)$

$\overline{BC} \to C - B \to (1,a,1) - (-3,3,-3) = (4,a-3,2)$

$$\frac{-2}{4} = \frac{1}{a-3} = \frac{-1}{2} \to \frac{-2}{4} = \frac{1}{a-3} \to -2(a-3) = 4 \to -2a + 6 = 4 \to 2a = 2 \to a = 1$$

b) Para $a = -1$, calcula el perímetro del triángulo que tenga de vértices dichos puntos, así como su área y el valor de la altura correspondiente al vértice A.

$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-2)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{6}$

$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(1+3)^2 + (-1-3)^2 + (1+1)^2} = 6$

$d_{\overline{AC}} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$

Perímetro: $\sqrt{6} + 6 + \sqrt{14} = 12{,}19$

$\bar{u} = B - A \rightarrow (-3{,}3,-1) - (-1{,}2{,}0) = (-2{,}1,-1)$

$\bar{v} = C - B \rightarrow (1,-1{,}1) - (-3{,}3,-1) = (4,-4,2)$

$$|\bar{u}\ x\ \bar{v}| = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2\bar{\imath} + 8\bar{k} - 4\bar{\jmath}) - (4\bar{k} + 4\bar{\imath} - 4\bar{\jmath}) = -2\bar{\imath} + 0\bar{\jmath} + 0\bar{k} = -2$$

Área: $A = \frac{1}{2}|\bar{u}\ x\ \bar{v}| \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4} = 1$

Valor de la altura correspondiente al vértice A;

$\overline{BC} = \bar{v} = (4,-4,2)$; $A(-1{,}2{,}0)$ El valor de la altura es la distancia del punto A al punto de corte de la recta determinada por BC y el plano perpendicular a ésta que pasa por A.

Plano perpendicular:

$4(x+1) - 4(y-2) + 2(z) = 0 \rightarrow 4x + 4 - 4y + 8 + 2z = 0 \rightarrow 4x - 4y + 2z + 12 = 0$

Recta determinada por BC, considerando el punto C $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-1}{2}$

Resolvemos el sistema $\begin{cases} 4x - 4y + 2z = -12 \\ -4x - 4y = 0 \\ 2y + 4z = 2 \end{cases}$

c) Halla la ecuación de una mediana.

Punto medio de A y C→ $D\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\overline{BD} \rightarrow D - B \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (-3{,}3,-1) = (3, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

Ecuación de la mediana: $(x,y,z) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(3, -\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$

37.- Los puntos $P\,(0,1,0)$ y $Q\,(-1,1,1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercer vértice S pertenece a la recta r: $\{x = 4, z = 1\}$. Además, la recta que contiene a los puntos P y S es perpendicular a la recta r.

a) Determina las coordenadas de S.

Usamos la ecuación paramétrica para obtener el vector director:

$r: \begin{Bmatrix} x = 4 \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{Bmatrix} = r: \begin{Bmatrix} x = 4 + 0\cdot\lambda \\ y = 0 + \lambda \\ z = 1 + 0\cdot\lambda \end{Bmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{dr} = (0,1,0)$

Sabemos que x = 4 y que z = 1 por lo que $S\,(4,a,1)$

Como $\overrightarrow{dr}$ y $\overrightarrow{PS}$ son perpendiculares hacemos el producto escalar e igualamos a 0 para obtener el valor de a:

$\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{PS} = 0 \qquad \overrightarrow{dr} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{PS} = (4,a,1) - (0,1,0) = (4, a-1, 1)$

$\overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{PS} = 0\cdot 4 + (a-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0 \qquad \overrightarrow{dr}\cdot\overrightarrow{PS} = a - 1 = 0 \qquad a = 1$

Sustituimos en $S\,(4,a,1)$: $\qquad S\,(4,1,1)$

b) Calcula el área del triángulo PQS.

Usamos la fórmula del área del triángulo = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}\right|$

Resolvemos: $\overrightarrow{SQ}$ = $(-1,1,1) - (4,1,1) = (-5,0,0)$ $\qquad \overrightarrow{SP} = (0,1,0) - (4,1,1) = (-4,0,-1)$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$(\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5\vec{j} = (0,5,0) \qquad |\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}| = \sqrt{5^2} = 5$$

Área del triángulo = $\frac{1}{2}|\overrightarrow{SQ}x\overrightarrow{SP}| = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2}u^2$

38.- Los puntos $A\ (0,-2,0)$ y $B\ (-1,0\ ,1)$ son dos vértices de un triángulo isósceles.
a) Obtén las coordenadas del otro vértice C, sabiendo que pertenece a la recta r: $\{y=-5, z=0\}$.

Usamos la ecuación paramétrica para obtener el vector director:

$$r: \begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=-5 \\ z=0 \end{Bmatrix} = r: \begin{Bmatrix} x=0+\lambda \\ y=-5+0\cdot\lambda \\ z=0+0\cdot\lambda \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{dr} = (1,0,0)$$

Hallamos el punto medio entre A y B:

$M = \left(\frac{0-1}{2}, \frac{-2+0}{2}, \frac{0+1}{2}\right) \qquad M = \left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$ (suponemos A y B son los vértices del lado desigual)

Sabemos que y = -5 y que z = 0 por lo que $C\ (a,-5,0)$

Como $\overrightarrow{AB}$y $\overrightarrow{MC}$ son perpendiculares hacemos el producto escalar e igualamos a 0 para obtener el valor de a:

$\overrightarrow{AB} = (-1,0\ ,1) - (0,-2,0) = (-1,2,1)$

$\overrightarrow{MC} = (a,-5,0) - \left(\frac{-1}{2},-1,\frac{1}{2}\right) = \left(a+\frac{1}{2},-4,-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MC} = (-1,2,1)\cdot\left(a+\frac{1}{2},-4,-\frac{1}{2}\right) = \left(-a-\frac{1}{2}-8-\frac{1}{2}\right) \qquad -a = 8+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \qquad a=-9$

Sustituimos en $C\ (a,-5,0)$: $\quad C\ (-9,-5,0) \quad$ Solución: $C\ (-9,-5,0)$

b) Halla el valor del ángulo desigual.

El ángulo desigual es el del punto C.

Hallamos el ángulo usando la fórmula: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}$

Resolvemos:

$\overrightarrow{CA} = (0,-2,0) - (-8,-5,0) = (8,3,0) \qquad |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{8^2+3^2+0^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$

$\overrightarrow{CB} = (-1,0\ ,1) - (-8,-5,0) = (7,5,1) \qquad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{7^2+5^2+1^2} = \sqrt{49+25+1} = \sqrt{75}$

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|} \qquad \cos\alpha = \frac{(8,3,0)\cdot(7,5,1)}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} \qquad \cos\alpha = \frac{56+15+0}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} \qquad \cos\alpha = \frac{71}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}}$

$$\alpha = \arccos\frac{71}{\sqrt{73}\cdot\sqrt{75}} = 16{,}35°$$

El ángulo desigual es de 16,35°.

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. Una ecuación de la recta que pasa por el punto $A(0,1,2)$ y tiene por vector $\overline{v}=(1,1,1)$ es:

(Hacemos las ecuaciones de la recta hasta encontrar una que coincida con una de las opciones)

$(x,y,z)=(0,1,2)+\lambda(1,1,1)$

$\begin{cases} x=0+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=x \\ \lambda=y-1 \\ \lambda=z-2 \end{cases}$

$x=y-1=z-2$

$\begin{cases} x=y-1 \\ x=z-2 \end{cases} \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$

$$\mathbf{b)}\begin{cases} \mathbf{x-y+1=0} \\ \mathbf{x-z+2=0} \end{cases}$$

2. Una ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3,1,2)$ y $B(2,4,7)$ es:

(Primero hallamos un vector director con los dos puntos y luego hacemos las ecuaciones de la recta con el punto A (izquierda) y el B (derecha) hasta encontrar una que coincida con una de las opciones)

$AB=(2-3,4-1,7-2)=(-1,3,5)$

$(x,y,z)=(3,1,2)+\lambda(-1,3,5)$; $(x,y,z)=(2,4,7)+\lambda(-1,3,5)$

$\begin{cases} x=3+(-1)\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=2+5\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=\frac{x-3}{-1} \\ \lambda=\frac{y-1}{3} \\ \lambda=\frac{z-2}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x=2+(-1)\lambda \\ y=4+3\lambda \\ z=7+5\lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda=\frac{x-2}{-1} \\ \lambda=\frac{y-4}{3} \\ \lambda=\frac{z-7}{5} \end{cases}$

$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{5}$; $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-7}{5}$

$$\boldsymbol{c)}\ \frac{\boldsymbol{x-2}}{\mathbf{-1}}=\frac{\boldsymbol{y-4}}{\mathbf{3}}=\frac{\boldsymbol{z-7}}{\mathbf{5}}$$

3. El vector director de la recta $\begin{cases} \boldsymbol{x-y-2=0} \\ \boldsymbol{x-z-1=0} \end{cases}$ es:

$\begin{cases} x=y+2 \\ x=z+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

$$\mathbf{d)(1,1,1)}$$

4. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3,1,-2)$ y tiene como vectores directores $\overline{\boldsymbol{u}}=(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3})$ y $\overline{\boldsymbol{v}}=(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})$ es:

Ya que las opciones a y c son incorrectas por presentar valores que no coinciden con el punto y los vectores directores, la solución es:

$$\mathbf{b)\ 3x-z=11}$$

5. Una ecuación del plano que pasa por el punto $A(3,1,2)$ y contiene a la recta $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1})+\boldsymbol{t}(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$ es:

(Hacemos las ecuaciones de la recta con el punto A y el vector director de la recta hasta encontrar una que coincida con una de las opciones).

$(x,y,z)=(3,1,2)+t(0,0,1)$

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}$

Textos Marea Verde

$$\mathbf{b)\ x = 3}$$

6. Una ecuación del plano que pasa por el punto A (3,1,2) y el vector normal $\vec{n} = (0, 0, 1)$ es:
- Utilizamos la fórmula;

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0(x - 3) + 0(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \rightarrow z - 2 = 0 \rightarrow z = 2$$

- **La respuesta es la opción b) z = 2**

7. Una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, 0), B(0, 5, 0), C(0, 0, 7)$ es:
-Calculamos dos vectores y elegimos un punto

$\overrightarrow{A0}(x - 3, y, z)$; $\overrightarrow{AB} \rightarrow (0,5,0) - (3,0,0) \rightarrow (-3,5,0)$ $\overrightarrow{AC} \rightarrow (0,0,7) - (3,0,0) \rightarrow (-3,0,7)$

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \vec{\imath} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow (x - 3) \cdot 35 - (-21y) + 15z$$

$$35x + 21y + 15z - 105 = 0$$

- Como paso final hacemos su m.c.m y dividimos la ecuación entre el mismo y obtendremos la solución;

m.c.m = (105)

$$\boldsymbol{a)\ \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1}$$

8. Los planos $x - z = 3$ y $x + z = 7$ son:
Dividimos los coeficientes;

$$\frac{1}{1} \neq \frac{0}{0} \neq -\frac{1}{1}$$

- Se cumple el caso de la secante por tanto es la c).

9. Las rectas $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ y $\left.\begin{matrix} x = 3 + 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = 2 + 10t \end{matrix}\right\}$ son:

$r: \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ $s: \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{10}$

1º) Tomamos puntos y los vectores de ambas rectas y también tomaremos el vector de ambos puntos:

$P_r(4,1,-2)$ $P_s(3,1,2)$ $\overrightarrow{Vr}\ (2,3,5)$ $\overrightarrow{Vs}\ (4,6,10)$ $\overrightarrow{PrPs}\ (3 - 4\ , 1 - 1\ , 2 + 2) \rightarrow (-1,0,4)$

2º) Calculamos la matriz de coeficientes y obtendremos el rango;

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}^{A} \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0 \ \rightarrow R(A) = 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0 \end{cases}$$

3º) Calculamos el rango de la matriz ampliada;

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{A^{\#}} \rightarrow \big(48+0+(-30)\big)-(-30+48)=0 \rightarrow R(A^{\#})=2$$

Tras tener ambos rangos obtenemos que las rectas son paralelas. b)

10. El plano $x - z = 3$ y la recta $\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{5}$ son:

1º) Escribimos las ecuaciones implícitas de la recta.

$$r\begin{cases} \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2} \rightarrow 2y-2 = 3z+6 \rightarrow 2y-3z-8=0 \\ \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{3} \rightarrow 2y-2 = 3x-12 \rightarrow 3x-2y+10=0 \end{cases}$$

2º) Calculamos la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (0+0+0)—6+(-6)=12 \rightarrow R(A)=3$$

·Como R (A) = 3 esto quiere decir que el rango de la matriz ampliada también será R ($A^{\#}$)= 3 y por tanto la recta será secante al plano.

R (A) = R($A^{\#}$) = 3 → Recta secante al plano.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 6: Geometría métrica en el espacio

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

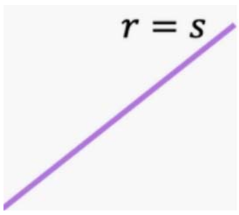
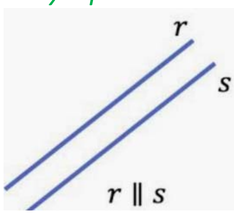
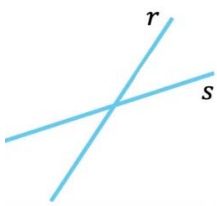
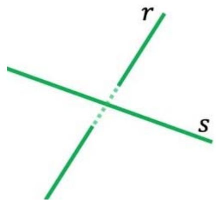
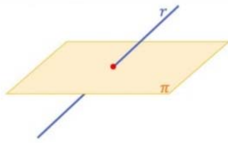
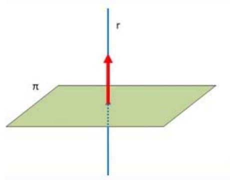
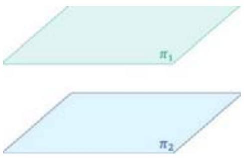
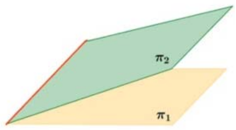
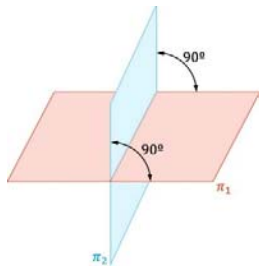
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Realiza en tu cuaderno los doce dibujos y comprueba las relaciones descritas en la tabla anterior.

r y s coincidentes 	*r y s paralelas* 	*r y s secantes* 	*r y s se cruzan* 
r y π coincidentes 	*r y π paralelos* 	*r y π secantes* 	*r y π perpendiculares* 
π₁ y π₂ coincidentes 	*π₁ y π₂ paralelos* 	*π₁ y π₂ secantes* 	*π₁ y π₂ perpendiculares* 

2. Halla la proyección ortogonal del punto $P(0,3,1)$ sobre la recta $r: \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{2}$.

$$t = \frac{v_1 \cdot (p_1 - a_1) + v_2 \cdot (p_2 - a_2) + v_3 \cdot (p_3 - a_3)}{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$$

$$r = \frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} \quad ; \quad q_1 = a_1 + v_1 t \quad q_2 = a_2 + v_2 t \quad q_3 = a_3 + v_3 t$$

$$t = \frac{3 \cdot (0+3) + 4 \cdot (3-2) + 2 \cdot (1-1)}{3^2 + 4^2 + 2^2} = \frac{13}{29}$$

$$q_1 = 3 + 3 \cdot \frac{13}{29} = \frac{126}{29} \quad q_2 = -2 + 4 \cdot \frac{13}{29} = \frac{-6}{29} \quad q_3 = -1 + 2 \cdot \frac{13}{29} = \frac{-3}{29}$$

$$Q = \left(\frac{126}{29}, \frac{-6}{29}, \frac{-3}{29}\right)$$

3. Halla la proyección ortogonal del punto $P(4,0,3)$ sobre el plano $\pi: 3x - 2y + z - 2 = 0$.

$$t = \frac{D + A(p_1) + B(p_2) + C(p_3)}{A^2 + B^2 + C^2} \quad ; \quad q_1 = p_1 + At \quad q_2 = p_2 + Bt \quad q_3 = p_3 + Ct$$

$$t = \frac{-2 + 3 \cdot (4) - 2 \cdot (0) + 1 \cdot (3)}{3^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{13}{14}$$

$q_1 = 4 + 3 \cdot \frac{13}{14} = \frac{95}{14} \quad q_2 = 0 - 2 \cdot \frac{13}{14} = \frac{-13}{7} \quad q_3 = 3 + 1 \cdot \frac{13}{14} = \frac{55}{14}$

$Q(\frac{95}{14}, \frac{-13}{7}, \frac{55}{14})$

4. Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π, siendo:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-11}{2} \qquad \text{y} \qquad \pi: 2x + 3y - z + 1 = 0$$

En primer lugar, obtenemos un vector director y un punto de la recta.

$\bar{v}(3,4,2) \quad P(2,-2,11)$ y un vector normal al plano $\bar{n} = (2,3,-1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-11 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= [-4(x-2) + 9(z-11) + 4(y+2)] - [8(z-11) + 6(x-2) - 3(y+2)] =$

$= -4x + 8 + 9z - 99 + 4y + 8 - [8z - 88 + 6x - 12 - 3y - 6] =$

$= -4x + 4y + 9z - 91 - 6x + 3y - 8z + 106 = -10x + 7y + z + 15 = 0$

Proyección ortogonal $= \begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ -10x + 7y + z + 15 = 0 \end{cases}$

5. Calcula la distancia del punto $\mathbf{A}\ (0,3,-4)$ al punto $B(-2,0,5)$.

$\overline{AB} = (B - A) = (-2,0,5) - (0,3,-4) = (-2,-3,9) = |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{94}\, u.$

6. Determina las coordenadas de los puntos que distan 4 del punto $C(2,-1,1)$.

$d(P,C) = 4$

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = 4 \to \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}\right)^2 = 4^2 \to$$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 16 \to$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 16 \to$

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 - 2z - 10 = 0$ Es la ecuación de una esfera

7. Determina las coordenadas de los puntos que distan R del punto $C(0,0,0)$.

$d(P,C) = R$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = R \to \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = R^2 \to$$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \to$ Es la ecuación de una esfera centrada en el origen de radio R

8. Determina las coordenadas de los puntos que equidistan de los puntos $A(0,0,0)$ y B(0, 0, 2).

d(P,A)=d(P,B) $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-2)^2}$

$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+(z-2)^2 \quad z^2 = z^2-4z+4 \quad -4z+4=0\ ;\ z=1$ se trata de un plano.

9. Calcula la distancia del punto P (0, –1, 0) a la recta: $r \equiv \frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$

$$A(2,-3,1)\ \ \bar{v}(4,2,3)\ \ \overline{AP}=(-2,2,-1)\rightarrow$$

$$\bar{v}\times\overline{AP}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot i+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1\end{vmatrix}\cdot j+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2\end{vmatrix}\cdot k\rightarrow -8i+2j+4k$$

$$\rightarrow d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\begin{cases}|(-8+2+4)|=\sqrt{(-8)^2+2^2+4^2}=\sqrt{94} \\ |\bar{v}|=|(4,2,3)|=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}\end{cases}\rightarrow$$

$$d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\frac{\sqrt{94}}{\sqrt{29}}=1{,}80$$

10. Calcula la distancia del punto P (0, – 3, – 2) al plano π : 3x – 2 y – 4z +1 = 0 .

$$d(P,\pi)=\left|\frac{\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\rightarrow d(P,\pi)=\left|\frac{3\cdot0+(-2)\cdot(-3)+4\cdot(-2)+1}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}}\right|\rightarrow\left|-\frac{47\sqrt{29}}{29}\right|=\frac{47\sqrt{29}}{29}$$

11. Calcula la distancia entre los planos: $\boldsymbol{\pi\equiv -x-y-3z=2 \qquad \pi'\equiv -x+2y-z=1}$

en primer lugar, estudiamos su posición relativa:

$\frac{-1}{-1}\neq\frac{-1}{2}\neq\frac{-3}{-1}\neq\frac{2}{1}$, son secantes, por tanto, la distancia es 0.

12. Calcula la distancia entre los planos: $\boldsymbol{\pi = x-y-3z=2 \qquad \pi' = x-y-3z=5}$

En primer lugar, estudiamos su posición relativa:

$\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{2}{5}$, son paralelos, por tanto, vamos a calcular su distancia**,**

un punto de π , para y = 0, z = 0 es (2, 0, 0)

$$\mathrm{D}(\mathrm{P},\Pi)=\left|\frac{\boldsymbol{Ax_0+By_0+Cz_0+D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=\left|\frac{1\cdot2+(-1\cdot0)+(-3\cdot0)-5}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-3}{\sqrt{11}}\right|=\frac{3\sqrt{11}}{11}\,\mathrm{U}$$

Textos Marea Verde

13. Calcula la distancia entre los planos. $\boldsymbol{\pi: x - y - 3z = 2} \quad \boldsymbol{\pi': 2x - 2y - 6z = 4}$

Analizamos los dos vectores normales:

$\vec{n} = (1, -1, -3) \qquad \vec{n}' = (2, -2, -6) \qquad \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{-3}{-6} = \frac{2}{4} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Son proporcionales, por tanto, los planos son coincidentes y la distancia entre ellos es 0.

14. Calcula la distancia entre los planos. $\boldsymbol{\pi: -2x + 4y - 2z = 7} \quad \boldsymbol{\pi': -x + 2y - z = 1}$

Analizamos los dos vectores normales:

$\vec{n} = (-2, 4, -2) \qquad \vec{n}' = (-1, 2, -1) \qquad \frac{-2}{-1} = \frac{4}{2} = \frac{-2}{-1} = \frac{7}{1} \qquad 2 = 2 = 2 \neq 7$

No son proporcionales, de modo que los planos son paralelos. Hallamos un punto de uno cualquiera de los planos tomando valores:

Damos 1 a x

Damos 2 a y

$\pi': -x + 2y - z = 1 \qquad \pi': -1 + 2 \cdot (2) - z = 1 \qquad \pi': -1 + 4 - z - 1 = 0 \qquad z = 2$

El punto es: $P(1, 2, 2)$

Y usamos la fórmula de la distancia del punto P al plano π:

$d(P, \pi) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \qquad d(P, \pi) = \left| \frac{-2 \cdot (1) + 4 \cdot (2) - 2 \cdot (2) - 7}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2}} \right| = \left| \frac{-2 + 8 - 4 - 7}{\sqrt{4 + 16 + 4}} \right| = \left| \frac{-5}{\sqrt{24}} \right| = \frac{5}{\sqrt{24}}$

La distancia del punto P al plano π es de $\frac{5}{\sqrt{24}} u$

15. Calcula la distancia entre la recta r: $\boldsymbol{\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{4}}$ **y el plano** $\boldsymbol{\pi: 2x + y + 5 = 0}$**.**

$\overline{V_r}$: (1,-2,4) $\qquad \bar{n} = (2,1,5) \qquad \bar{n} \cdot \bar{v} = (2,1,5) \cdot (1, -2, 4) = 20$, la recta no es paralela al plano

Como se cortan la distancia es 0.

16. Halla la distancia entre las rectas r: $\boldsymbol{\begin{cases} x + 2y & -3z = & 1 \\ 2x - y & +z + 4 = & 0 \end{cases}}$ **y s:** $\boldsymbol{\begin{cases} x = & 2 & -3t \\ y = & 1 + & t \\ z = & -3 & -2t \end{cases}}$.

$\overline{V_s}(-3, 1, -2)$; para calcular el vector director de r: $\overline{n_1}$=(1,2,-3) $\qquad \overline{n_2}$=(2,-1,1)

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$\bar{n}_1 x \overline{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$=-i-6j-4k $\quad \bar{V_r} = (-1,-6-4) \quad P_s(2,1,-3)$

$P_r: \begin{bmatrix} x+ & 2y= & 1 \\ 2x- & y= & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y=\frac{6}{5} \\ x=-\frac{1}{5} \end{bmatrix}; P_r\left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5},0\right)$

$\overline{P_r P_s} = (2,1,-3) - \left(-\frac{1}{5},\frac{6}{5},0\right) = (\frac{11}{5},-\frac{1}{5},-3) \sim (11,-1,-15)$

$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ -6 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -15 \end{pmatrix}$-$4F_1+F_3; -6F_1+F_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ 0 & 19 & -65 \\ 0 & 14 & -55 \end{pmatrix} 14F_2 - 19F_3 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ 0 & 19 & -65 \\ 0 & 0 & 1045 \end{pmatrix}$

El rango es 3, las rectas se cruzan.

$\bar{V_r} x \bar{V_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -6 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 16i + 10j - 17k \quad \bar{V_r} x \bar{V_s} = (16,10,-17)$

Aplicamos la fórmula: d(r,s)=$\frac{|[(11,-1,-15)),(-1,-6,-4),(-3,1,-2)]|}{|(16,10,-17)|}$

$\begin{vmatrix} 11 & -1 & -15 \\ -1 & -6 & -4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 451 \qquad |(16,10,-17)| = \sqrt{16^2+10^2+17^2} = 25.4$

d(r,s)=$\frac{451}{25.4} = 17,75$

17. Halla la distancia entre las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = -3-2t \end{cases}$

$$d(r,s) = \frac{|[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}]|}{|\overline{V_r} \times \overline{V_s}|}$$

$P_r = (1,-3,2)$; $P_s = (2,1,-3)$; $\overline{V_r} = (2,1,-1)$; $\overline{V_s} = (-3,1,-2)$;

$\overline{P_r P_s} = (2-1, 1-(-3), -3-2) = (1,4,-5)$

$|[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}]| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2+(-10)+12) - \left(15+(-1)+(-16)\right) = 0-(-2) = 2$

$\overline{V_r} \times \overline{V_s} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = -1\bar{\imath} + 7\bar{\jmath} + 5\bar{k}$

$|\overline{V_r} \times \overline{V_s}| = \sqrt{(-1)^2+7^2+5^2} = \sqrt{1+49+25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$d(r,s) = \frac{|[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}]|}{|\overline{V_r} \times \overline{V_s}|} = \frac{2}{5\sqrt{3}}\ u.$

Textos Marea Verde

18. Halla la distancia entre las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{Z-2}{-1}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$

$P_r = (1, -3{,}2)$; $P_s = (2{,}1, -3)$; $\overline{V_r} = (-1, 1, -1)$; $\overline{V_s} = (-1, 1, -1)$

$\overline{P_r P_s} = (2 - 1, 1 - (-3), -3 - 2) = (1, 4, -5)$

$$\left|\left[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}\right]\right| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Por las propiedades de los determinantes, al ser las dos últimas filas iguales, el resultado es cero.

$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}\right]\right|}{\left|\overline{V_r} \times \overline{V_s}\right|} = 0\, u.$ Las rectas se cortan.

19. Halla la distancia entre las rectas: $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{Z-2}{-1}$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -3 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overline{P_r P_s}, \overline{V_r}, \overline{V_s}\right]\right|}{\left|\overline{V_r} \times \overline{V_s}\right|}$

$P_r = (1, -3{,}2)$; $P_s = (1, -3{,}2)$; $\overline{V_r} = (2{,}1, -1)$; $\overline{V_s} = (-4, -2{,}2)$

$\overline{P_r P_s} = (1 - 1, -3 + 3{,}2 - 2) = (0{,}0{,}0)$ Es el mismo punto, luego la distancia es 0.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia la posición relativa de las rectas r**:** $\frac{x}{2} = y + 2 = \frac{z+2}{1}$ **y** s**:** $x = -y + 1 = -2z$ **y calcula:**

a) El punto de intersección.

b) La ecuación del plano que las contiene.

c) El ángulo que forman las rectas.

a) Primero: Para estudiar la posición relativa de las rectas, sacamos un punto y un vector de cada una:

Recta r: $P(0,-2,-2)$; $\vec{v}\,(2,1,1)$ Recta s: $Q(0,1,0)$; $\vec{w}(1,-1,-\frac{1}{2})$

Segundo: Se calcula el rango de la matriz M y M*:

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ p_1 - q_1 & p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \end{pmatrix}$$

Tercero: Calculamos el determinante M*:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$ R(M)=2=R(M*)→ Las rectas son **secantes**.

Cuarto: Para calcular el punto de intersección escribimos las rectas en paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + t \\ z = -2 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = -\frac{s}{2} \end{cases}$$

Quinto: Igualamos las coordenadas y resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2t = s \\ -2 + t = 1 - s \\ -2 + t = -\frac{s}{2} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{t = 1};\ 2t = s \rightarrow 2(3 - s) = s \rightarrow \boldsymbol{s = 2}$$

Sexto: Sustituimos en cualquiera de las rectas en paramétricas para sacar las coordenadas del punto de intersección:

El punto de intersección es (2, -1, -1)

b) Primero: Para calcular la ecuación del plano que contiene a dichas rectas necesitamos un punto de una de las rectas y dos vectores, uno de cada recta:

$P(0,-2,-2)$; $\vec{v}\,(2,1,1)$; $\vec{w}\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$

Segundo: Calculamos la ecuación general del plano para este caso de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Tercero: Sustituimos los valores dados:

Textos Marea Verde

$$\begin{vmatrix} x & y+2 & z+2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -\frac{x}{2} - 2(z+2) + (y+2) - [(z+2) - x - (y+2)] = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{x}{2} + 2y - 3z - 2 = 0}$$

c) Primero: El ángulo que forman las rectas es el ángulo que forman sus vectores directores: $\vec{v}\,(2,1,1);\ \vec{w}\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)$

Segundo: Se calcula con el producto escalar: $cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

Tercero: Se calculan los módulos y se sustituyen los valores:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \left|(2,1,1)\cdot\left(1,-1,-\frac{1}{2}\right)\right| = \left|2-1-\frac{1}{2}\right| = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \boldsymbol{\sqrt{6}} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

$$cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{1/2}{\sqrt{6}\cdot 3/2} = \frac{\sqrt{6}}{18} \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 82,18^{\underline{o}}}$$

2. Dados los planos $\pi_1: 3x+2y-z=6$ y $\pi_2: -2x+y+3z-6=0$, se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) Hallar el ángulo que forman esos dos planos.

c) Hallar la ecuación de una recta s que pasando por el punto N (-2,1,3) es perpendicular a π_2

a) Primero: Se considera el sistema formado por las ecuaciones de los planos:

$$\begin{cases} 3x+2y-z-6=0 \\ -2x+y+3z-6=0 \end{cases}$$

Segundo: se calcula el rango de la matriz de los coeficientes, M y el rango de la matriz ampliada con los términos independientes, M*:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -6 \\ -2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Se observa que R(M)=2=R(M*), ya que las dos filas no son proporcionales, por tanto, los planos **se cortan definiendo una recta.**

b) Primero: El ángulo formado por dos planos es el ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos, $\vec{n} = (3,2,-1)\ y\ \vec{n}'(-2,1,3)$

$$cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}$$

Segundo: Se calculan los módulos y se sustituye:

$$|\vec{n}\cdot\vec{n}'| = |(3,2,-1)\cdot(-2,1,3)| = |-6+2-3| = \boldsymbol{7}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2} = \boldsymbol{\sqrt{14}} \qquad |\vec{n}'| = \sqrt{(-2)^2+1^2+3^2} = \boldsymbol{\sqrt{14}}$$

Textos Marea Verde

$cos\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{1}{2} \to \boldsymbol{\alpha = 60º}$

c) Primero: Para hallar la ecuación de la recta *s* necesitamos un punto y un vector director y la ecuación será:
$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$
Segundo: La recta debe pasar por el punto N (-2,1,3) y el vector director será el vector normal al plano π_2 para que la recta sea perpendicular: $\vec{v} = (-2,1,3)$
Tercero: Se sustituye en la ecuación:

$$\boldsymbol{\frac{x+2}{-2} = y-1 = \frac{z-3}{3}}$$

3. Halla la proyección vertical del punto A (5, -2, -3) sobre el plano π: $2x + y - 2z + 4 = 0$.

- Hallamos la recta perpendicular al plano que contiene el punto A:

El vector normal del plano $\vec{n} = (2, 1, -2)$ es igual al vector director de la recta $\vec{v} = (2, 1, -2)$

Ecuación de la recta: $\left.\begin{array}{l} x = 5 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{array}\right\}$

- Sustituimos x, y, z en la ecuación del plano y resolvemos para obtener λ
$2(5 + 2\lambda) - 2 + \lambda - 2(-3 - 2\lambda) + 4 = 0$
$10 + 4\lambda - 2 + \lambda + 6 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad 9\lambda = -18 \qquad \lambda = \frac{-18}{9} = -2$
- Sustituimos λ para obtener la proyección
$x = 5 + 2(-2) = 1$
$y = -2 - 2 = -4$
$z = -3 - 2(-2) = 1$

La proyección del punto A sobre el plano π es el punto Q (1, -4, 1)

4. Halla la proyección de la recta $r \equiv -x + 2 = \frac{y-3}{2} = 3z + 1$ sobre el plano $\pi \equiv x + y + 2z - 2 = 0$ así como el ángulo que forman la recta y el plano.

$$-x + 2 = \frac{y-3}{2} = 3z + 1 \to \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

- Obtenemos el vector normal del plano, el vector director y un punto de la recta.
$\vec{v} = \left(-1, 2, \frac{1}{3}\right) \qquad P\left(2, 3, -\frac{1}{3}\right) \qquad \vec{n} = (1, 1, 2)$
Hallamos el plano π' que pasa por el punto $P\left(2, 3, -\frac{1}{3}\right)$ y tiene como vectores directores $\vec{v} = \left(-1, 2, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{n} = (1, 1, 2)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+\frac{1}{3} \\ -1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \left(z+\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\cdot\frac{11}{3} + (-y+3)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) + \left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot(-3) = 0$$

$$\frac{11}{3}x - \frac{22}{3} + \frac{7}{3}y - 7 - 3z - 1 = 0$$

$\pi' : \frac{11}{3}x + \frac{7}{3}y - 3z - \frac{46}{3} = 0$ contiene la recta r y es perpendicular a π

La proyección de la recta r es $\left.\begin{matrix} x+y+2z-2=0 \\ \frac{11}{3}x+\frac{7}{3}y-3z-\frac{46}{3}=0 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x+y+2z-2=0 \\ 11x+7y-9z-46=0 \end{matrix}\right\}$

Ángulo que forman la recta y el plano:

$$\alpha(r,\pi) = \text{arc sen}\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$|\vec{v}\cdot\vec{n}| = \left(-1,2,\frac{1}{3}\right)\cdot(1,1,2) = -1+2+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+2^2+\frac{1}{3}^2} = \frac{\sqrt{46}}{3} \qquad |\vec{n}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\alpha(r,\pi) = \text{arc sen}\frac{\frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{46}}{3}\cdot\sqrt{6}} = 17{,}51°$$

5. Obtener las coordenadas del punto simétrico de $A(0,-2,2)$ respecto de la recta $r: 1-x = y+1 = z$

$r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\qquad \bar{V}_r\ (-1,1,1) \qquad \bar{n}$ = Vector normal del plano = $\bar{V}_r$

Ecuación del plano → $\pi: Ax+By+Cz+D=0 \qquad -x+y+z+D=0$

$$-1(0)+1(-2)+1(2)+D=0 \quad D=0 \quad \pi:\ -x+y+z=0$$

Intersección entre la recta y el plano (Sustituir por los valores de x, y, z)

$$-(1-\lambda)+(-1+\lambda)+\lambda=0 \rightarrow \lambda=0$$

$x=1-0\rightarrow x=1$; $y=-1+0\rightarrow y=-1$; $z=0$ $\quad$ *Punto corte* $(1,-1,0)$

Con el punto de corte, que es el punto medio, se halla el punto simétrico a $A(0,-2,2)$

Para $x \to 1 = \frac{0+x}{2} \to x = 2$

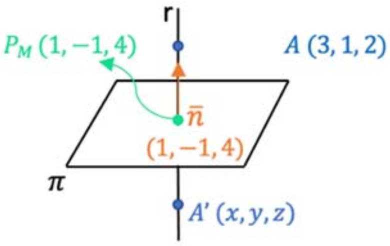
Para $y \to -1 = \frac{-2+4}{2} \to y = 0$ $\quad A'\,(\mathbf{2},\mathbf{0},-\mathbf{2})$

Para $z \to 0 = \frac{2+z}{2} \to z = -2$

6. Obtén las coordenadas del punto simétrico de $A\ (3,1,2)$ respecto del plano $\pi: x + y - z + 4 = 0.$

$\pi: x + y - z + 4 = 0 \to \bar{V}_r = \bar{n}\,(1,1,-1)$ → Vector director de la recta y vector normal del plano son el mismo.

Recta en paramétrica $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2-\lambda \end{cases}$



$$\pi: x + y + z + 4 = 0$$
$$3+\lambda+1+\lambda-(2-\lambda)+4 = 0$$
$$3+\lambda+1+\lambda-2+\lambda+4 = 0$$
$$3\lambda + 6 = 0$$

$\lambda = \frac{-6}{3} \to \lambda = -2$

<u>Punto de corte y medio</u>

Para $x = 3+(-2) = 1$ $\quad$ Para $y = 1+(-2) = -1$ $\quad$ Para $z = 2-(-2) = 4$

<u>Punto simétrico</u>

$1 = \frac{3+x}{2} \to x = -1$; $-1 = \frac{1+y}{2} \to y = -3$; $4 = \frac{2+z}{2} \to z = 6$ $\quad \boldsymbol{A'(-1,-3,6)}$

7. Obtén las coordenadas del punto simétrico de A (0,2,-1) respecto de:

a) $\boldsymbol{r: 1 + x = y + 2 = 1 - z}$
b) $\boldsymbol{\pi: x - y + z + 1 = 0}$

Textos Marea Verde

a) $r: 1+x = y+2 = 1-z \quad ; \quad r: x+1 = y-2 = \frac{z-1}{-1}$

$$P_r(-1,2,1) \qquad V_r(1,1,-1)$$

A partir de la ecuación continua de la recta obtenemos:

$$r: x+1 = y-2 = \frac{z-1}{-1} \rightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ z = -1-\lambda \\ x = 1+\lambda \end{cases}$$

De esta forma obtenemos un punto genérico de la recta $(1+\lambda,\ \lambda\ ,\ \text{-}1-\lambda)$

Para hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta sustituimos en:

$$\pi: x+y-z+D = 0$$

Como sabemos que pasa por el punto A (0,2,-1):

$$2+1+D = 0\ ; D = -3 \quad \rightarrow \ \pi: x+2y+z-3 = 0$$

Sustituimos el punto genérico de la recta en el plano para hallar λ y luego sustituyendo λ en la fórmula del punto genérico se obtiene la intersección (M). Al obtener M ya se puede hallar A' por $M = \frac{A+A'}{2}$

$(1+\lambda)+2\,(\lambda)+(\text{-}1-\lambda)-3 = 0 \qquad 2\lambda - 3 = 0 \quad ; \ \lambda = \frac{3}{2}$

$M = \left(1+\frac{3}{2}\right)+2\left(\frac{3}{2}\right)+(\text{-}1-\frac{3}{2}) \ \ \rightarrow M = \frac{A+A'}{2} \rightarrow A' = 2M - A$

$$A' = 2\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{-5}{2}\right) - (0,2,-1) = (5,1,-4)$$

b) $\pi: x-y+z+1 = 0$

$$\vec{n}_\pi = (1,-1,1)$$

$$P(0,2,-1) \qquad Vr = \vec{n}_\pi = (1,-1,1)$$

Punto genérico de la recta $(-\lambda,\ 2-\lambda, 1+\lambda)$

Sustituimos el punto genérico de la recta en el plano para hallar λ y luego sustituyendo λ en la fórmula del punto genérico se obtiene la intersección (M). Al obtener M ya se puede hallar A' por $M = \frac{A+A'}{2}$

$(-\lambda)\ -(\,2-\lambda)+(1+\lambda)+1 = 0 \quad ; \quad \lambda = 0 \quad \rightarrow M = (0,2,1)$

$$M = \frac{A+A'}{2} \rightarrow A' = 2M - A$$

$$A' = 2(0,2,1) - (0,2,-1) = (0,2,2)$$

8. a)Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A (1,-3,3) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos B (3,0,-1) y C(1,-1,0).

b) Obtén las coordenadas del punto simétrico de C respecto del plano.

a)

$$\pi \perp r \quad \rightarrow \vec{n}_\pi = Vr$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2,-2,1)$$

Ecuación del plano; sustituir el punto A y el vector $\overrightarrow{BC}$ de la recta:

$$-2(x-1)-2(y+3)+(z-3)=0$$

$$\pi: -2x-2y+z-7=0$$

b)

$$\pi: -2x-2y+z-7=0$$

$$\vec{n}_\pi=\vec{V}_c \qquad \rightarrow \vec{V}_c=(-2,-2,1)$$

Recta $CC'\begin{cases} P_c(1,-1,0) \\ \vec{V}_c(-2,-2,1) \end{cases}$

$$x=1-2\lambda \qquad y=-1-2\lambda \qquad z=\lambda$$

A partir de la recta obtenemos el punto genérico de la recta= $(1-2\lambda, -1-2\lambda,\ \lambda)$

Sustituimos el punto genérico de la recta en el plano para hallar λ y luego sustituyendo λ en la fórmula del punto genérico se obtiene la intersección (M). Al obtener M ya se puede hallar C' por $M=\frac{C+C\prime}{2}$

$$x=1-2\lambda \qquad y=-1-2\lambda \qquad z=\lambda$$

$$-2(1-2\lambda)-2(-1-2\lambda)+\lambda-7=0 \qquad 9\lambda-7=0 \qquad \lambda=\frac{7}{9}$$

$$M=\left(1-2\cdot\frac{7}{9}, -1-2\cdot\frac{7}{9}, \frac{7}{9}\right)=(-\frac{5}{9}, -\frac{23}{9}, \frac{7}{9})$$

$$M=\frac{C+C\prime}{2}\rightarrow C'=2M-C \qquad C'=2\left(-\frac{5}{9}, -\frac{23}{9}, \frac{7}{9}\right)-(1,-1,0)=\left(-\frac{19}{9}, -\frac{37}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

9. Calcula la distancia del punto P (0, –1, 0) a la recta $r\equiv\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$

$A(2,-3,1)$, $\bar{v}(4,2,3)$, $\overline{AP}=(-2,2,-1)$

$$\bar{v}\times\overline{AP}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\cdot i+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\cdot j+\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\cdot k\rightarrow -8i+2j+4k$$

$$d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\begin{cases} |(-8+2+4)|=\sqrt{(-8)^2+2^2+4^2}=\sqrt{94} \\ |\bar{v}|=|(4,2,3)|=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29} \end{cases}$$

$$d(P,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP}|}{|\bar{v}|}=\frac{\sqrt{94}}{\sqrt{29}}=1{,}80$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

10. Calcula la distancia del punto P (0, – 3, – 2) al plano $\pi : 3x - 2y - 4z + 1 = 0$.

$$d(P,\pi) = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \to d(P,\pi) = \left|\frac{3\cdot 0+(-2)\cdot(-3)+4\cdot(-2)+1}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-4)^2}}\right| \to \left|-\frac{47\sqrt{29}}{29}\right| = \frac{47\sqrt{29}}{29}$$

11. Dados los planos $\pi_1: 3x - 2y + z = 4$ y $\pi_2 : \begin{cases} x = 2 - \lambda + 3\mu \\ y = -\lambda + 4\mu \\ z = -1 + \lambda - \mu \end{cases}$ estudia su posición relativa y halla la distancia entre ellos.

Para calcular la posición relativa de ambos planos hay que conocer los vectores normales $\vec{n}$ y $\vec{n}'$. De la ecuación del plano π_1 podemos obtener el vector $\vec{n}(3,-2,1)$

Para sacar el vector $\vec{n}'$ transformamos la ecuación paramétrica del plano en implícita:

$$\pi_2 \begin{cases} x = 2 - \lambda + 3\mu \\ y = -\lambda + 4\mu \\ z = -1 + \lambda - \mu \end{cases} \to P(2,0,-1), \vec{u}(-1,-1,1), \vec{v}(3,4,-1)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \to$$

$$(1-4)x - (1-3)y + (4+3)z - [(2+4) - (3+8)] = 0 \to$$

$$-3x + 2y + 7z - [6 - 11] = 0 \to -3x + 2y + 7z = -5 \quad \pi_2: -3x + 2 + 7z = -5$$

El vector $\vec{n}'$ es $(-3,2,7)$

Puesto que $\frac{3}{-3} = \frac{-2}{2} \neq \frac{1}{7} \neq \frac{4}{-5}$ sabemos que los planos se cortan. Para determinar si son perpendiculares o no hacemos el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{n}'$:

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (3,-2,1) \cdot (-3,2,7) = 3(-3) + (-2)2 + 1 \cdot 7 = -9 - 4 + 7 = -6 \neq 0$$

Dado que el producto escalar no es 0, son secantes, pero no perpendiculares.

Como se cortan, la distancia entre los dos planos es cero.

12. Hallar la posición relativa de las rectas $\begin{cases} r: -2x = y - 3 = 2z + 2 \\ s: \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases} \end{cases}$ y calcular la distancia entre ellas.

Para calcular la posición relativa entre las rectas $\begin{cases} r: -2x = y - 3 = 2z + 2 \\ s: \begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases} \end{cases}$ obtenemos un punto y un vector de cada una.

Textos Marea Verde

Recta r: $-2x = y - 3 = 2z + 2 \rightarrow x = y - 3 = \frac{z+1}{2} \rightarrow A(0,3,-1), \vec{u}(1,1,2)$

Recta s: $\begin{cases} 2x - y + 4z = 0 \\ -x + y - 3z = 4 \end{cases}$

Para obtener un punto y un vector calculamos su ecuación paramétrica:

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & | \; 0 \\ -1 & 1 & -3 & | \; 4 \end{pmatrix} \rightarrow C_1 \leftrightarrow C_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & | \; 0 \\ 1 & -1 & -3 & | \; 4 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & | \; 0 \\ 0 & 1 & 1 & | \; 4 \end{pmatrix}; \mathrm{Rg}\,(C) = \mathrm{Rg}\,(A) = 2;\ \text{Nº inc.} = 3$: Sistema Comp. Indet.

$\begin{cases} -y + 2x + 4z = 0 \\ x + z = 4 \end{cases} \rightarrow x = 4 - z; y = 2(4 - z) + 4z = 2z + 8$

$$z = \lambda \qquad x = 4 - \lambda \quad y = 2\lambda + 8$$

$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 8 + 2\lambda \rightarrow B(4,8,0), \vec{v}(-1,2,1) \\ z = \lambda \end{cases}$

Ahora, calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$ y con los otros dos vectores hacemos una matriz para estudiar la posición relativa de las rectas:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,8,0) - (0,3,-1) = (4,5,1); \vec{u}(1,1,2); \vec{v}(-1,-2,1)$

$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_2 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 - 4F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$

$F_2 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}; Rg\ M = 3.$ Luego las rectas se cruzan sin cortarse.

Ahora calculamos la distancia entre ambas. Para ello utilizaremos los vectores $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{u}}$ y $\vec{v}$:

$\mathrm{d(r,s)} = \frac{|[\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{v}]|}{|\vec{\mathrm{u}} \times \vec{v}|} \qquad [\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{\mathrm{u}}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$

$\vec{\mathrm{u}} \times \vec{\mathrm{v}} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \bar{k} =$

$= (1 + 4)\bar{\imath} - (1 + 2)\bar{\jmath} + (-2 + 1)\bar{k} = (5, -3, -1)$

$$\mathrm{d(r,s)} = \frac{|4|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

13. Dados los pares de rectas, a) $\begin{cases} r: \begin{cases} 2x - z = 4 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \\ s: \frac{x}{3} = y + 1 = \frac{-z+1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} r: x = 2y = z + 1 \\ s: \frac{x-3}{2} = y + 1 = \frac{z}{2} \end{cases}$

1. Estudia la posición relativa.

2. Calcula la distancia entre ellas.

1. a)

$$s:\begin{cases} x-3y+(3\cdot(-1)-1\cdot 0)=0;\ x-3y-3=0 \\ -2x-3z+(3\cdot 1-(-2)\cdot 0)=0;\ -2x-3z+3=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 2x-z=4 \\ y+2z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3y-3=0 \\ -2x-3z+3=0 \end{cases} \end{cases};\ M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=13\neq 0;\ r(M)=3$$

$$M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$|M'|=-21\neq 0$; $r(M')=4$ Las rectas r y s se cruzan.

1. b)

$$\begin{cases} r: x=2y=z+1 \\ s: \dfrac{x-3}{2}=y+1=\dfrac{z}{2} \end{cases}$$

Hallamos vector y módulo de ambas rectas:

$$r=\begin{matrix} \vec{v}(1,2,1) \\ A(0,0,-1) \end{matrix}$$

$$s=\begin{matrix} \vec{u}(2,1,2) \\ B(3,-1,0) \end{matrix}$$

Hallamos las ecuaciones implícitas:

$$r\begin{cases} 2x-y+(1\cdot 0-2\cdot 0)=0; 2x-y=0 \\ x-z+(1(-1)-1\cdot 0)=0; x-z-1=0 \end{cases}$$

$$s\begin{cases} x-2y+(2(-1)-1\cdot 3)=0; x-2y-5=0 \\ 2x-2z+(2\cdot 0-2\cdot 3)=0; 2x-2z-5=0 \end{cases}$$

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix};\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0\ \text{r=3}$$

$$M'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}=9\neq 0\ \text{r'=4}$$

r=3, r'=4; Las rectas r y s se cruzan.

2. a)

$r:\begin{cases} 2x-z=4 \\ y+2z=0 \end{cases}$; Hallar punto y vector:

$$\vec{n} = (1,0,-1) \qquad \overrightarrow{n'} = (0,1,2) \qquad \vec{u} = \vec{n}\, x\, \overrightarrow{n'}$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}; \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (1,2,1);$$

Damos un valor a una incógnita

$z = 0; \qquad r: \begin{cases} 2x - 0 = 4; x = 2 \\ y + 2 \cdot 0 = 0; y = 0 \end{cases}$ A(0, 2, 0)

$$r = \begin{matrix} \vec{u}(1,2,1) \\ A(0,2,0) \end{matrix}$$

$$s = \begin{matrix} \vec{v}(3,1,-2) \\ B(0,-1,1) \end{matrix}$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\qquad \overrightarrow{AB} = (0,-3,1)$

Hallamos el producto vectorial $\vec{u}\, x\, \vec{v}$:

$$\vec{u} x \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k} = (-5,-5,-5)$$

Hallamos $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]$:

$$[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

Hallamos el módulo del producto vectorial $\vec{u} x \vec{v}$:

$$|\vec{u} x \vec{v}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$d(r,s) = \frac{|-20|}{5\sqrt{3}} = \frac{20}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ u.$$

2. b)

Hallamos vector y puntos de ambas rectas:

$$r = \begin{matrix} \vec{v}(1,2,1) \\ A(0,0,-1) \end{matrix}$$

$$s = \begin{matrix} \vec{u}(2,1,2) \\ B(3,-1,0) \end{matrix}$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\qquad \overrightarrow{AB} = (3,-1,1)$

Hallamos el producto vectorial $\vec{u} x \vec{v}$:

$$\vec{u} x \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{k} = (-3,0,3)$$

Textos Marea Verde

Hallamos el módulo del producto vectorial $\vec{u}x\vec{v}$: $|\vec{u}x\vec{v}| = \sqrt{3^2+0^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

Hallamos $[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]$: $[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$

$d(r,s) = \frac{|6|}{3\sqrt{2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,u.$

14. Halla la proyección de la recta $r \equiv -x+2 = \frac{y-3}{2} = 3z+1$ y $\pi: -x+3y+3z-3=0$, así como la distancia que hay entre la recta y el plano.

$\vec{v} = (1,2,1)$; $P = (2,3,1)$; $\underline{n}_\pi = (-1,3,3)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3x-4y+5z+1=0$$

$$Proyec_r\pi = \{-x+3y+3z-3=0\,; 3x-4y+5z+1=0\}$$

¿Son $r\ y\ \pi$ paralelos?

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = (-1,3,3)\cdot(1,2,1) = -1+6+3 = 8 \neq 0$$

Por lo que no son paralelos y por lo tanto $d(r,\pi) = 0$

15. Dada la recta $r: \{y = x+2\ ;\ z = 1-3x$, se pide:

- **a) Halla la ecuación de la recta s que pasando por el punto $A(-1,0,1)$ Es paralela a la recta r.**
- **b) Calcula la distancia entre ellas.**
- **c) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $M(-2,0,1)$ y contiene la recta r.**

a) Obtenemos un vector director de r: $\begin{matrix} x-y+2=0 \\ 3x+z-1=0 \end{matrix}$; $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow -\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$

$$s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

b) para P_r, hacemos x = 0 , obtenemos, y = 2 , z = 1 ; $P_r(0, 2, 1)$ $\overline{AP_r}$ (-1, -2, 0)

Textos Marea Verde

$$\bar{v}\times\overline{AP_r}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & -1 & 3\\ -1 & -2 & 0\end{vmatrix}=6\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+1\vec{k} \quad ; \quad (6,3,1) \qquad |\bar{v}\times\overline{AP_r}|=\sqrt{6^2+3^2+1^2}=\sqrt{46}$$

$$|\bar{v}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{11} \qquad d(A,r)=\frac{|\bar{v}\times\overline{AP_r}|}{|\bar{v}|}=\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{11}}$$

c) Calculamos $\overline{MP_r}(-2,-2,0)$, $\bar{v}(-1,-1,\ 3)$, M(-2, 0, 1) y la ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix}x+2 & y & z-1\\ -2 & -2 & 0\\ -1 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\ ;\ x-y+1=0$$

16. **Halla la ecuación de un plano π que contiene a la recta r: $\begin{cases}x-4y+z+3=0\\ 2x-2y-z+9=0\end{cases}$ y dista 2 unidades del origen de coordenadas.**

Escribimos el haz de planos que contiene a la recta: $x-4y+z+3+\alpha(2x-2y-z+9)=0$

$(1+2\alpha)x+(-4-2\alpha)y+(1-\alpha)z+(3+9\alpha)=0$

$d(0,\pi)=\frac{|0+0+0+(3+9\alpha)|}{\sqrt{(1+2\alpha)^2+(-4-2\alpha)^2+(1-\alpha)^2}}=2\ ;\ |3+9\alpha|=4[(1+2\alpha)^2+(-4-2\alpha)^2+(1-\alpha)^2]$

$|3+9\alpha|=4(9\alpha^2+18\alpha+18)$ Que no tiene soluciones reales.

17. **Dados el plano y la recta:** $\pi:\begin{vmatrix}x+1 & -2 & 1\\ y-1 & 1 & 0\\ z & 2 & -2\end{vmatrix}=0 \qquad r:\begin{cases}x-y+2=0\\ 2y+z=0\end{cases}$

a) El punto de intersección de la recta r con el plano π.

1º) Calculamos la ecuación del plano.

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x+1 & y-1 & z\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}\rightarrow(-2x-2+2y-2)-(z+4y-4)\ \rightarrow\ \pi\equiv -2x-2y-z+0=0$$

- Obtendremos con 2 puntos con; Y cuando es 0 y X es 0. Y calculamos la recta con su vector y uno de ellos.

Y = 0; X = - 2, Z = 0 A (- 2, 0, 0) · X = 0; Y = 2, Z = - 4 B (0, 2, - 4)

$$\overrightarrow{AB}\,(2,2,-4) \qquad A\,(2,0,0)$$

$$r\equiv(x,y,z)=(-2,0,0)+\gamma(2,2,-4)\ \rightarrow r\begin{cases}x=\ -2+2\gamma\\ y=2\gamma\\ z=-4\gamma\end{cases}$$

- Sustituimos en la ecuación del plano y el resultado de γ se sustituye en la recta para calcular el punto:

$$\pi\equiv -2(-2+2\gamma)-2(2\gamma)+4\gamma+0=0\rightarrow\gamma=2$$

Textos Marea Verde

$$r\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = -8 \end{cases} \rightarrow P_{Intersección}(2,4,-8)$$

b) El ángulo que forman la recta r y el plano π.

1º. Tomamos el vector de la recta y el vector normal del plano.

$$\overrightarrow{Vr} = (2,2,-4) \qquad \overrightarrow{N\pi} = (-2,-2,-1)$$

2º. Aplicamos la fórmula del producto escalar con el vector de la recta y el vector normal, la modificamos obteniendo una fórmula que obtendrá el ángulo entre plano y recta y la aplicamos.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha \rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$$

$$\cdot\ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{Vr}\cdot\overrightarrow{N\pi}|}{|\overrightarrow{Vr}|\cdot|\overrightarrow{N\pi}|}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|(2\cdot -2)+(2\cdot -2)+(-4\cdot -1)|}{\left|\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}\right|\cdot\left|\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}\right|}\right) \rightarrow$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right) \rightarrow \alpha = 15,8^0$$

c) La ecuación de un plano π' perpendicular al plano π y que contenga a la recta r.

1º. Calculamos el productor vectorial entre el vector normal y el de la recta y con el punto de la recta obtendremos la ecuación.

$$\overrightarrow{Vr} = (2,2,-4) \qquad \overrightarrow{N\pi} = (-2,-2,-1) \qquad P_0(-2,0,0)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow -6\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \rightarrow \quad \pi \equiv -6x+6y-12=0$$

18. Dados los planos $\pi_1: x-y=2$ y $\pi_2: x+y-2z-4=0$, se pide:

a) Ecuación de una recta que pase por el punto A (0,1,1) y sea paralela a los planos π_1 y π_2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (2,-2,2) \rightarrow perpendiculares\ a\ los\ vectores\ normales$$

$$r: (x,y,z) = \lambda\cdot(2,-2,2)+(0,1,1)$$

$$r = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda+1 \end{cases} \rightarrow Ecuación\ paramétrica\ recta\ paralela\ a\ los\ dos\ planos$$

b) Valor de m y n sabiendo que el punto $C(m,0,n)\in\pi_2$ y dista $\sqrt{2}$ unidades del plano de π_1

Textos Marea Verde

$$\left.\begin{array}{c} C \in \pi_2 \\ d(\pi_1, C) = \sqrt{2} \end{array}\right\} \qquad d(P,\pi_1) = \frac{m-0-2}{\sqrt{1^2+1^2}} \to \sqrt{2} = \frac{m-0-2}{\sqrt{1^2+1^2}} \to \sqrt{2} = \frac{m}{\sqrt{2}} \to m = 2$$

$$m + 0 - 2n - 4 = 0 \qquad 2 - 2n - 4 = 0 \qquad -2n = -2 + 4 \qquad n = -1$$

19.- Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos *A* (-1, 0, 1), *B* (0, 1, 1) y el tercer vértice es el punto de corte del plano *OYZ* con la recta r: $\frac{x+2}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-1}$

El plano *OYZ* → $\pi \equiv x = 0$

Luego si $r \equiv \frac{x+2}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-1}$,

y su ecuación paramétrica es: $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{cases}$,al igualarla con el plano:

$$\left.\begin{array}{l} -2 + 2\lambda = 0 \\ 2\lambda = 2 \\ \lambda = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right. \to \lambda = 1$$

Si sustituimos λ en la ecuación paramétrica, obtenemos el punto *C* que es el tercer vértice del triángulo, luego: $C(0, 3, -3)$

El área del triángulo es: $\frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2}$

$$\begin{array}{c} \overline{AB}(1,1,0) \\ \overline{AC}(1,3,-4) \end{array}; \quad \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -4i + 4j + 2k$$

$$área\ del\ triángulo\ ABC: \frac{\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}}{2} = 3u^2$$

20.- Halla la proyección de la recta r: $\frac{x+2}{2} = y - 2 = \frac{z+2}{-1}$ sobre el plano determinado por el origen de coordenadas y los puntos *A* (-1, 0, 1) y *B* (0, 1, 1)

Para hallar la ecuación del plano determinado por los puntos: *A* (-1, 0, 1), *B* (0, 1, 1) y O(0,0,0):

$$\begin{array}{c} \overline{OA}(-1,0,1) \\ \overline{OB}(0,1,1) \\ O(0,0,0) \end{array} \to \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \to (-z + 0 + 0) - (x - y + 0) = 0 \to -z - x + y = 0$$

$\pi \equiv x - y + z = 0$ (ecuación implícita del plano)

el vector normal de esta ecuación es $\bar{n}(1, -1, 1)$

a partir de r: $\begin{cases} P(-2,2,-2) \\ \bar{v}(2,1,-1) \end{cases}$ y $\bar{n}(1,-1,1)$ calculamos la proyección:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x+2 \\ 1 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \to \big(-2(z+2) + x + 2 - 1(y-2)\big) - (x + 2 + 2(y-2) + z + 2) = 0$$

$$\rightarrow \; -2z-4+x+2-y+2-x-2-2y+4-z-2=0$$

$\rightarrow -3y-3z=0$

La proyección: $r'\begin{cases} x-y+z=0 \\ -3y-3z=0 \end{cases}$

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. El ángulo formado por las rectas $\mathbf{r}: \left.\begin{array}{c}\mathbf{x = 4 - t}\\ \mathbf{y = -3 + t}\\ \mathbf{z = 2}\end{array}\right\}$ **y** $\mathbf{s}: \dfrac{\mathbf{x-5}}{\mathbf{2}} = \dfrac{\mathbf{y-4}}{\mathbf{3}} = \dfrac{\mathbf{z+3}}{\mathbf{-1}}$ **es:**

De la recta $r \to A(4,-3,2)$ y $\vec{v}(-1,1,0)$ De la recta $s \to B(5,4,-3)$ y $\vec{w}(2,3-1)$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}\right) \to \frac{|(-1\cdot 2)+(1\cdot 3)+(0\cdot -1)|}{\left(\sqrt{1^2+1^2+0^2}\right)\cdot\left(\sqrt{2^2+3^2+1^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{28}} \to \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{28}}\right) = 79{,}1°$$

La respuesta correcta es la c)

2. El ángulo formado por los planos $\boldsymbol{\pi}: \mathbf{3x - y + 2x - 1 = 0}$ **y** $\boldsymbol{\pi'}: \mathbf{x + 2y - z - 5 = 0}$ **es:**

Del plano $\pi \to \vec{n}(3,-1,2)$ Del plano $\pi' \to \vec{n}'(1,2,-1)$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n}'|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}'|}\right) \to \frac{|(3\cdot 1)+(-1\cdot 2)+(2\cdot -1)|}{\left(\sqrt{3^2+1^2+2^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1^2+2^2+1^2}\right)} = \frac{|-1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} \to$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|-1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}\right) = 83{,}73°$$

La respuesta correcta es la a)

3. La proyección ortogonal del punto P (0, 0, -1) sobre la recta $\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{x+2}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{y-2}}{\mathbf{-1}} = \frac{\boldsymbol{z+1}}{\mathbf{2}}$ **es:**

$v_1(x-p_1) + v_2(y-p_2) + v_3(z-p_3) = 0$ Plano perpendicular a la recta:

$3(x-0) + (-1)(y-0) + 2(z+1) = 0 \to 3x - y + 2z + 2 = 0 \to \pi$

Recta en paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x = -2 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{array}\right.$ Hallamos el punto de corte de la recta y el plano:

$3(-2+3t) - (2-t) + 2(-1+2t) + 2 = 0 \quad \to \quad t = \frac{4}{7}$ $\qquad$ $P'\left(-\frac{2}{7}, \frac{10}{7}, \frac{1}{7}\right)$

La respuesta correcta es la b)

4. La proyección ortogonal del punto P (0, 0, -1) sobre el plano $\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x - 2y + 3z - 1 = 0}$ **es:**

$v_n = (1,-2,3)$; $(x,y,z) = (0,0,-1) + \lambda(1,-2,3)$ recta perpendicular al plano.

Recta en paramétricas $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array}\right.$ Hallamos el punto de corte de la recta y el plano:

$\lambda - 2(-2\lambda) + 3(-1+3\lambda) - 1 = 0 \to \lambda = \frac{2}{7} \to \left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

La respuesta correcta es la b)

Textos Marea Verde

5. El Simétrico del punto P(1,-1,1) respecto del punto Q(0,-1,2) es:

$$\boldsymbol{P'}(P_1, P_2, P_3) \qquad \left(\frac{1+P_1}{2}, \frac{-1+P_2}{2}, \frac{1+P_3}{2}\right) = Q$$

$$\begin{cases} \frac{1+P_1}{2} = 0 \\ \frac{-1+P_2}{2} = -1 \\ \frac{1+P_3}{2} = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1+P_1 = 0 \\ -1+P_2 = -2 \\ 1+P_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = -1 \\ P_2 = -1 \\ P_3 = 3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{P'}(-1,-1,3)$$

La respuesta correcta es la b)

6. El simétrico del punto P(1, -1, 1) respecto a la recta r: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$

Expresamos la recta en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = -2+3t \\ y = 2-t \\ z = -1+2t \end{cases} \qquad \bar{V}_r = \vec{n}(3,-1,2)$$

$\pi: 3(x-1) - 1(y+1) + 2(z-1) \rightarrow 3x - y + 2z - 6 = 0$

La proyección ortogonal es el punto de intersección de la recta y el plano π

$3(-2+3t) - (2-t) + 2(-1+2t) - 6 = 0$

$-6 + 9t - 2 + t - 2 + 4t - 6 = 0$

$14t - 14 = 0 \rightarrow t = 1$

Sustituimos en la ecuación de recta:

$x = 2 + 3t \rightarrow x = 5 \quad ; \quad y = -2 - t \rightarrow y = -3 \quad ; \quad z = 1 + 2t \rightarrow z = 3$

$Q(5,-3,3)) \, ; \; P(1,-1,1) \qquad \left(\frac{1+P_1}{2}, \frac{-1+P_2}{2}, \frac{1+P_3}{2}\right)$

$$\begin{cases} \frac{1+P_1}{2} = 5 \\ \frac{-1+P_2}{2} = -3 \\ \frac{1+P_3}{2} = 3 \end{cases} \qquad P_1 = 9\,; \quad P_2 = -5\,; \quad P_3 = 5 \rightarrow P'(9,-5,5)$$

La respuesta correcta es la d)

7. La distancia del punto $\boldsymbol{A(0,1,0)}$ al punto $\boldsymbol{B(-1,0,2)}$ es:

1. Se calcula el vector determinado por los dos puntos:
   a. $\overrightarrow{AB}(-1,-1,2)$
2. Se calcula el módulo de este vector, y esa será la distancia
   a. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

Por lo que la solución es b)

Textos Marea Verde

8. La distancia del punto $A(0,1,0)$ a la recta $r: \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ es:

1. Sabemos que la fórmula de la distancia es: $d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} x \vec{v}|}{|\vec{v}|}$
2. Como nos han dado la ecuación de la recta continua sabemos un punto y el vector director de la recta
   a. $\vec{v}(3,-1,2); P(-2,2,-1)$
   b. $\overrightarrow{AP}(-2,1,-1)$
3. Hallamos el determinante de ambos vectores y su módulo
   a. $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1i + 1j - 1k \to \vec{u}(1,1,-1) \to |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$
4. Hallamos el módulo del vector director de la recta
   a. $|\vec{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$
5. $d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{AP} x \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}}$

La respuesta correcta es la d)

9. La distancia del punto $A(0,1,0)$ al plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$ es:

$$d(A,\pi) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right| \to d(P,\pi) = \left|\frac{1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 3\cdot 0 - 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}\right| \to \left|-\frac{3}{\sqrt{14}}\right| = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

La respuesta correcta es la c)

10. La distancia entre los planos: $\pi \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$ $\quad \pi' = 5x - y + 2z - 3 = 0$

En primer lugar, estudiamos su posición relativa:

$\frac{1}{5} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-3}$, se cortan, por tanto, su distancia es 0,

La respuesta correcta es la a)

Textos Marea Verde

Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 7: Límites

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, ALEJANDRA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} 2 = 2$

b) $\lim_{x\to +\infty} x^{-5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

c) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$

d) $\lim_{x\to -\infty} x^5 = (-\infty)^5 = -\infty$

e) $\lim_{x\to -\infty} (-7) = -7$

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{0} = +\infty$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}} = \frac{1}{-\infty 10} = 0$

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}} = -\infty$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}} = 0$

j) $\lim_{x\to -1} x^6 = (-1)^6 = 1$

k) $\lim_{x\to 0^-} x^3 = 0$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6} = \frac{1}{0^6} = +\infty$

2.- Halla los siguientes limites:

a) $\lim_{x\to +\infty} x^7 = +\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} x^7 = -\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[7]{x} = +\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[7]{x} = -\infty$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

g) $\lim_{x\to +\infty} 7^x = +\infty$

h) $\lim_{x\to -\infty} 7^x = 0$

i) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = +\infty$

j) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{7}\right)^x = 0$

k) $\lim_{x\to +\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

l) $\lim_{x\to -\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

m) $\lim_{x\to +\infty} x^5 = +\infty$

n) $\lim_{x\to -\infty} x^5 = -\infty$

ñ) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

o) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

p) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

q) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

r) $\lim_{x\to +\infty} 5^x = +\infty$

s) $\lim_{x\to -\infty} 5^x = 0$

t) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

u) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

v) $\lim_{x\to +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

w) $\lim_{x\to -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

3. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-x^6}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^6}{3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^4}{3} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{16}{x} = 0$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^3-3x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x^4}{-x^4+2x^2-5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^4}{-x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{16}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{16}{x} = 0$

4. Determina el límite de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1) = \infty + 1 = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x+1} = \frac{5}{-\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-5x+6) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3-x+x^2-x^3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = -(-\infty) = \infty$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\frac{x-4}{2}\right) = \left(3-\frac{\infty-4}{2}\right) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x-1} = 2^{\infty} = \infty$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{(-\infty)^2} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}} = 3^{\frac{2}{\infty}} = 3^0 = 1$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+3)(2x-3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty)(-\infty) = +\infty$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{x} = \frac{\infty}{\infty} =$ Indeterminación.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

k) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^3+1}$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

l) $\lim_{x\to+\infty} (-x^3+8x^2-x+8) = -\infty$

m) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

n) $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x-2}{3x^3-7x+1} = \frac{\infty}{\infty}$= Indeterminación.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x-2}{3x^3-7x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{3x^3} = =0$

ñ) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-8x+16}{35} = +\infty$

o) $\lim_{x\to+\infty} \frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4} = \frac{\infty}{\infty}$ = Indeterminación.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{5-2x+3x^2-x^3}{2x^2-5x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2} = -(+\infty) = -\infty$

5.- Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-12x+9}{\sqrt[3]{x^5+5x-2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^{\frac{5}{3}}} = \lim_{x\to+\infty} 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{0} = +\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \frac{1}{1} = 1$

f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{7x+\sqrt{3x-2}}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-\sqrt{6+x}}{2x+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{2}{2} = 1$

h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{6x-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}+2x}{6x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2x}{6x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{6x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

6. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to0} x^{-4} = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^4} = \infty$

$b)\ \lim_{x\to\infty} 4x^4 = +\infty$

$c)\lim_{x\to0} \frac{3}{x^3} = \frac{3}{0} = +\infty$

$d)\ \lim_{x\to0} \frac{x^{-2}}{5} = \lim_{x\to0} \frac{1}{5x^2} = \infty$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$e)\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3}=\frac{0}{3}=0$$

$$f)\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{x^3}=\infty$$

$$g)\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}=0$$

$$j)\lim_{x\to\infty}3^{-x}=0$$

$$i)\lim_{x\to-\infty}3^{-x}=3^{\infty}=\infty$$

$$k)\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\infty$$

$$l)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right)=\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}=0$$

7. Resuelve los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-1}{5x}\cdot\frac{6x}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x^3-6x}{5x^4+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{5x}=0$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{1-2x}:\frac{5x^3}{x^2+12}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+17x^2+60}{-10x^4+5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{-10x^4}=-\frac{1}{10}$$

$$c)\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2+3}{5x}+\frac{6x-x^2}{3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+30x^2+9x}{15x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{15}=\infty$$

8. Halla los siguientes límites de funciones:

a) $\lim_{x\to\infty}(x^3-12x)=\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

c) $\lim_{x\to\infty}(x^2-4x)=\infty$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(x^3-\frac{3}{x^2}\right)=(\infty-0)=\infty$

e) $\lim_{x\to\infty}(x-x^2)=-\infty$

f) $\lim_{x\to\infty}(2x-3)^x=(\infty)^{\infty}=\infty$

g) $\lim_{x\to\infty}(x^3+5x^2-3)=\infty$

h) $\lim_{x\to\infty}[(x^2+1)^2+4x]=\infty+\infty=\infty$

9.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}[2x^3-7x+3]\to\lim_{x\to+\infty}2x^3=\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3x^2-5x+2}\to\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3x^2}=\frac{2}{\infty}=0$

c) $\lim_{x\to-\infty}[4x^4-7x+5]\to\lim_{x\to-\infty}4x^4=\infty$

Textos Marea Verde

d) $\lim_{x\to-\infty}[-3x^5+2x-4] \to \lim_{x\to-\infty}(-3x^5)=\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty}[-x^2+3x-2] \to \lim_{x\to+\infty}(-x^2)=-\infty$

f) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{-2x^2}=-1$

g) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+7}}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{2x} \to \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{4x^2}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4x^2}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4}}=\sqrt[3]{\infty}=\infty$

i) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2x}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{7x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{7}=-\infty$

k) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}=\frac{\infty}{\infty}\ Indet. \to \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2\cdot\infty}=0$

j) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{1-x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-x^3}=\frac{2}{-\infty}=0$

10. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-\frac{1+2x^2}{2x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{[(x^2-1)(2x-1)]-[(1+2x^2)(x)]}{(x)(2x-1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-x^2-2x+1-x-2x^3}{2x^2-x}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-3x+1}{2x^2-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2}{2x^2}\right)=\frac{-1}{2}$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}\right)^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x-x^2}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{(\sqrt{x^2-2x}+x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}+\frac{x}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}+1}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\right)=\frac{-2}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{-2}{2}=-1$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{1+4x}\right)=\infty$ El orden de 2x es mayor que $\sqrt{4x}$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\infty-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+3x}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{9x^2+3x}-3x)(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^2+3x-9x^2}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{(\sqrt{9x^2+3x}+3x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+3x}}{x}+\frac{3x}{x}}\right)$$

Textos Marea Verde
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2+3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+3}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{9+\frac{3}{x}}+3}\right) = = \frac{3}{\sqrt{9+0}+3} = \frac{3}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty - \infty = -\infty$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = -\infty + \infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-x+\sqrt{(-x)^2-4(-x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2-(x)^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+4x)-x^2}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2+4x}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{(\sqrt{x^2}+x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x+x}\right) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$$

11. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x-1} = 1^{\infty}$ calculamos $e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-1\right)\cdot(2x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)} = e^2$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{6x+2} = 1^{\infty};\ e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}-1\right)\cdot(6x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-18x+6}{x}\right)} = e^{-18}$

$c)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} = 1^{\infty};\ e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{4x-1}{4x}-1\right)\cdot(3x+2)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{4x}\right)} = e^{\frac{3}{4}}$

$d)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = 1^{\infty};\ e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x+3}-1\right)\cdot(3x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-9x+3}{x+3}\right)} = e^{-9}$

$e)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x-1} = 1^{\infty};\ e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)\cdot(x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)} = e^0 = 1$

$f)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}\right)^{x+6} = 1^{\infty};\ e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+2}{x^2+1}-1\right)\cdot(x+6)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2-5x+6}{x^2+1}\right)} = e^{-1}$

$g)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2x}} = 1^{\infty};\ e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{2}{2(x^3+x)}\right)} = e^0 = 1$

$h)\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x} = 1^{\infty};\ e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}-1\right)\cdot(1-x)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-2}{x}\right)} = e^2$

12. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+2x}-x\right] = \infty - \infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} =\right.$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{x\cdot(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1)}\right) = \frac{2}{(\sqrt{1}+1)} = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \frac{-3^3+27}{-3^2-9} = \frac{0}{0}$ Indeterminación

$$\lim_{x\to-3}\left[\frac{x^3+27}{x^2-9}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{(x+3)(x^2-3x+3^2)}{(x-3)(x+3)}\right] = \lim_{x\to-3}\left[\frac{x^2-3x+3^2}{x-3}\right] = \frac{-3^2-3\cdot(-3)+3^2}{-3-3} = \frac{27}{-6} = \frac{-9}{2}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}-\frac{3}{x+2}\right]=\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}=0-0=0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}\right]=\infty$ ya que grado del numerador > grado del denominador

13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4^x)=\infty+4^\infty=\infty+\infty=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=1^\infty \to$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Calculamos $f(x)-1\to\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)-1=\frac{-x-5}{3x^2+x}$

Calculamos $g(x)\cdot[f(x)-1]\to(x^2-1)\cdot\left(\frac{-x-5}{3x^2+x}\right)=\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+x}\right)^{x^2-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x^2-x^3+5+x}{3x^2+x}}=e^{-\infty}=0$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1-x}=(1)^\infty\to$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)\cdot\left(1+\frac{2}{x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(1-x)\cdot 2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x}}=e^{-2}$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x^2+3x-2}\right)^{x^2-3x}=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3^{-x})=-\infty+\infty\to$ Indeterminación

Cambiamos x por $-x$; $x\to-\infty, -x\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x+3^{-(-x)}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}(3^x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}3^x=\infty$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}\to$ Indeterminación $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right]=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)\cdot\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-5}\right)^2-(2x-3)^2}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-4x^2+12x-9}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{x\cdot\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=$

$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}+12\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+2-\frac{3}{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{14}{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}(12)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}\right)+2-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)}=\frac{-14\cdot0+12}{\sqrt{4-5\cdot0}+2-3\cdot0}=3$

14- Calcula los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}\cdot\sqrt{x^2+1}=\frac{2}{\infty+1}\cdot\sqrt{\infty^2+1}=0\cdot\infty$ Indeterminación

-Multiplicamos los términos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x^2}}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x^2} = 4$, luego el límite es 2.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{9x^2+2x-3} - 3x = \infty - \infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x)(\sqrt{9x^2+2x-3}+3x)}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+2x-3-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{3x+3x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x}) = \infty - \infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x+1} - \frac{x^2+1}{x} = \infty - \infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+2)x-(x^2+1)(x+1)}{(x+1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x-x^3-x^2-x-1}{(x+1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+x-1}{(x+1)x} = -1$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}} = 1^\infty$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x^2-6x-2x^2+x+5}{2x^2-x-5}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-5x^3+5x^2}{2(2x^2-x-5)}} = e^{\frac{-5}{4}}$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3} = 1^\infty$ Indeterminación

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} (x-3)\cdot\left(\frac{4-3x}{5-3x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} (x-3)\cdot\left(\frac{4-3x-5+3x}{5-3x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x+3}{5-3x}} = e^{\frac{-1}{-3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

15. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{3x+3} = \frac{0}{0}$ Indeterminación; $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x+1}{3x+3} = \lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x+1}\right) = \frac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{2x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to0} \frac{2(x+1)x}{(x-3)x} = -\frac{2}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to5} \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-5} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to5} \frac{\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{5+x}}{-(5-x)} = \lim\limits_{x\to5} \frac{\sqrt{5+x}}{-\sqrt{5-x}} = \frac{\sqrt{10}}{0} = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to3} \frac{2x^2-18}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{0}{0}$ Indeterminación ; $\lim\limits_{x\to3} 2\left(\frac{x^2-9}{(x^2-9)^{\frac{1}{2}}}\right) = \lim\limits_{x\to3} 2(x^2-9)^{\frac{1}{2}} = 0$

16. Determina los límites de estas funciones:

a) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to2} \frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{3}{2\cdot\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-x-2}{2x^2-3x-2} = \frac{0}{-3} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{0}{0}$ *Indeterminación* ; $\lim\limits_{x\to-2} \frac{(x-2)(x+3)x}{(x-2)\cdot(x+2)^2} = \frac{-2}{0}$;

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-2}{0^-} = \infty$ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$; No existe el límite

d) $\lim\limits_{x\to-3} \frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+x^2-8x-12} = \frac{0}{-6} = 0$

17.- Calcula estos límites:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^-)^2-(2\cdot 2^-)+1}{2^- -3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(2^+)^2-(2\cdot 2^+)+1}{2^+ -3} \to \frac{1}{-1} \to -1$

c) $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^-)^2-(2\cdot 3^-)+1}{3^- -3} \to \frac{4}{0^-} \to -\infty$

d) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-2x+1}{x-3} \to \frac{(3^+)^2-(2\cdot 3^+)+1}{3^+ -3} \to \frac{4}{0^+} \to +\infty$

e) $\lim_{x\to -1^-} \frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^- -3}{(-1^- -1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

f) $\lim_{x\to -1^+} \frac{x-3}{(x-1)^2} \to \frac{-1^+ -3}{(-1^+ -1)^2} \to \frac{-4}{4} \to -1$

g) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

h) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} \to \frac{0}{0}\ Indeterminación$

Descomponemos factorialmente

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x+3)(x-2)}}{\cancel{(x+3)(x-2)}(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2-2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$$

g) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^- -2} \to \frac{1}{0^-} = -\infty$

h) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} \to \frac{1}{2^+ -2} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$

18.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{3^2-3}{3+2} \to \frac{6}{5}$

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^-)^2-3}{-2^- +2} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-3}{x+2} \to \frac{(-2^+)^2-3}{-2^+ +2} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}} \to 1$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0} \to \frac{1}{0} \to \pm\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^-} \to \frac{1}{0^-} \to -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \to \frac{1}{\sin 0^+} \to \frac{1}{0^+} \to +\infty$

19. Calcula los siguientes límites:

$\boldsymbol{a})\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1-1}{1+2-3} = \frac{0}{0} \to Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^3-1 \to (x-1)(x^2+x+1)$

$x^3+2x^2-3x \to x(x-1)(x+3)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x+1)}{x(x+3)} = \frac{1+1+1}{1\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$\boldsymbol{b})\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^3-2x^2-x} = \frac{0}{0} = Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2+x \to x(x+1)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$x^3-2x^2-x \to x(x-1)(x-1)$

$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\frac{1}{1}=1$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{5x^2-13x-6}=\frac{9-9}{45-39-6}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-9 \to (x+3)(x-3)$

$5x^2-13x-6 \to (5x+2)(x-3)$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(5x+2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(5x+2)}=\frac{6}{17}$

d) $\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^3+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^4-1 \to (x^2+1)(x+1)(x-1)$

$x^3+1 \to (x+1)(x^2-x+1)$

$\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x-1)}{(x^2-x+1)}=\frac{(1+1)(-1-1)}{(1+1+1)}=\frac{2\cdot(-2)}{3}=\frac{-4}{3}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x^2}{x^2+x}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^4-3x^2 \to x^2(x^2-3)$

$x^2+x \to x(x+1)$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-3)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{(x+1)}=\frac{0}{1}=0$

f) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{4-10+6}{4-8+4}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-5x+6 \to (x-2)(x-3)$

$x^2-4x+4 \to (x-2)(x-2)$

$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(x-2)}=\frac{-1}{0}=\pm\infty$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}}{2x}=\frac{\sqrt{1}}{0}=\frac{1}{0}=\pm\infty$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{1-1}{\sqrt{1}-1}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-1 \to (x+1)(x-1)$

- Como $\sqrt{x}-1$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)(\sqrt{x}+1)=2\cdot 2=4$

i) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{9-9}=\frac{0}{0}=Indet.$

- Hacemos descomposición factorial:

$x^2-9 \to (x+3)(x-3)$

- Como $\sqrt{x}-\sqrt{3}$ no se puede descomponer multiplicamos por su expresión conjugada:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6(\sqrt{3}+\sqrt{3})}=\frac{1}{6\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

j) $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}=\frac{3-\sqrt{9}}{2-\sqrt{4}}=\frac{3-3}{2-2}=\frac{0}{0}=Indet.$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(3+\sqrt{5+x})}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{9-5-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{(2-\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\frac{0}{0}=Indet.$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(2-\sqrt{8-x})(2+\sqrt{8-x})(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(4-8+x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{(-4+x)(3+\sqrt{5+x})}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(2+\sqrt{8-x})}{-(4-x)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(2+\sqrt{8-x})}{-(3+\sqrt{5+x})}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$$

k) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}=\frac{0}{0}\ Ind$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x})^2-(\sqrt{2+x})^2}{(x^2+x)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

l) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2})^2-4}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)\left(\sqrt{2x}^2-4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)(2x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)2(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x}+2)}{2(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{2\sqrt{2}+2}{8}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

m) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}^2-9\right)(\sqrt{x+16}+4)}{\left(\sqrt{x+16}^2-16\right)(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+16}+4)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

n) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$

o) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}^2-9\right)(\sqrt{x+7}+3)}{\left(\sqrt{x+7}^2-9\right)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{24}{6}=4$$

20. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2-9}=\frac{0}{0}Ind$ $\quad\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3X+9)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x^2-3X+9)}{x-3}=-\frac{27}{6}$

b) $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}Ind$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

c) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+1}\cdot\frac{x^2+4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{(x+1)(x-2)x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1)x}=\frac{4\cdot 8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$

d) $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{0}{0}\ Ind$

$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x+1)}{x-1}=\frac{4}{0^+}=+\infty$

21.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{2}{0}\to\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty;\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty\to\nexists\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=\frac{2}{0}\to\lim_{x\to 0^-}\frac{2+x}{x^2}=+\infty;\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2+x}{x^2}=+\infty\to\lim_{x\to 0}\frac{2+x}{x^2}=+\infty$

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=\frac{8}{0}\to\lim_{x\to 3^+}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty;\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty\to\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{|x-3|}=+\infty$

d) $\lim_{x\to 2}[x-1]^{\frac{3}{x-2}}=1^\infty\to e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{x-2}\right)((x-1)-1)}=e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{x-2}\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\left(\frac{3(x-2)}{x-2}\right)}=e^3$

e) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+4}{x+4}\right]^{\frac{x}{x-1}}\to 1^\infty\to e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x^2+4}{x+4}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x(x^2-x)}{(x-1)(x+4)}\right)}=e^{\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x+4}\right)}=e^{\frac{1}{5}}$

f) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]=\infty-\infty\to\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x+2)(x+1)-(x-2)}{(x-1)(x+1)}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x-1)(x+1)}\right]=$

$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=\frac{7}{0}\to\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=+\infty;\quad\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{(x^2+2x+4)}{(x^2-1)}\right]=-\infty\to\quad\nexists\lim_{x\to 1}\left[\frac{x+2}{x-1}-\frac{x-2}{x^2-1}\right]$

g) $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x-4}}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{(x-2)\sqrt{2x-4}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}\cdot\frac{(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=8$

i) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\left[\frac{x(2x+4)}{3x^2\cdot x}\right]=\frac{4}{0}\to\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;\ \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2x+4}{3x^2}\right]=+\infty;$

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2+2x}{3}\right]=\infty\cdot 0$

j) $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x}{5x}\right]^{3x}=1^\infty\to e^{\lim_{x\to\infty}(3x)\left(\frac{5x-2}{5x+3}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x+3}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{15x}{5x}\right)}=e^{-3}$

k) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\infty\cdot 0;$

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2+2-x-2}{(x+2)(x^2+2)}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x^2(x+2)(x^2+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=-\infty;\quad\lim_{x\to 0^-}\frac{(x-1)}{x(x+2)(x^2+2)}=\infty\to\nexists\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2+2}\right)\right]$

22.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{-(1-x)(x^2+x+1)}{(1-x)(x+1)}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2+\ln x}{3+\ln x^2}\right)^{\frac{-3}{x-1}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}=+\infty$

23.- Calcula los límites laterales y el límite, cuando exista, de las siguientes funciones en los puntos que se indican

a) $\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\mathbf{2x-2,\ x<3}\\ \mathbf{2x,\ x\geq 3}\end{cases}$ **en x = 3** $\to\lim_{x\to 3}f(x)\begin{cases}\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(2x-2)=4\\ \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}2x=6\end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$, no existe $\lim_{x\to 3} f(x)$ en x=3

b) $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x^2+3x-1,\ x<1} \\ \mathbf{x+2,\ x\geq 1} \end{cases}$ **en x = 1** $\rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+3x-1) = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+2) = 3 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, existe $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$ en x=1

24. – Halla el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{\frac{3}{x}}-2}{2^{\frac{1}{x}}+2} = \frac{3^0-2}{3^0+2} = \frac{-1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}-4x}{4^{\frac{1}{x}}+3x-2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}}+3x^2+1}{5^{\frac{3}{x}}-3+2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4^{\frac{2}{x}}}{5^{\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{4^2}{5^3}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{8}{125}\right)^{-\infty} = \left(\frac{125}{8}\right)^{\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{4}{x}}-2x^2+3}{3^{\frac{1}{x}}-3-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{-2x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

25. – Calcula el valor de los siguientes límites:

$$A)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-x+1} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{3^2+7}-4}{2-3+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x^2+7}\right)^2-4^2}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2+7-16}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(-x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{-(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)} \rightarrow \frac{3+3}{-(\sqrt{3^2+7}+4)} = \frac{9}{-8}$$

$$B)\ \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{2^{2x}-5\cdot 2^2+4} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{2^x-4}{(2^x-4)(2^x-1)} \rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1}{2^x-1} = \frac{1}{3}$$

26.–Dada la función f(x)= $\begin{cases} \mathbf{3x-1\ \ si\ x<0} \\ \mathbf{0\ \ si\ x=0} \\ \mathbf{2x+5\ \ si\ x>0} \end{cases}$

Para x< 0 f es continua al ser una función polinómica

Para x> 0 f es continua al ser una función polinómica

En x=2

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(2x+5) = 9$

En x=0^-

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1$

En x=0^+

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+5) = 5$

En x=-3

$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}(3x-1) = -1$

x=0

f(0)=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x+5) = 5 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(3x-1) = -1 \end{cases}$$

Para que exista $\lim_{x\to 0} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el limite cuando x=0

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

27. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

A) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 2 \\ x + 2 & si\ x > 2 \end{cases}}$

Para x<2 f es continua al ser una función polinómica
Para x>2 f es continua al ser una función polinómica
Estudiamos continuidad en x=2 y x=-2
En x=2
f(2)=$2^2 - 1 = 3$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x + 2) = 4 \end{cases}$$

Para que exista $\lim_{x\to 2} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

B) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 2 \\ 2x - 1 & si\ 2 \leq x < 4 \\ 5 & si\ x \geq 4 \end{cases}}$

Para x< 2 f es continua al ser una función polinómica
Para 2< $x < 4$ f es continua al ser una función polinómica
Para x> 4 f es continua al ser una función constante.
Estudiamos continuidad en x=2 y en x=4

En x=2
f(2)=2·2-1=3

$$\lim_{x\to 2}(f) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x - 1) = 3 \end{cases}$$

Para que exista, los límites laterales han de ser iguales, por lo tanto, al no ser iguales no existe el límite x→2
La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

En x=4
f(4)=5

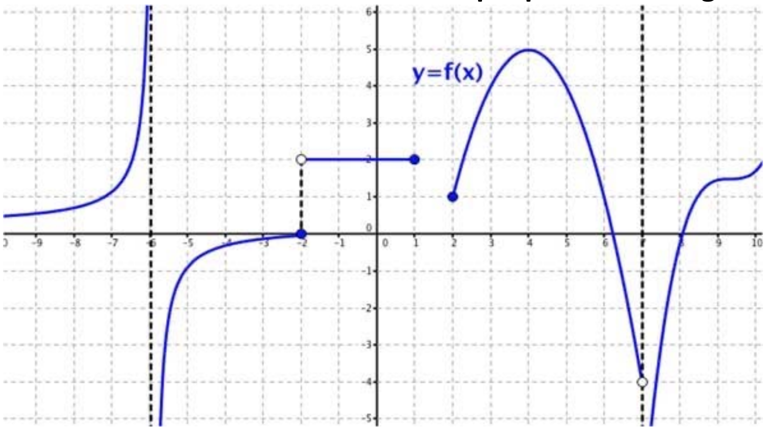
$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (2x - 1) = 7 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 5 = 5 \end{cases}$$

Para que exista $\lim_{x\to 4} f(x)$ los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=4

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito

Textos Marea Verde

28. – Clasifica las discontinuidades que presenta la siguiente función:



En x= -6 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
En x= -2 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.
En x= 7 tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

29. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \;\; x<2 \\ x-2 & si \;\; 2\le x\le 4 \\ 5 & si \;\; x>4 \end{cases}$ **b)** $g(x)\begin{cases} \frac{5}{x-5} & si \;\; x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & si \;\; 0<x\le 3 \\ \frac{10}{x+2} & si \;\; x>3 \end{cases}$

a)

Continuidad en x=2

1º. $f(2)=2-2=0$

2º. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-4)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x^+}(x-2)=0 \end{cases}$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$

3º. Como $f(2) = 0 = \lim\limits_{x\to 2} f(x),\ $ f es continua en $x = 2$

Continuidad en x=4

1º. $f(4)=4-2=2$

2º. $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}(x-2)=2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}(5)=5 \end{cases}$

3º. Como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x);\ \nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x),$ la función no es continua en $x = 4$

Presenta una discontinuidad inevitable de la 1ª especie de salto finito.

b)

Continuidad en x=0

1º. $g(0)=\frac{5}{0-5}=-1$

Textos Marea Verde

2º. $\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{5}{x-5}\right) = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-5}{\sqrt{x+1}} = -5 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$, no existe $\lim_{x\to 0} g(x)$, , por lo que $g(x)$presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en $x = 0$.

Continuidad en x=3

1º. $g(3) = \frac{3-5}{\sqrt{3+1}} = -1$

2º. $\lim_{x\to 3} \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x-5}{\sqrt{3+1}} = -1 \\ \lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{10}{x+2} = 2 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} g(x) \neq \lim_{x\to 3^+} g(x)$, no existe $\lim_{x\to 3} g(x)$, por lo que g(x) no es continua y tiene discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito en x=3.

30. Estudia la continuidad de las funciones.

a) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}}$

Dominio, $\quad x^2 + x \neq 0$

$x^2 + x = 0 \to x(x+1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\mathrm{Dom} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{0+1}{0^2+0} = \frac{1}{0} = \infty$, por lo que f no es continua en $x = 0$.

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{-1+1}{(-1)^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (hay que factorizar)}$

$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

Como no existe f(-1) pero sí el límite, discontinuidad evitable

b) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}}$

$\lim_{x\to z} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to x\notin z} f(x) = 0$

$\lim_{x\to z} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to x\notin z} f(x) = 0$, f no es continua. Presenta una discontinuidad evitable de salto finito.

c) $\boldsymbol{f(x) = |x-3|}$

$f(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad x > 3 \\ -x+3 & si \quad x \leq 3 \end{cases}$

1º. Continuidad en x=3

$f(3) = 3 - 3 = 0$

2º. $\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x+3) = 0 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-3) = 0 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 0, \lim_{x\to 3} f(x) = 0$

3º. Como $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0,$ la función es continua en $x = 3$

d) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} & si \quad x \in \mathbb{R} \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}}$

1º. $f(0) = 0$

2º. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(3^{\frac{1}{x}}\right) = 3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = \infty \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$, la función presenta una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.

e) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \le 2 \\ x + 1 & si \quad x > 2 \end{cases}}$

1º. $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

2º. $\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 2 + 1 = 3 \end{cases}$

3º. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$, existe $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, por lo que la función es continua en $x = 3$

31. Estudia la continuidad de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$ en el intervalo (2, 5).

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

$\mathrm{Dom}\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, como 0 no pertenece al intervalo, f(x) es continua en $(2, 5)$.

32. – Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \; si \; x \le -1 \\ x^2 - 3 \; si \; x > -1 \end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1) = 0$

2.- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1) = 0 \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^2 + 3x) = -2$

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$, f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

b) $f(x)=\begin{cases} 3x-2 \; si \; x<-1 \\ x^2+4x-1 \; si \; -1\le x\le 2 \\ x+11 \; si \; x>2 \end{cases}$

Continuidad en x=-1

1.- $f(-1)=-4$

2.- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(3x-2)=-5$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^2+4x-1)=-4$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ f no es continua en x=-1. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=11$

2.- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+4x-1)=11$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+11)=13$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} \frac{4}{x-4} \; si \; x<0 \\ x-1 \; si \; 0<x\le 3 \\ \frac{1}{x-3} \; si \; x>3 \end{cases}$

Continuidad en x=0

1.- f(0) no está definido.

2.- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)=-1$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{4}{x-4}=-1$ Por tanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$

No es continua, presenta una discontinuidad evitable.

Continuidad en x=3

1.- $f(3)=2$

2.- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x-1=2$ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=\infty$

3.-

Como uno de los límites laterales es infinito, f no es continua en x=3. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

d) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} -2 \; si \; x<-2 \\ -x^2+4 \; si -2\le x\le 2 \\ 2 \; si \; x>2 \end{cases}}$

Continuidad en x=-2

1.- $f(-2)=0$

2.- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(-2)=-2$ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(-x^2+4)=0$

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Continuidad en x=2

1.- $f(2)=0$

2.- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+4)=0$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2=2$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, f no es continua en x=2. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

e) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & si\ x\neq 3\\ 6 & si\ x=3\end{cases}$

1.- $f(3)=6$

2.- $\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0};\ \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=6$

3.- Como f(3) = 6 = $\lim_{x\to 3} f(x)$, f es continua en x=3.

f) $f(x)=\begin{cases}-5-\frac{|x|}{x} & si\ x\neq 0\\ 5 & si\ x=0\end{cases};\ f(x)=\begin{cases}5-\frac{-x}{x} & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 5-\frac{x}{x} & si\ x>0\end{cases}=\begin{cases}6 & si\ x<0\\ 5 & si\ x=0\\ 4 & si\ x>0\end{cases}$

Continuidad en x=0

1.- $f(0)=5$

2.- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=6 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=4$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, f no es continua en x=0. Presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

g) $f(x)=|x^2-6x+5|$

Se trata del valor absoluto de una función polinómica, f es continua.

h) $f(x)=\begin{cases}|3-x| & si\ x\le 5\\ \ln e^2 & si\ x>5\end{cases}$

Continuidad en x=5

1.- $f(5)=|3-5|=2$

2.- $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}|3-x|=|3-5|=|-2|=2 \qquad \lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}\ln e^2=2\ln e=2(1)=2$

3.-

Como $\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+} f(x)$, el límite existe. Como $\lim_{x\to 5} f(x)=f(5)$, por tanto, f es continua en x=5.

33.- Determina el valor de *a* para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

***f*(x)=**$\begin{cases}\frac{x+1}{x} & \text{si } x\le -2\\ -x^2+a & \text{si } x>-2\end{cases}$

Para x < -2 f es continua por ser una función racional y no anularse el denominador

Para x > -2 f es continua por ser una función polinómica

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$ debe ser continua en x = -2, para ello $f(-2)=\lim_{x\to -2} f(x)$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{-2+1}{-2}=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}(-x^2+a)=-4+a\end{cases}$$

$\frac{1}{2}=-4+a;\quad a=\frac{9}{2}$ Luego f es continua en todo $\mathbb{R}$ cuando $a=\frac{9}{2}$

34.- Determina el valor del parámetro *b* para que la función

$f(x)=\begin{cases}2x-3 & si\ x\le 3\\ x+b & si\ x>3\end{cases}$ **sea continua en todo su dominio.**

f es continua en todo su dominio, salvo en x = 3, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas, hallamos b para que sea continua en 3

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-}(2x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 3^+}(x+b) = 3+b \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales, luego:

3 = 3 + b; b = 0

35.- Halla el valor de *k* para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & si\ x \neq -2 \\ k & si\ x = -2 \end{cases}$ sea continua en x=-2.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-2) = -4$$

Como f(-2) = k, k = - 4.

36.- Calcula *m, n y p* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & si\ x < -8 \\ -2m+3 & si -8 \leq x < -4 \\ x - \frac{1}{n} & si -4 \leq x < 2 \\ px & si\ 2 \leq x \end{cases}$$

f es continua en todo su dominio, salvo en x = -8, x = -4 y x = 2, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas que son continuas.

Continuidad en x=-8

$$\lim_{x\to -8} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -8^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -8^-} \frac{3}{x} = -\frac{3}{8} \\ \lim\limits_{x\to -8^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -8^+}(-2m+3) = -2m+3 \end{cases}$$

$$-2m+3 = -\frac{3}{8}; \quad m = \frac{27}{16}$$

Continuidad en x=-4

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^-}(-2m+3) = -2\cdot\frac{27}{16}+3 = -\frac{54}{16}+3 = -\frac{3}{8} \\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^+}\left(x-\frac{1}{n}\right) = -4-\frac{1}{n} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{8} = -4-\frac{1}{n}; \quad n = -\frac{8}{29}$$

Continuidad en x=2

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(x-\frac{1}{n}\right) = 2+\frac{29}{8} = \frac{45}{8} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} px = 2p \end{cases}$$

$$2p = \frac{45}{8}; \quad p = \frac{45}{16}$$

Luego f es continua en todo $\mathbb{R}$ cuando $m = \frac{27}{16}$; $n = -\frac{8}{29}$; $p = \frac{45}{16}$

37. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} kx-3 & si\ x < 4 \\ -x^2+10x-13 & si\ x \geq 4 \end{cases}$

f **es continua en** $x < 4$ **por ser una función polinómica.**

f **es continua en x**> 4 **por ser una función polinómica.**

Continuidad en x=4

1. $f(4)$**= -**$(4)^2 + 10(4) - 13 = 11$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

2. $\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 4^-} f(x); & \lim_{x\to 4^-}(kx-3) = 4k-3 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x); & \lim_{x\to 4^+}(-x^2+10x-13) = (-(4)^2+10(4)-13) = 11 \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 4} f(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $4k-3=11$, $k=\frac{7}{2}$

3. f**(4) =**$\lim_{x\to 4} f(x) = 11$ **, luego** $f(x)$ **es continua en x=4 cuando k=**$\frac{7}{2}$**.**

b) $f(x) = \begin{cases} 1+|x| \ si \ x<0 \\ k \quad si \ x=0 \\ \frac{3}{2}x+1 \ si \ x>0 \end{cases}$

f **es continua en** $x<0$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en x**>0 **por ser una función polinómica.**
Continuidad en x=0

1. $f(0)=k$
2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x); \lim_{x\to 0^-}(1+|x|) = (1+|0|) = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x); \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{2}x+1\right) = \left(\frac{3}{2}(0)+1\right) = 1 \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$; $\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

3. Para que f sea continua $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$, luego k =1.

38. El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo viene dado por la siguiente función:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & si \ 0 \le t < 2 \\ 3t+a & si \ 2 \le t \le 5 \\ -t^2+13t+b & si \ 5 < t \end{cases}$$

Determina los valores de a y b, para que la función sea continua en t=2 y t=5.

f **es continua en** $0<t<2$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en** $2<t<5$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en** $5<t$ **por ser una función polinómica.**
Continuidad en t =2

1. $e(2) = 3(2)+a = 6+a$
2. $\lim_{t\to 2} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 2^-} e(t); & \lim_{t\to 2^-}(3t^2) = 12 \\ \lim_{t\to 2^+} e(t); & \lim_{t\to 2^+}(3t+a) = 6+a \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 2} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $6+a=12, a=6$

3. **Para que** e **sea continua** e**(2) =**$\lim_{t\to 2} e(t)$**= 12, luego** $e(a) = 6+a = 12; a = 6$**, entonces** $e(t)$ **es continua cuando** $a=6$

Continuidad en t =5

1. $e(5) = 3t+a = 3(5)+6 = 21$
2. $\lim_{t\to 5} e(t) = \begin{cases} \lim_{t\to 5^-} e(t); \lim_{t\to 5^-}(3t+a) = 21 \\ \lim_{t\to 5^+} e(t); \lim_{t\to 5^+}(-t^2+13t+b) = (-(5)^2+13(5)+b) = 40+b \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{t\to 5} e(t)$ los límites laterales han de ser iguales luego, $40+b=21, b=-19$

4. **Para que** e **sea continua** e**(5) =**$\lim_{t\to 5} e(t)$**= 21, luego f es continua cuando b =-19.**

39. Un comerciante quiere vender un determinado producto, y para ello cobra 6€ por cada unidad. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra:

$$C(x)=\begin{cases}6x \ \ si\ 0<x\le 10\\ \sqrt{600+ax^2}\ si\ x>10\end{cases}$$

a) **Halla el valor de a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.**

C **es continua en** $0<x<10$ **por ser una función polinómica.**

$C\ es\ continua$ **en** $x>10$ **por ser una función irracional con el radicando positivo, si a > 0.**

1. $C(10)=6(10)$**= 60**
2. $\lim_{x\to 10} C(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 10^-} C(x); & \lim_{x\to 10^-}(6x)=60\\ \lim_{x\to 10^+} C(x); & \lim_{x\to 10^+}\left(\sqrt{600+ax^2}\right)=\sqrt{600+100a}\end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 5} C(x)$ los límites laterales han de ser iguales luego,

$\sqrt{600+100a}=60;\ \left(\sqrt{600+100a}\right)^2=(60)^2\ ;\ 600+100a=3600;\quad a=30$

3. **Para que** C **sea continua** C**(10) =** $\lim_{x\to 10} C(x)$**= 60, luego C es continua cuando** $a=30$**. Entonces el precio varía de forma continua al variar el número de unidades que se compran cuando a =30.**

b) **¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran ´´muchísimas´´ unidades?**

$\lim_{x\to\infty} C(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+ax^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{600+30a}\right)=\infty$

Cuando se compran muchísimas unidades el precio tiende a ∞.

40. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}3a+3^{\frac{2}{x}}\ si\ x<0\\ \frac{4}{2+2^x}\ si\ 0\le x\le 1\\ \frac{3}{b-2^{-x}}\ si\ x>1\end{cases}$$

a) **Halla a y b para que la función sea continua.**

f **es continua en** $x<0$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $0<x<1$ **por ser composición de funciones continuas.**
f **es continua en** $x>1$ **por ser composición de funciones continuas.**
Continuidad en x=0

1. $f(0)=\frac{4}{2+2^{(0)}}=\frac{4}{3}$
2. $\lim_{x\to 0} f(x)\begin{cases}\lim_{x\to 0^-} f(x); & \lim_{x\to 0^-}\left(3a+3^{\frac{2}{x}}\right)=3a+3^{\frac{2}{0}}=3a+3^{\frac{2}{0^-}}=3a+0\\ \lim_{x\to 0^+} f(x); & \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{2+2^x}\right)=\frac{4}{3}\end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$, **entonces** $3a=\frac{4}{3}$**, luego** $a=\frac{4}{9}$

3. **Como** $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{4}{3}$; f **es continua cuando** $a=\frac{4}{9}$

Continuidad en x=1

1. $f(a)=f(1)=\frac{4}{2+2^1}=1$

Textos Marea Verde

2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{4}{2+2^x}\right) = \frac{4}{2+2^1} = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right) = \frac{3}{b-2^{-1}} = \frac{3}{b-\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{2b-1}{2}} = \frac{6}{2b-1} \end{cases}$

Para que $\exists \lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x), luego\ 1 = \frac{6}{2b-1}, b = \frac{7}{2}$

3. **Como** f**(1)=** $\lim_{x\to 1} f(x) = 1\,; f$ **es continua, cuando b=$\frac{7}{2}$**

b) Calcula: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to 0,5} f(x)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(3a + 3^{\frac{2}{x}}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) + 3^{\frac{-2}{\infty}} = \frac{12}{9} + 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{b-2^{-x}}\right) = \frac{3}{\frac{7}{2}-2^{-\infty}} = \frac{6}{7}$

$\lim_{x\to 0,5} f(x) = \lim_{x\to 0,5} \left(\frac{4}{2+2^x}\right) = \frac{4}{2+2^{0,5}} = 1{,}17$

c) Si a=0 y b=$\frac{1}{8}$, estudia las discontinuidades.

$$f(x) = \begin{cases} 3a + 3^{\frac{2}{x}}\ si\ x < 0 \\ \frac{4}{2+2^x}\ si\ 0 \le x \le 1 \\ \frac{3}{b-2^{-x}}\ si\ x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{2}{x}} & si\ x < 0 \\ \frac{4}{2+2^x} & si\ 0 \le x \le 1 \\ \frac{24}{1-16^{-x}} & x > 1 \end{cases}$$

Continuidad en x=0

1. $f(0) = \frac{4}{2+2^0} = \frac{4}{3}$
2. $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(3^{\frac{2}{x}}\right) = \infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4}{2+2^x}\right) = \frac{4}{3} \end{cases}$

$Por\ tanto\ f\ presenta\ una\ discontinuidad\ \boldsymbol{no\ evitable}\ de\ primera\ especie\ de\ salto\ infinito$

Continuidad en x=1

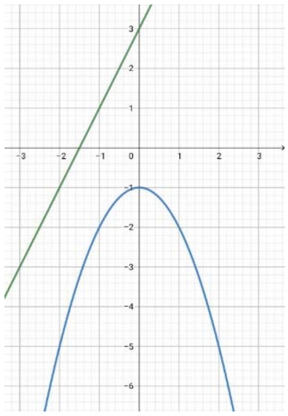
1. $f(1) = \frac{4}{2+2^1} = 1$
2. $\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{4}{2+2^x}\right) = 1 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{24}{1-16^{-x}}\right) = \frac{128}{5} \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ **;** $\nexists \lim_{x\to 1} \boldsymbol{f(x)}$

$Por\ tanto\ f\ presenta\ una\ discontinuidad\ \boldsymbol{no\ evitable}\ de\ primera\ especie\ de\ salto\ \boldsymbol{finito}$

41. La función $f(x) = \begin{cases} 2x + 3\ si\ x \le 0 \\ -x^2 - 1\ si\ x > 0 \end{cases}$ toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo $[-1, 2]$ y, sin embargo, no tiene ninguna raíz en dicho intervalo, ¿contradice esto el teorema de Bolzano?

El teorema de Bolzano dice que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en los extremos del mismo toma valores de signo contrario, entonces existe un punto en el interior de dicho intervalo en el cual la función se anula.
f **se encuentra en un intervalo cerrado** $[-1,2]$.
Comprobamos si los extremos toman valores de signo contrario:
$f(-1)=2(-1)+3=1$
$f(2)=-(2)^2-1=-5$
Comprobamos si es continua:
f **es continua en** $x<0$ **por ser una función polinómica.**
f **es continua en** $x>0$ **por ser una función polinómica.**



Continuidad en x=0;

1. $f(0)=2(0)+3=3$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+3)=3\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2-1)=-1\end{cases}$

   Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\nexists\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
3. $como \nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x), f$ **presenta una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.**

Luego, esto no contradice el teorema de Bolzano pues la función no es continua en x=0 y por tanto en el intervalo $[-1,2]$.

42.- Comprueba que la función $f(x)=-x^3+x^2+2$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[1,2]$.
f es continua en $[1,2]$ ya que es una función polinómica, que siempre son continuas.
$f(1)=-1^3+1^2+2=-1+1+2=2\to f(1)>0$
$f(2)=-2^3+2^2+2=-8+4+2=-2\to f(2)<0$
Según el teorema de Bolzano, existe un punto c perteneciente a (1,2), tal que $f(c)=0$, es decir, $-c^3+c^2+2=0\to\exists c\in(1,2)$
Por lo tanto, existe al menos una raíz en (1,2).

43.- Demuestra que la función $f(x)=-2x^3+3x-8$ corta al eje de abscisas en el intervalo $[-2,2]$. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x)=\frac{x^3-2x^2-4}{x+1}$?
f es continua en $[-2,2]$ ya que es una función polinómica, que siempre son continuas.
$f(-2)=-2(-2)^3+3(-2)-8=16-6-8=2\to f(-2)>0$
$f(2)=-2\cdot 2^3+3\cdot 2-8=-16+6-8=-18\to f(2)<0$
Según el teorema de Bolzano, existe un punto c perteneciente a (-2,2), tal que $f(c)=0$, es decir, $-2c^3+3c-8=0\to\exists c\in(-2,2)$
Por tanto, f corta al eje de abscisas por lo menos en una ocasión en el intervalo (-2,2)
Hallamos el dominio de g:
$x+1=0;\ \ x=-1\to Dom{:}\ \mathbb{R}-\{-1\}$
Como g no es continua en el intervalo $[-2,2]$, no podemos asegurar que corte el eje de abscisas en (-2,2).

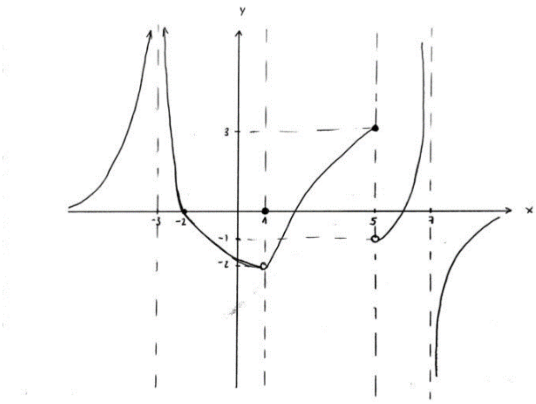
44.- Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[-3,2]$, donde $f(-3)<0$ y $f(2)=5$. ¿Se puede asegurar que la función $g(x)=f(x)-2$ tiene al menos un cero en el intervalo $[-3,2]$?

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

La función g es continua en el intervalo $[-3,2]$, debido a que se trata de una función continua menos una función constante.
$g(-3) = f(-3) - 2 = < 0 - 2 = < 0 \rightarrow g(-3) < 0$
$g(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 \rightarrow g(2) > 0$
Según el teorema de Bolzano, existe un punto c perteneciente a (-3,2), tal que $g(c) = 0$, es decir, $\exists c \in (-3,2)$ donde g tiene un cero.

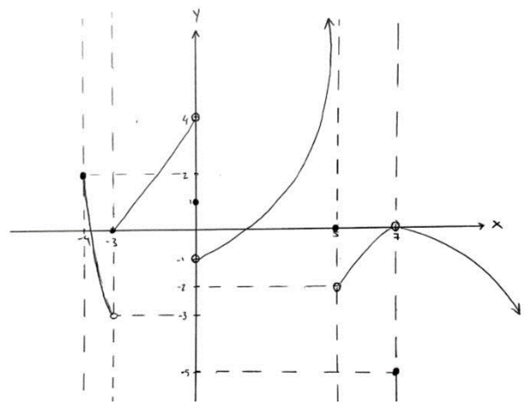
45.- Dibuja la gráfica de una función que se ajuste a las siguientes condiciones:

- **Continua en $\mathbb{R} - \{-3, 1, 5, 7\}$**
- $\lim_{x\to -3} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1} f(x) = -2$, $f(1) = 0$
- **Discontinuidad de salto finito en $x = 5$ y de salto infinito en $x = 7$**
- $f(-2) = 0$



46.- Dibuja la gráfica de una función $f(x)$ tal que:

- **Dom $f(x) = \{x \in \mathbf{R} / x \geq 4\}$**
- $f(-4) = 2$, $f(0) = 1$, $f(5) = 0$, $f(7) = -5$
- $\begin{cases} \lim_{x\to -3^-} f(x) = -3 & \lim_{x\to -3^+} f(x) = 0 & \lim_{x\to 0^-} f(x) = 4 & \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x\to 5^-} f(x) = +\infty & \lim_{x\to 5^+} f(x) = -2 & \lim_{x\to 7} f(x) = 0 & \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$



AUTOEVALUACIÓN

1. **Los límites de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si\ x < 0 \\ x^3 - 7x^2 + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$ a la izquierda de cero y a la derecha de cero valen:**

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 - 3x + 2) = 2$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^3 - 7x^2 + 3) = 3$$

c) 2 y 3

2. **El límite $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3^x - 3^2}{3^{x+1}}\right)$ vale:**

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3^x - 3^2}{3^{x+1}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \to \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3^x}{3^{x+1}} - \frac{3^2}{3^{x+1}}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{3^2}{3^{x+1}}\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

b) $\frac{1}{3}$

3. **El límite $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 5}{x - x^2 + 2}\right)$ vale:**

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 5}{x - x^2 + 2}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2}{-x^2}\right) \to -3$$

a) -3

4. **El límite $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4}}{x}$ vale:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \to \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4-x}^2 - \sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = 0$$

a) 0

5. **El límite $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4}}{x}$ vale:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \to \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4-x}-\sqrt{4})(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-x}^2 - \sqrt{4}^2}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(\sqrt{4-x}+\sqrt{4})} =$$
$$\frac{-1}{2\sqrt{4}} \to -\frac{1}{4}$$

d) $-\frac{1}{4}$

6. **Para que la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + a & si\ x < 3 \\ 2x^2 - 1 & si\ x \geq 3 \end{cases}$ sea continua "a " debe valer:**

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^3 - 3x^2 + a) = 3^2 - 3(3) + a = 0 + a$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (2x^2 - 1) = 2(3)^2 - 1 = 17$$

a debe valor 17 porque para ser continua tiene que existir el límite en 3 y para ello ser los dos límites iguales.

c) 17

7. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota vertical en x = 2.

a) $\lim_{x\to 2}\log(x-2)=\log(0)=-\infty$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{2x}{1}=4$

c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}=0$

d) $\lim_{x\to 2}\sin(\cos(x-2))=0$

a) $\mathbf{f(x)=\log(x-2)}$

8. Indica cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota horizontal en y = 2.

a) $\lim_{x\to\infty}\log(x-2)=\infty$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4}{x^2-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2$

c) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-2}=\infty$

d) $\lim_{x\to\infty}\tan(\cos(x-2))=es\ divergente$

b) $\mathbf{\frac{2x^2-4}{x^2-2}}$

9. Indica cuál de los siguientes límites NO vale 0.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{27}+5}{e^x}=0$ Como la exponencial es de orden mayor que el polinomio el límite es 0.

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}}=\frac{5}{\infty+\infty}=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\to\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+3})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{x(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})}=0$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{e^x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

d)

10. Los puntos de discontinuidad de la función $g(x)=|x^2-9|$ son:

g(x) es el valor absoluto de una función polinómica y por tanto siempre continua

c) ninguno, es una función continua.

Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 8: Derivadas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0
Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, ALEJANDRA, JERÓNIMO

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Haciendo uso de la definición de derivada comprueba que la derivada de $f(x) = sen\frac{1}{x}$ en $x = a$ es igual a $f'(a) = \left(-\frac{1}{a^2}\right)\cos\frac{1}{a}$ si a es distinto de 0

$$\text{Definición de derivada} \rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{sen\frac{1}{x} - sen\frac{1}{a}}{x-a} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0}{1-0} = -\frac{1}{a^2}\cos\frac{1}{a}$$

2.- Utilizando la definición de derivada comprueba que las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados es el valor dado:

$$\text{Definición de derivada} \rightarrow f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

a) $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ en x=2 $\rightarrow f'(2) = 12$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1} = 12$$

b) $\boldsymbol{g(x) = x+2}$ en x=*a* $\rightarrow g'(a) = 1$

$$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x+2-a-2}{x-a} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{1}{1} = 1$$

c) $\boldsymbol{h(x) = x^2 cosx}$ en x=0 $\rightarrow h'(0) = 0$

$$h'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2cosx - 0}{x-0} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hôpital

$$h'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{2xcosx - x^2senx}{1} = 0$$

d) $\boldsymbol{r(x) = \frac{3x+4}{2x-1}}$ en x=1 $\rightarrow r'(1) = -11$

$$r'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3x+4}{2x-1}-7}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{3x+4-14x+7}{2x-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-11x+11}{(x-1)(2x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-11(x-1)}{(x-1)(2x-1)} = -11$$

3.- Estudia la derivabilidad en x=0 de $f(x) = |x^3|$

$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} -x^3 \; si\; x < 0 \\ x^3 \; si\; x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f'(x_-) = -3x^2 \; si\; x < 0 \\ f'(x_+) = 3x^2 si\; x < 0 \end{cases} \rightarrow f'(x_-) = f'(x_+) = 0$$

Por tanto, f es derivable en x = 0.

Textos Marea Verde

4. Dada la función $f(x) = ln\frac{x^2}{x-1}$, donde ln significa logaritmo neperiano, definida para x > 1 halla un punto (a, f(a)) tal que la recta tangente a la gráfica de f(x) en ese punto sea paralela al eje OX.

$f'(x) = 0$ paralela al eje 0X

$f(x) = \ln\frac{x^2}{x-1}$; $f'(x) = \frac{x-2}{x(x-1)}$; $\frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \Rightarrow 0 = x-2 \Rightarrow x = 2$

$y = \ln\frac{2^2}{2-1} = \ln 4 = 1{,}38$ Punto (2, 1,38)

5. Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$. Halla el valor a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica f en el punto (a,$f(a)$) sea paralela a la recta y = -15x

$f(x) = 6x^2 - x^3$ $f'(x) = 12x - 3x^2$ y = -15x ; $y' = -15$ $12x - 3x^2 = -15$;

$x = 5$ y $x = -1$ por tanto, a = 5

$f(5) = 6 \cdot 5^2 - 5^3 = 25 \Rightarrow$ En (5,25) la función es paralela a la recta

6. Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde m > 0 es una constante.

a) **Para cada valor de m halla el valor de a > 0 tal que la recta tangente a la gráfica f en el punto (a,f (a)) pase por el origen de coordenadas.**

b) **Halla el valor de m para que la recta y = x sea tangente a la gráfica de $f(x)$**

a) $f(x) = x^2 + m$; $f(a) = a^2 + m$; $f'(x) = 2x$, $f'(a) = 2a$

La ecuación de la recta tangente en (a, f(a)) es: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

De donde, como pasa por (0, 0), $0 = a^2 + m + 2a(0-a)$, $a^2 + m - 2a^2 = 0$

$m - a^2 = 0$, $a = \pm\sqrt{m}$, *como* $a > 0$, $\boldsymbol{a = \sqrt{m}}$

b) Para que la recta sea tangente a la gráfica, $x = x^2 + m$ $x^2 - x + m = 0$ resolviendo

$x = \frac{1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$, para que existan soluciones, 1- 4m > 0, dos soluciones, la recta y la gráfica son secantes; 1 – 4m = 0 , m = ¼ , solución única, la recta es tangente.

7. Un coche recorre una distancia e, en kilómetros, a las t horas, siendo $e = 22t + 0{,}4t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración. ¿Es constante la aceleración? Si sigue a esa velocidad, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máxima permitida de 120 km/h?

$v = \frac{de}{dt} = 22 + 0{,}8t$ $a = \frac{dv}{dt} = 0{,}8$ Es constante

$120 = 22 + 0{,}8t \Rightarrow t = \frac{120-22}{0{,}8} = 122{,}5\ h$ Supera la velocidad permitida a las 122,5 horas

8. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 30x - 4x^2$. Calcula la velocidad a los x = 0, x = 1, x = 3 y x = 4 segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

$v = \frac{dy}{dx} = 30 - 8x$;

$v(0) = 30 - 8 \cdot 0 = 30\ m/s$ $y(0) = 30 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0\ m$

$v(1) = 30 - 8 \cdot 1 = 22\ m/s$ $y(1) = 30 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 26\ m$

$v(3) = 30 - 8 \cdot 3 = 6\ m/s$ $y(3) = 30 \cdot 3 - 4 \cdot 3^2 = 54\ m$

$v(4) = 30 - 8 \cdot 4 = -2\ m/s$ $y(4) = 30 \cdot 4 - 4 \cdot 4^2 = 56\ m$

altura máxima cuando v = 0 ; $0 = 30 - 8x \Rightarrow x = \frac{30}{8} = 3{,}75\ s$

Sustituimos en la ecuación de altura ; $y(3{,}75) = 30 \cdot 3{,}75 - 4 \cdot 3{,}75^2$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

9. Un coche recorre una distancia y, en kilómetros, en un tiempo x dado en horas, dada por la ecuación:$\boldsymbol{y = 0,1x^2 + 100x - 50}$. Determina la velocidad que lleva el coche para x = 1,5 horas.

$□ = \frac{□□}{□□} = 0,2□ + 100;$ $\quad □(1,5) = 0,2 \cdot 1,5 + 100 = 100,3$ □□/□

10. Comprueba que la derivada n-ésima de las siguientes funciones es la indicada:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x+a} \rightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(x+a)^{n+1}}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(x+a)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x+a)^2} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{(-1)^1\ 1!}{(x+a)^{1+1}} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(x+a)^2\cdot 0 - (-1)\cdot(2(x+a)\cdot 1)}{((x+a)^2)^2} = \frac{2(x+a)}{(x+a)^4} = \frac{2}{(x+a)^3}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = \frac{(-1)^2\ 2!}{(x+a)^{2+1}} = \frac{2}{(x+a)^3}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x) = \frac{(x+a)^3\cdot 0 - 2\cdot(3(x+a)^2\cdot 1)}{((x+a)^3)^2} = \frac{-6(x+a)^2}{(x+a)^6} = \frac{-6}{(x+a)^4}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = \frac{(-1)^3\ 3!}{(x+a)^{3+1}} = \frac{-6}{(x+a)^4}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1+x}{1-x} \rightarrow f^{n)}(x) = \frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(1-x)\cdot 1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)-(-1-x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = \frac{2\cdot 1!}{(1-x)^{1+1}} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(1-x)^2\cdot 0-2\cdot(1-x)\cdot(-1)\cdot 2}{((1-x)^2)^2}=\frac{4(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{4}{(1-x)^3}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x)=\frac{2\cdot 2!}{(1-x)^{2+1}}=\frac{4}{(1-x)^3}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x)=\frac{(1-x)^3\cdot 0-2\cdot(1-x)^2\cdot(-1)\cdot 3}{((1-x)^3)^2}=\frac{6(1-x)^2}{(1-x)^6}=\frac{6}{(1-x)^4}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x)=\frac{2\cdot 3!}{(1-x)^{3+1}}=\frac{6}{(1-x)^4}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x)=ln(1+x)\rightarrow f^{n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)}$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x)=\frac{(-1)^{1+1}(1-1)!}{(1+x)^1}=\frac{1\cdot 1}{(1+x)}=\frac{1}{(1+x)}$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(1+x)\cdot 0-1\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x)=\frac{(-1)^{2+1}\,(2-1)!}{(1+x)^2}=\frac{-1\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{-1}{(1+x)^2}$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$$f'''(x)=\frac{(1+x)^2\cdot 0-(-1)(2(1+x)1)}{((1+x)^2)^2}=\frac{2(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2}{(1+x)^3}$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

$$f^3(x) = \frac{(-1)^{3+1}\,(3-1)!}{(1+x)^3} = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} \to f^{n)}(x) = (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right)}$$

Hacemos la primera derivada:

$f'(x) = \frac{(x+2)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f'(x) = \frac{(x-2)\cdot 0 - 1\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$$f'(x) = (-1)\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$f^1(x) = (-1)^1 1!\left(\frac{1}{(x+2)^{1+1}} + \frac{1}{(x-2)^{1+1}}\right) = (-1)\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Ahora probamos con la segunda derivada:

$f''(x) = \frac{(x+2)^2\cdot 0 - 2\cdot(x+2)\cdot 1\cdot(-1)}{((x+2)^2)^2} = \frac{2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2}{(x+2)^3}$

$f''(x) = \frac{(x-2)^2\cdot 0 - 2\cdot(x-2)\cdot 1\cdot(-1)}{((x-2)^2)^2} = \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3}$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{2}{(x-2)^3}\right)$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$f^2(x) = (-1)^2 2!\left(\frac{1}{(x+2)^{2+1}} + \frac{1}{(x-2)^{2+1}}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = \left(\frac{2}{(x+2)^3} + \frac{2}{(x-2)^3}\right)$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

Finalmente, probamos con la tercera derivada:

$f''(x) = \frac{(x+2)^3\cdot 0 - 3\cdot(x+2)^2\cdot 1\cdot 2}{((x+2)^3)^2} = \frac{-6(x+2)^2}{(x+2)^6} = \frac{-6}{(x+2)^4}$

$f''(x) = \frac{(x-2)^3\cdot 0 - 3\cdot(x-2)^2\cdot 1\cdot 2}{((x-2)^3)^2} = \frac{-6(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{-6}{(x-2)^4}$

$$f''(x) = \left(\frac{-6}{(x+2)^4} + \frac{-6}{(x-2)^4}\right)$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$f^3(x) = (-1)^3 3!\left(\frac{1}{(x+2)^{3+1}} + \frac{1}{(x-2)^{3+1}}\right) = -6\cdot\left(\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = \left(\frac{-6}{(x+2)^3} + \frac{-6}{(x-2)^3}\right)$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se sigue cumpliendo.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = \cos ax \to f^{n)}(x) = a^n \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

Hacemos la primera derivada.

$$f'(x) = -\sin ax \cdot a$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$f^1(x) = a^1 cos\left(ax + 1\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$a \cdot (\cos ax \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \sin ax \cdot \sin\frac{\pi}{2}) =$$
$$a \cdot (\cos ax \cdot 0 - \sin ax \cdot -1\,) =$$
$$a \cdot (-\sin ax)$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la segunda derivada.

$$f''(x) = (-a) \cdot a \cdot \cos ax = -a^2 \cdot (\cos ax)$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = a^2 cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$a^2 \cdot (\cos ax \cdot \cos\pi - \sin ax \cdot \sin\pi) =$$
$$a \cdot (\cos ax \cdot (-1) - \sin ax \cdot 0\,) =$$
$$-a^2 \cdot (\cos ax)$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la tercera derivada.

$$f'''(x) = (-a^2) \cdot (-a) \cdot sen\ ax = a^3 \cdot (\sin ax)$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$$f^3(x) = a^3 cos\left(ax + 3\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$a^3 \cdot (\cos ax \cdot \cos\frac{3\pi}{2} - \sin ax \cdot \sin\frac{3\pi}{2}) =$$
$$a \cdot (\cos ax \cdot 0 - \sin ax \cdot (-1)\,) =$$
$$a^3 \cdot (\sin ax)$$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

$$\boldsymbol{f(x) = cos^2\,x \to f^{n)}(x) = 2^{n-1}\,cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

Hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = 2(cos\ x)(-senx) = -\sin(2x)$$

Sustituimos n = 1 en la fórmula:

$$f^1(x) = 2^{1-1}\,cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \sin 2x \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -\sin 2x \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -\sin(2x)$$

Como el resultado de la primera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la segunda derivada:

$$f''(x) = -\cos(2x) \cdot 2 = (-2) \cdot \cos(2x) = 2 \cdot \cos(2x + \frac{2\pi}{2})$$
$$= 2 \cdot (\cos 2x \cdot \cos\pi - \sin(2x) \cdot \sin\pi) = -2 \cdot \cos 2x$$

Sustituimos n = 2 en la fórmula:

$$f^2(x) = 2^{2-1}\,cos\left(2x + 2\frac{\pi}{2}\right) =) = 2 \cdot (\cos 2x \cdot \cos\pi - \sin(2x) \cdot \sin\pi) = -2 \cdot \cos 2x$$

Como el resultado de la segunda derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

Hacemos la tercera derivada:

$$f'''(x) = (-2)(-\sin 2x)\cdot 2 = (-2)\cdot(-2)\cdot \sin 2x = 2^2 \cdot \sin 2x$$

Sustituimos n = 3 en la fórmula:

$f^3(x) = 2^{3-1}\, cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right) = 2^2\, cos\left(2x + 3\frac{\pi}{2}\right) = 2^2\cdot(\cos(2x)\cdot \cos 3\frac{\pi}{2} - \sin(2x)\cdot \sin 3\frac{\pi}{2}) =$ $2^2 \cdot \sin 2x$

Como el resultado de la tercera derivada es igual al resultado aplicando la fórmula, vemos que esta se cumple.

La derivada n-ésima de la función es la indicada.

11.- Si *f* y *g* son dos funciones derivables en todo punto, y se sabe que *f*(1) = 2, *f*(2) = 5, *g*(1) = 1, *g*(2) = 6, *f'*(1) = 3, *f'*(2) = 6, *f'*(6) = 4, *g'*(1) = 1, *g'*(2) = 3, *g'*(5) = 1. Determina el valor de:

a) $(f \circ g)'(2) = f'\big(g(2)\big)\cdot g'(2) = f'(6)\cdot g'(2) = 4\cdot 3 = 12$

b) $(g \circ f)'(1) = g'\big(f(1)\big)\cdot f'(1) = g'(2)\cdot f'(1) = 3\cdot 3 = 9$

c) $(g \circ f)'(2) = g'\big(f(2)\big)\cdot f'(2) = g'(5)\cdot f'(2) = 1\cdot 6 = 6$

d) $(f \circ f)'(1) = f'\big(f(1)\big)\cdot f'(1) = f'(2)\cdot f'(1) = 6\cdot 3 = 18$

12.- Sean *u*(x) y *v*(x) dos funciones derivables en un punto x. Pruébese que su producto *u*(x)·*v*(x) es derivable obteniendo la expresión de su derivada: D[*u*(x)·*v*(x)]=*u'*(x)·*v*(x)+*u*(x)·*v'*(x)

Si *u*(x) es derivable y *v*(x) es derivable, entonces *h*(x)=*u*(x)·*v*(x) también es derivable:

Escribimos la definición de derivada:

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = \lim_{b\to x}\frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sumamos y restamos *f*(*x*)·*g*(*b*):

$$\lim_{b\to x}\frac{f(b)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(b) + f(x)\cdot g(b) - f(x)\cdot g(x)}{b-x} =$$

Sacamos factor común *f*(*x*) y *g*(*b*):

$$\lim_{b\to x}\frac{\big(f(b)-f(x)\big)\cdot g(b) + f(x)\cdot\big(g(b)-g(x)\big)}{b-x} =$$

Aplicamos propiedades de los límites, el límite de una suma y el límite de un producto:

$$\lim_{b\to x}\frac{\big(f(b)-f(x)\big)}{b-x}\cdot \lim_{b\to x} g(b) + \lim_{b\to x} f(x)\cdot \lim_{b\to x}\frac{\big(g(b)-g(x)\big)}{b-x} =$$

Calculamos los límites:

f '(*x*) · *g*(*x*) + *f*(*x*) · *g'*(*x*), c.q.d.

13.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[6]{5x^{11}} = (5x^{11})^{\frac{1}{6}}$;

$y' = \frac{1}{6}(5x^{11})^{-\frac{5}{6}}\cdot 55x^{10} = \frac{55x^{10}}{6(5x^{11})^{\frac{5}{6}}} = \frac{55x^{10}}{6\sqrt[6]{5^5\cdot x^{55}}} = \frac{55x^{10}}{6x^9\sqrt[6]{5^5x}} = \frac{55x}{6\sqrt[6]{5^5x}}$

b) $y = \frac{\sqrt[4]{3x^2}\cdot\sqrt{x}}{3x^3+7} = \frac{(3x^2)^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{3x^3+7} = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot x}{3x^3+7}$;

$y' = \frac{3^{\frac{1}{4}}\cdot(3x^3+7) - 3^{\frac{1}{4}}x(9x^2)}{(3x^3+7)^2} = \frac{3^{\frac{1}{4}}(-6x^3+7)}{(3x^3+7)^2}$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $y=\frac{(3x^4-4)\sqrt{x}}{\sqrt[3]{7x^5}}=\frac{(3x^4-4)x^{\frac{1}{2}}}{(7x^5)^{\frac{1}{3}}}=\frac{3x^{\frac{9}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}}=\frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{9}{2}-\frac{5}{3}}-\frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{5}{3}}=\frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{\frac{17}{6}}-\frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{-\frac{7}{6}};$

$y'=\frac{3}{7^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}}-\frac{4}{7^{\frac{1}{3}}}\left(-\frac{7}{6}\right)x^{-\frac{13}{6}}$

d) $y=\frac{\sqrt[3]{x^7}}{2x+5}=\frac{(x^7)^{\frac{1}{3}}}{2x+5}=\frac{x^{\frac{7}{3}}}{2x+5};$

$y'=\frac{\left(\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}\right)\cdot(2x+5)-\left(x^{\frac{7}{3}}\right)\cdot 2}{(2x+5)^2}=\frac{\frac{14}{3}x^{\frac{7}{3}}+35x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{7}{3}}}{(2x+5)^2}=\frac{\frac{8}{3}x^{\frac{7}{3}}+35x^{\frac{4}{3}}}{(2x+5)^2}$

14) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3}\rightarrow y=\left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$y=\frac{1}{2}\left(\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}(3x^7-5x^5)^3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(6x^2-63x^8)(4x^5+6)-(2x^3-7x^9)(20x^4)}{(4x^5+6)^2}(3x^7-5x^5)^3+\frac{2x^3-7x^9}{4x^5+6}3(3x^7-5x^5)^2(21x^6-25x^4)\right)$

b) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}}\rightarrow y=\left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{(x^3+5x)(4x^3-6x)}{2x^4-5x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{16x^7-100x^4+120x^3-210x^2+150}{(2x^2-5)^2}\right)$

c) $\boldsymbol{y}=\sqrt{\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^4}\rightarrow y=\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)^2\rightarrow y'=2\left(\frac{3x^4+5x^2}{4x^2-6x^5}\right)\left(\frac{18x^4+90x^2+24x}{(4-6x^3)^2}\right)$

d) $\boldsymbol{y}=\sqrt[3]{5+\sqrt{5x-\frac{5}{x^5}}}\rightarrow y=\left(5+\left(5x-\frac{5}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\rightarrow y'=\frac{1}{3}\left(5+\left(5x-\frac{5}{x^5}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{2}\left(5x-\frac{5}{x^5}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(5-\frac{25}{x^6}\right)$

15) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\tan\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\rightarrow f'(x)=\left(1+\tan^2\left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right)\right)\left(\frac{6e^{3x}}{(1-e^{3x})^2}\right)\rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{6e^{3x}}{(1-e^{3x})^2}\right)}{\cos^2\left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}\right)}$

b) $f(x)=(2-3x)\sinh(2-3x)\rightarrow f'(x)=2\sinh(2-3x)-(2-3x)3\cosh(2-3x)$

c) $\boldsymbol{f(x)=\tan\left(\frac{\sqrt{4-9\sin x}}{3+2\cos x}\right)}$

$f'(x)=\left(1+\tan^2\left(\frac{\sqrt{4-9\sin x}}{3+2\cos x}\right)\right)\left(\frac{\frac{1}{2}(4-9\sin x)^{-\frac{1}{2}}(-9\cos x)(3+2\cos x)-(4-9\sin x)^{\frac{1}{2}}(-2\sin x)}{(3+2\cos(x))^2}\right)$

d) $\boldsymbol{f(x)=\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(x)+x\sin(x)}}$

$f'(x)=\frac{(\cos(x)-1\cos(x)+x(\sin(x)))(\cos(x)+x\sin(x))-(\sin(x)-x\cos(x))(-\sin(x)+\sin(x)+x\cos(x))}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$

$f'(x) = \frac{x^2}{(\cos(x)+x\sin(x))^2}$

16. Ya sabes que la función tangente se define como el cociente entre el seno y el coseno, las funciones hiperbólicas se definen utilizando la función exponencial. Comprueba las derivadas de la tabla siguiente de $\boldsymbol{tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}}$, $\boldsymbol{shx = \frac{e^x - e^x}{2}}$, $\boldsymbol{ch(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$, $\boldsymbol{th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}}$.

$f(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}; f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - sen(x)\cdot(-sen\,x)}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$

$f(x) = shx = \frac{e^x - e^x}{2} \to f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = ch(x)$

$f(x) = ch(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = sh(x)$

$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})\cdot(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})\cdot(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} =$

$\to \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2e^x e^{-x} - (e^x)^2 - (e^{-x})^2 + 2e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{1}{(chx)^2} = sech^2(x)$

17. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{y = (3x)^{x^5 - 9x^3}}; \ln(f(x)) = \ln\left(3x^{(x^5 - 9x^3)}\right) \to \ln(f(x)) = (x^5 - 9x^3)\cdot\ln(3x)=$

$\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = (5x^4 - 27x^2)\cdot\ln(3x) + (x^5 - 9x^3)\cdot\frac{3}{3x} =$

$f'(x) = (3x)^{x^5 - 9x^3}\left[(5x^4 - 27x^2)\cdot\ln(3x) + (x^5 - 9x^3)\cdot\frac{3}{3x}\right]$

$\boldsymbol{y = \left((2x+7)^{5x^3 - 6x^2}\right)} \to \ln(f(x)) = \ln\left(2x + 7^{(5x^3 - 6x^2)}\right) \to \ln(f(x)) =$

$= (5x^3 - 6x^2)\cdot\ln(2x+7) \to \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = (15x^2 - 12x)\cdot\ln(2x+7) + (5x^3 - 6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7} \to$

$\to f'(x) = (3x)^{x^5 - 9x^3}\left[(15x^2 - 12x)\cdot\ln(2x+7) + (5x^3 - 6x^2)\cdot\frac{2}{2x+7}\right]$

$\boldsymbol{y = (x+e)^{(4x^5 - 8x^3)^5}} \to \ln(f(x)) = ln(x+e)^{(4x^5 - 8x^3)^5} = (4x^5 - 8x^3)^5\cdot\ln(x+e)$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 5\cdot(4x^5 - 8x^3)^4\cdot(20x^4 - 24x^2)\cdot\ln(x+e) + (4x^5 - 8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}$

$f'(x) = (x+e)^{(4x^5 - 8x^3)^5}\cdot\left[5\cdot(4x^5 - 8x^3)^4\cdot(20x^4 - 24x^2)\cdot\ln(x+e) + (4x^5 - 8x^3)^5\cdot\frac{1}{x+e}\right]$

$\boldsymbol{f(x) = (x^x)^x} = x^{x^2} \to \ln(f(x)) = lnx^{x^2} = x^2\cdot lnx \to \frac{f'(x)}{f(x)} = (2x)\cdot\ln(x) + (x)^2\cdot\frac{1}{x}$

$f'(x) = (x^x)^x\cdot\left[(2x)\cdot\ln(x) + (x^2)\cdot\frac{1}{x}\right]$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)y = arcsen\sqrt{\frac{4+\text{sen}\,x}{4-senx}}}$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}}\cdot\frac{cosx\cdot(4-senx)-(4+senx)\cdot(-cosx)}{(4-senx)^2}$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4+senx}{4-senx}}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{4+senx}{4-senx}}} \cdot \frac{8cosx}{(4-senx)^2}$$

$$\boldsymbol{b)y = e^{arcos\sqrt{6x+8}}}$$

$$y' = e^{arcos\sqrt{6x+8}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(\sqrt{6x+8})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6x+8}} \cdot 6 = e^{arcos\sqrt{6x+8}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{-6x-7}} \cdot \frac{3}{\sqrt{6x+8}}$$

$$\boldsymbol{c)y = sen\left(arctg\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)}$$

$$y' = \cos\left(arctg\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{7x}{\sqrt{1-2x^2}}\right)^2} \cdot \frac{7\cdot\sqrt{1-2x^2}-7x\cdot\frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}}{(1-2x^2)}$$

$$\boldsymbol{d)y = arccos\frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{5x}{\sqrt{16-x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{5\cdot\sqrt{16-x^2}-5x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}}{16-x^2}$$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\mathbf{y = argsh\sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}}} = \text{argsh}\left(\frac{5+shx}{5-shx}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{5+shx}{5-shx}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{chx(5-shx)-(-chx)(5+shx)}{(5-shx)^2}}{\sqrt{1+\left[\left(\frac{5+shx}{5-shx}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}} = \frac{10chx}{2\sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}}\sqrt{1+\frac{5+shx}{5-shx}}} = \frac{10chx}{2\sqrt{\frac{5+shx}{5-shx}}\sqrt{\frac{10}{5-shx}}} = \frac{5chx(5-shx)}{\sqrt{10(5+shx)}}$$

b) $\mathbf{y = \sqrt{2e^{argch\sqrt{7x+3}}}} = \left(2e^{\text{argch}(7x+3)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(2e^{\text{argch}(7x+3)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}} 2e^{\text{argch}(7x+3)^{\frac{1}{2}}} \frac{\frac{1}{2}(7x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot 7}{\sqrt{\left((7x+3)^{\frac{1}{2}}\right)^2-1}} = \frac{7}{2}\frac{e^{\text{argch}\sqrt{7x+3}}}{\sqrt{2e^{\text{argch}\sqrt{7x+3}}}\sqrt{7x+3}\sqrt{7x+2}} = \frac{7\sqrt{e^{\text{argch}\sqrt{7x+3}}}}{2\sqrt{2}\sqrt{7x+3}\sqrt{7x+2}}$$

c) $\mathbf{y = sh\left(argth\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)} = \text{sh}\left(\text{argth}\frac{2x+6}{(25-16x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$

$$y' = \text{ch}\left(\text{argth}\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{\frac{2\sqrt{25-16x^2}-(2x+6)\frac{1}{2}(25-16x^2)^{-\frac{1}{2}}(-32x)}{\left(\sqrt{25-16x^2}\right)^2}}{1-\left(\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)^2} =$$

$$= \text{ch}\left(\text{argth}\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{\frac{\frac{2(25-16x^2)-(2x+6)(-16x)}{(25-16x^2)^{\frac{1}{2}}}}{25-16x^2}}{1-\frac{(2x+6)^2}{25-16x^2}} = \text{ch}\left(\text{argth}\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{\frac{2(25-16x^2)-(2x+6)(-16x)}{(25-16x^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{(25-16x^2)-(2x+6)^2}{25-16x^2}} =$$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$= \text{ch}\left(\text{argth}\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{2(25-16x^2)-(2x+6)(-16x)}{(25-16x^2)^{\frac{1}{2}}[(25-16x^2)-(2x+6)^2]} = \text{ch}\left(\text{argth}\frac{2x+6}{\sqrt{25-16x^2}}\right)\frac{50+96x}{\sqrt{25-16x^2}(-20x^2-24x-11)}$$

d) $\mathbf{y = argch\frac{senx}{\sqrt{5-3sen^2x^2}}} = \text{argch}\frac{\text{senx}}{(5-3\text{sen}^2x^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$y' = \frac{\dfrac{\text{cosx}\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}-\text{senx}\frac{1}{2}(5-3\text{sen}^2x^2)^{-\frac{1}{2}}(-6\text{senx}^2\cdot 2x\cdot \text{cosx}^2)}{\left(\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\text{senx}}{\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{cosx}(5-3\text{sen}^2x^2)-\text{senx}\cdot(-3\text{senx}^2\cdot 2x\cdot \text{cosx}^2)}{(5-3\text{sen}^2x^2)\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}}{\sqrt{\dfrac{(\text{senx})^2}{5-3\text{sen}^2x^2}-1}} = \frac{\dfrac{\text{cosx}(5-3\text{sen}^2x^2)-\text{senx}\cdot(-3\text{senx}^2\cdot 2x\cdot \text{cosx}^2)}{(5-3\text{sen}^2x^2)\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}}{\dfrac{\sqrt{(\text{senx})^2-(5-3\text{sen}^2x^2)}}{\sqrt{5-3\text{sen}^2x^2}}} =$$

$$= \frac{\text{cosx}(5-3\text{sen}^2x^2)-\text{senx}\cdot(-3\text{senx}^2\cdot 2x\cdot \text{cosx}^2)}{(5-3\text{sen}^2x^2)\sqrt{(\text{senx})^2-(5-3\text{sen}^2x^2)}}$$

20. Se considera la función $f(x) = \frac{1}{2+\sin x-\cos x}$. Se pide:
Comprueba la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi,\pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utiliza el teorema de Rolle). Demuestra que en c hay un punto de inflexión.

$f'(x) = -\frac{\text{cosx}+\text{senx}}{(2+\text{senx}-\text{cosx})^2}$ $\quad f'(-\pi) = f'(\pi)$

f' es continua y derivable en el entorno cerrado $[-\pi,\pi]$ y toma el mismo valor en los extremos, luego, por el teorema de Rolle, existe un punto $\boldsymbol{c} \in [-\boldsymbol{\pi},\boldsymbol{\pi}]$ en el que $f''(c) = 0$. Como el punto c anula la f'' y en él la función es continua, entonces tiene que tratarse de un punto de inflexión

21. Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) **Estudia la continuidad y derivabilidad de f en x= 0**
b) **Estudia cuando se verifica $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?**

Continuidad

$$f(x)\frac{|x|}{x^2+1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{x}{x^2+1} = -\frac{0}{0^2+1} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2+1} = \frac{0}{0^2+1} = 0$

Ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$, f es continua en x=0

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & si\ x < 0 \\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & si\ x > 0 \end{cases} \qquad f'(0^-) = -1 \qquad f'(0^+) = 1$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+)$ por lo tanto, la función no es derivable en x=0

22. Calcula $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{senx\,(1-senx)}{cos^2x}$

Textos Marea Verde

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx\,(1-senx)}{cos^2x} = \frac{0}{0}\ Indeterminado$$

Se hace un cambio usando $cos^2x = 1 - sen^2x$

Factorizamos la expresión = $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx\,(1-senx)}{(1-senx)(1+senx)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx}{1+senx} = \frac{senx\frac{\pi}{2}}{1+sen\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

23. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$

Resolvemos este límite por L'Hôpital $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

24. Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$ sabiendo que $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos sus puntos y tal que:

$f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f'(0) = 3$; $f'(1) = 4$.

$\lim_{x\to 0} \frac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1} = \frac{0}{0}$

Resolvemos este límite aplicando L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{4(f(x))(f'(x))-f'(x+1)}{e^x} = \frac{4\cdot 1\cdot 3-4}{1} = 8$$

25. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función: $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en x=0? ¿Y en x=2? ¿Y en x=-2?

$f(x) = x^3 - 3x$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 3$; $3x^2 - 3 = 0$; $x = 1, x = -1$ $\quad f''(x) = 6x$;

$f''(1) = -6 < 0$ Máximo. $\quad f''(-1) = 6 > 0$ Mínimo.

Creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $\quad$ Decreciente en $(-1, 1)$

En x=0 decreciente. En x=2 creciente. En x=-2 creciente.

26. Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $f(x) = x^4 - 1$

$f'(x) = 4x^3$; $4x^3 = 0$; x=0 ; $f''(x) = 12x^2$; $f''(0) = 12\cdot 0 = 0$ $\quad f'''(x) = 24x$; $f''''(x) = 24$; $\quad f''''(0) = 24 > 0$ Mínimo.

b) $f(x) = 3x^3 + 9$

$f'(x) = 9x^2$; $9x^2 = 0$; x=0 ; $f''(x) = 18x$; $f''(0) = 0$; No tiene ni máximos ni mínimos.

c) $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 5$

$f'(x) = 16x^3 - 4x$; $16x^3 - 4x$ =0 ; $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$ $\quad f''(x) = 48x^2 - 4$;

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ Mínimo. $\quad f''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ Mínimo. $\quad f''(0) = -4 < 0$ Máximo.

d) $f(x) = 9x^3 - 3x^2$

$f'(x) = 27x^2 - 6x$; $x = \frac{2}{9}$, $x = 0$

$f''(x) = 54x - 6$;

$f''\left(\frac{2}{9}\right) = 6 > 0$ Mínimo.

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$f''(0) = -6 < 0$ Máximo.

27. La velocidad de propagación de una onda de longitud x en aguas profundas viene dadas por la fórmula $v = \sqrt{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}$ en la que a es una constante conocida. Comprueba que la longitud que corresponde a un mínimo de velocidad es x=a.

$v = \sqrt{\frac{x^2+a^2}{ax}}$ Para calcular máximos y mínimos podemos prescindir de la raíz.

$f'(x) = \frac{(2x\cdot ax)-(x^2+a^2)(a)}{(ax)^2}$; $f'(x) = \frac{ax^2-a^3}{a^2x^2} = \frac{x^2-a^2}{ax^2}$; $x^2 - a^2 = 0$; $x = a$; $x = -a$

$f''(x) = \frac{2x\cdot ax^2-2ax\cdot(x^2-a^2)}{(ax^2)^2} = \frac{2a^3x}{(ax^2)^2} = \frac{2a}{x^3}$

$f''(a) = \frac{2a}{a^3} = \frac{2}{a^2} > 0$, por tanto, es un mínimo.

28. Demuestra que la suma de dos sumandos positivos, cuyo producto es constante, es mínima cuando estos son iguales.

Suma: x + y ; x·y = k ; $y = \frac{k}{x}$; $f(x) = x + \frac{k}{x}$;

$f'(x) = 1 - \frac{k}{x^2}$; $1 - \frac{k}{x^2} = 0$; $x^2 = k$; $x = \sqrt{k}$, pues ha de ser positivo.

$f''(x) = \frac{2k}{x^3}$ $f''(\sqrt{k}) = \frac{2k}{(\sqrt{k})^3} > 0$ luego es un mínimo.

$y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$, Por tanto, han de ser iguales.

29. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo [-5,5] y en el intervalo [1,4].

f(x) es continua y derivable en todos los puntos por ser una función polinómica.

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 72$; $f'(x) = 0 \to x = \frac{1 \pm i\sqrt{47}}{2}$, no real.

Luego $f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Sabiendo que $f(x)$ es creciente en todo su dominio:

Cuando $f(x)$ definida en el intervalo [-5,5]

Mín. absoluto: $f(-5) = 2(-5)^3 - 3(-5)^2 + 72(-5) = -685 \to$ Punto (-5,-685)

Máx. absoluto: $f(5) = 2(5)^3 - 3(5)^2 + 72(5) = 535 \to$ Punto (5,535)

Cuando $f(x)$ definida en el intervalo [1,4]

Mín. absoluto: $f(1) = 2(1)^3 - 3(1)^2 + 72(1) = 71 \to$ Punto (1,71)

Máx. absoluto: $f(4) = 2(4)^3 - 3(4)^2 + 72(4) = 368 \to$ Punto (4,368)

30. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

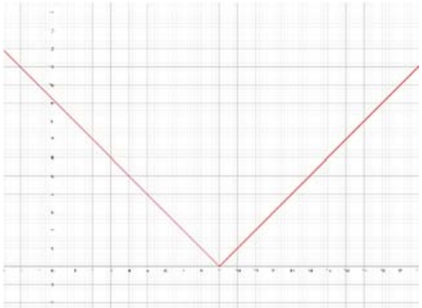
a) $y = |x - 9|$ b) $y = |x + 2| + |x - 3|$

a) $y = |x - 9|$

$$f(x) = \begin{cases} -x-9 & si \quad x < 9 \\ x-9 & si \quad x > 9 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en todos los puntos por ser una función polinómica, sin embargo, no es derivable en $x = 9$, puesto que sus derivadas laterales son distintas $f'_-(9) \neq f'_+(9)$; $-1 \neq 1$

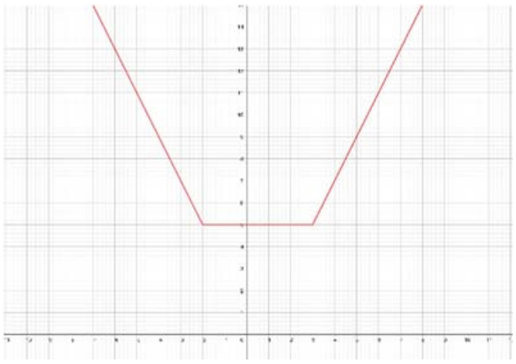
No obstante, en dicho punto tiene un mínimo a la vez relativo y absoluto. Sus coordenadas son P (9,0)



b) $y = |x+2| + |x-3|$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & si & x < -2 \\ 5 & si & -2 \le x \le 3 \\ 2x-1 & si & x > 3 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos por ser una función polinómica. Al ser una suma de funciones en valor absoluto, no es derivable ni en -2 ni en 3, no tiene máximos ni mínimos.



31. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x+2|$, en el intervalo [-4,4].

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & si & x < -2 \\ x+2 & si & x > -2 \end{cases}$$

f(x) es continua en todos los puntos al ser una función polinómica, pero no es derivable en $x = -2$, puesto que las derivadas laterales no son iguales $f'_-(-2) \neq f'_+(-2); -1 \neq 1$

En dicho punto, cuenta con un mínimo que es a la vez relativo y absoluto cuyas coordenadas son P (-2,0).

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$ y creciente en $(-2, \infty)$:

Para $f(x)$ definida en el intervalo $[-4,4]$:

Máx. Absoluto:

$f(4) = |4+2| = 6 \rightarrow$ B (4,6)

32. Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & si & x \le 0 \\ x^2 + x & si & x > 0 \end{cases}$. Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

a) ¿Es continua en el punto x=0? b) ¿Es derivable en el punto x=0? c) ¿Alcanza algún extremo?

a) Continuidad en $x = 0$

$f(0) = e^0 - 1 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (e^{-x} - 1) = e^0 - 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to +} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; luego $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Como $f(0) = \lim\limits_{x\to o}$, f(x) es continua en $x = 0$

b) Derivabilidad en $x = 0$

f(x) es continua en todo su dominio. Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & si \quad x < 0 \\ 2x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Para que f(x) sea derivable en $x = 0$, $f'_-(0) = f'_+(0)$

$$\begin{cases} f'_-(0) = -e^0 = -1 \\ f'_+(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

Como $-1 \neq 1$; $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ y, por lo tanto, f(x) no es derivable en $x = 0$

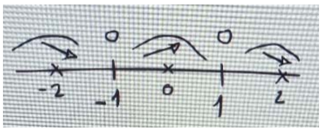
c) Extremos

Sí, alcanza un mínimo en $x = 0$

33. Se considera la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Determinar sus máximos y mínimos relativos.

f(x) es continua en todo su dominio por ser una función racional y no anularse su denominador.

$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(x) = 0;\quad x_1 = -1,\quad x_2 = 1$



$f'(-2) = \frac{-(-2)^2+1}{((-2)^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0 \quad f'(0) = \frac{-0^2+1}{(0^2+1)^2} = 1 > 0 \quad f'(2) = \frac{-2^2+1}{(2^2+1)^2} = \frac{-3}{25} < 0$

f(x) es creciente en $(-1,1)$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, entonces:

Mín. Relativo: $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2} \to$ Punto $\left(-1, -{}^1/_2\right)$

Máx. Relativo: $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \to$ Punto $\left(1, {}^1/_2\right)$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)}$

$$y' = \left(\frac{1}{2}(\ln(\arccos 5x))^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}}}{\arccos 5x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-5}{\sqrt{\ln(\arccos 5x)}\sqrt{1-(5x)^2}(arcos5x)}\right) =$$

$$= -\frac{5}{2\sqrt{\ln(\arccos 5x)}\sqrt{1-25x^2}\,(arccos5x)}$$

b) $y = \operatorname{arcsen}\frac{2-7x^2}{2+7x^2}$

$$y' = \frac{\frac{-14x(2+7x^2)-(2-7x^2)14x}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}} = \frac{\frac{-56x}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}} = \frac{-56x}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}\,(2+7x^2)^2}$$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $y = 5\arccos\frac{3\operatorname{sen}x+5}{5-3\operatorname{sen}x}$

$$y' = 5\left(\frac{-\frac{(3\cos x)(5-3\operatorname{sen}x)+(3\operatorname{sen}x+5)(3\cos x)}{(5-3\operatorname{sen}x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{3\operatorname{sen}x+5}{5-3\operatorname{sen}x}\right)^2}}\right) = -5\left(\frac{\frac{15\cos x-9\cos x\operatorname{sen}x+9\operatorname{sen}x\cos x+15\cos x}{(5-3\operatorname{sen}x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{3\operatorname{sen}x+5}{5-3\operatorname{sen}x}\right)^2}}\right) =$$

$$= -5\left(\frac{\frac{30\cos x}{(5-3\operatorname{sen}x)^2}}{\sqrt{1-\frac{(3\operatorname{sen}x+5)^2}{(5-3\operatorname{sen}x)^2}}}\right) = -5\left(\frac{30\cos x}{\sqrt{1-\frac{(3\operatorname{sen}x+5)^2}{(5-3\operatorname{sen}x)^2}}(5-3\operatorname{sen}x)^2}\right) = \left(\frac{-150\cos x}{\sqrt{(5-3\operatorname{sen}x)^2-(3\operatorname{sen}x+5)^2}(5-3\operatorname{sen}x)}\right) =$$

$$= \frac{-150\cos x}{\sqrt{-60senx}(5-3\operatorname{sen}x)}$$

d) $y = \operatorname{arcsen}\frac{5\cos x}{3\operatorname{sen}x+2\cos x}$

$$y' = \frac{\frac{-5\operatorname{sen}x(3\operatorname{sen}x+2\cos x)-(5\cos x)(3\cos x-2\operatorname{sen}x)}{(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{5\cos x}{3\operatorname{sen}x+2\cos x}\right)^2}} = \frac{\frac{-15\operatorname{sen}x^2-10\operatorname{sen}x\cos x-15\cos x^2+10\operatorname{sen}x\cos x}{(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2}}{\sqrt{1-\frac{(5\cos x)^2}{(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2}}} =$$

$$= \frac{-15(\operatorname{sen}x^2+\cos x^2)}{\sqrt{1-\frac{25cos^2x}{(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2}}(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-15(\operatorname{sen}x^2+\cos x^2)}{\frac{\sqrt{(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2-25cos^2x}(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2}{3\operatorname{sen}x+2\cos x}} = \frac{-15(\operatorname{sen}x^2+\cos x^2)}{\sqrt{(3\operatorname{sen}x+2\cos x)^2-25cos^2x}\cdot(3\operatorname{sen}x+2\cos x)}$$

35. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arcsen}(7e^{2x-3})$

$$y' = \frac{14e^{2x-3}}{\sqrt{1-(7e^{2x-3})^2}} = \frac{14e^{2x-3}}{\sqrt{1-49(e^{2x-3})^2}}$$

b) $y = \ln\left(\sqrt{5\operatorname{arcsen}(3x+2)}\right) = \frac{1}{2}\ln[5\operatorname{arcsen}(3x+2)]$

$$y' = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{5\cdot 3}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}\right)}{5\operatorname{arcsen}(3x+2)} = \frac{15}{10\operatorname{arcsen}(3x+2)\sqrt{1-(3x+2)^2}}$$

c) $y = \operatorname{arctg}\left(ln\sqrt[3]{(4x-5}\right) = arctg\frac{1}{3}ln(4x-5)$

$$y' = \frac{\frac{4}{3(4x-5)}}{1+\left(\ln\sqrt[3]{4x-5}\right)^2} = \frac{4}{3(4x-5)\left(1+\left(\ln\sqrt[3]{4x-5}\right)^2\right)}$$

d) $y = \operatorname{arcsen}(3\tan(5\operatorname{sen}(4x-2)))$

$$y' = \frac{3\sec^2(5\operatorname{sen}(4x-2))(5\cos(4x-2))(4)}{\sqrt{1-(3\tan(5\operatorname{sen}(4x-2)))^2}} = \frac{60(\cos(4x-2))(\sec^2(5\operatorname{sen}(4x-2))}{\sqrt{1-9(\tan^2(5\operatorname{sen}(4x-2))}}$$

36. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7+2senx}{7-2senx}}$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{2}(7+2senx)^{-\frac{1}{2}}(2cosx)\sqrt{7-2senx}\right)-\sqrt{7+2senx}\left(\frac{1}{2}(7-2senx)^{-\frac{1}{2}}\right)(-2cosx)}{1+\left(\sqrt{\frac{7+2senx}{7-2senx}}\right)^2} =$$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$=\frac{\frac{2\cos x\sqrt{7-2\text{sen}x}}{2(\sqrt{7+2\text{sen}x})}+\frac{2\cos x\sqrt{7+2\text{sen}x}}{2(\sqrt{7-2\text{sen}x})}}{\left(1+\frac{7+2\text{sen}x}{7-2\text{sen}x}\right)(7-2\text{sen}x)}=\frac{\frac{\cos x\sqrt{7-2\text{sen}x}}{\sqrt{7+2\text{sen}x}}+\frac{\cos x\sqrt{7+2\text{sen}x}}{\sqrt{7-2\text{sen}x}}}{\left(1+\frac{7+2\text{sen}x}{7-2\text{sen}x}\right)(7-2\text{sen}x)}$$

b) $y=e^{arcsen\sqrt{2x-5}}$

$$y'=e^{arcsen\sqrt{2x-5}}\left(\frac{\frac{1}{2}(2x-5)^{-\frac{1}{2}}(2)}{\sqrt{1-(\sqrt{2x-5})^2}}\right)=\frac{\left(e^{arcsen\sqrt{2x-5}}\right)\left(\frac{1}{2}(2x-5)^{-\frac{1}{2}}\right)(2)}{\sqrt{6x-2}}=$$

$$=\frac{\left(e^{arcsen\sqrt{2x-5}}\right)2}{2\sqrt{2x-5}\sqrt{6x-2}}=\frac{e^{arcsen\sqrt{2x-5}}}{\sqrt{2x-5}\sqrt{6x-2}}$$

c) $y=\cos\left(3arcsen\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)$

$$y'=-\text{sen}\left(3\text{arcsen}\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)(3)\left(\frac{\frac{6\sqrt{7-2x^2}-(6x-1)\left(\frac{1}{2}(7-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)(-4x)}{\left(\sqrt{7-2x^2}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)^2}}\right)=$$

$$=\frac{-3\,\text{sen}\left(3arcsen\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\left(6\sqrt{7-2x^2}+\frac{4x(6x-1)}{2\sqrt{7-2x^2}}\right)}{(7-2x^2)\sqrt{1-\frac{(6x-1)^2}{7-2x^2}}}=-\frac{3\,\text{sen}\left(3arcsen\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\left(6\sqrt{7-2x^2}+\frac{2x(6x-1)}{\sqrt{7-2x^2}}\right)}{(7-2x^2)\sqrt{1-\frac{(6x-1)^2}{7-2x^2}}}$$

d) $y=arcsen\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}$

$$y'=\frac{\frac{7\sqrt{9-2x^2}-(7x)\left(\frac{1}{2}(9-2x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}(-4x)}{\left(\sqrt{9-2x^2}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\frac{7\sqrt{9-2x^2}-(7x)\left(\frac{1}{2}(9-2x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}(-4x)}{9-2x^2}}{\sqrt{1-\frac{49x^2}{9-2x^2}}}=\frac{7\left(\sqrt{9-2x^2}+\frac{4x^2}{2\sqrt{9-2x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{49x^2}{9-2x^2}}(9-2x^2)}=\frac{7\left(\sqrt{9-2x^2}+\frac{2x^2}{\sqrt{9-2x^2}}\right)}{\sqrt{1-\frac{49x^2}{9-2x^2}}(9-2x^2)}$$

37. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\log(x^3-5x^5)^8$

$$y'=8(x^3-5x^5)^7\left(\frac{3x^2-25x^4}{(x^3-5x^5)^8}\right)=\frac{8(3x^2-25x^4)}{x^3-5x^5}$$

b) $y=\log_2(8x^2-3x^3)^2$

$$y'=2(8x^2-3x^3)\left(\frac{16x-9x^2}{8x^2-3x^3}\right)\log_2 e=\frac{2\ \ (16x-9x^2)\log_2 e}{8x^2-3x^3}$$

c) $y=\ln\sqrt{\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{(3x^6-7x^2)^2}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{2}\left(2\ln(3x^6-7x^2)-\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right)$

$$y'=\frac{1}{2}\left[\left(2\cdot\frac{18x^5-14x}{(3x^6-7x^2)}\right)-\frac{1}{2}\frac{2}{2x-1}\right]=\frac{18x^5-14x}{(3x^6-7x^2)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}$$

d) $y=\ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}=\frac{7}{4}\ln(3x^3+5x^9)$

$$y' = \frac{7}{4}\left(\frac{9x^2+45x^8}{3x^3+5x^9}\right) = \frac{7(9x^2+45x^8)}{4(3x^3+5x^9)} = \frac{63+315x^6}{12x+20x^7}$$

38. Sea la función $f(x) = 2x|4-x|$ Estudia su continuidad y derivabilidad.

$$2x|4-x| = \begin{cases} -2x(4-x), & x > 4 \\ 2x(4-x), & x \le 4 \end{cases}$$

$$2x|4-x| = \begin{cases} 2x^2-8x, & x > 4 \\ 8x-2x^2, & x \le 4 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad en x = 4

$$f(4) = 8\cdot 4 - 2\cdot 4^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^+} (2x^2-8x) = 2\cdot 4^2 - 8\cdot 4 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} (8x-2x^2) = 8\cdot 4 - 2\cdot 4^2 = 0 \end{cases}$$

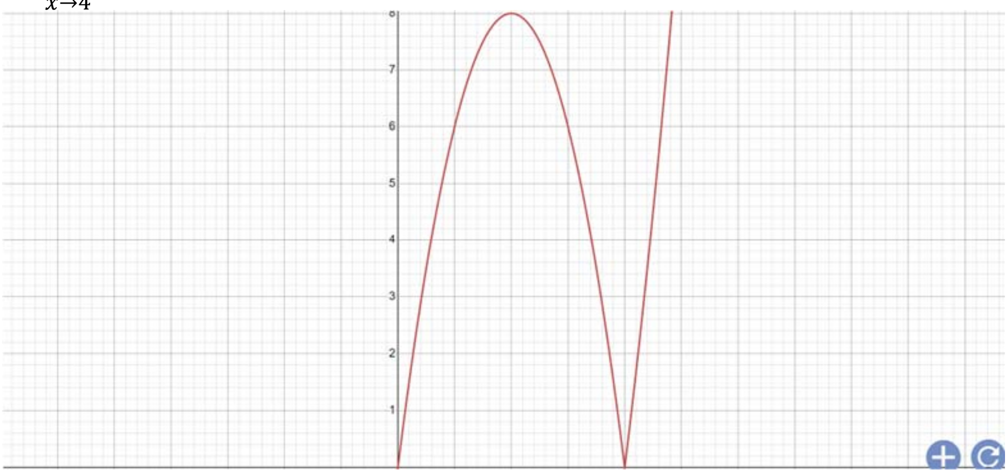
$$Como\ f(4) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x)\ \ entonces\ f(x) es\ continua\ en\ x = 4$$

Estudiar su derivabilidad en x = 4

$$\lim_{x\to 4} f'(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^+} (4x-8) = 4\cdot 4 - 8 = 8 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} (8-4x) = 8 - 4\cdot 4 = -8 \end{cases}$$

$$Como\ \lim_{x\to 4^+} f'(x) \ne \lim_{x\to 4^-} f'(x)\ \ entonces\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = 4$$

Dibuja su gráfica.



39. Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$. Calcula las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función f(x).

Asíntotas:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1} = 1$$

Por tanto, tiene asíntota horizontal en y=1. No tiene asíntotas verticales ni oblicuas.

Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{(8x-4)\cdot(4x^2+1)-(8x)\cdot(4x^2-4x+1)}{(4x^2+1)^2} = \frac{32x^3+8x-16x^2-4-(32x^3-32x^2+8x)}{(4x^2+1)^2} = \frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}$$

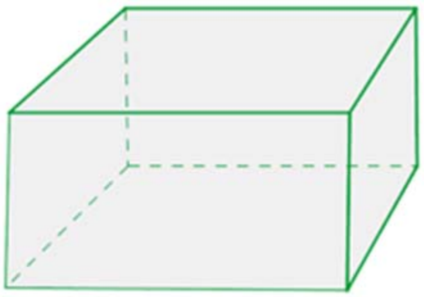
$$\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2} = 0 \to 16x^2-4=0; \quad x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{32x\cdot(4x^2+1)^2-(16x^2-4)\cdot 2\cdot(4x^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+1)^4} = \frac{32x\cdot(4x^2+1)-(16x^2-4)\cdot 16x}{(4x^2+1)^3}$$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, mínimo $\qquad$ $f''\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ máximo

40. Se desea fabricar envases con forma de ortoedro de base cuadrada de forma que el volumen sea de dos litros y la superficie empleada sea mínima.



x= largo = profundo / y= altura

V= 2 litros = $2dm^3$

Volumen:$2 = x^2 \cdot y \rightarrow y = \frac{2}{x^2}$

Superficie = $2(x^2 + 2yx) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x^2}x\right)$

$f(x) = 2\left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = 2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{4}{x}$

$f'(x) = 4x - \frac{4}{x^2} \qquad 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{4x^3-4}{x^2} = 0 \rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \rightarrow x = 1$

$f''(x) = 4 + \frac{8}{x^3} \qquad f''(1) = 4 + \frac{8}{(1)^3} > 0 \rightarrow Por\ lo\ tanto\ tenemos\ un\ mínimo\ para\ x = 1$

$y = \frac{2}{(1)^2} = 2$ $\qquad$ Lado de la base: 1 dm, altura: 2 dm

41. Determina las dimensiones de un cono de volumen mínimo inscrito en una esfera de radio R= 5cm.

V= $\frac{h \cdot \pi \cdot r^2}{3}$; $h = R + x \rightarrow h = 5 + x$; $r^2 = R^2 - x^2 \rightarrow r^2 = 25 - x^2$

$$V = \frac{(5+x) \cdot \pi \cdot r^2}{3} = \frac{(5+x) \cdot \pi \cdot (25 - x^2)}{3}$$

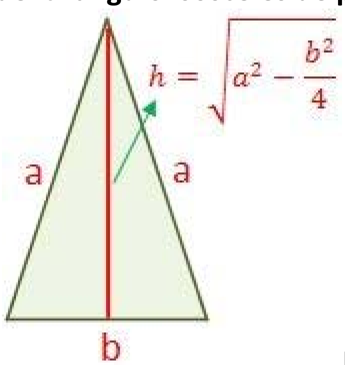
$$f'^{(x)} = \frac{-10\pi x + 25\pi}{3} - \pi x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0{,}66\ ; \quad x_2 = -3{,}99$$

La opción negativa no es válida.

$f''(x) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi x \qquad f''(0{,}66) = -\frac{10\pi}{3} - 2\pi(0{,}66) < 0 \rightarrow Hay\ un\ máximo\ relativo\ para\ 0{,}66.$

$h = 5 + 0{,}66 = 5{,}66\ cm \qquad r^2 = 25 - (0{,}66)^2 = 24{,}564; \qquad r = 4{,}9cm$

42. Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.



perímetro= b+2a

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

8= b+2a→ $a=\frac{8-b}{2}$

A=$\frac{1}{2}b\cdot h=\frac{b\cdot\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}}{2}=\frac{b\cdot\sqrt{\left(\frac{8-b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}}}{2}$

$f(x)=\frac{b\cdot\sqrt{\frac{64-16b}{4}}}{2}=\frac{\frac{b}{2}\cdot\sqrt{64-16b}}{2}=\frac{\frac{b}{2}\cdot\sqrt{16(4-b)}}{2}=b\cdot\sqrt{4-b}$

$f'(x)=\sqrt{4-b}+b\left(\sqrt{4-b}\right)=\sqrt{4-b}+\frac{b\cdot(-1)}{\sqrt{4-b}}=\frac{4-b-b}{\sqrt{4-b}}\to\frac{4-2b}{\sqrt{4-b}}=0$

$4-2b=0\to 4=2b\to b=2$

$f''(x)=\frac{-6+b}{\sqrt{4-b}\cdot(4-b)}$

$f''(b)<0\ \to Por\ tanto\ tenemos\ un\ máximo\ para\ b=2$

$a=\frac{8-b}{2}=\frac{8-2}{2}=3$; $h=\sqrt{9-\frac{4}{4}}=\sqrt{8}$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

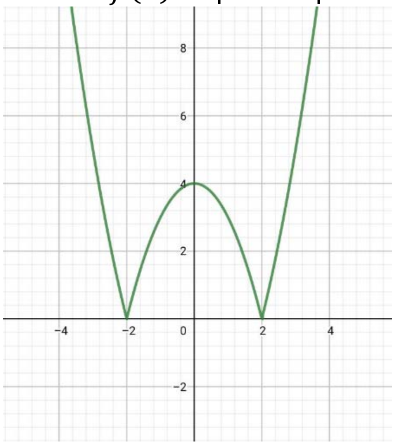
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Piensa en un ejemplo de función no derivable y que sí sea continua.

Es el caso de las funciones en valor absoluto: $f(x) = |x^2 - 4|$



Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en $x = -2$ y en $x = 2$, ya que esos dos puntos no tienen una única recta tangente.

2.- Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1, 4, 5$ ... ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$f'(5) = \lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \frac{0}{0} \to L'Hôpital \to \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{0}} = \frac{1}{0} = +\infty;$$

$$No\ se\ puede\ obtener\ la\ derivada\ en\ x = 0$$

3.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ x \le 1 \\ 2 & si\ x > 1 \end{cases}$, indica cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas, razonando la respuesta.

a) f es derivable en x=1, pues las derivadas laterales se anulan en dicho punto.

b) f ni es continua en x=1 ni derivable en dicho punto.

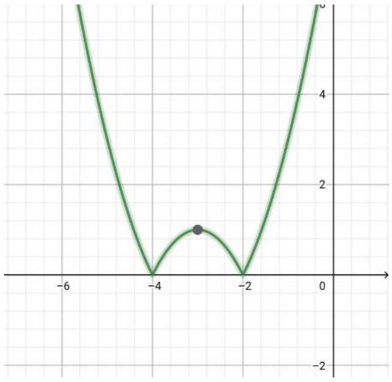
$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & si\ x < 1 \\ 0 & si\ x > 1 \end{cases}$ $\qquad f_-'(1) = 2(1-1) = 0; \qquad f_+'(1) = 0$

$f_-'^{(1)} = f_+'^{(1)} = 0$; las derivadas laterales tienen el mismo valor.

Sin embargo, f no es continua en 1 y por tanto tampoco derivable, la respuesta correcta es la b.

4.- ¿Cuántos puntos hay en la función $f(x) = |x^2 + 6x + 8|$ que no tengan derivada? Justifica la respuesta.

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde



Como podemos observar, la función es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es derivable en los puntos $x = -4$ y $x = -2$, ya que esos dos puntos tienen dos rectas tangentes.

5.- Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5x^2 + 3x - 2$ en el punto $x = 5$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$f(5) = 5 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 2 = 125$
$f'(x) = 10x + 3 \rightarrow f'(5) = 10 \cdot 5 + 3 = 53$
$y = 125 + 53(x - 5) = 125 + 53x - 265 = 53x - 140$
$y = 53x - 140$

6.- El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola: $y = 0,03x - 0,002x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ km.

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

a) $\mathrm{f}(0) = 0{,}03 \cdot 0 - 0{,}002 \cdot 0^2 = 0$
$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0{,}03 - 0.004\mathrm{x} \rightarrow \mathrm{f}'(0) = 0{,}03 - 0{,}004 \cdot 0 = 0{,}03$
$\mathrm{y} = 0 + 0{,}03(\mathrm{x} - 0); \quad \mathrm{y} = 0{,}03\mathrm{x}$
b) $\mathrm{f}(1) = 0{,}03 \cdot 1 - 0{,}002 \cdot 1^2 = 0{,}028$
$\mathrm{f}'(1) = 0{,}03 - 0{,}004 \cdot 1 = 0{,}026$
$\mathrm{y} = 0{,}028 + 0{,}026(\mathrm{x} - 1)$
c) $\mathrm{f}(2) = 0{,}03 \cdot 2 - 0{,}002 \cdot 2^2 = 0{,}052$
$\mathrm{f}'(2) = 0{,}03 - 0{,}004 \cdot 2 = 0{,}022$
$\mathrm{y} = 0{,}052 + 0{,}022(\mathrm{x} - 2)$
d) $\mathrm{f}(3) = 0{,}03 \cdot 3 - 0{,}002 \cdot 3^2 = 0{,}072$
$\mathrm{f}'(3) = 0{,}03 - 0{,}004 \cdot 3 = 0{,}018$
$\mathrm{y} = 0{,}072 + 0{,}018(\mathrm{x} - 2)$

7.- Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = (1/2)gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9.8):

a) ¿A que velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 8 segundos en llegar a ella?

$$Sabiendo\ que: \quad v = d'; \quad d' = 10t \quad v = 10 \cdot 8 = 80m/s$$

b) ¿A que velocidad llegará si se lanza desde una altura de 20m?

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Sabiendo que: $v = \frac{d}{t}$; $d = 5t^2 \to t = \sqrt{\frac{d}{5}}$ $t = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2\ s$ $v = 10 \cdot 2$
$= 20 m/s$

8. Un vehículo espacial despega de un planeta con una trayectoria dada por:$y = 30x - 0'5x^2$(x e y en km). La dirección del vehículo nos proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 4 km de distancia sobre el horizonte.

Dada la función $f(x) = 30x - 0'5x^2$ hacemos la derivada $f(x)' = 30 - x$ y sustituimos x=4
$f'(4) = 30 - 4 = 26$ y hallamos la dirección del vehículo.

9. Un determinado gas ocupa un volumen de 3 m^3 a una presión de 3 Newtons por m^2. Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde a un volumen dado por $V = 10/P$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 9 Newtons por m^2.¿ Y cuando es 18 Newtons por m^2? ¿Es la mitad?

Viendo el enunciado sabemos que para calcular la tasa de variación instantánea tenemos que hacer la derivada de $V = 10/P$ y sustituir la presión.

$V = \frac{10}{P}$; $V' = -\frac{10}{P^2}$ $V'(9) = -\frac{10}{9^2} = -\frac{10}{81}$ $V'(18) = -\frac{10}{18^2} = -\frac{10}{324}$

10. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

Fórmula de la recta tangente: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

a) $y = x^3 + 5$ en x=2

$y' = 3x^2$

$y(2) = 2^3 + 5 = 13$ $y'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

$y = 13 + 12(x - 2) \to y = 12x - 11$

b) $y = 3x^2 + 7x - 2$ en x=1

$y(1) = 1^3 + 5 = 6$

$y' = 6x + 7$; $y'(1) = 6 + 7 = 13$

$y = 6 + 13(x - 1) \to$ $y = 13x - 5$

c) $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ en x=0

$y(0) = 2 \cdot 0^3 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4$

$y' = 6x^2 - 5x$ $y'(0) = 6 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 = 0$

$y = 4 + 0(x - 0) \to y = 4$

11. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta y=0 ; b) a la recta y=2x.

$y = x^3 - 3x + 2$

a) Paralela y=0 $\to$ $m = 0$ $y = 3x^2 - 3$; $3x - 3 = 0$; $3x = 3$; $x = 1$

Punto (1,0)

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

b) y=2x $\rightarrow$ $m = 2$ $y = 3x^2 - 3$; $3x - 3 = 2$; $3x = 5$; $x = \frac{5}{3}$

Punto (5/3, 10/3)

12. Determina la recta tangente de la gráfica de la función $y = \sqrt{4x^3}$ en x=0

$$y(0) = \sqrt{0} = 0$$
$$y' = \frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3}} = \frac{12x^2}{2 \cdot 2\sqrt{x^3}} = (x^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{1/2}) = 3\sqrt{x}$$
$$y('0) = 3\sqrt{0} = 0$$
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$
$$y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$$

13. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

$f(x) = 4x^3 - 12x$ m=12

$$f'(x) = 12x^2 - 12x \quad el\ menor\ valor\ que\ puede\ tener\ la\ pendiente\ es\ en\ x = 0\ ;\ (0{,}0)$$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x \quad ; 12x^2 - 12x = 12; \quad 12x^2 = 24; \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Puntos: $(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})\ y\ (-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

14. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A(1,2) y es tangente a la recta y=x en el punto O(0,0).

$$\begin{array}{ll} & f(0) = 0 \quad \rightarrow c = 0 \\ f'(x) = 3ax^2 + b & f'(0) = b \quad\quad 1 = b \\ Punto\ A(1{,}2) & f(1) = 2 \quad \rightarrow a = 1 \end{array}$$

15. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + a$ y $g(x) = cx - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A(1, 0).

$f(x) = x^3 + bx + a$; $f(1) = 0$; $0 = 1^3 + b(1) + a$; $0 = a - 3 + 1$; $a = 2$
$g(x) = cx - x^2$; $g(1) = 0$; $c - 1 = 0$; $c = 1$
$f(x) = x^3 + bx + a$; $f'(x) = 3x^2 + b$; $f'(1) = 3 + b$
$g'(x) = c - 2x = 1 - 2x$ $g'(1) = -1$; $3 + b = -1$; $b = -4$

16. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$, sea tangente a la recta y=x.

$y = x \rightarrow m = 1$

$f(x) = x^2 + a$; $f'(x) = 2x$; $2x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{4} + a$

En los puntos de la forma $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + a\right)$ la recta y = x es tangente a la función.

17. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y = 3x^2 + 5x - 7$; $y' = 6x + 5$
b) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x + 2$; $y' = 15x^2 - 8x + 3$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

c) $y = 6x^2 - 4x + 7$; $y' = 12x - 4$

d) $y = 9x^7 - 4x^6 - 2x^3$; $y' = 63x^6 - 24x^5 - 6x^2$

18. Calcula.

a) $D(3x^2 + 6x^4 - 9x) = 6x + 24x^3 - 9$

b) $D(7x^5 - 5x^2 + 3x + 2x^3) = 35x^4 - 10x + 3 + 6x^2$

c) $D(5x^5 - 4x^4 + 3x^3) = 25x^4 - 16x^3 + 9x^2$

d) $\frac{dy}{dx}(7x^3 - 8x^6 - 9x^8) = 21x^2 - 48x^5 - 72x^7$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 5x^2 + 4x - \frac{3}{x}$; $y' = 10x + 4 + \frac{3}{x^2}$

b) $y = \frac{(2x^2+5)(7x-3)}{5x-8}$; $y = \frac{14x^3-6x^2+35x-15}{5x-8}$; $y' = \frac{(42x^2-12x+35)(5x-8)-(14x^3-6x^2+35x-15)(5)}{(5x-8)^2}$

c) $y = \frac{6\sqrt{x}}{(x+2)(x^2-3x+1)}$; $y = \frac{6x^{\frac{1}{2}}}{(x^3-3x^2+x+2x^2-6x+2)}$; $y' = \frac{\left(3x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^3-x^2-5x+2)-\left(6x^{\frac{1}{2}}\right)(3x^2-2x-5)}{(x^3-x^2-5x+2)^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x}(x+3)}{(x^2-3)}$; $y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(x+3)}{(x^2-3)}$; $y = \frac{\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)}{(x^2-3)}$; $y' = \frac{\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)(x^2-3)-\left(x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\right)(2x)}{(x^2-3)^2}$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = \frac{(x-3)\cdot(2x-4)}{x+5}}$

$y' = \frac{(1\cdot(2x-4)+(x-3)\cdot 2)\cdot(x-5)-((x-3)\cdot(2x-4))\cdot 1}{(x+5)^2}$ $\qquad y' = \frac{2x^2+20x-62}{(x+5)^2}$

$\boldsymbol{b)\ y = \frac{(2x^2+5)\cdot(7x-3)}{5x-8}}$

$y' = \frac{(4x\cdot(7x-3)+(2x^2+5)\cdot 7)\cdot(5x-8)-((2x^2+5)\cdot(7x-3))\cdot 5}{(5x-8)^2}$ $\qquad y' = \frac{140x^3-366x^2+96x-205}{(5x-8)^2}$

$\boldsymbol{c)\ y = \frac{(2x+3x^2)\cdot(4x^5-5)}{6x+7}}$

$y' = \frac{((2+6x)\cdot(4x^5-5)+(2x+3x^2)\cdot 20x^4)\cdot(6x+7)-((2x+3x^2)\cdot(4x^5-5))\cdot 6}{(6x+7)^2}$

$y' = \frac{432x^7+828x^6+366x^5-90x^2-210x-70}{(6x+7)^2}$

$\boldsymbol{d)\ y = \frac{5(x+2)\cdot(4x-6)}{2(x+5)\cdot(6x+3)}}$

$y' = \frac{5}{2}\cdot\frac{(1\cdot(4x-6)+(x+2)\cdot 4)\cdot((x+5)\cdot(6x+3))-((x+2)\cdot(4x-6))\cdot(1\cdot(6x+3)+(x+5)\cdot 6)}{((x+5)\cdot(6x+3))^2}$

$y' = \frac{5(20x^2+44x+71)}{3(x+5)^2\cdot(2x+1)^2}$

21. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = (x^3 + 5)\cdot(8x^6 - 7)}$

$y' = (3x^2\cdot(8x^6 - 7) + (x^3 + 5)\cdot 48x^5)$ $\qquad y' = 72x^8 + 240x^5 - 21x^2$

$\boldsymbol{b)\ y = (9x^3 - 3)\cdot(7x^4 + 6)}$

$y' = (27x^2\cdot(7x^4 + 6) + (9x^3 - 3)\cdot 28x^3)$ $\qquad y' = 441x^6 - 84x^3 + 162x^2$

22. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$\boldsymbol{a)}\ y = \frac{x-2}{x+2} \qquad y' = \frac{(1)\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2} \qquad y' = \frac{4}{(x+2)^2}$

$\boldsymbol{b)}\ y = \sqrt{x-2}\cdot(6x^3-3x)$

$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\cdot(6x^3-3x) + \left(\sqrt{x-2}\right)\cdot(18x^2-3)\right) \qquad y' = \frac{42x^3-72x^2-9x+12}{2\sqrt{x-2}}$

$\boldsymbol{c)}\ y = \frac{(4x^3-7x^2)}{(8x^4-4x^3)}$

$y' = \frac{(12x^2-14x)\cdot(8x^4-4x^3)-(4x^3-7x^2)\cdot(32x^3-12x^2)}{(8x^4-4x^3)^2} \qquad y' = \frac{8x^2-28x+7}{4x^2(2x-1)^2}$

$\boldsymbol{d)}\ y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3x+4} \qquad y' = \frac{2\left(\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)\cdot(3x+4)-\left(2\sqrt{x^3}\right)\cdot 3}{(3x+4)^2} \qquad y' = \frac{3x\sqrt{x}+12\sqrt{x}}{(3x+4)^2}$

23. calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)}\ y = (x^6-5x^2)^9 \qquad y' = (9\cdot(x^6-5x^2)^8\cdot(6x^5-10x))$

$\boldsymbol{b)}\ y = (2x^4-7x^6)^5 \qquad y' = (5\cdot(2x^4-7x^6)^4\cdot(8x^3-42x^5))$

$\boldsymbol{c)}\ y = \sqrt{(2x^7-6x^5)^3} \qquad y' = \left(\frac{3}{2}\cdot(2x^7-6x^5)^{\frac{1}{2}}\cdot(14x^6-30x^4)\right)$

$\boldsymbol{d)}\ y = \sqrt[5]{(3x^4+6x^9)^7} \qquad y' = \left(\frac{7\cdot(3x^4+6x^9)^{\frac{2}{5}}\cdot(12x^3-54x^8)}{5}\right)$

24. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

A) $y = \sqrt{2x^3+3}\cdot(4x^7+6x^2)^6 \to (2x^3+3)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x^7+6x^2)^6 \to$

$y' = \frac{1}{2}(2x^3+3)^{-1/2}\cdot(6x^2)\cdot(4x^7+6x^2)^6 + (2x^3+3)^{\frac{1}{2}}\cdot 6(4x^7+6x^2)^5\cdot(28x^6+12x)$

B) $y = \frac{\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{3x+4} \to y' = \frac{\frac{15x^2+14x}{3\sqrt[3]{(5x^3+7x^2-2)^2}}\cdot(3x+4)-3\cdot\sqrt[3]{5x^3+7x^2-2}}{(3x+4)^2}$

C) $y = (7x^3+3)^5\cdot\left(4x^5-8x^8\right)$

$y' = 5\cdot(7x^3+3)^4\cdot 21x^2\cdot(4x^5-8x^8)+(7x^3+3)^5\cdot(20x^4-64x^7)$

D) $y = \frac{(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^2} \to y' = \frac{9(5x^3-7x^2)^8\cdot(15x^2-14x)\cdot(9x^4-3x^3)^2-2(9x^4-3x^3)\cdot(36x^3-9x^2)\cdot(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^4}$

$y' = \frac{9(5x^3-7x^2)^8\cdot(15x^2-14x)\cdot(9x^4-3x^3)-2\cdot(36x^3-9x^2)\cdot(5x^3-7x^2)^9}{(9x^4-3x^3)^3}$

25. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

A) $y = (5x)^{x^5-3x^3} \to Ly = L(5x)^{x^5-3x} \to Ly = (x^5-3x^3)\cdot L(5x)$

$\frac{y'}{y} = (5x^4-9x^2)\cdot L(5x)+(x^5-3x^3)\cdot\frac{5}{5x} \to y' = y\left[(5x^4-9x^2)\cdot L5x+(x^5-3x^3)\cdot\frac{5}{5x}\right]$

$y' = \left((5x)^{x^5-3x^3}\right)\cdot\left[(5x^4-9x^2)\cdot L(5x)+(x^5-3x^3)\cdot\frac{1}{x}\right]$

B) $y = e^{(3x^5-6x^3)^5} \to Ly = Ln\, e^{(3x^5-6x^3)^5} \to Ly = (3x^5-6x^3)^5 \to$

$\frac{y'}{y} = 5\cdot(3x^5-6x^3)^4(15x^4-18x^2) \to y' = y\cdot(3x^5-6x^3)^4[75x^4-90x^2]$

$y' = \left(e^{(3x^5-6x^3)^5}\right)\cdot(3x^5-6x^3)^4(75x^4-90x^2)$

C) $\boldsymbol{y=(3x+6)^{4x^3+2x^2}} \to Ly = L(3x+6)^{4x^3+2x^2} \to Ly = (4x^3+2x^2)\cdot L(3x+6)$

$\frac{y'}{y} = (12x^2+4x)\cdot L(3x+6) + (4x^3+2x^2)\cdot\frac{3}{3x+6}$

$y' = y\cdot\left[(12x^2+4x)\cdot(3x+6) + (4x^3+2x^2)\cdot\frac{3}{3x+6}\right]$

$y' = \left[(12x^2+4x)\cdot(3x+6) + (4x^3+2x^2)\cdot\frac{3}{3x+6}\right]\cdot(3x+6)^{4x^3+2x^2}$

D) $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}}} = (5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to Ly = L(5x+1)^{\frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}} \to$

$Ly = \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot L(5x+1)$

$\frac{y'}{y} = \frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3-30x^4)\cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot\frac{5}{5x+1}$

$y' = y\cdot\left[\frac{3(4x^7+6x^5)^2}{3}(28x^3-30x^4)\cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot\frac{5}{5x+1}\right]$

$y' = \left[(4x^7+6x^5)^2(28x^3-30x^4)\cdot L(5x+1) + \frac{(4x^7+6x^5)^3}{3}\cdot\frac{5}{5x+1}\right]\cdot\sqrt[3]{(5x+1)^{(4x^7+6x^5)^3}}$

26. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

A) $y = e^{x^5+7x^3} \quad \to \quad y' = e^{x^5+7x^3}\cdot(5x^4+21x^2)$

B) $y = \left(e^{3x^3-5x^2}\right)^7 \quad \to y' = e^{(3x^3-5x^2)^7}\cdot(7(3x^3-5x^2)^6)\cdot 9x^2-10x$

C) $y = \left(e^{4x^5+8x^3}\right)^5 \quad \to y' = e^{(4x^5+8x^3)^5}\cdot(5(4x^5+8x^5)^4)\cdot 20x^4+24x^2$

D) $y = \sqrt[3]{e^{(5x^5-3x^8)^2}} \quad \to y' = \frac{2(5x^5-3x^8)\cdot(24x^4-24x^7)}{3\sqrt[3]{\left(e^{5x^5-3x^8}\right)^2}}$

27- Calcula la derivada de las siguientes funciones

a) $y = \log[(5x^5-3x^3)^{12}(3x+1)]$; $y' = \frac{12(5x^5-3x^3)^{11}(25x^4-12x^4)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)^{12}}{(5x^2-3x^3)^{12}(3x+1)}$

$y' = \frac{12(25x^4-12x^4)(3x+1)+3(5x^5-3x^3)}{(5x^2-3x^3)(3x+1)}$

b) $y = \log\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}$; $y' = \frac{\frac{3}{2}\cdot(2x^3+5x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(6x^2+10x)}{\sqrt{(2x^3+5x^2)^3}} = \frac{3(6x^2+10x)}{2(2x^3+5x^2)}$

c) $y = \log\sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}}$

$y' = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{7x^5-5x}{2x-3}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(35x^4-5)\cdot(2x-3)-(7x^5-5x)\cdot 2}{(2x-3)^2}}{\sqrt{\frac{7x^5-5x}{2x-3}}} = \frac{(35x^4-5)\cdot(2x-3)-(7x^5-5x)\cdot 2}{2(2x-3)(7x^5-5x)}$

d) $y = \log\sqrt[3]{(3x^4-3x^5)^2} = \frac{3}{2}\log(3x^4-3x^5)$; $\quad y' = \frac{3(12x^3-15x^5)}{2(3x^4-3x^5)}$

28- Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \frac{5\cos x}{1+3\,\mathrm{sen}\,x^2}$; $\quad f'(x) = \frac{(-5\,\mathrm{sen}\,x)\cdot(1+3\,\mathrm{sen}\,x^2)-((5\cos x)\cdot(3\cos x^2)\cdot 2x)}{(1+3\,\mathrm{sen}\,x^2)^2}$

b) $f(x) = \cosh(3\mathrm{senh}(2x))$; $\quad f'(x) = \mathrm{senh}(3\,\mathrm{senh}(2x))\cdot 3\cdot\cosh(2x)\cdot 2$

c) $f(x) = \mathrm{sen}(5sh^3\cdot 3x)$; $\quad f'(x) = \cos(5sh^3 3x)\cdot(15sh^2 3\,x)\cdot 3$

d) $f(x) = \tanh(5x+7x^2)$; $\quad f'(x) = \frac{5+14x}{\cosh^2(5x+7x^2)}$

29-Recuerda la definición de cosecante: cosec(x)=$\frac{1}{sen(x)}$. Demuestra que: (cosec(x))' = $-\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2(x)}$

Textos Marea Verde

$f(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$; $f'(x) = \frac{0\cdot \text{sen}(x) - 1\cdot \cos(x)}{\text{sen}^2(x)} = -\frac{\cos(x)}{\text{sen}^2(x)}$

30- Recuerda la definición de secante: $\frac{1}{\cos(x)}$ **. Demuestra que: (sec(x))' =** $\frac{\text{sen}\, x}{\cos^2(x)}$

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = f'(x) = \frac{0\cdot \cos(x) - 1\cdot(-\text{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}$$

31. Recuerda la definición de cotangente: $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ **. Demuestra que** $(\cot(x))' = -\frac{1}{\text{sen}^2(x)}$

$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$; $(\cot(x))' = \frac{(-\text{sen}(x)\cdot\text{sen}(x)) - (\cos(x)\cdot\cos(x))}{(\text{sen}(x))^2} = \frac{-\text{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)} = \frac{-(\text{sen}^2(x)+\cos^2(x))}{\text{sen}^2(x)} = -\frac{1}{\text{sen}^2(x)}$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = 7\,\text{sen}(x^7 - 7x^3)}$; $y' = 7\cos(x^7 - 7x^3)(7x^6 - 21x^2) = (49x^6 - 147x^2)\cos(x^7 - 7x^3)$

$\boldsymbol{b)\ y = 5\,\text{sen}^5(4x^4 - 5x^5)}$; $y' = 5\,\text{sen}^4(4x^4 - 5x^5)\cdot \cos(4x^4 - 5x^5)\cdot(16x^3 - 25x^4)$

$\boldsymbol{c)\ y = \text{sen}^6(x)\cdot\cos^4(x)}$; $y' = 6\,\text{sen}^5(x)\cdot \cos(x)\cdot\cos^4(x) - \text{sen}^6(x)\cdot 4\cos^3(x)\cdot \text{sen}(x)$

$\boldsymbol{d)\ y = \sqrt[3]{\text{sen}^5(3x^4 + 5x^7)}} = (\text{sen}(3x^4 + 5x^7))^{\frac{5}{3}}$;

$$y' = \frac{5}{3}(\text{sen}(3x^4 + 5x^7))^{\frac{2}{3}}(\cos(3x^4 + 5x^7))\,(12x^3 + 35x^6)$$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ f(x) = \text{sen}\,\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}}$

$$f'(x) = \cos\frac{5+3e^{3x}}{5-3e^{3x}}\left(\frac{(9e^{3x})\cdot(5-3e^{3x}) - (5+3e^{3x})\cdot(-9e^{3x})}{(5-3e^{3x})^2}\right)$$

$\boldsymbol{b)\ f(x) = (2x - 3x^2)\cosh(5x - 7x^2)}$;

$$f'(x) = (2 - 6x)\cosh(5x - 7x^2) + (2x - 3x^2)\,\text{senh}(5x - 7x^2)(5 - 14x)$$

$\boldsymbol{c)\ f(x) = \tan\frac{\sqrt{16 - 9\,\text{sen}\,x}}{4 + 3\cos x}}$;

$$f'(x) = \left(1 + \tan^2\frac{\sqrt{16-9\,\text{sen}\,x}}{4+3\cos x}\right)\left(\frac{\left(\frac{-9\cos x}{2\sqrt{16-9\,\text{sen}\,x}}\right)(4+3\cos x) - \left(\sqrt{16-9\,\text{sen}\,x}\right)(3\,\text{sen}\,x)}{(4+3\cos x)^2}\right)$$

$\boldsymbol{d)\ f(x) = \frac{\text{senh}\,x - 3x\cosh x}{\cosh x + 3x\,\text{senh}\,x}}$

$$f'(x) = \frac{(\cosh x - (3\cosh x + 3x\,\text{senh} x))\,(\cosh x + 3x\,\text{senh}\,x) - (\text{senh}\,x - 3x\cosh x)(\text{senh} x + (3\text{senh} x + 3x\cosh x))}{(\cosh x + 3x\,\text{senh}\,x)^2}$$

34. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a)\ y = \sqrt{\ln(\arccos 5x)} = (\ln(\arccos 5x))^{\frac{1}{2}}}$;

$$y' = \frac{1}{2}(\ln(\cos^{-1}5x))^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{-5}{\sqrt{1-(5x)^2}}}{\cos^{-1}5x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\cos^{-1}5x)}}\left(\frac{\frac{-5}{\sqrt{1-25x^2}}}{\cos^{-1}5x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\cos^{-1}5x)}}\left(\frac{-5}{(\cos^{-1}5x)\cdot(\sqrt{1-25x^2})}\right)$$

$\boldsymbol{b)\ f(x) = \arcsen\frac{2-7x^2}{2+7x^2}}$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$f'(x)=\frac{\frac{(-7\cdot 2x)(2+7x^2)-(2-7x^2)(7\cdot 2x)}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}}=\frac{\frac{(-14x)(2+7x^2)-(2-7x^2)(14x)}{(2+7x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2-7x^2}{2+7x^2}\right)^2}}$$

$c)\ \boldsymbol{f(x)=5arccos\frac{3\,\mathrm{sen}\,x+5}{5-3\,\mathrm{sen}\,x}}$

$$f'(x)=5\frac{-\left(\frac{(3\cos x)(5-3\,\mathrm{sen}\,x)-(3\,\mathrm{sen}\,x+5)(-3\cos x)}{(5-3\,\mathrm{sen}\,x)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{3\,\mathrm{sen}\,x+5}{5-3\,\mathrm{sen}\,x}\right)^2}}$$

$d)\ \boldsymbol{f(x)=\mathrm{arcsen}\frac{5\cos x}{3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x}}$

$$f'(x)=\frac{\frac{(-5\,\mathrm{sen}\,x)(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)-(5\cos x)(3\cos x-2\mathrm{sen}\,x)}{(3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{5\cos x}{3\,\mathrm{sen}\,x+2\cos x}\right)^2}}$$

***35.* Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y=arcsen(7e^{2x-3})}\rightarrow\ y'=\frac{7\cdot 2\cdot e^{2x-3}}{\sqrt{1-(7e^{2x-3})^2}}\rightarrow y'=\frac{14e^{2x-3}}{\sqrt{1-49(e^{2x-3})^2}}$

b) **y=** $\boldsymbol{ln\left(\sqrt{5arcsen(3x+2)}\right)}\rightarrow \boldsymbol{y=\frac{1}{2}\ln\left(5arcsen(3x+2)\right)}\rightarrow$

$$\rightarrow y'=\frac{1}{2}\frac{5\frac{3}{\sqrt{1+(3x+2)^2}}}{5arcsen(3x+2)}\qquad y'=\frac{3}{arcsen(3x+2)\cdot\sqrt{1+(3x+2)^2}}$$

c) $\boldsymbol{y=arctg\left(ln\sqrt[3]{4x-5}\right)}\rightarrow\ y=arctg\left(\frac{1}{3}ln(4x-5)\right)$

$$\rightarrow y'=\frac{\frac{1}{3}\frac{4}{4x-5}}{1+\left(\left(\frac{1}{3}ln(4x-5)\right)^2\right)}\rightarrow y'=\frac{4}{(12x-15)\cdot\left(1+\left(\frac{1}{3}ln(4x-5)\right)^2\right)}$$

d) $\boldsymbol{y=arcsen\left(3tg\left(5sen(4x-2)\right)\right)}\rightarrow$

$$y'=\frac{\frac{3\cdot 5\cdot cos(4x-2)\cdot 4}{[cos(5sen(4x-2))]^2}}{\sqrt{1-[3tg(5sen(4x-2))]^2}}\rightarrow\frac{60cos(4x-2)}{\sqrt{1-[3tg(5sen(4x-2))]^2}\,[cos(5sen(4x-2))]^2}$$

***36.* Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y=arctg\sqrt{\frac{7+2senx}{7-2senx}}}$

$$y'=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)^{-1/2}\cdot\frac{2cos(x)\cdot(7-2senx)-(7+2senx)\cdot-2cos(x)}{(7-2senx)^2}}{1+\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\frac{\frac{2cos(x)\cdot(7-2senx)-(7+2senx)\cdot-2cos(x)}{(7-2senx)^2}}{2\cdot\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)^{1/2}\cdot\left(1+\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)\right)}\rightarrow$$

$$\rightarrow y'=\frac{2cos(x)\cdot(7-2senx)+(-(7+2senx))\cdot 2cos(x)}{\left(2\cdot\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)^{1/2}\cdot\left(1+\left(\frac{7+2senx}{7-2senx}\right)\right)\right)\cdot(7-2senx)^2}$$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

b) $y = e^{arcsen(\sqrt{2x-5})}$ $\qquad y' = e^{arcsen(\sqrt{2x-5})} \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot(2x-5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2}{\sqrt{1-(2x-5)}}$

c) $y = cos\left(3arcsen\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\right)$

$$y' = -sen\left(3arcsen\left(\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right)\right)\cdot\left(3\cdot\frac{\frac{6\cdot(7-2x^2)^{\frac{1}{2}}-(6x-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(7-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4x)\right)}{7-2x^2}}{\sqrt{1-\left[\frac{6x-1}{\sqrt{7-2x^2}}\right]^2}}\right)$$

d) $y = arcsen\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)$

$$y' = \frac{\frac{7\cdot(\sqrt{9-2x^2})+28x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(9-2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(9-2x^2)}}{\sqrt{1-\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)^2}} \rightarrow y' = \frac{7\cdot(\sqrt{9-2x^2})+28x^2\cdot\frac{1}{2}\cdot(9-2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{7x}{\sqrt{9-2x^2}}\right)^2}\cdot(9-2x^2)}$$

37. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \log(x^3-5x^5)^8$

$$y' = \frac{8\cdot(x^3-5x^5)^7\cdot(3x^2-25x^4)}{(x^3-5x^5)^8}\cdot \ln 10 \rightarrow y' = \frac{8\cdot(3x^2-25x^4)}{x^3-5x^5}\cdot$$

b) $y = \log_2(8x^2-3x^3)^2$

$$y' = \frac{2(8x^2-3x^3)\cdot(16x-9x^2)}{(8x^2-3x^3)^2}\cdot ln(2) = \frac{2\cdot(16x-9x^2)}{8x^2-3x^3}\cdot ln(2)$$

c) $y = \ln\sqrt{\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{(3x^6-7x^2)^4}{2x-1} = \frac{1}{2}(\ln(3x^6-7x^2)^4 - \ln(2x-1)) = \frac{1}{2}(4\ln(3x^6-7x^2)-\ln(2x-1))$

$$y' = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{18x^5-14x}{3x^6-7x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2x-1} = 2\cdot\frac{18x^4-14}{3x^5-7x} - \frac{1}{2x-1}$$

d) $y = ln\sqrt[4]{(3x^3+5x^9)^7}$ $\qquad y = \frac{7}{4}ln(3x^3+5x^9)$

$$y' = \frac{7}{4}\cdot\frac{9x^2+45x^8}{3x^3+5x^9} = \frac{7}{4}\cdot\frac{9+45x^6}{3x+5x^7}$$

38. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos\left(e^{x^5}+\ln(4x^3)\right)$

$$f'(x) = -\sin\left(e^{x^5}+\ln(4x^3)\right)\cdot\left(e^{x^5}\cdot 5x^4+\frac{12x^2}{4x^3}\right) = -\sin\left(e^{x^5}+\ln(4x^3)\right)\cdot\left(e^{x^5}\cdot 5x^4+\frac{3}{x}\right)$$

b) $f(x) = 7\cot^5(5x^3-3x^2)$

$$f'(x) = -\frac{15x^2-6x}{\sin^2(5x^3-4x^2)}\cdot 5\cot^4(5x^3-3x^2)\cdot 7$$

c) $f(x) = \sin\left(\cos^2\left(\tan(7x^5-3x^3)^2\right)\right)$

$f'(x) = \cos(\cos^2(\tan(7x^5-3x^3)^2))\cdot 2\cos(\tan(7x^5-3x^3))^2\cdot(-\sin(\tan(7x^5-3x^3)^2))\cdot$
$(1+\tan^2((7x^5-3x^3)^2))\cdot(35x^4-9x^2)\cdot 2(7x^5-3x^3)$

$d)\ f(x) = \sqrt[3]{\cosh(\sinh(3x+2))^4} = (\cosh(\sinh(3x+2))^4)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(\cosh((\sinh(3x+2))^4))^{-\frac{2}{3}} \sinh((\sinh(3x+2))^4) \cosh(3x+2)\, 12(\sinh(3x+2))^3$

39)Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = arc\sinh\left(\sqrt{5x^2+2}\right) = arc\sinh\left((5x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(5x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 10x}{\sqrt{1+\left((5x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}} = \frac{(5x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 5x}{\sqrt{1+5x^2+2}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2+3}\cdot\sqrt{5x^2+2}}$$

$b)\ f(x) = \ln(arc\tanh(5x-3))$

$$f'(x) = \frac{\frac{5}{\sqrt{1+(5x-3)^2}}}{arc\tanh(5x-3)} = \frac{5}{\left(\sqrt{1+(5x-3)^2}\right)(arc\tanh(5x-3))}$$

$c)\ f(x) = arc\cosh(e^{3x-6})$ $\qquad f'(x) = \frac{3e^{3x-6}}{\sqrt{1+(e^{3x-6})^2}}$

$d)\ f(x) = arc\sinh(arc\tanh(2x+1))$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{1+(2x+1)^2}}{1+arc\tanh^2(2x+1)} = \frac{2}{(1+(2x+1)^2)(1+arc\tanh^2(2x+1))}$$

40. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(cos(3x))}{ln(cos(2x))} = \frac{ln(cos(3\cdot 0))}{ln(cos(2\cdot 0))} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3(-sen3x)}{cos3x}}{\frac{2(-sen2x)}{cos2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3(-sen3x)\cdot cos2x}{2(-sen2x)\cdot cos3x} = \frac{3(-sen3\cdot 0)\cdot cos2\cdot 0}{2(-sen2\cdot 0)\cdot cos3\cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indet. (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3(cos3x\cdot 3)(cos2x)+(-3\cdot sen3x)(-2\cdot sen2x)}{-2(cos2x\cdot 2)(cos3x)+(-2\cdot sen2x)(-3\cdot sen3x)} =$$

$$= \frac{-3(cos3\cdot 0)3\cdot(cos2\cdot 0)+(-3\cdot sen3\cdot 0)(-2\cdot sen2\cdot 0)}{-2(cos2\cdot 0)2\cdot(cos3\cdot 0)+(-2\cdot sen2\cdot 0)(-3\cdot sen3\cdot 0)} = \frac{-9+0}{-4+0} = \frac{9}{4}$$

41. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x} = \frac{\sqrt{4+0}-\sqrt{4-0}}{4\cdot 0} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2-\left(\sqrt{4-x}\right)^2}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)}=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

42. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\frac{\arctan 0-0}{0^3}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}=\frac{\frac{1}{1+0^2}-1}{3\cdot 0^2}=\frac{\frac{1}{1}-1}{0}=\frac{0}{0}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x^2}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x^2}=\frac{-1}{1}=-1$$

43. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}$

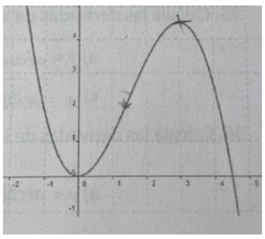
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2x-e^x+sen(3x)}{x^2}=\frac{1-2\cdot 0-e^0+sen(3\cdot 0)}{0^2}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2-e^x+3\cdot cos3x}{2x}=\frac{-2-e^0+3\cdot cos3\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-9\cdot sen3x}{2}=\frac{-e^0-9\cdot sen3\cdot 0}{2}=-\frac{1}{2}$$

44. Si $f'(x)=x(3-x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?

$\boldsymbol{f'(x)=x(3-x)}$



Se calculan máximos y mínimos:

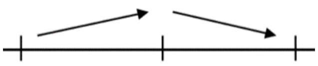
$$x(3-x)=0\Longrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=3\end{cases}$$

Como podemos observar, tiene que haber un máximo o un mínimo en $x=0$ y otro máximo mínimo en $x=3$, por lo que la única gráfica correcta de $f(x)$ es la cuarta.

45. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}}$$

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x-2)^2-1(2x-4)}{(x-2)^4}\qquad \frac{-1(2x-4)}{(x-2)^4}=\frac{-2}{(x-2)^3}=0$$



Creciente: $(-\infty,2)$ Decreciente: $(2,\infty)$

Textos Marea Verde

46. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{(x+3)}{(x-4)}$.

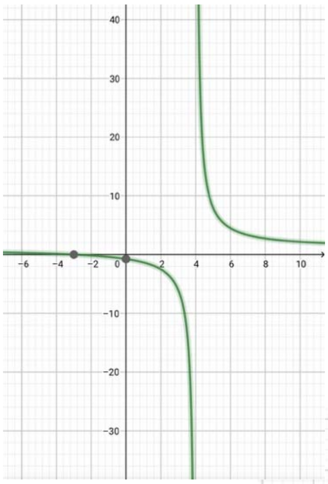
$$f(x) = \frac{(x+3)}{(x-4)}$$

$Dom = \mathbb{R} - \{4\}$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x+3}{x-4} = \frac{4^- + 3}{4^- - 4} = \frac{7}{0^-} - \infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x+3}{x-4} = \frac{4^+ + 3}{4^+ - 4} = \frac{7}{0^+} + \infty$$

Decreciente: $(-\infty, 4)$ Decreciente: $(4, \infty)$

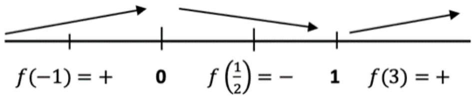


47. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Calcula sus máximos y mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5}$

$f'(x) = 6x^2 - 6x$

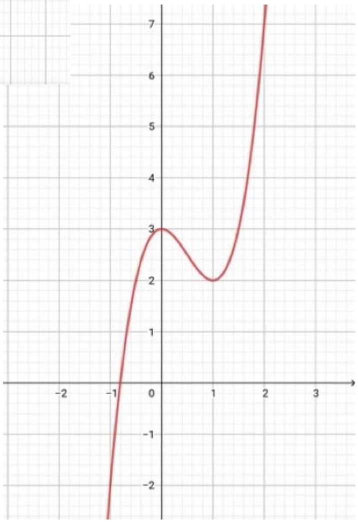
$$6x^2 - 6x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



Máximo: $x = 0$

Mínimo: $x = 1$

Creciente: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ Decreciente: $(0, 1)$



48. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

- Para determinar los máximos y mínimos, se calcula la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve:
  $f'(x) = 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow 6x(x-1) = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 0};\ \boldsymbol{x = 1}$
- Se representan las raíces en la recta real y se prueban puntos de los intervalos para determinar el signo de f´(x).

+ - +
0 1

$f'(-1) = 12 > 0$ $f'(0{,}5) = -1{,}5 < 0$ $f'(2) = 12 > 0$

Creciente: (-∞, 0) U (1, ∞) **Decreciente: (0, 1)**

Hay un máximo en x= 0 y un mínimo en x=1.

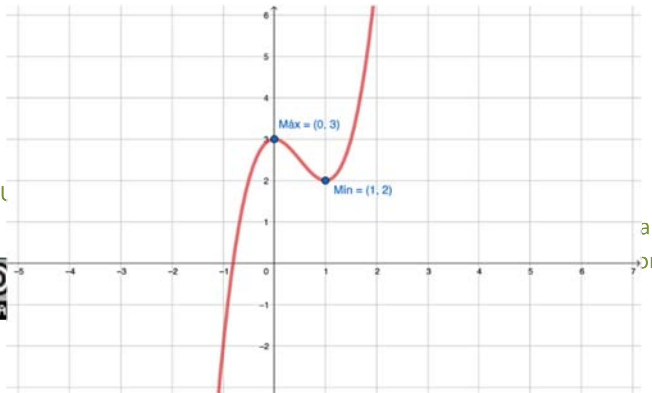
- Para determinar las ordenadas del máximo y mínimo se sustituyen las x en la función:

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3}$$

$\boldsymbol{f(0) = 3}$ $\boldsymbol{f(1) = 2}$

Máximo: (0,3) **Mínimo: (1,2)**

- Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos:



a) Puntos de corte con los ejes:
 Para $x = 0 \rightarrow y = 3$;
$$para\ y = 0 \rightarrow x = -0{,}806.$$
b) Asíntotas. No hay

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

- Para determinar los máximos y mínimos, se calcula la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve:
  $f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = +\sqrt{2}};\ \boldsymbol{x = -\sqrt{2}}$
- Se representan las raíces en la recta real y se prueban puntos de los intervalos para determinar el signo de f´(x).

+	-	+
$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$

$f'(-2) = 6 > 0$ $f'(0) = -6 < 0$ $f'(2) = 6 > 0$

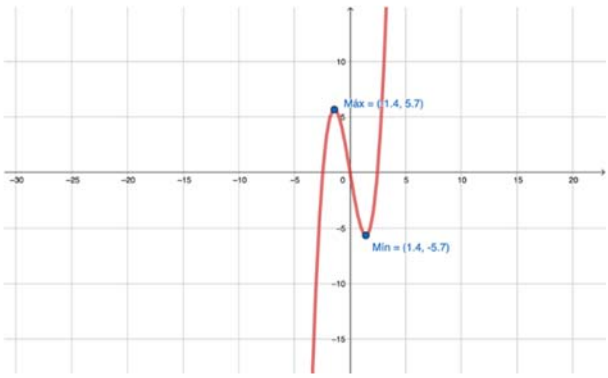
Creciente: (-∞, -$\sqrt{2}$) U ($\sqrt{2}$, ∞) **Decreciente: (-$\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)**

Hay un máximo en x= - $\sqrt{2}$ y un mínimo en x= $\sqrt{2}$

- Para determinar las ordenadas del máximo y mínimo se sustituyen las x en la función:
$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x}$$

$\boldsymbol{f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}}$ $\boldsymbol{f(+\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}}$

Máximo: (-$\sqrt{2}$, 4$\sqrt{2}$) **Mínimo: ($\sqrt{2}$, -4$\sqrt{2}$)**



- Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos:

a) Puntos de corte con los ejes:
 Eje x:
 Para $y = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{6}\ ;\ x_2 = -\sqrt{6}$
 Eje y: x= 0; y=0
b) Asíntotas. No hay

50. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-5, 3]$ y en el intervalo $[1, 5]$

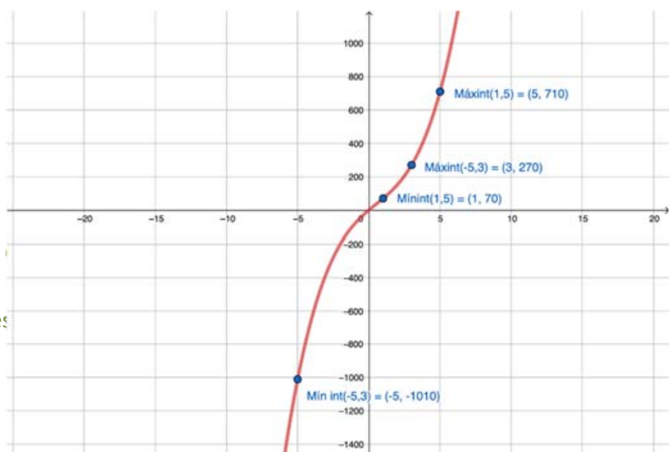
La función es derivable en todos los puntos.

- Se calcula la derivada, se iguala a cero y se resuelve:
  $f'(x) = 12x^2 - 12x + 72 = 0 \rightarrow No\ existen\ valores\ reales\ que\ anulen\ la\ derivada.$

Se estudian los extremos del intervalo -5 y 3. Y por otro lado los extremos del intervalo 1 y 5.

 $f(-5) = -1010; f(3) = 270$ y $f(1) = 70; f(5) = 710$

- **Intervalo $[-5, 3]$:** **Mínimo absoluto: (-5,-1010)** y **máximo absoluto (3, 270)**
- **Intervalo $[1, 5]$:** **Mínimo absoluto: (1,70)** y **máximo absoluto: (5,710)**



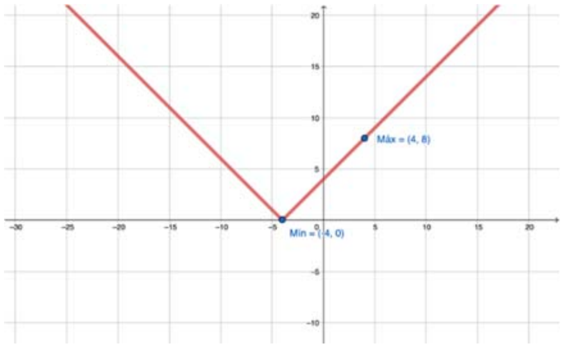
51. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 4|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

- Se define la función a trozos: $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \geq -4 \\ -x - 4, & x < -4 \end{cases}$
- Se calcula la derivada de la función: $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > -4 \\ -1, & x < -4 \end{cases}$

La derivada no se anula en ningún punto.

- Se estudian los extremos del intervalo, -4 y 4: $f(-4) = 0; f(4) = 8$
- **En el intervalo $[-4, 4]$:**

Mínimo absoluto: (-4,0) Máximo absoluto: (4,8)



52. El espacio recorrido, en metros, por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 8t + 0,3\,t^2$. ¿Qué velocidad llevaba al pasar por el control? ¿Y a los 3 segundos? Si continúa así, ¿en qué momento pasará de los 120 km/h?

- Función espacio: $y = 8t + 0,3\,t^2$
- La velocidad de un móvil viene dada por $\boldsymbol{v = \frac{dy}{dt}} \to v = \frac{dy}{dt} = 8 + 0,6\,t$
- Al pasar por el control, t=0; $v(0) = 8 + 0,6 \cdot 0 = 8\,m/s$
- A los tres segundos, t=3; $v(3) = 8 + 0,6 \cdot 3 = 9,8\,m/s$
- Cuando $v = 120\frac{km}{h} \to v = 120\frac{km}{h} \cdot \frac{1000\,m}{1\,km} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = 33,33\,m/s$
- Sustituimos en la ecuación de la velocidad y calculamos el tiempo: $33,33 = 8 + 0,6\,t \to t = 42,22\,s$. A partir de este momento la velocidad pasará de 120 km/h

53. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los t = 1 segundos y a los t = 6 segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

$$a = \frac{3}{5}$$

R: A los t = 1 segundos y a los t = 6 segundos $a = \frac{3}{5}$ ya que es constante al no tener ninguna variable.

54. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$ si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 metros de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115 m)? ¿y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

- Desde la primera plataforma (57 m):

Textos Marea Verde

$57 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{57}{5}} = 3{,}37\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 3{,}37 = 33{,}7\ m/s$

- Desde la segunda plataforma (115 m):

$115 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{115}{5}} = 4{,}79\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 4{,}79 = 47{,}9\ m/s$

- Desde la tercera plataforma (247 m):

$247 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{247}{5}} = 7{,}03\ s \qquad v = 10t \quad v = 10 \cdot 7{,}03 = 70{,}3\ m/s$

55. Se ha lanzado desde la superficie de la luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcance una altura $h = 24t - 0,8t^2$. A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna. B) ¿Hasta qué altura llega la piedra? C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura? D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire? E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo, ¿qué profundidad tiene la grieta?

Datos:

$v = 24\ m/s \qquad h = 24t - 0{,}8t^2$

$A)$

$v = 24 - 1{,}6t \qquad a = -1{,}6\ m/s^2$

B)

$v = 24 - 1{,}6t = 0 \ \rightarrow\ t = \frac{-24}{-1{,}6} = 15\ s \qquad h = 24 \cdot 15 - 0{,}8 \cdot 15^2 = 180\ m$

C)

$v = 24 - 1{,}6t = 0 \ \rightarrow\ t = \frac{-24}{-1{,}6} = 15\ s$

D)

$15 \cdot 2 = 30\ s$ está en el aire (15 s de subida y 15 s de bajada)

E)

$h = 24 \cdot 20 - 0{,}8 \cdot 20^2 = 160\ m$ de profundidad

56. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0,83t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en la Luna al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? En la Luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tornillo con una velocidad de 20 m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

$d = 0{,}83t^2 \ \rightarrow\ v = 1{,}66t$

Primera pregunta: Velocidad en caída libre al cabo de:

1 s → $1{,}66 \cdot 1 = 1{,}66\ m/s$

4 s → $1{,}66 \cdot 4 = 6{,}64\ m/s$

8 s → $1{,}66 \cdot 8 = 13{,}28\ m/s$

30 s → $1{,}66 \cdot 30 = 49{,}8\ m/s$

Segunda pregunta:

$1{,}66t = 20 \ \rightarrow\ t = \frac{20}{1{,}66} = 12\ s \qquad d = 0{,}83 \cdot 12^2 = 119{,}52\ m$

Respuesta: La antena puede medir como mucho 119,52 m

Textos Marea Verde

57. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1,86t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Marte al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

$d = 1{,}86t^2 \rightarrow \ \ v = 3{,}72t$

Primera pregunta: Velocidad en caída libre al cabo de:

1 s → $3{,}72 \cdot 1 = 3{,}72\ m/s$

4 s → $3{,}72 \cdot 4 = 7{,}44\ m/s$

8 s → $3{,}72 \cdot 8 = 14{,}88\ m/s$

30 s → $3{,}72 \cdot 30 = 55{,}8\ m/s$

Segunda pregunta:

$a = 3{,}72\ m/s^2$

Es constante

58. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por d = 11'44t². ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caía libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

D=11'44t² $\quad v = D' = 2 \cdot 11{,}44t = 22{,}88t$

$para\ t = 1 \quad v = 22{,}88\ m/s$

$para\ t = 4 \quad v = 91{,}25\ m/s$

$para\ t = 8 \quad v = 183{,}04\ m/s$

$para\ t = 30 \quad v = 686{,}4\frac{m}{s}$

La aceleración es la derivada de la velocidad $\quad$ A=$\frac{dv}{dt}$ $\quad a = 22{,}88\ m/s^2$

59.La función e = f(t) indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración:

e = $\boldsymbol{t^2 - 4t + 3}$ $\quad$ e = $\boldsymbol{2t^3 - 5t^2 + 4t - 3}$ $\quad$ e = $\boldsymbol{-t^2 + 4t + 3}$ $\quad$ e = $\boldsymbol{(3t - 4)^2}$

e = $\boldsymbol{t^2 - 4t + 3}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = 2t - 4; \quad a = \frac{dv}{dt} = 2$

e = $\boldsymbol{2t^3 - 5t^2 + 4t - 3}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = 6t^2 - 10t + 4\ ;\ a = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$

e = $\boldsymbol{-t^2 + 4t + 3}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = \ -2t + 4\ ; a = \frac{dv}{dt} = \ -2$

e = $\boldsymbol{(3t - 4)^2}$ $\quad v = \frac{de}{dt} = 18t - 24; a = \frac{dv}{dt} = 18$

60. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a 0,3 m³ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

$vol: \pi \cdot r^2 \cdot h \qquad 0{,}3 = \pi \cdot 5^2 \cdot h \qquad h = \frac{0{,}3}{25\pi} = \frac{0{,}3}{25\pi}\ m/min$

$$a\ los\ 2minutos \rightarrow 2 \cdot \frac{0{,}3}{25\pi} = 7{,}63 \cdot 10^{-3}\ m/min$$

$$a\ los\ 5\ minutos \rightarrow\ 5 \cdot \frac{0{,}3}{25\pi} = 0{,}019\ m/min$$

61. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x, y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x, recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Ayuda: Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x.

$vol: (20-2x)\cdot(25-2x)\cdot x = 500x - 90x^2 + 4x^3$
$f'(x) = 500 - 180x + 12x^2 = 0;\ \ x = 11{,}38;\ \ \ x = 3{,}68\ \ ;\ x = 11{,}38$ no válido.
$f"(x) =\ 24x - 180 = 0;$
$f"(3{,}68) =\ -91{,}68;\ es\ un\ máximo$
Para que contenga el vol. Max x=3,68 cm

62. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 200 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie lateral sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

$\pi r^2 h = 200dm^3 \to h = \frac{200}{\pi r^2}\qquad s = 2\pi r^2 + 2\pi r\cdot\frac{200}{\pi r^2}$

$\frac{ds}{dr} = 4\pi r - \frac{400}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 400}{r^2}\qquad 4\pi r^3 = 400$

$r = \sqrt[3]{\frac{400}{4\pi}} = 3.16m\qquad h = \frac{200}{\pi r^2} = \frac{200}{\pi(3{,}16)^2} = 6{,}37m$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. La función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ es continua y derivable en toda la recta real si:

$f(1) = -b$

$\lim_{x\to 1^-} (-bx) = -b$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} (3x^2 + d) = 3 + d$

$f'(x) = \begin{cases} -b & x < 1 \\ 6x & x > 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} (-b) = -b$ $\qquad \lim_{x\to 1^+} 6x = 6$ $\qquad$ b = - 6 para que sea derivable

3 + d = 6 para que sea continua $\qquad 3 + d = 6 \to d = 3$

a) b = - 6, d = 3

2. Con los valores de b y d del apartado anterior verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que se anula la derivada en el punto de abscisa.

f es continua y derivable por apartado 1, $f(x) = \begin{cases} 6x & x \le 1 \\ 3x^2 + 3 & x > 1 \end{cases}$

$f(-1) = 6 \cdot (-1) = -6$ $\qquad f(1) = 3(1)^2 + 3 = 6$

Por lo que sí se verifican las condiciones del teorema 6x = 0 ; x = 0

b) x = 0

3. Verifica la función $\begin{cases} -bx & x \le 1 \\ 3x^2 + d & x > 1 \end{cases}$ las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo [0, 3] en el punto de abscisa:

f es continua y derivable por apartado 1, $f(x) = \begin{cases} 6x & x \le 1 \\ 3x^2 + 3 & x > 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 6 & x \le 1 \\ 6x & x > 1 \end{cases}$

$\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{30-0}{3} = 10}$ **luego 6x = 10 x = 5/3**

d) x = 5/3

4. en cuál de los límites siguientes no se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \to \left(\frac{0}{0}\right) \to \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^2-7x}{5x^2+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \to \frac{3}{5}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \to \frac{\sin x - 1}{1} = -1$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x} = \left(\frac{1}{0}\right) \to \infty \to$ no se aplica la regla de L'Hôpital

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$

5. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \tan x^2 - 2x^3$ en x = 0 es:

$f'(x) = 2x \sec^2 x - 6x^2$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$y - 0 = 0(x - 0) \to y = 0$

c) y = 0

6. La función $y = 3 \sin x - 7x^3 - 3x^2 - x + 5$ en x = 0 es:

$y' = 3\cos x - 21x^2 - 6x - 1$

$y'' = -3 \sin x - 42x + 6 \to y''(0) = 6 > 0$

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

c) convexa ∪

7. La función $y = 3\sin x - 7x^3 - 3x^2 - x + 5$ en x = 0 es:

$y' = 3\cos x - 21x^2 - 6x - 1$

$y'(0) = 3 - 1 \to 2 > 0$

a) creciente

8. Si la derivada de una cierta función es: $y' = (x-4)(x+2)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

$(x-4)(x+2) = 0 \to x = 4, x = -2$

intervalos→ $(-\infty, -2)(-2, 4)(4, \infty)$

$y'(-3) = (-3-4)(-3+2) = (-7)(-1) = + \to$ creciente

$y'(2) = (2-4)(2+2) = (-2)(4) = - \to$ decreciente

$y'(5) = (5-4)(5+2) = (1)(7) = + \to$ creciente

d) Creciente, decreciente, creciente

9. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ tiene un punto de inflexión en:

$y = 3x^2 - 2x^3$ $\quad y' = 6x - 6x^2$

$y'' = 6 - 12x = 0 \to x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ $\quad y''' = -12 \neq 0$

a) x = $\frac{1}{2}$

10. Si la derivada de una cierta función es: $y' = 3(x-4)x$ entonces su gráfica puede ser:

$y' = 3(x-4)x = 0 \quad ; \quad x = 4, \quad x = 0$

Intervalos → $(-\infty, 0)(0, 4)(4, \infty)$

$y(-2) = 3(-2)^2 - 12(-2) = +$ Creciente

$y(2) = 3(2)^2 - 12(2) = -$ Decreciente

$y(5) = 3(5)^2 - 12(5) = +$ Creciente

Por lo que la gráfica es la b)

Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 9: Funciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA, JERÓNIMO

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.- Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x)= x^3 - 3x^2 + 2}$

Dominio: Dom f(x)= $\mathbb{R}$ (son todos los números reales)

Recorrido: $\mathbb{R}$ (todos los números reales)

Cortes con los ejes:

- Eje Y: x=0 Y=$0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$ (0, 2)
- Eje X: y=0 0=$x^3 - 3x^2 + 2$ (-0.7, 0) (2.7, 0) (1, 0)

Simetría:

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x)^2 + 2 = -x^3 - 3x^2 + 2 \neq f(x)$

$-f(-x) = -(-x^3 - 3x^2 + 2) = x^3 + 3x^2 - 2 \neq f(x)$

No tiene simetría.

Periodicidad:

No es periódica ya que es una función polinómica.

De modo que $f(x) \neq f(x+T) \forall x \epsilon\ Dom\ f$

Asíntotas:

Al ser una función polinómica no tiene asíntotas.

Crecimiento y Decrecimiento:

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $3x^2 - 6x = 0$; $x(3x-6) = 0$ x_1=0

$3x = 6; x = \frac{6}{3} = 2$; x_2=2

$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
$f'(-1 >)0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
crece	decrece	crece

0 2

Crece $(-\infty, 0) \cup (2 + \infty)$

Decrece (0,2)

Máximos y Mínimos:

$$x = 0 \quad hay\ máximo\ f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2\ \max(0,2)$$

$$x = 2 \quad hay\ mínimo\ f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2\ \min(2,-2)$$

Concavidad y Convexidad:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$; $6x - 6 = 0$; $6x = 6$; $x = 1$

$x = 0$	$x = 2$
$f''(0) < 0$	$f''(2) > 0$
Cóncava ∩	Convexa ∪

1

Puntos de inflexión:

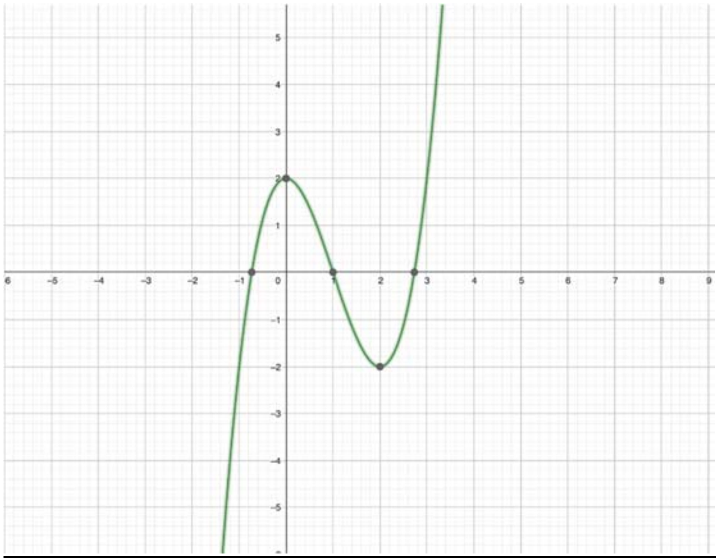
$x = 1\ P.I\ f(1) = 1^3 - 3 \cdot (1)^2 + 2 = 0$ (1, 0)

Continuidad:

Al ser una función polinómica su dominio son todos los números reales lo que significa que su continuidad seria de (-∞ , +∞). Por esa misma razón no tiene discontinuidad.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Representación gráfica



b) $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2x^3}$

Dominio: Al ser una función polinómica el dominio son todos los números reales, es decir, $\mathbb{R}$.

Recorrido: $\mathbb{R}$ (todos los números reales)

Puntos de corte:

- Eje Y $\quad x = 0 \quad y = 0^4 + 2 \cdot 0^3 \quad (0{,}0)$
- Eje X $\quad y = 0 \quad 0 = x^4 + 2x^3 \quad x1 = 0 \quad x2 = -2 \quad (0{,}0); \quad (-2{,}0)$

Simetría:

$f(-x) = (-x)^4 + (2(-x)^3) = x^4 - 2x^3 \neq f(x)$

$-f(-x) = -(x^4 - 2x^3) = (-x^4 + 2x^3) \neq f(x)$

No tiene simetrías

Periodicidad:

No es periódica porque es una función polinómica.

$$f(x) \neq f(x+T) \forall x \epsilon \ Dom\ f$$

Asíntotas:

Al ser una función polinómica no tiene asíntotas.

Continuidad:

Al ser el dominio todos los números reales podríamos decir que la continuidad va desde $(-\infty, +\infty)$.

Por esa misma razón no existe discontinuidad.

Crecimiento y Decrecimiento:

$f(x) = x^4 + 2x^3 \quad ; \quad f'(x) = 4x^3 + 6x^2$

$4x^3 + 6x^2 = 0 \quad ; \quad x^2(4x+6) = 0 \quad ; \quad x^2 = 0 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad 4x + 6 = 0 \quad ; \quad x = -\frac{6}{4}$

$x = -2 > 0$	$x = -\frac{1}{2} > 0$	$x = 1 > 0$
Decrece	Crece	Crece

$-\frac{3}{2}$ $\qquad\qquad$ 0

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Decrece de $(-\infty, -\frac{3}{2})$ Crece $(-\frac{3}{2}, 0)$ $(0, +\infty)$

Máximos y Mínimos:

Mínimo en $(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$

Concavidad y Convexidad:

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2$; $f''(x) = 12x^2 + 12x$

$12x^2 + 12x = 0$; $x(12x + 12) = 0$; $x1 = 0$; $12x = -12$;$x2 = -1$

$x = -2 > 0$	$x = -0.5 < 0$	$x = 1 > 0$
Convexa ∪	Cóncava ∩	Convexa ∪

-1 0

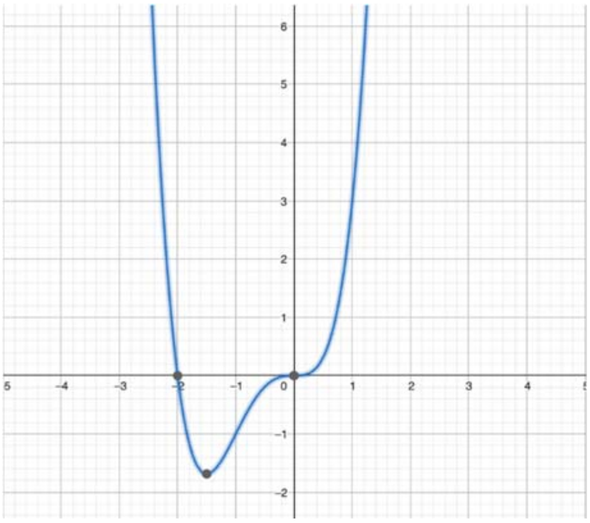
Punto de inflexión:

$x1 = 0; x2 = -1$

$P.I\ f(-1) = (-1^4) + 2 \cdot (-1)^3 = -1$ (-1, -1)

$P.I\ f(0) = 0^4 + 2 \cdot 0^3 = 0$ (0, 0)

Representación gráfica



d) f(x)= $\boldsymbol{x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}}$

Dominio:

Al ser una ecuación racional el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador, al igualar el denominador a 0, obtenemos:

$$x = 0$$

$dom f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

Recorrido:

Todos los números reales.

Puntos de corte:

- Eje Y: $x = 0$ OY: $(0,0)$
- Eje X: $y = 0$; $0 = x - \frac{1}{x}$; $0 = x^2 - 1$; $x^2 = \sqrt{1} = \pm 1$;OX: $(1,0); (-1,0)$

Simetría:

$f(-x) = -x - \left(-\frac{1}{x}\right) = -x + \frac{1}{x} \neq f(x)$

$-f(-x) = -\left(-x + \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} = f(x)$

Como podemos observar estamos en un caso de simetría impar.

Periodicidad:

No es periódica, ya que no es una función trigonométrica.

$$f(x) \neq f(x+T) \forall x \epsilon \quad Domf$$

Asíntotas:

A. Verticales

$x - \frac{1}{x}$ $\qquad$ $x = 0$(asíntota vertical)

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$

A. Horizontales

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \infty$ $\qquad$ no hay asíntota

El $Lim\ es\ \infty$ debido a que el grado del numerador es mayor que el del denominador.

A. Oblicua

$y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{1}{1} = 1 = m$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} - \frac{1\cdot x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} = 0 = n$$

$y = x$

Crecimiento y Decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{(2x\cdot x) - \left(1\cdot(x^2-1)\right)}{(x^2)} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$\frac{x^2+1}{x^2} = 0 \qquad x^2 + 1 = 0 \qquad x^2 = \sqrt{-1}$

De este modo, tenemos que coger el valor que anule el denominador.

$x = -2 > 0$	$x = 1 > 0$
Decrece	Crece

0

Máximos y Mínimos:

No tiene ni máximos ni mínimos.

Concavidad y Convexidad:

$$f''(x) = \frac{(2x\cdot x^2) - (2x)\cdot(x^2+1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

$x = -2 > 0$	$x = 2 < 0$
Cóncava ∪	Convexa ∩

0

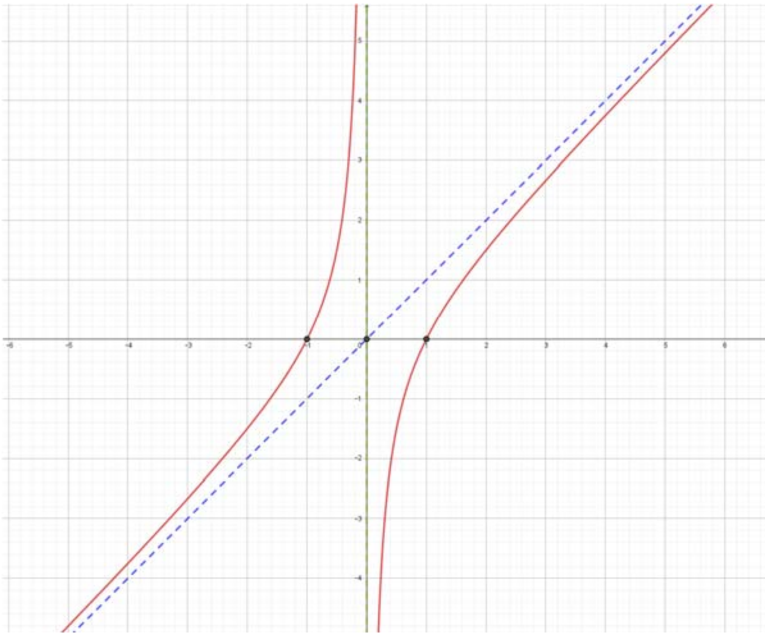
Textos Marea Verde

No tiene puntos de inflexión.

Continuidad:

La continuidad coincide con el dominio, es decir $\mathbb{R}-\{0\}$.

Representación gráfica



e) $\boldsymbol{f(x)=\frac{1+x}{1-x}}$

Dominio:

Al ser una ecuación racional el dominio son todos los números reales excepto los que anulen el denominador, al igualar el denominador a 0.

$1-x=0 \quad ; \quad x=1 \quad ; \quad Domf(x)=R-\{1\}$

Recorrido:

El recorrido son todos los números reales excepto el -1. $Imf=R-\{-1\}$

Puntos de Corte:

- Eje Y: $x=0$ $\quad y=\frac{1+0}{1-0}$ $\quad y=\frac{1}{1}=1$ $\quad$ OY: $(0,1)$
- Eje X: $y=0$ $\quad 0=\frac{1+x}{1-x}$ $\quad 0=1+x$ $\quad x=-1$ $\quad$ OX: $(-1,0)$

Simetría:

$f(-x)=\frac{(1-x)}{(1+x)}\neq f(x)$

$-f(-x)=-\frac{(1-x)}{(1+x)}\neq f(x)$

No tiene simetrías.

Periodicidad:

No es periódica, ya que no es una función trigonométrica.

$$f(x)\neq f(x+T)\forall x\epsilon\ Domf$$

Asíntotas:

Al ser una función racional sí puede tener asíntotas.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

A. Vertical

$1 - x = 0$

$x = 1$ (asíntota vertical)

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$ $\lim_{x \to 1^+} \frac{1+x}{1-x} = -\infty$

A. Horizontal

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$y = -1$ (asíntota horizontal)

Crecimiento y Decrecimiento:

$$f'(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{1 \cdot (1-x) - (-1) \cdot (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

No se hace 0, De este modo tenemos que coger el valor que anula el denominador, es decir, 1.

$x = 0 > 0$	X=2> 0
Crece	Crece

1

Crece: $(-\infty, 1)$ $(1, +\infty)$

Máximos y Mínimos:

No tiene ya que siempre crece.

Concavidad y Convexidad:

$$f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (1-x)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot (1-x) \cdot 2}{(1-x)^4} = \frac{4 \cdot (1-x)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3} \neq 0$$

$x = 0 > 0$	$x = 2 < 0$
Convexa ∪	Cóncava ∩

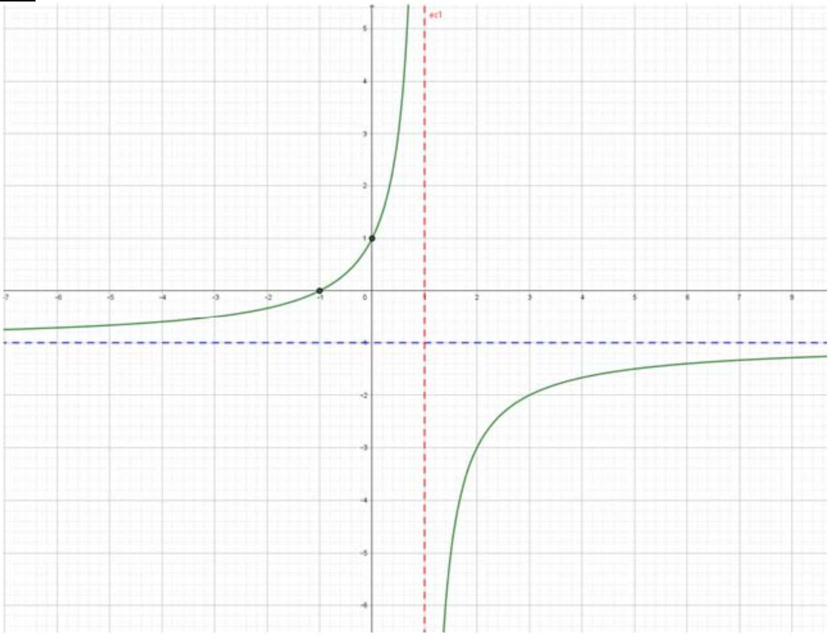
1

Continuidad:

Es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Es discontinua en x= 1

Representación gráfica



g) f(x)=$\frac{0,5x^3}{x^2-4}$

Paso 1: Dominio

Dom f(x)= x∈**R**- {2,-2}

x<-2 **o** -2<x<2 **o** x>2

(-∞, -2) ∪ **(-2,2)** ∪ **(2, ∞)**

Paso 2: Puntos de corte

-Cuando x=0; y=0

y=$\frac{0,5\cdot 0^3}{0^2-4}$=0

-Cuando y=0; x=0

0=$\frac{0,5x^3}{x^2-4}$; x=$\sqrt[3]{\frac{0}{0,5}}$=0

Paso 3: simetría

f(x)=f(-x) par;

f(-x) = $\frac{0,5(-x)^3}{(-x)^2-4}$ no es igual que f(x)= $\frac{0,5x^3}{x^2-4}$

-f(x)= f(-x) impar

-f(x) = $\frac{-0,5x^3}{x^2-4}$ es igual que f(-x) = $\frac{0,5(-x)^3}{(-x)^2-4}$

Por tanto, presenta una simetría impar

Textos Marea Verde

Paso 4: Asíntotas

Asíntotas verticales: $\frac{0{,}5x^3}{x^2-4}$: x=-2, x=2

; x^2-4=0 entonces x=-2, x=2

Asíntotas horizontales: $\frac{0{,}5x^3}{x^2-4}$; $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{0{,}5x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{0{,}5}{\frac{1}{x}}=\infty$

Asíntota oblicua: $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{0{,}5x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{0{,}5x^3}{x^3-4x}=0{,}5$ m = 0,5

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{0{,}5x^3}{x^2-4}-0{,}5x\right)=0$ y = 0,5x

Paso 5: Crecimiento y decrecimiento

Creciente: (-∞, -2$\sqrt{3}$) y (2$\sqrt{3}$, ∞)

decreciente: (-2$\sqrt{3}$, -2), (-2,-1), (1,2) y (2, 2$\sqrt{3}$)

paso 6: Máximos y mínimos

f'(x)=$\frac{0{,}5(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^2}$; 0=$\frac{0{,}5(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^2}$; x = 0 ; x=2$\sqrt{3}$ y x=-2$\sqrt{3}$,

Max: (-2$\sqrt{3}$, -2,6)

Min: (2$\sqrt{3}$, 2,6)

Paso 7: Concavidad y convexidad

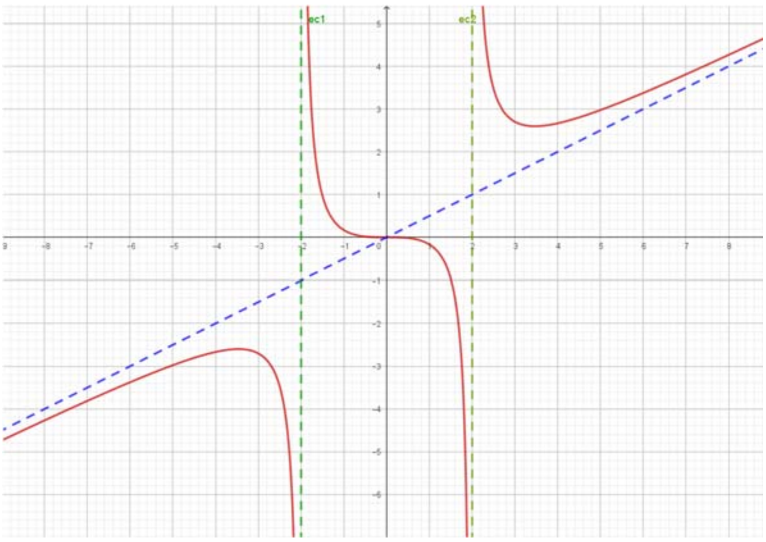
Cóncava: (-∞, 2) y (0,2)

Convexa: (2,∞) y (-2,0)

Paso 8: Puntos de inflexión

f''(x)=$\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$; 0=$\frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$; x=0

Punto de inflexión (0,0)



IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

h) $\boldsymbol{f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-4}}$

1. Dom R - {-2, 2}

2. Cortes eje x; f(x)=0; 0=$\frac{x^2-1}{x^2-4}$

x=-1 y x= 1 (1, 0) (-1, 0)

3. Cortes con el eje y; f(0)=$\frac{0-1}{0-4}$ (0, $\frac{1}{4}$)

4. Asíntotas verticales; haciendo los límites $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ y $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ x = -2 ; x = 2.

5. Asíntotas horizontales; haciendo límites $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$ y $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2-4}\right)$

y=1

6. Asíntotas oblicuas; No tiene.

7. Extremos relativos; f(x)=$\frac{x^2-1}{x^2-4}$; derivando; f'(x)=$-\frac{6x}{(x^2-4)^2}$; f'(x)=0;

$-\frac{6x}{(x^2-4)^2}=0$; x = 0

Máximo relativo es (0, $\frac{1}{4}$)

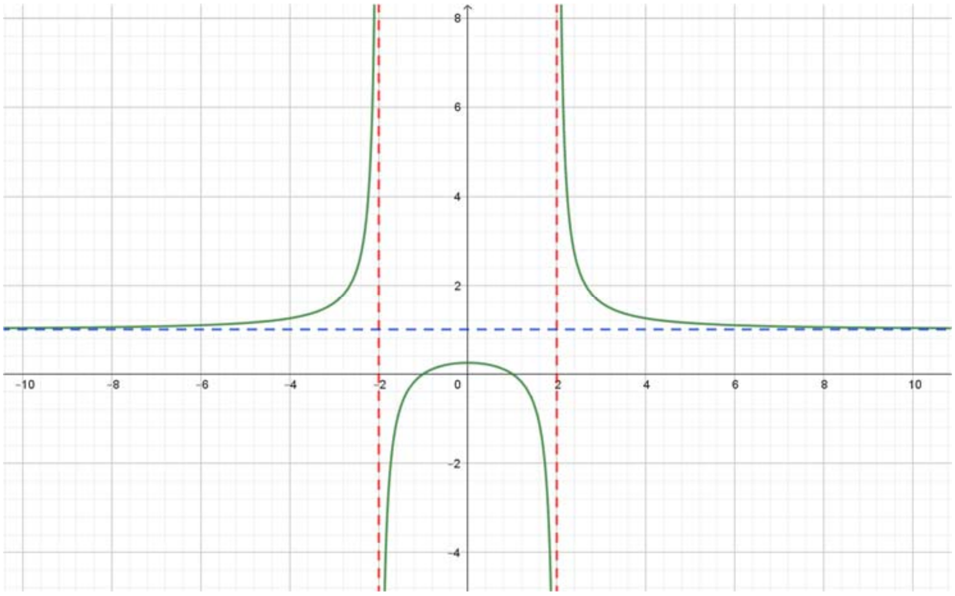
8. Puntos de inflexión; No tiene

9. Par

10. Es simétrica respecto al eje y.

No simétrico respecto al origen ni al eje x.

11. Función Racional



i) $\boldsymbol{f(x)=\ x^2e^x}$

- Tipo de función: producto de polinómica por exponencial.

- Dominio: Es un polinomio por una exponencial, por tanto, Dom $f(x)=\mathrm{R}$

- Continuidad: es continua en todo R

- Periodicidad: No es periódica

- Simetría: x^2e^x no tiene simetría, luego *f(x) ni* par ni impar:

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$f(-x) = (-x)^2\, e^{-x}$; $f(x) \neq f(-x)$; $f(x) \neq -f(-x)$

- Asíntotas:

  - Verticales: no tiene, porque x^2e^x es continua en todo R.
  - Horizontales: analizamos los límites en el infinito:

    $\lim_{x\to-\infty} x^2\, e^x = \infty \cdot 0$, $\lim_{x\to-\infty} x^2\, e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$, como el orden de la exponencial es mayor que el del polinomio, el límite es 0

    $y = 0$ es una asíntota horizontal en $-\infty$
  - Oblicuas: Como tiene horizontales, no tiene oblicuas.

- Corte con los ejes:

  - Eje X: hallamos las raíces de la función: $f(x) = x^2e^x = 0$, $x = 0$, corta al eje X en el punto (0,0)
  - Eje Y: sustituimos x por 0: $x = 0$, $0^2e^0 = 0$, corta al eje Y en (0,0)

- Regiones de existencia: Es positiva (+) en todo R.

- Monotonía: hallamos la derivada:

$$f(x) = x^2e^x \to f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$$

Igualamos a 0:

$2xe^x + x^2e^x = 0 \to x = 0, x = -2$, $(2x + x^2)e^x = 0$ definimos lo intervalos (-∞,-2), (-2,0) y (0,∞)

Intervalo	(-∞,-2)	(-2,0)	(0,∞)
$f'(x_0)$	$f'(-3) = 0{,}1 > 0$	$f'(-1) = -0{,}3 < 0$	$f'(1) = 8{,}1 > 0$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

- Máximos y mínimos: A partir de la tabla anterior deducimos que la función tiene un máximo en $x = -2$ y un mínimo en $x = 0$

Comprobamos con la segunda derivada:

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x \to f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x$

Entonces: $f''(-2) = -0{,}2 < 0$, se confirma el máximo en $x = -2$

$f''(0) = 2 > 0$, se confirma el mínimo en $x = 0$

- Curvatura: Igualamos a cero la segunda derivada

$f''(x) = 0; 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = 0, ; (2 + 4x + x^2)e^x = 0\ x = -2 + \sqrt{2}, x = -2 - \sqrt{2}$

Entonces:

Intervalo	$(-\infty, -2-\sqrt{2})$	$(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$	$(-2+\sqrt{2}, \infty)$
$f''(x_0)$	$f''(-10) > 0$	$f''(-2) < 0$	$f''(2) > 0$

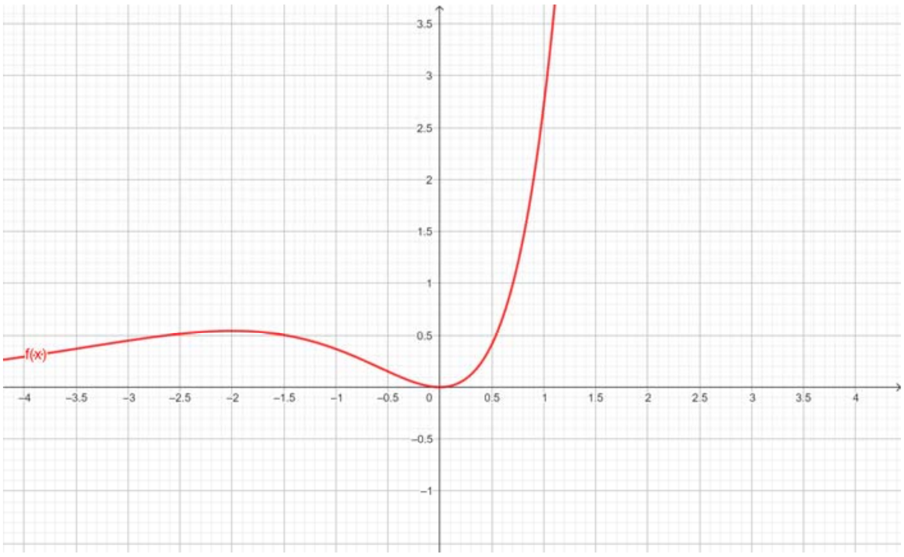
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$f(x)$	Cóncava ∩	Convexa U	Cóncava ∩

- <u>Puntos de inflexión</u>: hay dos puntos de inflexión
  - o $f\left(-2+\sqrt{2}\right)=0{,}191 \rightarrow \left(-2+\sqrt{2},\ 0.191\right)$
  - o $f\left(-2-\sqrt{2}\right)=0{,}38 \rightarrow \left(-2-\sqrt{2},\ 0.38\right)$

- <u>Recorrido o imagen</u>: Im$f(x)=[0,\infty)$, ya que es positiva en todo R y corta al eje Y en (0,0)

Con toda la información recopilada podemos representar $f(x)$:



j) f(x)=$\frac{e^x}{x}$

Paso 1: Dominio

Dom f(x)= x ϵ **R**-{0}

Paso 2: Puntos de corte

-Cuando x=0

; $\frac{e^0}{0}$= no existe

-Cuando y=0;

0=$\frac{e^x}{x}$; tomando logaritmos $\log 0$=x que no existe

No hay puntos de intersección

Paso 3: simetría

f(x)=f(-x) par;

f(-x) = $\frac{e^{-x}}{-x}$ no es igual f(x)= $\frac{e^x}{x}$

-f(x)= f(-x) impar

-f(x)= $\frac{-e^{x}}{x}$ no es igual que f(-x) = $\frac{e^{-x}}{-x}$

No hay simetría

Paso 4: Asíntotas

Asíntotas verticales; x=0

Asíntotas horizontales:

; $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x}=\infty$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}}{x}=0$ y = 0

Paso 5: Crecimiento y decrecimiento

Creciente: (1,∞)

decreciente: (-1,0) y (0,1)

constante: (-∞, $1)$

paso 6: Máximos y mínimos

Max: no hay

Min: (1,e)

Paso 7: Concavidad y convexidad

Cóncava:

Convexa: (0,∞)

Paso 8: Puntos de inflexión

f''(x)=$\frac{e^{x}(x^{2}-2(x-1))}{x^{3}}$;$0=\frac{e^{x}(x^{2}-2(x-1))}{x^{3}}$; x= no existe

por tanto, no hay punto de inflexión

Textos Marea Verde

k) $\boldsymbol{f(x) = x^2e^{-x}}$

1. Dom R

2. Cortes eje x; f(x)=0

x^2e^{-x}=0; x=0 (0, 0)

3.Corte con el eje y; f(0)=0

4.Asíntotas horizontales usando límites; $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$; y = 0 ; $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \infty$;

5. Asíntotas verticales; No tiene.

6. Asíntotas oblicuas; No tiene.

7. Simetrías.

f(x)=f(-x) par;

f(-x) = $\frac{(-x)^2}{e^{-x}}$ no es igual que f(x)= $\frac{x^2}{e^x}$

-f(x)= f(-x) impar

-f(x)= $\frac{-x^2}{e^x}$ no es igual que f(-x) = $\frac{(-x)^2}{e^{-x}}$

No hay simetría

8.Extremos relativos;

Derivando; f´(x)= $2xe^{-x} - x^2e^{-x}$; f´(0);

$2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0$; $(2x - x^2)e^{-x} = 0$ x=0 y x=2

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de f':	neg. (dec.)	pos. (crec.)	neg. (dec.)

f(0)=0 y f(2)=$\frac{4}{e^2}$

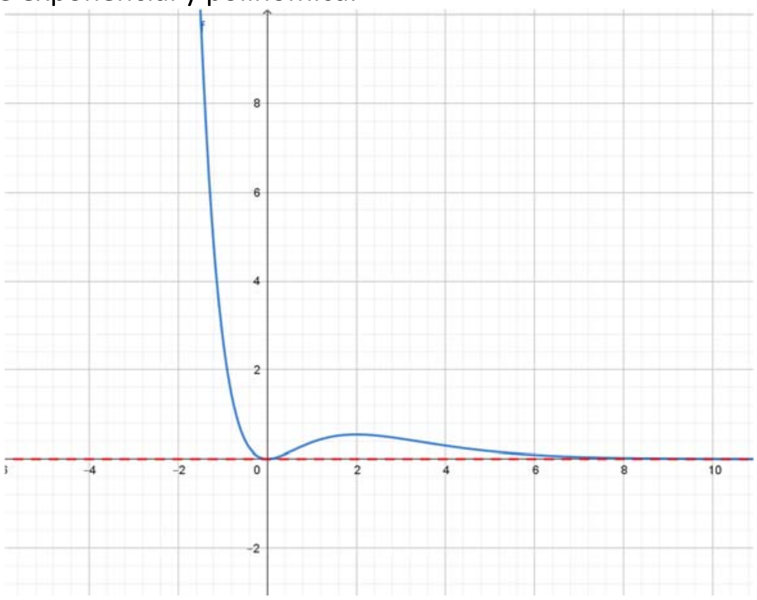
Mínimo relativo es (0, 0), y el máximo relativo es(2, $\frac{4}{e^2}$)

9.Puntos de inflexión

Derivando; f`(x)= $(2x - x^2)e^{-x}$; f``(x)= $(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$; resolvemos f``(x)=0

x=2-$\sqrt{2}$ x=2+$\sqrt{2}$ (2+$\sqrt{2}$, $\frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$) y (2-$\sqrt{2}$, $\frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$)

10.Función producto de exponencial y polinómica.



IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

l) $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x^2-1}}$

- Tipo de función: irracional

- Dominio: Al tener índice par, el radicando ha de ser mayor o igual que cero:

$x^2-1\geq 0\rightarrow x\leq -1, x\geq 1$, por lo tanto $f(x)$ no existe en el intervalo (-1,1)

Luego Dom$f(x)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

- Cortes con los ejes:

  - Eje X: hallamos las raíces de la función: $f(x)=\sqrt{x^2-1}=0$, $x=\pm 1$, luego los puntos de corte con el eje X son $(-1{,}0),(1{,}0)$.
  - Eje Y: igualamos x a cero: $x=0$ no pertenece al dominio, por lo que $f(x)$ no corta en el eje Y

- Simetría: $f(x)$ es par, ya que se cumple:

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-1}=\sqrt{x^2-1}=f(x)$, par.

- Regiones de existencia: Como $f(x)$ es una raíz par, es siempre positiva en su dominio.

- Asíntotas:

  - Verticales: No tiene, ya que x^2-1 es continua en todo R
  - Horizontales: analizamos los límites en el infinito:

    $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-1}=\infty\rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales
  - Oblicuas:

    $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}$, +1 si $x\to\infty$ y -1 si $x\to-\infty$

    $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2-1}\pm x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}\pm x)(\sqrt{x^2-1}\pm x)}{(\sqrt{x^2-1}\pm x)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{(\sqrt{x^2-1}\pm x)}=0$;

    Entonces, hay dos asíntotas oblicuas:

    $y=x$ cuando $x\to\infty$ e $y=-x$ cuando $x\to-\infty$

- Monotonía: Hallamos la derivada:

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, y la anulamos: $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0$, y obtenemos $x=0$ que no pertenece al dominio, entonces:

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(1,\infty)$
$f'(x_0)$	$f'(-2)=-1{,}1<0$	$f'(2)=1{,}1>0$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

- Máximos y mínimos: Como la derivada no se anula en el dominio, no ha máximos ni mínimos relativos.

- Curvatura: Hallamos la segunda derivada:

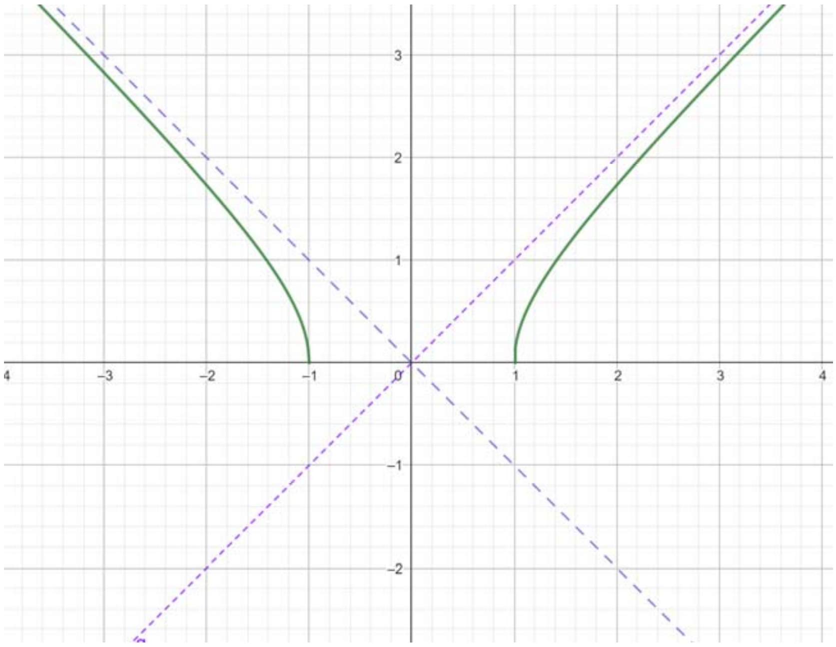
$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2}=\frac{-1}{(\sqrt{x^2-1})^3}$, que tampoco se anula en el dominio de la función, y

Textos Marea Verde

es negativa, ya que el signo de la raíz cuadrada es positivo. Por tanto, $f(x)$ es cóncava

- Puntos de inflexión: Como la segunda derivada no se anula, no hay puntos de inflexión

- Recorrido o imagen: $\text{Im}f(x) = (0, \infty)$



6. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. Si el coste por unidad es de 40 céntimos, ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero? ¿Cuál sería ese beneficio?

Sea x el número de helados vendidos, precio de los helados 50 + x

1. Como hay que calcular el beneficio diario que obtiene el heladero, B(x), que sería igual al dinero ganado menos el coste que supone:
   ingresos= (200-2x)(50+x); coste= 40(200-2x), por lo que la función sería:
   $$B(x) = (200 - 2x)(50 + x) - 40(200 - 2x) = (200 - 2x)(10 + x)$$
   $$B'(x) = (-2)(10 + x) + (200 - 2x) = 180 - 4x \ \ ,\ 180 - 4x = 0\ ,\ x = 45$$

Entonces el precio de venta en el que el beneficio diario es máximo es: 50+45=95 céntimos

2. Calculamos el beneficio para x=45
   $$B(45) = (200 - 90)(10 + 45) = 115(45) = 6050\ céntimos$$
   $$= 60\ euros\ con\ 50\ céntimos\ es\ el\ beneficio\ diario\ máximo$$

7. La producción de cierta hortaliza en un invernadero (Q(x), en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión $Q(x) = (x + 1)^2\,(32 - x)$

a) Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima para mantener en el invernadero.

b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

1) Se lleva a cabo la optimización de la función para calcular la temperatura óptima. Para eso primero se hace la derivada de la función y después se iguala a 0 para sacar soluciones.

$Q'(x) = 2(\mathrm{x}+1)(32-\mathrm{x}) - (x+1)^2 = (x+1)(64-2x-x-1) =$
$= (x+1)(63-3x);\ (x+1)(63-3x) = 0; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 21$
La temperatura óptima es 21°C, ya que es el máximo absoluto.

2) Sustituimos la x por 21 para calcular la producción de hortaliza (en kg) que se obtendría.

$Q(21) = 22^2 \cdot 11 = 4 \cdot 11^3 = 5324kg$ se obtendrían.

8. Una huerta tiene actualmente 24 árboles, que producen 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos. ¿cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima? ¿Cuál será esa producción?

Sea x el número de árboles nuevos

1) La producción de los árboles en función de x sería la siguiente:
2) $P(24+x) = (600-15x)(24+x);\ P(x) = \big(600-15(x-24)\big)x =$
$= (960-15x)x;\ P(x) = 960x - 15x^2$
3) Se hace la derivada de la función y se iguala a 0 para calcular el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima.

$P'(x) = 960 - 30x = 0; \ \ x = 32$ árboles

4) Calculamos la función cuando x= 32 para averiguar la producción máxima.

$P(32) = 960 \times 32 - 1532^2 = 32(960 - 15 \times 32) = 32 \times 480 = 15360$ frutos

9. Un depósito abierto de latón con base cuadrada y capacidad para 4000 litros, ¿qué dimensiones debe tener para que su fabricación sea lo más económica posible?

x = largo = profundo / y = altura

V = 4000 litros = *4000dm³*

Volumen: 4000 = $x^2 \cdot y$ → y = $\frac{4000}{x^2}$

Superficie = 4xy + x^2 = 4x · $\frac{4000}{x^2} + x^2$

$f(x) = \frac{16000}{x} + x^2 = \frac{16000+x^3}{x}$

$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x - 16000 - x^3}{x^2} = \frac{2x^3-16000}{x^2};\ \ \frac{2x^3-16000}{x^2} = 0;\ \ 2x^3 = 16000;\ \ x = \sqrt[3]{8000}\ ; \quad x = 20$

$f''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - 2x(2x^3-16000)}{x^4} = \frac{2x^4+32000x}{x^4} = \frac{2x^3+32000}{x^3}$

$f''(20) = \frac{2 \cdot 20^3 + 32000}{20^3} > 0$ → *Por lo tanto tenemos un mínimo para x = 20*

y = $\frac{4000}{20^2}$ = 10 Lado de la base: 20 dm, altura: 10 dm

Textos Marea Verde

10. Se quiere fabricar una caja de volumen máximo que sea el doble de larga que de ancha y que, además, la suma del ancho más el largo más el alto sea igual a un metro. Calcula las medidas que debe tener la caja y cuál será su volumen.

x = ancho / 2x = largo / y = altura

2x+x+y = 1 → y = 1-3x

Volumen/V = 2x · x · y = $2x^2$ · y = $2x^2(1-3x)$

f (x) = $2x^2$ - $6x^3$

f' (x) = 4x - $18x^2$ → 4x - $18x^2$ = 0 → $x(4-18x)$ → x_1 = 0; $x_2 = \frac{2}{9}$

Tomamos el segundo resultado ya que 0 no es válido (las medidas de la caja no pueden ser 0).

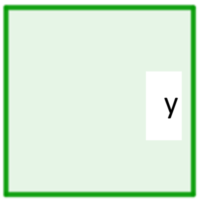
f''(x) = 4 – 36x $f''\left(\frac{2}{9}\right) = 4 - 36 \cdot \frac{2}{9} < 0$ → *Hay un máximo para x =* $\frac{2}{9}$

$y = 1 - 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$ $V = 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{243}$ Ancho: $\frac{2}{9}$ dm, Largo: $\frac{4}{9}$ dm, Altura: $\frac{1}{3}$ dm, Volumen: $\frac{8}{243}$ dm^3

11. Se desea construir el marco de una ventana rectangular de 6 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2,50 euros y el del tramo vertical 3 euros.

a) Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) ¿Cuál será ese coste mínimo?



x

x = metros del tramo horizontal / y = metros del tramo vertical

precio metro tramo horizontal = 2,50 / precio metro tramo vertical = 3

Superficie: 6 = x · y → $y = \frac{6}{x}$

Perímetro = 2x + 2y = $2x + 2 \cdot \frac{6}{x}$

f (x) = $2x + \frac{12}{x} = \frac{2x^2+12}{x}$

f' (x) = $\frac{4x \cdot x - 1(2x^2+12)}{x^2} = \frac{4x^2-2x^2-12}{x^2} = \frac{2x^2-12}{x^2}$ → $\frac{2x^2-12}{x^2} = 0$ → $2x^2 - 12 = 0$ → $2x^2 = 12$ → $x_1 = +\sqrt{6}$ $x_2 = -\sqrt{6}$

La opción negativa no es válida

f''(x) = $\frac{4x \cdot x^2 - 2x(2x^2-12)}{x^4} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 24x}{x^4} = \frac{24x}{x^4} = \frac{24}{x^3}$; $f''(\sqrt{6}) = \frac{24}{\sqrt{6}^3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} > 0$; Hay un mínimo para x = $\sqrt{6}$

$y = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ Tramo horizontal = 2x = $2\sqrt{6}$ Tramo vertical = 2y = $2\sqrt{6}$

Metros del tramo horizontal (largo) = $\sqrt{6}$ m Metros tramo vertical (alto) = $\sqrt{6}\ m$

Coste mínimo = $2{,}5(2\sqrt{6}) + 3(2\sqrt{6}) = 11\sqrt{6}$ euros

Textos Marea Verde

12. Se quiere construir un recipiente cónico cuya generatriz mida 10 cm y que tenga capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?

Como deseamos que tenga capacidad máxima, debemos optimizar el volumen,

$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ con la condición $r^2 + h^2 = 10^2$, $r^2 = 10^2 - h^2$ podemos prescindir de $\frac{1}{3}$

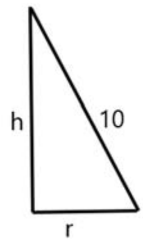
Sustituyendo en la fórmula del volumen obtenemos $f(h) = \pi(10^2 - h^2)h = \pi(100h - h^3)$

Derivamos $f'(h) = \pi(100 - 3h^2)$ $\pi(100 - 3h^2) = 0$ $h^2 = \frac{100}{3}$; $h = \mp\frac{10}{\sqrt{3}}$

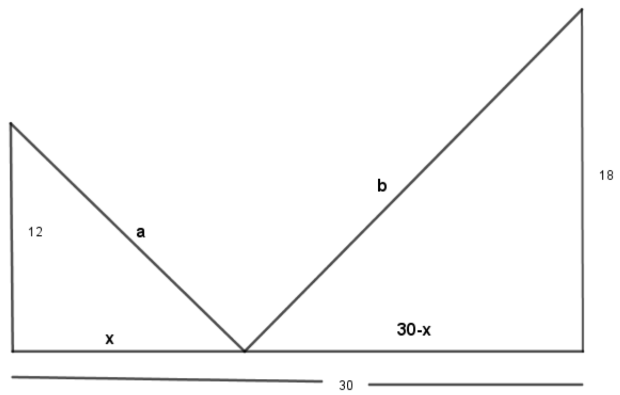
Descartando la solución negativa, $h = \frac{10}{\sqrt{3}}$

Derivando de nuevo $f''(h) = \pi(-6h)$ $f''\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right) = \pi\left(-6\frac{10}{\sqrt{3}}\right) < 0$ por tanto, es un máximo,

sustituimos en $r^2 = 10^2 - h^2$ $r^2 = 100 - \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{200}{3}$ $r = \sqrt{\frac{200}{3}} = 10 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$cm



13. Dos postes de 12 m y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?



Queremos que sea mínima la suma: a + b ; $a = \sqrt{12^2 + x^2}$; $b = \sqrt{18^2 + (30 - x)^2}$

Tenemos $f(x) = \sqrt{12^2 + x^2} + \sqrt{18^2 + (30 - x)^2}$

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{12^2+x^2}} - \frac{2(30-x)}{2\sqrt{18^2+(30-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{12^2+x^2}} - \frac{(30-x)}{\sqrt{18^2+(30-x)^2}}$ Igualamos a 0

$\frac{x\cdot\sqrt{18^2+(30-x)^2} - (30-x)\cdot\sqrt{12^2+x^2}}{\sqrt{12^2+x^2}\cdot\sqrt{18^2+(30-x)^2}} = 0$ tomamos sólo el numerador

$x \cdot \sqrt{18^2 + (30 - x)^2} - (30 - x) \cdot \sqrt{12^2 + x^2} = 0$

$x \cdot \sqrt{18^2 + (30 - x)^2} = (30 - x) \cdot \sqrt{12^2 + x^2}$ elevamos al cuadrado los dos miembros

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$x^2 \cdot (18^2 + (30 - x)^2) = (30 - x)^2 \cdot (12^2 + x^2)$ simplificando, nos queda

$x^2 \cdot 18^2 = (30 - x)^2 \cdot 12^2$; $324x^2 = 144x^2 - 8640x + 900 \cdot 144$

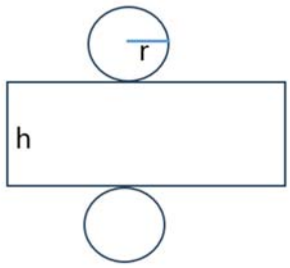
$180x^2 + 8640x - 900 \cdot 144 = 0$ dividiendo entre 180, $x^2 + 48x - 720 = 0$

Obtenemos x = 12 y x = -60, descartamos la negativa

Estudiamos crecimiento y decrecimiento en (0, 12) y (12, 30)

f'(1) < 0 y f'(20) > 0 , por tanto en x = 12 hay un mínimo.

14. Determina el radio de la base y la altura de un cilindro de 54 cm² de área total para que su volumen sea máximo.



Como deseamos que tenga capacidad máxima, debemos optimizar el volumen,

$V(r,h) = \pi r^2 h$ con la condición $2\pi r^2 + 2\pi r h = 54$

Despejamos h , $h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{27 - \pi r^2}{\pi r}$ sustituimos en la fórmula del volumen y obtenemos

$f(h) = \pi r^2 \frac{27 - \pi r^2}{\pi r} = r \cdot (27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$ derivamos

$f'(\mathrm{r}) = 27 - 3\pi \mathrm{r}^2$; $27 - 3\pi \mathrm{r}^2 = 0$; $\mathrm{r} = \mp\sqrt{\frac{27}{3\pi}} = \mp\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ descartamos la solución negativa

$f''(\mathrm{r}) = -6\pi \mathrm{r}$ $f''(\frac{3}{\sqrt{\pi}}) = -6\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}} < 0$ por tanto, es un máximo para

$\mathbf{r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\,cm}$ y $\mathbf{h = \frac{27 - \pi\left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{\pi\frac{3}{\sqrt{\pi}}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\,cm}$

15. En la oficina central de Correos de cierto país están expuestas las tarifas del servicio de cartas, que son las siguientes:

- **Cartas hasta 20 gramos de peso: 17 céntimos de euro.**
- **Por cada 10 g o fracción de exceso de peso hay que añadir 5 céntimos más.**

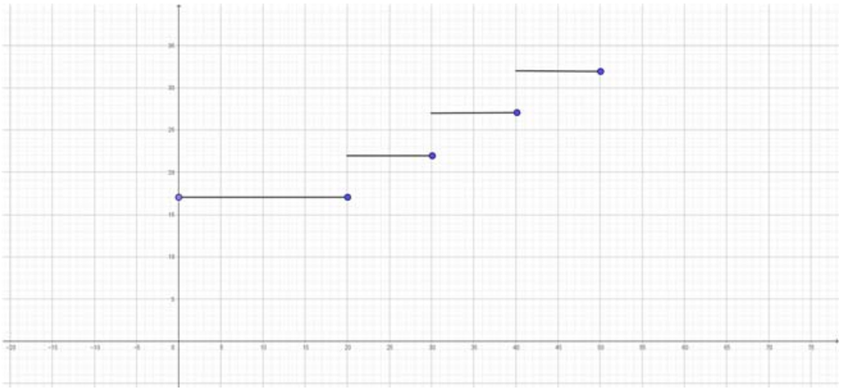
a) Escribe la fórmula de la función y = f (x) (donde x representa el peso de cada carta en gramos e y el precio que se tiene que pagar para enviarla), hasta 50 g.

Textos Marea Verde

b) Representa gráficamente la función e indica en qué puntos de su dominio es discontinua y por qué.

a) Si $x \leq 20$ $y = 17$; si $20 < x \leq 30$ $y = 22$; si $30 < x \leq 40$ $y = 27$; si $40 < x \leq 50$ $y = 32$

$$f(x) = \begin{cases} 17 & si\ x \leq 20 \\ 22 & si\ 20 < x \leq 30 \\ 27 & si\ 30 < x \leq 40 \\ 32 & si\ 40 < x \leq 50 \end{cases}$$



Se trata de una función escalonada y por tanto, es discontinua en los extremos de los intervalos:

$x = 20$; $x = 30$ y $x = 40$

16. El coste total de producción de x unidades de un producto es $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Se define la función coste medio por unidad como: $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.
¿Cuántas unidades hay que producir para que el coste por unidad sea mínimo?

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{3}x^2 + 6x + 192}{x} = \frac{1}{3}x + 6 + \frac{192}{x} \quad ; \quad C'_m(x) = \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} \quad ; \quad \frac{1}{3} - \frac{192}{x^2} = 0$$

$x = 24$ y $x = -24$ como $C''_m(x) = \frac{576}{x^3}$ $\quad C''_m(24) = \frac{576}{24^3} > 0$

luego el coste es mínimo para $x = 24$

17. – Una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tienen en funcionamiento (n) de acuerdo con la expresión: $B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$ Determina razonadamente:

a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios.
b) El valor de dichos beneficios máximos.

a) $B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$
$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96$; $-24n^2 + 120n - 96 = 0$ resolviendo, n= 1 y 4

$$(-\infty, 1) \qquad (1, 4) \qquad (4, +\infty)$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$B'(-2) = -24 \cdot (-2)^2 + 120 \cdot (-2) - 96 = -432,$ decreciente
$B'(2) = -24 \cdot 2^2 + 120 \cdot 2 - 96 = 48,$ creciente
$B'(6) = -24 \cdot 6^2 + 120 \cdot 6 - 96 = -240,$ decreciente
n=1 es un mínimo y n=4 es un máximo.
La franquicia ha de tener 4 tiendas para maximizar sus beneficios.

b) $B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4$
$B(4) = -512 + 960 - 384 = 64$
Se multiplica por 1000 porque los beneficios están en miles de euros
$$64 \cdot 1000 = 64000$$
El beneficio máximo será de 64000 euros.

18.- Sea la función: $y = 2\sqrt{\frac{2}{x} - 1} = 2\sqrt{\frac{2-x}{x}}$

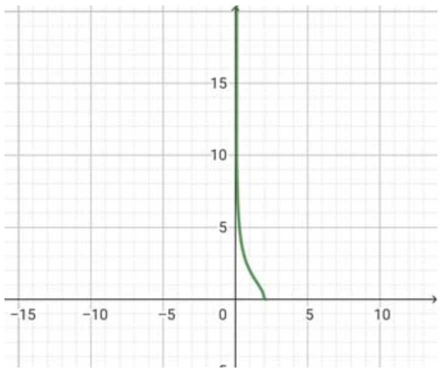
a) Indica su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
b) Realiza la representación gráfica de la misma.

a)
- Dominio: $(0, 2]$
  2 – x = 0 , x = 2 ; x = 0

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo:	neg.	Pos.	neg.

- Monotonía:
  Crecimiento: no tiene
  Decrecimiento: $(0, 2)$
- No presenta ningún punto de inflexión.
- Asíntotas: x = 0.

b)



19. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 + 4 & si\ x < -2 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq -2 \end{cases}$

a) Dibuja su gráfica aproximada y analiza su continuidad y derivabilidad.

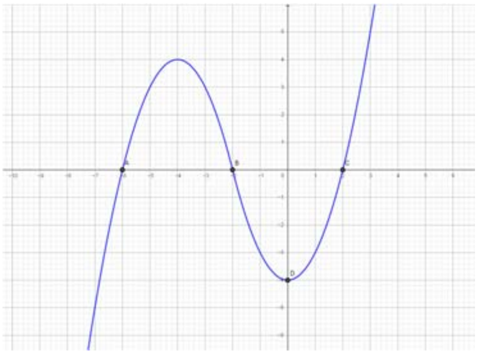
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos y relativos de la función en el intervalo [-8, 8].

a) El primer trozo es una parábola abierta hacia abajo, $-(x+4)^2 + 4 = -x^2 - 8x - 12$

Los cortes con el eje X son, $-x^2 - 8x - 12 = 0$ x = -6 y x = -2 y el vértice está en x = -4

El segundo trozo es una parábola abierta hacia arriba con cortes en x = -2 y x = 2, vértice x = 0

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde



Es continua y derivable en todos los números reales

b) En (-4, 4) hay un máximo relativo

En (0, -4) hay un mínimo relativo

En (-8, -12) hay un mínimo absoluto

En (8, 60) hay un máximo absoluto

20. Obtén y representa una función polinómica de tercer grado $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tenga un mínimo en el punto (1, 1) y un punto de inflexión en el punto (0, 3)

Si pasa por el punto (1, 1)………………………………………. f(1) = 1

Mínimo en (1, 1) …………………………………………………. f'(1) = 0

Pasa por (0, 3) ……………………………………………………. f(0) = 3

Punto de inflexión en (0, 3) ………………………………. f''(0) = 0

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\quad f''(x) = 6ax + 2b$

Sustituyendo: $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = a + b + c + d = 1$

$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = d = 3$

$f'(1) = 3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 3a + 2b + c = 0$

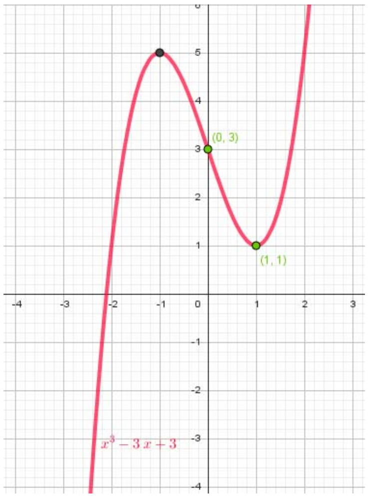
$f''(0) = 6 \cdot a \cdot 0 + 2b = 2b = 0$ de donde

d = 3 ; b = 0 ; a + c + 3 =1 ; 3a + c = 0

$\begin{cases} a + c = -2 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$ Multiplicando la E1 por (-1) y sumando $\begin{cases} a + c = -2 \\ 2a = 2 \end{cases}$ a = 1 y c = -3

Nos queda $f(x) = x^3 - 3x + 3$ su gráfica es:

www.apuntesmareaverde.org.es
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde



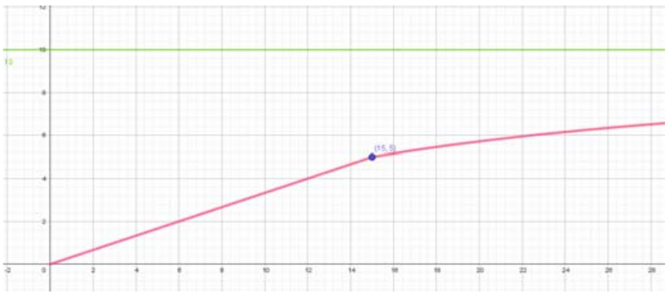
21. La puntuación obtenida por un estudiante en un examen depende del tiempo que haya dedicado a su preparación (x, expresado en horas) en los siguientes términos:

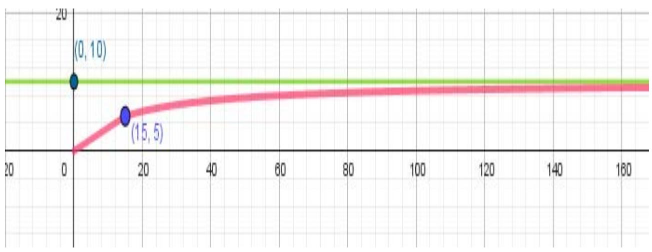
$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3} & si\ \ 0\le x\le 15\\ \dfrac{2x}{0,2x+3} & si\ x>15\end{cases}$$

a) Estudia y representa la función. Si un estudiante ha dedicado menos de 15 horas a preparar el examen, justifica que no aprobará, esto es, que obtendrá menos de 5 puntos.

b) Justifica que la puntuación nunca puede ser superior a 10 puntos.

a)





Para valores menores de 15 la gráfica de la función es una recta, creciente y el máximo lo alcanza cuando x = 15 con un valor de 5, es decir, con menos de 15 horas no llega al 5.

b) Calculamos $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{0,2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{0,2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{0,2}=10$ por tanto, como máximo se puede obtener un 10.

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. El dominio de definición de la función $f(x) = 2^{\frac{\text{sen}(x+3)}{x^2-4}}$

Igualamos el denominador a 0: $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Dom $f = \mathbb{R} - \{+2, -2\}$

La respuesta correcta es la a)

2. Los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)}$

Corte con el eje y; x=0

$$f(0) = \frac{(0-1)(0+4)}{(0-3)} = \frac{(-1)(4)}{-3} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

P(0, $4/3$)

Corte con el eje x; y=0

$$0 = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-3)} \to 0 \cdot (x-3) = (x-1)(x+4) \to (x-1)(x+4) = 0 \to$$

$\to x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\to x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

P(1, 0), (-4, 0)

La respuesta correcta es la c)

3. Indica cuál de las siguientes funciones no tiene ningún tipo de simetría:

a) $y = x^2$

$y = f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

Como $f(x) = f(-x)$ presenta una simetría par.

b) $y = x^3$

$y = f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

$-f(x) = -(x^3) = -x^3$

Como $f(-x) = -f(x)$ presenta una simetría impar.

Textos Marea Verde

c) $\boldsymbol{y = e^x}$

$y = f(x) = e^x$
$f(-x) = e^{-x}$
$-f(x) = -(e^x) = -e^x$

Como $f(-x) \neq f(x) \neq -f(x)$ no tiene ningún tipo de simetría

d) $\boldsymbol{y = sen(x)}$

$y = f(x) = sen(x)$

$-f(x) = -sen(x)$
$f(-x) = sen(-x)$

Como $-f(x) = f(-x)$ presenta una simetría impar.

La c) no tiene ningún tipo de simetría

4. Las asíntotas de la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$

$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(3-2)(3-1)}{0\cdot(3-4)} = \frac{12}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{2}{0^+} = \infty$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Asíntota vertical x=3

$x - 4 = 0 \ \rightarrow x = 4$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(4-2)(4-1)}{(4-3)\cdot 0} = \frac{6}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{6}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 4^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Asíntota vertical x=4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{x}{x}-\frac{2}{x})(\frac{x}{x}-\frac{1}{x})}{(\frac{x}{x}-\frac{3}{x})(\frac{x}{x}-\frac{4}{x})} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot 1} = 1$$

Asíntota horizontal y=1

Textos Marea Verde

Como tiene asíntotas horizontales no tiene asíntotas oblicuas.

La respuesta correcta es la a)

5. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 12x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ **tiene máximos y mínimos en los puntos de abscisa siguientes.**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 3x^2 - 12 & x > 0 \end{cases}$$

$$2x = 0 \quad ; \quad x = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0 \quad ; \quad 3x^2 = 12 \quad ; \quad x = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2$$

Para x < 0 la función es decreciente, en (0, 2) también es decreciente y en (2, ∞) es creciente
Por tanto tiene un mínimo en x = 2

La respuesta correcta es la b).

6. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa:

a) $x = 2$ b) $x = 0$ c) $x = 3$ d) $x = -2$

Calculamos la segunda derivada

$f''(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 6x & x > 0 \end{cases}$ 6x = 0 ; x = 0, como para x > 0 f'''(x) es distinta de 0, en x = 0 hay un punto de inflexión

La respuesta correcta es la b).

7. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) El dominio de las funciones polinómicas es siempre toda la recta real

b) Las funciones definidas a trozos nunca son continuas

c) Las funciones exponenciales están definidas en la misma región que su exponente

d) Las funciones: $y = e^x$; $y = sen(x)$; $y = cos(x)$ están definidas en toda la recta real

La respuesta correcta es la b).

Por ejemplo la función: $f(x) = \begin{cases} -(x+4)^2 + 4 & si\ x < -2 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq -2 \end{cases}$ es continua

Textos Marea Verde

8. La función $f(x)=\sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)}}$ no está definida en los intervalos indicados:

a) (1, 2), (3, 4) b) [1, 2], [3, 4] c) [1, 2], (3, 4) d) (1, 2), [3, 4]

f(x) estará definida en los intervalos que sea positivo el valor de la expresión de dentro de la raíz y no anule el denominador, tomamos valores dentro de los intervalos y sustituimos,

(1, 2) negativo; (2, 3) positivo ; (3, 4) negativo ; (4, 5) positivo

La respuesta correcta es la a).

9. La función $f(x)=\ln(\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)})$ tiene como asíntota horizontal:

a) $y = 0$ b) $y = 1$ c) No tiene d) $y = 1/6$

$$\lim_{x\to\infty} ln\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = ln \lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-4)} = ln\frac{1}{1} = ln1 = 0$$

La respuesta correcta es la a).

10. La función $f(x)=2\cdot\cos 3x$ tiene como amplitud y periodo:

a) $A = 2$, $T = 2\pi/3$ b) $A = 3$, $T = \pi$ c) $A = 4$, $T = 2\pi/3$ d) $A = 2$, $T = 2\pi$

La respuesta correcta es la a).

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Matemáticas II

2º Bachillerato

Capítulo 10: Integrales

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: AITANA, AITOR, AMALIA, ANDREA, CARMEN, CELIA S, FERNANDO, IRENE, ISMAEL F, LAURA, NATALIA, OLIVIA, ROSA, PABLO G, ESPERANZA, LIDIA, CELIA P, ISMAEL C, ENRIQUE, LUCÍA, NEREA, JULIA,

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

Actividades propuestas

1. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int 4x^3 dx$ b) $\int 3x^2 dx$ c) $\int 5x^4 dx$ d) $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2) dx$

a) $\int \mathbf{4x^3\, dx} = x^4 + C$

b) $\int \mathbf{3x^2\, dx} = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C$

c) $\int \mathbf{5x^4 dx} = \frac{5x^5}{5} + C = x^5 + C$

d) $\int (\mathbf{5x^4 - 4x^3 + 3x^2})\mathbf{dx} = x^5 - x^4 + x^3 + C$

2. Dada $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)$, calcula la primitiva F(x) de f(x) que verifica F(0) = 4

$F(x) = \int (\mathbf{x^3 - 3x^2 + 2x + 1})\mathbf{dx} = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x + C$

Como F(0) = 4 , F(0) = $\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2 + 0 + C = 4$, luego C = 4 , de donde,

$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x + 4$

3. Comprueba si $F(x) = (4x^3 + 2x^2 - x + 5)$ es una primitiva de $f(x) = (12x^2 + 4x + 3)$. En caso negativo, explica por qué.

La derivada de F(x) ha de ser igual a f(x)

Si derivamos F(x) obtenemos $F'(x) = 12x^2 + 4x - 1 \neq f(x)$
Por tanto, F(x) no es una primitiva de f(x)

4. Determina los valores de a, b, c y d para los que $(4a^3 + bx^2 + cx + d)$ es una primitiva de la función $f(x) = (4x^2 - 5x + 3)$

$F(x) = \int (4x^2 - 5x + 3)dx = 4\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x + C$ *, por tanto,*

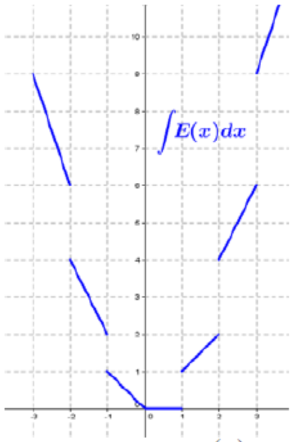
$a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{-5}{2}$, $c = 3$, $d = C$

5. Al resolver una primitiva, Javier y Ricardo han utilizado métodos diferentes y, como era de esperar, han obtenido expresiones distintas. Después de revisarlo muchas veces y no encontrar ningún error en los cálculos, le llevan el problema a la profesora para ver quien tiene bien el ejercicio. Para su sorpresa, la profesora les dice que ambos tienen bien el problema. ¿Cómo es posible?

Pueden diferir en constantes y estar los dos bien, además de las posibles simplificaciones.

Textos Marea Verde

6. Razona por qué la gráfica siguiente:



es una primitiva de la función "parte entera de x", $E(x)$, (salvo en los puntos de discontinuidad donde no es derivable):

$\int 1dx = x$ $\int 2dx = 2x$ $\int 3dx = 3x$ $\int(-1)dx = -x$ $\int(-2)dx = -2x$

7. Calcula las siguientes primitivas utilizando el cambio indicado:

a) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$ haciendo $x = t^{12}$.

$x = t^{12}$, $dx = 12t^{11}dt$, sustituyendo, obtenemos $\int \frac{\sqrt{t^{12}}-\sqrt[3]{t^{12}}}{\sqrt[4]{t^{12}}} \cdot 12t^{11}dt$, simplificando,

$\int \frac{t^6-t^4}{t^3} 12t^{11}dt = \int (t^6 - t^4)12t^8dt = 12\int (t^{14} - t^{12})dt = 12\left(\frac{t^{15}}{15} - \frac{t^{13}}{13}\right) + C$

$x = t^{12}$, $t = \sqrt[12]{x}$, deshaciendo el cambio, $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} \cdot dx = 12\left(\frac{(\sqrt[12]{x})^{15}}{15} - \frac{(\sqrt[12]{x})^{13}}{13}\right) + C$

b) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ haciendo $e^x = t$.

$e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{t}$ sustituyendo,

$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+\frac{1}{t}} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{\frac{t^2+1}{t}} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg(t) + C = arctg(e^x) + C$

c) $\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx$ haciendo $1+2x = t^2$

$1 + 2x = t^2$, $2dx = 2tdt$, $dx = tdt$, $x = \frac{t^2-1}{2}$, $t = \sqrt{1+2x}$

$\int \frac{5x^4}{\sqrt{1+2x}}dx = \int \frac{5\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^4}{\sqrt{t^2}} tdt = 5\int \frac{(t^2-1)^4}{2^4}dt = \frac{5}{16}\int (t^8 - 4t^6 + 6t^4 - 4t^2 + 1)dt =$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$= \frac{5}{16}\left(\frac{t^9}{9} - 4\frac{t^7}{7} + 6\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^3}{3} + t\right) + C =$$

$$= \frac{5}{16}\left(\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^9}{9} - 4\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^7}{7} + 6\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^5}{5} - 4\frac{(\sqrt{1+2x}\,)^3}{3} + \sqrt{1+2x}\right) + C$$

d) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ haciendo $x+\sqrt{x^2-1}=t$

$x+\sqrt{x^2-1}=t$, $\sqrt{x^2-1}=t-x$, $\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=(t-x)^2$,

$x^2-1=t^2+x^2-2xt$, $2xt=t^2+1$, $x=\frac{t^2+1}{2t}$,

$dx=\frac{2t\cdot 2t-(t^2+1)\cdot 2}{4t^2}dt=\frac{(2t^2-2)}{4t^2}dt=\frac{t^2-1}{2t^2}dt$, de donde,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2}{t^3}-\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-t^{-3}\right)dt = \frac{1}{2}\left(ln|t| + \frac{t^{-2}}{2}\right) + C$$

Deshaciendo el cambio, $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + \frac{1}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}\right) + C$

e) $\int (2\,\mathrm{sen}^3 x + 3\,\mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\,x + 3)\cos x\,dx$ haciendo $\mathrm{sen}\,x = t$

$\mathrm{sen}x = t$, $\cos x dx = dt$, sustituyendo, nos queda,

$$\int (2t^3+3t^2-t+3)dt = 2\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 3t + C = \frac{\mathrm{sen}^4 x}{2} + \mathrm{sen}^3 x - \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} + 3\mathrm{sen}x + C$$

f) $\int \sqrt{1-x^2}dx =$ Haciendo $x = \mathrm{sen}t$; $t = \mathrm{arcsen}x$; $dx = \cos t dt$

$$\int \sqrt{1-sen^2 t}\;cost\;dt = \int \sqrt{cos^2 t}\cdot cost\;dt = \int cost\cdot cost\;dt = \int cos^2 t\;dt = \int \frac{1+cos2t}{2}dt =$$

$$= \int \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\int cos2t\;dt = \int \frac{1}{2}dt + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2cos2t\;dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cdot sent = \frac{1}{2}arcsenx + \frac{1}{4}x + C$$

8. Elige el cambio que simplifica las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3+1}{(x^4+2x)^3}dx$ $\quad t = x^4+2x$, $dt = (4x^3+2)dx = 2(2x^3+1)dx$

b) $\int \frac{e^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx$ $\quad t = tgx$, $dt = \frac{1}{cos^2 x}dx$

c) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\cdot\ln x}dx$ $\quad t = ln(lnx)$, $dt = \frac{\frac{1}{x}}{lnx}dx = \frac{1}{xlnx}dx$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

d) $\int 2x^3\sqrt{x^4-49}\cdot dx$

$t = x^4 - 49$, $dt = 4x^3dx$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}+2}dx$

$t^3 = x+1$, $3t^2dt = dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

$t = 1-4x^2$, $dt = -8xdx$

9. Determina si las siguientes integrales son inmediatas o no:

a) $\int\left(4x^3+3x^3-\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$ SÍ.

b) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ SÍ $\left(\int \frac{lnx}{x}dx = \int lnx\cdot\frac{1}{x}dx\right)$

c) $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$ SÍ

d) $\int \frac{e^{arcsenx}dx}{\sqrt{1-x^2}} = e^{arcsenx} + C$ SÍ

e) $\int \frac{\text{arctgx}}{1+x^2}\text{dx} = \frac{(\text{arctgx})^2}{2} + \text{C}$ SÍ

f) $\int \frac{\ln(x+1)}{x}dx$ NO

g) $\int tgx\cdot cosxdx = \int \frac{senx}{cosx}\cdot cosxdx = \int senxdx = -cosx$+C SÍ

h) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ SÍ

i) $\int e^{x^2}dx$ NO

k) $\int \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-1}dx$ SÍ $[x^4-2x^2+1 = (x^2-1)^2]$

j) $\int x^2\cdot e^{x^2}dx$ NO

10. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\left(e^{3x}+e^{2x}+e^x\right)e^x dx$ $, t = e^x, dt = e^xdx, \int(t^3+t^2+t)dt = \frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+C = \frac{e^{4x}}{4}+\frac{e^{3x}}{3}+\frac{e^{2x}}{2}+C$

b) $\int(\ln x+2)\frac{dx}{x} = \frac{(lnx+2)^2}{2}+C$

c) $\int \ln(\cos x)\operatorname{tg} x\,dx$, $t = \ln(cosx)$, $dt = -\frac{senx}{cosx}dx = -tgxdx =$

$= -\int tdt = -\frac{t^2}{2} + C = -\frac{(\ln(cosx))^2}{2} + C$

d) $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$ $=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}dx = \frac{1}{2}arctg(x^2) + C$

i) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ $=\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = arctg(e^x) + C$

j) $\int x\cdot\cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}dx$, $t = e^{x^2}$, $dt = 2xe^{x^2}dx$, $\frac{1}{2}\int costdt = \frac{1}{2}sent + C = \frac{1}{2}sen(e^{x^2}) + C$

11. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (x^2+x+1)e^x dx$ $\begin{Bmatrix} u = x^2+x+1 & \to & du = (2x+1)dx \\ dv = e^x dx & \to & v = \int e^x dx = e^x \end{Bmatrix}$

$\int (x^2+x+1)e^x dx = (x^2+x+1)e^x - \int (2x+1)e^x dx =$

$\begin{Bmatrix} u = 2x+1 & \to & du = 2dx \\ dv = e^x dx & \to & v = \int e^x dx = e^x \end{Bmatrix}$ $= (x^2+x+1)e^x - [(2x+1)e^x - \int 2e^x dx] =$

$= (x^2+x+1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x + C = (x^2-x+2)e^x + C$

b) $\int \ln x\,dx$ $\begin{Bmatrix} u = lnx & \to & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \to & v = \int dx = x \end{Bmatrix}$ $\int lnxdx = ln|x|x - \int x\frac{1}{x}dx = xln|x| - x + C$

c) $\int x\cos x\,dx$ $\begin{Bmatrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = cosxdx & \to & v = \int cosxdx = senx \end{Bmatrix}$

$\int xcosxdx = xsenx - \int senxdx = xsenx + cosx + C$

Curiosidad – idea feliz: Resuelve la primitiva $\int \cos(\ln x)\,dx$.

Para ello, multiplica y divide el integrando por x: $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\cdot x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x \to du = \ldots \\ dv = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \to v = \ldots \end{matrix} \right\rangle$

$I = \int \cos(lnx)\,dx = \int \frac{\cos(lnx)}{x}\cdot xdx =$ $\begin{Bmatrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \frac{\cos(lnx)}{x}dx & \to & v = sen(lnx) \end{Bmatrix}$

$= xsen(lnx) - \int sen(lnx)dx.$

$\int sen(lnx)dx = \int \frac{\mathrm{sen}(lnx)}{x}\cdot xdx =$ $\begin{Bmatrix} u = x & \to & du = dx \\ dv = \frac{\mathrm{sen}(lnx)}{x}dx & \to & v = -cos(lnx) \end{Bmatrix}$

Textos Marea Verde

$= -xcos(lnx) + \int \cos(lnx)\,dx.$

$I = xsen(lnx) + xcos(lnx) - I\,,\;\; 2I = xsen(lnx) + xcos(lnx)$

$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}x(sen(lnx) + cos(lnx)\,) + C}$

d) $\int \boldsymbol{arcsenxdx} =$ $\begin{bmatrix} u = arcsenx \;\rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = 1dx \;\rightarrow v = x \end{bmatrix}$ $=$

$arcsenx \cdot x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$ $\left[t = 1 - x^2 \;\rightarrow dt = -2xdx \rightarrow \frac{dt}{-2} = xdx\right]$

$arcsenx \cdot x - \int \frac{\frac{dt}{-2}}{\sqrt{t}} = arcsenx \cdot x + \frac{1}{2}\int t^{\frac{-1}{2}}dt = arcsenx \cdot x + \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$

$= arcsenx \cdot x + t^{\frac{1}{2}} = arcsenx \cdot x + \sqrt{1-x^2} + C$

e) $\int \boldsymbol{senax \cdot e^{bx}dx} =$ $\begin{bmatrix} u_1 = sen(ax) \rightarrow du_1 = \mathrm{a}\cdot\cos(ax)dx \\ dv_1 = e^{bx}dx \rightarrow v_1 = \frac{e^{bx}}{b} \end{bmatrix}$

$= \frac{e^{bx}sen(ax)}{b} - \int \frac{ae^{bx}\cos(ax)}{b}dx =$ $\begin{bmatrix} u_2 = \mathrm{a}\cdot\cos(ax) \rightarrow du_2 = -a^2sen(ax)dx \\ dv_1 = \frac{e^{bx}}{b} \rightarrow v_1 = \frac{e^{bx}}{b^2} \end{bmatrix}$

$= \frac{e^{bx}sen(ax)}{b} - \left(\frac{ae^{bx}\cos(ax)}{b^2} + \int \frac{a^2e^{bx}\,\mathrm{sen}(ax)}{b^2}\right) =$

$= \frac{e^{bx}sen(ax)}{b} - \left(\frac{ae^{bx}\cos(ax)}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\int senax \cdot e^{bx}dx\right)$

$\frac{be^{bx}sen(ax) - ae^{bx}\cos(ax)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int senax \cdot e^{bx}dx$

Haciendo $I = \int senax \cdot e^{bx}dx$

$I = \frac{be^{bx}sen(ax) - ae^{bx}\cos(ax)}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I$

$I + \frac{a^2}{b^2}I = \frac{be^{bx}sen(ax) - ae^{bx}\cos(ax)}{b^2}\;;\;\frac{a^2+b^2}{b^2}I = \frac{be^{bx}sen(ax) - ae^{bx}\cos(ax)}{b^2}$

De donde, $I = \frac{be^{bx}sen(ax) - ae^{bx}\cos(ax)}{a^2+b^2} + C$

12. Resuelve las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x^2-4}}$ $x^2 - 4 = 0;\;\; x_1 = 2, x_2 = -2$

$\frac{1}{\mathrm{x}^2-4} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}-2} + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{x}+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x^2-4)} \rightarrow 1 = A(x+2) + B(x-2)$

$\mathrm{x} = 2;\;\; 1 = 4\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A} = {}^1/_4$

$\mathrm{x} = -2;\;\; 1 = -4\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{B} = -{}^1/_4$

Textos Marea Verde

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{A}{(x-a)}dx + \int \frac{B}{(x-b)}dx = \int \frac{1/4}{x-2}dx + \int \frac{-1/4}{x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| = \frac{1}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2}$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int (x+1)^{-2}\,dx = \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x+1} + C$$

c) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$ $\qquad (x+1)^2 = 0;\ \ x_1 = -1, x_2 = -1$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \rightarrow x = A(x+1) + B$$

$$x = -1;\ \ B = -1$$

$$x = 0;\ \ A = 1$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx - \int (x+1)^{-2}\,dx =$$

$$= \ln|x+1| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

d) $\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\mathbf{dx}$, efectuamos la división, obtenemos C(x) = x – 2 ; R(x) = 3x + 2, luego

$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}dx = \int (x-2)dx + \int \frac{3x+2}{x^2+2x+1}dx$, como $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}dx = \int (x-2)dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2x+1}dx + 2\int \frac{1}{(x+1)^2}dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}\ln|x^2 + 2x + 1| - \frac{2}{x+1} + C$$

$$\boldsymbol{e)} \int \frac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+4x}\boldsymbol{dx} = \int \frac{x^2+x+1}{(x^2-4x+4)(x)}dx = \int \frac{x^2+x+1}{(x)(x-2)^2}dx$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x)(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$x^2 + x + 1 = A(x-2)^2 + B(x)(x-2) + C(x)$$

$$x = 0;\ \ 1 = 4A \rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$x = 2;\ \ 7 = 2C \rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$x = 1;\ \ 3 = \frac{1}{4} - B + \frac{7}{2} \rightarrow \frac{-3}{4} = -B \rightarrow \frac{3}{4} = B$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x)(x-2)^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{(x-2)^2}dx \rightarrow \frac{1}{4}\ln|x| + \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right) + C$$

f) $\int \frac{3x^2+1}{(2x-1)(3x^2+2)}dx$; $\frac{3x^2+1}{(2x-1)(3x^2+2)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{Mx+N}{3x^2+2}$

$\to 3x^2 + 1 = A(3x^2+2) + (Mx+N)(2x-1)$

$x = 0 \to 1 = 2A - N \to N = 2A - 1 \to 2\left(\frac{7}{11}\right) - 1 \qquad \to N = \frac{3}{11}$

$x = 1 \to 4 = A(5) + (M+N) \to 4 = 5A + M + N \to 4 = 5A + M + 2A - 1 \quad \to M = \frac{6}{11}$

$x = 2 \to 13 = 14A + (2M+N)3 \to 13 = 14A + 6M + 3N \qquad \to A = \frac{7}{11}$

$\int \frac{3x^2+1}{(2x-1)(3x^2+2)}dx = \frac{7}{11}\int \frac{1}{2x-1}dx + \int \frac{6x+3}{11(3x^2+2)}dx = \frac{7}{22}\int \frac{2}{2x-1}dx + \frac{1}{11}\int \frac{6x+3}{3x^2+2}dx =$

$= \frac{7}{22}\ln|2x-1| + \frac{1}{11}\int \frac{6x+3}{3x^2+2}dx = \frac{7}{22}\ln|2x-1| + \frac{1}{11}\int \frac{6x}{3x^2+2}dx + \frac{3}{11}\int \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}x)^2+2}dx =$

$= \frac{7}{22}\ln|2x-1| + \frac{1}{11}\ln|3x^2+2| + \frac{3}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}arctan\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) + C$

g) $\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}dx \to \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \to$

$\to x^2 - 2 = A(x^2+1) + B\big(x(x^2+1)\big) + Cx^2(x^2+1) + (Dx+E)x^3 \to$

$x = 0;\ -2 = A$

$$\left\{\begin{array}{c} x=-1;\ -1=-4-2B+2C-(-D+E) \\ x=1;\ -1=-4+2B+2C+D+E \\ x=2;2=-10+10B+20C+8\,(2D+E) \\ x=-2;2=-10-10B+20C-8\,(-2D+E) \end{array}\right. \to F_1+F_2 \to 5F_1+F_3 \to -5F_1+F_4$$

$$\to \left\{\begin{array}{c} 3=-2B+2C+D-E \\ 6=4C+2D \\ 27=30C+21D+3E \\ -3=10C+11D-3E \end{array}\right. \to B=0; C=3; D=-3; E=0 \to$$

$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)}dx = \int \frac{-2}{x^3}dx + \int \frac{3}{x}dx + \int \frac{-3x}{x^2+1}dx = -2\int \frac{1}{x^3}dx + 3\int \frac{1}{x}dx - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$

$= -2\frac{x^{-2}}{-2} + 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + C = \frac{1}{x^2} + 3\ln|x| - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + C$

h) $\int \frac{x^3+2x^2+5x+3}{x^2+1}dx = \qquad (x^3+2x^2+5x+3):(x^2+1); \quad r(x) = 4x+1; \quad c(x) = x+2$

$= \int (x + 2 + \frac{4x+1}{x^2+1})dx = \int x\,dx + \int 2\,dx + \int \frac{4x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 2x + 2\,ln(x^2+1) + arctg(x) + C$

i) $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}dx \to \frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)} \to$

$x + 1 = A(x+1)^2(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + C(x-1)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1)(x+1)^2$

$x=-1;\ \ 0=4B;\ \ \ B=0$

$x=1;\ \ \ \ 2=8A;\ \ \ A=4$

$$\begin{cases} x=0; & 1=4-C-E \\ x=-2; & -1=20-9C+6D-3E \rightarrow C=-7; D=-9; E=10 \\ x=2; & 3=180+15C+18D+9E \end{cases}$$

$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}dx= \int \frac{4}{(x-1)}dx+\int \frac{-7}{(x+1)}dx+\int \frac{-9x+10}{(x^2+1)}dx=$

$=4\int \frac{1}{(x-1)}dx-7\int \frac{1}{(x+1)}dx+\int \frac{-9x}{(x^2+1)}dx+10\int \frac{1}{(x^2+1)}dx=$

$=4\ln|x-1|-7\ln|x+1|-\frac{9}{2}\ln|x^2+1|+10arctgx+C$

13. Halla las siguientes primitivas:

a) $\int \mathbf{sen}\left(\frac{3}{2}x+1\right)dx;$ $\qquad t=\frac{3}{2}x+1 \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{3}{2}\rightarrow dx=\frac{2\cdot dt}{3}$

- Ahora sustituimos en la integral y la resolvemos.

$$\int \operatorname{sen}(t)\frac{2\cdot dt}{3} \rightarrow \frac{2}{3}\cdot\int \operatorname{sen}(t)\,dt \rightarrow \frac{2}{3}\cdot(-\cos t)\rightarrow$$

- Sustituimos otra vez ***t*** por lo que teníamos y obtendremos el resultado.

$$\rightarrow -\frac{2\cdot cos\left(\frac{3}{2}x+1\right)}{3}+C$$

b) $\int \frac{sen(3x)}{\sqrt[3]{cos(3x)}}dx = \int \frac{\text{sen }(3x)}{(\cos\,(3x))^{\frac{1}{3}}}\text{dx}$

t = cos (3x) → $\frac{dt}{dx}=-sin(3x)\cdot 3 \rightarrow dx=\frac{dt}{-sen(3x)\cdot 3}$

Ahora lo sustituimos y realizamos la integral

$$\int \frac{\cancel{sen(3x)}}{t^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{dt}{-\cancel{sen(3x)}\cdot 3} \rightarrow \int -\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{3}\,dt \rightarrow \int -\frac{1}{3t^{\frac{1}{3}}}dt \rightarrow -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}dt$$

$$\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{3}}\,dt \rightarrow -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \rightarrow -\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt[3]{\cos(3x)^2}}{2} \rightarrow -\frac{\sqrt[3]{\cos(3x)^2}}{2}+C$$

c) $\int \frac{cotg(x)}{sen^2(x)}dx=\int \frac{\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}}{\text{sen}^2(x)}\text{dx}\rightarrow\int\frac{\cos(x)}{\text{sen}^3(x)}\text{ dx}$

$\text{t}=\text{sen}(\text{x})\ ;\ \frac{\text{dt}}{\text{dx}}=\cos(\text{x})\rightarrow \text{dx}=\frac{\text{dt}}{\cos(\text{x})};$

$$\int \frac{\cancel{\cos(x)}}{t^3}\cdot\frac{dt}{\cancel{\cos(x)}}\rightarrow\int\frac{1}{t^3}\,dt\rightarrow\int t^{-3}\,dt\rightarrow\frac{t^{-2}}{-2}\rightarrow-\frac{1}{2\text{sen}(x)^2}+C$$

$$\int \frac{cotg(x)}{sen^2(x)}dx = -\frac{1}{2\text{sen}(\text{x})^2} + \text{C}$$

d) $\int \frac{\textbf{sen } 2x}{(\textbf{cos } 2x+1)^2}\boldsymbol{dx} = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2)\cdot \text{sen } 2x}{(\cos 2x+1)^2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{(\cos 2x+1)} + c = \frac{1}{2(\cos 2x+1)} + C$

$t = (\cos 2x + 1) \qquad dt = (-2)\cdot \text{sen } 2x\, dx$

e) $\int(\tan x)^2\, dx = \int(1 + (\tan x)^2 - 1)\,dx = \int(1 + (\tan x)^2)\,dx - \int 1\,dx = \tan x - x + C$

f) $\int((\tan x)^2 + x + 1)\,dx = \int(1 + (\tan x)^2 + x)\,dx = \int(1 + (\tan x)^2)\,dx + \int x\,dx =$

$= \tan x + \frac{x^2}{2} + C$

g) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}(\tan x)dx = \frac{\tan^2 x}{2} + C$

h) $\int \frac{dx}{1-sen^2 x}$ caso general $\begin{bmatrix} t = tg\frac{x}{2} & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2\cdot dt}{1+t^2} & senx = \frac{2t}{1+t^2} \end{bmatrix}$

$$\int \frac{dx}{1-sen^2x} = \int \frac{\frac{2\cdot dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2-2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{2}{(t-1)^2}dt = \frac{2\cdot(t-1)^{-1}}{-1} + C = \frac{-2}{tg\frac{x}{2}-1} + C$$

i) $\int \frac{dx}{senx} = \int \frac{1}{senx}dx$ Caso: $\frac{1}{-senx} = -\frac{1}{senx}$ Impar en seno

$cosx = t\,; \qquad senx = \sqrt{1-cos^2x} = \sqrt{1-t^2}$

$-senxdx = dt\,;\; dx = \frac{dt}{-senx} = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$\int \frac{dx}{senx} = \int \frac{1}{senx}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{t^2-1}dt$

$t^2 - 1 = 0 \to t = \pm 1 \quad \to \frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$

$1 = A(t+1) + B(t-1)$

$t = 1 \;\; ; \;\; 1 = A2 \;\; \to A = \frac{1}{2}$

$t = -1 \;\; ; \quad 1 = -2B \;\; \to B = -\frac{1}{2}$

$\int \frac{1}{t^2-1}dt = \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1}dt + \int \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}dt \;\; \to \;\; \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| =$

$= \frac{1}{2}(\ln|cosx-1| - \ln|cosx+1|) + C = \frac{1}{2}\ln\frac{cosx-1}{cosx+1} + C$

$\boldsymbol{j)}\ \int \mathbf{sen^2} \boldsymbol{x} \mathbf{\cos} \boldsymbol{x\, dx}$; $\operatorname{sen} x = t\ ,\ \cos x\, dx = dt$;

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

$\boldsymbol{k)}\ \int \mathbf{sen^2} \boldsymbol{x dx}$; $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$;

$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\int 1 dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx =$

$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot 2dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$

$\boldsymbol{l)}\ \int \mathbf{sen^4} \boldsymbol{x dx}$; $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$\int \operatorname{sen}^4 x dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^{\ 2}}{2^2} dx = \int \frac{1-2\cos 2x + (\cos 2x)^2}{4} dx =$

$= \frac{1}{4}\int 1dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{sen 2x}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx =$

$\frac{x - sen 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\ \int \cos 4x \cdot 4\, dx = \frac{3x}{8} - \frac{sen 2x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} + C$

m) $\int (\boldsymbol{\cos x})^{\mathbf{4}}$**dx** = $\int ((\cos x)^2)^2\ dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)^2\, dx =$

$= \frac{1}{2}\int 1 + 2\cos 2x + (\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int 1 + \cos 4x =$

$= \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{8}\int 4\cos 4x\, dx =$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + C = \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{3}{4}x + C$

n) $\int \mathbf{\cos(\ln} \boldsymbol{x}\mathbf{)}\ \boldsymbol{dx}$

u=$\cos(\ln x)$ dv= dx

$du = -\operatorname{sen}(lnx)\frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$\int \cos(\ln x)\, dx = x \cdot \cos \ln x - \int \cancel{x}\left(-\operatorname{sen}(lnx)\frac{1}{\cancel{x}}\right) dx = x\cos(\ln x) + \int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

u= $\operatorname{sen}(\ln x)$ dv= dx

$du = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx \qquad v = x$

$x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cancel{x}\cos(\ln x)\frac{1}{\cancel{x}}dx =$

$= x\cos(\ln x) + x\operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$\int \cos(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$$

$$I = x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x) - I$$

$$2I = x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x)\,; \qquad I = \frac{x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x)}{2}$$

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{x\cos(\ln x) + x\,\text{sen}(\ln x)}{2} + C$$

ñ) $\int \frac{(1+(\sin x)^2)}{\sin x \cos x}\boldsymbol{dx} = \int \frac{1}{\text{sen}\, x \cos x} dx + \int \frac{(\text{sen}\, x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\text{sen}\, x} \cos x} dx$

*Hacemos la primera integral:

$$\int \frac{1}{\text{sen}\, x \cos x} dx$$

Sabemos que:

$$\left[\begin{array}{l} \tan\frac{x}{2} = t \to dx = \frac{2}{1+t^2}dt\,; \quad \text{sen}\, x = \frac{2t}{1+t^2} \;\; ; \;\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \qquad\qquad \text{sen}\, x \cos x = \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t-2t^3}{(1+t^2)^2} \end{array} \right.$$

$$\int \frac{1}{\text{sen}\, x\cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t-2t^3}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{2t-2t^3} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2(1+t^2)^2}{2t+2t^3-2t^3-2t^5} dt =$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \int \frac{(1+t^2)^2}{t-t^5} dt = \int \frac{(1+t^2)^2}{t(1-t^4)} dt = \int \frac{(1+t^2)^{\cancel{2}}}{t(1-t^2)\cancel{(1+t^2)}} dt = \int \frac{1+t^2}{t(1-t^2)} \text{dt}$$

$$\frac{1+t^2}{t(1-t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}; \qquad 1 + t^2 = A(1-t^2) + Bt(1+t) + Ct(1-t)$$

*Calculamos A, B y C dando valores a t:

-Si t = 0; 1 = A($1 - 0^2$); $1 = A$

-Si t = 1; 2 = B·1·(1+1); 1 = B

-Si t=-1; 2 = 2C ; 1 = C

*Sustituimos los valores:

$$\int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \ln|t| - \ln|1-t| + \ln|1+t|$$

*Sustituimos t por tan $\frac{x}{2}$:

$$\int \frac{1}{\text{sen}\, x\cos x} dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1 - \tan\frac{x}{2}\right| + \ln\left|1 + \tan\frac{x}{2}\right|$$

*Realizamos la segunda integral:

$$\int \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} dx = -ln|cosx|$$

*Por tanto:

$$\int \frac{(1+(\operatorname{sen} x)^2)}{\operatorname{sen} x \cos x}dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| - ln|cosx| + C =$$

o) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{1+sen^2x}}$

$$\begin{array}{|lll|}\hline \mathrm{t = tgx} & \mathrm{sen\ x} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} & \mathrm{sen^2x} = \frac{t^2}{t^2+1} \\ \mathrm{dx} = \frac{dt}{1+t^2} & \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} & \cos^2 x = \frac{1}{t^2+1} \\ \hline \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{1+sen^2x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{t^2+1}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2+1+t^2}{t^2+1}} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \int \frac{dt}{2\left(t^2+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\cdot \operatorname{tg} x\right) + C$$

p) $\int \mathbf{sen\ 5x \cdot cos\ 4x\ dx}$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}}$$

$$\int \operatorname{sen} 5x\cdot\cos 4x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}(5x+4x)+\operatorname{sen}(5x-4x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \operatorname{sen} 9x\,dx + \int \operatorname{sen} x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\int \operatorname{sen} 9x\cdot 9\,dx + \int \operatorname{sen} x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\cdot(-\cos 9x) + (-\cos x)\right) + C = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 9x}{9} + \cos x\right) + C$$

q) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{13+12\cos x}}$

$$\begin{array}{|llll|}\hline t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \to & x = 2\operatorname{arctg} t & dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} & & \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} & \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \\ \hline \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{13+12\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{13+12\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{13+\frac{12-12t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{13+13t^2+12-12t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{t^2+25} = 2\int \frac{1}{t^2+25}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{t^2+5^2}dt = 2\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{t}{5} + C = \frac{2}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{5}\right) + C$$

14. Resuelve las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^6 (x^2+x+1)dx \quad = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\Big|_0^6 = \left(\frac{6^3}{3}+\frac{6^2}{2}+6\right) - \left(\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+0\right) = 92$

b) $\int_{-1}^1 (x^2+x+1)dx \quad = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right) = \frac{8}{3}$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$ $=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left[\left(\left((\sqrt{3})^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)-\left((0^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)\right] = \frac{7}{3}$

d) $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$ $=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}ln|x^2+2x+2|\big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}[(ln5)-(ln1)] = \frac{ln5}{2}$

e) $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}x\,dx$ $= -cosx|_0^{\pi} = -cos\pi + cos0 = 2$

f) $\int_1^{e}\ln x\,dx$ $\int lnxdx = \begin{cases} u = lnx & \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & \rightarrow v = \int dx = x \end{cases} = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x + C$

$\int_1^{e} lnxdx = xlnx - x]_1^{e} = (elne - e) - (1ln1 - 1) = 1$

15.

Halla el valor de c que verifica $\int_0^5 (2x+1)dx = f(c)\cdot(5-0)$ y razona su interpretación geométrica.

$\int_0^5 (2x+1)dx = x^2 + x|_0^5 = 30$, f(c) = 2c + 1, 30 = (2c + 1)·5 , $c = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

16. Sin efectuar el cálculo de la integral indefinida, calcula f'(x) si $f(x) = \int_2^{e^x}\frac{dt}{lnt}$

La función $g(t) = \frac{1}{lnt}$ es continua en [2,b] , $g(x) = e^x$ es derivable,

Por el teorema fundamental del cálculo integral:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(e^x)}\cdot e^x$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1.

Sabiendo que $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ y $\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$, calcula:

1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$

2) $\int \frac{4}{x^5} dx = \int 4x^{-5} dx = 4 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} = \frac{-1}{x^4} + C$

3) $\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C$

4) $\int 37 dx = 37x + C$

5) $\int 6x^7 dx = 6 \cdot \frac{x^8}{8} + C$

6) $\int 5x^{\frac{1}{4}} dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} = 4\sqrt[4]{x^5} + C$

7) $\int 5 \cdot \sqrt{x^3} dx = \int 5x^{\frac{3}{2}} dx = 5 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = 2\sqrt{x^5} + C$

8) $\int (3 - 2x - x^4) dx = 3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + C = 3x - x^2 - \frac{x^5}{5} + C$

9) $\int (2x^5 - 5x + 3) dx = \frac{2x^6}{6} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

10) $\int (2 + 3x^3)^2 dx = \int 4 + 9x^6 + 12x^3 dx = 4x + 9\frac{x^7}{7} + 12\frac{x^4}{4} + C = 4x + \frac{9x^7}{7} + 3x^4 + C$

11) $\int (2 \cdot (x^2 + 2)^3 dx = \int 2 \cdot ((x^2)^3 + (3x^2)^2 \cdot 2 + 3x^2 \cdot 2^2 + 2^3) dx = \int 2 \cdot (x^6 + 18x^4 + 12x^2 + 8) dx =$

$\int (2x^6 + 36x^4 + 24x^2 + 16) dx = 2 \cdot \frac{x^7}{7} + 36 \cdot \frac{x^5}{5} + 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 16x + C$

12) $\int (1 - x^3)^2 dx = \int 1 - 2x^3 + (x^3)^2 dx = x - 2 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} + C$

13) $\int \frac{x^3 - x + 2}{x^3} dx = \int \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} dx - \int \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} dx + \int \frac{2}{x^3} dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x^3} dx = \int (1 - x^{-2} + 2x^{-3}) dx =$

$= x + \frac{x^{-1}}{1} + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = x + \frac{x^{-1}}{1} - x^{-2} + C$

14) $\int (-4x^{\frac{2}{3}} + 2x) dx = -4 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} + C = -\frac{12X^{\frac{5}{3}}}{5} + x^2 + C$

15) $\int (3a - \frac{1}{3e^2} + 2x^a) dx = (3a - \frac{1}{3e^2})x + 2\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$

16) $\int -\frac{3}{x^3} + 2 - \frac{3}{\sqrt{x}} dx = \int -3x^{-3} + 2 - 3x^{\frac{-1}{2}} dx = -3\frac{x^{-2}}{-2} + 2x - 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$

$= \frac{3}{2x^2} + 2x - 6\sqrt{x} + C$

17) $\int(3x^5 - \frac{4}{3x^2} + 2\sqrt[5]{x^2})dx = \frac{3x^6}{6} - 12\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 2\cdot\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{x^6}{2} - \frac{12}{x} + \frac{10x^{\frac{7}{5}}}{7} + C$

18) $\int(1-x)\sqrt{x}dx = \int\sqrt{x} - x\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

19) $\int\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}dx = \int\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}dx + \int\frac{5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}dx - \int\frac{4}{x^2}dx = \int x\,dx + \int 5\,dx - \int 4x^{-2}dx =$

$= \frac{x^2}{2} + 5x - 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4}{x} + C$

20) $\int(5e^x + \frac{2x^3-3x^2+5}{4x^2})dx = \int 5e^x dx + \int\frac{2x^{\cancel{3}}}{4\cancel{x^2}}dx - \int\frac{3\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}}dx + \int\frac{5}{4x^2}dx =$

$= \int 5e^x dx + \int\frac{2x}{4}dx - \int\frac{3}{4}dx + \int\frac{5x^{-2}}{4}dx \quad = 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5x^{-1}}{4} =$

$= 5e^x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{4x} + C$

21) $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx \quad = \int(x^2+2x+1)\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C =$
$\frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + C$

22) $\int(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}})\,dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x + 2x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{4} + \frac{2x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{4} + 4\sqrt{x} + C$

23) $\int\sqrt{x}\,(x^3+1)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}\right)(x^3+1)dx = \int\left(x^{\frac{7}{2}}\right) + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{x^{9/2}}{9/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C =$

$= \frac{2\sqrt{x^9}}{9} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

24) $\int\left(\sqrt{x^5} - \frac{2}{3\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{2x^{\frac{-1}{2}}}{3}\right)dx = \frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{2x^{1/2}}{3\cdot 1/2} + C = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} - \frac{4\sqrt{x}}{3} + C$

25) $\int\sqrt{x}\,(3-5x)dx \quad = \int(x^{\frac{1}{2}})\,(3-5x)dx = \int\left(3x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}}\right)dx \quad = \frac{3x^{3/2}}{3/2} - \frac{5x^{5/2}}{5/2} + C =$

$= 2\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x^5} + C$

26) $\int\frac{(x+1)+(x-2)}{\sqrt{x}}dx \qquad \int(x^2+x-2)\left(x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{-1}{2}}\right)dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{2x^{1/2}}{1/2} +$
$C = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 4\sqrt{x} + C$

27) $\int(3x+4)^2\,dx = \int 3(3x+4)^2dx = \frac{(3x+4)^3}{3\cdot 3} + C = \frac{(3x+4)^3}{9} + C$

28) $\int(3x-7)^4dx = \frac{1}{3}\int 3(3x-7)^4dx = \frac{(3x-7)^5}{3\cdot 5} + C = \frac{(3x-7)^5}{15} + C$

29) $\int x\,(x^2-4)^3dx \quad = \frac{1}{2}\int 2x(x^2-4)^3dx = \frac{(x^2-4)^4}{2\cdot 4} + C = \frac{(x^2-4)^4}{8} + C$

Textos Marea Verde

30. $\int$ $\mathbf{3x\,(x^2+2)^3\,dx} = \frac{3}{2}\int 2x\,(x^2+2)^3 dx = \frac{3(x^2+2)^4}{2\cdot 4} + C = \frac{3(x^2+2)^4}{8} + C$

31. $\int$ $\mathbf{(x^3+2)^2 x^2\ \ dx} = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^2 3x^2 dx = \frac{(x^3+2)^3}{3\cdot 3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{9} + C$

32. $\int$ $\mathbf{(x^3+3)\,x^2\,dx} = \frac{1}{3}\int (x^3+3)3x^2 dx = \frac{(x^3+3)^2}{3\cdot 2} + C = \frac{(x^3+3)^2}{6} + C$

33. $\int$ $\mathbf{(x-2)^{3/2} dx} = \frac{2\sqrt{(x-2)^5}}{5} + C$

34. $\int$ $\mathbf{(a\ +\ x)^3\,dx} = \frac{(a+x)^4}{4} + C$

35. $\int$ $\mathbf{[(x+2)^3 - (x+2)^2]\,dx} = \frac{(x+2)^4}{4} - \frac{(x+2)^3}{3} + C$

36. $\int \mathbf{\sqrt{3x+12}\,dx} = \frac{1}{3}\int 3(3x+12)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(3x+12)^{3/2}}{3\cdot 3/2} + C = \frac{2\sqrt{(3x+12)^3}}{9} + C$

37. $\int$ $\mathbf{\frac{dx}{\sqrt{x+3}}} = \int (x+3)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{(x+3)^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x+3} + C$

38. $\int$ $\mathbf{\frac{dx}{(x-1)^3}} = \int (x-1)^{-3} dx = \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x-1)^2} + C$

39. $\int$ $\mathbf{(x^2+x)^4\,(2x+1)\,dx} = \frac{(x^2-x)^5}{5} + C$

40. $\int$ $\mathbf{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2 dx}\ = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{2(1+\sqrt{x})^3}{3} + C$

41. $\int \mathbf{\frac{x^3}{(x^4-1)^2}\,dx} = \int x^3(x^4-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(x^4-1)^{-2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(x^4-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{(x^4-1)^{-1}}{-4} + c =$
$\frac{1}{4(x^4-1)} + c$

42. $\int \mathbf{\frac{x}{(x^2+4)^3}\,dx} = \int x(x^2+4)^{-3} dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+4)^{-3} dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+4)^{-2}}{-2} + c = \frac{(x^2+4)^{-2}}{-4} + c =$
$-\frac{1}{4(x^2+4)^2} + c$

43. $\int \mathbf{x\sqrt{x^2-7}dx} = \int x(x^2-7)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2-7)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{(x^2-7)^{\frac{3}{2}}}{3} + c =$
$\frac{\sqrt{(x^2-7)^3}}{3} + c$

44. $\int \mathbf{(x-1)(x^2-2x+3)^4\,dx} =$

$\frac{1}{2}\int (2x-2)(x^2-2x+3)^4\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-2x+3)^5}{5} + c = \frac{(x^2-2x+3)^5}{10} + c$

45. $\int \mathbf{\frac{3x}{\sqrt{1+7x^2}}dx} = \int 3x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$

$\frac{3}{14}\int 14x(1+7x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{14}\cdot\frac{(1+7x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3\sqrt{1+7x^2}}{7} + c$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

46. $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^2} dx = \int 8x^2\,(x^3+2)^{-2}dx =$

$\frac{8}{3}\int 3x^2\,(x^3+2)^{-2}dx = \frac{8}{3}\cdot\frac{(x^3+2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{8}{3(x^3+2)} + c$

47. $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{x^2+3}} dx = \int 3x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\int 2x(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}\,dx =$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{(x^2+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{9\sqrt[3]{(x^2+3)^2}}{4} + c$

48. $\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \int x(1-x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{4} + c$

49. $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+5}} dx = \int x^2(x^3+5)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^2+5)^{-\frac{1}{4}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+5)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{4\sqrt[4]{(x^3+5)^3}}{9} + c$

50. $\int x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}}\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3-1)^{\frac{3}{5}}dx =$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3-1)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5\sqrt[5]{(x^3-1)^8}}{24} + c$

51. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx = \int\sqrt{x^2(1-2x^2)}\,dx = \int x\sqrt{1-2x^2}dx = \int x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{1}{4}\int -4x(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$

$-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{6} + c$

52. $\int (e^x+1)^3 e^x dx = \frac{(e^x+1)^4}{4} + c$

53. $\int sen^3x(\cos x)\,dx = \frac{sen^4x}{4} + c$

54. $\int x(\cos^4x^2)sen\,x^2\,dx = -\frac{1}{2}\int 2x\,(\cos^4x^2)(-sen\,x^2)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^5x^2}{5} + c = -\frac{\cos^5x^2}{10} + c$

55. $\int \frac{x\cdot ln(x^2+3)}{x^2+3}\,dx = \int ln\,(x^2+3)\cdot\frac{x}{x^2+3}dx =$

$\frac{1}{2}\int \ln(x^2+3)\cdot\frac{2x}{x^2+3}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{ln^2|x^2+3|}{2} + c = \frac{ln^2|x^2+3|}{4} + c$

56. $\int \frac{sen\,x}{\cos^3x} dx = \int \cos^{-3}x(sen\,x)dx =$

$-1\int \cos^{-3}x(-sen\,x)dx = -1\cdot\frac{\cos^{-2}x}{-2} + c = \frac{\cos^{-2}x}{2} + c = \frac{1}{2\cos^2x} + c$

57. $\int \frac{e^x}{2e^x-3} dx = \frac{1}{2}\int\frac{2e^x}{2e^x-3}dx = \frac{1}{2}\cdot ln|2e^x-3| + c$

58. $\int \boldsymbol{tg^5x(sec^2x)dx} = \frac{tg^6x}{6} + c$

59. $\int \frac{\boldsymbol{sec^2 3x}}{\boldsymbol{tg\, 3x}} \boldsymbol{dx} = \frac{1}{3}\int \frac{3\cdot sec^2 3x}{tg\, 3x} dx = \frac{1}{3} \cdot ln\,|tg\, 3x| + c$

60. $\int \frac{\boldsymbol{ln(x)}}{\boldsymbol{3x}} \boldsymbol{dx} = \frac{1}{3}\int ln\,|x| \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{ln^2|x|}{2} + c = \frac{ln^2|x|}{6} + c$

2. Sabiendo que

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ y $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$, calcula:

1) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x+2}} = \int \frac{1}{x+2} dx = \ln|x+2| + C$

2) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{2x-3}} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

3) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x-1}} = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$

4) $\int \frac{\mathbf{xdx}}{\mathbf{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

5) $\int \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1-2x^3}} \mathbf{dx} = \frac{-1}{6}\int \frac{-6x^2}{1-2x^3} = \frac{-1}{6}\ln|2x^3-1| + C$

6) $\int \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{1-x^3}} \mathbf{dx} = \frac{-1}{3}\int \frac{3x^2}{1-x^3} dx = \frac{-1}{3}\ln|x^3-1| + C$

7) $\int \frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{x^2+2}} \mathbf{dx} = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + C$

8) $\int \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3x+5}} \mathbf{dx} = \frac{4}{3}\int \frac{3}{3x+5} dx = \frac{4}{3}\ln|3x+5| + C$

9) $\int \frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x^2+2x+2}} \mathbf{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2| + C$

10) $\int \left(\sqrt{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right) \mathbf{dx} = \int \sqrt{x}dx + \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln|x| + C$

11) $\int \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{x^2}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{x}} + \sqrt{\mathbf{x}}\right) \mathbf{dx} = \int 3x^{-2} + \frac{2}{x} + x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{3x^{-1}}{-1} + 2\ln(x) + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -3x^{-1} + 2\ln(x) + \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

12) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{xlnx}} = \ln(|\ln|x||) + C$

13) $\int \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x}}(\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{x}})} = \int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx = -2\int \frac{-1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx = -\,2\ln(|1-\sqrt{x}|) + C$

14) $\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x-1}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x+1}} \mathbf{dx} = \frac{1}{2}(\int \frac{2}{(2x-1)} dx - \int \frac{2}{(2x-1)} dx) = \frac{1}{2}\ln(|2x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|2x+1|) + C$

15) $\int \frac{\mathbf{e^x}}{\mathbf{e^x+1}}\mathbf{dx} = \ln(e^x + 1) + C$

16) $\int \frac{\mathbf{e^{2x}}}{\mathbf{e^{2x}+3}}\mathbf{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3}dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 3) + C$

17) $\int \mathbf{tan(x)\ dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$

18) $\int \frac{\mathbf{cos(x)}}{\mathbf{sin(x)}}\mathbf{dx} = \ln(|\sin(x)|) + C$

19) $\int \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{x\ln(x)}}\mathbf{dx} = 5\ln(|\ln(x)|) + C$

20) $\int \frac{\mathbf{sin(x)+cos(x)}}{\mathbf{cos(x)}}\mathbf{dx} = \int \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\cos(x)}\right)dx = \int \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + 1\right)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx + \int 1dx =$
$-\ln(|\cos(x)|) + x + C$

21) $\int \frac{\mathbf{2\sin(x)\cos(x)}}{\mathbf{1+\sin(x^2)}}\mathbf{dx} = \ln(|1 + \sin(x^2)|) + C$

22) $\int \frac{\mathbf{sin(x)-cos(x)}}{\mathbf{sin(x)+cos(x)}}\mathbf{dx} = -\ln(|\sin(x) + \cos(x)|) + C$

23) $\int \mathbf{x\cot x^2\ dx} = \frac{1}{2}\int 2x\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}dx = \frac{\ln(|\sin x^2|)}{2} + C$

3. Si $\int \mathbf{e^x\,dx = e^x + C,}$ $\quad \int \mathbf{e^{f(x)}\cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C,}$

$\int \mathbf{a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$ **y** $\int \mathbf{a^{f(x)}\cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C,}$ **calcula:**

1. $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$
2. $\int a^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4(a^{4x})dx = \frac{a^{4x}}{4\ln a} + C$
3. $\int e^{-x}dx = -1\int(-1)(e^{-x})dx = \frac{-1}{e^x} + C$
4. $\int 4e^{3x}dx = 4(\frac{1}{3})\int 3(e^{3x})dx = \frac{4e^{3x}}{3} + C$
5. $\int(3x^2\cdot e^{x^3+2})\,dx = e^{x^3+2} + C$
6. $\int(4e^{4-x})dx = 4\cdot(-1)\int(-1)(e^{4-x})dx = -4(e^{4-x}) + C$
7. $\int(x^2e^{x^3})\,dx = \frac{1}{3}\int[3x^2(e^{x^3})]dx = \frac{e^{x^3}}{3} + C$
8. $\int(e^x + 1)^2\,dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(1) + 1^2]dx = \int e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx =$

$= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx + \int 2e^x dx + \int 1dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + C$

9. $\int\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \int(e^x + e^{-x})^2dx = \int[(e^x)^2 + 2(e^x)(e^{-x}) + (e^{-x})^2]dx$

$= \int e^{2x}\,dx + \int 2dx + \int e^{-2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} + C$

10. $\int (e^x + x^6)^2 dx = \int [(e^x)^2 + 2(e^x)(x^6) + (x^6)^2]dx =$

$= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + \int 2(e^x)(x^6)\,dx\ (por\ partes) + \int x^{12}dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x(x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720\,) + \frac{x^{13}}{13} + C$ -

11. $\int e^{-x^2+2}\,xdx = \frac{-1}{2}\int e^{-x^2+2}\,(-2x)dx = \frac{-\left(e^{-x^2+2}\right)}{2} + C$

12. $\int \frac{e^{\ln x}}{x}dx = \int \frac{x}{x}dx = \int dx = x + C$

13. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^3}dx = \frac{-1}{2}\int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3}dx = \frac{-1}{2}e^{\frac{1}{x^2}} + C$

14. $\int xe^{\sin x^2}\cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,e^{\sin x^2}\cos x^2\,dx = \frac{e^{\sin x^2}}{2} + C$

15. $\int (e^{3\cos 2x}\sin 2x)dx = \frac{-1}{6}\int(-6)\,(e^{3\cos 2x}\sin 2x)dx = \frac{-e^{3\cos 2x}}{6} + C$

16. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}dx = \frac{1}{5}\cdot 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{5} + C$

17. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -\int e^{\cos x}\,(-\sin x)\,dx = -e^{\cos x} + C$

18. $\int \left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{2e} - e^{x-3}\right)dx = \frac{\sqrt{1+e^2}}{2e}x - e^{x-3} + C$

19. $\int e^{\tan 2x}\sec^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2e^{\tan 2x}\sec^2 2x\,dx = \frac{e^{\tan 2x}}{2} + C$

20. $\int \frac{2x}{3}(3^{3+5x^2})dx = \frac{2}{3}\int x(3^{3+5x^2})dx = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right)\int 10x(3^{3+5x^2})dx = \frac{1}{15}\left(\frac{3^{3+5x^2}}{\ln 3}\right) + C$

$$\int \frac{x}{2}(2^{3-5x^2})dx = \frac{1}{2}\int x(2^{3-5x^2})dx = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{10})\int(-10x)(2^{3-5x^2})dx = \frac{-1}{20}(\frac{2^{3-5x^2}}{\ln 2}) + C$$

4. Sabiendo que $\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\quad \int f'(x)\cdot\sin f(x) = -\cos f(x) + C,$

$\int \cos x dx = \sin x + C \quad y \quad \int \cos f(x)\cdot f'(x) = \sin f(x) + C$ **calcula:**

1. $\int \sin(2x+8)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+8)2dx = \frac{-\cos(2x+8)}{2} + C$
2. $\int \sin\frac{x}{2}dx = 2\int \sin(\frac{x}{2})(\frac{1}{2})dx = -2\cos\frac{x}{2} + C$
3. $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int 3(\cos(3x)dx) = \frac{\sin 3x}{3} + C$
4. $\int x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2x(\sin x^2)\,dx = \frac{-\cos x^2}{2} + C$
5. $\int (\frac{3\sin x - 2\cos x}{4})dx = \frac{1}{4}\int(3\sin x - 2\cos x)dx = \frac{-3\cos x}{4} - \frac{\sin x}{2} + C$
6. $\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(\sin 2x)dx = \frac{-\cos 2x}{2} + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

7. $\int e^x \cos e^x \, dx = \sin e^x + C$

8. $\int x\cos(2x^2)\cdot\sin(2x^2)dx = \frac{1}{4}\int 4x\cos(2x^2)\cdot\sin(2x^2)dx = -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + C$

9. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{x}\cdot\sin(lnx)\,dx = -\cos(lnx) + C$

7. Si

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int(1+\mathrm{tg}^2 x)dx = \mathrm{tg}\, x + C$ y $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \int[1+\mathrm{tg}^2 f(x)]\cdot f'(x)dx = \mathrm{tg}\, f(x) + C$, calcula:

1) $\int x(1+\tan x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int 2x(1+\tan x^2)\,dx = \frac{1}{2}tan(x^2) + \mathrm{C}$

2) $\int(1+\tan x)^2\,dx = \int(1+tan^2x+2\tan x)dx = \int((1+tan^2x)+2\tan x)dx = \tan x - 2\int\frac{-\sin x}{\cos x}dx = \tan x - 2\ln|\cos x| + \mathrm{C}$

3) $\int tan^2\, 3x\,dx = \int(1-1+tan^2\,3x)dx = \frac{1}{3}\int 3(1+tan^2\,3x)\,dx - \int 1\,dx =$

$= \frac{1}{3}\cdot\tan 3x - x + \mathrm{C}$

6. Halla el valor de las siguientes integrales, usando un cambio de variable:

1) $\int(2+5x)^4dx = \int t^4\cdot\frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\int t^4dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^5}{5} = \frac{t^5}{25} = \frac{(2+5x)^5}{25} + c$

t = 2+5x , dt = 5 dx → $dx = \frac{1}{5}dt$

2) $\int(3+4x)^6dx = \int t^6\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int t^6dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{t^7}{7} = \frac{t^7}{28} = \frac{(3+4x)^7}{28} + c$

t = 3+4x , dt = 4x dx → $dx = \frac{1}{4}dt$

3) $\int 6x(3+x^2)^5dx = \int 6x\cdot t^5\cdot\frac{1}{2x}dt = \int 3t^5dt = 3\int t^5dt = \frac{3t^6}{6} = \frac{t^6}{2} = \frac{(3+x^2)^6}{2} + c$

t = $3+x^2$, dt = 2x dx → $dx = \frac{1}{2x}dt$

4) $\int\left[\frac{3}{5+4x} + \frac{3}{(5+4x)^3}\right]dx = \int\left[\frac{3}{t}\cdot\frac{1}{4}\right]dt + \int\left[\frac{3}{t^3}\cdot\frac{1}{4}\right]dt = \int\left[\frac{3}{4t}\right]dt + \int\left[\frac{3}{4t^3}\right]dt =$

$\frac{3}{4}\int\left[\frac{1}{t}\right]dt + \frac{3}{4}\int\left[\frac{1}{t^3}\right] = \frac{3}{4}\int\left[\frac{1}{t}\right]dt + \frac{3}{4}\int\left[t^{-3}\right]dt = \frac{3}{4}\ln|t| + \frac{3}{4}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} = \frac{3}{4}\ln|t| - \frac{3t^{-2}}{8} =$

$\frac{3}{4}\ln|t| - \frac{3}{8t^2} = \frac{3}{4}\ln|5+4x| - \frac{3}{8(5+4x)^2} + c$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

t = 5+4x , dt = 4 dx→$dx=\frac{1}{4}dt$

5) $\int(\sqrt{3+2x}+\sqrt[3]{3+2x})dx$=$\int(\sqrt{t}+\sqrt[3]{t})\cdot\frac{1}{2}dt$=$\frac{1}{2}\int(t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{3}})dt$=$\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$=

$=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{3t^{\frac{4}{3}}}{8}$=$\frac{\sqrt{t^3}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{t^4}}{8}$=$\frac{\sqrt{(3+2x)^3}}{3}+\frac{3\sqrt[3]{(3+2x)^4}}{8}+c$

t = 3+2x , dt = 2 dx→$dx=\frac{1}{2}dt$

6) $\int(\frac{e^x-4}{e^{2x}})dx$=$\int(\frac{t-4}{t^2})\cdot\frac{1}{t}dt$=$\int(\frac{t-4}{t^3})dt$=$\int(\frac{t}{t^3})dt-\int(\frac{4}{t^3})dt$=

$=\int(\frac{1}{t^2})dt-4\int(\frac{1}{t^3})dt$=$\int t^{-2}dt-4\int t^{-3}dt$=$\frac{t^{-1}}{-1}-\frac{4t^{-2}}{-2}$=$\frac{-1}{t}+\frac{2}{t^2}$=$\frac{-1}{e^x}+\frac{2}{e^{2x}}+c$

$t=e^x$, $dt=e^x dx$→$dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t}dt$

7) $\int\sin^3(x)\cdot\cos(x)dx$=$\int t^3\cdot\cos(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}dt$=$\int t^3dt$=$\frac{t^4}{4}$=$\frac{\sin^4(x)}{4}+c$

$t=\sin(x)$, $dt=\cos(x)dx$→$dx=\frac{1}{\cos(x)}dt$

8) $\int(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})dx$=$\int(\frac{\sin(x)}{t})\cdot\frac{-1}{\sin(x)}dt$=$\int\frac{-1}{t}dt=-\ln|t|$=$-\ln|\cos(x)|+c$

$t=\cos(x)$, $dt=-\sin(x)dx$→$dx=\frac{-1}{\sin(x)}dt$

9) $\int(\frac{\cos(x)}{\sin^4(x)})dx$=$\int(\frac{\cos(x)}{t^4})\cdot\frac{1}{\cos(X)}dt$=$\int(\frac{1}{t^4})dt$=$\int t^{-4}dt$=$\frac{t^{-3}}{-3}$=$\frac{-1}{3t^3}$=$\frac{-1}{3\sin^3(x)}+c$

$t=\sin(x)$, $dt=\cos(x)dx$→$dx=\frac{1}{\cos(x)}dt$

10) $\int x\sqrt{x^2+4}dx$=$\int x\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2x}dt$=$\int(\frac{\sqrt{t}}{2})dt$=$\int(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{2})dt$=$\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot 2}$=$\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{6}$=$\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}$=$\frac{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}{3}+c$

$t=x^2+4$, dt = 2x dx→$dx=\frac{1}{2x}dt$

11) $\int(\frac{e^x+3}{e^{2x}})dx$=$\int(\frac{t+3}{t^2}\cdot\frac{1}{t})dt$=$\int(\frac{t+3}{t^3})dt$=$\int(\frac{t}{t^3})dt+\int(\frac{3}{t^3})dt$=

$\int t\cdot t^{-3}dt+\int 3t^{-3}dt$=$\int t^{-2}dt+\int 3t^{-3}dt$=$\frac{t^{-1}}{-1}+\frac{3t^{-2}}{-2}$=$\frac{-1}{t}-\frac{3}{2t^2}$=$\frac{-1}{e^x}-\frac{3}{2e^{2x}}+c$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$t = e^x \quad , \quad dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$

12) $\int \left(\frac{e^{-x}+2}{e^{3x}}\right) dx = \int \left(\frac{\frac{1}{t}+2}{t^3} \cdot \frac{1}{t}\right) dt = \int \left(\frac{1+2t}{t^5}\right) dt = \int \left(\frac{1}{t^5}\right) dt + \int \left(\frac{2t}{t^5}\right) dt =$

$$= \int t^{-5} dt + \int 2t^{-4} dt = \frac{t^{-4}}{-4} + \frac{2t^{-3}}{-3} = \frac{e^{-4x}}{-4} - \frac{2e^{-3x}}{3} + c$$

$$t = e^x \ , \ dt = e^x dx \rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt \ ; \ e^{-x} = t^{-1} = \frac{1}{t}$$

13) $\int \frac{(x-2\sqrt{x})^2}{3x^2} \mathbf{dx}$

$$\int \frac{(x-2\sqrt{x})^2}{3x^2} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{x^2-4\sqrt{x}+4x}{x^2}\right) dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2} + \frac{4x}{x^2}\right) dx = \frac{1}{3}\left(\int 1dx - 4\int x^{-\frac{3}{2}} dx + 4\int \frac{1}{x} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x - 4\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 4ln|x|\right) + C = \frac{1}{3}\left(x + \frac{8}{\sqrt{x}} + 4ln|x|\right) + C$$

14) $\int \frac{(2+3\sqrt{x})^2}{4x} \mathbf{dx}$

$$\int \frac{(2+3\sqrt{x})^2}{4x} dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{2^2+12\sqrt{x}+9x}{x}\right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{4}{x} - \frac{12\sqrt{x}}{x} + \frac{9x}{x}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\int \frac{4}{x} dx + 12\int x^{-\frac{1}{2}} dx + \int 9dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4ln|x| + 12\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 9x\right) + C = ln|x| + 6\sqrt{x} + \frac{9x}{4} + C$$

15) $\int \mathbf{sen}\sqrt{x}\, \boldsymbol{dx}$; $x = t^2$; $dx = 2tdt$; $t = \sqrt{x}$

$\int sen\sqrt{t^2} 2tdt = \int sent2tdt$ u = 2t , du = 2dt ; dv = sentdt , v = -cost

$$\int sent2tdt = -2tcost + \int cost2dt = -2tcost + 2sent + C = 2\sqrt{x}cos\sqrt{x} + 2sen\sqrt{x} + C$$

7. Halla el valor de las siguientes integrales, usando el método de integración por partes.

1) **∫3x cosx dx =** (dv = cos x dx u = 3x ; v = sen x du = 3 dx)

=3x · (sen x) - ∫ sen x · 3 dx = 3x · sen x + 3 · cos x + C

2) ∫x² · sen x dx = (dv = sen x dx u = x² ; v = -cos x du = 2x dx)

=x² · (-cos x) - ∫ (- cos x)· 2x dx = (dv = -cos x dx u = 2x ; v = - sen x du = 2 dx)

= (x² · (- cos x)) – [2x · (- sen x) - ∫ (- sen x) · 2 dx]=

Textos Marea Verde

= x² · (- cos x) + 2x · (sen x) - 2 · (-cos x) + C =
= - x² cos x + 2x sen x + 2 cos x + C

3) $\int x^2 \ln x\, dx$ = (dv = x² dx u = lnx ; v = $\frac{x^3}{3}$ du = $\frac{1}{x}$)

= lnx · $\frac{x^3}{3}$ - $\int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x}$ dx = ln x · $\frac{x^3}{3}$ - $\int \frac{x^3}{3x}$ dx =
= ln x · $\frac{x^3}{3}$ - $\frac{1}{3} \int$ x² dx = ln x · $\frac{x^3}{3}$ - $\frac{x^3}{9}$ + C

4) $\int \sqrt{x} \cdot \ln x\, dx$ = (dv = $\sqrt{x}$ dx = $x^{\frac{1}{2}}$ dx u = lnx; v = =$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ du = $\frac{1}{x}$dx)

= ln x · $\frac{x^{\frac{3}{3}}}{\frac{3}{2}}$ - $\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}$ dx = ln x · $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ - $\int \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3}$ dx =
= ln x · $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ - $\frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}}$ dx = ln x · $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ - $\frac{2}{3} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ = ln x · $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ - $\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9}$ + C

5) $\int \frac{\ln x}{x^2}$ **dx** = (dv = x^{-2} dx u = lnx ; v = $\frac{x^{-1}}{-1}$ du = $\frac{1}{x}$ dx)

= ∫ ln x · x^{-2} dx = ln x · $\frac{x^{-1}}{-1}$ - $\int \frac{x^{-1}}{-1} \cdot \frac{1}{x}$ dx = ln x · $\frac{x^{-1}}{-1}$ - $\int \frac{x^{-1}}{-x}$ dx =
= ln x · $\frac{x^{-1}}{-1}$ + $\int \frac{1}{x^2}$ dx = - ln x $\frac{1}{x}$ + $\int \frac{1}{x^2} dx$ = - ln x $\frac{1}{x}$ + $\frac{x^{-1}}{-1}$ + C =
= - ln x $\frac{1}{x}$ – $\frac{1}{x}$ + C

6) $\int 2e^x \cdot \cos x\, dx$ =

Cambios 1	Cambios 2
dv = cos x dx v = sen x	dv = sen x v = - cos x
u = $2e^x$ du = $2e^x$dx	u = $2e^x$ du = $2e^x\, dx$

(cambios 1) = $2e^x$ · sen x - ∫ sen x · $2e^x$dx =

(cambios 2) = $2e^x$ · sen x – [$2e^x$ · (- cos x) - ∫(- cos x) · $2e^x\, dx$)]=

= $2e^x$ · sen x – [$2e^x$ · (- cos x) + ∫cos x · $2e^x$ dx] =

=$2e^x$ · sen x + $2e^x$ · cos x - ∫cos x · $2e^x$ dx] (haciendo ∫cos x · $2e^x dx$ = I)

I = $2e^x$ · sen x + $2e^x$ · cos x - I

2I = $2e^x$ · sen x + $2e^x$· cos x

I = e^x · sen x - e^x· cos x + C

7) $\int 2e^x \cdot \mathrm{senx}\, dx$

- Fórmula: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$
- $u = 2e^x \rightarrow du = 2e^x dx$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

- $dv = senxdx \rightarrow v = \int senx\, dx = -cosx$

$\int 2e^{x} \cdot \text{senx dx} = 2e^{x} \cdot (-\text{cosx}) - \int -\cos x \cdot 2e^{x}dx = 2e^{x} \cdot (-\text{cosx}) + \int \cos x \cdot 2e^{x}dx =$

Repetimos el método de integración por partes:

- $u = 2e^{x} \rightarrow du = 2e^{x}dx$
- $dv = cosxdx \rightarrow v = \int cosx\, dx = senx$

$= 2e^{x} \cdot (-cosx) + 2e^{x} \cdot senx - \int senx \cdot 2e^{x}dx$

Hacemos $\int \text{senx} \cdot 2e^{x} = I$ de donde,

$I = 2e^{x} \cdot (-cosx) + 2e^{x} \cdot senx - I$

$2I = 2e^{x} \cdot (-cosx) + 2e^{x} \cdot senx$

$I = e^{x} \cdot (-cosx) + e^{x} \cdot senx$

$I = e^{x} \cdot (senx - cosx) + C$

8) $\int \boldsymbol{e^{x} \cdot cos3x\, dx}$

- $u = e^{x} \rightarrow du = e^{x}dx$
- $dv = cos3xdx \rightarrow v = \int cos3x\, dx = \frac{1}{3} \cdot sen3x$

$\int e^{x} \cdot \text{cos3x dx} = \frac{e^{x}}{3}\text{sen3x} - \int \frac{e^{x}}{3}\text{ sen3x dx} = \frac{e^{x}}{3}\text{sen3x} - \frac{1}{3}\int e^{x}\text{ sen3x dx} =$

Repetimos el método de integración por partes:

- $u = e^{x} \rightarrow du = e^{x}dx$
- $dv = sen3xdx \rightarrow v = \int sen3x\, dx = -\frac{1}{3}cos3x$

$= \frac{e^{x}}{3}sen3x - \frac{1}{3}(-\frac{e^{x}}{3} \cdot cos3x - \frac{1}{3} \cdot \int e^{x}(-cos3x)\, dx)$

Hacemos $\int e^{x}\text{cos3x dx} = I$, de donde,

$I = \frac{e^{x}}{3}sen3x + \frac{e^{x}}{9}cos3x - \frac{1}{9} \cdot I$

$\frac{10}{9} \cdot I = \frac{e^{x}}{3} \cdot sen3x + \frac{e^{x}}{9}cos3x$

$I = \frac{e^{x}}{10} \cdot \left(3sen3x + \frac{cos3x}{3}\right) + C$

9) $\int \boldsymbol{\frac{4-2\,x^{2}}{x} \cdot ln(x)dx}$

- $u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$
- $\text{dv} = \frac{4-2\,x^{2}}{x}\text{dx} \rightarrow \text{v} = \int \left(\frac{4}{x} - 2x\right)\text{dx} = 4 \cdot \ln(x) - x^{2}$

$\int \frac{4-2\,x^{2}}{x} \cdot ln(x)\, dx = \ln(x) \cdot (4 \cdot \ln(x) - x^{2}) - \int \frac{1}{x} \cdot (4\ln(x) - x^{2})dx =$

Textos Marea Verde

$= \ln(x) \cdot (4 \cdot \ln(x) - x^2) - \int \frac{4}{x} \cdot \ln(x)\, dx + \int x dx =$

$= \ln(x) \cdot (4 \cdot \ln(x) - x^2) + \frac{x^2}{2} - 4 \int \frac{\ln(x)}{x} dx =$ $\left[4 \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx = 4 \frac{ln^2(x)}{2}\right]$

$= 4ln^2(x) - x^2 \ln(x) + \frac{x^2}{2} - \frac{4ln^2(x)}{2} = 2ln^2(x) - x^2 \ln(x) + \frac{x^2}{2} + C$

8. Halla el valor de las siguientes integrales racionales:

1) $\int \frac{2}{x^2+1} dx$

Las raíces del denominador son raíces complejas.

$x^2 + 1 = 0;\quad x = \pm i$ luego:

$\int \frac{2}{x^2+1} dx = 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = 2arctan(x) + C$

2) $\int \frac{3}{2x^2+2} dx$

Las raíces del denominador son raíces complejas.

$2x^2 + 2 = 0;\quad x = \pm i$ luego:

$\int \frac{3}{2x^2+2} \mathrm{dx} = \int \frac{3}{2(x^2+1)} \mathrm{dx} = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+1} \mathrm{dx} = \frac{3}{2} \mathrm{arctan(x)} + C = \frac{3\mathrm{arctan(x)}}{2} + C$

3) $\frac{3}{x-3} dx$

La raíz del denominador es una raíz real simple.

$x - 3 = 0;\quad x = 3$ luego:

$\int \frac{3}{x-3} dx = 3 \int \frac{1}{x-3} dx = 3ln|x-3| + C$

4) $\int \frac{2}{3x^2+3} dx$

$$\int \frac{2}{3x^2+3} dx = \int \frac{2}{3(x^2+1)} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{2}{3} \mathrm{arctan}(x) + C = \frac{2\mathrm{arctan}(x)}{3} + C$$

5) $\int \frac{5x}{x^2+3} dx$

$$\int \frac{5x}{x^2+3} dx = \frac{5}{3} \int \frac{3x}{(x^2+3)} dx = \frac{5}{3} \ln|x^2+3| + C$$

6) $\int \frac{3x-2}{x^2+1} dx$

$\int \frac{3x-2}{x^2+1} dx = \int \left(\frac{3x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1}\right) dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{3\ln|x^2+1|}{2} - 2\arctan(x) + C$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

7. $\int \frac{(2x-3)^2}{3x^2}dx$

$\int \frac{(2x-3)^2}{3x^2}dx = \int \frac{4x^2+9-12x}{3x^2}dx = \int \frac{4}{3}dx + \int \frac{-12x}{3x^2}dx + \int \frac{9}{3x^2}dx =$

$= \frac{4}{3}\int dx - 4\int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{4}{3}x - 4\ln|x| + 3\int x^{-2}dx =$

$= \frac{4}{3}x - 4\ln|x| + 3\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{4}{3}x - 4\ln|x| - \frac{3}{x} + C$

8. $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

Según la división euclídea, obtenemos:

C(x)=1 R(x)=1 Q(x)=x+1

$\int \frac{x+2}{x+1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \int 1dx + \int \frac{1}{x+1}dx = x + \ln|x+1| + C$

9. $\int \frac{x-1}{x+1}dx$

Según la división euclídea, obtenemos:

C(x)=1 R(x)=-2 Q(x)=x+1

$\int \frac{x-1}{x+1}dx = \int (1 + \frac{-2}{x+1})dx = \int 1dx + \int \frac{-2}{x+1}dx = x - 2\ln|x+1| + C$

10) $\int \frac{3x-1}{x+3}dx$;

Efectuando la división obtenemos: C(x): 3 R(x): -10 Q(x): $x+3$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

$$\int \frac{3x-1}{x+3}dx = \int 3\,dx + (-10)\int \frac{1}{x+3}dx;\ 3x - 10\ln(|x+3|) + C$$

11) $\int \frac{3x^3}{x^2-4}dx$; C(x): $3x$ R(x): $12x$ Q(x): x^2-4

$$\int \frac{3x^3}{x^2-4}dx = \int 3x\,dx + 6\int \frac{\frac{12x}{6}}{x^2-4}dx;\ \frac{3x^2}{2} + 6\ln(|x^2-4|) + C$$

12) $\int \frac{3x^3}{x^2-1}dx$; C(x): $3x$ R(x): $3x$ Q(x): x^2-1

$\int \frac{3x^3}{x^2-1}dx = \int 3x\,dx + \int \frac{3x}{x^2-1}dx;\ \int 3x\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{(x^2-1)}dx;\ \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln(|x^2-1|) + C$

13) $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx$; efectuando la división obtenemos C(x) = x; R(x) = 2; de donde

$$\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}dx = \int (x)dx + \int \frac{2}{x+2}dx = \int (x)dx + 2\int \frac{1}{x+2}dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x+2| + C$$

14) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx$; efectuando la división, C(x) = $x^2+6x+10$; R(x) = -25; de donde

$$\int \frac{x^3+4x^2-2x+5}{x-2}dx = \int (x^2+6x+10)dx + \int \frac{-25}{x-2}dx =$$

$$= \int (x^2+6x+10)dx - 25\int \frac{1}{x-2}dx = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 10x - 25\ln|x-2| + C$$

15) $\int \frac{2}{x^2-4}dx$; hacemos la descomposición en fracciones simples,

$\frac{2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ 2 = A(x+2) + B(x-2), sustituyendo por x = y x = -2 , $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{2}{(x-2)(x+2)}dx = \int \frac{A}{x-2}dx + \int \frac{B}{x+2}dx = \int \frac{1}{2(x-2)}dx + \int -\frac{1}{2(x+2)}dx = \int \frac{1}{2x-2}dx - \int \frac{1}{2x+2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C \quad = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

16) $\int \frac{3x+2}{x^2+3x}\,dx$

1. Se analizan las raíces del denominador: $x^2+3x=0; x(x+3)=0 \rightarrow x=0; x=-3$

2. Se escribe la descomposición en fracciones simples:
$$\frac{3x+2}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+3)}$$

3. Para hallar A y B, se sustituye la x por el valor de las raíces:

$3x+2 = A(x+3) + Bx$

$x=0 \rightarrow 2 = 3A \rightarrow A = \frac{2}{3}$

$x=-3 \rightarrow -7 = -3B \rightarrow B = \frac{7}{3}$

4. Se escribe la integral como suma de integrales:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+3x}\,dx = \int \frac{2/3}{x}\,dx + \int \frac{7/3}{(x+3)}\,dx = \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{7}{3}\ln|x+3| + C$$

17) $\int \frac{4x+3}{x^2-1}\,dx$

1. Se analizan las raíces del denominador: $x^2-1=0; x=\sqrt{1} \rightarrow x=1; x=-1$

2. Se escribe la descomposición en fracciones simples:
$$\frac{4x\ +3}{x^2-1}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}$$

3. Para hallar A y B, se sustituye la x por el valor de las raíces:

$$4x+3=A(x+1)+B(x-1)$$

$$x=1\rightarrow\ 7=2A\rightarrow A=\frac{7}{2}$$
$$x=-1\rightarrow -1=-2B\rightarrow B=\frac{1}{2}$$

4. Se escribe la integral como suma de integrales:

$$\int\frac{4x+3}{x^2-1}\,dx=\int\frac{7/2}{(x-1)}dx+\int\frac{1/2}{(x+1)}dx=\frac{7}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

18) $\int\frac{3x^2}{x^2+6x+9}dx$

1. Al ser el grado del polinomio del numerador igual que el del denominador, debemos realizar la división de estos, $3x^2:(x^2+6x+9)\rightarrow$ y obtenemos como cociente 3 y como resto $-18x-27$
   a. Obtenemos la siguiente integral: $\int 3dx+\int\frac{-18x-27}{x^2+6x+9}dx\rightarrow 3x+\int\frac{-18x-27}{x^2+6x+9}dx$
2. Con la nueva integral obtenida, realizamos el procedimiento habitual para integrales racionales:
   a. Igualamos el polinomio del divisor a cero: $x^2+6x+9=0\rightarrow x=-3$ (doble)
   b. Con las soluciones obtenidas calculamos: $\frac{-18x-27}{x^2+6x+9}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}\rightarrow$

   $-18x-27=A(x+3)^2+B(x+3)$

   Sustituimos x por un valor cualquiera:

   $x=-2\rightarrow 9=A+B$; $x=-1\rightarrow -9=4A+4B$

   Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido: $A=-\frac{27}{2}$; $B=\frac{45}{2}$

3. Gracias a este procedimiento hemos obtenido:

$$3x+\int\frac{\frac{-27}{2}}{x+3}\,dx+\int\frac{\frac{45}{2}}{(x+3)^2}dx=3x-\frac{27}{2}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{45}{2}\int\frac{dx}{(x+3)^2}=$$

$$3x-\frac{27}{2}ln|x+3|+\frac{45}{2}\cdot\frac{(x-3)^{-1}}{-1}=3x-\frac{27}{2}ln|x+3|-\frac{45}{2}\cdot\frac{1}{x+3}+C$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

19) $\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}dx$

1. Como el grado del polinomio del denominador es superior al del polinomio del numerador, utilizamos el procedimiento habitual para estos casos:
   a. Igualamos el polinomio del denominador a cero: $x^2-5x+6=0 \to x_1=3; x_2=2$
   b. Con las soluciones obtenidas calculamos:

   $\frac{x+2}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2} \to x+2=A(x-2)+b(x-3)$

   Sustituimos x por un valor cualquiera:

   $x=2 \to 4=-B \to B=-4;$ $x=3 \to 5=A$

2. Gracias a este procedimiento obtenemos:

   $\int \frac{5}{x-3}dx+\int \frac{-4}{x-2}dx=5ln|x-3|-4ln|x-2|+C$

20) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4}dx$

1. Como el grado del polinomio del denominador es superior al del polinomio del numerador, utilizamos el procedimiento habitual para estos casos:
   a. Igualamos el polinomio del divisor a cero: $x^2-4x+4=0 \to x=2$ (doble)
   b. Con las soluciones obtenidas calculamos:

   $\frac{3x-2}{x^2-4x+4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2} \to 3x-2=A(x-2)^2+B(x-2)$

   Sustituimos x por un valor cualquiera: $x=3 \to 7=A+B; x=1 \to 1=A-B$

   Resolvemos el sistema de ecuaciones obtenido: $A=4; B=3$

2. Gracias a este procedimiento obtenemos:

   $\int \frac{4}{x-2}dx+\int \frac{3}{(x-2)^2}dx=4ln|x-2|+3\cdot\frac{(x-2)^{-1}}{-1}=4ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C$

21) $\int \frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x}dx$

$\frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x}=\frac{3x+1}{x(x-3)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-1} \Longrightarrow \frac{3x+1}{x(x-3)(x-1)}=\frac{A(x-3)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-1)}$

$3x+1=(Ax-3A)(x-1)+Bx^2-Bx+Cx^2-3Cx$

$3x+1 = Ax^2 - Ax - 3Ax + 3A + Bx^2 - Bx + Cx^2 - 3Cx$

$3x+1 = (A+B+C)x^2 - (4A+B+3C)x + 3A$

$A+B+C = 0$

$-(4A+B+3C) = 3$

$3A = 1 \Longrightarrow \mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

$\begin{cases} \frac{1}{3} + B + C = 0 \\ \frac{4}{3} + B + 3C = 3 \end{cases} \begin{cases} B + C = -\frac{1}{3} \\ B + 3C = 3 - \frac{4}{3} \end{cases} \begin{cases} B + C = -\frac{1}{3} \\ -B - 3C = 3 + \frac{4}{3} \end{cases} \left\{ -2C = 4 \Longrightarrow C = \frac{4}{-2} \Longrightarrow \mathbf{C = -2} \right.$

$B = -A - C = -\frac{1}{3} - (-2) \Longrightarrow \mathbf{B} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

$\int \frac{3x+1}{x^3-4x^2+3x} dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x} dx + \int \frac{\frac{5}{3}}{x-3} dx + \int \frac{-2}{x-1} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-3} - 2\int \frac{dx}{x-1} =$

$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{ln(x)} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\mathbf{ln(x-3)} - \mathbf{2ln(x-1)} + \mathbf{C}$

22) $\int \frac{\mathbf{2x^2-1}}{\mathbf{x^2+3x+2}} \mathbf{dx}$ efectuando la división obtenemos, C(x) = 2; R(x) = - 6x – 5 , de donde,

$\frac{D}{d} = C + \frac{R}{d} \Longrightarrow \int \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2} dx = \int 2dx + \int \frac{-(6x+5)}{x^2+3x+2} dx = 2\int dx - \int \frac{6x+5}{x^2+3x+2} dx = I_1 + I_2$

$I_1 = 2\int dx = 2x + C$

$I_2 = \int \frac{6x+5}{x^2+3x+2} \Longrightarrow \frac{6x+5}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}$

$\frac{6x+5}{(X+2)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)} \Longrightarrow 6x+5 = Ax + A + Bx + 2B$

$6x+5 = (A+B)x + A + 2B$

$A+B = 6$

$A+2B = 5$

$B = -1$

$A = 7$

$\int \frac{7}{x+2} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx = 7\int \frac{dx}{x+2} - \int \frac{dx}{x+1} = 7\ln(x+2) - \ln(x+1) + C$

$\int \frac{2x^2-1}{x^2+3x+2} dx = 2x - 7\ln(x+2) - \ln(x+1) + C$

23) $\int \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x^2-4x+4}} \mathbf{dx}$

$\frac{x-1}{x^2-4x+4} = \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} \Longrightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2} = \frac{A+B(x-2)}{(x-2)^2} \Longrightarrow x - 1 = A + Bx - 2B$

$B = 1$

Textos Marea Verde

$A - 2B = -1 \Longrightarrow A - 2(1) = -1 \Longrightarrow A = 1$

$\int \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int \frac{1}{x-2} dx = I_1 + I_2$

$I_1 \Longrightarrow \int \frac{dx}{(x-2)^2} dx \begin{cases} z = x-2 \\ dz = dx \end{cases} = \int \frac{dz}{z^2} = \int z^{-2} dz = \frac{z^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{x-2} + C$

$I_2 \Longrightarrow \int \frac{dx}{x-2} \begin{cases} z = x-2 \\ dz = dx \end{cases} = \int \frac{dz}{z} = \ln(z) + C = \ln|x-2| + C$

$\int \frac{x-1}{x^2-4x+4} dx = -\frac{1}{x-2} + \ln(x-2) + C$

24) $\int \frac{\mathbf{3x-1}}{\mathbf{x^2+6x+9}} \mathbf{dx} = \int \frac{3x-1}{(x+3)(x+3)} dx = \int \frac{3x-1}{(x+3)^2} dx$

$\frac{3x-1}{(x+3)^2} = \frac{A}{(x+3)^2} + \frac{B}{(x+3)} \rightarrow \frac{3x-1}{(x+3)^2} = \frac{A+B(x+3)}{(x+3)^2}$

$3x - 1 = A + B(x+3)$

$x = -3;\ 3 \cdot (-3) - 1 = A + B(-3+3) \ \rightarrow\ A = 10$

$x = 3;\ 3 \cdot 3 - 1 = -10 + B(3+3) \rightarrow 8 = -10 + 6B \rightarrow\ B = \frac{18}{6} = 3$

$\int \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{-10}{(x+3)^2} dx + \int \frac{3}{(x+3)} dx = -10 \int \frac{1}{(x+3)^2} dx + 3 \int \frac{1}{(x+3)} dx =$

$= -10 \int (x+3)^{-2}\, dx + 3 \int \frac{1}{(x+3)} dx = -10 \cdot \frac{(x+3)^{-1}}{-1} + 3 \ln|x+3| + C = \frac{10}{(x+3)} + 3\ln|x+3| + C$

9. Halla el valor de las siguientes integrales definidas

1) $\int_1^3 \frac{dx}{2x} = \int_1^3 \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}\ln(|x|)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\ln(|3|) - \frac{1}{2}\ln(|1|) = \frac{1}{2}\ln(3)$

2) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln(|t|)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln(|x^2-1|)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln(|3^2-1|) - \frac{1}{2}\ln(|2^2-1|) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}} = -\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$

4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{3} dt = \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\, dt = \frac{1}{3}(-\cos(t))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}(-\cos(3x))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos(3x)}{3}\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\cos\left(3\times\frac{\pi}{4}\right)}{3} - \left(-\frac{\cos\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}$

5) $\int_{-4}^{4} |x|\, dx = \int_{-4}^{0}(-x)\, dx + \int_0^4 x\, dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8 + 8 = 16$

Textos Marea Verde

6) $\int_{-1}^{1}\left(3x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=\int_{-1}^{1}3x^2\,dx-\int_{-1}^{1}2x\,dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx=\left(x^3-x^2+\frac{1}{2}x\right)\Big|_{-1}^{1}=$
$\left(1^3-1^2+\frac{1}{2}\cdot 1\right)-\left((-1)^3-(-1)^2+\frac{1}{2}\cdot(-1)\right)=3$

7) $\int_{-1}^{2}\left(\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-3}\right)dx=\int_{-1}^{2}\frac{2}{x+2}dx-\int_{-1}^{2}\frac{3}{x-3}dx=(2\ln(|x+2|)-3\ln(|x-3|))\Big|_{-1}^{2}=10\ln(2)$

8) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{3a}{5}-\frac{x}{2}\right)dx=\int_{-2}^{2}\frac{3a}{5}dx-\int_{-2}^{2}\frac{x}{2}dx=\left(\frac{3ax}{5}-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{3a\cdot 2}{5}-\frac{2^2}{4}-\left(\frac{3a\cdot(-2)}{5}-\frac{(-2)^2}{4}\right)=\frac{12}{5}a$

9) $\int_{2}^{3}\frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}dx$

$\int\frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}dx=\int(\ln x)^{-3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{(\ln x)^{-2}}{-2}=-\frac{1}{2\cdot(\ln x)^2}+C$

$\int_{2}^{3}\frac{1}{x\cdot(\ln x)^3}dx=-\frac{1}{2\cdot(\ln x)^2}\Big|_{2}^{3}=-\frac{1}{2\cdot(\ln 3)^2}+\frac{1}{2\cdot(\ln 2)^2}=-0{,}414+1{,}04=0{,}626$

10) $\int_{-2}^{0}\left(e^{2x}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx$

$\int\left(e^{2x}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx=\int e^{2x}dx+\int e^{-3x}\cdot 3dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot 2\,dx-\int e^{-3x}\cdot(-3)\,dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{-3x}+C$

$\int_{-2}^{0}\left(e^{2x}+\frac{3}{e^{3x}}\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{-3x}\Big|_{-2}^{0}=\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}-e^{-3\cdot 0}\right)-\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot(-2)}-e^{-3\cdot(-2)}\right)=403{,}91$

11) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}(\operatorname{sen}x-\cos x)^2\,dx$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}(\operatorname{sen}x-\cos x)^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}(\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x)dx=$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}(1-\cos^2x-2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x)dx=(x-\operatorname{sen}^2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}=$

$=\left[\frac{5\pi}{3}-\operatorname{sen}^2\frac{5\pi}{3}\right]-\left[\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4}\right]=[5{,}23]-[0{,}79]=4{,}4\text{u}^2$

10. Halla el valor de b para que se cumpla $\int_{-1}^{b}(2bx-3x^2)dx=-12$.

1. Se resuelve la integral con la incógnita b:

$$\int_{-1}^{b}(2bx-3x^2)dx=2b\frac{x^2}{2}-3\frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{b}=bx^2-x^3\Big]_{-1}^{b}$$

2. Sustituimos los límites de integración:

Textos Marea Verde

$$(b \cdot b^2 - b^3) - (b \cdot (-1)^2 - (-1)^3) = b^3 - b^3 - b - 1 = -b - 1$$

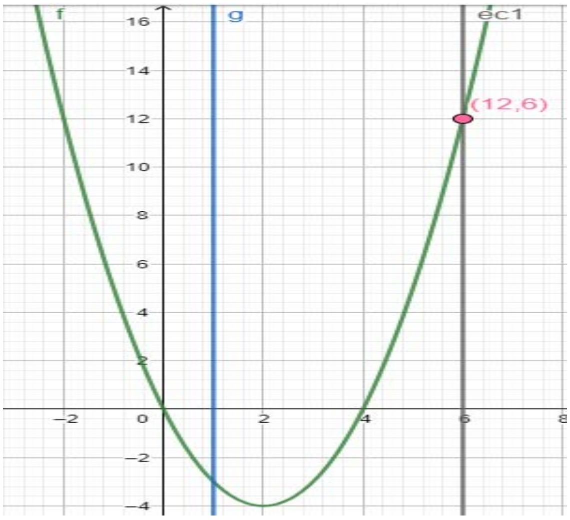
3. Igualamos el resultado a -12:

$$-b - 1 = -12 \to -b = -12 + 1 \to -b = -11 \to b = 11$$

Resultado: b=11

11. Halla el área entre la función $f(x) = x^2 - 4x$, el eje de abscisas, y las rectas x=1 y x=6.

1. Hacemos el gráfico:



2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:

$$f(x) = x^2 - 4x \to x^2 - 4x = 0 \to x(x-4) = 0 \to x_1 = 0, \qquad x_2 = 4$$

3. Hallamos el área de las dos zonas de áreas obtenidas; de x=1 a x=4, y de x=4 a x=6:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x)dx = \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2}\Big]_1^4 = \frac{x^3}{3} - 2x^2]_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2\right) = -9$$

Como es un área tomamos su valor positivo, 9.

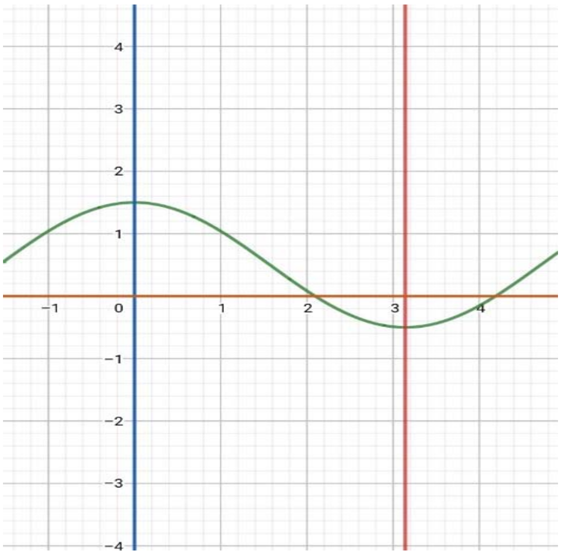
$$\int_4^6 (x^2 - 4x)dx = \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2}\Big]_4^6 = \frac{x^3}{3} - 2x^2]_4^6 = \left(\frac{6^3}{3} - 2 \cdot 6^2\right) - \left(\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2\right) = \frac{32}{3}$$

4. Sumamos ambas áreas:

$$\frac{32}{3} + (9) = \frac{59}{3}\ u.a.$$

Resultado: El área es $\frac{59}{3}$ u.a.

12. Halla el área limitada por la función f(x) = 0,5 + cosx, el eje de abcisas y las rectas x = 0 y x = π.



a=0

b=π

c = $0{,}5+\cos x=0$; $\cos x=-0{,}5$

$x=arc\cos(-0{,}5)=\frac{2\pi}{3}$

At=A1+A2;

A1= $\int_a^c f(x)dx=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(0{,}5+\cos x)dx=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}0{,}5dx+\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\cos x dx=(0{,}5x+\sin x)\begin{cases}\frac{2\pi}{3}\\0\end{cases}=$

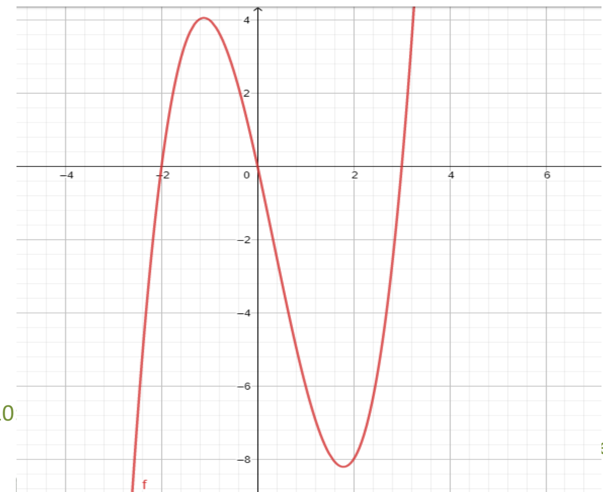
$=\left[0{,}5\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]-[0{,}5(0)+\sin(0)]=1{,}08-0=1{,}08u^2$

A2=$\left|\int_c^b f(x)dx\right|=\left|\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(0{,}5+\cos x)dx\right|=$ $\left|(0{,}5x+\mathrm{sen}\, x)\begin{cases}\pi\\\frac{2\pi}{3}\end{cases}\right|=\left|[0{,}5(\pi)+\mathrm{sen}(\pi)]-\left[0{,}5\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin(\frac{2\pi}{3})\right]\right|=0{,}55$

At= 1,08+0,55= 1,63u^2

13. Halla el área de la región limitada por la función $f(x)=x^3-x^2-6x$ y el eje de abscisas.

1. Hacemos el gráfico:



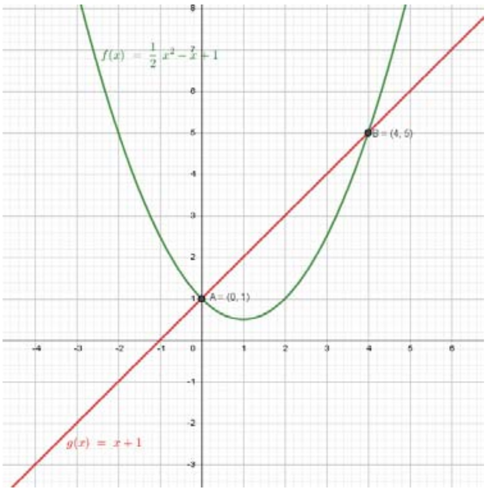
Textos Marea Verde

2. Hallamos los cortes con el eje x de la función:
$f(x) = x^3 - x^2 - 6x \rightarrow x^3 - x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3$

3. Hallamos el área de las dos zonas obtenidas; de x=-2 a x=0, y de x=0 a x=3:
$$\int_{-2}^{0} (x^3 - x^2 - 6x)dx - \int_{0}^{3} (x^3 - x^2 - 6x)dx =$$
$$\left.\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right]_{-2}^{0} - \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3x^2\right)\right]_{0}^{3} =$$
$$\left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - 3\cdot(-2)^2\right) - \left(\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2\right) = 10{,}42u^2$$

Resultado: El área es $\frac{125}{12}$ u.a.

14. Calcula el área de la porción del plano que limitan las curvas $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ e y – x – 1 = 0



$$\text{Área} = \int_0^4 \left[(x+1) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)\right] dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right) dx = \left.\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + x^2\right)\right]_0^4 = \frac{80}{3} u.a.$$

15. Halla el área delimitada por las gráficas:

a) $(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$

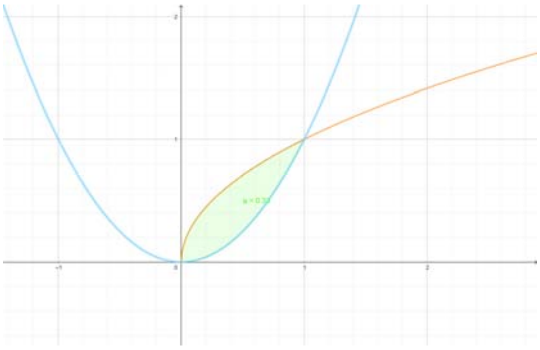
Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte:

$\sqrt{x} = x^2$; $(\sqrt{x})^2 = (x^2)^2$; $x = x^4$; $x^4 - x = 0$; $x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0$

$(x^3 - 1) = 0$; $x^3 = 1$; $x = \sqrt[3]{1}$; $x = 1$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde



Los puntos de corte son x=0 y x=1.

Área=$\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\,dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{2\sqrt{x^3}-x^3}{3}\Big]_0^1 = \left(\frac{2\sqrt{1^3}-1^3}{3}\right) - \left(\frac{2\sqrt{0^3}-0^3}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) - (0) = \frac{1}{3} u.a.$

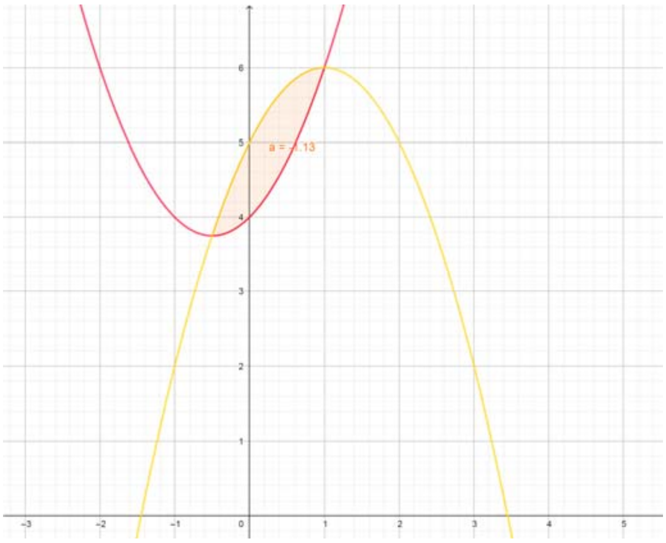
b) $\mathbf{f(x) = x^2 + x + 4 \quad y \quad g(x) = -x^2 + 2x + 5}$

Igualamos f(x) y g(x) para hallar los puntos de corte:

$x^2 + x + 4 = -x^2 + 2x + 5 \quad ; \quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad x = -\frac{1}{2}$

Los puntos de corte son x=1 y x=$-\frac{1}{2}$

Área=$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (f(x) - g(x))dx\right| = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1} ((x^2 + x + 4) - (-x^2 + 2x + 5))\,dx\right| = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (x^2 + x + 4 + x^2 - 2x - 5)\,dx\right| = \left|\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (2x^2 - x - 1)\,dx\right| = \left|\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1}\right| = \left|\left(\frac{2\cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right| = \left|\left(-\frac{5}{6}\right) - \left(\frac{7}{24}\right)\right| = \left|-\frac{5}{6} - \frac{7}{24}\right| = \left|-\frac{9}{8}\right| = \frac{9}{8}\ u.a. = 1{,}125\ u.a.$



IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Ejercicios Autoevaluación

1) Los valores de a, b y c para los que $\mathrm{F}(x) = \boldsymbol{ax^3 - be^x + c\sin x}$ es una primitiva de la función $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5\cos x}$ son:

$\mathrm{F}(x) = ax^3 - be^x + c\sin x$
$f(x) = 3x^2 - 7e^x + 5\cos x$

F'(x)= f(x)

$$\mathrm{F}'(x) = 3ax^2 - be^x + c\cos x$$

a= 1 b=7 c=5

La respuesta correcta es la b)

2) La integral indefinida $\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx$ vale:

$$\int x\sqrt{2x^2+3}\,dx = \int x(2x^2+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x(2x^2+3)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = \frac{\sqrt{(2x^2+3)^3}}{6} + \mathrm{C}$$

La respuesta correcta es la b)

3) La integral $\int \frac{sen2x}{sen^4x + cos^4x}dx$

$$hacemos\ el\ cambio\ t = sen^2x \quad dt = 2senxcosxdx = sen2xdx$$

$$cos^4x = (cos^2x)^2 = (1 - sen^2x)^2 = (1-t)^2 = 1 - 2t + t^2$$

$$\int \frac{\mathrm{sen2x}}{\mathrm{sen^4x + cos^4x}}\mathrm{dx} = \int \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t^2+1-2t+t^2}} = \int \frac{1}{2t^2+1-2t}dt = \int \frac{1}{2\left(t^2+\frac{1}{2}-t\right)}\mathrm{dt} =$$

$$\int \frac{1}{2\left(t^2-t+\frac{1}{2}\right)}dt = \int \frac{1}{2\left(t^2-t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)}dt = \int \frac{1}{2\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dt =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\arctan\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\arctan\left(\frac{sen^2x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = -\boldsymbol{\arctan(\cos 2x) + C}$$

La respuesta correcta a este apartado es la d)

4) Al integrar por partes $\int \frac{x\cdot e^{\mathrm{arcsenx}}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *se obtiene*:

$$\mathrm{x = senu\,,\quad u = arcsenx,\quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx}$$

$$\int e^u \sin u\ du = -e^u\cos u - \int(-e^u\cos u)du = -e^u\cos u - \left(-\int e^u\cos u\,du\right)$$

$$= -e^u\cos u - \left(-\left(e^u\sin u - \int e^u\sin u\,du\right)\right)$$

Por lo tanto $\int e^u\sin u\ du = -e^u\cos u - (e^u\sin u - \int e^u\sin u\,du)$

Despejamos $\int e^u\sin u\ du = -\frac{e^u\cos u}{2} + \frac{e^u\sin u}{2}\ sustituimos\ en\ u = \mathbf{arcsen\,x}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$-\frac{e^{\text{arcsen x}}\cos(\text{arcsen x})}{2}+\frac{e^{\text{arcsen x}}\sin(\text{arcsen x})}{2}\ simplificamos = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e^{\text{arcsen x}}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)+C}$$

La respuesta a este apartado es la d)

5) La integral $\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}$ vale

$$\int \frac{2x+2+4-4}{x^2+4x+13}dx = \int\left(\frac{2x+4}{x^2+4x+13}-\frac{2}{x^2+4x+13}\right)dx = \int\frac{(2x+4)}{x^2+4x+13}dx - \int\frac{2}{(x+2)^2+9}dx =$$

$$= \boldsymbol{\ln(x^2+4x+13)-\frac{2}{3}\arctan\frac{x+2}{3}+C}$$

La respuesta correcta a este apartado es la a)

6) La integral $\int \frac{dx}{sen^2x cos^2x}$ vale

$t = \text{tg}x$	$\text{sen } x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$	$\text{sen}^2 x = \frac{t^2}{t^2+1}$
$dx = \frac{dt}{1+t^2}$	$\cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$	$\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$

$$\int\frac{dx}{sen^2x cos^2x} = \int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{t^2+1}\frac{1}{t^2+1}} = \int\frac{t^2+1}{t^2}dt = \int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = t-\frac{1}{t}+C = tgx - cotgx + C$$

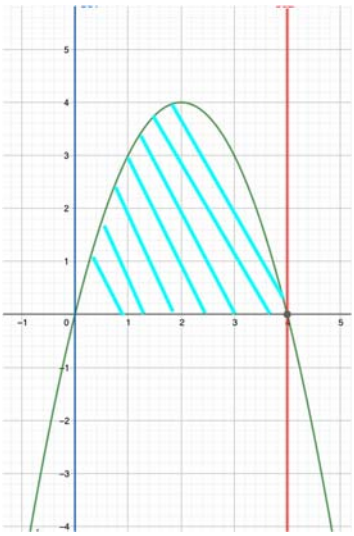
La respuesta a este apartado es la d)

7) La integral definida $\int_0^{\pi}\cos x\,dx$ vale:

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx = \left.\sin x\right]_0^{\pi} = \sin\pi-(\sin 0) = 0$$

La respuesta correcta es la c)

8) Para hallar el área comprendida entre la función $f(x) = -x^2+4x$, el eje de abscisas y las rectas x=0 y x=4, debemos representar dicha función y ver el área que comprende:



Una vez que tenemos la gráfica, y vemos donde corta la función con el eje y con las rectas, comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

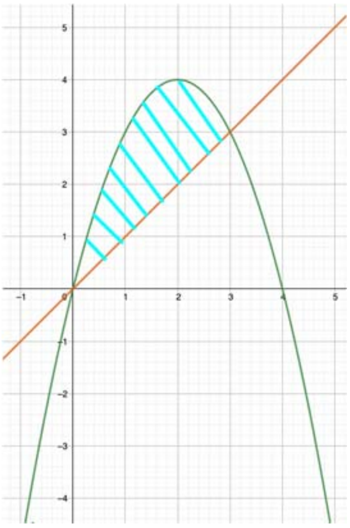
Textos Marea Verde

$$\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\Big]_0^4$$

$$\left(-\frac{4^3}{3} + \frac{4 \cdot 4^2}{2}\right) - (0) = \frac{32}{3}$$

La respuesta correcta es la b)

9) Para hallar el área comprendida entre las funciones $f(x) = -x^2 + 4x$ y $g(x) = x$, debemos representar ambas funciones y ver el área que comprenden:



Una vez que tenemos la gráfica, y vemos el dónde corta f(x) con g(x), debemos sacar los puntos de corte y, una vez hallados comenzamos a aplicar la regla de Barrow para obtener el área.

Puntos de corte: Para hallarlos debemos igualar las funciones y despejar la incógnita "x".

$$-x^2 + 4x = x$$

$$0 = x^2 - 3x$$

$$0 = x(x - 3)$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

Ahora ya podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^3 [(-x^2 + 4x) - (x)]\, dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^3$$

$$\left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - (0) = \frac{9}{2}$$

La respuesta correcta es la a)

Textos Marea Verde

10) El volumen del sólido de revolución generado por $y = x^2$, entre 0 y 2, al girar en torno al eje de abcisas es:

$$\mathbf{V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{x^5}{5}\right)\Big]_0^2 = \pi \frac{32}{5}}$$

La respuesta a este apartado es la d)

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 11: Probabilidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, ENRIQUE, AITOR,ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA, CELIA S, ANDREA.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1.- Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

- **a)** La superficie de las provincias españolas. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$
- **b)** Anotar el sexo del próximo bebe nacido en una clínica determinada.
  $Si\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$
- **c)** El área de un cuadrado del que se conoce el lado. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$
- **d)** Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos. $Si\ es\ uN\ fenómeno\ aleatorio.$
- **e)** Saber si el próximo año es bisiesto. $No\ es\ un\ fenómeno\ aleatorio.$

2.- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: *"Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar".*

Suceso A {salir a}, suceso B {salir e}, suceso C {salir i}, suceso D {salir o} y suceso E {salir u}

Espacio muestral {A, B, C, D, E}

3.- Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: *"Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no".*

Suceso A {caer de punta}, suceso B {no caer de punta}

Espacio muestral {A, B}

4.- Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: *Tirar dos monedas.*

Suceso A {salir cara y salir cruz}, suceso B {salir cara y salir cara}

5. En el juego de la lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

(Solución abierta)

Sabiendo que la cifra de las unidades (espacio muestral) es: $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$

1)El suceso obtener un número par $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

2)El suceso obtener un múltiplo de 3 $\{0, 3, 6, 9\}$

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

(Solución abierta)

Sacar una carta de una baraja española es

$$E = \{As\ de\ Oros, 2O, 3O, \dots, SO, CO, RO, As\ de\ Copas, \dots, RC, As\ de\ Espadas, \dots, RE,$$
$$As\ de\ Bastos, \dots, RB\}$$

1)El suceso sacar una carta de copas

$$\{As\ de\ Copas, 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, SC, CC, RC\}$$

2)El suceso sacar un rey

$$\{RC, RO, RB, RE\}$$

3)El suceso sacar una carta par

$$\{2C, 4C, 6C, SC, RC, 2B, 4B, 6B, SB, RB, 2E, 4E, 6E, SE, RE, 2O, 4O, 6O, SO, RO\}$$

7.Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$.

$$B = \{As\ de\ Oros, As\ de\ Bastos, As\ de\ Copas, As\ de\ Espadas\}$$
$$A = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE\}$$

$A \cup B = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE, As\ de\ Oros,$

Textos Marea Verde

$$As\ de\ Bastos, As\ de\ Copas, As\ de\ Espadas\}$$

$A \cap B = \emptyset;\ son\ sucesos\ incompatibles$

$A - B = \{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE\}$

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A.

El suceso sacar un número mayor que cuatro es $A = \{5, 6\}$

Por tanto, el suceso contrario es que se saquen números menores que 4 o igual a 4, luego:

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$$

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona la respuesta:

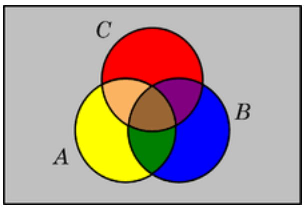
- A y $\bar{A}$ son sucesos incompatibles. No puede ocurrir a la vez un suceso y su contrario.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso "sacar un as".

Suceso sacar un as = A   Suceso no sacar un as = $\bar{A}$

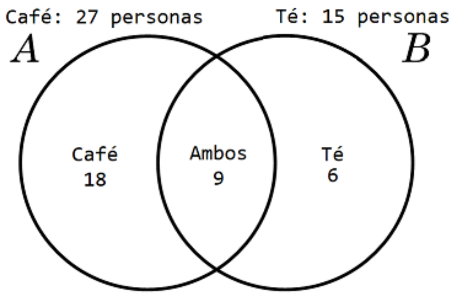
Suceso sacar un 6 = B   Suceso sacar un rey = C

11. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a AUBUC como unión de conjuntos disjuntos.



AUBUC sería la unión de todos los conjuntos de distinto color

12. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que, en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.



A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas?

$$27 + 15 = 42$$

Hay 2 personas que no toman nada, por lo tanto 33 personas en total toman alguna bebida.

$$42 - 33 = 9$$

Hay 9 personas que toman té y café.

B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?

Café: $27 - 9 = 18$ Té: $15 - 9 = 6$

C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman

café y té. b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman café. d) Toman té y no toman café.

Toman té: A : 15 Toman café: B : 27

a) Toman café y té: $A \cap B$: 9

b) No toman ni café ni té: $\bar{A} \cap \bar{B}$: 2

c) Toman té o bien toman café: $A \cup B$: 18 + 9 + 6 = 33, que también es: 35 – 2 = 33

d) Toman té y no toman café: toman únicamente té $A \cap \bar{B} = 6$

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.

Toman café 27, únicamente café 18, toman café y también té 9 personas; $A/B = 9$

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbralo con letras.

Toman únicamente té: $A \cap \bar{B}$= 6

No toman nada: $\bar{A} \cap \bar{B}$ = 2

No toman café: $\bar{B} = 8$

F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos bebidas.

No toman ninguna de las dos bebidas: $\bar{A} \cap \bar{B}$ = 2

Toman sólo café: 18 Toman sólo té: 6 Toman las 2: 9

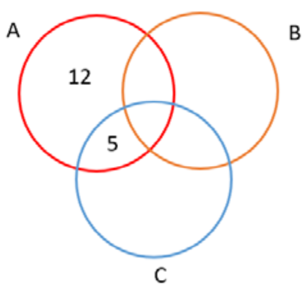
En total 33 personas toman una de las dos bebidas frente a las 2 personas que no toman ninguna de las dos, que suman las 35 personas.

13. En el mismo lugar del problema anterior, con 35 personas, ahora se ha añadido a la máquina de bebidas el chocolate (C), y ahora se sabe que 12 personas toman solo té, que 5 personas toman té y chocolate, pero no café, que 20 personas no toman ni té ni chocolate. Es posible saber cuantas personas toman al menos una de las tres bebidas; cuántas, de entre las que tomaban café, tomaban también chocolate… Investiga si tienes datos suficientes para conocerlo todo, o debes ampliar la encuesta para conocer nuevos datos.

<u>**Datos:**</u>

- Total: 35 personas
- Bebidas:
    - Té: A
    - Café: B
    - Chocolate: C
- 12 personas solo toman té
- 5 personas toman té y chocolate, pero no café
- 20 no toman ni té ni chocolate

Para ver los datos de una manera más clara realizamos un diagrama de Venn:



Las 20 personas restantes no podemos incluirlas de momento en el diagrama ya que no sabemos si solamente toman café o por el contrario no toman ninguna bebida.

Si sumamos el conjunto de personas obtenido de los datos (12 + 5 + 20 = 37) obtenemos que el resultado total de las personas que tendría que haber es 37 cuando el número real de personas que hay es 35, por lo que se debería realizar otra encuesta ya que el resultado de la anterior es erróneo.

14. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja sea una espada.

Como hay cuatro palos y las espadas son uno dividimos 1 entre 4:

$P(A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

15. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o la asignarías por simetría?

En la de frecuencias relativas, porque si hubiese la misma posibilidad de ser zurdo que de ser diestro, habría aproximadamente los mismos zurdos que diestro.

16. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 5 al tirar un dado?

Suponiendo un dado de 6 caras:

Como hay 5 números que no son cinco $\frac{5}{6}$.

¿Y de no sacar un múltiplo de 3?

Los múltiplos de 3, del 1 al 6 son 3 y 6, y como se trata de no sacar estos, $\frac{4}{6}$.

¿Y de no sacar un número menor que 2?

Menor que 2 solo está el 1, $\frac{5}{6}$.

17. Al tirar una moneda 2 veces, ¿cuál es la posibilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

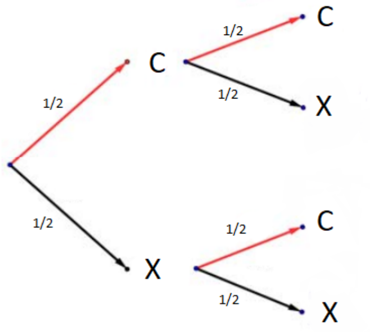
La probabilidad de no sacar ninguna cara es:

$$P(X \cap X) = P(X) \cdot P(X) \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Y la de sacar al menos una cara:

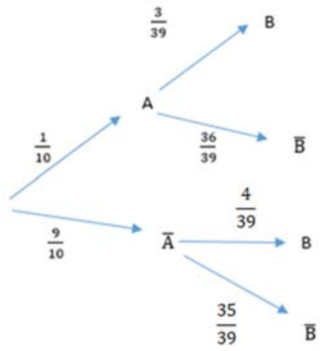
$$P(al\ menos\ 1\ cara) = 1 - P(ninguna\ cara) =$$

$$= 1 - P(2\ cruces) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



18. Haz un diagrama en árbol similar al anterior en tu cuaderno con los sucesos *A* y *B*: *A* = *sacar un as* en la primera extracción, $\overline{A}$ = *no sacar as*, y *B* = *sacar un as* en la segunda extracción, $\overline{B}$ = *no sacar as en la segunda extracción*. ¿Cuál es la probabilidad de *sacar as* en la segunda extracción condicionado a *no* haberlo sacado en la primera? ¿Y la de *no sacar as* en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera? ¿Cuál es la probabilidad de *sacar dos ases*? ¿Y la de sacar un solo as?

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde



$P(B/\bar{A}) = \frac{4}{39}$; $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{35}{39}$; $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

$P(\mathrm{A} \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{36}{39} + \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{39} = \frac{12}{65}$

19. En el diagrama de árbol anterior indica cuál es la probabilidad de "*no salen* 2 *ases*" y la de "*no sale ningún as*".

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 1 - \frac{1}{130} = \frac{129}{130}$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$

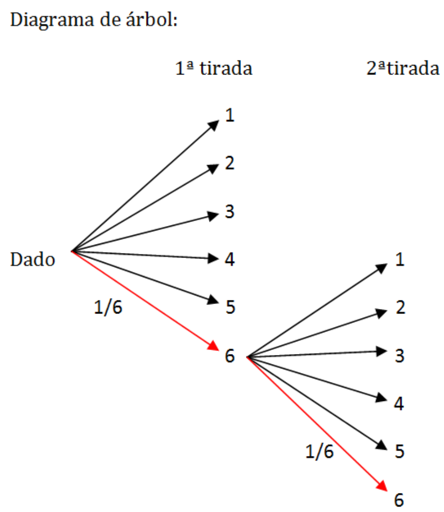
20. En el experimento "sacar tres cartas seguidas", ¿cuál es la probabilidad de *sacar tres ases*? Primero con reemplazo, y luego sin reemplazo.

Con reemplazo: P(3 ases) = $\frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{1000}$

Sin reemplazo: P(3 ases) = $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$

21. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

$P(A) = Probabilidad\ de\ sacar\ un\ seis\ doble$



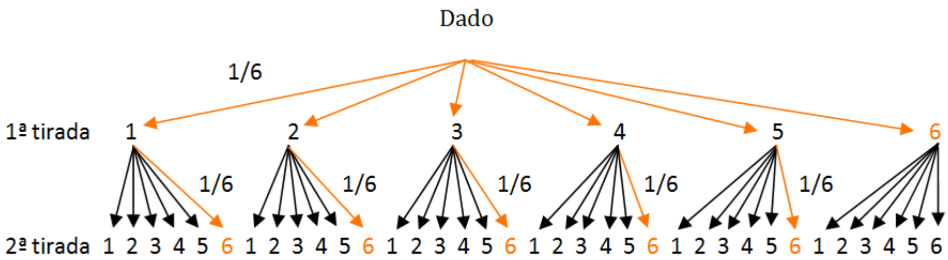
$P(A) = P(6) \cdot P(6/6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Textos Marea Verde

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6

$P(A) = Probabilidad\ de\ sacar\ al\ manos\ un\ seis$

Diagrama de árbol:

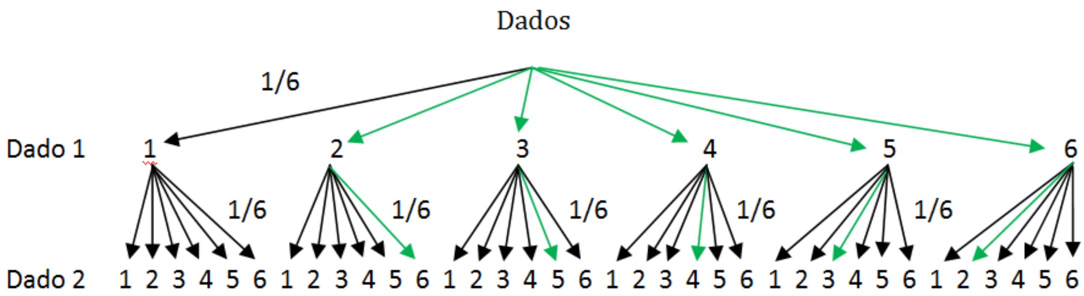


$P(A) = P(1) \cdot P(6/1) + P(2) \cdot P(6/2) + P(3) \cdot P(6/3) + P(4) \cdot P(6/4) + P(5) \cdot P(6/5) + P(6) =$
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 5\left(\frac{1}{36}\right) + \frac{1}{6} = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso *A* que la suma de las dos caras sea 8 y el suceso B que esos números difieran en dos unidades.

a) Comprueba que P(*A*)= 5/36 (casos favorables: 2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2) y que P(*B*)= 8/36 (casos favorables: (1,3), (2,4), …).

Diagrama de árbol:

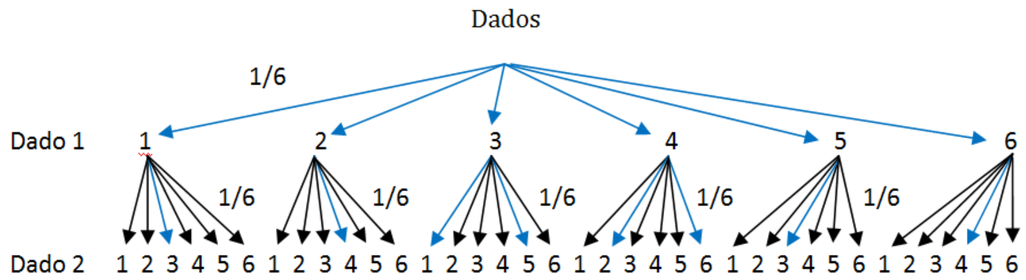


(Para A)

$P(A) = P(2) \cdot P(6/2) + P(3) \cdot P(5/3) + P(4) \cdot P(4/4) + P(5) \cdot P(3/5) + P(6) \cdot P(2/6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot$
$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 5\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{5}{36}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Diagrama de árbol:



(Para B)

$P(B) = P(1)\cdot P(3/1) + P(2)\cdot P(4/2) + P(3)\cdot P(1/3) + P(3)\cdot P(5/3) + P(4)\cdot P(2/4) + P(4)\cdot P(6/4) + P(5)\cdot P(3/5) + P(6)\cdot P(4/6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = 8(\frac{1}{36}) = \frac{8}{36}$

b) Calcula las probabilidades de: P($A\cap B$); P($A\cup B$); P($A \cap \bar{B}$); P($\bar{A} \cap B$); P($\bar{A} \cap \bar{B}$).

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P(A)}\cdot\mathrm{P(B/A)} = \frac{5}{36}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{18}$

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P}(A\cap B) = \frac{5}{36} + \frac{8}{36} - \frac{5}{162} = \frac{107}{324}$

$\mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P(A)}\cdot\mathrm{P}(\bar{B}/A) = \frac{5}{36}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{12}$

$\mathrm{P}(\bar{A}\cap B) = \mathrm{P}(\bar{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}/\bar{A}) = (1-\mathrm{P(A)})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}/\bar{A}) = \left(1-\frac{5}{36}\right)\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B}/\bar{A}) = \frac{31}{36}\cdot\frac{6}{31} = \frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(\bar{A}\cap \bar{B}) = \mathrm{P}(\bar{A})\cdot\mathrm{P}(\bar{B}/\bar{A}) = (1-\mathrm{P(A)})\cdot\mathrm{P}(\bar{B}/\bar{A}) = \left(1-\frac{5}{36}\right)\cdot\mathrm{P}(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{31}{36}\cdot\frac{25}{31} = \frac{25}{36}$

c) Calcula P(A/B); P(A/$\bar{B}$); P($\bar{A}$/B).

$\mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{8}{36}} = \frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\bar{B}) = \frac{\mathrm{P}(A\cap\bar{B})}{\mathrm{P}(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{12}}{\left(1-\frac{8}{36}\right)} = \frac{3}{28}$

$\mathrm{P}(\bar{A}/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\bar{A}\cap B)}{\mathrm{P(B)}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{8}{36}} = \frac{3}{4}$

24. La probabilidad del suceso A es de 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla:

a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos.

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{19}{24}$$

b) La probabilidad de que no ocurra B.

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right) = \frac{5}{24}$$

Textos Marea Verde

d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{6}$$

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14% de los clientes compra el producto A y un 12% compra el producto B. Además, un 4% compra A y B, un 2% compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B.

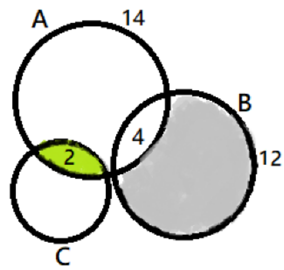
a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B?

b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C, pero no B?

$P(A) = 0.14 \quad P(B) = 0.12 \quad P(A \cap B) = 0.04 \quad P(A \cap C) = 0.02$

$P(B \cap C) = 0 \quad P(A \cup B \cup C) = 1$

Como no da el número exacto de clientes podemos quitar los porcentajes y suponer que hay 100 clientes.



a) Sólo es B: 12 - 4 = 8 clientes

b) Sabiendo que es de A que haya comprado en C pero no en B:

$$P(C \cap \bar{B}/A) = \frac{2}{100} = 0.02$$

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que P(A)= 1/3, P(B)= 1/5 y P$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \mathbf{7/15}$, hallar:

a) La probabilidad de que se verifique A y B.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{7}{15} \; ; \; P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

b) La probabilidad de que se verifique A y no B.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right) = \frac{8}{15}$$

d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B.

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \; \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{5}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $\boldsymbol{P(A) = \frac{3}{4}; P(B) = \frac{1}{2}; P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}}$ Calcular: $P(A \cup B), P(A \cap B), P(\bar{A}/B), P(\bar{B}/A)$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

Textos Marea Verde

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{5}$$

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$
Calcula razonadamente: $a) P(A \cap B)$, $b) P(B)$, $c) P(\overline{B}/A)$, $d) P(\overline{A}/\overline{B})$. Nota. $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S/T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

a) $\mathbf{P(A \cap B)} = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{12}$$

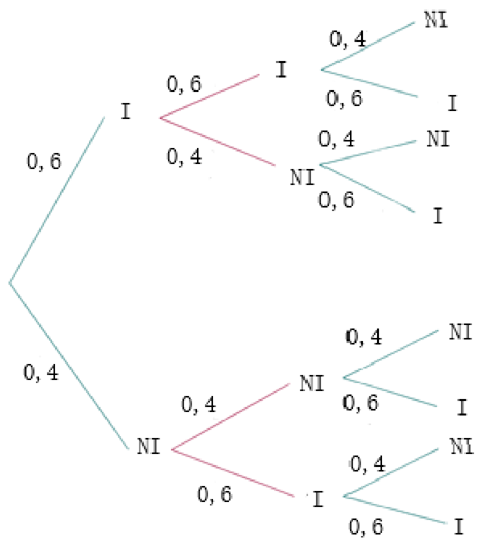
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = P(B)$; $\boldsymbol{P(B)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

c) $\mathbf{P(\overline{B}/A)} = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

d) $P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado siendo $P(I) = 0,6$

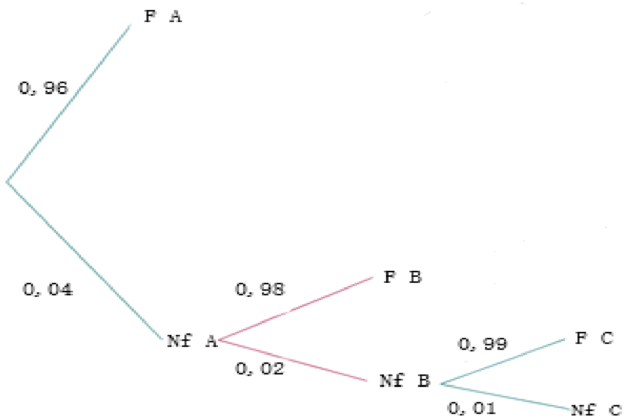


$$P(al\ menos\ 1\ intencionado) = 1 - P(ninguno\ intencionado) = 1 - (0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4) = 0{,}936$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

30. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0,96$; $P(B) = 0,98$; $P(C) = 0,99$ a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

F = Funcione Nf = No funcione

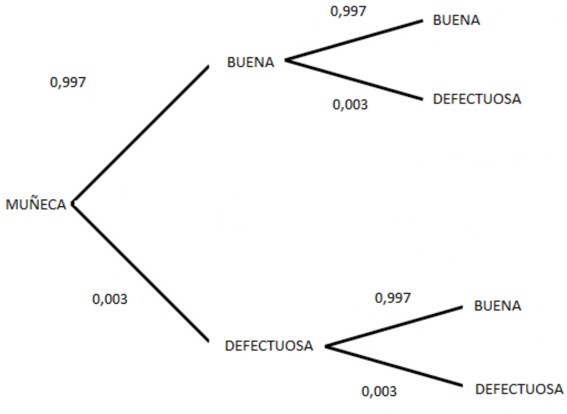


$$P(fallen\ los\ 3) = \mathrm{P(Nf \cap Nf \cap Nf) = P(Nf) \cdot P(Nf/Nf) \cdot P(Nf/Nf \cap Nf)} =$$

$$= 0{,}04 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01 = 0{,}000008$$

$$P(todo\ salga\ bien) = 1 - P(fallen\ los\ 3) = 1 - 0{,}000008 = 0{,}999992$$

31. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0'3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

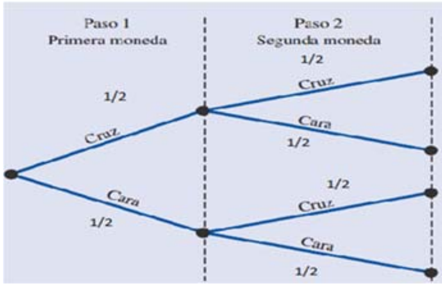


$a)\ P(D \cap D) = P(D) \cdot P(D) = 0{,}003 \cdot 0{,}003 = 0{,}000009$
$b) P(B \cap D) + P(D \cap B) = 2 \cdot P(B) \cdot P(D) = 2(0{,}997 \cdot 0{,}003) = 0{,}00598$
$c)\ P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B) = 0{,}997 \cdot 0{,}997 = 0{,}994$
$d)\ P(defectuosa\ solo\ la\ tercera) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(D) \cdot P(B) = 0{,}997 \cdot 0{,}997 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}997$
$= 0{,}0029$

32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que ter-

Textos Marea Verde

mine en el segundo o en el tercero o en el cuarto lanzamiento)



$a)\ P(C \cap C) + P(X \cap X) = P(C) \cdot P(C) + P(X) \cdot P(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$b)\ P(termine\ en\ el\ tercero) = P(X) \cdot P(C) \cdot P(C) + P(C) \cdot P(X) \cdot P(X) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$c)\ P(termine\ en\ el\ cuarto) = P(C) \cdot P(X) \cdot P(C) \cdot P(C) + P(X) \cdot P(C) \cdot P(X) \cdot P(X) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$d)\ P(a\ lo\ sumo\ en\ el\ cuarto) =$

$= P(segundo) + P(termine\ en\ el\ tercero) + \ P(termine\ en\ el\ cuarto) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades reflejadas en la tabla de contingencia:

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

b) Determina las siguientes probabilidades: P(V ∩C); P(V ∩U); P(M ∩C); P(M ∩U); P(V); P(M); P(C) y P(U).

c) Calcula P(U/V); P(C/V); P(V/U); P(V/C). ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

a)

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0,27	0,29	0,56
Accidente con sólo dañosmateriales (M)	0,31	0,13	0,44
Totales	0,58	0,42	1

b) $\mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) = 0{,}27$; $P(V \cap U) = 0{,}29$; $P(M \cap C) = 0{,}31$; $P(M \cap U) = 0{,}13$

$P(V) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) + (V \cap U) = 0{,}56$; $P(M) = P(M \cap C) + P(M \cap U) = 0.44$

$P(C) = \mathrm{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{C}) + P(M \cap C) = 0{,}58$; P(U)=$P(V \cap U) + P(M \cap U) = 0{,}42$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

c) $P(U/V) = \frac{0,29}{0,56} = 0,54$; $P(C/V) = \frac{0,27}{0,56} = 0,48$

$P(V/U) = \frac{0,30}{0,43} = 0,7$; $P(V/C) = \frac{0,27}{0,58} = 0,47$

Los sucesos V y C son dependientes pues P(V) = 0,56 ≠ P(V/C) = 0,47

34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes pueden ser de carretera© o urbanos(U), pero que ahora los clasificamos en leves(L), Graves(G) o mortales(M). Observa que lo fundamental para confecciona la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

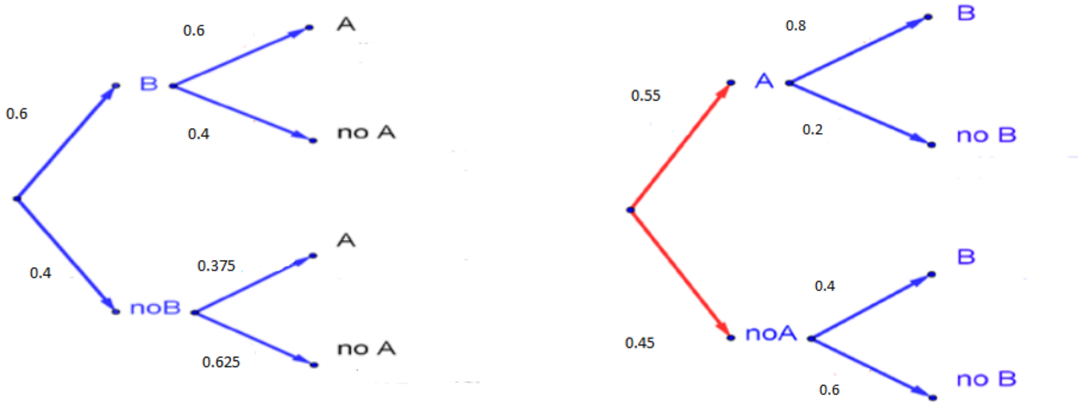
	Accidentes en carretera (C)	Accidentes urbanos (U)	Totales
Accidentes (L)	0.27	0.29	0.56
Accidentes (G)	0.18	0.01	0.19
Accidentes (M)	0.13	0.12	0.25
Totales	0.58	0.42	1

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

	A	**No A**	
B	**0.4**	**0.2**	**0.6**
No B	**0.15**	**0.25**	**0.4**
	0.55	**0.45**	**1**

$$P(A \cap B) = 0.4 \to P(B) \cdot P(A/B) = 0.4 \to P(A/B) = \frac{0.4}{0.6} = 0.6$$

$$P(A \cap noB) = 0.15 \to P(noB) \cdot P(A/noB) = 0.15 \to P(A/noB) = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$$

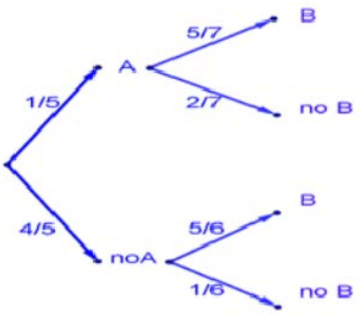


$$P(B \cap A) = 0.4 \to P(A) \cdot P(A/B) = 0.4 \to P(A/B) = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$$

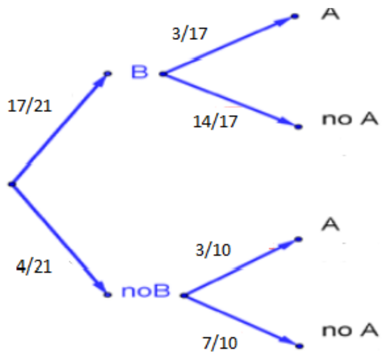
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$P(B \cap noA) = 0.2 \rightarrow P(noA) \cdot P(noA/B) = 0.2 \rightarrow P(noA/B) = \frac{0.2}{0.45} = 0.4$$

36. Dado el diagrama de árbol del margen, construye una tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



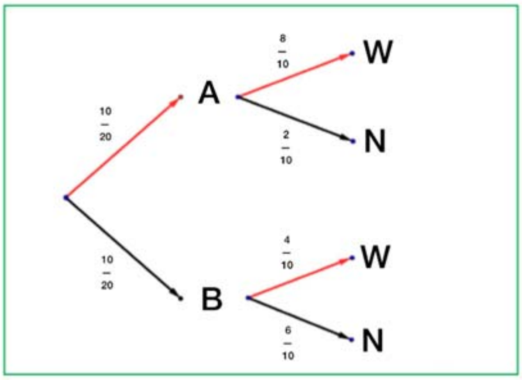
	A	No A	Totales
B	5/35	20/30	17/21
No B	2/35	4/30	4/21
Totales	7/35	24/30	1



$$P(A \cap B) = \frac{5}{35} \rightarrow P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{5}{35} \rightarrow P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\frac{5}{35}}{\frac{17}{21}} = 3/17$$

$$P(A \cap noB) = 2/35 \rightarrow P(noB) \cdot P(A/noB) = 2/35 \rightarrow P(A/noB) = \frac{2/35}{4/21} = 3/10$$

37. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?



$A \rightarrow$ elegir urna A $\quad B \rightarrow$ elegir urna B

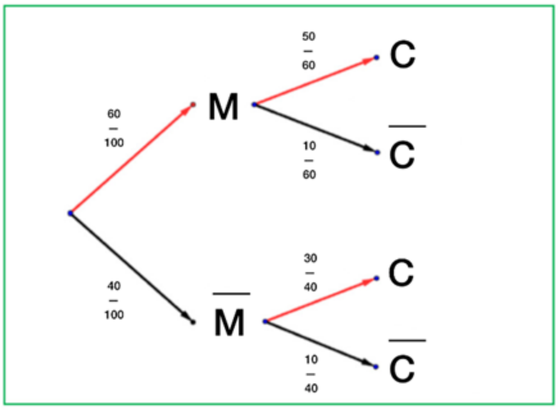
$W \rightarrow$ extraer bola blanca $\quad N \rightarrow$ extraer bola negra

P(A/N) = $\frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A) \cdot P(N/A)}{P(N)} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,4} = 0,25$

P(N) = $P(A \cap N) + P(B \cap N) = P(A) \cdot P(N/A) + P(B) \cdot p(N/B) = \frac{10}{20} \cdot \frac{2}{10} + \frac{10}{20} \cdot \frac{6}{10} = 0,4$

La probabilidad de que la bola negra proceda de la urna A es de 0,25

38. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta. Calcula:



$M \rightarrow$ Tratados con medicamento $\quad \overline{M} \rightarrow$ Tratados sin medicamento, es decir, con el placebo

$C \rightarrow$ Curados $\quad \bar{C} \rightarrow$ No curados

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento.

P(M/C) = $\frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(M) \cdot P(C/M)}{P(C)} = \frac{0,6 \cdot 0,83}{0,8} = 0,62$

P(C) = P(M) · P(C/M) + P($\overline{M}$) · P($C/\overline{M}$)

P(C) = $\frac{50}{60} \cdot \frac{60}{100} + \frac{30}{40} \cdot \frac{40}{100} = 0,8$

La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento es de 0,62

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo.

P($\overline{M}$/C) = $\frac{P(\overline{M} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\overline{M}) \cdot P(C/\overline{M})}{P(C)} = \frac{0,4 \cdot 0,75}{0,8} = 0,38$

La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo es de 0,38

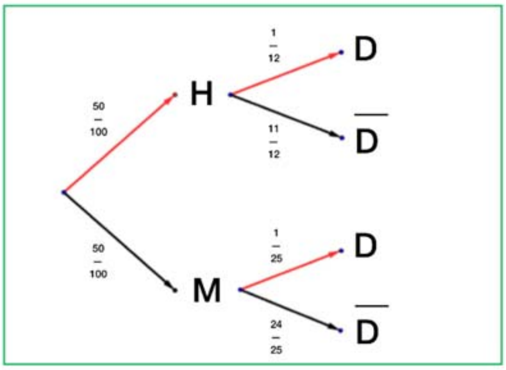
IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

Textos Marea Verde

39. Se sabe que, en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.



H → Hombres M → Mujeres
D → Daltónicas/os $\overline{D}$ → No daltónicas/os

a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

P(D/H) = $\frac{1}{12}$

La probabilidad de que un hombre sea daltónico es de $0{,}08\hat{3}$

b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

P(D/M) = $\frac{1}{25}$

La probabilidad de que una mujer sea daltónica es de 0,04

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

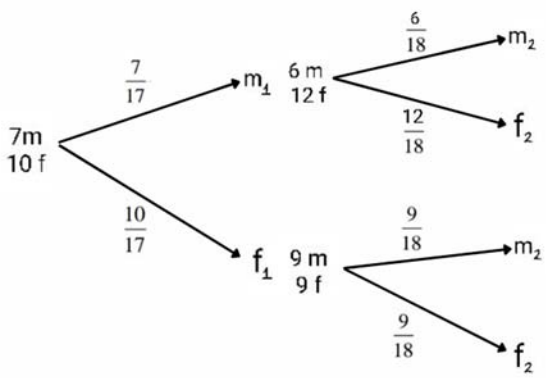
P(D) = P(H) · P(D/H) + P(M) · P(D/M)

P(D) = $\frac{1}{12} \cdot \frac{50}{100} + \frac{1}{25} \cdot \frac{50}{100}$ = 0,062

40. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación, se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad que:

a) El segundo sea de fresa

b) El segundo sea del mismo sabor que el primero



a) $P(F_2) =$ $P[(M_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap F_2)] =$

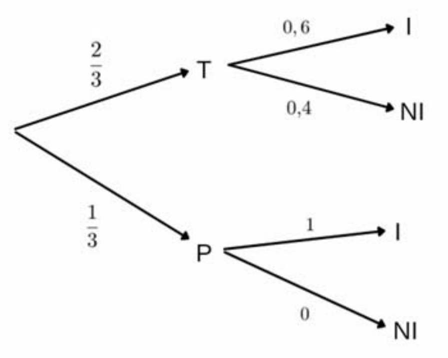
Textos Marea Verde

$$P(M_1 \cap F_2) + P(F_1 \cap F_2) =$$
$$= P(M_1) \cdot P\,(F_2/M_1) + P(F_1) \cdot P(F_2/F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{2}{3} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{29}{51}}$$

b) $P[(M_1 \cap M_2) \cup (F_1 \cap F_2)] = P(M_1 \cap M_2) + P(F_1 \cap F_2) =$
$P(M_1) \cdot P\,(M_2/M_1) + P(F_1) \cdot P(F_2/F_1) = \frac{7}{17} \cdot \frac{1}{3} + \frac{10}{17} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{22}{51}}$

La probabilidad de que el segundo caramelo sea de fresa es de $\frac{29}{51}$ y que el segundo sea del mismo sabor que el primero es de $\frac{22}{51}$

41. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40% de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.
a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.
b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

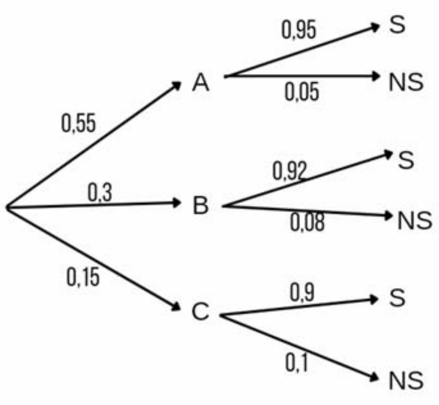


a) $P(I) = P(T \cap I) + P(P \cap I) = P(T) \cdot P(I/T) + P(P) \cdot P(I/P) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \mathbf{0,73}$

b) $P(T/I) = \frac{P(T \cap I)}{P(I)} = \frac{P(T) \cdot P(I/T)}{P(I)} = \frac{0{,}4}{0{,}73} = \mathbf{0,54}$

La probabilidad de que el pasajero que se eligió sepa hablar inglés es de 0,73 y la probabilidad de que ese pasajero pertenezca a la clase turista es de 0,54

42. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5% de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8% de los atendidos por el sastre B ni el 10% de los restantes del C. Calcúlese la probabilidad de que:
a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo
b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A

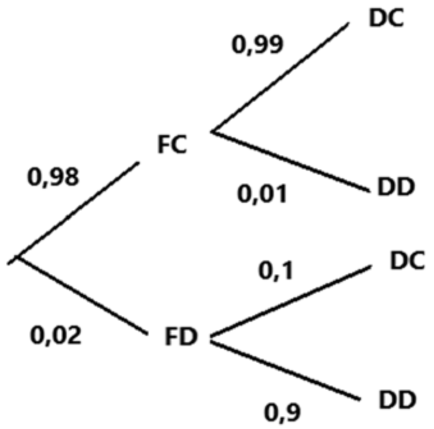


a) $P(NS) = P(A \cap NS) + P(B \cap NS) + P(C \cap NS) = P(A) \cdot P(NS/A) + P(B) \cdot P(NS/B) + P(C) \cdot P(NS/C) = 0{,}55 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}08 + 0{,}15 \cdot 0{,}1 = \mathbf{0{,}0665}$

b) $P(A/NS) = \frac{P(A \cap NS)}{P(NS)} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}05}{0{,}0665} = \mathbf{0{,}413}$

La probabilidad de que el cliente no quede satisfecho con el arreglo es de 0,0665 y si el cliente no queda satisfecho la probabilidad de que el arreglo lo hiciera el sastre A es de 0,413.

43. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son. A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso. B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto. Ayuda: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.



	Fabricado Correcto (FC)	Fabricado Defectuoso (FD)	
DETECTADO como Correcto (DC)	**0,9702**	**0,002**	**0,9722**
DETECTADO como Defectuoso (DD)	**0,0098**	**0,018**	**0,0278**
	0,98	0,02	**1**

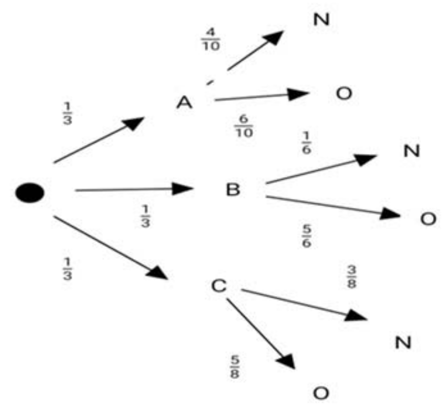
$$A)\ P(FC/DD) = \frac{P(FC \cap DD)}{P(DD)} = \frac{0{,}0098}{0{,}0278} = 0{,}3525$$

$$B) P(FD/DC) = \frac{P(FD \cap DC)}{P(DC)} = \frac{0{,}002}{0{,}9722} = 0{,}0021$$

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. la caja A tiene 10 bolas de cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

A = 10 bolas y 4 negras B = 6 bolas y 1 negra C = 8 bolas y 3 negras O = No negra

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

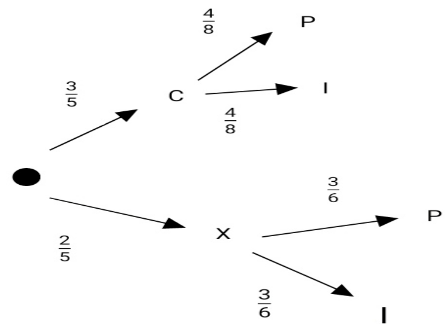


$$P(A\cap N)+P(B\cap N)+P(C\cap N)=\big(P(A)\cdot P(N/A)\big)+((P(B)\cdot P(N/B))+(P(C)\cdot P(N/C)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{8}=\frac{113}{360}$$

Sí se cumple

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es de 3/5 y la cruz es de 2/5. Si sale cara se escoge un numero al azar del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.



$$P(I)=P(C\cap I)+P(X\cap I)=\big(P(C)\cdot P(I/C))+(P(X)\cdot P(I/X)\big)=\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\right)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}$$

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

- L = Lector
- D = Deportista

  P(D ∪ L) = 0,55 ; P(D) = 0, 40 ; P(L) = 0,30

  a) P(D ∩ noL) = P(D) – P(D ∩ L) ; P(D ∩ L) = P(D) + P(L) – P(D ∪ L) = 0,40 + 0,30 – 0,55 = 0,15

     P(D ∩ noL) = P(D) – P(D ∩ L) = 0,40 – 0,15 = 0,25

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

b) P(D/L) = $\frac{P(D \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}15}{0{,}30} = 0{,}50$

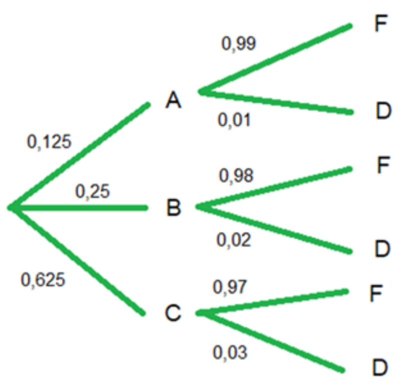
47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0'01, de que lo sea uno fabricado en B es 0'02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0'03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C. a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso. b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

120 tornillos: 15 de la A, 30 de la B y 75 de la C;

calculamos porcentajes⇒ P(A)= 15/120=0,125, P(B)=30/120=0,25, C=75/120=0,625;

12,5% de la A, 25% de la B y 75% de la C.

Diagrama de árbol:



- F = Funcional
- D = Defectuoso

A) P(F) = P(A∩F)+P(B∩F)+P(C∩F); P(F) = 0,125·0,99+0,25·0,98+0,625·0,97 = 0,975
Existe un 97,5% de probabilidad de que, al coger un tornillo aleatorio, este sea funcional.

B) P(D)=1-P(F)=0,025
P(B/D)= $\frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}02}{0{,}025} = 0{,}2$
Existe un 20% de probabilidad de que el tornillo defectuoso haya sido fabricado por la máquina B

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías pre-benjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

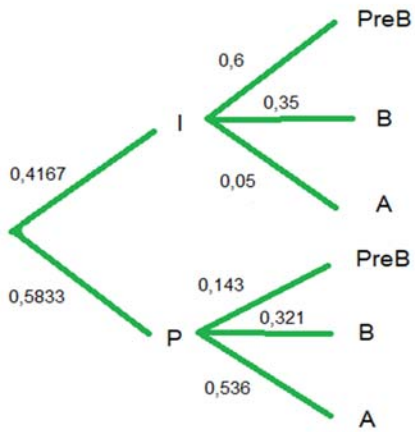
IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?
c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?
d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

480 nadadores: 200 Iniciación, 280 Perfeccionamiento; 41,67% Iniciación y 58,33% Perfeccionamiento

Diagrama de árbol:



- I= Iniciación
- P= Perfeccionamiento
- PreB= Pre-Benjamín
- B= Benjamín
- A= Alevín

P(I)=200/480= 0,4167, P(P)= 280/480=0,5833, P(PreB)= 160/480=0,333,

P(B)=160/480=0,333, P(A)=160/480=0,334

A) P(I)=200/480= 0,4167

Existe una probabilidad de 41,67% de que el nadador esté en el curso de iniciación.

B) P(P∪A) = P(P) + P(A) – P(P⋂A) = $\frac{280}{480} + \frac{160}{480} - \frac{150}{480} = \frac{290}{480} = \frac{29}{48} = 0{,}6$

Existe una probabilidad del 60% de que el nadador esté en el curso de perfeccionamiento o sea alevín

C) P(P/B)= $\frac{P(B\cap P)}{P(B)} = \frac{0{,}583\cdot 0{,}321}{0{,}583\cdot 0{,}321+0{,}417\cdot 0{,}35} = 0{,}562$

Existe una probabilidad del 56,2% de que, si el nadador es benjamín, se encuentre en el curso de perfeccionamiento.

D) P(B/I)=$\frac{P(B\cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}4167}{0{,}4167} = 0{,}35$

Existe una probabilidad del 35% de que, al escoger a un nadador en iniciación al azar, este sea benjamín

Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian inglés o francés. De ellos 150 estudian inglés y 70 francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés?

En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán e italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

a)

probabilidad	estudiantes	inglés	francés
	200	150	70
	200/200	3/4	7/20

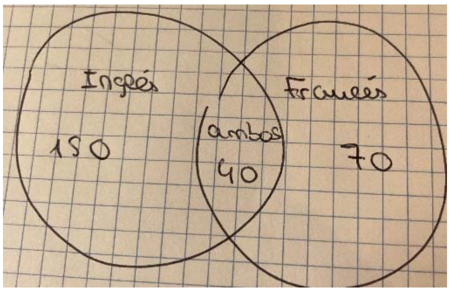
$$\boldsymbol{P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F); \quad P(I \cap F) = P(I) + P(F) - P(I \cup F);}$$

$$\boldsymbol{P(I \cap F) = \frac{3}{4} + \frac{7}{20} - \frac{200}{200}; \qquad P(I \cap F) = 1/10}$$

Como la probabilidad es $1/10$, de 200 personas 20 alumnos estudian inglés y francés.

b)

probabilidad	estudiantes	inglés	francés	ambos	alemán	italiano
	200	150	70	40	¿?	¿?
	200/200	3/4	7/20	1/5	¿?	¿?



Luego 150- 40= 110 solo estudian inglés

Y 70-40= 30 solo estudian francés

Por tanto, 110 que estudian inglés más 30 que estudian francés más 40 que estudian ambos idiomas = 180 estudiantes de inglés, francés o ambos.

200 estudiantes menos 180= 20 estudian otros idiomas (alemán e italiano).

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de:

a) Sacar un número impar.

b) No sacar un 3.

c) Sacar un número mayor que 3.

d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar.

e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

$$Regla\ de\ Laplace: P(suceso) = \frac{número\ de\ casos\ favorables}{número\ de\ casos\ posibles}$$

a) $probabilidad\ de\ que\ salga\ impar = \dfrac{números\ impares}{número\ de\ caras} = \ 3/6 = \ 1/2$

b) $probabilidad\ de\ que\ salga\ 3 = \dfrac{número\ 3}{número\ de\ cara} = \ 1/6$

c) $probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ número\ mayor\ que\ 3 = \dfrac{número\ mayor\ que\ 3}{número\ de\ caras} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

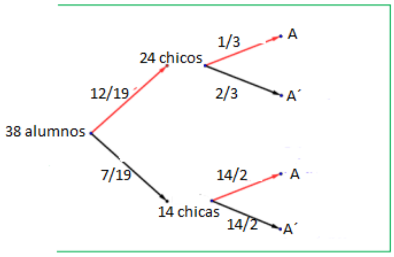
d) $probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ número\ impar\ mayor\ que\ 3 = \frac{número\ impar\ mayor\ que\ 3}{número\ de\ caras} = \frac{1}{6}$

e) $probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ número\ mayor\ que\ 3\ o\ impar = \frac{5}{6}$

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar.

a) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules.

b) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.



C= elegir chico

a) $P(C \cap A) = P(C)P(A/C);$

$P(C \cap A) = \left(\frac{12}{19}\right)\left(\frac{1}{3}\right);$

$P(C \cap A) = \frac{4}{19}$

b) Chicas con ojos azules ½ de 14 = 7

Chicos con ojos azules 1/3 de 24 = 8, en total hay 15 con ojos azules

$$P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = \frac{24}{38} + \frac{15}{38} - \frac{8}{38} = \frac{31}{38}$$

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge.

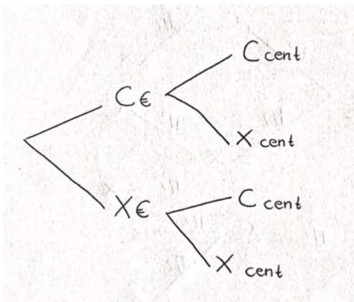
Juan→ $2x$ Jorge→ x Antonio → $2x$

Como la suma de las probabilidades ha de ser 1, 5x=1 X=$\frac{1}{5}$

P(Juan)=$\frac{2}{5}$ P(Jorge)=$\frac{1}{5}$ P(Antonio)=$\frac{2}{5}$

P(Juan o Jorge) = P(Juan) + P(Jorge) = $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, al ser incompatibles.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.



a)$P(cara\ €) = \frac{1}{2}$

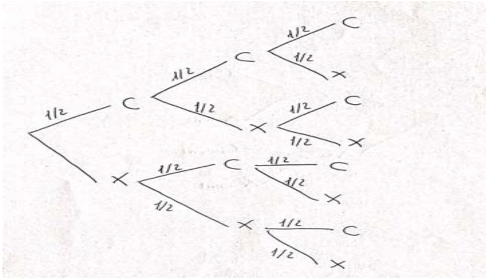
b)$P(C€ \cap X) + P(X \cap Cct) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c)$P(C€ \cap X) + P(X \cap Cct) + P(C€ \cap Cct) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

d)$P(X \cap X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

e)$P(C \cap X) + P(X \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de: A) No salga ninguna cara. B) Salga al menos una cara. C) Salgan dos caras y una cruz.



A) $P(X \cap X \cap X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

B) Si la probabilidad de que no salga ninguna cara es de 1/8, la probabilidad de que salga al menos una cara es 1 – probabilidad de ninguna cara = 1 - 1/8 = 7/8

C) $P(C \cap C \cap X) + P(C \cap X \cap C) + P(X \cap C \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, ... sea 12.

Solución:
La siguiente tabla representa la suma de los valores de ambos dados:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Regla de Laplace: $\mathrm{P(A)} = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ faborables\ A}{n^{\underline{o}}\ casos\ posibles}$

$\mathrm{P(1)} = 0;\quad \mathrm{P(2)} = \frac{1}{36};\quad \mathrm{P(3)} = \frac{2}{36};\quad \mathrm{P(4)} = \frac{3}{36};\quad \mathrm{P(5)} = \frac{4}{36};\quad \mathrm{P(6)} = \frac{5}{36};$

$\mathrm{P(7)} = \frac{6}{36};\quad \mathrm{P(8)} = \frac{5}{36};\quad \mathrm{P(9)} = \frac{4}{36};\quad \mathrm{P(10)} = \frac{3}{36};\quad \mathrm{P(11)} = \frac{2}{36};\quad \mathrm{P(12)} = \frac{1}{36}$

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso “sea 9” y el suceso “sea 10” y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales. ¡Sabes ya más que Galileo!

Textos Marea Verde

Regla de Laplace: $P(A) = \frac{n^{\underline{o}}\ casos\ faborables\ A}{n^{\underline{o}}\ casos\ posibles}$

Con tres dados, el nº de casos posibles son 6^3, o lo que es lo mismo 216

a) Para calcular $P(9)$: Considerando que el 3er dado puede tomar valores del 1-6, los que pueden ser válidos para sumar 9 son representados en la siguiente tabla, en la que aparecen las sumas de los valores de los otros dos dados (el resto de los valores se descartan):

	1	2	3	4	5	6
1	-	-	4 (+5)	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)
2	-	4 (+5)	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)
3	4 (+5)	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)	-
4	5 (+4)	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)	-	-
5	6 (+3)	7 (+2)	8 (+1)	-	-	-
6	7 (+2)	8 (+1)	-	-	-	-

Por lo tanto, de los 216 casos posibles, se tiene que 25 son favorables para $P(9)$ y según Laplace:

$$P(9) = \frac{25}{216}$$

b) Para calcular $P(10)$: Al igual que en el caso anterior, el 3er dado toma valores del 1-6; se representan en la tabla los posibles valores que puedan sumar 10 (Los que no cumplen dicha condición se descartan):

	1	2	3	4	5	6
1	-	-	4 (+6)	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)
2	-	4 (+6)	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)
3	4 (+6)	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)
4	5 (+5)	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)	-
5	6 (+4)	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)	-	-
6	7 (+3)	8 (+2)	9 (+1)	-	-	-

Por lo tanto, de los 216 casos probables, para $P(10)$ son favorables 27 y según Laplace:

$$P(10) = \frac{27}{216}$$

Luego es más probable que salga suma 10

9. **Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par", B al suceso "Salga cruz y un número primo" y al suceso C "Salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.**

Solución:

$$\text{Regla de Laplace: } P(A) = \frac{n^{o}\ casos\ faborables\ A}{n^{o}\ casos\ posibles}$$

La siguiente tabla representa tanto los valores tomados por el dado como las caras de la moneda:

	1	2	3	4	5	6
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6
X	X1	X2	X3	X4	X5	X6

$$A = \{\text{cara y par}\}; \quad B = \{\text{cruz y primo}\}; \quad C = \{n^{o}\ \text{Primo}\}$$

a) $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $\quad P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; $\quad P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$;

b) $P(A \cap B) = 0$, son incompatibles; $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$ Compatibles; $P(B \cap C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ Compatibles.

10. **Lanzamos una moneda 50 veces, ¿Qué es más probable, obtener 50 caras seguidas o obtener en las 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Justifica la respuesta.**

- La probabilidad de los dos casos es la misma porque la moneda no guarda los datos de sus tiradas, es decir, no tiene memoria.

11. **Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y obtener cruz al tirar una moneda.**

- C → Salir cara. - X → Salir cruz.

$$P(C) = 2 \cdot P(X) \rightarrow P(C) + P(X) = 1$$

$$2P(X) + P(X) = 1 \rightarrow 3P(X) = 1 \rightarrow P(X) = \frac{1}{3}\ ; P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\cdot\ P(C) = \frac{2}{3} \qquad \cdot\ P(X) = \frac{1}{3}$$

12. **Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar**

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

· Chico 1,2,3 = probabilidad x cada uno · Chica 1,2 = probabilidad 2x cada una

Calculamos cuánto vale x. $7x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

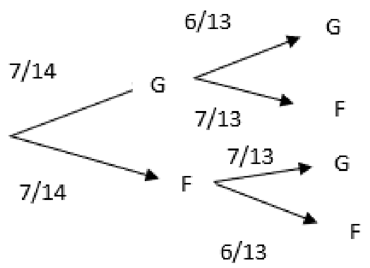
Por tanto, la probabilidad de que gane un chico el torneo es 1/7.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

F={Que sea chica} G={Que sea chico}

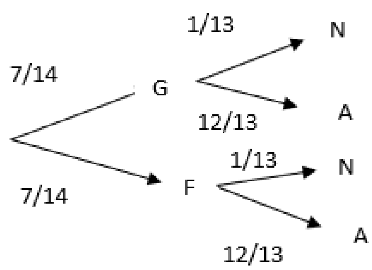
N={Que sean novios} A={Que no sean novios}

a)



$P(G \cap F) = P(G)P(F/G) + P(F)P(G/F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{13} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13}$

b)



$$P(N) = P(G \cap N) + P(F \cap N) = P(G)P(N/G) + P(F)P(N/F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

c) P(al menos una pareja de novios) = 1 – P(ninguna pareja) = $1 - \left(\frac{14}{14} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{11}\right) = 1 - \frac{80}{143} = \frac{63}{143}$

d) P(ninguna pareja) = $\left(\frac{14}{14} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{11}\right) = \frac{80}{143}$

14. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

1	2x
2	x
3	2x
4	x
5	2x
6	x
9x= 1; x = 1/9	

A={número impar} B={número par} C={número primo}

a) $P(A) = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

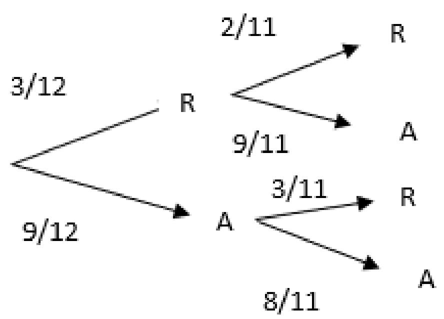
b) $P(C) = P(1) + P(2) + P(3) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

c) $P(A \cap C) = \{1,3,5\} = P(1) + P(3) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

d) $P(A \cup C) = \{1,2,3,5\} = P(1) + P(2) + P(3) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

15. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Al menos una sea rubia. C) Ninguna sea rubia. D) Una sea rubia y la otra no.

R={Que sea rubia} A={No ser rubia}



a) $P(R \cap R) = P(R)P(R/R) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{132} = \frac{1}{22}$

b) $P(al\ menos\ 1\ sea\ rubia) = 1 - P(A \cap A) = 1 - P(A)P(A/A) = 1 - \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{5}{11}$

c) $P(A \cap A) = P(A)P(A/A) = \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6}{11}$

d) $P(A \cap R) + P(R \cap A) = P(A)P(R/A) + P(R)P(A/R) = \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} + \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11} = \frac{9}{22}$

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

A) Realizamos un diagrama cartesiano donde se indican los posibles valores de cada dado al lanzarlos:

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

$$P(A)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles.}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

B)

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

$$P(A)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles.}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

C)

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

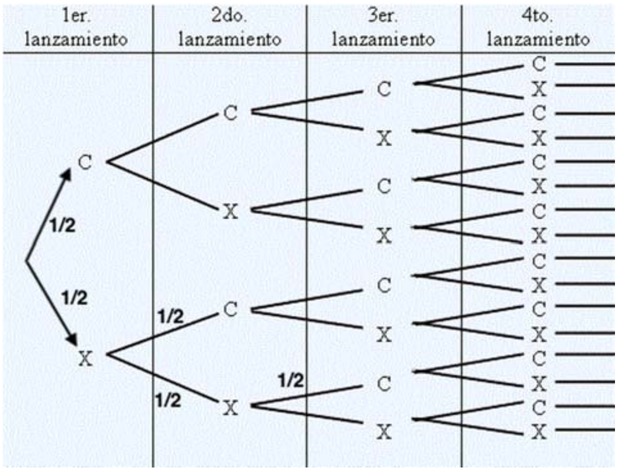
$$P(A)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables}{Número\ de\ casos\ posibles.}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

A) **Salga cara antes del cuarto lanzamiento**: Será la probabilidad de que salga cara en el primer lanzamiento ($\frac{1}{2}$) o que salga cara en el segundo lanzamiento, $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$ o que salga cara en el tercer lanzamiento, $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$P(A)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$



B) **Salga cara después del octavo lanzamiento**: El camino seguido corresponde al que sale X en ocho lanzamientos y en el noveno sale cara. Como la probabilidad de que salga X es siempre ½, y la que salga cara también es ½, la probabilidad de que salga cara después del octavo lanzamiento es:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{1}{512}$$

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

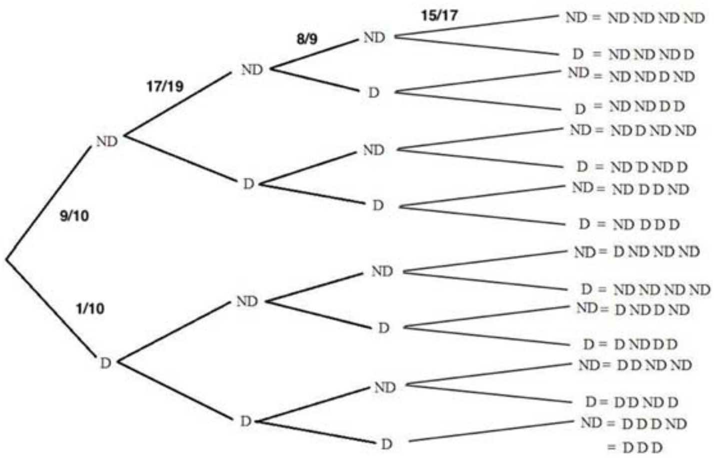
1º saca: $P(D)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

$P(ND)=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$

2ª saca: $P(ND/ND)=\frac{17}{19}$

3ª saca: $P(ND/ND)=\frac{16}{18}=\frac{8}{9}$

4ª saca: $P(ND/ND)=\frac{15}{17}$



$$P(ND)=\frac{9}{10}\cdot\frac{17}{19}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{17}=\frac{12}{19}$$

19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

Se realiza el diagrama cartesiano para ver las sumas de las caras superiores de los dos dados. Se

Textos Marea Verde

analizan cuántas dan 7 y de éstas cuántas ha salido un 3 en alguno de los dados:

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

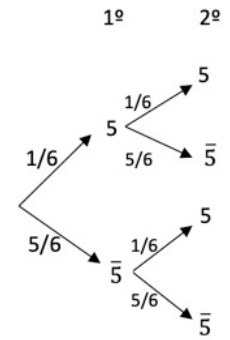
$$P(A)=\frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

b) 11/36 A = Al menos un 5



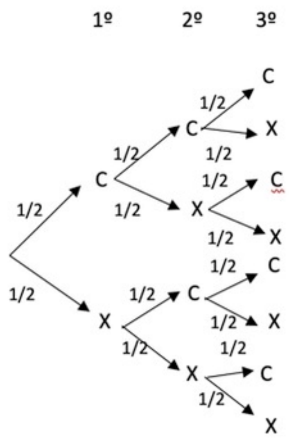
$$P(A) = P(5 \cap 5) + P(5 \cap \bar{5}) + P(\bar{5} \cap 5)$$

$$P(A) = P(5) \cdot P(5/5) + P(5) \cdot P(\bar{5}/5) + P(\bar{5}) \cdot P(5/\bar{5})$$

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras.

c) 3/8 A = sacar dos caras

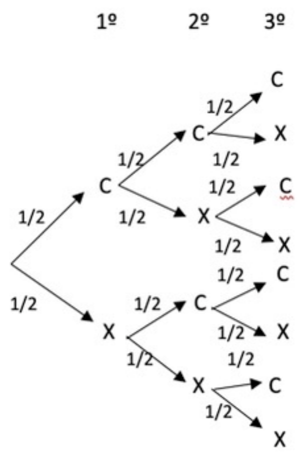


$$P(A) = P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(X/C) + P(C) \cdot P(X/C) \cdot P(C/X) + P(X) \cdot P(C/X) \cdot P(C/C) =$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 A = sacar al menos 2 caras



$$P(A) = P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(C/C) + P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(X/C) + P(C) \cdot P(X/C) \cdot P(C/X) + P(X) \cdot P(C/X) \cdot P(C/C)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

O = $\{Sacar\ oro\}$ M = $\{Salir\ múltiplo\ de\ 2\}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$P(O) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ $\quad$ $P(M) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$$P(O \cup M) = P(O) + P(M) - P(O \cap M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{10} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \mathbf{d)1/4}$$

5. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es siempre correcta:

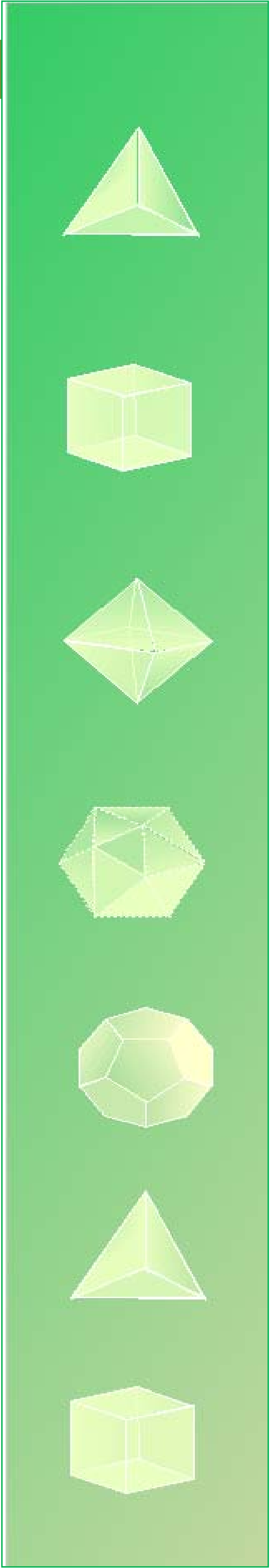
$\mathbf{a)\ P(A) + P(noA) = 1}$ ⟶ Siempre es correcta porque son sucesos contrarios que, al sumarlos, forman el total, 1. La probabilidad del suceso contrario es 1 menos la probabilidad del suceso.

$\mathbf{b)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ ⟶ Solamente es correcta cuando los eventos son incompatibles, es decir, que no pueden realizarse a la vez.

c) $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ ⟶ Solamente es correcta si los sucesos son independientes. La probabilidad del segundo suceso no depende de lo que se ha obtenido en el primero.

Respuesta a)

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde



Matemáticas II
2º Bachillerato
Capítulo 12: Distribuciones de Probabilidad
Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por: CARMEN, JULIA, LAURA, ESPERANZA, ISMAEL F, AMALIA, ISMAEL C, OLIVIA, NATALIA, AITOR, ROSA, AITANA, NEREA, IRENE, CELIA P, LUCÍA, ALEJANDRA, CELIA S, ANDREA.

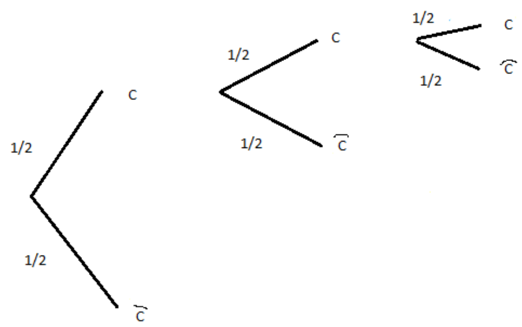
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo

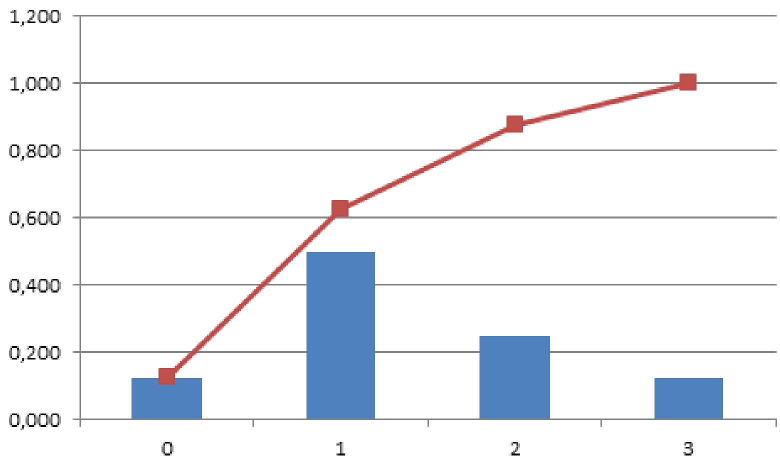
Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

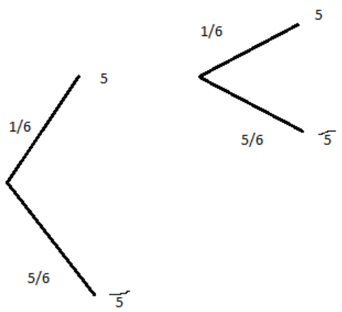
1. Se lanzan 3 monedas y contamos el número de caras que salen. Haz un diagrama un árbol. Escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución. Representa la función de cuantía en un histograma y con una línea la función de distribución.



Caras	P_i	F
0	1/8	1/8
1	1/2	5/8
2	1/4	7/8
3	1/8	1

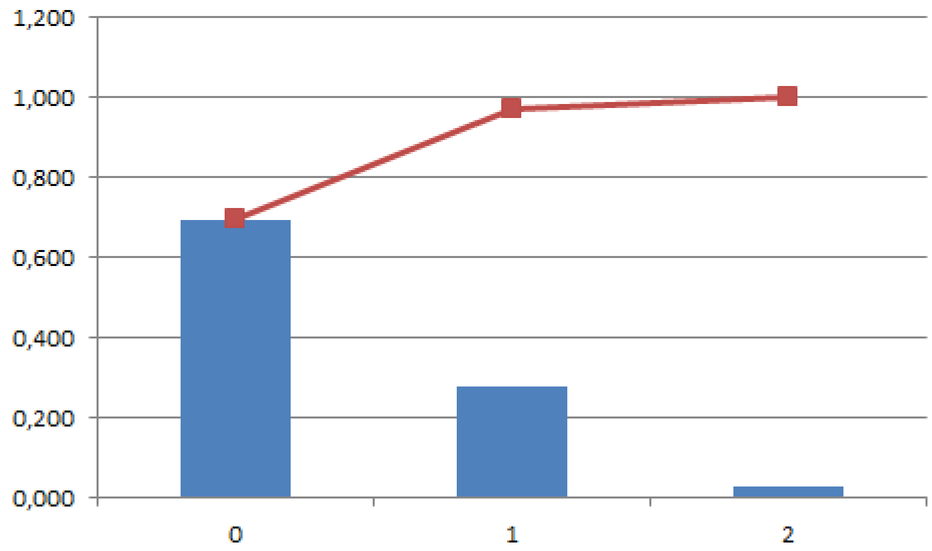


2. Se lanzan 2 dados y contamos el número de 5 que aparecen. Haz un diagrama en árbol, escribe en una tabla la función de cuantía y la función de distribución, y represéntalas gráficamente.



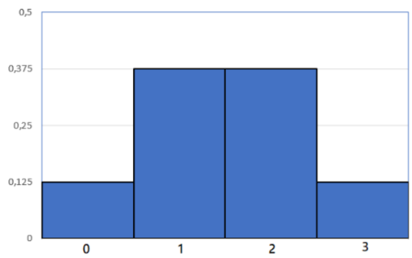
Número 5	**p_i**	**F**
0	**25/36**	**25/36**
1	**10/36**	**35/36**
2	**1/36**	**1**

Textos Marea Verde



3. Se lanzan 3 monedas. Por jugar nos cobran 1 euro, y por cada cara que aparezca ganamos 1 euro. Escribe una distribución de probabilidad y representa el histograma. ¿Cuánto esperas ganar o perder en 100 lanzamientos?

caras	0	1	2	3
probabilidad	1/8	3/8	3/8	1/8
Ganancia	-1	0	1	3



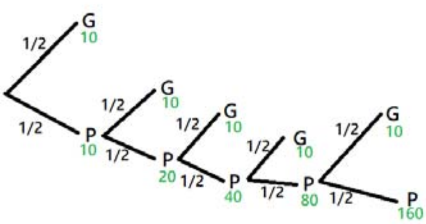
$$\mathrm{E(x)} = (-1)\left(\frac{1}{8}\right) + 0\left(\frac{3}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$100 \cdot \frac{1}{2} = 50€$$

Esperamos ganar 50€

4. Una persona apuesta 10 euros a un juego de tirar una moneda y que salga cruz o cara (o similar). Si gana se retira y deja de jugar. Si pierde, apuesta el doble, 20 euros. Si gana se retira. Si pierde apuesta el doble, 40 euros. Y así sucesivamente. Con esta estrategia siempre acaba ganando 10 euros, pero tiene un defecto, que no lleve suficiente dinero para seguir jugando hasta ganar. Imagina que lleva 500 €. A) Haz un diagrama de árbol y calcula todas las posibilidades. B) La distribución de probabilidad: $Ganancia(x) \rightarrow Probabilidad(x)$. C) ¿Es un juego ventajoso? ¿Y para nuestro jugador? D) Calcula la probabilidad de ganar 10 euros y la de perder 500 euros.

A)



IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

B)

Apuesta	10	20	40	80	160	320, No puede apostar
Pierde	-10	-30	-70	-150	-310	
Gana Tiene	10	10	10	10	10	
Probabilidad	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	

C) Es un juego ventajoso para los creadores de ese juego ya que tendrán muchas ganancias. No es un juego ventajoso para nuestro jugador ya que en caso de que gane solo ganaría 10 euros y recupere el dinero que ya tenía él desde el principio.

D) $P(ganar\ 10€) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$.

Se trata de la suma de una progresión geométrica de razón ½, $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

No puede perder los 500€ pues en la 5ª jugada ya ha perdido 310€ y no puede apostar más.

5. Lanzamos dos dados. Si apostamos al 7 y sale, recuperamos tres veces lo apostado. Si apostamos que sale menor que 7 y sale, recuperamos lo apostado, y lo mismo si apostamos que sale mayor que 7. ¿Cuál es la mejor estrategia?

1º. Se hace una tabla:

	Sale 7	< 7	> 7
Ganancia	*3x*	*x*	*x*
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{15}{36}$

2º. Multiplicamos las ganancias por las probabilidades y el resultado que salga mayor es el más favorable. Sea x la cantidad apostada.

- 3·x €·6/36 = 0.5€
- x €·15/36 = 0.42€

La mejor estrategia es apostar por el 7 ya que su porcentaje de que salgas beneficiado es superior a las otras posibilidades.

6. Se ha comprobado que la distribución de probabilidad del sexo de un recién nacido es:

Sexo bebé	chica	chico
Probabilidad	**0,485**	**0,515**

En un hospital van a nacer hoy 10 bebés. Escribe la expresión de probabilidad de que nazcan 7 chicas.

1º. Lo más importante es decir a que llamas x.

X: nacer chicas, X sigue una B(10, 0,485)

2º. Luego aplicamos la fórmula de distribución binomial y obtenemos el resultado.

$$P(x=7) = \binom{10}{7} \cdot (0{,}485)^7 \cdot (0{,}515)^3 = 0{,}1034$$

La probabilidad de que nazcan 7 niñas de los 10 bebés que van a nacer es un 0,1034.

***7.* Se estima que el porcentaje de hogares que utiliza una determinada marca de tomate frito es del 12 %. En una muestra de 20 hogares, ¿qué probabilidad hay de encontrar entre 6 y 15 que lo utilicen? (No calcules, soló plantea como lo calcularías).**

1º. Lo más importante es decir a que llamas X.

X: `$Hogar\ que\ utiliza\ la\ marca\ de\ tomate\ frito$´ → B(20, 0,12)

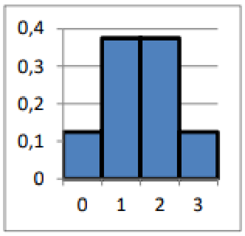
$$P(6 < x < 15) = P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10) +$$
$$+P(x = 11) + P(x = 12) + P(x = 13) + P(x = 14) =$$
$$= \binom{20}{7} \cdot 0{,}12^7 \cdot 0{,}88^{13} + \binom{20}{8} \cdot 0{,}12^8 \cdot 0{,}88^{12} \binom{20}{9} \cdot 0{,}12^9 \cdot 0{,}88^{11} + \binom{20}{10} \cdot 0{,}12^{10} \cdot 0{,}88^{10} +$$
$$+ \binom{20}{11} \cdot 0{,}12^{11} \cdot 0{,}88^9 + \binom{20}{12} \cdot 0{,}12^{12} \cdot 0{,}88^8 + \binom{20}{13} \cdot 0{,}12^{13} \cdot 0{,}88^7 + \binom{20}{14} \cdot 0{,}12^{14} \cdot 0{,}88^6$$

8. Lanzamos dos monedas y contamos el número de caras. Calcula la media y la desviación típica de dicho experimento.

- Definimos la variable: $x \to sacar\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(2, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \to q = 1 - \frac{1}{2} \to q = \frac{1}{2}$
- Calculamos la **media:** $\mu = np \to \mu = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
- Calculamos la desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} \to \sigma = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \to \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$

9. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 3 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 1. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 1.

- Definimos la variable: $x \to salir\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \to q = 1 - \frac{1}{2} \to q = \frac{1}{2}$



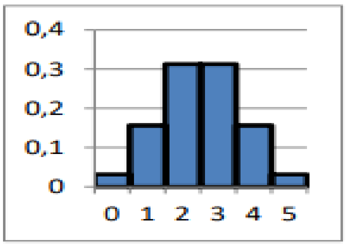
n = 3. B(3, 1/2).

a) $P(x < 1) = p(x = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) $P(x \leq 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

10. Observa el histograma del experimento de lanzar una moneda 5 veces. Indica las siguientes probabilidades. A) Probabilidad de que el número de caras sea menor que 3. B) Probabilidad de que el número de caras sea menor o igual a 3.

- Definimos la variable: $x \to sacar\ cara$
- Calculamos que: $P(x) = \frac{1}{2} = p$
- Tenemos que: $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$
- Calculamos q: $q = 1 - p \to q = 1 - \frac{1}{2} \to q = \frac{1}{2}$



$n = 5.\ B(5,\ 1/2).$

a) $P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$

b) $P(x \leq 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{16}$

11. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar una moneda 15 veces el número de caras sea menor que 5.

DATOS

n=15 k=nº de caras

p(éxito) = $\frac{1}{2}$ = p q= P(fracaso)= 1 – p = 1 $- \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

FÓRMULA

$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

SOLUCIÓN:

$$P(x < 5) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) =$$
$$= \binom{15}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} + \binom{15}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} + \binom{15}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} +$$
$$+ \binom{15}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \binom{15}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11}$$

12. Escribe la expresión (no lo calcules) de la probabilidad de que al lanzar un dado 15 veces el número de cincos sea mayor que 10.

DATOS

n=15 k= número de 5s > 10 p=$\frac{1}{6}$ q = 1 – p = 1 $- \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

FÓRMULA

$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Textos Marea Verde

SOLUCIÓN:

$$P(x > 10) = P(x = 11) + P(x = 12) + P(x = 13) + P(x = 14) + P(x = 15) =$$

$$= \binom{15}{11} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4} + \binom{15}{12} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3} + \binom{15}{13} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{13} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2} +$$

$$+ \binom{15}{14} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{14} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1} + \binom{15}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{0}$$

13. En el control de calidad de bombillas de bajo consumo de una fábrica se ha comprobado que el 90% son buenas. Se toma una muestra de 500 bombillas. Por término medio, ¿cuántas serán de buena calidad? Calcula la media, la varianza y la desviación típica.

DATOS

n=500 p = 0,9 q = 1 − p = 1 – 0,9 = 0,1 B(n , p) = B(500 , 0,9)

FÓRMULAS

Media: $\mu = n \cdot p$ Varianza: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ Desviación típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{\sigma^2}$

SOLUCIÓN:

$\mu = 500 \cdot 0{,}9 = 450$ $\sigma^2 = 500 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 45$ $\sigma = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6{,}7$

14. En el estudio sobre una nueva medicina para la hepatitis C se ha comprobado que produce curaciones completas en el 80% de los casos tratados. Se administra a mil nuevos enfermos, ¿cuántas curaciones esperaremos que se produzcan?

DATOS

n= 1000 p = 0,8 B(n , p); B(1000 , 0'8)

FÓRMULA

$E(x) = \mu = n \cdot p$

SOLUCIÓN:

$\mu = 1000 \cdot 0{,}8 = 800$ Esperamos que se produzcan 800 curaciones.

15. Utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para indicar los intervalos de probabilidad para el juego de apostar a obtener más de 7 al tirar dos dados.

(Ayuda: $\mu = -\frac{1}{6}$ *y* $\sigma \approx 0{,}986$)

De acuerdo con la desigualdad de *Chebycheff,* que dice: $P(|x - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ *y teniendo en cuenta los valores de* $\mu = -\frac{1}{6}$ *y* $\sigma \approx 0{,}986$*,* los intervalos de probabilidad para 2 y 3 desviaciones típicas son:

$$P\left(\left|x + \frac{1}{6}\right| \leq 2 \cdot 0{,}986\right) \geq 1 - \frac{1}{2^2} \rightarrow P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 2 \cdot \sigma)$$

$\rightarrow P(-2{,}139 \leq x \leq 1{,}805) \geq 0{,}75$ el intervalo sería $(-2{,}139,\ 1{,}805)$

$$P\left(\left|x + \frac{1}{6}\right| \leq 3 \cdot 0{,}986\right) \geq 1 - \frac{1}{3^2} \rightarrow P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 3 \cdot \sigma)$$

$\rightarrow P(-3{,}125 \leq x \leq 2{,}791) \geq 0{,}89$ el intervalo sería $(-3{,}125,\ 2{,}791)$

Textos Marea Verde

16. En la fábrica de bombillas de bajo consumo con B (500, 0.9) utiliza la desigualdad de *Chebycheff* para determinar los intervalos tales que $P(a \leq x \leq b) \geq 0,75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0,89$.

Se trata de una distribución binomial B(500, 0,9) cuyos parámetros son :

Media: μ= np; $\mu = 500 \cdot 0,9 = 450$ Varianza: V=npq; V= 500 · 0,9 · 0,1 = 45
Desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{45} = 6,708$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebycheff, $P(|x-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, para k=2 y k=3:

$\mathrm{P}(\mu - 2\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 2\cdot\sigma) \geq 0,75 \rightarrow \mathrm{P}(450 - 2\cdot 6,708 \leq x \leq 450 + 2\cdot 6,708) \geq 0,75$

$\mathrm{P}(436,584 \leq x \leq 463,416) \geq 0,75$ el intervalo sería $(437,\ 464)$

$P(\mu - 3\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 3\cdot\sigma) \geq 0,89 \rightarrow P(450 - 3\cdot 6,708 \leq x \leq 450 + 3\cdot 6,708) \geq 0,89$

$\mathrm{P}(429,876 \leq x \leq 470,124) \geq 0,89$ el intervalo sería $(430, 471)$

17. En la medicina para la hepatitis C con B(1000, 0,8) utiliza la desigualdad de Chebycheff para determinar los intervalos tales que la probabilidad de curación sea $P(a \leq x \leq b) \geq 0,75$, y que $P(c \leq x \leq d) \geq 0,89$.

Se trata de una distribución binomial B(1000, 0,8) cuyos parámetros son :

Media: μ= np; $\mu = 1000 \cdot 0,8 = 800$ Varianza: V=npq; V= 1000 · 0,8 · 0,2 = 160
Desviación típica: $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{160} = 12,649$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebycheff, $P(|x-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$, para k=2 y k=3:

$P(\mu - 2\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 2\cdot\sigma) \geq 0,75 \rightarrow P(800 - 2\cdot 12,649 \leq x \leq 800 + 2\cdot 12,649) \geq 0,75$

$\mathrm{P}(774,702 \leq x \leq 825,298) \geq 0,75$ el intervalo sería $(775, 826)$

$P(\mu - 3\cdot\sigma \leq x \leq \mu + 3\cdot\sigma) \geq 0,75 \rightarrow P(800 - 3\cdot 12,649 \leq x \leq 800 + 3\cdot 12,649) \geq 0,75$

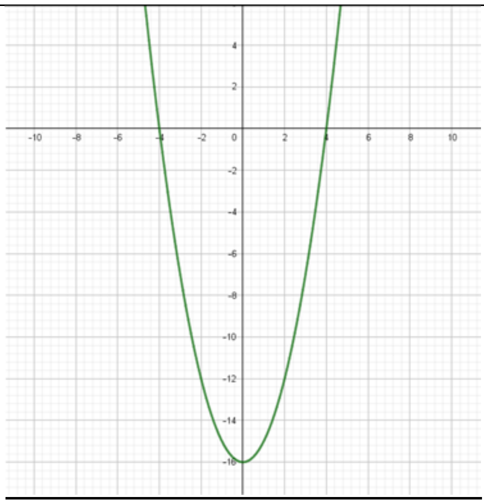
$\mathrm{P}(762,053 \leq x \leq 837,947) \geq 0,89$ el intervalo sería $(763,\ 838)$

18. Calcula A para que $f(x) = A(x^2 - 16)$ sea una función de densidad. Determina el dominio. Calcula la media y la varianza.

a)

	Para que f(x) sea una función de densidad se debe cumplir que:

Textos Marea Verde



$\int_a^b f(x)\,dx = 1$ y

$f(x) \geq 0$

$f(x)$ es negativa en $-4 \leq x \leq 4$

y positiva en el resto, por tanto,

para que sea función de densidad

A ha de ser negativa

Los límites serán -4 y 4

$$\int_{-4}^{4} A\,(x^2-16)dx = A\int_{-4}^{4}(x^2-16)\,dx = A\left[\frac{x^3}{3}-16x\right]_{-4}^{4} =$$
$$= A\left[\left(\frac{4^3}{3}-16\cdot 4\right)-\left(\frac{(-4)^3}{3}-16\cdot(-4)\right)\right] = A\cdot\left(\frac{-256}{3}\right)$$
$$\frac{-256}{3}A = 1 \to A = \frac{-3}{256}$$

b) $Dom\, f(x) = \{-4 \leq x \leq 4\}$

c)

$$\mu = \int_a^b x\cdot f(x)\,dx = \int_{-4}^{4} x\cdot\frac{-3}{256}(x^2-16)\,dx = \frac{-3}{256}\int_{-4}^{4} x\cdot(x^2-16)\,dx =$$
$$= \frac{-3}{256}\int_{-4}^{4}(x^3-16x)\,dx = -\frac{3}{256}\left[\frac{x^4}{4}-\frac{16x^2}{2}\right]_{-4}^{4} =$$
$$= \frac{-3}{256}\left[\left(\frac{4^4}{4}-\frac{16\cdot 4^2}{2}\right)-\left(\frac{(-4)^4}{4}-\frac{16\cdot(-4)^2}{2}\right)\right] = 0$$

d)

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2\cdot f(x)\,dx = \int_{-4}^{4} x^2\cdot\frac{-3}{256}(x^2-16)\,dx = \frac{-3}{256}\int_{-4}^{4} x^2(x^2-16)\,dx =$$
$$= \frac{-3}{236}\int_{-4}^{4}(x^4-16x^2)\,dx = \frac{-3}{236}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{16x^3}{3}\right]_{-4}^{4} =$$
$$= \frac{-3}{256}\left[\left(\frac{4^5}{5}-\frac{16\cdot(4)^3}{3}\right)-\left(\frac{(-4)^5}{5}-\frac{16\cdot(-4)^3}{3}\right)\right] = \frac{16}{5}$$

19. Utiliza la tabla de la normal tipificada para calcular:

a) ***P*(*z* ≤ 0,37);** Buscamos en la primera columna el 0,3, y el 0,07 lo buscamos en la primera fila.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

Obtenemos que $P(z \leq 0{,}37)$=**0,6443**

b) $P(z < 1{,}51)$; Buscamos en la primera columna el 1,5, y el 0,01 lo buscamos en la primera fila. Obtenemos que $P(z < 1{,}51)$ = **0,9345**

c) $P(z \geq 0{,}87)$; como el área total es de 1, y la curva simétrica,

$P(z \geq 0{,}87) = 1 - P(z \leq 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = \mathbf{0,1922}$

d) $P(z \leq -0{,}87)$; como el área total es de 1, y la curva simétrica,

$P(z \geq -0{,}87) = 1 - P(z \leq 0{,}87) = 1 - 0{,}8078 = \mathbf{0,1922}$

e) $P(0{,}32 < z < 1{,}24)$; calculamos $P(0{,}32 < z < 1{,}24) = P(z < 1{,}24) - P(z < 0{,}32)$.
Buscamos en la tabla y obtenemos 0,8907 - 0,6217 = **0,269**

20. Se trata a pacientes con trastorno de sueño con un tratamiento que modela el número de días con una distribución normal de media 290 días y desviación típica 30. Calcula la probabilidad de que al tomar una persona al azar su tratamiento dure más de 300 días.

X: tener cáncer, X→N (290, 30)

$$P(X > 300) = P\left(Z > \frac{300-290}{30}\right) = P(Z > 0{,}33) = 1 - P(Z \leq 0{,}33) = 1 - 0{,}6293 = 0{,}3707$$

$$\underline{0{,}3707 \cdot 100 = \mathbf{37,07\%}}$$

21. En una estación meteorológica que las precipitaciones anuales de lluvia tienen una media de 450 mm/m² con una desviación típica de 80mm/m². Suponemos que la variable aleatoria sigue una distribución normal. Calcula la probabilidad de que: a) Este próximo año la precipitación exceda los 500 mm/m². b) La precipitación este entre 400 y 510 mm/m². c) La precipitación sea menor de 300 mm/m².

Solución:

$$\mu = 450 \text{ mm} / \text{m}^2; \quad \sigma = 80 \text{ mm} / \text{m}^2 \quad X \sim N(450,80)$$

a) $P(X \geq 500) \rightarrow Z \sim N(0,1)$

$$P\left(Z \geq \frac{x-\mu}{6}\right) \rightarrow P\left(Z \geq \frac{500-450}{80}\right) = P(Z \geq 0{,}625) = 1 - P(Z \leq 0{,}625) =$$
$$= 1 - 0{,}7324 = 0{,}2676$$

b) $P(400 \leq X \leq 510) \rightarrow Z \sim N(0,1)$

$$P\left(\frac{x_1-\mu}{6} \leq Z \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{400-450}{80} \leq Z \leq \frac{510-450}{80}\right) = P(-0{,}635 \leq Z \leq 0{,}75) =$$
$$= P(Z \leq 0{,}75) - P(Z \leq -0{,}625) = P(Z \leq 0{,}75) - \big(1 - P(Z \geq 0{,}625)\big) =$$
$$= 0{,}7734 - 0{,}2676 = 0{,}5058$$

c) $P(x < 300) \rightarrow Z \sim N(0,1)$

$$P(Z < 300) = P\left(Z < \frac{300-450}{80}\right) = P(Z < -1{,}875) = 1 - P(Z < 1{,}875) =$$
$$= 1 - 0{,}9693 = 0{,}0307$$

22. **En el caso del problema anterior de una N(450, 80) determina la probabilidad de que la variable esté en los intervalos (μ – σ, μ + σ), (μ – 2σ, μ + 2σ), (μ – 3σ, μ + 3σ).**

A) (μ – σ, μ + σ)

(450-80, 450+80) ; $P(370 \leq Z \leq 530) =$

$= P\left(\frac{370-450}{80} \leq Z \leq \frac{530-450}{80}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$

$P(Z \leq 1) = 0{,}8413$; $P(Z \leq -1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Luego P(μ – σ < x < μ + σ) =0,8413 – 0,1587 = 0.6826

B) (μ – 2σ, μ + 2σ)

(450-2·80, 450+2·80) ; $P(290 \leq Z \leq 610) =$

$$= P\left(\frac{290-450}{80} \leq Z \leq \frac{610-450}{80}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$$

$P(Z \leq 2) = 0{,}9772$ $P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

Luego P(μ – 2σ < x < μ + 2σ) =0,9772 – 0,0228 = 0.9544

C) (μ – 3σ, μ + 3σ)

(450-3·80, 450+3·80) ; $P(210 \leq Z \leq 690) =$

$$= P\left(\frac{210-450}{80} \leq Z \leq \frac{690-450}{80}\right) = P(-3 \leq Z \leq 3) = P(Z \leq 3) - P(Z \leq -3)$$

$P(Z \leq -3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013$ $P(Z \leq 3) = 0{,}9987$

Luego P(μ – 3σ < x < μ + 3σ) =0,9987 – 0,0013 = 0.9974

23.- En una fábrica de coches se hacen pruebas para conocer el tiempo que tardan sus vehículos en alcanzar la velocidad punta. Se considera que esa variable aleatoria tiempo se distribuye según una distribución normal de media 20 s y desviación típica 2 s. Calcula las probabilidades siguientes: a) Que un vehículo alance su velocidad punta a los 25 s. b) Alcance su velocidad punta en menos de 25 s. c) La alcance entre 18 s y 22 s. d) ¿Qué velocidad punta consideras que tendrán los vehículos rápidos? e) ¿Y los lentos?

X: segundos necesarios para alcanzar la velocidad punta. $\mu = 20$ $\sigma = 2$

a) $P(x = 25) \to P(24{,}5 \leq x' \leq 25{,}5) \to$ $tipificamos \to P\left(\frac{24{,}5-20}{2} \leq z \leq \frac{25{,}5-20}{2}\right) =$
$P(2{,}25 \leq z \leq 2{,}75) = P(z \leq 2{,}75) - P(z \leq 2{,}25) = 0{,}9970 - 0{,}9878 = 0{,}0092$

b) $P(x \leq 25) \to tipificamos \to P\left(z \leq \frac{25-20}{2}\right) = P(z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$

c) $P(18 \leq x \leq 22) \to tipificamos \to P\left(\frac{18-20}{2} \leq z \leq \frac{22-20}{2}\right) = P(-1 \leq z \leq 1) = P(z \leq 1) -$
$P(z \leq -1) = P(z \leq 1) - [1 - P(z \leq 1)] = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}8413 - 0{,}1587 =$
$0{,}6826$

d) $P(x \geq 20) = 1 - P(x \leq 20) \rightarrow \text{tipificamos} \rightarrow 1 - P\left(z \leq \frac{20-20}{2}\right) = 1 - P(z \leq 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

e) $P(x \leq 20) \rightarrow tipificamos \rightarrow P\left(z \leq \frac{20-20}{2}\right) = P(z \leq 0) = \frac{1}{2}$

24. Se lanza una moneda mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de caras obtenidas esté entre 400 y 600? ¿y de que sea mayor de 800?

a) $x \rightarrow salir\ cara \qquad n = 1000 \qquad p = \frac{1}{2}$

$$\mu = np = 1000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 5\sqrt{10}$$

$$x \rightsquigarrow B\left(1000, \frac{1}{2}\right) \qquad z \rightsquigarrow N(500, 5\sqrt{10})$$

$P(\mathbf{400} < \mathbf{x} < \mathbf{600}) \rightarrow P(400{,}5 \leq x' \leq 599{,}5) \rightarrow \text{tipificamos}$

$$\rightarrow P\left(\frac{400{,}5 - 500}{5\sqrt{10}} \leq z \leq \frac{599{,}5 - 500}{5\sqrt{10}}\right) = P(-6{,}29 \leq z \leq 6{,}29) = P(z \leq 6{,}29) - P(z \leq -6{,}29)$$
$$= P(z \leq 6{,}29) - P(z \geq 6{,}29) = P(z \leq 6{,}29) - [1 - P(z \leq 6{,}29)] = 1 - 0 = 1$$

$$P(x > 800) = P(x' \geq 800{,}5) \rightarrow tipificamos \rightarrow P\left(z \geq \frac{800{,}5 - 500}{5\sqrt{10}}\right) = P(z \geq 19) =$$

$$= 1 - P(z \leq 19) = 1 - 1 = 0$$

25. En una fábrica de bombillas de bajo consumo se sabe que el 70% de ellas tienen una vida media superior a 1000 horas. Se toma una muestra de 50 bombillas, ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 20 y 30 cuya vida media sea superior a mil horas?, ¿y la probabilidad de que haya más de 45 cuya vida sea superior a 1000 horas?

X: bombilla cuya vida media es superior a 1000 horas. $X \rightsquigarrow B(50,\ 0{,}7)$

$n = 50 \qquad p = \frac{70}{100}$

$$\mu = np = 50 \cdot \frac{70}{100} = 35$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot \frac{70}{100}\left(1 - \frac{70}{100}\right)} = \frac{\sqrt{42}}{2}$$

a) $P(20 < X < 30) \rightarrow P(20{,}5 \leq X' \leq 29{,}5) \rightarrow tipificamos \rightarrow P\left(\frac{20{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}} \leq Z \leq \frac{29{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}}\right) =$

$P(-4{,}47 \leq z \leq -1{,}69) = P(z \leq -1{,}69) - (z \leq -4{,}47) = P(z \geq 1{,}69) - (z \geq 4{,}47) =$
$[1 - P(z \leq 1{,}69)] - [1 - P(z \leq 4{,}47)] = P(1 - 0{,}9545) - (1 - 1) = 0{,}0455 - 0 = 0{,}0455$

b) $P(x > 45) \rightarrow P(x' \geq 45{,}5) \rightarrow tipificamos \rightarrow P\left(x \geq \frac{45{,}5-35}{\frac{\sqrt{42}}{2}}\right) = P(x \geq 3{,}24) = \qquad 1 -$
$P(x \leq 3{,}24) = 1 - 0{,}9994 = 0{,}0006$

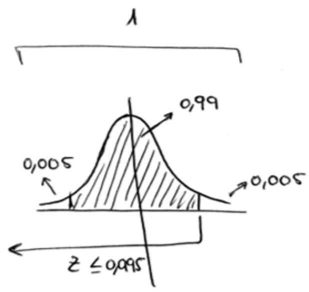
26.- Se investigan a pie de urna las preferencias de votos en la Comunidad de Madrid. De 2000 encuestas 700 votan al partido X. Cuantos tendrían que votar al partido estudiado para que ganara con un 99% de confianza.

$n = 2000 \qquad p = \frac{700}{2000} \qquad k = nº\ de\ votos \qquad P(x = k) = 0{,}99 \qquad X \rightsquigarrow B\left(2000, \frac{7}{20}\right)$

$$\binom{2000}{k} \cdot \left(\frac{7}{20}\right)^k \cdot \left(\frac{13}{20}\right)^{2000-k} = 0{,}99$$

$\mu = np = 2000 \cdot \frac{7}{20} = 700; \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{20}} = \sqrt{455}; \quad Z \rightsquigarrow N(700, \sqrt{455})$

$P(X = k) \to P(k - 0{,}5 \le X' \le k + 0{,}5) \to tipificamos \to P\left(\frac{k - 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}} \le Z \le \frac{k + 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}}\right)$
$= 0{,}99$



$$0{,}995 = P(z \le 2{,}575) = P\left(z \le \frac{k + 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}}\right);$$

$$\frac{k + 0{,}5 - 700}{\sqrt{455}} = 2{,}575;$$

$$k = \left(2{,}575 \cdot \sqrt{455}\right) + 700 - 0{,}5 = 754{,}43$$

$$k = 754{,}43$$

Deben votar al partido 755 personas o más.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Se lanza un dado tres veces y se cuenta el número de treses que aparecen. Dibuja el histograma, la función de cuantía y la función de distribución. Calcula la media y la desviación típica.

Con un diagrama de árbol podemos calcular las siguientes probabilidades:

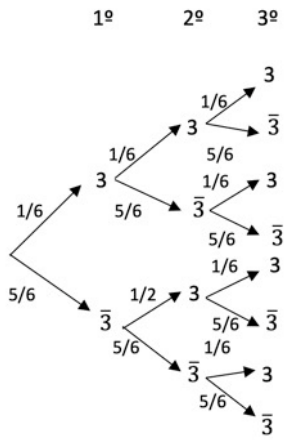
X = número de treses que se obtiene.

X_0 (ningún tres) = $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

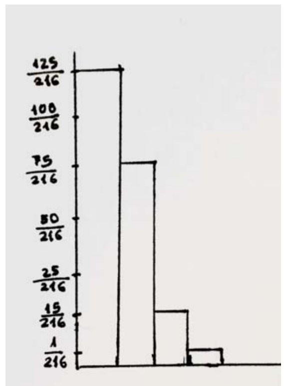
X_1(un tres) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{75}{216}=\frac{25}{72}$

X_2 (dos treses) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$

X_3 (tres treses) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$



Xi	Pi	F
0	$\frac{125}{216}$	$\frac{125}{216}$
1	$\frac{25}{72}$	$\frac{25}{27}$
2	$\frac{5}{72}$	$\frac{215}{216}$
3	$\frac{1}{216}$	$\frac{216}{216}=1$
	1	



$$\bar{x}=\sum Xi\cdot Pi \qquad \Longrightarrow \bar{X}=0\cdot\frac{125}{216}+1\cdot\frac{25}{72}+2\cdot\frac{5}{72}+3\cdot\frac{1}{216}=0{,}5$$

$$\sigma=\sqrt{\sum Pi\cdot Xi^2-\bar{x}^2}=\sqrt{\left(0^2\cdot\frac{125}{216}+1^2\cdot\frac{25}{72}+2^2\cdot\frac{5}{72}+3^2\cdot\frac{1}{216}\right)-0{,}5^2}=0{,}6455$$

2. Lanzamos 4 monedas. Por cada cara que salga sacamos 5 euros, pero debemos pagar 3 euros por jugar. ¿Cuánto esperas ganar en una jugada? ¿En 20 jugadas? ¿Y en 100 jugadas?

Caras	Pi	Ganancia
0	$\frac{1}{16}$	-3
1	$\frac{4}{16}$	2
2	$\frac{6}{16}$	7
3	$\frac{1}{216}$	12
4	$\frac{1}{16}$	17
	1	

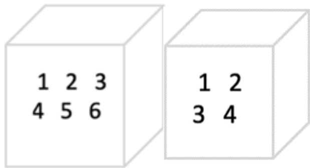
- Una jugada = $-3\cdot\frac{1}{16}+2\cdot\frac{4}{16}+7\cdot\frac{6}{16}+12\cdot\frac{4}{16}+17\cdot\frac{1}{16}=7{,}3€$

- 20 jugadas = $7{,}3€\cdot 20=146€$

- 100 jugadas =$7{,}3€\cdot 100=730€$

Textos Marea Verde

3. Disponemos de dos urnas, la primera con 6 bolas idénticas numeradas del 1 al 6; la segunda con 4 bolas idénticas numeradas del 1 al 4. Sacamos a la vez una bola de cada urna, y consideramos la variable aleatoria, “suma de puntos”. A) Calcula la distribución de probabilidad y dibuja el histograma correspondiente. B) Si sacamos más de 5 puntos ganamos 10 euros, y en caso contrario perdemos la misma cantidad. ¿Es un juego equitativo?



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

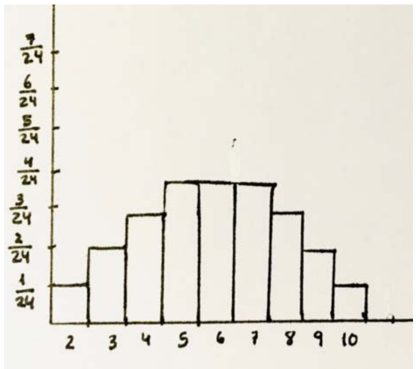
nº≤5

nº>5

Xi	Pi
2	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(1)$
3	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(2)$
4	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3)$
5	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
6	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
7	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(4)$
8	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3)$
9	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(2)$
10	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(1)$
	1

Xi	Pi	Ganar
nº>5	$\frac{14}{24}$	10 €
nº<5	$\frac{10}{24}$	-10 €

$$E(x) = 10 \cdot \frac{14}{24} + (-10) \cdot \frac{10}{24} = 1{,}66$$



No es un juego equitativo ya que la esperanza es un número distinto de cero (en este caso positivo), por lo que se espera que gane más el jugador que la banca.

4. La población activa de un cierto país se puede dividir en los que tienen estudios superiores y los que no los tienen, siendo el primero de un 20 %. Elegimos 10 personas de la población activa al azar. Escribe la expresión de todas las posibilidades y sus probabilidades. Calcula la probabilidad de que haya 9 o 10 que tengan estudios superiores.

Distribución binomial: B~(10, $\frac{1}{5}$); n= 10, p= $\frac{1}{5} = 0{,}2$, q= $\frac{4}{5} = 0{,}8$

Expresión para todas las posibilidades: $P(X = x) = \binom{10}{x} \cdot 0{,}2^{x} \cdot 0{,}8^{10-x}$

Probabilidad de que haya 9 o 10 con estudios superiores:

Textos Marea Verde

$P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}\cdot 0{,}2^9\cdot 0{,}8^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}2^{10}\cdot 0{,}8^0=0{,}0000042$

Existe un 0,0000042 de probabilidad de al coger 10 ciudadanos, 9 o 10 de ellos tengan estudios superiores.

5. Si p(x) es la probabilidad de obtener x éxitos en una distribución binomial B(n, p), y p(x+1) es la de obtener x+1 éxitos, comprueba que se verifica la siguiente relación recurrente:

$\mathbf{P(x+1)=\frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}}$

$\mathrm{p(x+1)}=\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{x}+1}\cdot \mathrm{p^{x+1}}\cdot \mathrm{q^{n-x-1}}=\frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(x+1)!(n-x-1)!}}\cdot \mathrm{p^{x+1}}\cdot \mathrm{q^{n-x-1}}=$

$=\frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{(x+1)!(n-x-1)!}}\cdot \mathrm{p^x}\cdot \mathrm{p}\cdot \frac{\mathrm{q^{n-x}}}{\mathrm{q}}=\frac{\mathrm{n!(n-x)}}{\mathrm{x!(x+1)(n-x)\cdot(n-x-1)!}}\cdot \mathrm{p^x}\cdot \mathrm{p}\cdot \frac{\mathrm{q^{n-x}}}{\mathrm{q}}=$

$\frac{\mathrm{n!(n-x)}}{\mathrm{x!(x+1)(n-x)!}}\cdot \mathrm{p^x}\cdot \mathrm{p}\cdot \frac{\mathrm{q^{n-x}}}{\mathrm{q}}=\frac{\mathrm{n!}}{\mathrm{x!(n-x)!}}\cdot \mathrm{p^x}\cdot \mathrm{q^{n-x}}\cdot \mathrm{p}\cdot \frac{1}{\mathrm{q}}\cdot\frac{\mathrm{(n-x)}}{\mathrm{(x+1)}}=\mathrm{p(x)}\cdot\frac{\mathrm{(n-x)p}}{\mathrm{(x+1)q}};$

Por tanto: $p(x+1)=\frac{p(x)(n-x)p}{(x+1)q}$

6. En una ruleta hay 37 números numerados del 0 al 36, de los cuales 18 son pares y 18 impares. Si sale el 0 gana la banca. Jugamos al 2 por uno a impar, apostamos 10 euros a impar, y la banca nos paga 20 euros si sale impar, y se queda con nuestros 10 euros si no sale. ¿Te parece un juego equitativo?

$p(ganar\ 10)=\frac{18}{37}\qquad p(perder\ 10)=\frac{19}{37}$

$E(x)=10\cdot\frac{18}{37}-10\cdot\frac{19}{37}=-\frac{10}{37}$

No es equitativo ya que al ser negativa la esperanza es favorable para la banca.

7. Juego de San Petersburgo: Se lanza una moneda no trucada hasta que aparezca cara. Si sale en el primer lanzamiento, se ganan 10 euros, si sale en el segundo, 20, si en el tercero, 40…y en el n-ésimo , $\mathbf{10\cdot 2^{n+1}}$. Calcula la ganancia media si sólo se puede lanzar 5 veces la moneda. ¿Y si se puede lanzar 10 veces?

$p(10)=\frac{1}{2}\quad p(20)=\frac{1}{4}\quad p(40)=\frac{1}{8}\quad p(80)=\frac{1}{16}\quad p(160)=\frac{1}{32}$

$E(x)=10\cdot\frac{1}{2}+20\cdot\frac{1}{4}+40\cdot\frac{1}{8}+80\cdot\frac{1}{16}+160\cdot\frac{1}{32}=5+5+5+5+5=25$

Por tanto, si al lanzar una moneda 5 veces la ganancia media es de 25 euros, cuando se lance 10 veces será 5·10=50 euros

8. Lanzamos un dado no trucado mil veces y contamos el número de 5, ¿qué número de éxitos esperamos con una probabilidad no inferior al 0,95, es decir, en el intervalo media menos dos veces la desviación típica y media más dos veces la desviación típica?

Se trata de una distribución binomial B $\left(1000,\ \frac{1}{6}\right)$ cuyos parámetros son:

Media: $\mu=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p};\ \mu=1000\cdot\frac{1}{6}=166{,}6$ Varianza: $\mathrm{V}=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}\cdot\mathrm{q}=1000\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=138{,}88$

Desviacion tipica: $\sigma=\sqrt{\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}\cdot\mathrm{q}}=\sqrt{138{,}88}=11{,}78$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebycheff, $P(|x-\mu| \leq k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$, para k=2 :

$$P(\mu-2\cdot\sigma \leq x \leq \mu+2\cdot\sigma) \geq 0{,}95 \rightarrow P(166{,}6-2\cdot 11{,}78 \leq x \leq 166{,}6+2\cdot 11{,}78) \geq 0{,}95$$

$P(143{,}04 \leq x \leq 190{,}16) \geq 0{,}95$ El intervalo sería $(144,\ 191)$

Esperamos entre 144 y 191 veces salga 5 con una probabilidad superior al 0,95

9. Calcula A para que la función siguiente sea una función de densidad de probabilidad.

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{si\ x < 0} \\ \mathbf{Ax} & \mathbf{si\ 0 \leq x < 8} \\ \mathbf{A(16-x)} & \mathbf{si\ 8 \leq x < 16} \\ \mathbf{0} & \mathbf{si\ x > 16} \end{cases}$$

Debe darse que $f(x) \geq 0$, si x es mayor que 0 y menor que 8, f(x) es una recta por encima del eje X e igualmente entre 8 y 16, siempre que A > 0

$$\text{y} \quad \int_0^{16} f(x)dx = 1$$

$$\int_0^{16} f(x)dx = \int_0^8 Ax\,dx + \int_8^{16} A(16-x)dx = 1 \rightarrow A\cdot\left[\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^8 - \left[\frac{(16-x)^2}{2}\right]_8^{16}\right] = 1$$

$$A\cdot[(32-0)-(0-32)] = 1 \rightarrow A\cdot 64 = 1 \rightarrow A = \frac{1}{64}$$

10. Calcula A en cada uno de los casos siguientes para que la función f(x) sea una función de densidad de probabilidad.

a) $\boldsymbol{f(x) = Ax^2(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax^2(x-3)dx = 1$$

$$A\int_0^3 (x^3-3x^2)dx = A\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right)_0^3 = A\left(\frac{81}{4}-27\right) = 1 \rightarrow A = -\frac{4}{27}$$

b) $\boldsymbol{f(x) = Ax(x-3)^2}$ **siendo nula para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax(x-3)^2dx = 1$$

$$A\int x(x^2+6x+9) = A\int(x^3+6x^2+9x)dx = A\left(\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)_0^3 = A\left(\frac{3^4}{4}+2(3)^3+\frac{9(3)^2}{2}\right) =$$
$$A\left(\frac{81}{4}+54+\frac{81}{2}\right) = A\cdot\frac{459}{4} = 1 \rightarrow A = \frac{4}{459}$$

c) $\boldsymbol{f(x) = Ax^3(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax^3(x-3)dx = 1$$

$$A\int_0^3 x^4-3x^3dx = A\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}\right)_0^3 = A\frac{3^5}{5}-\frac{3(3)^4}{4} = A\left(-\frac{243}{20}\right) = 1 \rightarrow A = -\frac{20}{243}$$

Textos Marea Verde

d) $\boldsymbol{f(x) = Ax^2(x-3)^2}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$$\int_0^3 Ax^2(x-3)^2 = 1$$

$A\int_0^3 x^2(x^2+6x+9)dx == A\int_0^3 x^4+6x^3+9x^2dx = A\left(\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}\right)_0^3 = A\left(\frac{x^5}{5}+\frac{3x^4}{2}+3x^3\right)_0^3 =$
$A\left(\frac{3^5}{5}+\frac{3(3)^4}{2}+3(3)^2\right) = A\cdot\frac{1971}{10} = 1 \to A = \frac{10}{1971}$

Calcula en cada caso $P\ (x<1)\ y\ P(x>2)$

a) $\boldsymbol{f(x) = -\frac{4}{27}x^2(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$P(\ x<1) = \int_0^1\left(-\frac{4}{27}x^2(x-3)\right)dx =$

$= -\frac{4}{27}\int_0^1 x^3-3x^2dx = -\frac{4}{27}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right)_0^1 = -\frac{4}{27}\left[\left(\frac{1^4}{4}-\frac{3(1)^3}{3}\right)-\left(\frac{0^4}{4}-\frac{3(0)^3}{3}\right)\right] = -\frac{4}{27}\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{65}{108}.$

$P(x>2) = \int_2^3\left(-\frac{4}{27}x^2(x-3)\right)dx = -\frac{4}{27}\int_2^3 x^3-3x^2dx = -\frac{4}{27}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}\right)_2^3 = -\frac{4}{27}\left[\left(\frac{3^4}{4}-\frac{\cancel{3}(3)^3}{\cancel{3}}\right)-\right.$
$\left.\left(\frac{2^4}{4}-\frac{\cancel{3}(2)^3}{\cancel{3}}\right)\right] = -\frac{4}{27}\left[-4+\frac{27}{4}\right] = -\frac{11}{27}.$

b) $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{459}x(x-3)^2}$ **siendo nula para x < 0 y x > 3..**

$P(x<1) = \int_0^1 \frac{4}{459}x(x-3)^2dx = \frac{4}{459}\int_0^1(x^3+6x^2+9x)dx = \frac{4}{459}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)_0^1 = \frac{4}{459}\left(\frac{1^4}{4}+\right.$
$\left.2(1)^3+\frac{9(1)^2}{2}\right) = \frac{4}{459}\left(\frac{27}{4}\right) = \frac{1}{17}$

$P(x>2) = \int_2^3 \frac{4}{459}x(x-3)^2dx = \frac{4}{459}\int_2^3(x^3+6x^2+9x)dx = \frac{4}{459}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}\right)_2^3 = \frac{4}{459}\left[\left(\frac{3^4}{4}+\right.\right.$
$\left.\left.\frac{6(3)^3}{3}+\frac{9(3)^2}{2}\right)-\left(\frac{2^4}{4}+\frac{6(2)^3}{3}+\frac{9(2)^2}{2}\right)\right] = \frac{4}{459}\left[\left(\frac{459}{4}\right)\right] = \frac{4}{459}\left(\frac{307}{4}-38\right) = \frac{307}{459}$

c) $\boldsymbol{f(x) = -\frac{20}{243}x^3(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$P(x<1) = \int_0^1\left(-\frac{20}{243}x^3(x-3)\right)dx = -\frac{20}{243}\int_0^1 x^3(x-3)dx = -\frac{20}{243}\int_0^1 x^4-3x^3dx = -\frac{20}{243}\left(\frac{x^5}{5}-\right.$
$\left.\frac{3x^4}{4}\right)_0^1 = -\frac{20}{243}\left(\frac{1^5}{5}-\frac{3(1)^4}{4}\right) = -\frac{20}{243}\left(-\frac{11}{20}\right) = \frac{11}{243}$

$P(x>2) = \int_2^3\left(-\frac{20}{243}x^3(x-3)\right)dx = -\frac{20}{243}\int_2^3 x^3(x-3)dx = -\frac{20}{243}\int_2^3 x^4-3x^3dx = -\frac{20}{243}\left(\frac{x^5}{5}-\right.$
$\left.\frac{3x^4}{4}\right)_2^3 = -\frac{20}{243}\left[\left(\frac{3^5}{5}-\frac{3(3)^4}{4}\right)-\left(\frac{2^5}{5}-\frac{3(2)^4}{4}\right)\right] = -\frac{20}{243}\left[\left(-\frac{243}{20}\right)-\left(-\frac{28}{5}\right)\right] = -\frac{20}{243}\left(-\frac{131}{20}\right) = \frac{131}{243}$

d) $\boldsymbol{f(x) = \frac{10}{1971}x^2(x-3)^2}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

$P(x<1) = \frac{10}{1971}\int_0^1 x^2(x-3)^2dx = \frac{10}{1971}\int_0^1 x^4+6x^3+9x^2dx = \frac{10}{1971}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{10}{1971}\left(\frac{1^5}{5}+\right.$
$\left.\frac{6(1)^4}{4}+\frac{9(1)^3}{3}\right) = \frac{10}{1971}\left(\frac{47}{10}\right) = \frac{47}{1971}$

Textos Marea Verde

$P(x>2)=\frac{10}{1971}\int_2^3 x^2(x-3)^2dx=\frac{10}{1971}\int_2^3 x^4+6x^3+9x^2dx=\frac{10}{1971}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}+\frac{9x^3}{3}\right)_2^3=\frac{10}{1971}\left[\left(\frac{3^5}{5}+\frac{6(3)^4}{4}+\frac{9(3)^3}{3}\right)-\left(\frac{2^5}{5}+\frac{6(2)^4}{4}+\frac{9(2)^3}{3}\right)\right]=\frac{10}{1971}\left(\frac{2511}{10}-\frac{272}{5}\right)=\frac{10}{1971}\left(\frac{1967}{10}\right)=\frac{1967}{1971}$

Determina la media y la varianza. Analiza las diferencias.

Media: $\mu=\int_a^b x\cdot f(x)\cdot dx$

Varianza: $\sigma^2=\int_a^b(x-\mu)^2\cdot f(x)\cdot dx$

a) $\boldsymbol{f(x)=-\frac{4}{27}x^2(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

Media $\rightarrow$ $\mu=-\frac{4}{27}\int_0^3 x\cdot x^2(x-3)dx=-\frac{4}{27}\int_0^3 x(x^3-3x^2)dx=-\frac{4}{27}\int_0^3 x^4-3x^3dx=-\frac{4}{27}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}\right)_0^3=-\frac{4}{27}\left(\frac{3^5}{5}-\frac{3(3)^4}{4}\right)=\frac{9}{5}$

Varianza $\rightarrow\sigma^2=-\frac{24}{7}\int_0^3\left(x-\frac{9}{5}\right)^2\cdot x^2(x-3)dx=-\frac{24}{7}\int_0^3\left(x^2-2\cdot\frac{9}{5}x+\frac{81}{25}\right)(x^3-3x^2)dx=-\frac{24}{7}\int_0^3 x^5-\frac{18}{5}x^4+\frac{81}{25}x^3-3x^4-\frac{54}{5}x^3-\frac{243}{25}x^2dx=-\frac{24}{7}\int_0^3 x^5-\frac{33}{5}x^4-\frac{189}{25}x^3-\frac{243}{25}x^2dx=-\frac{24}{7}\left(x^5-\frac{33}{5}x^4-\frac{189}{25}x^3-\frac{243}{25}x^2\right)_0^3=-\frac{24}{7}\left(3^5-\frac{33}{5}(3)^4-\frac{189}{25}(3)^3-\frac{243}{25}(3)^2\right)=-\frac{24}{7}\left(-\frac{2916}{5}\right)=\frac{69984}{35}$

b) $\boldsymbol{f(x)=\frac{4}{459}x(x-3)^2}$ **siendo nula para x < 0 y x > 3.**

Media $\rightarrow\mu=\frac{4}{459}\int_0^3 x\cdot x(x-3)^2dx=\frac{4}{459}\int_0^3 x^3-6x^2+9x\,dx=\frac{4}{459}\left(\frac{x^4}{4}-2x^2+\frac{9x^2}{2}\right)_0^3=\frac{4}{459}\left(\frac{3^4}{4}-2(3)^2+\frac{9(3)^2}{2}\right)=\frac{4}{459}\left(\frac{171}{4}\right)=\frac{19}{51}$

Varianza $\rightarrow\sigma^2=\frac{4}{459}\int_0^3\left(x-\frac{19}{51}\right)^2\cdot x(x-3)^2dx=\frac{4}{459}\int_3^0\left(x^2-\frac{38}{51}x+\frac{361}{2601}\right)\cdot(x^3+6x^2+9x)dx=\frac{4}{459}\int_3^0\left(x^5-\frac{76}{17}x^4+\frac{361}{2601}x^3+6x^4-\frac{76}{17}x^3+\frac{722}{867}x^2+9x^3-\frac{114}{17}x^2+\frac{361}{289}x\right)dx=\frac{4}{459}\int_3^0 x^5+\frac{26}{17}x^4+\frac{23770}{2601}x^3-\frac{5092}{867}x^2+\frac{361}{289}x\cdot dx=\frac{4}{459}\left(x^5+\frac{26}{17}x^4+\frac{23770}{2601}x^3-\frac{5092}{867}x^2+\frac{361}{289}x\right)_0^3=\frac{4}{459}\left(3^5+\frac{26}{17}\cdot 3^4+\frac{23770}{2601}\cdot 3^3-\frac{5092}{867}\cdot 3^2+\frac{361}{289}\cdot 3\right)=\frac{4}{459}(564{,}4)=4{,}92$

c) $\boldsymbol{f(x)=-\frac{20}{243}x^3(x-3)}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

Media $\rightarrow\mu=-\frac{20}{243}\int_0^3 x\cdot x^3(x-3)dx=-\frac{20}{243}\int_0^3 x^5-3x^4dx=-\frac{20}{243}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{3x^5}{5}\right)_0^3=-\frac{20}{243}\left(\frac{3^6}{6}-\frac{3(3)^5}{5}\right)=-\frac{20}{243}\left(-\frac{243}{10}\right)=2$

Varianza $\rightarrow\sigma^2=-\frac{20}{243}\int_0^3(x-2)^2\cdot x^3(x-3)dx=\frac{20}{243}\int_0^3(x^2-4x-4)\cdot(x^4-3x^3)dx=\frac{20}{243}\int_0^3 x^6-4x^5-4x^4-3x^5-12x^4-12x^3dx=\frac{20}{243}(x^6-16x^5-15x^4-12x^3)_0^3=\frac{20}{243}(3^6-16(3)^5-15(3)^4-12(3)^3)=\frac{20}{243}(-4698)=-\frac{1160}{3}$

d) $\boldsymbol{f(x)=\frac{10}{1971}x^2(x-3)^2}$ **siendo nula para para x < 0 y x > 3.**

Media $\to \mu = \frac{10}{1971}\int_0^3 x\cdot x^2(x-3)^2dx = \frac{10}{1971}\int_0^3 x^5-6x^4+9x^3dx = \frac{10}{1971}\left(\frac{x^6}{6}-\frac{6x^5}{5}+\frac{9x^4}{4}\right)_0^3 =$
$\frac{10}{1971}\left(\frac{3^6}{6}-\frac{6(3)^5}{5}+\frac{9(3)^4}{4}\right) = \frac{10}{1971}\left(\frac{243}{20}\right) = \frac{9}{146}$

Varianza $\to \sigma^2 = \frac{10}{1971}\int_0^3\left(x-\frac{9}{146}\right)^2 x^2(x-3)^2dx = \frac{10}{1971}\int_0^3(x^2-\frac{9}{73}x+\frac{81}{21316})(x^4+6x^3+9x^2)dx =$
$= \frac{10}{1971}\int_0^3 x^6+6x^5+9x^4-\frac{9}{73}x^5-\frac{54}{73}x^4-\frac{81}{73}x^3+\frac{81}{21316}x^4+\frac{243}{106558}x^3+\frac{729}{21316}x^2dx =$
$= \frac{10}{1971}\int_0^3\left(x^6+\frac{429}{73}x^5+8{,}26x^4-1{,}08x^3+\frac{729}{21316}x^2\right)dx =$
$= \frac{10}{1971}\left(\frac{1}{7}x^7+\frac{429}{73\cdot 6}x^6+8{,}26x^5\cdot\frac{1}{5}-0{,}27x^4+\frac{729}{21316\cdot 3}x^3\right)\Big|_0^3 = 7{,}135$

11. En una distribución binomial $B(10,\ 0{,}3)$ calcula $P(x=0)$, $P(x\neq 0)$, $P(x=10)$, $P(x=7)$. Determina también la media y la desviación típica.

$$B(10,\ 0{,}3) \qquad p=0{,}3 \qquad n=10$$
$Probabilidad\ de\ éxito = p \qquad Probabilidad\ de\ fracaso = q = 1-p = 1-0{,}3 = 0{,}7$
$$P(X=x) = \binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x}$$
$P(x=0) = \binom{10}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^{10} = 0{,}02824$
$P(x\neq 0) = 1-P(x=0) = 1-0{,}02824 = 0{,}97176$
$P(x=10) = \binom{10}{10}\cdot 0{,}3^{10}\cdot 0{,}7^0 = 0{,}0000059$
$P(x=7) = \binom{10}{7}\cdot 0{,}3^7\cdot 0{,}7^3 = 0{,}009$
$$\mu = n\cdot p = 10\cdot 0{,}3 = 3 \qquad \sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q} = \sqrt{10\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7} = 1{,}449$$

12. Lanzamos 5 monedas, calcula las probabilidades de obtener:
a) $P(x=0)$, b) $P(x=1)$, c) $P(x=2)$, d) $P(x=2)$

X: salir cara $\qquad B\left(5,\frac{1}{2}\right) \qquad p=\frac{1}{2} \qquad n=5$

$a)\ P(x=0) = \binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
$b)\ P(x=1) = \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32}$
$c)\ P(x=2) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$
$d)\ P(x=2) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

13. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:
$$N(0{,}1)$$
$\boldsymbol{a)P(z=0)} = 0$
$\boldsymbol{b)P(z<0)} = 0{,}5$
$\boldsymbol{c)P(z=1{,}82)} = 0$
$\boldsymbol{d)P(z>1{,}82)} = 1-P(z\le 1{,}82) = 1-0{,}7939 = 0{,}2061$

14. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(z > 4) = 1 - P(z < 4) = 1 - 1 = 0$

b) $P(z < 4) = 1$

c) $P(z > 1) = 1 - P(z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

d) $P(z < 1) = 0{,}8413$

15. Calcula en una distribución normal estándar las probabilidades siguientes:

a) $P(1 < z < 2) = P(z < 2) - P(z < 1) = 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$

b) $P(-1{,}3 < z < 4) = P(z < 4) - \big(1 - P(z < 1{,}3)\big) = 1 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}9032$

c) $P(-0{,}2 < z < 2{,}34) = P(z < 2{,}34) - \big(1 - P(z < 0{,}2)\big) = 0{,}9904 - (1 - 0{,}5793) = 0{,}5697$

d) $P(-1 < z < 1) = P(z < 1) - \big(1 - P(z < 1)\big) = 0{,}08413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$

16. Calcula en una distribución normal $N(1, 2)$ las probabilidades siguientes:

a) $P(x > 4) \to Tipific. \to P\left(z > \frac{4-1}{2}\right) = P(z > 1{,}5) = 1 - P(z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668$

b) $P(x < 4) \to Tipificamos \to P\left(z < \frac{4-1}{2}\right) = P(z < 1{,}5) = 0{,}9332$

c) $P(x > 1) \to Tipificamos \to P\left(z > \frac{1-1}{2}\right) = P(z > 0) = 1 - P(z < 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

d) $P(x < 1) \to Tipificamos \to P\left(z < \frac{1-1}{2}\right) = P(z < 0) = 0{,}5$

17. Calcula en una distribución normal N(0,5, 0,2) las probabilidades siguientes:

a) $\boldsymbol{P(x > 4)}$

$$P\left(z > \frac{4-0.5}{0.2}\right) = P(z > 17.5) = 1 - [P(z < 17.5)] = 1 - 1 = 0$$

b) $\boldsymbol{P(x < 4)}$

por el apartado a) $P\left(x < \frac{4-0.5}{0.2}\right) = 1$

c) $\boldsymbol{P(x > 1)}$

$$P\left(z > \frac{1-0.5}{0.2}\right) = P(z > 2.5) = 1 - P(z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

d) $\boldsymbol{P(x < 1)}$

$$P\left(z < \frac{1-0.5}{0.2}\right) = P(z < 2.5) = 0.9938$$

18. Calcula en una distribución normal $\boldsymbol{N\left(1\,, \frac{1}{2}\right)}$ las probabilidades siguientes:

a) $\boldsymbol{P(1 < x < 2)}$

$$P(1 < x < 2) = P\left(\frac{1-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{2-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(0 < z < 2) = P(z < 2) - P(z < 0) =$$

$$= 0.9772 - 0.5 = 0.4772$$

b)) $\boldsymbol{P(-1.3 < x < 4)}$

$$P(-1.3 < x < 4) = P\left(\frac{-1.3-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{4-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-4.6 < z < 6) = P(z < 6) - P(z < -4.6) =$$

$$= 1 - [1 - P(z < 4.6)] = 1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1$$

c) $\boldsymbol{P(-0.2 < x < 2.34)}$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

$$P(-0.2 < x < 2.34) = P\left(\frac{-0.2-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{2.34-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-2.4 < z < 2.68) =$$
$$= P(z < 2.68) - P(z < -2.4) = 0.9963 - [1 - P(z < 2.4)] = 0.9963 - 0.0082 = 0.9881$$

d)) $P(-1 < x < 3)$

$$P(-1 < x < 3) = P\left(\frac{-1-1}{\frac{1}{2}} < z < \frac{3-1}{\frac{1}{2}}\right) = P(-4 < z < 4) = P(z < 4) - P(z < -4)$$
$$= 1 - [1 - P(z < 4)] = 1 - (1 - 1) = 1 - 0 = 1$$

19. En una distribución binomial $B(10,\ 0,3)$ calcula la media, la desviación típica, y mediante aproximación a la normal determina $P(x = 0), P(x \neq 0), P(x = 10), P(x = 7)$.

$B(10\,, 0.3)$ $\quad E = n \cdot P \to E = 10 \cdot 0.3 = 3$ $\quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} \to \sigma = \sqrt{10 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 1.45$

$$B(10\,, 0.3) \to\to N(3, 1.45)$$

a) $\mathbf{P(x = 0)}$

$$P(x = 0) = P(-0.5 \le x \le 0.5) = P\left(\frac{-0.5-3}{1.45} \le z \le \frac{0.5-3}{1.45}\right) = P(-2.14 \le z \le -1.72) =$$
$$= P(z \le -1.72) - P(z \le -2.41) = \big[1 - [P(z \le 1.72]\big] - \big[1 - [P(z \le 2.41)]\big] =$$
$$= [1 - 0.9573] - [1 - 0.9920] = 0.0347$$

b) $\mathbf{P(x \neq 0)}$

$$P(x \neq 0) = 1 - P(x = 0) = 1 - 0.0347 = 0.9653$$

c) $\mathbf{P(x = 10)}$

$$P(x = 10) = P(9.5 \le x \le 10.5) = P\left(\frac{9.5-3}{1.45} \le z \le \frac{10.5-3}{1.45}\right) = P(4.48 \le z \le 5.17) =$$
$$= P(z \le 5.17) - P(z \le 4.48) = 0 - 0 = 0$$

d) $\mathbf{P(x = 7)}$

$$P(x = 7) = P(6.5 \le x \le 7.5) = P\left(\frac{6.5-3}{1.45} \le z \le \frac{7.5-3}{1.45}\right) = P(2.41 \le z \le 3.10) =$$
$$= P(z \le 3.10) - P(z \le 2.41) = 0.9990 - 0.9920 = 0.007$$

21. En una distribución binomial B(1000, 0,5) calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina $\mathbf{P(x < 200), P(x = 150), P(X < 150)}$ *y* $\boldsymbol{P(50 \le X \le 150)}$

Pasamos de distribución binomial a distribución normal:

B(1000, 0.5) $\to \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ $\quad \boldsymbol{\mu} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} = 1000 \cdot 0{,}5 = 500$ $\quad \mathbf{q} = 1 - \mathrm{p} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mu \cdot \mathrm{q}} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 15{,}81$ $\quad ; \quad \mathbf{N(500,\ 15{,}81)}$

- $\mathbf{P(x < 200)} = P(x' \le 199{,}5) = \mathrm{P}\left(\mathrm{z} \le \frac{199{,}5-500}{15{,}81}\right) = P(z \le -19{,}01) = P(z \ge 19{,}01) = 1 - P(z \le 19{,}01) = 1 - 1 = 0$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra
Textos Marea Verde

- $\mathbf{P(x=150)} = P(149{,}5 \leq x' \leq 150{,}5) = \mathrm{P}\left(z \leq \frac{150{,}5-500}{15{,}81}\right) - \mathrm{P}\left(z \leq \frac{149{,}5-500}{15{,}81}\right) =$
  $P(z \leq -22{,}1) - P(z \leq -22{,}17) = P(z \geq 22{,}1) - P(z \geq 22{,}17) = [1 - P(z \leq 22{,}1)] -$
  $[1 - P(z \leq 22{,}17)] = (1-1) - (1-1) = 0$

- $\mathbf{P(x<150)} = P(x' \leq 149{,}5) = \mathrm{P}\left(z \leq \frac{149{,}5-500}{15{,}81}\right) = P(z \leq -22{,}17) = P(z \geq 22{,}17) = 1 -$
  $P(z \leq 22{,}17) = 1 - 1 = 0$

- $\mathbf{P(50 \leq x \leq 150)} = P(49{,}5 \leq x' \leq 150{,}5) = \mathrm{P}\left(z \leq \frac{150{,}5-500}{15{,}81}\right) - \mathrm{P}\left(z \leq \frac{49{,}5-500}{15{,}81}\right) =$
  $P(z \leq -22{,}1) - P(z \leq -28{,}49) = P(z \geq 22{,}1) - P(z \geq 28{,}49) = [1 - P(z \leq 22{,}1)] -$
  $[1 - P(z \leq 28{,}49)] = (1-1) - (1-1) = 0$

22. En una distribución binomial *B(1000, 0,05)* calcula la media y la desviación típica, y mediante la aproximación a la normal determina *P(x>200), P(x=200), P(x<200)* y *P(50≤x≤200).*

B(1000, 0,05) $\rightarrow \mathrm{N}(\mu, \sigma)$; $\mu = \mathrm{np} = 1000 \cdot 0{,}05 = 50$; $\mathrm{q} = 1 - \mathrm{p} = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

$\sigma = \sqrt{\mu \cdot \mathrm{q}} = \sqrt{50 \cdot 0{,}95} = 6{,}89$; $\mathrm{N}(50,\ 6{,}89)$

- $\mathrm{P}(\mathrm{x} > 200)$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{200{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}84$$

$\mathrm{P}(\mathrm{x} > 200) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 200) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 21{,}84) = 1 - 1 = 0$

- $\mathrm{P}(\mathrm{x} = 200)$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 200) = \mathrm{P}(199{,}5 \leq \mathrm{X}' \leq 200{,}5)$

$z = \frac{x'-\mu}{\sigma} = \frac{199{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}69$; $z = \frac{x'-\mu}{\sigma} = \frac{200{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}84$

$\mathrm{P}(199{,}5 \leq \mathrm{X}' \leq 200{,}5) = \mathrm{P}(21{,}69 \leq \mathrm{Z} \leq 21{,}84) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 21{,}84) - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 21{,}69) = 1 - 1 = 0$

- $\mathrm{P}(\mathrm{X} < 200)$

  $\mathrm{P}(\mathrm{X} < 200) = \mathrm{P}(\mathrm{X}' \leq 199{,}5) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 21{,}69) = 1$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{199{,}5-50}{6{,}89} = 21{,}69$

- $P(50 \leq X \leq 200)$

  $P(50 \leq X \leq 200) = P(X \leq 200) - P(X \leq 50) = \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{200{,}5-50}{6{,}89}\right) - P\left(Z \leq \frac{50{,}5-50}{6{,}89}\right) =$
  $= (Z \leq 21{,}69) - P(Z \leq 0{,}07) = 1 - 0{,}5279 = 0{,}4721$

23. Una fábrica de móviles ha comprobado que el 1 % de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 móviles al azar. Calcula la media y la desviación típica. Calcula la probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

X: móvil defectuoso. $n = 10$; P(móvil defectuoso) = $p = 0{,}01$; X→$B(10,\ 0{,}01)$

$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}01 = 0{,}1$; $q = 1 - p = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$; $\sigma = \sqrt{\mu \cdot q} = \sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}99} = 0{,}3146$

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}01^0 (1 - 0{,}01)^{10} = 0{,}9044$

$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0{,}01^1 (1 - 0{,}01)^9 = 0{,}09135$

Textos Marea Verde

$P(X=2)=\binom{10}{2}0{,}01^2(1-0{,}01)^8=0{,}00415$
$P(X\le 2)=0{,}9044+0{,}09135+0{,}00415=0{,}9999$
$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-0{,}9999=0{,}0001$: Probabilidad de que haya más de 2 móviles defectuosos.

24. La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es de 0,4. Juegan 6 partidas. Calcula la probabilidad de que:
a) María gane alguna vez.
b) Raquel gane al menos una vez.
c) Raquel gane más de la mitad de las partidas.
d) María gane 2 partidas.

a) X: ganar María. $n=6$; P(ganar María) = $p=0{,}4$; X→$B(6,\ 0{,}4)$; $q=1-p=1-0{,}4=0{,}6$
$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}046656=0{,}9533$: Probabilidad de que María gane alguna vez.
$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}4^0(1-0{,}4)^{6-0}=0{,}046656$
b) X: ganar Raquel. $n=6$; P(ganar Raquel) = $p=0{,}6$; X→B(6, 0,6)
$q=1-p=1-0{,}6=0{,}4$
$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}004096=0{,}995904$: Probabilidad de que Raquel gane alguna vez.
$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}6^0(1-0{,}6)^{6-0}=0{,}004096$

c) X: ganar María. (Datos apartado a)
$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$
$P(X=0)=\binom{6}{0}0{,}4^0(1-0{,}4)^{6-0}=0{,}046656$
$P(X=1)=\binom{6}{1}0{,}4^1(1-0{,}4)^{6-1}=0{,}1866$
$P(X=2)=\binom{6}{2}0{,}4^2(1-0{,}4)^{6-2}=0{,}31104$
$P(X<3)=0{,}54424$: Probabilidad de que Raquel gane más de la mitad de las partidas.

d) X: ganar María. (Datos apartado a)
$P(X=2)$
$P(X=2)=\binom{6}{2}0{,}4^2(1-0{,}4)^{6-2}=0{,}31104$: Probabilidad de que María gane 2 partidas.

25. Las estaturas de las personas de una cierta población se distribuyen según una normal de media 180 cm y desviación típica 15 cm. Determina la probabilidad de que:
a) Una persona tenga una estatura superior a 190 cm.
P (x > 190) = P (z > $\frac{190-180}{15}$) = P (z > $\frac{10}{15}$) = P (z > $0{,}\hat{6}$) = 1 – P (z ≤ $0{,}\hat{6}$) = 1 – 0,7354 = 0,2646
Solución: La probabilidad de que una persona tenga una estatura superior a 190 cm es de 0,2646.

b) Una persona tenga una estatura menor a 160 cm.

CC BY NC SA
Textos Marea Verde

P (x < 160) = P (z < $\frac{160-180}{15}$) = P (z < $\frac{-20}{15}$) = P (z < -1,$\hat{3}$) = P (z > 1,$\hat{3}$) = 1 – P (z ≤ 1,$\hat{3}$) = 1 – 0,982 = 0,0918

Solución: La probabilidad de que una persona tenga una estatura menor a 160 cm es de 0,0918.

c) ¿Qué proporción de personas tienen una estatura comprendida entre 160 cm y 190 cm?

P (160 ≤ x ≤ 190) = P (x ≤ 190) – P (x ≤ 160) = P (z ≤ $\frac{190-180}{15}$) – P (z ≤ $\frac{160-180}{15}$) =

=P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – P (z ≤ -1,$\hat{3}$) = P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – P (z ≥ 1,$\hat{3}$) = P (z ≤ 0, $\hat{6}$) – [1 - P (z ≤ 1,$\hat{3}$)] =

= 0,7357 – 0,0918 = 0,6439

Solución: La proporción de personas que tienen una estatura media comprendida entre 160 cm y 190 cm es del 64,39 %.

26. En un examen para entrar en un cuerpo del Estado se sabe que los puntos obtenidos se distribuyen según una normal de media 100 y desviación típica 10 puntos. Determina la probabilidad de que:

a) Un opositor obtenga 120 puntos.

P (119,5 ≤ x ≤ 120,5) = P (x ≤ 120,5) – P (x ≤ 119,5) = P (z ≤ $\frac{120,5-100}{10}$) – P (z ≤ $\frac{119,5-100}{10}$) = P (z ≤ $\frac{20,5}{10}$) – P (z ≤ $\frac{19,5}{10}$) = P (z ≤ 2,05) – P (z ≤ 1,95) = 0,9798 – 0,9744 = 0,0054

Solución: la probabilidad de que un opositor obtenga 120 puntos es de 0,0054.

b) Si para aprobar es necesario tener más de 120 puntos, ¿Qué porcentaje de opositores aprueban?

P (x > 120) = P (z > $\frac{120-100}{10}$) = P (z > $\frac{20}{10}$) = P (z > 2) = 1 – P (z ≤ 2) = 1 – 0,9772 = 0,0228

Hallamos el porcentaje de 0,0228:

0,0228 · 100 = 2,28%

Solución: Aprueban el 2% de opositores.

c) Si aprueban únicamente los que están entre el 20% de los mejores, ¿cuántos puntos debe obtener un opositor para aprobar?

Si aprueban solo el 20%, entonces el porcentaje de no aprobados es 1 – 0,2 = 0,8

Calculamos P (x ≤ k) = 0,8

Buscamos dentro de la tabla 0,8 → 0,85

Para hallar k: $\frac{k-\mu}{\sigma} = 0,85$ $\frac{k-100}{10}$ = 0,85 k – 100 = 8,5 k = 108,5

Solución: Un opositor debe obtener 108,5 puntos para aprobar.

Textos Marea Verde

AUTOEVALUACIÓN

1. Se lanza un dado tres veces y se anota el número de cuatros que aparecen. La distribución de probabilidad que tenemos es:

a) $\boldsymbol{B(4,1/6)}$ **b)** $\boldsymbol{B(4,1/4)}$ **c)** $\boldsymbol{B(3,1/6)}$ **d)** $\boldsymbol{B(3,5/6)}$

$$P(A)=\frac{n^{\circ}\,casos\ favorables}{n^{\circ}casos\ posibles}\rightarrow P(A)=\frac{1}{6}$$

La respuesta es la opción **c)** $\boldsymbol{B(3;1/6)}$

2. En la distribución anterior, la media es:

a) $\boldsymbol{\mu=4/6}$ **b)** $\boldsymbol{\mu=1/2}$ **c)** $\boldsymbol{\mu=15/6}$ **d)** $\boldsymbol{\mu=1}$

$$\mu=n\cdot p\rightarrow\mu=3\cdot1/6=1/2\rightarrow\boldsymbol{\mu=1/2}$$

La respuesta es la opción **b)** $\boldsymbol{\mu=1/2}$

3. Y la varianza es:

a) $\boldsymbol{\sigma^2=15/12}$ **b)** $\boldsymbol{\sigma^2=5/6}$ **c)** $\boldsymbol{\sigma^2=1/36}$ **d)** $\boldsymbol{\sigma^2=5/12}$

$$\sigma^2=n\cdot p\cdot q\rightarrow\sigma^2=3\cdot1/6\cdot5/6=5/12\rightarrow\boldsymbol{\sigma^2=5/12}$$

La respuesta es la opción **d)** $\boldsymbol{5/12}$

4. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad $\boldsymbol{P(z\leq 2,02)}$ **que vale:**

a) $\boldsymbol{P(z\leq2,02)=0,0217}$ **b)** $\boldsymbol{P(z\leq2,02)=0,9772}$ **c)** $\boldsymbol{P(z\leq2,02)=0,0228}$ **d)** $\boldsymbol{P(z\leq2,02)=0,9783}$

$$\boldsymbol{P(z\leq2,02)=0.9783}$$

Se busca el número dos en las columnas y el 0,02 en las filas y encontramos el valor para la probabilidad.

La respuesta es la opción **d)** $\boldsymbol{P(z\leq2,02)=0.9783}$

5. Utiliza la tabla de la distribución normal estándar para calcular la probabilidad de $\boldsymbol{P(0,5<z<1,5)}$ **es:**

a) $\boldsymbol{0,2417}$ **b)** $\boldsymbol{0,9332}$ **c)** $\boldsymbol{0,9332}$ **d)** $\boldsymbol{0,2742}$

$$\boldsymbol{P(0,5<z<1,5)}\rightarrow P(z<1{,}5)-P(z<0{,}5)=buscamos\ en\ la\ tabla\ de\ distribución\ y$$

$$P(z<1{,}5)-P(z<0{,}5)=0{,}9332-0{,}6915=0{,}2417$$

$$\boldsymbol{P(0,5<z<1,5)=0,2417}$$

La respuesta es la opción **a)** $\boldsymbol{0,2417}$

6. Sin mirar la tabla, ni tipificar la variable, la probabilidad de P(x< $\boldsymbol{\mu}$**) es:**

a) -0,4 **b) 0,5** **c) 0,6** **d) no puede saberse**

Como la función es simétrica y su área es 1, al estar $\boldsymbol{\mu}$ en el centro, la P(x< $\boldsymbol{\mu}$) = 0,5

La respuesta es la opción **b)** $\boldsymbol{0,5}$

7) En una distribución binomial B(10, 0,3) el valor de P(x=0) es:

a) 0,11 **b) 0,028** **c) 0,00001024** **d) 0,8**

B(10, 0,3) ; P(x=0) = $\binom{10}{0}0{,}3^0(1-0{,}3)^{10-0}=0{,}028$

La respuesta es la opción **b)** $\boldsymbol{0,028}$

Textos Marea Verde

8) El 2% de las pastillas de freno fabricadas se sabe que son defectuosas. En una caja con 2000 pastillas, la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosas es:

a) 0,6011 **b) 0,7635** **c) 0,9357** **d) 0,8655**

X: ser defectuosa X→B(2000, 0,02) μ = n·p = 2000·0,02 = 40

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000 \cdot 0{,}02 \cdot (1 - 0{,}02)} = 6{,}26$

X se aproxima a una N(μ, σ) → N(40, 6,26)

P(X<50) = P(X´≤49,5) = P(Z≤ $\frac{49{,}5-40}{6{,}26}$) = P(z≤1,52) = 0,9357

$\text{La respuesta es la opción } \mathbf{c}) \; \mathbf{0{,}9357}$

9) Una fábrica de ordenadores ha comprobado que el 5% de los que fabrica son defectuosos. En un control de calidad se toman 10 ordenadores al azar. Determina si la probabilidad de que no haya ninguno defectuoso es:

a) 0,5987 **b) 0,4027** **c) 0,9357** **d) 0,8074**

X: ser defectuoso X→B(10, 0,05)

P(x=0) = $\binom{10}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot (1 - 0{,}05)^{10-0} = 0{,}5987$

$\text{La respuesta es la opción } \mathbf{a}) \; \mathbf{0{,}5987}$

10) La probabilidad de que María gane a Raquel en una partida es 2/3. Jugadas 4 partidas. Determina si la probabilidad de que María gane alguna vez es:

a) 0,0123 **b) 0,5** **c) 0,8972** **d) 0,9877**

X: ganar María X→B(4, 0,66)

P(x=0) = $\binom{4}{0} \cdot 0{,}66^0 \cdot (1 - 0{,}66)^{4-0}$ =0,013

P(x≥1) = 1 – P(X<1) = 1 – P(X=0) = (1-0,013) = 0,9877

$\text{La respuesta es la opción } \mathbf{d}) \; \mathbf{0{,}9877}$

Textos Marea Verde