

RESPUESTAS MATEMÁTICAS I 1º BACHILLERATO LOMLOE

www.apuntesmareaverde.org.es

Revisor: Luis Carlos Vidal del Campo



Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-069507

Fecha y hora de registro: 2015-07-09 13:48:48.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dnrights.com>



ÍNDICE

Bloque 1. Aritmética y Álgebra

1. Números reales y complejos	3
2. Álgebra	37
3. Sucesiones	82

Bloque 2. Geometría

4. Trigonometría	100
5. Geometría analítica	148

Bloque 3. Análisis

6. Funciones	180
7. Límites	232
8. Derivadas	264

Bloque 4. Estadística y probabilidad

9. Probabilidad	320
10. Estadística	352

- * -

Matemáticas I

1º Bachillerato

Capítulo 1: Números reales y complejos

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Alumnado 1º bachillerato

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

- Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta (E) y cuáles la tienen periódica (P):
 a) $2/3$ b) $3/5$ c) $7/30$ d) $6/25$ e) $7/8$ f) $9/11$
 a) $2/3$ Periódica b) $3/5$ Exacta c) $7/30$ Periódica d) $6/25$ Exacta
 e) $7/8$ Exacta f) $9/11$ Periódica
- Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio 1 y comprueba si tu deducción era correcta.
 a) $0.\overline{6}$ b) $0,6$ c) $0,2\overline{3}$ d) $0,24$ e) $0,875$ f) $0,\overline{81}$
- Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes: a) $1/3$ b) $1/9$ c) $7/80$ d) $2/125$ e) $49/400$ f) $36/11$
 a) $1/3 = 0,\overline{3}$ b) $1/9 = 0,\overline{1}$ c) $7/80 = 0,0875$ d) $2/125 = 0,016$
 e) $49/400 = 0,1225$ f) $36/11 = 3.\overline{27}$
- Mentalmente decide cuáles de las siguientes fracciones tienen una expresión decimal exacta y cuáles la tienen periódica: a) $1/9$ b) $7/5$ c) $9/50$ d) $2/25$ e) $1/8$ f) $3/22$
 a) $1/9$ periódica; b) $7/5$ exacta; c) $9/50$ exacta; d) $2/25$ exacta; e) $1/8$ exacta; f) $3/22$ periódica.
- Halla la expresión decimal de las fracciones del ejercicio 1 y comprueba si tu deducción era correcta.
 a) $0.\overline{6}$ b) $0,6$ c) $0,2\overline{3}$ d) $0,24$ e) $0,875$ f) $0,\overline{81}$
- Calcula la expresión decimal de las fracciones siguientes: a) $2/3$ b) $3/5$ c) $7/30$ d) $6/25$ e) $7/8$ f) $9/11$
 a) $0.\overline{6}$ b) $0,6$ c) $0,2\overline{3}$ d) $0,24$ e) $0,875$ f) $0,\overline{81}$
- Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales exactas y redúcelas, después comprueba con la calculadora si está bien: a) 8.35 ; b) 791.297835 ; c) 0.47
 a) $8.35 = \frac{835}{100} = \frac{167}{20}$; b) $791.297835 = \frac{791297835}{1000000} = \frac{158259567}{200000}$; c) $0.47 = \frac{47}{100}$
- Escribe en forma de fracción las siguientes expresiones decimales periódicas, redúcelas y comprueba que está bien:
 a) $9.464646\dots$ b) $91.02545454\dots$ c) $0.9999\dots$ d) $3.267123123123\dots$
 a) $9.464646\dots = \frac{946-46}{99} = \frac{900}{99} = \frac{100}{11}$ b) $91.02545454\dots = \frac{910254-9102}{9900} = \frac{25032}{275}$
 c) $0.9999\dots = 1$ d) $3.267123123123\dots = \frac{3267123-3267}{999000} = \frac{135994}{41625}$
- ¿Puedes demostrar que $4,99999\dots$ es igual a 5? ¿Calcula cuánto vale $2,5999\dots$? Ayuda: Escríbelos en forma de fracción y simplifica.

Para demostrar que $4,99999$ es igual a 5 pasamos el número a fracción siguiendo la explicación del ejercicio 5 y lo realizaríamos de la siguiente manera:

$$4,99999 = 49 - 4/9 = 45/9 = 5$$

Por otra parte, realizamos el mismo proceso con 2,59999:

$$2,59999 = 259 - 25/90 = 234/90 \rightarrow 78/30 = 26/10 = 2,6$$

10. Demuestra que $\sqrt[3]{7}$ es irracional.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Vamos a suponer que $\sqrt[3]{7}$ es un número racional y llegar a una contradicción.

Si $\sqrt[3]{7}$ es un número racional puede escribirse con una fracción $\frac{p}{q}$, que suponemos irreducible,

$$\sqrt[3]{7} = \frac{p}{q} \quad ; \quad 7 = \frac{p^3}{q^3} \quad ; \quad 7q^3 = p^3.$$

Luego en la descomposición en factores primos de p^3 hay un 7, y por tanto p es múltiplo de 7 $p=7a$
 $7 \cdot q^3 = 7^3 \cdot a^3 \quad q^3 = 7^2 \cdot a^3$ que también es múltiplo de 7, que contradice que la fracción $\frac{p}{q}$ sea irreducible.

11. ¿Cuántas cifras puede tener como máximo el periodo de $\frac{1}{47}$?

El resultado de esta fracción es 0,0212765957446808510638297872340425531914893617

Es decir, puede tener 46 decimales como máximo.

12. ¿Cuántos decimales tiene $\frac{1}{27.54}$? ¿Te atreves a dar una razón?

Tiene siete decimales. La expresión decimal es exacta porque el denominador tiene como factores primos potencias de 2 o 5 y la mayor potencia es la de 2 que es 7.

13. Haz la división 999 999 : 7 y después 1 : 7. ¿ Es casualidad?

$$999\,999 : 7 = 142\,857$$

$$1 : 7 = 0,142\,857$$

No, no es casualidad. Porque “999 999” es prácticamente un millón, por lo tanto, “1” es un millón seis veces reducido, por lo cual, el resultado va a ser 6 veces más pequeño.

14. Ahora divide 999 entre 37 y después 1 : 37, ¿ es casualidad?

$$999 : 37 = 27$$

$$1 : 37 = 0,02702703$$

No, no es casualidad debido a que “999” redondeado es 1000 y “1” es 3 veces más pequeño, por lo tanto, su resultado va a ser 3 veces más pequeño.

15. Utiliza la calculadora para realizar las operaciones:

a) $(33.67 + 1.91)3.52$

b) $(2/3)(3.1 + 9.1)$

c) $3.54(4.009 + 7.9)5.8$

d)

$\sqrt{5.7} + 4.6 - 3\sqrt{7.2}$

e) $9\sqrt{3.1} + \sqrt[3]{2.6} - 5\sqrt{5}$

f) 47789

a) $(33.67 + 1.91)3.52 = 125.2416$

b) $(2/3)(3.1 + 9.1) = 8.1333333333...$

c) $3.54(4.009 + 7.9)5.8 = 244.515588$

d) $\sqrt{5.7} + 4.6 - 3\sqrt{7.2} = -1.0623774417365...$

e) $9\sqrt{3.1} + \sqrt[3]{2.6} - 5\sqrt{5} = 6.0408641550683.....$

f) $47^{789} = \infty$

16. Escribe 3 números reales que estén entre $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y 1.

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6180$$

$$1 = 1$$

Los 3 números reales son : -0,3 ; 0 y 0,8

17. Escribe 5 números racionales que estén entre $\sqrt{2}$ y 1,5.

5/2, 5/3, 8/3, 9/2, y 30/4

18. Escribe 5 números irracionales que estén entre 3,14 y π .

3,14131 ; 3,1413131 ; 3,1411111 ; 3,141212121 ; 3,1411211

19. Representa en la recta numérica los siguientes números:

a) $\frac{9}{5} = 1,8$

1

1,5

2

b) $\frac{-13}{4} = -3,25$

-3,30

$\frac{-13}{4}$

-3,20

c) 1,342

1,340

1,342

1,345.

1,350

d) -2,5555

-2,56

-2,555

-2,55

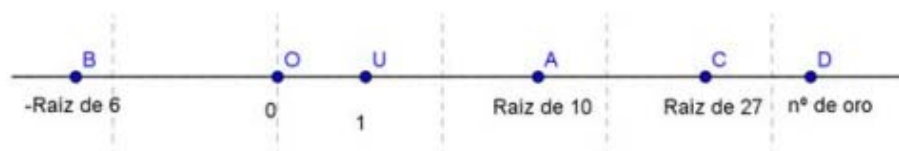
20. Representa en la recta numérica:

a) $\sqrt{10}$,

b) $-\sqrt{6}$,

c) $\sqrt{27}$,

d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$



21. Halla el valor absoluto de los siguientes números:

a) $5 \rightarrow |5| = 5$

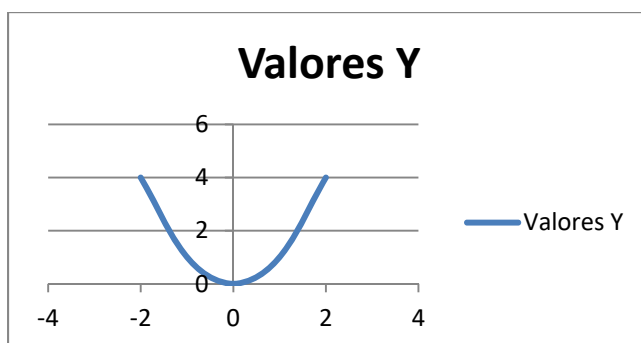
b) $-5 \rightarrow |-5| = 5$

c) $-\pi \rightarrow |-\pi| = \pi$

22. Representa las siguientes funciones:

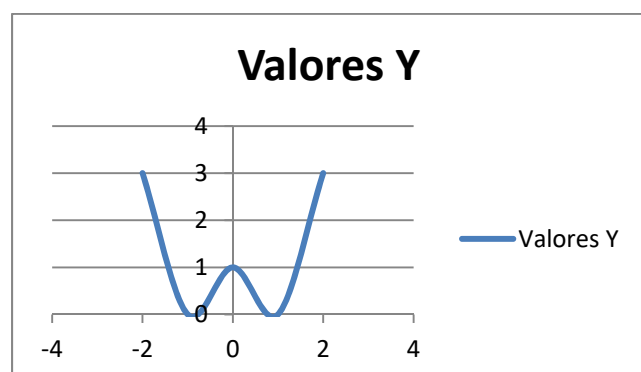
a) $f(x) = |x^2|$

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



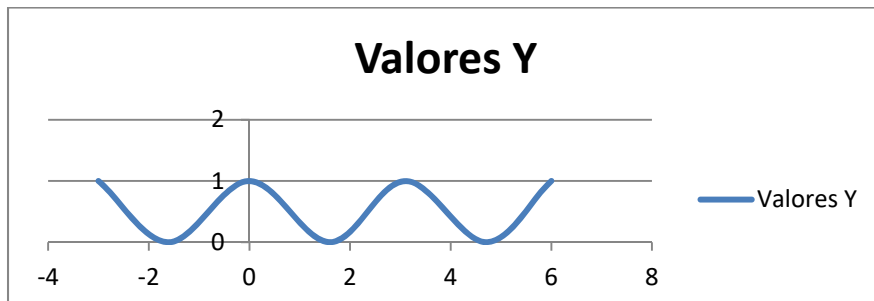
b) $f(x) = |x^2 - 1|$

x	y
-2	3
-1	0
0	1
1	0



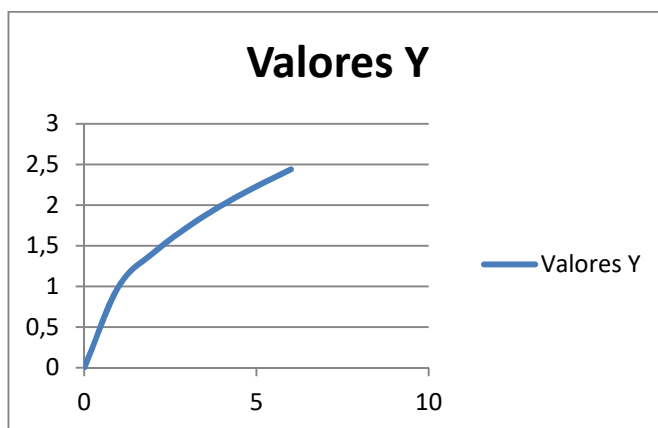
c) $f(x) = |\cos x|$

x	y
$\pi/2 + \pi n$	$\cos(\pi/2 + \pi n)$



d) $f(x) = |\sqrt{x}|$

x	y
-2	1,41
-1	1
0	0
1	1
2	1,41



23. Dada la siguiente inecuación $3 + 2x < 5x^2 + 1$, determina cuáles de los siguientes valores son solución de esta:

0, -1, 1, 2, -2, 3, -4, 6, -7, 12, -15

Tenemos que darle los valores indicados a x observando si se cumple o no la inecuación.

- $3 + 2x < 5x^2 + 1; \quad x = -15$

$3 + 2(-15) < 5(-15)^2 + 1 \rightarrow -27 < 1126$ es solución

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = -7$

$$3+2(-7) < 5(-7)^2 + 1 \rightarrow -11 < 246 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = -4$

$$3+2(-4) < 5(-4)^2 + 1 \rightarrow -5 < 81 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = -2$

$$3+2(-2) < 5(-2)^2 + 1 \rightarrow -1 < 21 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = -1$

$$3+2(-1) < 5(-1)^2 + 1 \rightarrow 1 < 6 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = 0$

$$3+2(0) < 5(0)^2 + 1 \rightarrow 3 < 1 \quad \text{no es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = 1$

$$3+2(1) < 5(1)^2 + 1 \rightarrow 5 < 6 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = 2$

$$3+2(2) < 5(2)^2 + 1 \rightarrow 7 < 21 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = 3$

$$3+2(3) < 5(3)^2 + 1 \rightarrow 9 < 46 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = 6$

$$3+2(6) < 5(6)^2 + 1 \rightarrow 15 < 181 \quad \text{es solución}$$

- $3+2x < 5x^2 + 1; \quad x = 12$

$$3+2(12) < 5(12)^2 + 1 \rightarrow 27 < 721 \quad \text{es solución}$$

24. Escribe una desigualdad que sea cierta para $x = 5$ y falsa para $x = 5.5$

Solución: $x < 5,154$

25. Representa en la recta real y calcula la distancia entre los números reales siguientes:

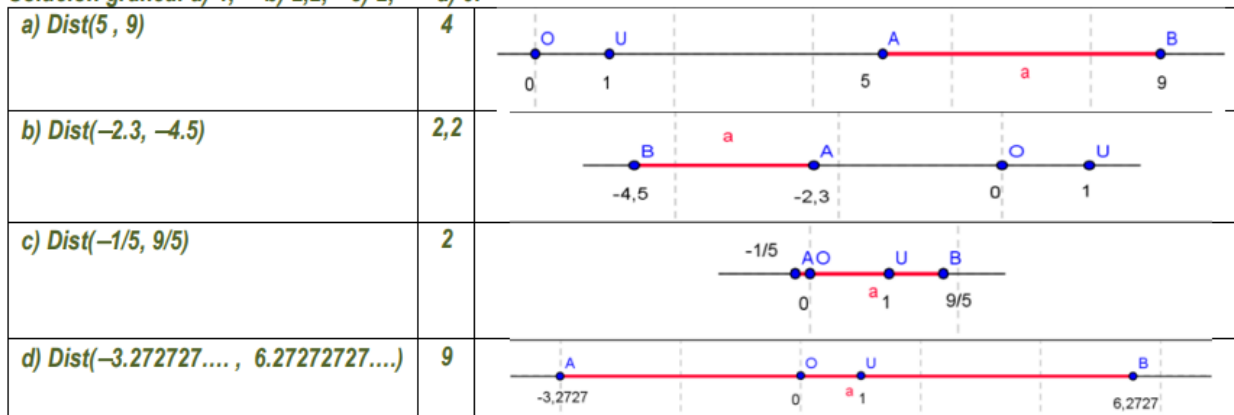
a) $\text{Dist}(5, 9)$

b) $\text{Dist}(-2.3, -4.5)$

c) $\text{Dist}(-1/5, 9/5)$

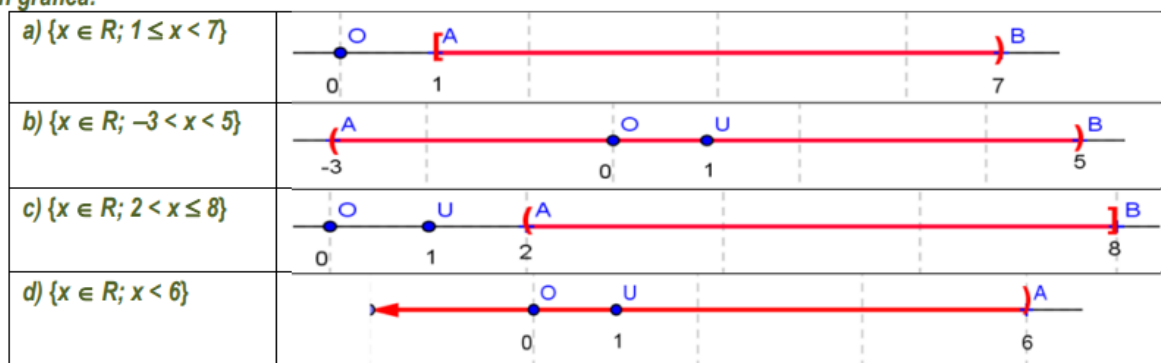
d) $\text{Dist}(-3.272727... , 6.27272727...)$.

Solución gráfica: a) 4; b) 2,2; c) 2; d) 9.



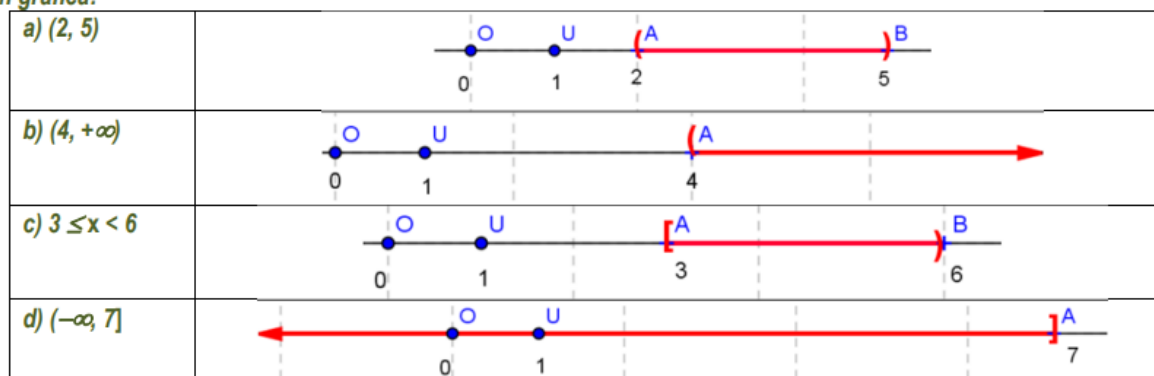
26. Escribe los siguientes intervalos mediante conjuntos y represéntalos en la recta real.

Solución gráfica:



27. Representa en la recta real y escribe en forma de intervalo

Solución gráfica:



28. Expresa como intervalo o semirrecta, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa gráficamente:

a) Un porcentaje superior al 26%.

$(26, 100]$

b) Edad inferior o igual a 18 años.

$[0, 18]$

- c) Números cuyo cubo sea superior a 8. $[3, \infty)$
 d) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras. $[100, 1.000)$
 e) Temperatura inferior a 25°C. $(-\infty, 25)$
 f) Números para los que existe su raíz cuadrada (es un nº real) $(0, \infty)$
 g) Números que estén de 5 a una distancia inferior a 4. $(1, 9)$

a) $(26, 100]$; $\{x \in \mathbb{R} / 26 < x \leq 100\}$	
b) $[0, 18]$; $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 18\}$	
c) $(2, +\infty)$; $\{x \in \mathbb{R} / x^3 > 8\}$	
d) $[100, 1000)$; $\{x \in \mathbb{R} / 100 \leq x < 1000\}$	
e) $(-\infty, 25)$; $\{x \in \mathbb{R} / x < 25\}$	
f) $(0, +\infty)$; $\{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$	
g) $(1, 9)$; $\{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 9\}$	

29. Expresa en forma de intervalo los siguientes entornos

- a) $E(1,5) = (1-5, 1+5) = (-4,6)$
 b) $E(-2, \frac{8}{3}) = (-2 - \frac{8}{3}, -2 + \frac{8}{3}) = (-\frac{14}{3}, \frac{2}{3})$
 c) $E(-10; 0,001) = (-10 - 0.001, -10 + 0.001) = (-10.001, -9.999)$

30. Expresa en forma de entorno los siguientes intervalos

- a) $(4,7)$ El centro del entorno es: $4+7/2=11/2=5,5$

El radio del entorno es: $7-4/2=3/2=1,5$

El intervalo $(4,7)$ es el entorno $(5,5;1,5)$

- b) $(-7,-4)$ El centro del entorno es $-7+(-4)/2= -11/2=-5.5$

El radio del entorno es $-4-(-7)/2= 3/2=1.5$

El intervalo $(-7,-4)$ es el entorno $(-5,5;1,5)$

- c) $(-3,2)$ El centro del entorno es $-3+2/2= -1/2=-0.5$

El radio del entorno es $2-(-3)/2= 5/2= 2,5$

El intervalo $(-3,2)$ es el entorno $(-0,5;2,5)$

31. ¿Los sueldos superiores a 500 euros, pero inferiores a 1000 euros se pueden poner como intervalo de números reales?

Es una 'pregunta trampa', ya que los sueldos no son infinitos, es decir, solo comprenden justo el número que son, no los que hay entre los dos sueldos.

32. Redondea $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ hasta las décimas y halla los errores absoluto y relativo cometidos.

Se introduce el número en la calculadora y se realiza la aproximación.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6$$

Ahora con ayuda de la calculadora realizamos los errores.

$$\text{Error absoluto: } \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1,6 \right| = 0,018$$

$$\text{Error relativo: } \frac{0,018}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0,011$$

33. Halla una cota del error absoluto en las siguientes aproximaciones:

a) $5,8 \text{ ----- } 0,05$

b) $417 \text{ ----- } 0,5$

c) $417,00 \text{ ----- } 0,005$

34. Una balanza tiene un error inferior o igual a 50 g en sus medidas. Usamos esa balanza para elaborar 5 paquetes de café de medio kilogramo cada uno que son un lote. Determina el peso mínimo y máximo del lote. ¿Cuál es la cota del error absoluto para el lote?

EA menor igual a 50 Peso mínimo= $500-50= 450\text{g}$ Lote m= $450 \times 5= 2.250\text{g}$

1 paquete= 500g Peso máximo= $500+50=550\text{g}$ Lote M= $550 \times 5= 2.750\text{g}$

La cota del error absoluto del lote es de 5g

35. Calcula y expresa el resultado en notación científica:

a) $(8.91 \cdot 10^{-3}) (3.67 \cdot 10^{11})$

$$(8.91 \cdot 3.67) \cdot 10^{-3+11} = 32.6997 \cdot 10^8 = 3.26997 \cdot 10^9$$

b) $(4.8 \cdot 10^{-5}) : (6.9 \cdot 10^{-8})$

$$(4.8 : 6.9) \cdot 10^{-5+8} = 0.7 \cdot 10^3 = 7 \cdot 10^2$$

36. Calcula y expresa el resultado en notación científica:

a) $(5.81 \cdot 10^{-12}) \cdot (4.79 \cdot 10^9) + 7.23 \cdot 10^{-4}$

$$((5.81 \cdot 4.79) \cdot 10^{-12+9}) + 7.23 \cdot 10^{-4} = 27.8299 \cdot 10^{-3} + 7.23 \cdot 10^{-4} = 2.85529 \cdot 10^{-2}$$

b) $(5.44 \cdot 10^{-7}) : (2.5 \cdot 10^7) + 3.1 \cdot 10^{-10}$

$$((5.44 : 2.5) \cdot 10^{-7-7}) + 3.1 \cdot 10^{-10} = 2,176 \cdot 10^{-14} + 3.1 \cdot 10^{-10} = 3.1002176 \cdot 10^{-10}$$

37. Comprueba que:

a) $(1 - i)^4 = -4$

$$(1 - i)^4 = \binom{4}{0} 1^4 - \binom{4}{1} 1^3 i + \binom{4}{2} 1^2 i^2 - \binom{4}{3} 1^1 i^3 + \binom{4}{4} i^4 =$$

$$= 1 - 4 \cdot i^1 + 6 \cdot i^2 - 4 \cdot i^3 + i^4 = 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$$

b) $\frac{5+10i}{3-4i} + \frac{2-i}{i} = -2$

$$\frac{(5+10i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{15+20i+30i-40}{3^2+4^2} = \frac{-25+50i}{25} = \frac{-1}{1} + \frac{2i}{1} = -1 + 2i$$

$$\frac{(2-i)(-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-2+i^2}{1^2} = \frac{-2i-1}{1} = \frac{-2i}{1} - \frac{1}{1} = -2i - 1$$

$$-1+2i-2i-1=-2$$

c) $(1 + i)^5 = -4 - 4i$

$$(1 + i)^5 = \binom{5}{0} 1^5 + \binom{5}{1} 1^4 \cdot i^1 + \binom{5}{2} 1^3 \cdot i^2 + \binom{5}{3} 1^2 \cdot i^3 + \binom{5}{4} 1^1 \cdot i^4 + \binom{5}{5} i^5 =$$

$$= 1 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot i^1 + 10 \cdot 1^3 \cdot i^2 + 10 \cdot 1^2 \cdot i^3 + 5 \cdot 1^1 \cdot i^4 + 1i^5 =$$

$$= 1 + 5i - 10 - 10i + 5 - i = -4i - 4$$

38. Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

a) $\frac{68}{(1-i)(2-i)(3-i)} = \frac{68}{(2-i-2i-1)(3-i)} = \frac{68}{(1-3i)(3-i)} = \frac{68}{3-i-9i-3} = \frac{68}{0-10i} = \frac{68 \cdot 10i}{-10i \cdot 10i} = \frac{680i}{10^2} = \frac{34i}{5}$

b) $(2 + i) - i(1 - 2i) = 2+i-i-2=0$

c) $\frac{2+i}{4-3i} + \frac{3+i}{5i}$

$$\frac{2+i}{4-3i} = \frac{(2+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{8+6i+4i-3}{4^2+3^2} = \frac{5+10i}{25} = \frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$$

$$\frac{3+i}{5i} = \frac{(3+i)(3-i)}{5i \cdot (-5i)} = \frac{-15i+5}{5^2} = \frac{-15i+5}{25} = \frac{-3i}{5} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{2+i}{4-3i} + \frac{3+i}{5i} = \frac{1}{5} + \frac{2i}{5} - \frac{3i}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$$

d) $(3 - 2i)(3 + 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$

39. Calcula: (Ayuda: sustituye z por x + iy)

a) $Im\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{x-yi}{x+yi} = \frac{(x-yi)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x^2-(xy)i-(xy)i+(yi)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-2(xy)i-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{2(xy)i}{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) = -\frac{2(xy)}{x^2+y^2}$$

b) $\operatorname{Re}(z^4)$

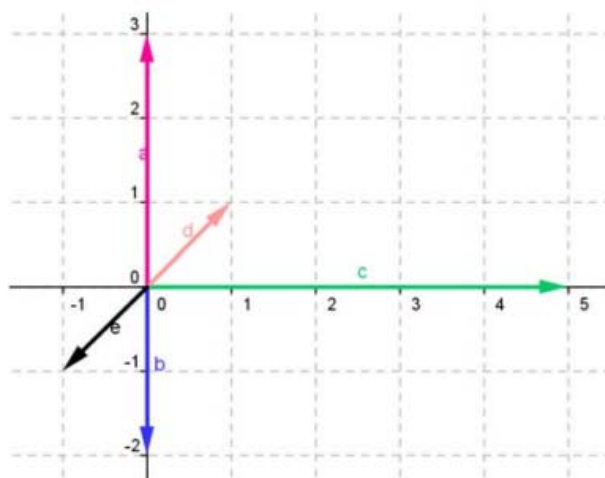
$$\begin{aligned} z^4 &= (x + yi)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3 \cdot (yi)^1 + \binom{4}{2}x^2 \cdot (yi)^2 + \binom{4}{3}x^1 \cdot (yi)^3 + \binom{4}{4}(yi)^4 \\ &= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3(yi)^1 + 6 \cdot x^2 \cdot (yi)^2 + 4 \cdot x^1 \cdot (yi)^3 + 1 \cdot (yi)^4 = \\ &= x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(z^4) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

c) $(\operatorname{Re}(z))^4$ $\operatorname{Re}(z) = x$ $(\operatorname{Re}(z))^4 = x^4$

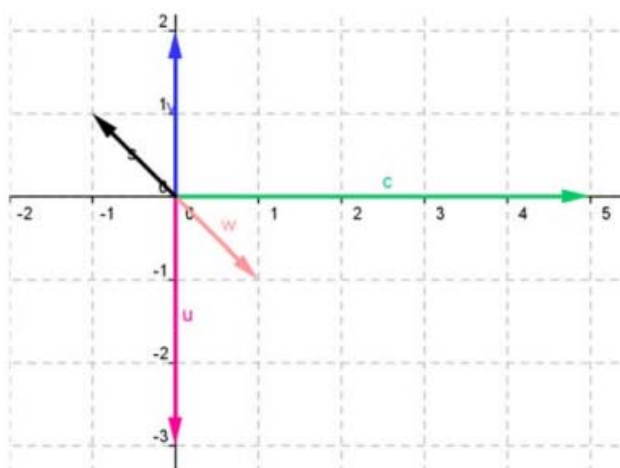
Para los siguientes números complejos: **a = 3i;** **b = -2i;** **c = 5;** **d = 1 + i;** **e = -1-i**

40. Represéntalos gráficamente



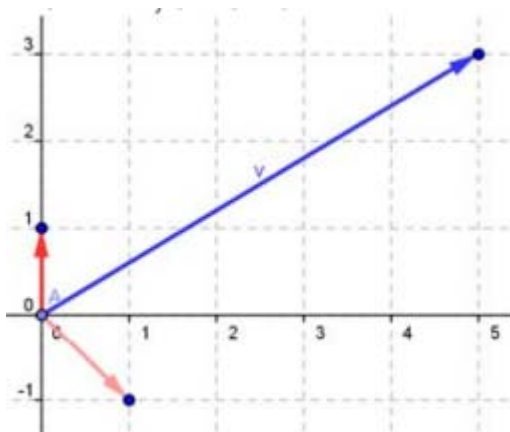
41. Representa gráficamente el conjugado de cada uno de ellos:

a = -3i; **b = 2i;** **c = 5;** **d = 1-i;** **e = -1+i**



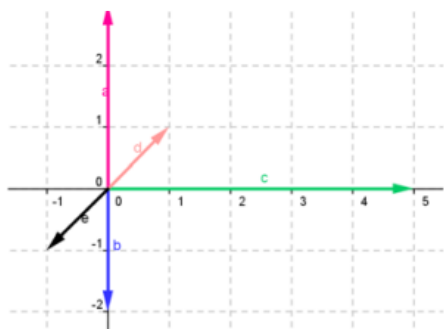
42. Representa gráficamente las sumas:

$$z_1 = a+b = 3i + (-2i) = i; \quad z_2 = a+c = 3i + 5 = 5 + 3i; \quad z_3 = b+d = -2i + (1+i) = 1-i; \quad z_4 = d+e = (1+i) + (-1-i) = 0$$

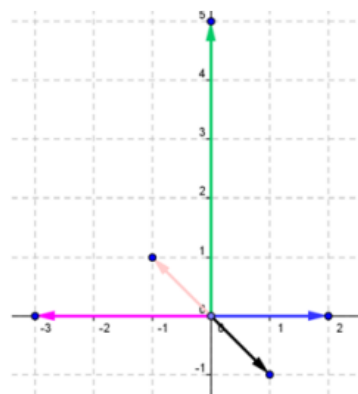


43. Representa gráficamente los productos:

$$z_1 = a \cdot i = i \cdot (3i) = -3 ; z_2 = b \cdot i = i \cdot (-2i) = 2 ; z_3 = c \cdot i = i \cdot (5) = 5i ; z_4 = d \cdot i = i \cdot (1) = i ; z_5 = e \cdot i =$$



Los originales: a, b, c, d y e



Los productos por i. Observa que giran 90° a la izquierda.

44. Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $Z = \sqrt{3} - i ; |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60^\circ$$

b) $Z = -2 - 2i ; |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{-2}{-2}\right) = 225^\circ$$

c) $Z = 1 - \sqrt{3}i ; |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -60^\circ = 300^\circ$$

d) $Z = -4i ; |z| = \sqrt{(-4)^2} = 4$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{-4}{0}\right) = 270^\circ$$

45. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

a) $i ; |z| = \sqrt{1^2} = 1$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{1}{0}\right) = 90^\circ$$

$$z = 1_{90^\circ}$$

b) $-i ; |z| = \sqrt{1^2} = 1$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{-1}{0}\right) = 270^\circ$$

$$z = 1_{270^\circ}$$

c) $4 + 4i ; |z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{4}{4}\right) = 45^\circ$$

$$z = 4\sqrt{2}_{45^\circ}$$

$$d) -4 \quad |z| = \sqrt{-4^2} = 4$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-4}\right) = 180$$

$$z = 4_{180^\circ}$$

46. comprueba los resultados: $(1+i)^{16}=2^8=256$

$$a) (1+i)^{16} = \{(1+i)^2\}^8 \quad ; i^2 = -1$$

$$(1^2 + 2i - 1)^8 = (2i)^8$$

$$2^8 \cdot i^8 = 256 \cdot i^8 \quad ; i^{4k} = 1 \quad 256 \cdot 1 = 256$$

$$b) \sqrt[3]{27i} \quad z = 27i \quad ; \quad |z| = \sqrt{27^2} = \sqrt{27} \quad ; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{27}{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt[3]{27 \frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{27} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$k=0; \frac{3\pi}{2+2 \cdot 0\pi} = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad k=1; \frac{3\pi}{2+2 \cdot 1\pi} = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad k=2; \frac{3\pi}{2+2 \cdot 2\pi} = \frac{3\pi}{6}$$

47. Realiza las siguientes operaciones de números complejos

$$\frac{\sqrt{2}i}{-2-2i} = \frac{(\sqrt{2}i) \cdot (-2+2i)}{(-2-2i)(-2+2i)} = \frac{-2\sqrt{2}i+2i \cdot \sqrt{2}i}{4-4i^2} = \frac{-2\sqrt{2}i+2i \cdot \sqrt{2}i}{8} = \frac{-\sqrt{2}i+i\sqrt{2}i}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30} \quad ; \quad z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad ; \quad |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \quad ; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30} = (1_{\frac{\pi}{3}})^{30} = 1^{30}_{\frac{\pi}{3} \cdot 30} = 1_{0^\circ} = 1$$

48. resuelve las ecuaciones:

$$a) x^2 = -1 \quad x = \sqrt{-1} \quad z = -1 + 0i \quad ; \quad |z| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1 \quad ; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi$$

$$z = \frac{1\pi+2k\pi}{2} \quad ; \quad k=0, \quad z_1 = \frac{1\pi}{2} = i \quad ; \quad k=1, \quad z_2 = \frac{1\pi+2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$b) x^3 = -8 \quad ; \quad x = \sqrt[3]{-8} \quad ; \quad z = -8 + 0i \quad ; \quad |z| = \sqrt{(-8)^2 + (0)^2} = 8 \quad ; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-8}\right) = \pi$$

$$z = \sqrt[3]{8 \frac{\pi+2k\pi}{3}} = \frac{2\pi+2k\pi}{3} \quad ; \quad k=0, \quad z_1 = \frac{2\pi}{3} = 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1 + \sqrt{3}i$$

$$k=1, \quad z_2 = \frac{2\pi+2\pi}{3} = 2 \cos \pi + 2 \operatorname{sen} \pi i = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot i = -2$$

$$k=2, \quad z_3 = \frac{2\pi+4\pi}{3} = 2 \cos \frac{5\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} i = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot i = 1 - \sqrt{3}i$$

$$c) x^4 + 16 = 0 \quad x = \sqrt[4]{-16} \quad ; \quad z = -16 + 0i \quad ; \quad |z| = \sqrt{(-16)^2 + (0)^2} = 16 \quad ; \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{0}{-16}\right) = \pi$$

$$k=0, \quad z_1 = \frac{2\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{4} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} i = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k=1, \quad z_2 = \frac{2\pi+2\pi}{4} = 2 \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} i = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 2, \quad z_3 = \frac{2\pi+4\pi}{4} = 2 \cos \frac{5\pi}{4} + 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} i = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$k = 3, \quad z_4 = \frac{2\pi+6\pi}{4} = 2 \cos \frac{7\pi}{4} + 2 \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} i = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} i = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

49. Calcula las raíces n-ésimas de la unidad, para $n = 2, 3$ y 4 . Representarlas gráficamente, y comprobar que están sobre la circunferencia de radio 1, y en los vértices de un polígono regular.

$$\sqrt[2]{1_0^\circ} \quad ; \quad \sigma = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{2} = 0^\circ + 180^\circ k \quad ; \quad k = 0, 1$$

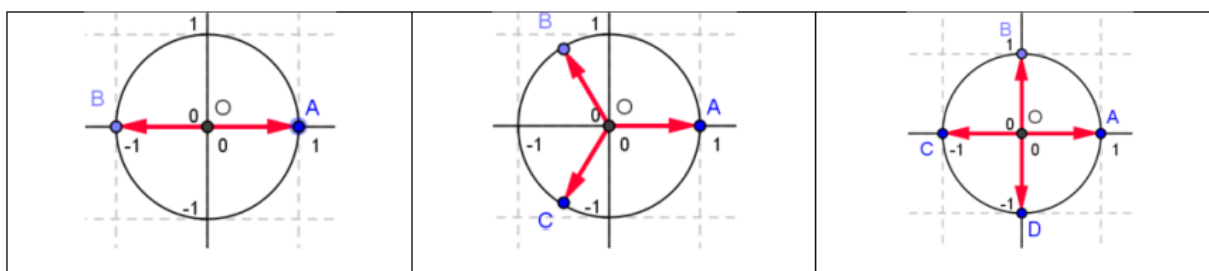
$$\omega_0 = 1_0^\circ \quad \omega_1 = 1_{180^\circ}$$

$$\sqrt[3]{1_0^\circ} \quad ; \quad \sigma = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{3} = 0^\circ + 120^\circ k \quad ; \quad k = 0, 1, 2$$

$$\omega_0 = 1_0^\circ \quad \omega_1 = 1_{120^\circ} \quad \omega_2 = 1_{240^\circ}$$

$$\sqrt[4]{1_0^\circ} \quad ; \quad \sigma = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{4} = 0^\circ + 90^\circ k \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\omega_0 = 1_0^\circ \quad \omega_1 = 1_{90^\circ} \quad \omega_2 = 1_{180^\circ} \quad \omega_3 = 1_{270^\circ}$$



50. Copia la tabla adjunta en tu cuaderno y empareja cada logaritmo con su potencia:

$25 = 5^2$ $\log_5 1 = 0$ $20 = 2 \cdot 10$ $52 = 4 \cdot 13$ $51 = 3 \cdot 17$ $\log_2 2 = 1$ $50 = 2 \cdot 25$ $\log_2 32 = 5$ $21 = 3 \cdot 7$ $\log_2 1 = 0$ $\log_5 5 = 1$ $\log_5 25 = 2$ $24 = 2 \cdot 12$ $\log_3 81 = 4$ $\log_2 16 = 4$ $34 = 2 \cdot 17$

$2^5 = 32$	$\log_5 1 = 0$	$2^0 = 1$	$5^2 = 25$
$5^1 = 5$	$\log_2 2 = 1$	$5^0 = 1$	$\log_2 32 = 5$
$2^1 = 2$	$\log_2 1 = 0$	$\log_5 5 = 1$	$\log_5 25 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_3 81 = 4$	$\log_2 16 = 4$	$3^4 = 81$

51. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 2^5$; b) $\log_5 25$; c) $\log_2 2^{41}$; d) $\log_5 5^{30}$

a) $\log_2 2^5 = 5$; b) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$; c) $\log_2 2^{41} = 41$; d) $\log_5 5^{30} = 30$

52. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_3 27$; b) $\log_{10} 100$; c) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{4}$; d) $\log_{10} 0.0001$

a) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$; b) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$; d) $\log_{10} 0.0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4$

53. Calcula x utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 = x$; b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$; c) $\log_x 25 = 2$

a) $\log_2 64 = x$; $2^x = 64$; $2^x = 2^5$; $x = 5$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$; $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$;

c) $\log_x 25 = 2$; $x^2 = 25$; $x^2 = 5^2$; $x = 5$

54. Calcula utilizando la definición de logaritmo:

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$; b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^6 + \log_2 2^{-2} - \log_3 3^2 - \log_2 2^{\frac{1}{2}} =$
 $= 6 + (-2) - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1 = \log_2 2^{-5} + \log_3 3^{-3} - 0 = -5 - 3 = -8$

55. Utiliza la calculadora para obtener a) $\log 0.000142$; b) $\log 142$; c) $\log 9 + \log 64$

a) $\log 0.000142 = -3.8477117$;

b) $\log 142 = 2.15228834$;

c) $\log 9 + \log 64 =$

2.76042248

56. Desarrolla las expresiones que se indican: a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}}$ b) $\log \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d}\right)$

a) $\ln \sqrt[5]{\frac{4x^2}{e^3}} = \ln \left(\frac{4x^2}{e^3}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \ln \frac{4x^2}{e^3} = \frac{1}{5} (\ln(4x^2) - \ln e^3) = \frac{1}{5} (\ln 4 - \ln(x^2) - \ln e^3) =$
 $= \frac{1}{5} (\ln 4 - 2 \ln x - 3 \ln e) = \frac{1}{5} (\ln 4 - 2 \ln x - 3)$

b) $\log \left(\frac{a^3 \cdot b^2}{c^4 \cdot d}\right) = \log(a^3 \cdot b^2) - \log(c^4 \cdot d) = \log(a^3) + \log(b^2) - \log(c^4) - \log d =$
 $= 4 \log a + 2 \log b - 4 \log c - \log d$

57. Expresa los logaritmos de los números siguientes en función de $\log 3 = 0.4771212$

a) 81 ; b) 27 ; c) 59 049

a) $\log 81 = \log 3^4 = 4\log 3 = 4 \cdot 0.4771212$

b) $\log 27 = \log 3^3 = 3\log 3 = 3 \cdot 0.4771212$

c) $\log 59049 = \log 3^{10} = 10\log 3 = 10 \cdot 0.4771212$

58. Simplifica la siguiente expresión: $\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h$

$$\frac{1}{2}\log m - 2\log t - \log p + \frac{5}{2}\log h = \log m^{\frac{1}{2}} - \log t^2 - \log p + \log h^{\frac{5}{2}} = \log \frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{5}{2}}}{t^2 \cdot p} = \log \frac{\sqrt{m} \cdot h^5}{t^2 \cdot p}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los valores exactos de $a + b$, $c - a$ y $a \cdot c$ para los números:

$$a + b = 2,7 + 3,292929 = 5,992929$$

$$2,7 + 3,3 = 6$$

$$\text{Error} = 6 - 5,992929 = 0,007071$$

$$c - a = 0,01030303 - 2,7 = -2,68969697$$

$$0,01 - 2,7 = -2,69$$

$$\text{Error} = 2,69 - 2,68969697 = 0,00030303$$

$$a \cdot c = 2,7 \cdot 0,01030303 = 0,027818181$$

$$2,7 \cdot 0,01 = 0,027$$

$$\text{Error} = 0,027 - 0,027818181 = 0,000818181$$

2. Descubre cuál de estos números es irracional: a) 3,1416 b) 4 c) π

c) π

3. ¿Podemos encontrar números irracionales en las marcas de una regla graduada? ¿Hay algún punto de la regla (aunque no tenga marca) que se corresponda con un número irracional? Justifica tu respuesta.

No,

Sí, porque por ejemplo la raíz de 2 que es 1,414213562 se encuentra en la regla, aunque no tenga marca.

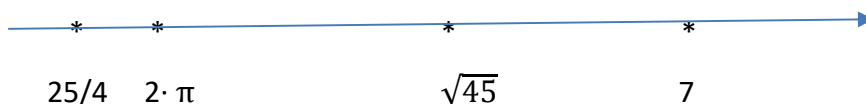
4. Clasifica los siguientes números en orden de mayor a menor y después represéntalos en la recta:

$$\sqrt{45} = 6,7082$$

$$2 \cdot \pi = 6,2831$$

$$25/4 = 6,25$$

$$7 > \sqrt{45} > 2 \cdot \pi > 25/4$$



5. Escribe una sucesión infinita de números reales dentro del intervalo (1, 1).

$$\frac{1}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \dots \dots$$

6. Calcula el valor absoluto de los siguientes números:

a) $|-5| = 5$

b) $|4 - 4| = 0$

c) $|3 \cdot 2 + 9| = |6 + 9| = |15| = 15$

d) $|\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

e) $|\sqrt{7^2}| = |\sqrt{49}| = |7| = 7$

7. Calcula x en las siguientes ecuaciones: (pista: x puede tener dos valores).

a) $|x| = 5$ $x_1 = 5; x_2 = -5$

b) $|x - 4| = 0$ $x - 4 = 0$ $x = 4$

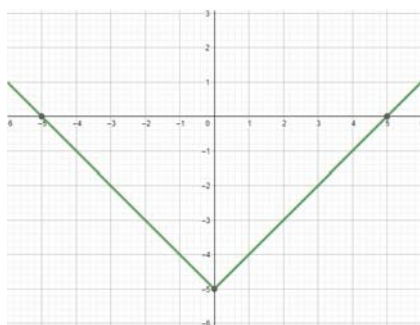
c) $|3x + 9| = 21$

$$3x + 9 = 21 \rightarrow 3x = 21 - 9 \rightarrow 3x = 12 \rightarrow x_1 = \frac{12}{3} = 4$$

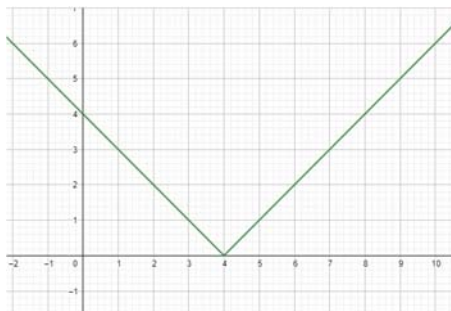
$$3x + 9 = -21 \rightarrow 3x = -21 - 9 \rightarrow 3x = -30 \rightarrow x_2 = -\frac{30}{3} = -10$$

8. Dibuja las siguientes funciones en un gráfico:

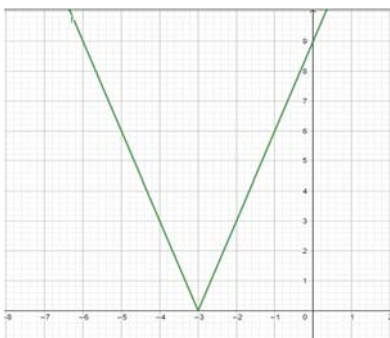
a) $f(x) = |x| - 5$



b) $f(x) = |x - 4|$



c) $f(x) = |3x + 9|$



9. Elige un día y calcula la distancia que has recorrido en total, y compárala con la distancia entre los puntos inicial (al principio del día) y final (al terminar el día).

Solución libre.

10. Un artesano fabrica dos productos. El primero (a) le cuesta 2 horas y 3 euros en material, y el segundo (b) le cuesta 6 horas y 30 euros cada hora de trabajo, y los vende por (a) 30 y (b) 90 euros, averigua cuál es más rentable para su negocio.

PRODUCTO A
2 horas / 3 euros material
1h -10 euros
Venta producto 30 euros
Coste $P_a = 2 \cdot 10 + 3 = 23$
Beneficio A = venta – coste
 $B_a = 30 - 23 = 7$ euros

PRODUCTO B
6 horas / 30 euros material
1 hora – 10 euros
venta productos 90 euros
coste $P_b = 6 \cdot 10 + 30 = 90$
Beneficio B = venta - coste
 $B_b = 90 - 90 = 0$ euros

Con el primero gana 7 euros con cada producto. Con el segundo no gana nada.

11. Entre Kroflite y Beeline hay otras cinco ciudades. Las 7 se encuentran a lo largo de una carretera recta, una de otras por una distancia entera de kilómetros. Las ciudades se encuentran espaciadas de tal manera que si uno conoce la distancia que una persona ha recorrido entre dos ellas, puede identificar la sin ninguna duda. ¿Cuál es la distancia mínima entre Kroflite y Beeline para que esto sea posible?

$$1+2+3+4+5+6=21\text{km}$$

Kroflite – A: 1km A hacia B: 2km B hacia C: 3km C hacia D: 4km D hacia E: 5km E- Beeline: 6km

12. Representa en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones:

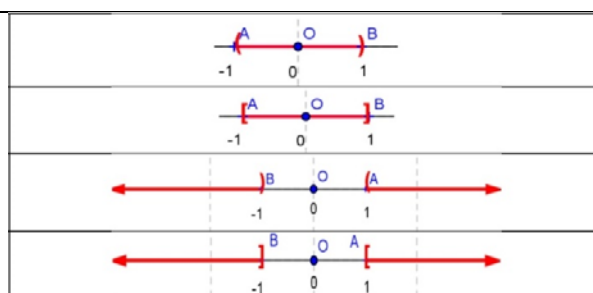
- a) $|x| < 1$
- b) $|x| \leq 1$
- c) $|x| > 1$
- d) $|x| \geq 1$

a) $-1 < x < 1$

b) $-1 \leq x \leq 1$

c) $x < -1 \quad x > 1$

d) $x \leq -1 \quad x \geq 1$



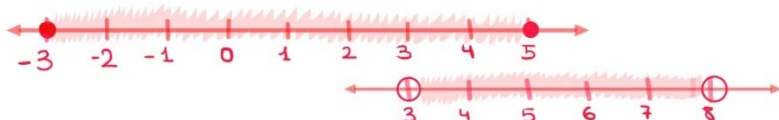
13. Halla dos números que disten 6 unidades de 3, y otros dos que disten 3,5 unidades de -2 calcula después la diferencia entre el mayor y el menor de todos estos números.

SOLUCIÓN: Dos números que distan 6 unidades de tres son -3 y 9

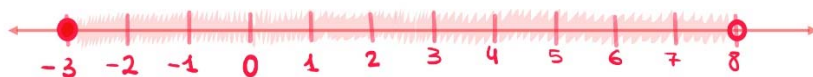
Dos que distan 3,5 unidades de -2 son -5,5 y 1,5

La diferencia es $9 - (-5,5) = 14,5$ es la diferencia entre el mayor y el menor.

14. Escribe el intervalo $[-3, 5] \cap (3, 8)$.



solución: $(-3, 8)$



15. Escribe el intervalo formado por los números reales x que cumplen $|x - 8| \leq 3$.

$$|x - 8| \leq 3; \quad -3 \leq (x - 8) \leq 3; \quad -3 + 8 \leq x \leq 3 + 8; \quad 5 \leq x \leq 11$$

.Solución: $[5, 11]$

16. Determina los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $-A$ en los siguientes casos:

a) $A = [-11, -9]$ $B = (-1, 6)$

b) $A = [-5, 5]$ $B = (3, 4)$

a)

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = [-11, -9] \cup (-1, 6)$$

$$A - B = [-11, 9] - (-1, 6) = A$$

$$-A = -[-11, -9] = [9, 11]$$

b)

$$A \cap B = [-5, 5] \cap (3, 4) = (3, 4)$$

$$A \cup B = [-5, 5] \cup (3, 4) = [-5, 5]$$

$$A - B = [-5, 5] - (3, 4) = [-5, 3] \cup [4, 5]$$

$$-A = A$$

17. Comprueba si: a) $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1$ b) $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = |e^{i\alpha}| = 1$

a) $\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = \left| \frac{a-bi}{a+bi} \right| = \left| \frac{(a-bi) \cdot (a-bi)}{(a+bi) \cdot (a-bi)} \right| = \left| \frac{a^2 - b^2 - 2abi}{a^2 + b^2} \right| = \left| \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2ab}{a^2 + b^2} i \right| =$

$$\sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4a^2b^2} =$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^2b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot (a^2 + b^2) = 1$$

Por lo que es cierto.

b) $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sqrt{1} = 1$. Por lo que es cierto.

18. Calcula:

$$\text{a)} (2+i)^5 = \binom{5}{0} 2^5 + \binom{5}{1} 2^4(i) + \binom{5}{2} 2^3(i)^2 + \binom{5}{3} 2^2(i)^3 + \binom{5}{4} 2^1(i)^4 + \binom{5}{5} i^5 \rightarrow 1 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^4(i) + 10 \cdot 2^3 i^2 + 10 \cdot 2^2 i^3 + 5 \cdot 2 i^4 + 1 \cdot i^5 = 32 + 80i + 80i^2 + 40i^3 + 10i^4 + i^5 \rightarrow 32 + 80i - 80 - 40i + 10 + i = -38 + 41i$$

$$\text{b)} \frac{13}{|2-3i|} = \frac{13}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\text{c)} \frac{(3+2i)^2}{(2+3i)^3} = \frac{9+12i+4i^2}{8+36i+54i^2+27i^3} = \frac{9+12i-4}{8+36i-54-27i} = \frac{12i+5}{9i-46} = \frac{12i+5}{9i-46} \cdot \frac{9i+46}{9i+46} \rightarrow \frac{108i^2+552i+45i+203}{81+2116} = \frac{552i+42i+203-108}{2116+81} = \frac{597i+95}{2197} = \frac{95}{2197} + \frac{597}{2197}i$$

$$\text{d)} i(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}i) = (\sqrt{3}i-i^2)(1+\sqrt{3}i) = (\sqrt{3}i+1)^2 = 3i^2 + 2\sqrt{3}i + 1 = -3 + 2\sqrt{3}i + 1 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\text{e)} (1+i)^8 \rightarrow (1+i)^{2 \cdot 4} = (1+2i+i^2)^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$$

$$\text{f)} (1+i)^{-1} \rightarrow \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i}{1} = 1-i$$

$$\text{g)} (\sqrt{3}+i)^{-9} \rightarrow |z| = 2 \quad \arg z = \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ ; \quad (2_{30^\circ})^{-9} = 2_{-9-30^\circ}^{-9} = -2_{270^\circ}^{-9} = 2_{90^\circ}^{-9}$$

19. Demuestra que z es real si y solo si $z=\bar{z}$.

$$z = \bar{z} \rightarrow x+iy = x-iy \rightarrow x+iy-x+iy = 0 \rightarrow 2iy = 0 \rightarrow y = \frac{0}{2i} \rightarrow y = 0$$

Si $y=0$, z es real $\rightarrow z = x + 0i \rightarrow z = x$, por lo que es x , correspondiendo a todos los números reales.

20) Verifica que el inverso de z , z^{-1} , es igual a $\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$. Calcula el inverso de $2+3i$.

$$z = x+iy \rightarrow z^{-1} = \frac{1}{x+iy} \rightarrow z^{-1} = \frac{1 \cdot (x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Teniendo en cuenta que:

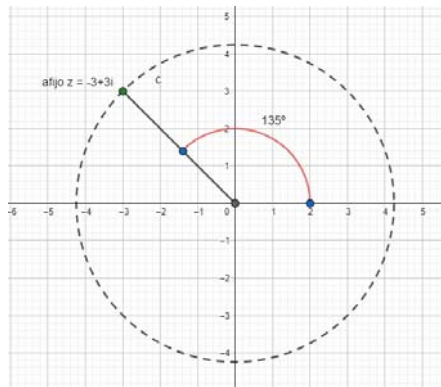
$$\begin{cases} x-iy = \bar{z} \\ x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = z \cdot \bar{z} \end{cases} \rightarrow \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

$$z = 2+3i \rightarrow z^{-1} = \frac{1 \cdot (2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

21) Calcula el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

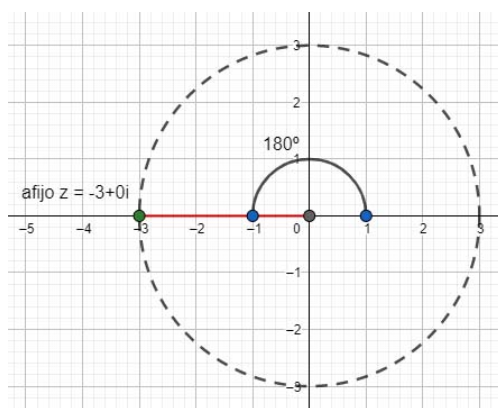
$$\text{a)} -3+3i \rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ (Módulo)}$$

$$\text{(Argumento)} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-3}\right) = -45^\circ \rightarrow 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$



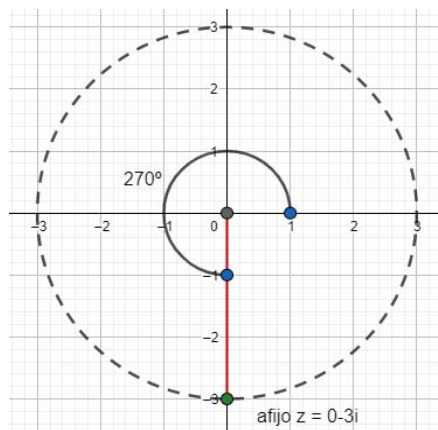
b) $-3 \rightarrow -3+0i \rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ (Módulo)

(Argumento) $\rightarrow \theta = 180^\circ$



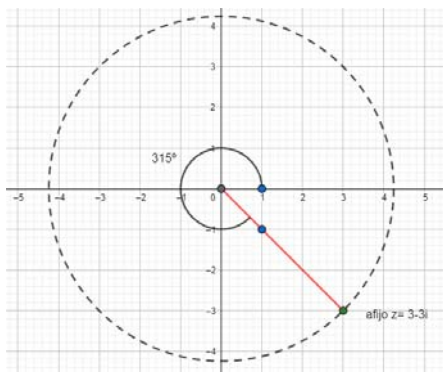
c) $-3i \rightarrow 0-3i \rightarrow |z| = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ (Módulo)

(Argumento) $\rightarrow \theta = 270^\circ$



d) $3-3i \rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (Módulo)

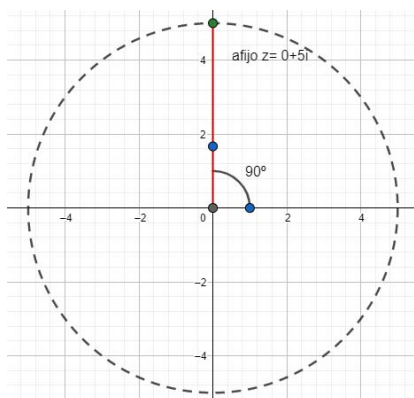
(Argumento) $\rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-3}{3}\right) = -45 \rightarrow 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$



22) Expresa en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

a) $5i \rightarrow 0+5i \rightarrow |z| = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$ (Módulo)

(Argumento) $\rightarrow \theta = 90^\circ$

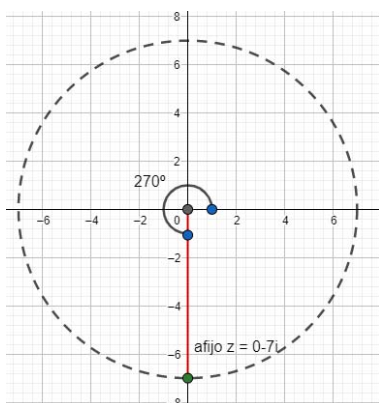


Forma Polar: $|z|_\theta = 5_{90^\circ}$

Forma Trigonométrica: $5(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$

b) $-7i \rightarrow 0-7i \rightarrow |z| = \sqrt{(-7)^2} = 7$ (Módulo)

(Argumento) $\rightarrow \theta = 270^\circ$

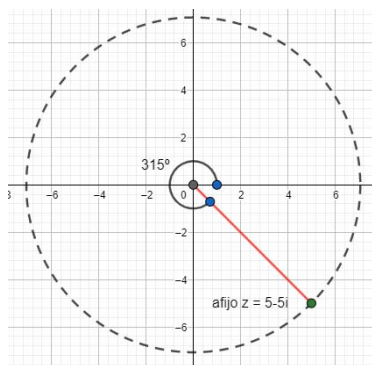


Forma Polar: 7_{270°

Forma Trigonométrica: $7(\cos 270^\circ + \sin 270^\circ i)$

c) $5-5i \rightarrow |z| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$ (Módulo)

(Argumento) $\rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right) = -45 \rightarrow 360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$

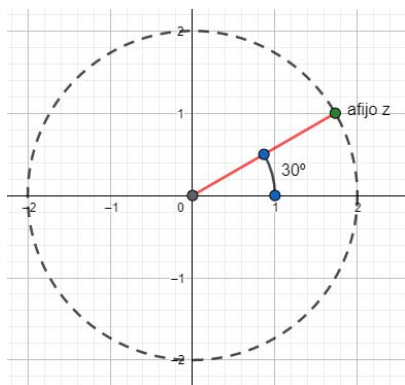


Forma Polar: $5\sqrt{2}_{315^\circ}$

Forma Trigonométrica: $5\sqrt{2} (\cos 315^\circ + \sin 315^\circ i)$

d) $\sqrt{3} + i \rightarrow |z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ (Módulo)

(Argumento) $\rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$



Forma Polar: 2_{30°

Forma Trigonométrica: $2(\cos 30^\circ + \sin 30^\circ i)$

23. Expresa en forma binómica los siguientes números complejos en forma polar:

a) De módulo 2 y argumento $\pi/3$

Forma polar: $r_\alpha \rightarrow 2_{\pi/3}$

$a = r \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$b = r \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Forma binómica: $z=a+bi \rightarrow z = 1 + \sqrt{3}i$

b) De módulo 3 y argumento $-\pi/4$

Forma polar: $r_\alpha \rightarrow 3_{-\pi/4}$

$a = r \cdot \cos \alpha = 3 \cdot \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$b = r \cdot \sin \alpha = 3 \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Forma binómica: $z=a+bi \rightarrow z = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

c) De módulo 1 y argumento $\pi/2$

Forma polar: $r_\alpha \rightarrow 1_{\pi/2}$

$$a = r \cdot \cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$b = r \cdot \sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

$$\text{Forma binómica: } z = a + bi \rightarrow \underline{z = i}$$

d) De módulo 5 y argumento $2\pi/3$

$$\text{Forma polar: } r_\alpha \rightarrow 5_{2\pi/3}$$

$$a = r \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{5}{2}; \quad b = r \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Forma binómica: } z = a + bi \rightarrow z = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$

24. Realiza las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma trigonométrica:

a) $(\sqrt{3} + i)^{60}$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\Theta = \arctg \left(\frac{b}{a} \right) = \arctg \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ$$

$$\text{Forma polar: } 2_{30^\circ}$$

$$(r_\Theta)^n = r^n (\cos \Theta \cdot n + i \sin \Theta \cdot n) \rightarrow (2_{30^\circ})^{60} = [2 (\cos 30 + i \sin 30)]^{60} = 2^{60} (\cos 30 \cdot 60 + i \sin 30 \cdot 60) = 2^{60} (\cos 1800^\circ + i \sin 1800^\circ) = 2^{60} (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

b) $(4 - 4i)^{-11}$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\Theta = \arctg \left(\frac{b}{a} \right) = \arctg \left(\frac{-4}{4} \right) = -45^\circ$$

$$\text{Forma polar: } 4\sqrt{2}_{-45^\circ}$$

$$(r_\Theta)^n = r^n (n \cos \Theta + n \sin \Theta i) \rightarrow \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right)_{-45^\circ}^{11} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} (\cos -45^\circ + i \sin -45^\circ) \right]^{11} = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^{11} (\cos -45^\circ \cdot 11 + i \sin -45^\circ \cdot 11) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^{11} (\cos -495^\circ + i \sin -495^\circ) = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^{11} (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$$

c) $\frac{(1 - \sqrt{3}i)^{12}}{(-2 - 2i)^8}$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\Theta = \arctg \left(\frac{b}{a} \right) = \arctg \left(\frac{-\sqrt{3}}{1} \right) = -60^\circ$$

$$\text{Forma polar: } 2_{-60^\circ}$$

$$(2_{-60^\circ})^{12} = [2 (\cos -60^\circ + i \sin -60^\circ)]^{12} = 2^{12} (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Theta = \arctg \left(\frac{b}{a} \right) = \arctg \left(\frac{-2}{2} \right) = -45^\circ$$

$$\text{Forma polar: } 2\sqrt{2}_{-45^\circ}$$

$$(2\sqrt{2}_{-45^\circ})^8 = [2\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^8 = (2\sqrt{2})^8 (\cos 45^\circ \cdot 8 + i \sin 45^\circ \cdot 8) = 2^{12} (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

$$\frac{2^{12} (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)}{2^{12} (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)} = 1$$

25. Utiliza la fórmula de Moivre para expresar en función de sen θ y cos θ :

a) cos 2θ ; b) sen 2θ

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta i =$$

$$(\cos \theta)^2 + 2(\cos \theta)(i \sin \theta) + (i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2 \cdot \cos \theta \cdot i \sin \theta - \sin^2 \theta$$

$$(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta)i$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

c) cos 3θ ; d) sen 3θ

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = 3 \cos \theta + 3 \sin \theta i =$$

$$(\cos \theta)^3 + 3(\cos \theta)^2(i \sin \theta) + 3(\cos \theta)(i \sin \theta)^2 + (i \sin \theta)^3 =$$

$$\cos^3 \theta + 3 \cdot \cos^2 \theta \cdot i \sin \theta - 3 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta =$$

$$(\cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta) + (3 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta - \sin^3 \theta)i$$

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cdot \cos \theta \cdot \sin^2 \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin \theta - \sin^3 \theta$$

26. Calcula el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\frac{-3}{\sqrt{3}+i}$

b) $\frac{-i}{1-i}$

c) $(1 - i\sqrt{3})^7$

a) $\frac{-3}{\sqrt{3}+i} = \frac{-3(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{-3(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}^2+1^2} = \frac{-3(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{-3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$; $\theta = \arctg\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{-3\sqrt{3}}{4}}\right) = \arctg\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$

b) $\frac{-i}{1-i} = \frac{-i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $\theta = \arctg\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctg(-1) = \frac{7\pi}{4}$

c) $(1 - i\sqrt{3})^7$; $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$; $\theta = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \arctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3} = -60^\circ$
 $(1 - i\sqrt{3})^7 = (2_{-60^\circ})^7 = 2^7_{-420^\circ} = 128_{-60^\circ} = 128_{\frac{5\pi}{3}}$; luego $\theta = \frac{5\pi}{3}$

27. Calcula, representa en el plano complejo y escribe en forma binómica:

a) $\sqrt{-3i}$; $|0 - 3i| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2} = 3$ $\theta = \arctg\left(\frac{-3}{0}\right) = \frac{3\pi}{2}$

$\sqrt{-3i} = \sqrt[2]{3_{\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt[2]{3_{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}}$; $k=0$, $a1 = \sqrt[2]{3_{\frac{3\pi}{4}}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$; $k=1$, $a2 = \sqrt[2]{3_{\frac{7\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

b) $\sqrt{1 + \sqrt{3}i}$ $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ $\theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\sqrt{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt[2]{2_{\frac{\pi}{3}}} = \sqrt[2]{2_{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}}$;

$k=0$, $b1 = \sqrt[2]{2_{\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $k=1$, $b2 = \sqrt[2]{2_{\frac{7\pi}{6}}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $\sqrt[3]{-27}$ $|-27 + 0 \cdot i| = \sqrt{(-27)^2 + 0^2} = 27$ $\theta = \arctg\left(\frac{0}{-27}\right) = \pi$

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27\pi} = 3\sqrt[3]{\frac{\pi+2k\pi}{3}}$$

$$k=0, c1 = 3\sqrt[3]{\pi} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; \quad k=1, c2 = 3\sqrt[3]{\pi} = -3 ; \quad k=2, c3 = 3\sqrt[3]{\pi} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$d) \sqrt[3]{1-i} \quad |1-i| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \theta = \arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}\frac{7\pi}{4}} = \sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\frac{7\pi+2k\pi}{4}}$$

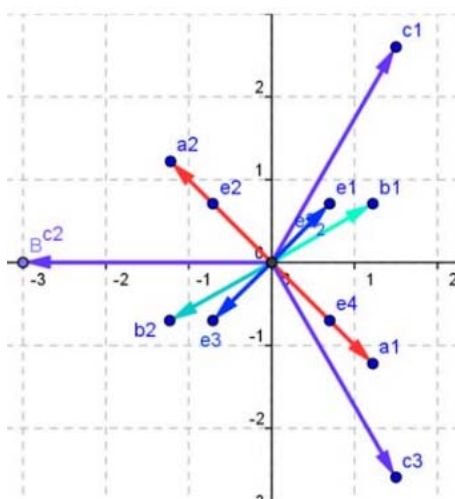
$$k=0, d1 = \sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\frac{7\pi}{4}} ; \quad k=1, d2 = \sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\frac{15\pi}{12}} ; \quad k=2, d3 = \sqrt[6]{2}\sqrt[3]{\frac{23\pi}{12}}$$

$$e) \sqrt[4]{-81} \quad |-81+0 \cdot i| = \sqrt{(-81)^2 + 0^2} = 81 \quad \theta = \arctg\left(\frac{0}{-81}\right) = \pi$$

$$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81\pi} = 3\sqrt[4]{\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

$$k=0, e1 = 3\sqrt[4]{\pi} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i ; \quad k=1, e2 = 3\sqrt[4]{\pi} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i ;$$

$$k=2, e3 = 3\sqrt[4]{\pi} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i ; \quad k=3, e4 = 3\sqrt[4]{\pi} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i ;$$



28. Resuelve las ecuaciones:

a) $x^3 = -27$

$$x^3 = -27 ; x = \sqrt[3]{-27} \quad |-27+0 \cdot i| = \sqrt{(-27)^2 + 0^2} = 27 \quad \theta = \arctg\left(\frac{0}{-27}\right) = \pi$$

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27\pi} = 3\sqrt[3]{\frac{\pi+2k\pi}{3}}$$

$$k=0, x1 = 3\sqrt[3]{\pi} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i ; \quad k=1, x2 = 3\sqrt[3]{\pi} = -3 ; \quad k=2, x3 = 3\sqrt[3]{\pi} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

b) $x^4 = -81$

$$x^4 = -81 ; x = \sqrt[4]{-81} \quad |-81+0 \cdot i| = \sqrt{(-81)^2 + 0^2} = 81 \quad \theta = \arctg\left(\frac{0}{-81}\right) = \pi$$

$$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81\pi} = 3\sqrt[4]{\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

$$k=0, x_1 = 3\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i ; \quad k=1, x_2 = 3\frac{3\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i ;$$

$$k=1, x_3 = 3\frac{5\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i ; \quad k=3, x_4 = 3\frac{7\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i ;$$

c) $x^5 - 32 = 0$

$$x^5 - 32 = 0 ; x^5 = 32 ; x = \sqrt[5]{32} ; |32 + 0 \cdot i| = \sqrt{(32)^2 + 0^2} = 32 \quad \theta = \arctg\left(\frac{0}{32}\right) = 0$$

$$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{32}_0 = 2\frac{0+2k\pi}{5}$$

$$k=0, x_1 = 3\frac{0}{5} = 3 ; \quad k=1, x_2 = 2\frac{2\pi}{5} ; \quad k=2, x_3 = 2\frac{4\pi}{5}$$

$$k=3, x_4 = 2\frac{6\pi}{5} ; \quad k=4, x_5 = 2\frac{8\pi}{5}$$

d) $x^3 - 8 = 0$

$$x^3 - 8 = 0 ; x^3 = 8 ; x = \sqrt[3]{8} ; |8 + 0 \cdot i| = \sqrt{(8)^2 + 0^2} = 8 \quad \theta = \arctg\left(\frac{0}{8}\right) = 0$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8}_0 = 2\frac{0+2k\pi}{3}$$

$$k=0, x_1 = 2\frac{0}{3} = 2 ; \quad k=1, x_2 = 2\frac{2\pi}{3} ; \quad k=2, x_3 = 2\frac{4\pi}{3}$$

29. Calcula todos los valores de z para los que:

a) $z^6 + 64 = 0$

$$z^6 + 64 = 0 ; z^6 = -64 ; z = \sqrt[6]{-64} ; z = \sqrt[6]{64 (\cos(\pi) + i \sin(\pi))} ;$$

$$z = \sqrt[6]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) \right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2 \times 0 \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2 \times 0 \pi}{6}\right) \right) ; z_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) ;$$

$$z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \sqrt[6]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2 \times 1 \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2 \times 1 \pi}{6}\right) \right) ; z_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) ;$$

$$z_2 = 2i$$

$$z_3 = \sqrt[6]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2 \times 2 \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2 \times 2 \pi}{6}\right) \right) ; z_3 = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) ;$$

$$z_3 = -\sqrt{3} + i$$

$$z_4 = \sqrt[6]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2 \times 3 \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2 \times 3 \pi}{6}\right) \right) ; z_4 = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \right) ;$$

$$z_4 = -\sqrt{3} - i$$

$$z_5 = \sqrt[6]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2 \times 4 \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2 \times 4 \pi}{6}\right) \right) ; z_5 = 2 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) ;$$

$$z_5 = -2i$$

$$z_6 = \sqrt[6]{64} \left(\cos\left(\frac{\pi+2 \times 5 \pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi+2 \times 5 \pi}{6}\right) \right) ; z_6 = 2 \left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right) ;$$

$$z_6 = \sqrt{3} - i$$

$$\text{b) } (z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$$

$$(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0 ;$$

$$z^4 + 9z^2 + 4 + 6z^3 - 4z^2 - 12z - (4z^4 + z^2 + 1 - 4z^3 + 4z^2 - 2z) = 0 ;$$

$$z^4 + 9z^2 + 4 + 6z^3 - 4z^2 - 12z - (4z^4 + 5z^2 + 1 - 4z^3 - 2z) = 0 ;$$

$$z^4 + 9z^2 + 4 + 6z^3 - 4z^4 - 5z^2 - 1 + 4z^3 + 2z = 0 ;$$

$$-3z^4 + 0 + 3 + 10z^3 - 10z = 0 ;$$

$$-3(z^2 - 1) + 10z \cdot (z^2 - 1) = 0 ;$$

$$-3(z^2 - 1) \cdot (z^2 + 1) + 10z \cdot (z - 1) \cdot (z + 1) = 0 ;$$

$$-3(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z^2 + 1) + 10z \cdot (z - 1) \cdot (z + 1) = 0 ;$$

$$-(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (3(z^2 + 1) - 10z) = 0 ;$$

$$-(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (3z^2 - 10z + 3) = 0 ;$$

$$-(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (3z^2 - z - 9z + 3) = 0 ;$$

$$-(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (z \cdot (3z - 1) - 3(3z - 1)) = 0 ;$$

$$-(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (3z - 1) \cdot (z - 3) = 0 ;$$

$$(z - 1) \cdot (z + 1) \cdot (3z - 1) \cdot (z - 3) = 0$$

$$z - 1 = 0$$

$$z + 1 = 0$$

$$3z - 1 = 0$$

$$z - 3 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = -1$$

$$z_3 = \frac{1}{3}$$

$$z_4 = 3$$

$$\text{c) } z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z + 1)(z^5 + z^3 + z) = (z + 1)z(z^4 + z^2 + 1) = 0$$

$$z + 1 = 0, \quad \mathbf{z = -1} ; \quad \mathbf{z = 0}$$

$$z^4 + z^2 + 1 = 0, \text{ hacemos } z^2 = t, \quad t^2 + t + 1 = 0$$

$$t = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$z = \sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\left| -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[4]{1\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}} ; \quad k=0, \quad 1\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \quad k=1, \quad 1\frac{8\pi}{6} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\left| -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[4]{1\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{2}} ; \quad k=0, \quad 1\frac{4\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; \quad k=1, \quad 1\frac{10\pi}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\mathbf{z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} ;$$

$$\mathbf{z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} ;$$

$$\mathbf{z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} ;$$

$$\mathbf{z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

30. Calcula las raíces quintas de la unidad y represéntalas en el plano. Calcula también las raíces quintas de -1 , represéntalas también. Generaliza este resultado.

$$\sqrt[5]{1_{90^\circ}}$$

$$\sigma = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{5} = 18^\circ + 72^\circ k ;$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\omega_0 = 1_{18^\circ}$$

$$\omega_1 = 1_{90^\circ}$$

$$\omega_2 = 1_{162^\circ}$$

$$\omega_3 = 1_{234^\circ}$$

$$\omega_4 = 1_{306^\circ}$$

$$\sqrt[5]{1_{180^\circ}}$$

$$\sigma = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{5} = 32^\circ + 72^\circ k ;$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4$$

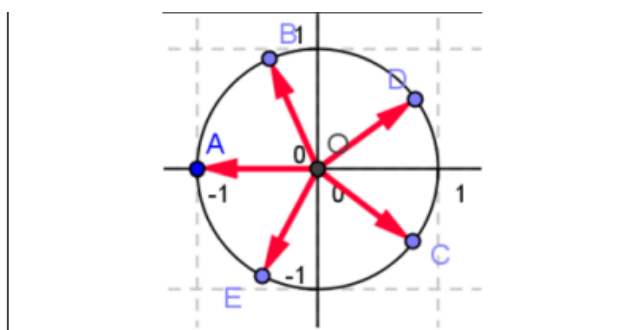
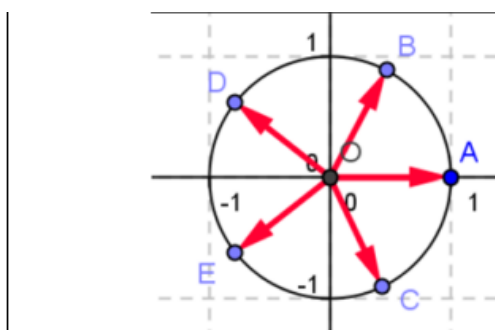
$$\omega_0 = 1_{32^\circ}$$

$$\omega_1 = 1_{104^\circ}$$

$$\omega_2 = 1_{176^\circ}$$

$$\omega_3 = 1_{248^\circ}$$

$$\omega_4 = 1_{320^\circ}$$



31. Calcula las cuatro raíces de $z^4 + 9 = 0$ y utilízalas para factorizar $z^4 + 9$ en dos polinomios cuadráticos con coeficientes reales

$$|-9 + 0 \cdot i| = \sqrt{(-9)^2 + 0^2} = 9 \quad \theta = \arctg\left(\frac{0}{-9}\right) = \pi$$

$$z^4 = -9 ; \quad x = \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{9\pi} = \sqrt[4]{3} \frac{\pi+2k\pi}{4}$$

$$k=0 ; \quad z = \sqrt[4]{3} \frac{\pi}{4} ; \quad k=1 ; \quad z = \sqrt[4]{3} \frac{\pi+2\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \frac{3\pi}{4}$$

$$k=2 ; \quad z = \sqrt[4]{3} \frac{\pi+4\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \frac{5\pi}{4} ; \quad k=3 ; \quad z = \sqrt[4]{3} \frac{\pi+6\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \sqrt[4]{3} \frac{\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cos \frac{\pi}{4} + i \sqrt[4]{3} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + i \sqrt[4]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z = \sqrt[4]{3} \frac{3\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cos \frac{3\pi}{4} + i \sqrt[4]{3} \sin \frac{3\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \sqrt[4]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z = \sqrt[4]{3} \frac{5\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cos \frac{5\pi}{4} + i \sqrt[4]{3} \sin \frac{5\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \sqrt[4]{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z = \sqrt[4]{3} \frac{7\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cos \frac{7\pi}{4} + i \sqrt[4]{3} \sin \frac{7\pi}{4} = \sqrt[4]{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + i \sqrt[4]{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2}$$

La descomposición factorial sería:

$$\left[z - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right] \left[z - \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right] \left[z - \left(-\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right] \left[z - \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(z - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) - i \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \left[\left(z - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \left[\left(z + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) - i \frac{\sqrt{6}}{2} \right] \left[\left(z + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right] = \\
&= \left[\left(z - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 - \left(i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \right] \left[\left(z + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 - \left(i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \right] = \left[\left(z - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \right] \left[\left(z + \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \right] = \\
&= (z^2 - \sqrt{6}z + 3)(z^2 + \sqrt{6}z + 3)
\end{aligned}$$

32. Resuelve la ecuación: $z^2 + 3z - 1 = 0$

En este ejercicio, las soluciones de la ecuación las proporciona esta fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

· Sustituimos los datos de la ecuación en la fórmula y obtenemos el resultado

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \begin{cases} z_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \\ z_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

33. Calcula a para que el número complejo $\frac{a+i}{3-i}$ tenga su parte real igual a su parte imaginaria.

· Lo primero de todo es hacer la división en forma binómica, para ello multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+i}{3-i} = \frac{(a+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3a+ai+3i+i^2}{9-i^2} = \frac{3a+ai+3i-1}{9-(-1)} = \frac{3a-1}{10} + \frac{3+a}{10}i$$

· Para que la parte real del número complejo sea igual a la parte imaginaria debemos igualarlas:

$$3a - 1 = 3 + a ; \quad 3a - a = 3 + 1 ; \quad 2a = 4 \quad a = \frac{4}{2} = 2$$

34. Desarrolla los siguientes logaritmos: a) $\ln \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2 \cdot z^{-4}} \right)$ b) $\log_3 \sqrt[4]{\frac{(x \cdot y)^5}{\frac{1}{z^2} \cdot e^2}}$

$$a) \ln \left(\frac{\sqrt{x^3}}{y^2 \cdot z^{-4}} \right) = \ln \sqrt{x^3} - \ln(y^2 \cdot z^{-4}) = \ln x^{\frac{3}{2}} - [\ln(y^2) + \ln(z^{-4})] = \frac{3}{2} \ln x - 2 \ln y + 4 \ln z$$

$$\begin{aligned}
b) \log_3 \sqrt[4]{\frac{(x \cdot y)^5}{\frac{1}{z^2} \cdot e^2}} &= \log_3 \left(\frac{(x \cdot y)^5}{\frac{1}{z^2} \cdot e^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_3 (x \cdot y)^5 - \frac{1}{4} \log_3 \left(\frac{1}{z^2} \cdot e^2 \right) = \\
&= \frac{1}{4} \cdot 5 \cdot \log_3 (x \cdot y) - \frac{1}{4} \log_3 \left(\frac{1}{z^2} \right) - \frac{1}{4} \cdot \log_3 e^2 = \frac{5}{4} \log_3 x + \frac{5}{4} \log_3 y - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_3 z - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \log_3 e = \\
&= \frac{5}{4} \log_3 x + \frac{5}{4} \log_3 y - \frac{1}{8} \log_3 z - \frac{1}{2} \log_3 e
\end{aligned}$$

35. Simplifica la siguiente expresión: $\log_2 5 - 3 \log_2 a + \frac{7}{3} \log_2 9$

$$\log_2 5 - 3 \log_2 a + \frac{7}{3} \log_2 9 = \log_2 5 - \log_2 a^3 + \log_2 \sqrt[3]{9^7} = \log_2 \frac{5 \cdot \sqrt[3]{9^7}}{a^3}$$

AUTOEVALUACIÓN

1- Señala cuál de los siguientes números es irracional:

- a) 6.3333333.... b) $7/3$ c) e d) 5.98234234234....

Respuesta: c) e

2- La solución de la ecuación $3x + 9 = 21$ es:

- a) $x = 10, x = -4$ b) $x = 10$ c) $x = -10, x = 4$ d) $x = -4$

$$3x + 9 = 21 ; 3x = 21 - 9 ; 3x = 12 ; x = \frac{12}{3} = 4 ; x = 4$$

$$3x + 9 = -21 ; 3x = -21 - 9 ; 3x = -30 ; x = \frac{-30}{3} = -10 ; x = -10$$

Respuesta: c) $x = -10, x = 4$

3- Determina el conjunto $A - B$ si $A = [-11, 9]$; $B = (-1, 6)$:

- a) $[-11, -1] \cup [6, 9]$ b) $[-11, -1) \cup (6, 9]$ c) $[-11, -1] \cup (6, 9]$ d) $[-11, -1] \cup [6, 9]$

Respuesta: d) $[-11, -1] \cup [6, 9]$

4- Calcula $\frac{(3+2i) \cdot (3-2i)}{(2+3i)^3}$: a) $-46 + 9i$ b) $62 + 63i$ c) $-46 + 63i$ d) Ninguna de las anteriores

$$(3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = 9 + 4 = 13$$

$$(2 + 3i)^3 = 8 + 36i + 54i^2 - 27i^3 = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$$

$$\frac{(3+2i) \cdot (3-2i)}{(2+3i)^3} = \frac{13}{-46+9i} \cdot \frac{(-46-9i)}{(-46-9i)} = \frac{-13 \cdot 46 - 13 \cdot 9i}{46^2 + 9^2} = -\frac{46}{169} - \frac{9}{169}i$$

La solución es la d) Ninguna de las anteriores

5- Resuelve la ecuación $x^4 = 1$: a) $x = 1$ b) $x = 1, x = -1$ c) $x = \pm i$ d) $x = \pm 1, x = \pm i$

$$|1 + 0 \cdot i| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \quad \theta = \arctg\left(\frac{0}{1}\right) = \arctg(0) = 0$$

$$x^4 = 1 ; x = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_0} = 1_{\frac{0+2k\pi}{4}}$$

$$k = 0 ; x = 1_{\frac{0}{4}} = 1_0 = 1 ; k = 1 ; x = 1_{\frac{0+2\pi}{4}} = 1_{\frac{\pi}{2}} = i$$

$$k = 2 ; x = 1_{\frac{0+4\pi}{4}} = 1_{\pi} = -1 ; k = 3 ; x = 1_{\frac{0+6\pi}{4}} = 1_{\frac{3\pi}{2}} = -i$$

Respuesta: d) $x = \pm 1, x = \pm i$

6- Expresa en forma binómica el siguiente número complejo de módulo 2 y argumento $\pi/3$

- a) $1 + \sqrt{3}i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $1 - \sqrt{3}i$ d) $1/2 + \sqrt{3}/2i$

$$|z| = 2$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad z = 1 + \sqrt{3}i$$

Respuesta: el a) $z = 1 + \sqrt{3}i$

7. Calcula $(1 + i)^6$. a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ b) -8 c) $1 - i$ d) $-8i$

$$(1 + i)^6 \quad |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad ; \quad \theta = \arctg\left(\frac{1}{1}\right) = \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1 + i)^6 = \left(\sqrt{2} \frac{\pi}{4}\right)^6 = (\sqrt{2})^6 \times \frac{\pi}{4} = 8 \frac{6\pi}{4} = 8 \left(\cos \frac{6\pi}{4}\right) + 8(i \cdot \sin \frac{6\pi}{4}) = -8i$$

Respuesta: el d)

8.- Expresa en forma trigonométrica el siguiente número complejo 5i

- a) $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$ b) $(5, \pi/2)$ c) $5(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$ d) $5(\sin(90^\circ) + i\cos(90^\circ))$

$$|z| = \sqrt{0^2 + 5^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{25} \Rightarrow |z| = 5 \quad \text{Arg } z = \arctg \frac{5}{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$z = 5 \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

La respuesta es la a)

9.- Calcula el módulo y el argumento principal del siguiente número complejo $-3 + 3i$

- a) $18, 135^\circ$ b) $3\sqrt{2}, 3\pi/4$ c) $3, 2, 7\pi/4$ d) $3, 5\pi/4$

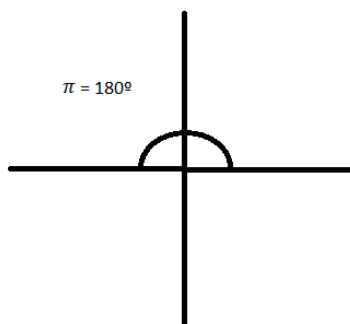
$$\text{Mod: } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Arg: } \text{Arg } z = \arctg \frac{3}{-3} = \frac{3\pi}{4}$$

La respuesta es la b)

10.- Calcula $x = \sqrt{-1}$ a) $x = i$ b) $x = -i$ c) $x = i, x = -i$ d) No tiene solución

$$|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1 \quad ; \quad \text{Arg } z = \arctg \frac{0}{-1} = 180^\circ = \pi \Rightarrow \sqrt{1_\pi} \Rightarrow 1_{\frac{\pi+2K\pi}{2}} \Rightarrow$$



$$\text{Si } k \text{ es } 0 = 1_{\frac{\pi+2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}} = 1_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1(0 + i \cdot 1) = i$$

$$\text{Si } k \text{ es } 1 = 1_{\frac{\pi+2K\pi}{2}} = 1_{\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow 1 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 1(0 + i \cdot (-1)) = -i$$

La respuesta correcta es c)

Matemáticas I
1º Bachillerato
Capítulo 2: Álgebra

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Alumnado 1º Bachillerato
IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

$$A: x^2 - 2 \quad ; \quad B: 3x^4 + x^3 - 1$$

$$\text{SUMA: } x^2 - 2 + 3x^4 + x^3 - 1 = 3x^4 + x^3 + x^2 - 3$$

$$\text{RESTA: } x^2 - 2 - 3x^4 - x^3 + 1 = -3x^4 - x^3 + x^2 - 1$$

2. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

$$a) (x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2) = 2x^3 - 3x^2 - x - 1$$

$$b) -x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5) = -x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 4x + 6$$

3. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

$$A. 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1 \dots\dots\dots -2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 4x + 1$$

$$B. -7x^3 - 6x + 5 \dots\dots\dots 7x^3 + 6x - 5$$

$$C. -x^4 + 3x^2 - 8x + 7 \dots\dots\dots x^4 - 3x^2 + 8x - 7$$

4. Considera los polinomios $p = x^3 - 6x + 2$, $q = 3x^2 + 3x + 1$ así como $s = p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

$$s(x) = x^3 - 6x + 2 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 - 3x + 3$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2) + 2 = 6 \quad ; \quad q(-2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 1 = 7$$

$$s(-2) = (-8) + 3 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) + 3 = 13$$

El valor obtenido para el polinomio suma es igual a la suma de los valores obtenidos para cada polinomio.

5. Obtén el valor del polinomio $p = -x - 5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. Que valor opuesto de p en $x = 3$

$$P(3) = -5 \cdot 27 + 2 \cdot 3 - 2 = -134 \quad ; \quad -P(3) = 3 + 5 \cdot 27 - 2 \cdot 3 + 2 = 134$$

6. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

$$A. (-4x^3 + 2x) - (-3x^2) = -4x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$B. (2x^4 + x) - (-3x - 4) = 2x^4 + 4x + 4$$

$$C. (3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x) = -2x^3 + 2x^2$$

7. Efectúa los siguientes productos e polinomios:

Se multiplican los coeficientes y la parte literal se suman los exponentes.

$$a) (5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3) = -20x^6 + 8x^4$$

$$b) (2x^4 + x) \cdot (-3x - 4) = -6x^5 - 8x^4 - 3x^2 - 4x$$

$$c) (2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x) = 6x^7 - 2x^6 + 3x^5 - x^4 - 3x^4 + x^2 = 6x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 4x^4 + x^2$$

$$d) (-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1) = -7x^3 + 4x^2 + 3x - 1$$

8. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos.

Multiplicamos todo el polinomio por un número de manera que el coeficiente de la x de mayor grado sea 1.

$$a) 4x^3 + 3x^3 + 2x^2 \quad ; \quad \left(\frac{1}{4}\right) \cdot (4x^3 + 3x^3 + 2x^2) = 4x^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 3x^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 2x^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = x^3 + \left(\frac{3x^3}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$b) -2x^3 + x^2 - 1 \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x^3 + x^2 - 1) = -2x^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = x^3 - \left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$c) -x^2 + x - 7 ; (-1) \cdot (-x^2 + x - 7) = -x^2 \cdot (-1) + x \cdot (-1) - 7 \cdot (-1) = x^2 - x + 7$$

9. Calcula y simplifica los siguientes productos:

$$a) 3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6) = 6x^4 + 12x^3 - 18x = x^4 + 2x^3 - 3x = 6x \cdot (x^3 + 2x - 3)$$

$$b) (3x-4) \cdot (4x+6) = 12x^2 + 18x - 16x - 24 = 12x^2 + 2x - 24 = 2 \cdot (6x^2 + x - 12)$$

$$c) (2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2) = 2a^2b - 6a^4 - 20b^2 + 15a^2b = -6a^4 + 17a^2b - 20b^2$$

$$d) (3a-6) \cdot (8-2a) \cdot (9a-2) = (24a - 6a^2 - 48 + 12a^2) \cdot (9a-2) = (6a^2 + 24a - 48) \cdot (9a-2) = 45a^3 + 216a^2 - 432a - 12a + 48 + 96 = 45a^3 + 216a^2 - 444a + 144 = 15a^3 + 72a^2 - 148a + 48$$

10. Realiza los siguientes productos de polinomios:

$$a) x^2 \cdot (-5x^4 - 3x^2 + 1) \cdot 2x^3 = (-5x^6 - 3x^4 + x^2) \cdot 2x^3 = -10x^9 - 6x^7 + 2x^5$$

$$b) (2x^2 - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x) = (-6x^5 - 10x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 15x - 12) \cdot (-x) = 6x^6 + 10x^5 - 8x^4 - 9x^3 - 15x^2 + 12x$$

11. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

Debemos buscar aquel factor que es común a los monomios dados en el polinomio para poder extraerlo.

$$a) -16x^4 - 20x^3 + 10x^2 = 2x^2 \cdot (-8x^2 - 10x + 5)$$

$$b) 24x^4 - 30x^2 = 6x^2 \cdot (4x^2 - 5)$$

12. Realiza los cálculos:

Realizamos los cálculos mediante el triángulo de Tartaglia o identidades notables.

$$a) (2+3a)^2 = 9a^2 + 12a + 4$$

$$b) (-x+3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$c) (-3x+2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$d) (x^2-1)^3 = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$$

$$e) (4x^2+2)^3 = 64x^6 + 96x^4 + 48x^2 + 8$$

13. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

$$a) (a + b + c)^2 = (a + b + c) \cdot (a + b + c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$b) (a + b - c)^2 = (a + b - c) \cdot (a + b - c) = a^2 + ab - ac + ba + b^2 - bc - ca - cb + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

14. Desarrolla las siguientes potencias:

$$a) (2x-5y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-5y) + (-5y)^2 = 4x^2 - 20xy + 25y^2$$

$$b) (3x+y/3)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot (y/3) + (y/3)^2 = 9x^2 + 2xy + y^2/9$$

$$c) (5x^2-5/x)^2 = (5x^2)^2 + 2 \cdot 5x^2 \cdot (-5/x) + (-5/x)^2 = 25x^4 - 50xy + 25/x^2$$

$$d) (3a-b)^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot (-b) + (-b)^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$$

$$e) (a^2+b^2)^2 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + (b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

$$f) (3/5y - 2/y)^2 = (3/5y)^2 + 2(3/5y)(-2/y) + (-2/y)^2 = 9/25y^2 - 12/5 + 4/y^2$$

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

$$a) a^4 + 6a^2 + 9$$

$$(a^2)^2 + 2 \cdot (a^2 \cdot 3) + 3^2 = (a^2 + 3)^2$$

$$b) 9x^2 - 6x + 1$$

$$3x - 2 \cdot (3x + 1) + 1 = (3x - 1)^2$$

c) $b^2 - 10b + 25$

$$b - 2 \cdot (b \cdot 5) + 5 = (b + 5)^2$$

d) $4y^2 + 12y + 9$

$$2y + 2 \cdot (2y + 3) + 3 = (2y + 3)^2$$

e) $a^4 - 2a^2 + 1$

$$a^2 - 2(a^2 + 1) + 1 = (a^2 - 1)^2$$

f) $y^4 + 6y^2 + 9$

$$y^2 + 2 \cdot (y^2 \cdot 3) + 3 = (y^2 + 3)^2$$

16. Efectúa estos productos:

a) $(4x^2 + 3y) \cdot (4x^2 - 3y) = (4x^2 \cdot 4x^2) - (3y \cdot 3y) = 16x^4 - 9y^2$

b) $(2x^2 + 8) \cdot (2x^2 - 8) = (2x^2 \cdot 2x^2) - (8 \cdot 8) = 4x^4 - 64$

c) $(-x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x) = -(x^2 \cdot x^2) + (3x \cdot 3x) = -x^4 + 9x^2$

17. Divide los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 \quad \quad -x^2 - x + 7 \quad \quad |x^2 + 2x + 4 \\
 -2x^4 - 4x^3 - 8x^2 \quad \quad 2x^2 - 4x - 1 \\
 \hline
 -4x^3 - 9x^2 - x + 7 \\
 \quad 4x^3 + 8x^2 + 16x \\
 \quad \hline
 \quad -x^2 + 15x + 7 \\
 \quad \quad x^2 + 2x + 4 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 17x + 11
 \end{array}$$

$$C(x) = 2x^2 - 4x - 1$$

$$R(x) = 17x + 11$$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

$$\begin{array}{r}
 -10x^3 - 2x^2 + 3x + 4 \quad \quad | 5x^3 - x^2 - x + 3 \\
 10x^3 - 2x^2 - 2x + 6 \quad \quad -2 \\
 \hline
 -4x^2 + x + 10
 \end{array}$$

$$C(x) = -2$$

$$R(x) = -4x^2 + x + 10$$

c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$

$$\begin{array}{r}
 4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7 \quad \quad | -2x^3 + x + 3 \\
 -4x^5 + 2x^3 + 6x^2 \quad \quad -2x^2 + 2 \\
 \hline
 -4x^3 + 12x^2 - 3x - 7 \\
 \quad +4x^3 \quad \quad -2x - 6 \\
 \quad \hline
 \quad \quad -2x - 6
 \end{array}$$

$$12x^2 - 5x - 13$$

$$C(x) = -2x^2 + 2$$

$$R(x) = 12x^2 - 5x - 13$$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{r} -8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5 \quad | 4x^3 + x^2 + x - 1 \\ \underline{8x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 2x^2} \quad -2x^2 + 3 \\ 12x^3 \quad \\ \underline{-12x^3 - 3x^2 - 3x + 3} \\ -3x^2 + 8 \end{array}$$

$$C(x) = -2x^2 + 3$$

$$R(x) = -3x^2 + 8$$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

$$\begin{array}{r} -6x^5 + x^2 + 1 \quad | x^3 + 1 \\ \underline{6x^5 + 6x^2} \quad -6x^2 \\ 7x^2 + 1 \end{array}$$

$$C(x) = -6x^2$$

$$R(x) = 7x^2 + 1$$

18. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 - x - 3$ como polinomio cociente y $r(x) = -3x^2 - 1$ como resto.

$$(x^2 - x - 3) \cdot x^3 + (-3x^2 - 1) = x^6 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 1; \quad D(x) = x^6 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 1 \quad y \quad d(x) = x^3$$

19. usa la regla de Ruffini para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2 + x + 1$ entre $x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -3 & 1 & 1 & \\ 1 & & -3 & -2 & \\ \hline & -3 & -2 & -1 & \end{array}$$

$$C(x) = -3x - 2$$

$$R(x) = -1$$

b) $x^4 + 2x^3 - 2x + 1$ entre $x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & & 2 & 8 & 16 & 28 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & 14 & 29 \end{array}$$

$$C(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 14$$

$$R(x) = 29$$

d) $4x^3 - 3x^2 - 1$ entre $x + 1$

	4	-3	0	-1
-1		-4	8	-8
	4	-7	8	-9

$$C(x) = 4x^2 - 7x + 8 \quad R(x) = -9$$

e) $x^3 - 9x + 1$ entre $x - 3$

	1	0	-9	1
3		3	9	0
	1	3	0	1

$$C(x) = x^2 + 3x \quad R(x) = 1$$

20. Estudia si es posible usar la regla de Ruffini, de alguna forma, para dividir $x^3 + 2x^2 + 5x + 7$ entre $2x + 3$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 7 : 2x + 3, \text{ dividimos dividiendo y divisor entre 2 : } \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{2} : x + \frac{3}{2}$$

Ya podemos usar la regla de Ruffini

21. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ en $x=5$.

	-3	7	2	4
5		-15	-40	-190
	-3	-8	-38	-186

El valor del polinomio para $x = 5$ es - 186

22. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados.

a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x + 5$

No $\rightarrow$ El resto no da 0.

	3	4	0	5
		9	39	117
3		3	13	39
	3	13	39	122

b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

Sí $\rightarrow$ El resto da 0.

	-1	-2	1	2
		2	0	-2
-2		-1	0	1
	-1	0	1	0

c) $\gamma = 1 \text{ de } -2x^4 + x + 1$

Sí → El resto es 0.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

d) $\sigma = -1 \text{ de } 2x^3 + 2x^2$

Sí → El resto da 0.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 2 & 0 & 0 \\ & & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

23. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces tuyas y , después determina cuáles lo son.

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

Divisores de -2 = 1, 2, -1, -2 / raíces = 1

Solo es raíz 1 porque si sustituimos el resultado es 0. $\rightarrow 1^3 - 1^2 + 2(1) - 2 = 0$

Los demás al sustituir el resultado no es 0, con lo cual no son raíces. $\rightarrow 2^3 - 2^2 + 2(2) - 2 = 6$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

Divisores de 3 = 1, 3, -1, -3 / raíces = Ninguna

No tiene raíces porque al sustituir cualquiera de esos números, ninguno da 0. $\rightarrow 1^4 + 4(1)^3 + 4(1)^2 + 4(1) + 3 = 16$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

Divisores de -9 = 1, 3, 9, -1, -3, -9 / raíces = 3, -3

Son raíces 3 y -3 porque al sustituir, el resultado da 0. $\rightarrow 2(3)^3 + 3^2 - 18(3) - 9 = 0$

$(-3)^3 + (-3)^2 - 18(-3) - 9 = 0$ El resultado es 0 así que es raíz

$2(1)^3 + 1^2 - 18(1) - 9 = -24$ El resultado no es 0 así que no es raíz

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

Divisores de 6 = 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6 / raíces = -2

Solo es raíz -2 porque al sustituir da 0 $\rightarrow (-2)^4 + 2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 6(2) = 0$

24 .Comprueba que $-1/2$ es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

Sí lo es porque el resto da 0.

	2	3	-11	-6
-1/2		-1	-1	6
	2	2	-12	0

25. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces tuyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2 + 4x - 5$

Posibles raíces: 1, -1, 5, -5, $1/3$, $-1/3$, $5/3$, $-5/3$.

Sustituyendo, ningún número es raíz

b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

Posibles raíces: 1, -1, 2, -2, $1/2$, $-1/2$.

Realizamos Ruffini con los divisores de dos:

Con 1:

	2	-9	12	2
1		2	-7	5
	2	-7	5	7

Con -1:

	2	-9	12	2
-1		-2	11	-1
	2	-11	1	1

Con 2:

	2	-9	12	2
2		4	-10	4
	2	-5	2	2

Con -2:

	2	-9	12	2
		-4	26	-76
-2				
	2	-13	38	-74

Igualmente, no son raíces $1/2$ ni $-1/2$

->Aquí ninguno es raíz tampoco porque ninguno de los candidatos ha sido solución dado que al realizar Ruffini ningún resto ha salido 0 por lo tanto tampoco hemos obtenido ninguna raíz.

26.-Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real a .

a) Si a es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x) + p_2(x)$?

No, a es raíz de $p_1(x) = x - a$ y si $p_2(x) = x + a$; $p_1(x) + p_2(x) = 2x$ y a no es raíz

b) Si a es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x) \cdot p_2(x)$?

Sí, porque el resultado sí sería divisible entre $(x + a)$

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4 \cdot p_1(x)$?

Sí, porque son las mismas

27.- Construye un polinomio de grado 4 tal que posea 3 raíces distintas

$$(x + 2)(x + 4)(x - 3)(x + 1) = (x^2 + 4x + 2x + 8)(x^2 + x - 3x - 3) = (x^2 + 6x + 8)(x^2 - 2x - 3) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x^3 - 12x^2 - 18x + 8x^2 - 16x - 24 = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 34x - 24$$

28.- Determina un polinomio de grado 4 que tenga, al menos, una raíz repetida

$$(x + 2)(x + 4)(x - 3)^2 = (x^2 + 6x + 8)(x^2 - 6x + 9) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x^3 - 36x^2 + 45x + 8x^2 - 48x + 72 = x^4 - 19x^2 - 3x + 72$$

29.- Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz

$$(x + 3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

30.- Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ admite al número 0 como raíz

Basta con que el polinomio no tenga término independiente ($a_0 = 0$)

$$3x^3 + 4x^2 - 2x$$

31) Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ admite al número 1 como raíz.}$$

En un polinomio cualquiera el número 1 será raíz siempre y cuando la suma de los coeficientes sea 0.

Por ejemplo, en $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, sabemos que el número 1 no es raíz porque todos los coeficientes son positivos y dará un número muy grande si lo sustituimos en el polinomio.

En $-x^3 - 3x^2 - 3x - 1$, también sabemos que el 1 no es raíz puesto que todos los coeficientes son negativos y al sustituir el 1 el resultado no será 0, sino un número negativo.

Sin embargo, en $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, la suma de los coeficientes dará 0, ya que en realidad son los coeficientes con los que se operan, debido a que el coeficiente por 1 es el mismo número. Por esta razón, en estos casos el número 1 siempre será una raíz.

32) Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x + 5 \rightarrow x + 5 = 0 \rightarrow x = -5$

b) $-x + 3 \rightarrow -x + 3 = 0 \rightarrow x = 3$

c) $7x - 5 \rightarrow 7x - 5 = 0 \rightarrow 7x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{7}$

d) $-3x - 11 \rightarrow -3x - 11 = 0 \rightarrow 3x = -11 \rightarrow x = -\frac{11}{3}$

e) $-7x \rightarrow x = 0$

f) $x^2 - 8x \rightarrow x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(x - 8) = 0$ Raíces: $x_1 = 0, x_2 = 8$

g) $4x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{+1 \pm \sqrt{49}}{8}$

$\rightarrow x_1 = \frac{1+7}{8} = \frac{8}{8} = 1$

$\rightarrow x_2 = \frac{1-7}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

h) $x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$\rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$ Raíces: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$

i) $x^3 + 25x = 0 \rightarrow x(x^2 + 25)$

$\rightarrow x^2 + 25 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-25}$ (No tiene solución real) Raíz: $x = 0$

33) Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\frac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{x(x+4)}{x^3+3x^2-6x-8}$

(Ruffini) $\rightarrow x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ (Divisores de 8) $\rightarrow D = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

	1	3	-6	-8
-1		-1	-2	8
	1	2	-8	0
2		2	8	
	1	4	0	
-4		-4		
	1	0		

Raíz: $x = -1$; Factor: $(x+1)$

Raíz: $x = 2$; Factor: $(x-2)$

Raíz: $x = -4$; Factor: $(x+4)$

$\rightarrow \frac{x(x+4)}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)(x+4)} = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$

b) $\frac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^3+3x^2-6x-8}$

Volvemos a aplicar Ruffini, en este caso, el mismo de antes.

$$\rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{x^3+3x^2-6x-8} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)(x+4)} = \frac{(x-1)}{(x-2)(x+4)}$$

$$c) \frac{x^2-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2+x-6)} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-2)(x+3)}$$

$$\rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = -\frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\rightarrow -\frac{1+5}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \rightarrow (x+3)$$

$$\rightarrow -\frac{1-5}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \rightarrow (x-2)$$

34) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$a) \frac{3x^2-6x}{9x^2+15} = \frac{3x(x-2)}{3(3x^2+5)} = \frac{x(x-2)}{(3x^2+5)}$$

$$b) \frac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2} = \frac{a^2(a-5)}{a^2(7a+4)} = \frac{(a-5)}{(7a+4)}$$

$$c) \frac{x^2y+3xy^2}{4xy} = \frac{xy(x+3y)}{4xy} = \frac{(x+3y)}{4}$$

$$d) \frac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab} = \frac{ab(2ab+3)}{ab(a^2-1)} = \frac{(2ab+3)}{(a+1)(a-1)}$$

35) Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

$$a) \frac{5}{-3x+12} + \frac{x+2}{x^2-4x} = \frac{5}{-3(x-4)} + \frac{x+2}{x(x-4)} = \frac{5x-3x-6}{-3x(x-4)} = \frac{2x-6}{-3x(x-4)} = \frac{2(x-3)}{-3x(x-4)}$$

$$b) \frac{-x}{x^2-2x+1} - \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{-x}{(x-1)^2} - \frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-x(x+1)-(3x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-x^2-x-(3x^2-3x-x+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-4x^2+3x-1}{(x+1)(x-1)^2}$$

36) Efectúa los siguientes cálculos:

$$a) \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{4}{x} = \frac{x(2x+1)+4(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{2x^2+x+4x^2+4}{x(x^2+1)} = \frac{6x^2+x+4}{x(x^2+1)}$$

$$b) \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+1} = \frac{1(x+1)+3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x+1+3x-6}{(x-2)(x+1)} = \frac{4x-5}{(x-2)(x+1)}$$

$$c) \frac{-x}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{-x \cdot 1}{(x^2+3x)(x-1)} = -\frac{x}{x(x+3)(x-1)} = -\frac{1}{(x+3)(x-1)}$$

$$d) \frac{x-2}{x^2+3x} : \frac{x-2}{x+3} = \frac{(x-2)(x+3)}{x(x+3)(x-2)} = \frac{1}{x}$$

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, uno de los denominadores, y su respectivo numerador.

$$A) \frac{-x^2+x-1}{x^3} - \frac{3x+2}{x^2} = \frac{-x^2+x-1}{x^3} - \frac{3x^2+2x}{x^3} = \frac{2x^2+3x-1}{x^3}$$

$$B) \frac{x-2}{x^2+3x} - \frac{8}{x+3} = \frac{x-2}{x(x+3)} - \frac{8}{x+3} = \frac{1(x-2)-8x}{x(x+3)} = \frac{-7x-2}{x(x+3)}$$

38. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad.

$$A) \frac{8a^4b^3}{2a^2b^2} = 4a^2b; \quad \left(\frac{8a^4}{2a^2} = 4a^2; \quad \frac{b^3}{b^2} = b\right) \rightarrow 4a^2b \quad \text{Sí se cumple}$$

$$B) \frac{4x^3y^2 - 3xy^2}{2xy} = 2x^2y - \frac{3}{2}; \quad \left(\frac{4x^3y^2}{2xy} = 2x^2y; \quad \frac{3xy^2}{2xy} = \frac{3}{2}y \right) \rightarrow 2x^2y - \frac{3}{2} \quad \text{Sí se cumple}$$

$$C) \frac{3x^2 - 9x}{6x + 12} = \frac{x^2 - 3x}{2x + 4} \rightarrow \frac{3(x^2 - 3)}{3(2x + 4)}; \frac{x^2 - 3x}{2x + 4} \quad \text{Sí se cumple}$$

$$D) \frac{6a^2b^2 + 8a^2b - 10ab}{2ab^2 + 16a^2b} = \frac{3ab + 4a - 5}{b + 8a} \rightarrow \frac{3ab(2a + b) + 4(2a + b) - 5(2a + b)}{2ab^2 + 8a(2a)}; \frac{3ab + 4a - 5}{b + 8a} \quad \text{Sí se cumple}$$

39. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$A) \quad \frac{2x - 4}{3x - 2} = \frac{4}{7}; \quad (2x - 4)7 = (3x - 2)4; \quad 14x - 28 = 12x - 8; \quad 14x - 12x = 28 - 8; \quad 2x = 20; \quad x = \frac{20}{2} = 10$$

$$B) \quad \frac{x+8}{x-1} - \frac{x+4}{x+1} = \frac{12x}{x^2-1} \quad \text{m.c.m.} = (x+1)(x-1)$$

$$\left[\frac{x+8}{x-1} - \frac{x+4}{x+1} = \frac{12x}{x^2-1} \right] (x+1)(x-1) \rightarrow (x+8)(x+1) - (x+4)(x+1) = 12x$$

$$x^2 + x + 8x - x^2 - x + 4x - 4 = 12x$$

$$12x + 4 = 12x; \quad 12x - 12x = 4; \quad x = 4$$

$$C) \quad \frac{3(2x+1)}{4} - \frac{5x+3}{6} + 4x + \frac{x+1}{3} = x + \frac{151}{12} \quad \text{m.c.m.} = 12$$

$$\frac{9(6x+1)}{12} - \frac{10x+6}{12} + \frac{48x}{12} + \frac{4x+4}{12} = \frac{12x}{12} + \frac{151}{12}$$

$$54x + 9 - 10x - 6 + 48x + 4x + 4 = 12x + 151$$

$$54x - 10x + 48x + 4x - 12x = -9 + 6 - 4 + 151$$

$$84x = 144; \quad x = \frac{144}{84} = \frac{12}{7}$$

40. Resolver:

$$a) \quad \frac{x^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{x^2 + 6x + 9}{9} = 1; \quad 9x^2 + 25(x^2 + 6x + 9) = 225$$

$$9x^2 + 25x^2 + 150x + 225 = 225; \quad 9x^2 + 25x^2 + 150 = 0$$

$$34x^2 + 150x = 0; \quad 2x(17x + 75) = 0; \quad x(17x + 75) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -\frac{75}{17}$$

$$b) \quad \frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3}{4x}$$

$$\frac{x^2}{16} = 1 + \frac{3}{4x}; \quad \frac{x^2}{16} = 1 + \frac{x}{12}$$

$$\frac{3x^2}{48} = 48 + \frac{4x}{48}; \quad 3x^2 = 48 + 4x; \quad 3x^2 - 4x - 48 = 0$$

$$X_1 = -3,389. \quad X_2 = 4,722$$

$$c) \quad \frac{3(2x+1)}{4} - \frac{5x+3}{6} + 4x + \frac{x+1}{3} = \frac{151}{12}$$

$$\frac{18x+9}{12} - \frac{10x-6}{12} + \frac{48}{12} + \frac{4x+4}{12} = \frac{151}{12}$$

$$18x+9-10x-6x+48x+4x+4=151; 60x+7=151$$

$$60x=151-7; 60x=144; x=\frac{144}{60}=\frac{12}{5}$$

d) $80x^4 - 48x^2 - 12 = 0$

$$t = x^2$$

$$80t^2 - 48t - 12 = 0$$

$$t_1 = \frac{3+2\sqrt{6}}{10}; \quad t_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{10} < 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{6}}}{10}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3+2\sqrt{6}}}{10}, \text{ las otras dos raíces son complejas}$$

41. Sumando siete unidades al doble de un número más los $\frac{3}{2}$ del mismo obtenemos como resultado el séxtuplo de dicho número menos 23. ¿De qué número se trata?

$$7 + 2x + \frac{3}{2}x = 6x - 23$$

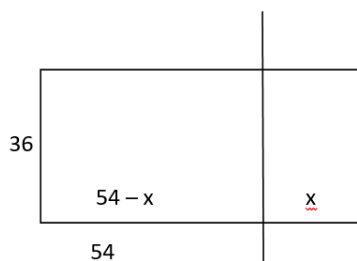
$$14 + 4x + 3x = 12x - 46; 14 + 7x = 12x - 46$$

$$7x - 12x = -46 - 14; -5x = -60$$

$$x = \frac{-60}{-5} = 12$$

$$x = 12$$

42. Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 metros. Trazar una paralela al lado que mide 36m de modo que se forme un rectángulo semejante al primero. ¿Cuáles son las longitudes de los segmentos en que dicha paralela divide al lado de 54m?



$$\frac{36}{x} = \frac{54}{36}; \quad x = \frac{36^2}{54} = 24 \quad 54 - 24 = 30$$

Las longitudes son 24 m y 30 m

43. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300 000 €. Si la finca vale 4 veces más que el coche y el piso 5 veces más que la finca. ¿Cuánto vale cada cosa?

Precio del Coche: x Precio de la Finca: y Precio del Piso: z

Ecuaciones:

Ec.1: $x + y + z = 300\,000$

Ec.2: $y = 4x \rightarrow -4x + y = 0$

Ec.3: $z = 5y \rightarrow -5y + z = 0$

Operación: $4(\text{Ec.1}) + \text{Ec.2} = \text{Ec.2}'$

$$(4x+4y+4z = 1\,200\,000) + (-4x+y = 0); (5y+4z = 1\,200\,000)$$

Ecuaciones:

$$\text{Ec.1': } x+y+z = 300\,000$$

$$\text{Ec.2': } 5y+4z = 1\,200\,000$$

$$\text{Ec.3': } 5y-z = 0$$

Operación: $\text{Ec.2'} - \text{Ec.3'} = \text{Ec.3''}$

$$(5y+4z = 1\,200\,000) - (5y-z = 0); (5z = 1\,200\,000)$$

Ecuaciones:

$$\text{Ec.1'': } x+y+z = 300\,000$$

$$\text{Ec.2'': } 5y+4z = 1\,200\,000$$

$$\text{Ec.3'': } 5z = 1\,200\,000$$

$$z = \frac{5z}{1\,200\,000} = 240\,000 \text{ € vale el piso.}$$

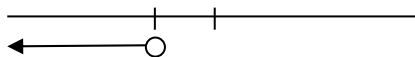
$$\text{Sustituyendo: } 5y = z \rightarrow 5y = 240\,000 \rightarrow y = \frac{240\,000}{5}; \quad 48\,000 \text{ € vale la finca.}$$

$$\text{Sustituyendo: } 4x = y \rightarrow 4x = 48\,000 \rightarrow x = \frac{48\,000}{4}; \quad 12\,000 \text{ € vale el coche.}$$

44. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

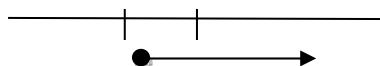
a) $5+3x < 2x+4$; $3x-2x < 4-5$; $x < -1$

$$x \in (-\infty, -1)$$



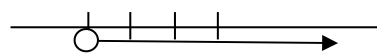
b) $3+4x \leq 8x+6$; $4x-8x \leq 6-3$; $-4x \leq 3$; $x \geq -3/4$

$$x \in [-3/4, \infty)$$



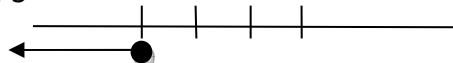
c) $5+4x > 3x+2$; $4x-3x > 2-5$; $x > -3$

$$x \in (-3, \infty)$$



d) $1+3x \geq 5x+7$; $3x-5x \geq 7-1$; $-2x \geq 6$; $x \leq 6/-2$; $x \leq -3$

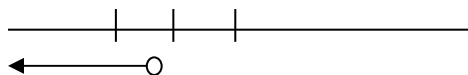
$$x \in (-\infty, -3]$$



45. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

a) $4(3+2x) < -(6x+8)$; $12+8x < -6x-8$; $8x+6x < -8-12$; $14x < -20$; $x < -20/14$; $x < -10/7$

$$x \in (-\infty, -10/7)$$



b) $7(2+3x) \leq 5(6x+3)$; $14+21x \leq 30x+15$; $21x-30x \leq 15-14$; $-9x \leq 1$; $x \geq -1/9$

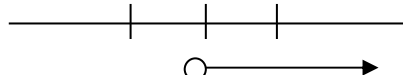
$$x \in [-1/9, \infty)$$



c) $9(2+4x)+4(5x-2) > 3(2x+1)$; $18+36x+20x-8 > 6x+3$; $36x+20x-6x > 3-18+8$; $50x > -7$;

$$x > -7/50$$

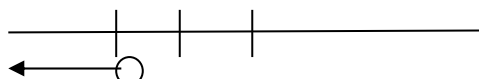
$$x \in (-7/50, \infty)$$



46. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa la solución en la recta real:

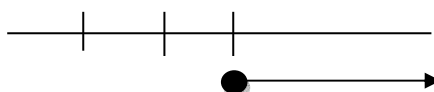
a) $6+3x < x/3+1$; $3(6)+3(3x) < x+3(1)$; $18+9x < x+3$; $9x-x < 3-18$; $8x < -15$; $x < -15/8$

$$x \in (-\infty, -15/8)$$

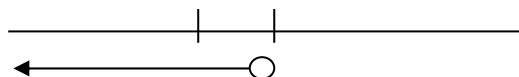


b) $5+5x/2 \leq 9x/2+1$; $2(5)+5x \leq 9x+2(1)$; $10+5x \leq 9x+2$; $5x-9x \leq 2-10$; $-4x \leq -8$; $x \geq 8/4$; $x \geq 2$

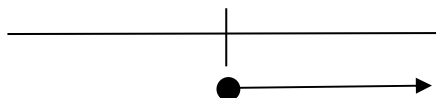
$$x \in [2, \infty)$$



c) $(2+5x)/3 > 4x+1$; $(2+5x) > 3(4x)+3(1)$; $2+5x > 12x+3$; $5x-12x > 3-2$; $-7x > 1$; $x < 1/-7$
 $x \in (-\infty, 1/-7)$



d) $(1+5x)/2 + 1 \geq (3x+6)/4$; $2(1+5x)+4(1) \geq (3x+6)$; $2+10x+4 \geq 3x+6$; $10x-3x \geq 6-4-2$; $7x \geq 0$; $x \geq 0/7$; $x \geq 0$
 $x \in [0, \infty)$



47. Escribe una inecuación cuya solución sea el siguiente intervalo:

a) $[2, \infty)$; $x \geq 2 \rightarrow x-2 \geq 2-x$; $x+x \geq 2+2$; $2x \geq 4$; $x \geq 4/2$; $x \geq 2$

b) $(-\infty, 3)$; $x < 3 \rightarrow x-5 < -2x+4$; $x+2x < 5+4$; $3x < 9$; $x < 9/3$; $x < 3$

c) $(4, \infty)$; $x > 4 \rightarrow x-6 > -3x+10$; $x+3x > 10+6$; $4x > 16$; $x > 16/4$; $x > 4$

d) $(-\infty, 2)$; $x < 2 \rightarrow 2x-8 < -3x+2$; $2x+3x < 2+8$; $5x < 10$; $x < 10/5$; $x < 2$

48. Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{2x-3}$; $2x-3 \geq 0$; $2x \geq 3$; $x \geq 3/2$ SOLUCIÓN: $x \in [3/2, \infty)$

b) $\sqrt{-x-9}$; $-x-9 \geq 0$; $-x \geq 9$; $x \leq -9$ SOLUCIÓN: $x \in (-\infty, -9]$

c) $\sqrt{2-7x}$; $2-7x \geq 0$; $-7x \geq -2$; $7x \leq 2$; $x \leq 2/7$ SOLUCIÓN: $x \in (-\infty, 2/7]$

d) $\sqrt{-2x+7}$; $-2x+7 \geq 0$; $-2x \geq -7$; $2x \leq 7$; $x \leq 7/2$ SOLUCIÓN: $x \in (-\infty, 7/2]$

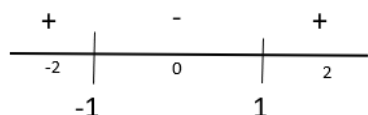
49. Resuelve las inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} \rightarrow x_1 = 1 / x_2 = -1$

$x = -2 \rightarrow (-2)^2 - 1 = 3$

$x = 0 \rightarrow 0^2 - 1 = -1$

$x = 2 \rightarrow 2^2 - 1 = 3$



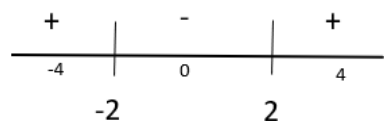
-> Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

b) $x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x_1 = 2 / x_2 = -2$

$x = -4 \rightarrow (-4)^2 - 4 = 12$

$x = 0 \rightarrow 0^2 - 4 = -4$

$x = 4 \rightarrow 4^2 - 4 = 12$



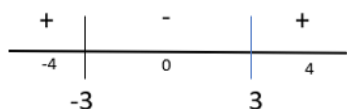
-> Solución: $[-2, 2]$

$$c) x^2 - 9 > 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = 3 / x_2 = -3$$

$$x = -4 \rightarrow (-4)^2 - 9 = 7$$

$$x = 0 \rightarrow 0^2 - 9 = -9$$

$$x = 4 \rightarrow 4^2 - 9 = 7$$



->Solución: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$$d) x^2 + 4 \geq 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \sqrt{-4}$$

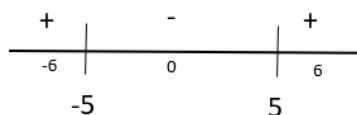
->Solución: todos los números reales

$$e) 2x^2 - 50 < 0 \rightarrow 2x^2 = 50 \rightarrow x^2 = \frac{50}{2} \rightarrow x = \sqrt{25} \rightarrow x_1 = 5 / x_2 = -5$$

$$x = -6 \rightarrow 2(-6)^2 - 50 = 22$$

$$x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 - 50 = -50$$

$$x = 6 \rightarrow 2(6^2) - 50 = 22$$



->Solución: $(-5, 5)$

$$f) 3x^2 + 12 \leq 0 \rightarrow 3x^2 = -12 \rightarrow x^2 = \frac{-12}{3} \rightarrow x = \sqrt{-4}$$

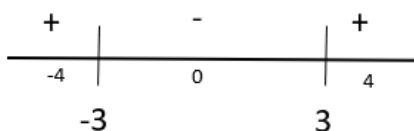
->Solución: ningún número real

$$g) 5x^2 - 45 > 0 \rightarrow 5x^2 = 45 \rightarrow x^2 = \frac{45}{5} \rightarrow x = \sqrt{9} \rightarrow x_1 = 3 / x_2 = -3$$

$$x = -4 \rightarrow 5(-4)^2 - 45 = 35$$

$$x = 0 \rightarrow 5 \cdot 0^2 - 45 = -45$$

$$x = 4 \rightarrow 5 \cdot (4)^2 - 45 = 35$$



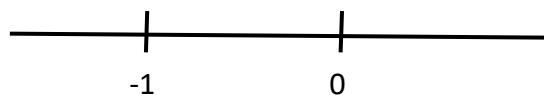
->Solución: $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$$h) x^2 + 1 \geq 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1}$$

->Solución: todos los números reales

50. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 + x \leq 0$ $x^2 + x = 0$ $x = 0$; $x = -1$



-10

-0,5

10

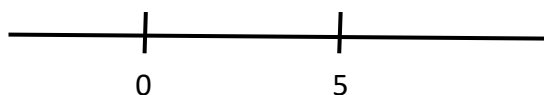
$$(-10)^2 + (-10) > 0$$

$$(-0,5)^2 + (-0,5) < 0$$

$$(10)^2 + (10) > 0$$

Solución: $[-1, 0]$

b) $x^2 - 5x > 0$ $x^2 - 5x = 0$; $x = 0$, $x = 5$



-10

1

10

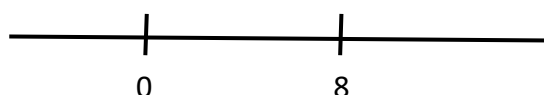
$$(-10)^2 - 5(-10) > 0$$

$$(1)^2 - 5(1) < 0$$

$$(10)^2 - 5(10) > 0$$

Solución: $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

c) $x^2 \leq 8x$ $x^2 - 8x \leq 0$; $x^2 - 8x = 0$; $x = 0$, $x = 8$



-10

1

10

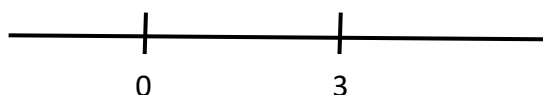
$$(-10)^2 - 8(-10) > 0$$

$$(1)^2 - 8(1) < 0$$

Solución: $[0, 8]$

$$(10)^2 - 8(10) > 0$$

d) $x^2 \leq 3x$ $x^2 - 3x \leq 0$ $x^2 - 3x = 0$; $x = 0$, $x = 3$



-10

1

10

$$(-10)^2 - 3(-10) > 0$$

$$(1)^2 - 3(1) < 0$$

Solución: $[0, 3]$

$$(10)^2 - 3(10) > 0$$

e) $2x^2 - 3x > 0$ $2x^2 - 3x = 0$; $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$



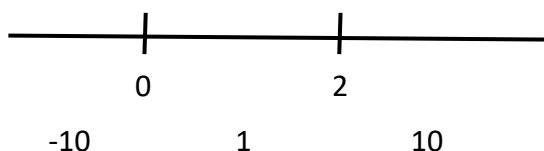
Solución: $(-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

$$2(-10)^2 - 3(-10) > 0$$

$$2(1)^2 - 3(1) < 0$$

$$2(10)^2 - 3(10) > 0$$

f) $5x^2 - 10x < 0$ $5x^2 - 10x = 0$; $x = 0$, $x = 2$



Solución: $(0, 2)$

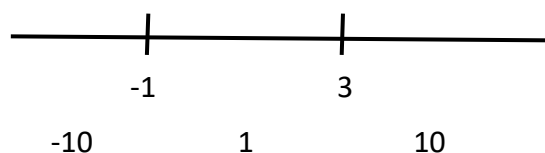
$$5(-10)^2 - 10(-10) > 0$$

$$5(1)^2 - 10(1) < 0$$

$$5(10)^2 - 10(10) > 0$$

51. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = -1$, $x = 3$



Solución: $[-1, 3]$

$$(-10)^2 - 2(-10) - 3 > 0$$

$$(1)^2 - 2(1) - 3 < 0$$

$$(10)^2 - 2(10) - 3 > 0$$

b) $-x^2 - 2x - 3 \geq 0$ $-x^2 - 2x - 3 = 0$ no tienes raíces reales

$$(-0)^2 - 2(-0) - 3 < 0 \text{ nunca es } > 0$$

c) $x^2 + 9x + 14 > 0$ $x^2 + 9x + 14 = 0$; $x = -2$, $x = -7$



$$(-10)^2 + 9(-10) + 14 > 0$$

$$(-5)^2 + 9(-5) + 14 < 0$$

$$(0)^2 + 9(0) + 14 > 0$$

Solución: $[-7, -3]$

d) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $x = 3$ doble $(x - 3)^2 \leq 0$ siempre es > 0
Solución: $x = 3$

e) $-x^2 - 4x - 5 < 0$; $-x^2 - 4x - 5 = 0$, no tiene raíces reales, siempre es < 0

Solución: $\mathcal{R}$

f) $x^2 + 8x + 16 > 0$; $x^2 + 8x + 16 = 0$ $x = -4$ doble, $(x + 4)^2 > 0$ siempre, salvo en $x = -4$,
Solución: $\mathcal{R} - \{-4\}$

g) $x^2 + x + 3 \geq 0$; $x^2 + x + 3 = 0$ no tiene raíces reales, siempre es > 0

Solución: $\mathcal{R}$

h) $2x^2 - 3x - 5 \leq 0$; $2x^2 - 3x - 5 = 0$; $x = -1$, $x = \frac{5}{2}$



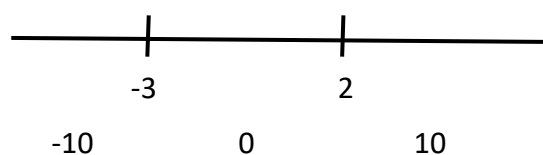
$$2(-10)^2 - 3(-10) - 5 > 0$$

$$2(0)^2 - 3(0) - 5 < 0$$

$$2(10)^2 - 3(10) - 5 > 0$$

Solución: $[-1, \frac{5}{2}]$ **52. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:**

a) $x^2 + x - 6 > 0$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x = -3$, $x = 2$



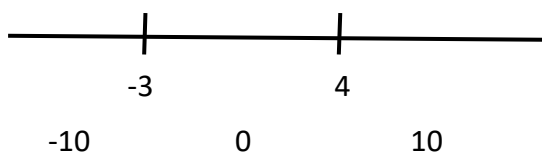
$$(-10)^2 + (-10) - 6 > 0$$

$$(0)^2 + (0) - 6 < 0$$

$$(10)^2 + (10) - 6 > 0$$

Solución: $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$

b) $x^2 - x - 12 \leq 0$; $x^2 - x - 12 = 0$; $x = -3$, $x = 4$



$$(-10)^2 - (-10) - 12 > 0$$

$$(0)^2 - (0) - 12 < 0$$

$$(10)^2 - (10) - 12 > 0$$

Solución: $[-3, 4]$

c) $x^2 - x - 20 < 0$; $x^2 - x - 20 = 0$; $x = -4$, $x = 5$



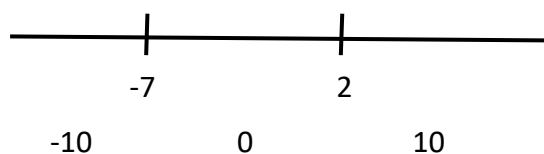
Solución: $(-4, 5)$

$$(-10)^2 - (-10) - 20 > 0$$

$$(0)^2 - (0) - 20 < 0$$

$$(10)^2 - (10) - 20 > 0$$

d) $x^2 + 5x - 14 \geq 0$; $x^2 + 5x - 14 = 0$; $x = -7$, $x = 2$



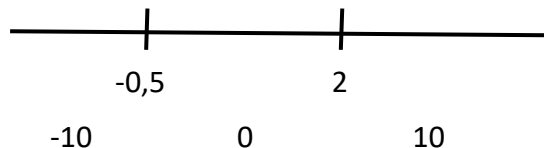
Solución: $(-\infty, -7] \cup [2, \infty)$

$$(-10)^2 + 5(-10) - 14 > 0$$

$$(0)^2 + 5(0) - 14 < 0$$

$$(10)^2 + 5(10) - 14 > 0$$

e) $-2x^2 + 3x + 2 > 0$; $-2x^2 + 3x + 2 = 0$; $x = -0,5$; $x = 2$



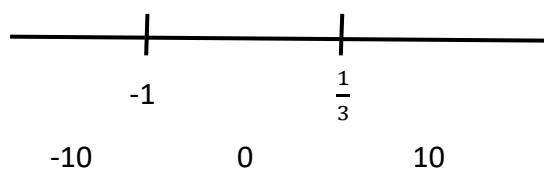
Solución: $(-0,5, 2)$

$$-2(-10)^2 + 3(-10) + 2 < 0$$

$$-2(0)^2 + 3(0) + 2 > 0$$

$$-2(10)^2 + 3(10) + 2 < 0$$

f) $3x^2 + 2x - 1 \leq 0$; $3x^2 + 2x - 1 = 0$; $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$



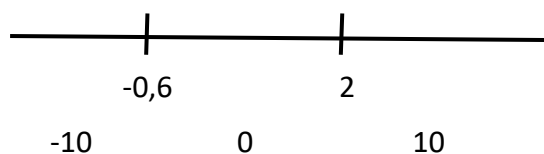
Solución: $[-1, \frac{1}{3}]$

$$3(-10)^2 + 2(-10) - 1 > 0$$

$$3(0)^2 + 2(0) - 1 < 0$$

$$3(10)^2 + 2(10) - 1 > 0$$

g) $5x^2 - 7x - 6 \geq 0$; $5x^2 - 7x - 6 = 0$; $x = -0,6$, $x = 2$



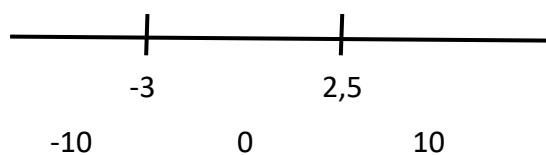
$$5(-10)^2 - 7(-10) - 6 > 0$$

$$5(0)^2 - 7(0) - 6 < 0$$

$$5(10)^2 - 7(10) - 6 > 0$$

Solución: $(-\infty, -0,6] \cup [2, \infty)$

h) $2x^2 + x - 15 < 0$; $2x^2 + x - 15 = 0$; $x = -3$, $x = 2,5$



$$2(-10)^2 + (-10) - 15 > 0$$

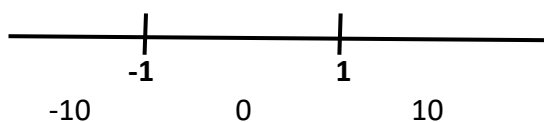
$$2(0)^2 + (0) - 15 < 0$$

$$2(10)^2 + (10) - 15 > 0$$

Solución: $(-3, 2,5)$

53. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x^2 - 1}$; $x^2 - 1 \geq 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x = -1$, $x = 1$



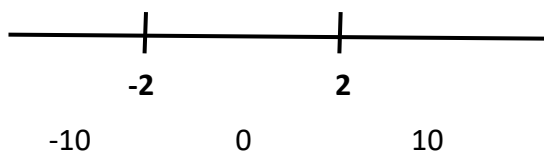
$$(-10)^2 - 1 > 0$$

$$(0)^2 - 1 < 0$$

$$(10)^2 - 1 > 0$$

Solución: $[-1, 1]$

b) $\sqrt{-x^2 + 4}$; $-x^2 + 4 \geq 0$; $-x^2 + 4 = 0$; $x = -2$, $x = 2$



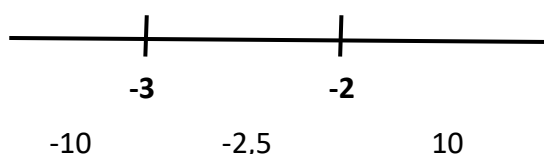
$$-(-10)^2 + 4 < 0$$

$$-(0)^2 + 4 > 0$$

$$-(10)^2 + 4 < 0$$

Solución: $[-2, 2]$

c) $\sqrt{x^2 + 5x + 6}$; $x^2 + 5x + 6 \geq 0$; $x^2 + 5x + 6 = 0$; $x = -2$, $x = -3$



$$(-10)^2 + 5(-10) + 6 > 0$$

$$(-2,5)^2 + 5(-2,5) + 6 < 0$$

$$(10)^2 + 5(10) + 6 > 0$$

Solución: $(-\infty, -3] \cup [-2, \infty)$

d) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$; $x^2 - 5x + 6 \geq 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x = 1$; $x = 6$



$$(-10)^2 - 5(-10) + 6 > 0$$

$$(2,5)^2 - 5(2,5) + 6 < 0$$

$$(10)^2 - 5(10) + 6 > 0$$

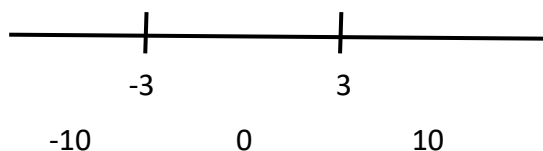
Solución: $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

54. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $(2x + 5)(2x - 5) \leq 11$

$$(2x + 5)(2x - 5) \leq 11; 4x^2 - 25 \leq 11; 4x^2 - 25 - 11 \leq 0; 4x^2 - 36 \leq 0;$$

$$x^2 - 9 \leq 0; x = -3, x = 3$$



Solución: $[-3, 3]$

$$(-10)^2 - 9 > 0$$

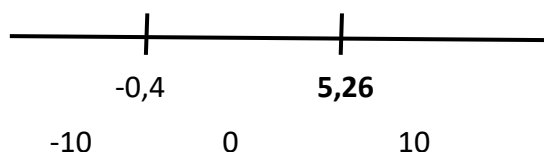
$$(0)^2 - 9 < 0$$

$$(10)^2 - 9 > 0$$

b) $(2x - 5)(4x - 3) - (x - 10)(x - 2) \geq 50$

$$8x^2 - 6x - 20x + 15 - x^2 + 2x - 10x + 20 \geq 50; 7x^2 - 34x + 35 \geq 50$$

$$7x^2 - 34x + 35 - 50 \geq 0; 7x^2 - 34x - 15 \geq 0; x = \frac{17 + \sqrt{394}}{7} \approx 5,26; x = \frac{17 - \sqrt{394}}{7} \approx -0,4$$



Solución: $(-\infty, \frac{17 - \sqrt{394}}{7}] \cup [\frac{17 + \sqrt{394}}{7}, \infty)$

$$7(-10)^2 - 34(-10) - 15 > 0$$

$$7(0)^2 - 34(0) - 15 < 0$$

$$7(10)^2 - 34(10) - 15 > 0$$

c) $\frac{3x-2}{x} \leq \frac{5-2x}{x+3}; \frac{3x-2}{x} - \frac{5-2x}{x+3} \leq 0$

$$\frac{(3x-2) \cdot (x+3) - (5-2x) \cdot x}{x \cdot (x+3)} \leq 0; \frac{3x^2 + 9x - 2x - 6 - 5x + 2x^2}{x \cdot (x+3)} \leq 0; \frac{5x^2 + 2x - 6}{x \cdot (x+3)} \leq 0$$

$$x \cdot (x + 3) = 0, x = 0, x = -3;$$

$$5x^2 + 2x - 6 = 0; x = \frac{-1 + \sqrt{31}}{5} \approx 0,91; x = \frac{-1 - \sqrt{31}}{5} \approx -1,31$$



Solución: $(-3, \frac{-1 - \sqrt{31}}{5}] \cup (0, \frac{-1 + \sqrt{31}}{5}]$

$$\frac{5(-10)^2 + 2(-10) - 6}{(-10) \cdot (-10 + 3)} > 0$$

$$\frac{5(-2)^2 + 2(-2) - 6}{(-2) \cdot (-2 + 3)} < 0$$

$$\frac{5(-1)^2 + 2(-1) - 6}{(-1) \cdot (-1 + 3)} > 0$$

$$\frac{5(0,5)^2 + 2(0,5) - 6}{(0,5) \cdot (0,5 + 3)} < 0$$

$$\frac{5(10)^2 + 2(10) - 6}{(10) \cdot (10 + 3)} > 0$$

55. Resolver por el método de Gauss los sistemas:

$$a) \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} E2-E3 \\ E1+E2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 5x - 3y + z = 3 \\ -2x + y - z = -3 \end{cases} \rightarrow 3x - 2y = 0$$

$$\begin{matrix} E1+E2 \\ -2E2+E3 \end{matrix} \quad \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 9x - y = 8 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 9x - y = 8 \\ -15x = -16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 9x - y = 8 \\ -15x = -16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 9x - y = 8 \\ -15x = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 5 \\ 9x - y = 8 \\ -15x = -16 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=16/15 \\ y=8/5 \\ z=37/15 \end{matrix}$$

RESULTADOS: $x=16/15$ $y=8/5$ $z=37/15$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 4E2 + E3 \\ E1 + E2 \end{matrix} \quad \begin{cases} 28x + 8y - 4z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 28x + 8y - 4z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ 7x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 8x + 3y = 0 \\ 31x + 13y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 13E2 - 3E3 \\ 104x + 39y = 0 \\ -93x - 39y = 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 8x + 3y = 0 \\ 11x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 8x + 3y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sustituyo } x \text{ en } E2 \quad \begin{cases} 8 \cdot 0 + 3y = 0 \\ 0 + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 + 0 + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

RESULTADOS: $x=0$ $y=0$ $z=0$

56. Resuelve y discute si es posible el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2E1 - E2 \\ -2x - y + 2z = -z \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

(como las 2 ecuaciones son las mismas, tengo que elegir un parámetro para una de las incógnitas)

RESULTADO $x = 1 + \lambda$ $y = 0$ $z = \lambda$

Sistema compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones

57. Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema

$$\begin{array}{rcl} x-6y-4z & = & -7 \\ x+8y+4z & = & 6 \\ x+y & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} E1+E2: \\ x-6y-4z = -7 \\ x+8y+4z = 6 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} 2x + 2y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x-6y-4z & = & -7 \\ 2x + 2y & = & -1 \\ x + y & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} E2 - 2E1: \\ 2x + 2y = -1 \\ -2x - 2y = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 0 + 0 = -3 \end{array}$$

ES UN SISTEMA INCOMPATIBLE es decir NO TIENE SOLUCION

58. Compramos 8kg de café natural y 5kg de café torrefacto, pagando 66 euros. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5 euros

x = precio/kg natural y = precio kg/torrefacto

$$\begin{array}{rcl} 8x + 5y & = & 66 \\ x/2 + y/2 & = & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8x + 5y = 66 \\ x+y = 10 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} x=10-y \end{array} \quad \text{sustituyendo en la primera ecuación,}$$

$$8(10-y) + 5y = 66 ; \quad 80 - 8y + 5y = 66 \quad -3y = -14 \quad y = 14/13$$

$$x = 10 - y ; \quad x = 10 - 14/13 \quad x = \frac{130-14}{13} = \frac{116}{13}$$

precio café natural: $\frac{116}{13}$ €/kg ; precio café torrefacto: $\frac{14}{13}$ €/kg

59. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano, la suma de las edades de los niños y de la madre es de 45 años ¿que edades tienen?

x = edad hijo menor ; y = edad hijo mayor ; z = edad madre

$$\begin{array}{rcl} z & = & 2(x+y) \\ x & = & y/2 \\ x+y+z & = & 45 \end{array} \quad \begin{array}{l} z = 2x+2y \\ x = y/2 ; \quad 2x-y = 0 \\ x+y+z = 45 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x+2y-z=0 \\ x+y+z = 45 \\ 2x-y = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} E1+E2 \\ E1+E3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x+2y-z & = & 0 \\ 3x+3y & = & 45 \\ 2x-y & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} E2+3E3: \\ 2x+2y-z = 0 \\ 3x+3y = 45 \\ 9x = 45 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} x=5 ; 3 \cdot 5 + 3y = 45 ; y = 10 \\ 2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 - z = 0 ; z = 30 \end{array}$$

Madre: 30 años ; Hijo mayor: 10 años ; Hijo pequeño: 5 años

60. Compramos 8kg de café natural y 5kg de café torrefacto, pagando 66€. Calcula el precio del kilo de cada tipo de café, sabiendo que si mezclamos mitad y mitad resulta el kilo a 5€.

1º PASO: organizar los datos

1º Bachillerato. Capítulo 2: Álgebra. RESPUESTAS

Sea x el precio por kilo del café natural y tenemos 8 kilos: $8x$

Sea y el precio por kilo del café torrefacto y tenemos 5 kilos: $5y$

$$8x + 5y = 66\text{€}$$

Si mezclamos la mitad de cada kilo, el kilo sería 5€, es decir, que la suma de la mitad de cada precio del café debe darnos 5 €

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 5$$

Simplificamos la ecuación multiplicando todo por 2:

$$x + y = 10$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, para ello, aplicaremos el método de reducción:

$$8x + 5y = 66$$

$$x + y = 10$$

Para resolverlo, multiplicaremos la segunda ecuación por -5

$$8x + 5y = 66$$

$$-5x - 5y = -50 \quad \text{Sumamos las ecuaciones}$$

$$3x = 16$$

$$x = 5,33$$

Sustituimos el valor de la x en la primera ecuación:

$$8(5,33) + 5y = 66$$

$$5y = 66 - 42,64 = 23,36$$

$$y = \frac{23,36}{5} = 4,67$$

Solución: el precio del kilo del café natural es de 5,33€/kg y el precio del café torrefacto es de 4,67€/kg

61. Una madre tiene el doble de la suma de las edades de sus hijos. La edad del hijo menor es la mitad de la de su hermano. La suma de las edades de los niños y la de la madre es 45 años. ¿Qué edades tienen?

La edad del hijo menor es a

La edad del hijo mayor es $2a$

Madre: $2(a+2a)$

Lo siguiente que debemos hacer es sumar las edades de los niños y de la madre, entonces el resultado será 45

$$a + 2a + 2(a + 2a) = 45 \quad ; \quad a + 2a + 2a + 4a = 45 \quad ; \quad 9a = 45 \quad ; \quad a = 5$$

Solución: la edad del hijo menor es 5 años

-La edad del hermano es de: $2 \cdot 5 = 10$ años

-La edad de la madre: $2(5 + 2 \cdot 5) = 10 + 20 = 30$ años

62. Deseamos vender un coche, un piso y una finca por un total de 300.000€. Si la finca vale cuatro veces más que el coche y el piso cinco veces más que la finca, ¿cuánto vale cada cosa?

Primero, debemos organizar los datos:

Sea el precio del coche: x ; el precio de la finca: $4x$; el precio del piso: $5(4x)$

La suma de las tres cosas es igual a 300.000€, por lo que debemos sumar todos los datos:

$$x + 4x + 20x = 300000 \quad ; \quad 25x = 300000 \quad ; \quad x = 12000$$

Por lo tanto, el coche vale 12000€

La finca: $4 \cdot 12000 = 48000\text{€}$

El piso: $20 \cdot 12000 = 240000\text{€}$

Solución: el coche vale 12000€, la finca cuesta 48000€, el piso cuesta 240000€

63. Las tres cifras de un número suman 18. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtiene 594; la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos. Halla dicho número.

El número es abc

La primera condición afirma que:

$$a + b + c = 18$$

La segunda afirma que:

$$abc - cba = 594$$

La tercera afirma que:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

La segunda condición significa que :

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 594$$

$$100a - 100c + c - a = 594$$

$$100(a - c) + (c - a) = 594$$

$$-100(-a + c) + (c - a) = 594$$

$$(c - a)(1 - 100) = 594$$

$$c - a = \frac{-594}{99}$$

$$c - a = -6$$

$$c = a - 6$$

$$\text{Si } b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a + c$$

$$\text{Como } c = a - 6 \Rightarrow 2b = a + (a - 6) \Rightarrow b = a - 3$$

Ahora sustituimos en la primera ecuación:

$$a + b + c = 18$$

$$a + (a - 3) + (a - 6) = 18$$

$$3a - 9 = 18 \quad a = \frac{27}{3} = 9$$

Teniendo la a podemos despejar la b y la c :

$$b = a - 3$$

$$b = 9 - 3 = 6$$

$$c = a - 6 \quad c = 9 - 6 = 3$$

Solución: $abc=963$

64. Encuentra la región factible del sistema:

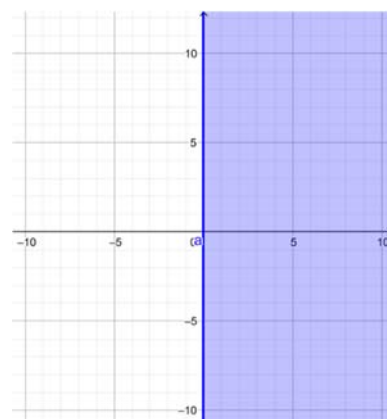
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

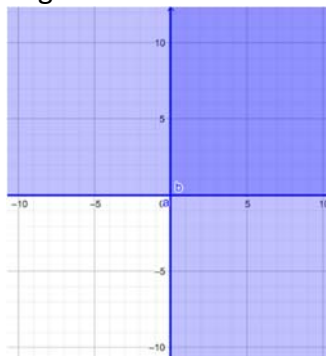
$$6x + 5y \leq 30$$

$$x + 2y \leq 8$$

La representación de $x \geq 0$ en la gráfica es la siguiente:



Junto a la representación de $y \geq 0$ es la siguiente:



Esto quiere decir que la inecuación es factible en el primer cuadrante

A continuación, vamos a representar la inecuación $6x + 5y \leq 30$, para ello dibujamos la recta:

$$6x + 5y = 30,$$

-Si $x=0$: $6 \cdot 0 + 5y = 30$; $5y = 30$; $y = 6$

Esto sería el punto (0,6)

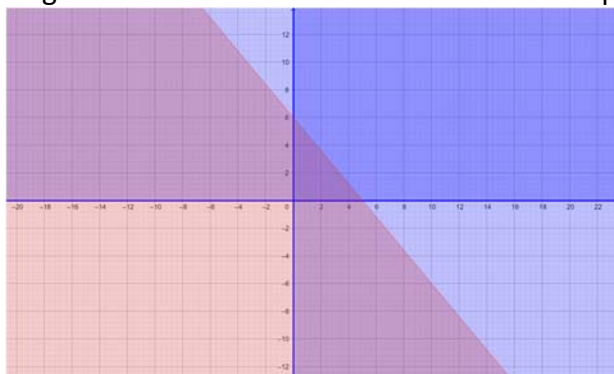
-Si $y=0$: $6x + 5 \cdot 0 = 30$; $6x = 30$; $x = 5$

Esto sería el punto (5,0)

-Seguidamente, vemos si (0, 0) verifica la inecuación:

$$0 \leq 30$$

Esta se verifica, por lo que la región factible de esta inecuación va a situarse por debajo de la recta



Ahora vamos a representar la inecuación $x + 2y \leq 8$; Consideramos $x + 2y = 8$

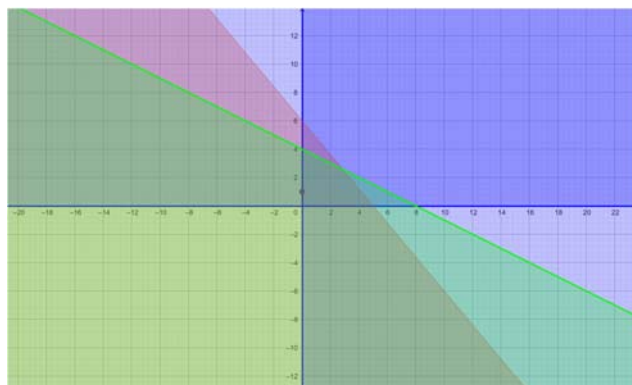
-Si $x=0$ $0 + 2y = 8$; $y = 4$

Este sería el punto (0,4)

-Si $y=0$ $x + 0 = 8$; $x = 8$

Este sería el punto (8,0)

-Seguidamente comprobamos si (0, 0) verifica la inecuación: $0 \leq 8$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia si hay números reales en los que las siguientes expresiones no pueden ser evaluadas:
No van a poder ser evaluadas cuando el denominador sea 0.

a) $7x-9 / (x+3) \cdot (2x-16)$; $(x+3=; x=-3)$; $(2x-16=0; x=8)$

Solución: No puede ser evaluada en $x = -3$ ni $x=8$

b) $-5x+7/x^2-5x+6$; $x^2-5x+6 = 0$; $x = 2$; $x = 3$

Solución: No puede ser evaluada en $x = 2$ ni $x = 3$.

c) $9x^3-2x / -2x^4-3x^2-4$ $-2x^4-3x^2-4$ siempre es distinto de 0

Solución: Siempre va a tener una solución real.

d) $2x-3y+5 / x^2+y^2$ $x^2+y^2 = 0$ $x = 0$; $y = 0$

Solución: No puede ser evaluada con $(x=0)$ e $(y=0)$.

2. Calcula cuánto debe valer la letra m para que el valor numérico de la expresión algebraica siguiente sea -2 para $x=0$.

$$x^3 - mx + 4 / (x^4 - 1) \cdot (mx + 2)$$

La letra m puede ser sustituida por cualquier número real ya que al ir multiplicada por x ($x=0$) siempre va a dar 0. Por lo tanto, el polinomio siempre va a tener la misma solución. (-2).

- Si sustituimos ($m = -1$):

$$(0)^3 - (-1) \cdot (0) + 4 / ((0)^4 - 1) \cdot ((-1) \cdot (0) + 2) = 4 / (-1) \cdot (2) = 4 / -2 = -2$$

- Si sustituimos ($m = 1$):

$$(0)^3 - (-1) \cdot (0) + 4 / ((0)^4 - 1) \cdot ((-1) \cdot (0) + 2) = 4 / (-1) \cdot (2) = 4 / -2 = -2$$

3. Consideramos los polinomios: $P(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5x - 4$; $Q(x) = -2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6$; $R(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Realiza las siguientes operaciones:

a) $P + Q + R$

$$(-3x^3 + 2x^2 - 5x - 4) + (-2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) + (3x^2 + 5x - 7) = -2x^4 + x^2 + 5x - 5$$

b) $P - Q$

$$(-3x^3 + 2x^2 - 5x - 4) - (-2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) = 2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 10x - 10$$

c) $P \cdot R$

$$(-3x^3 + 2x^2 - 5x - 4) \cdot (3x^2 + 5x - 7) = -9x^5 + 6x^4 - 15x^3 - 12x^2 - 15x^4 + 10x^3 - 25x^2 - 20x + 21x^3 - 14x^2 + 35x$$

$$+28 = -9x^5 - 9x^4 + 16x^3 - 51x^2 + 15x + 28$$

d) $P \cdot R - Q$

$$(-3x^3 + 2x^2 - 5x - 4) \cdot (3x^2 + 5x - 7) = -9x^5 + 6x^4 - 15x^3 - 12x^2 - 15x^4 + 10x^3 - 25x^2 - 20x + 21x^3 - 14x^2 + 35x$$

$$+28 = (-9x^5 - 9x^4 + 16x^3 - 51x^2 + 15x + 28) - (-2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 6) = -9x^5 - 7x^4 + 13x^3 - 47x^2 + 10x + 22$$

4. Efectúa las divisiones de polinomios:

a) $3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 9$ entre $3x^2 + 2x - 5$

b) $6x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 10x - 5$ entre $x^3 + 3x + 5$

a)

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 7x - 9 \quad | \quad 3x^2 + 2x - 5 \\ -3x^4 + 2x^3 + 5x^2 \quad x^2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 7x - 9 \end{array}$$

COCIENTE: x^2 RESTO: $7x - 9$

b)

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 7x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 10x - 5 \quad | \quad x^3 + 3x + 5 \\ -6x^5 - 18x^3 - 30x^2 \quad 6x^2 - 7x + 10 \\ \hline 0 \quad -7x^4 - 10x^3 - 21x^2 - 10x - 5 \\ 0 \quad +7x^4 + 21x^2 + 35x \\ \hline 0 \quad 0 \quad -10x^3 \quad 0 \quad +15x - 5 \\ 0 \quad 0 \quad 10x^3 \quad 0 \quad -30x - 50 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -15x - 55 \end{array}$$

COCIENTE: $6x^2 - 7x + 10$ RESTO: $-15x - 55$

5. Señala sin efectuar la división, si las siguientes divisiones son exactas o no:

a) $x^5 + 7x^4 - 13x^3 + 5x^2 - 17x + 5 / x - 3$: ($x=3$)

$$3^5 + 7 \cdot (3)^4 - 13 \cdot (3)^3 + 5 \cdot (3)^2 - 17 \cdot (3) + 5 = 243 + 567 - 351 + 45 - 51 + 5 = 458$$

RESTO: 458 (No es exacta)

b) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x + 4 / x - 2$: ($x=2$)

$$2^5 + 2^4 - 3 \cdot (2)^3 - 4 \cdot (2) + 4 = 32 + 16 - 24 - 8 + 4 = 20$$

RESTO: 20 (No es exacta)

c) $9x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 17x - 1 / x - 1$: ($x=1$)

$$9 \cdot (1)^5 + 7 \cdot (1)^4 - 3 \cdot (1)^3 + 5 \cdot (1)^2 - 17 \cdot (1) - 1 = 9 + 7 - 3 + 5 - 17 - 1 = 0$$

RESTO: 0 (Es exacta)

6. Construye un polinomio de grado 2 tal que el número 4 sea raíz suya.

$$(x + 4)(x + 1) \rightarrow x^2 + x + 4x + 4 = x^2 + 5x + 4$$

7. Escribe dos polinomios de grados diferentes y que tengan en común las raíces 2 y 3.

$$(x+2)(x-3) \rightarrow x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6$$

$$x(x+2)(x-3) \rightarrow x^3 - x^2 - 6x$$

8. Construye un polinomio de grado 4 tal que tenga únicamente dos raíces reales.

$$(x-3)^2(x+1)^2 \rightarrow (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 2x + 1) \rightarrow$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 6x^3 - 12x^2 - 6x + 9x^2 + 18x + 9 \rightarrow$$

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9$$

9. Encuentra un polinomio $q(x)$ tal que al dividir $p(x) = x^6 + x^4 + x^2 + x + 1$ entre $q(x)$ se obtenga como polinomio resto $r(x) = 5x^4 + 5x^2 + 1$.

$$x(x^6 + x^4 + x^2 + x + 1) + (5x^4 + 5x^2 + 1) \rightarrow$$

$$(x^7 + x^5 + x^3 + x^2 + x)(5x^4 + 5x^2 + 1) \rightarrow$$

$$x^7 + x^5 + 5x^4 + x^3 + 6x^2 + x + 1$$

10. Halla las raíces enteras o racionales de los siguientes polinomios:

- $4x^3 + 11x^2 + 6x - 3$ ----- no tiene. Su raíz es 0,307 no es entera ni racional. Sus otras dos raíces (-1,528 + 0,321 i y -1,528 - 0,321 i) son complejas
- $3x^3 - 2x^2 + 6x - 3$ ----- no tiene. Su raíz es 0,519 pero no es entera ni racional, sus otras dos raíces (0,073 + 1,385 i y 0,073 - 1,385 i) son complejas
- $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ ----- su raíz es 1
- $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ ----- su raíz es $-\frac{1}{2}$

Todas se hacen por Ruffini y se comprueba en la calculadora.

11. Descompón los siguientes polinomios como producto de polinomios irreducibles:

- $3x^3 + 11x^2 + 5x + 3$ ----- no se puede, porque su raíz que es -3,248 no es ni entera ni racional. Sus otras dos raíces son -0,209 + 0,514 i y -0,209 - 0,514 i son complejas
- $5x^3 + 5x^2 + x - 1$ ----- no se puede porque su raíz que es 0,321 no es ni racional ni entera y sus otras dos raíces (-0,66 + 0,433 i y -0,66 - 0,433 i) son complejas
- $2x^3 + x^2 + 6x - 3$ ----- no se puede porque 0,439 no es ni entero ni racional y sus otras dos raíces -0,469 + 1,786 i y -0,469 - 1,786 i son raíces complejas
- $3x^3 - 6x^2 + x - 2$ ----- $(x - 2)(3x^2 + 1)$

12. Realiza las operaciones entre fracciones algebraicas:

- $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-6x+9} = \frac{x-1}{x(x-3)} - \frac{4x}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-3)^2} - \frac{x(4x)}{x(x-3)^2} = \frac{x^2-3x-x+3-4x^2}{x(x-3)^2} = \frac{-3x^2-4x+3}{x(x-3)^2}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} - \frac{2x^2}{x^2-6x+9} = \frac{x-1}{x(x-3)} - \frac{2x^2}{(x-3)^2} = \frac{(x-1)(x-3)-(2x^2)(x)}{X(X-3)^2} = \frac{-2X^3+X^2-4X+3}{X(X-3)^2}$
- $\frac{x+2}{x^2-3x} \times \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{x+2}{x(x-3)} * \frac{2x}{(x-3)^2} = \frac{2X(X^2+2)}{X(X-3)^3} = \frac{2(X^2+2)}{(X-3)^2}$
- $\frac{x-1}{x^2-3x} / \frac{2x}{x^2-6x+9} = \frac{\frac{x-1}{x(x-3)}}{\frac{2x}{(x-3)^2}} = \frac{X^3-7X^2+15X-9}{2X^4-6X^2} = \frac{(X-1)(X-3)^2}{2X^2(X^2-3)} = \frac{X^2-4X+3}{2X^2}$

13. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o trinomios, o de un producto suma por diferencia. En caso afirmativo expresa su procedencia.

- $x^2 - 6x + 9$ ----- $(x - 3)^2$
- $x^4 + 8x^2 + 16$ ----- $(x^2 + 4)^2$
- $x^2 + \sqrt{20xy} + 5y^2$ ----- $(x + \sqrt{5Y})^2$
- $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ ----- NO, sus dos primeras raíces no son enteras ni racionales (-0,531 y -1,883) y sus otras dos raíces son complejas (0,207+0,978 i y 0,207 - 0,978 i)
- $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$ ----- NO, porque tiene cuatro raíces complejas = 1,44+1,08 i . 1,44 - 1,08 i . -0,44+0,33 i . -0,44 - 0,33 i .
- $x^2 - 36$ ----- $(x + 6) \cdot (x - 6)$
- $5x^2 + 1$ ----- NO, porque sus dos raíces son complejas= 0,447 i . y . -0,447 i .
- $5x^2 - 11$ ----- $(\sqrt{5X} + \sqrt{11})(\sqrt{5X} - \sqrt{11X})$
- $x^4 - 3y^2$ ----- $(x^2 + \sqrt{3Y})(x^2 - \sqrt{3Y})$

14. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible:

- a) $\frac{2}{x(5-x)} + \frac{6}{2(5-x)} = \frac{(2)(5-x)2}{2x(5-x)^2} + \frac{(x)(5-x)6}{2x(5-x)^2} = \frac{(20-4x)+(30x-6x^2)}{2x(5-x)^2} = \frac{-6x^2+26x+20}{2x(5-x)^2}$
- b) $\frac{x+y}{x-y} * \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)(x^2y^2)}{(x-y)(x^2-y^2)} = \frac{x^3+xy^2+yx^2+y^3}{x^3-xy^2-yx^2+y^3} = \frac{xy^2+yx^2}{-xy^2-yx^2}$
- c) $\frac{2x+1}{4x^2-1} = \frac{2x+1}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{1}{(2x-1)}$

15 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible.

$$a) \quad \left(x^4 - \frac{1}{x^2}\right) : \left(x^3 + \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x^6}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) : \left(\frac{x^4}{x} + \frac{1}{x}\right) = \frac{x^6-1}{x^2} : \frac{x^4+1}{x} = \frac{x^6-1}{(x^4+1)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)}{x^4}$$

Descomposición factorial del numerador

$$\begin{array}{r} 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \\ 1 \ \underline{1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \\ -1 \ \underline{-1 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1} \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \end{array}$$

$$b) \cdot \frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a} : \frac{x+a}{x-a} = \frac{(x+a)(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)}{(x+a)(x-a)} = \frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{(x-a)} =$$

$$= \frac{(x-a)(x^2-2x+a^3)}{x-a} = x^2 - 2x + a^3$$

Descomposición del numerador:

$$a \quad \begin{array}{cccc} 1 & -3a & +3a^2 & -a^3 \\ & a & -2a^2 & a^3 \\ \hline 1 & -2a & a^2 & 0 \end{array}$$

$$c) \quad \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a-b} = \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)} - \frac{(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}\right) : \frac{ab}{a-b} = \frac{(a^2+b^2+2ab)-(a^2+b^2-2ab)}{(a-b)(a+b)} : \frac{ab}{a-b} =$$

$$= \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} : \frac{ab}{a-b} = \frac{(4ab)(a-b)}{(a+b)(a-b)(ab)} = \frac{4}{a+b}$$

16 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica todo lo posible.

$$a) \quad \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x-y}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x+y}} : \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a+y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a-y}} = \frac{\frac{1(x-y)-1a}{(x-y)a}}{\frac{1(x+y)+1a}{(x+y)a}} : \frac{\frac{1(a+y)-1x}{x(a+y)}}{\frac{1(a-y)+1x}{x(a-y)}} = \frac{((x-y)-a)(a(x+y))}{(x+y+a)((x-y)a)} : \frac{(a+y-x)(x(a-y))}{(a-y+x)(x(a+y))} =$$

$$= \frac{((x-y)-a)(a(x+y))(a-y+x)(x(a+y))}{(x+y+a)((x-y)a)(a+y-x)(x(a+y))} = \frac{((x-y)-a)(a(x+y))(a-y+x)}{(x+y+a)((x-y)a)(a+y-x)}$$

$$b) \quad \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \left(\frac{x^3-x^2-3x+2}{x^3}\right) : \left(\frac{x^2-3x-2}{x^3}\right) =$$

$$= \frac{(x^3-x^2-3x+2)(x^3)}{(x^2-3x-2)(x^3)} = \frac{(x^3-x^2-3x+2)}{(x^2-3x-2)}$$

$$c) \quad \frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{3}{y}} : \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{3}{y} + \frac{5}{x}} = \frac{\frac{3y+2x}{xy}}{\frac{y+3x}{xy}} : \frac{\frac{2y-x}{xy}}{\frac{3y+5x}{xy}} = \frac{(3y+2x)(xy)}{(y+3x)(xy)} : \frac{(2y-x)(xy)}{(3y+5x)(xy)} = \frac{(3y+2x)(2y-x)}{(y+3x)(3y+5x)}$$

17. Resolver las ecuaciones siguientes.

$$a) \quad \frac{3x-1}{2x-4} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{3x-1}{2(x-2)} = \frac{5}{9} \Rightarrow 27x - 9 = 10x - 20 \Rightarrow 27x - 10x = -20 + 9;$$

$$17x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{17}$$

$$b) \quad \frac{x}{2} + 5 = \frac{3x}{6} - 7 \Rightarrow \frac{3x+30}{6} = \frac{3x-42}{6} \Rightarrow 3x + 30 = 3x - 42 \Rightarrow 3x - 3x = -30 - 42; 0 = -72$$

no tiene solución

$$c) \frac{5}{x+1} = \frac{5x}{x-1} - 2 \Rightarrow 5x - 5 = 5x^2 + 5x - 2x^2 + 2; 5x^2 - 2x^2 - 5x + 5x + 2 + 5; 3x^2 + 7 = 0$$

no tiene solución

18. Resolver las siguientes ecuaciones indicando cuantas soluciones tienen y cuales son :

$$a) \frac{16x^3-7}{2x^2-3} = 5 + 8x; 16x^3 - 7 = 10x^2 - 15 + 16x^3 - 24x;$$

$$16x^3 - 16x^3 - 10x^2 + 24x - 7 + 15 = 0; -10x^2 + 24x + 8 = 0$$

tiene dos soluciones $x = \frac{6 + 2\sqrt{14}}{5}; x = \frac{6 - 2\sqrt{14}}{5}$

$$b) x^4 + 8x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = z \Rightarrow (x^2) + 8(x^2) - 12 = 0 \Rightarrow z^2 + 8z - 12 = 0 \Rightarrow$$

tiene dos soluciones $x = \pm \sqrt{-4 + 2\sqrt{7}}$

$$c) 80x^4 - 48x^2 + 7 = 0; x^2 = z; 80(x^2)^2 - 48(x^2) + 7 = 0; 80z^2 - 48z + 7 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{20}}; x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$d) \frac{x^2}{16} + \frac{(x+5)^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{x^2+25+10x}{25} = 1 \Rightarrow \frac{25x^2}{400} + \frac{16(x^2+10x+25)}{400} = \frac{400}{400} \Rightarrow$$

$$25x^2 + 16x^2 + 160x + 400 = 400; 41x^2 + 160x + 400 - 400 = 0; 41x^2 + 160x = 0$$

tiene dos soluciones $x = 0; x = -\frac{160}{41}$

19. El cateto mayor de un triángulo rectángulo es una unidad mayor que el cateto menor. La hipotenusa es tres unidades mayor que el cateto menor. Se pide:

- a) escribir la expresión algebraica que resulta de aplicar el teorema de Pitágoras.
b) calcular la hipotenusa y los catetos.

Cateto menor = x

Cateto mayor = $x+1$ Hipotenusa = $x+3$

$$a) (x+3)^2 = x^2 + (x+1)^2$$

$$b) x^2 + 9 + 6x = x^2 + x^2 + 1 + 2x \Rightarrow x^2 - x^2 - x^2 + 6x - 2x + 9 - 1 = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{3}; x = 2 - 2\sqrt{3}$$

Cateto menor = $2 + 2\sqrt{3}$

Cateto mayor = $3 + 2\sqrt{3}$

Hipotenusa = $5 + 2\sqrt{2}$

20. En una competición de baloncesto a doble vuelta participan doce equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos, 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición un equipo tiene 36 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado?

$x \rightarrow$ partidos ganados

$y \rightarrow$ partidos perdidos

$$\begin{cases} 2x + y = 36 \rightarrow y = 36 - 2x \\ x + y = 24 \end{cases}$$

sustitución: $x + (36 - 2x) = 24 \rightarrow -x = -12 \rightarrow x = 12$

sustituir 'x' en la e2: $12 + y = 24 \rightarrow y = 24 - 12 \rightarrow y = 12$

solución: han ganado 12 partidos y perdido 12 también.

21. Una caja de forma cúbica se llena con cierto número de cubitos de un centímetro cúbico y sobran 71 cubitos; pero si todos los cubitos que hay se ponen en otra caja que tiene un centímetro más por cada arista, faltan 200 para llenarla. Calcula las longitudes de las aristas de las dos cajas y el número de cubitos que hay.

$y \rightarrow$ medida de las aristas

$x \rightarrow$ número de cubitos

$$\begin{cases} x - 71 = y^3 \rightarrow x = y^3 + 71 \\ x + 200 = (y + 1)^3 \end{cases}$$

sustitución: $(y^3 + 71) + 200 = (y + 1)^3$

resolver la potencia del binomio $(y + 1)^3$; $y^3 + 71 + 200 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$

agrupar los números que se puedan: $y^3 + 71 + 200 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \rightarrow 3y^2 + 3y - 270 = 0$

resolver ecuación de segundo grado: $y_1 = 9$, $y_2 = -10$. solución $y = 9$ (porque -10 es negativo y estamos hablando de medidas)

sustituir y en una de las dos ecuaciones originales: $x = y^3 + 71 \rightarrow x = 9^3 + 71 \rightarrow x = 800$

soluciones: aristas 9cm y 800 cubitos.

22. Las tres cifras de un número suman 24. Si a ese número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, se obtienen 198; la cifra de las decenas es la media aritmética entre las otras dos. Halla el número.

$x \rightarrow$ cifra de las centenas

$y \rightarrow$ cifra de las decenas

$z \rightarrow$ cifra de las unidades

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ (x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z) - (z \cdot 10^2 + y \cdot 10 + x) = 198 \\ y = \frac{z+x}{2} \end{cases}$$

Agrupamos ecuación 2: $(x \cdot 10^2 - x) + (y \cdot 10 - y \cdot 10) + (z - z \cdot 10^2) = 198 \rightarrow 99x - 99z = 198 \rightarrow x - z = 2 \rightarrow E2': x - z = 2$

$E1 + E3 = E3': x + y + z = 24$

$-x + 2y - z = 0$

$$3y = 24 \rightarrow y = \frac{24}{3} = 8 \rightarrow E3': y = 8$$

Sustitución: $x + y + z = 24 \rightarrow (z + 2) + 8 + z = 24 \rightarrow 2z = 14 \rightarrow z = \frac{14}{2} = 7$

'x' lo hemos sustituido en la E2'

'y' lo hemos sustituido en la E3'

averiguar 'x' sustituyendo las incógnitas que ya sabemos: $x + y + z = 24 \rightarrow x + 8 + 7 = 24 \rightarrow x = 9$

solución: el número es 987

23. Queremos averiguar las edades de una familia formada por los padres y los dos hijos. Si sumamos sus edades de tres en tres, obtenemos 100, 73, 74 y 98 años, respectivamente. ¿Cuál es la edad de cada uno de ellos?

a → edad padre/madre

b → edad madre/padre

c → edad hijo

d → edad otro hijo

$$\begin{cases} a + b + c = 100 \\ a + b + d = 98 \\ a + c + d = 74 \\ b + c + d = 73 \end{cases}$$

$$-E1 + E2 = E'2 \rightarrow -a - b - c = -100$$

$$\begin{array}{r} a + b + d = 98 \\ -c + d = -2 \end{array}$$

$$-E1 + E3 = E'3 \rightarrow -a - b - c = -100$$

$$\begin{array}{r} a + c + d = 74 \\ -b + d = -26 \end{array}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 100 \\ -c + d = -2 \\ -b + d = -26 \\ b + c + d = 73 \end{cases}$$

$$E'3 + E4 = E'4 \rightarrow -b + d = -26$$

$$\begin{array}{r} b + c + d = 73 \\ +c + 2d = 47 \end{array}$$

$$E'2 + E'4 = E''4 \rightarrow -c + d = -2$$

$$\begin{array}{r} +c + 2d = 47 \\ +3d = 45 \rightarrow d = \frac{45}{3} = 15 \end{array}$$

$$E'3 \rightarrow -b + d = -26 \rightarrow -b = -d - 26 \rightarrow b = 15 + 26 = 41$$

$$E'2 \rightarrow -c + d = -2 \rightarrow -c = -d - 2 \rightarrow c = 15 + 2 = 17$$

$$E1 \rightarrow a + b + c = 100 \rightarrow a = -41 - 17 + 100 = 42$$

SOLUCIÓN: la edad de los padres son 41 y 42. Y la de los hijos son 17 y 15.

24. Resuelve:

a) $\frac{x}{3} - 9 < 2 \rightarrow \text{m.c.m} = 3 \rightarrow x - 27 < 6 \rightarrow x < 33$

b) $\frac{5x}{7} - 7 \leq -5x \rightarrow \text{m.c.m} = 7 \rightarrow 5x - 49 \leq -35x \rightarrow 5x + 35x \leq 49 \rightarrow 40x \leq 49 \rightarrow x \leq \frac{49}{40}$

c) $4(2x - 3) > 1 - 7x \rightarrow 8x - 12 > 1 - 7x \rightarrow 8x + 7x > 1 + 12 \rightarrow 15x > 13 \rightarrow x > \frac{13}{15}$

d) $\frac{3(x+4)}{5} < 2x \rightarrow \text{m.c.m} = 5 \rightarrow 3(x+4) < 10x \rightarrow 3x + 12 < 10x \rightarrow 3x - 10x < -12 \rightarrow x > \frac{12}{7}$

e) $\frac{2x-4}{3} + 1 > \frac{9x+6}{6} \rightarrow \text{m.c.m} = 6 \rightarrow 4x - 8 + 6 > 9x + 6 \rightarrow 4x - 9x > 6 - 6 + 8 \rightarrow x < -\frac{8}{5}$

f) $\frac{7x}{2} - 1 < x - \frac{3x+5}{4} \rightarrow \text{m.c.m} = 4 \rightarrow 14x - 4 < 4x - 3x - 5 \rightarrow 14x - 4x + 3x < -5 + 4 \rightarrow x < -\frac{1}{13}$

25 - Calcula los valores de x para que sea posible calcular las siguientes raíces:

a) $\sqrt{x-3} \rightarrow x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3$

Solución $\rightarrow x \geq 3$

b) $\sqrt{-x+3} \rightarrow -x+3 \geq 0 \rightarrow -x \geq -3 \rightarrow x \leq -\frac{3}{-1} \rightarrow x \leq 3$

Solución $\rightarrow x \leq 3$

c) $\sqrt{15-3x} \rightarrow 15-3x \geq 0 \rightarrow x \leq \frac{15}{3} \rightarrow x \leq 5$

Solución $\rightarrow x \leq 5$

d) $\sqrt{-6x-24} \rightarrow -6x-24 \geq 0 \rightarrow -6x \geq 24 \rightarrow x \leq -\frac{24}{6} \rightarrow x \leq -4$

Solución $\rightarrow x \leq -4$

26 - Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado

Las zonas coloreadas en la interpretación gráfica hacen referencia a la zona cuyos valores son solución de la inecuación.

a) $2x^2 - 8 < 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 2$; $x = -2$



$x = 10 \rightarrow 2 \cdot (10)^2 - 8 < 0 \rightarrow 192 < 0$ (no es solución)

$x = -10 \rightarrow 2 \cdot (-10)^2 - 8 < 0 \rightarrow 192 < 0$ (no es solución)

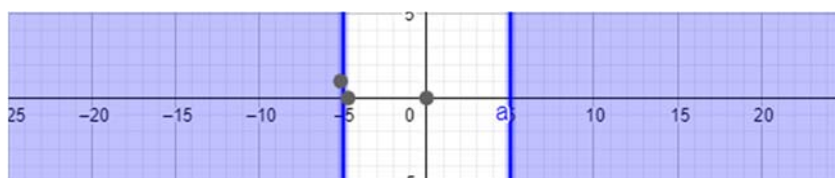
$x = 0 \rightarrow 2 \cdot (0)^2 - 8 < 0 \rightarrow -8 < 0$ (es solución)

Solución $\rightarrow (-2, 2)$

b) $-x^2 + 25 \leq 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = -5$; $x = 5$



$x = -10 \rightarrow -(-10)^2 + 25 \leq 0 \rightarrow -100 + 25 \leq 0 \rightarrow -75 \leq 0$ (es solución)

$x = 10 \rightarrow -(10)^2 + 25 \leq 0 \rightarrow -100 + 25 \leq 0 \rightarrow -75 \leq 0$ (es solución)

$x = 0 \rightarrow -(0)^2 + 25 \leq 0 \rightarrow -25 \leq 0$ (no es solución)

Solución $\rightarrow (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$

c) $-x^2 + 49 \geq 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 7$; $x = -7$



$$x = 10 \rightarrow -(10)^2 + 49 \geq 0 \rightarrow -100 + 49 \geq 0 \rightarrow -51 \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

$$x = -10 \rightarrow -(-10)^2 + 49 \geq 0 \rightarrow -100 + 49 \geq 0 \rightarrow -51 \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

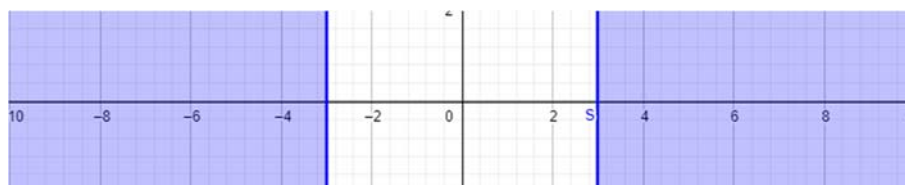
$$x = -10 \rightarrow -(0)^2 + 49 \geq 0 \rightarrow 0 + 49 \geq 0 \rightarrow 49 \geq 0 \text{ (es solución)}$$

Solución $\rightarrow [-7, 7]$

d) $5x^2 - 45 \geq 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = -3$; $x = 3$



$$x = 10 \rightarrow 5 \cdot (10)^2 - 45 \geq 0 \rightarrow 455 \geq 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = -10 \rightarrow 5 \cdot (-10)^2 - 45 \geq 0 \rightarrow 455 \geq 0 \text{ (es solución)}$$

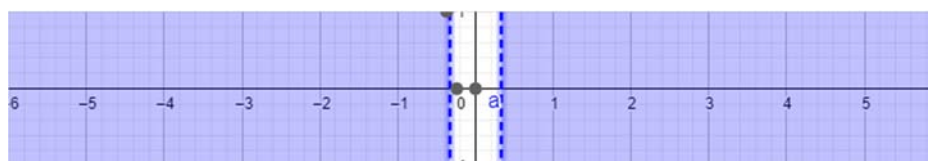
$$x = 0 \rightarrow 5 \cdot (0)^2 - 45 \geq 0 \rightarrow -45 \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

Solución $\rightarrow (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

e) $9x^2 - 1 > 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = \frac{1}{3}$; $x = -\frac{1}{3}$



$$x = 1 \rightarrow 9 \cdot (1)^2 - 1 > 0 \rightarrow 8 > 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = -1 \rightarrow 9 \cdot (-1)^2 - 1 > 0 \rightarrow 8 > 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = 0 \rightarrow 9 \cdot (0)^2 - 1 > 0 \rightarrow -1 > 0 \text{ (no es solución)}$$

Solución $\rightarrow (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$

f) $16x^2 - 9 < 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = \frac{3}{4}$; $x = -\frac{3}{4}$



$$x = 0 \rightarrow 16 \cdot (0)^2 - 9 < 0 \rightarrow -9 < 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = -1 \rightarrow 16 \cdot (-1)^2 - 9 < 0 \rightarrow 7 < 0 \text{ (no es solución)}$$

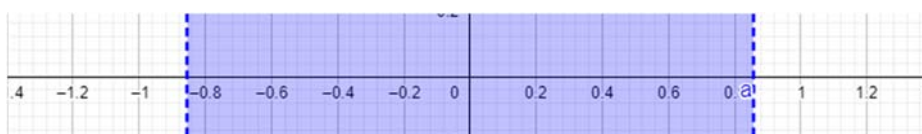
$$x = 1 \rightarrow 16 \cdot (1)^2 - 9 < 0 \rightarrow 7 < 0 \text{ (no es solución)}$$

$$\text{Solución} \rightarrow \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

g) $49x^2 - 36 < 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = -\frac{6}{7}$ $x = \frac{6}{7}$



$$x = 1 \rightarrow 49 \cdot (1)^2 - 36 < 0 \rightarrow 13 < 0 \text{ (no es solución)}$$

$$x = -1 \rightarrow 49 \cdot (-1)^2 - 36 < 0 \rightarrow 13 < 0 \text{ (no es solución)}$$

$$x = 0 \rightarrow 49 \cdot (0)^2 - 36 < 0 \rightarrow 31 < 0 \text{ (es solución)}$$

$$\text{Solución} \rightarrow \left(-\frac{6}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

h) $121x^2 + 100 \leq 0$

Al ser suma de positivos nunca puede ser negativa ni cero.

27. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

Se realiza el mismo procedimiento que el ejercicio anterior

a) $-2x^2 + 50x \leq 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 0$ $x = 25$



$$x = 1 \rightarrow -2 \cdot (1)^2 + 50 \cdot (1) \leq 0 \rightarrow -2 + 50 \leq 0 \rightarrow 48 \leq 0 \text{ (no es solución)}$$

$$x = -1 \rightarrow -2 \cdot (-1)^2 + 50 \cdot (-1) \leq 0 \rightarrow -2 - 50 \leq 0 \rightarrow -52 \leq 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = 30 \rightarrow -2 \cdot (30)^2 + 50 \cdot (30) \leq 0 \rightarrow -1800 + 1500 \leq 0 \rightarrow -300 \leq 0 \text{ (es solución)}$$

$$\text{Solución} \rightarrow (-\infty, 0] \cup [25, \infty)$$

b) $7x^2 + 3x \geq 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 0$ $x = -\frac{3}{7}$



$$x = -1 \rightarrow 7 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) \geq 0 \rightarrow 7 - 3 \geq 0 \rightarrow 4 \geq 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = 1 \rightarrow 7 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (1) \geq 0 \rightarrow 7 + 3 \geq 0 \rightarrow 10 \geq 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = -0.25 \rightarrow 7 \cdot (-0.25)^2 + 3 \cdot (-0.25) \geq 0 \rightarrow \frac{7}{16} - \frac{3}{4} \geq 0 \rightarrow -\frac{5}{16} \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

$$\text{Solución} \rightarrow \left(-\infty, -\frac{3}{7}\right] \cup [0, \infty)$$

c) $2x^2 < 8x \rightarrow 2x^2 - 8x < 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 0$ $x = 4$



$$x = 1 \rightarrow 2 \cdot (1)^2 - 8 \cdot 1 < 0 \rightarrow 2 - 8 < 0 \rightarrow -6 < 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = -1 \rightarrow 2 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) < 0 \rightarrow 2 + 8 < 0 \rightarrow 10 < 0 \text{ (no es solución)}$$

$$x = 5 \rightarrow 2 \cdot (5)^2 - 8 \cdot (5) < 0 \rightarrow 50 - 40 < 0 \rightarrow 10 < 0 \text{ (no es solución)}$$

$$\text{Solución} \rightarrow (0, 4)$$

d) $-2x^2 - 24x \geq 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 0$ $x = -12$



$$x = -100 \rightarrow -2 \cdot (-100)^2 - 24 \cdot (-100) \geq 0 \rightarrow -22400 \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

$$x = -1 \rightarrow -2 \cdot (-1)^2 - 24 \cdot (-1) \geq 0 \rightarrow 22 \geq 0 \text{ (es solución)}$$

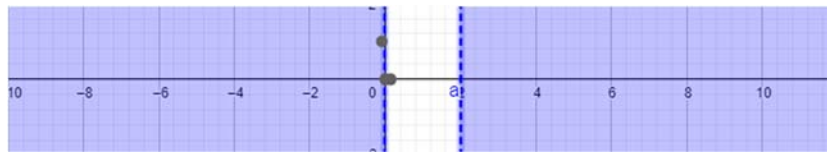
$$x = 1 \rightarrow -2 \cdot (1)^2 - 24 \cdot (1) \geq 0 \rightarrow -26 \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

$$\text{Solución} \rightarrow [-12, 0]$$

e) $-7x^2 + 14x < 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 0$ $x = 2$



$$x = -1 \rightarrow -7 \cdot (-1)^2 + 14 \cdot (-1) < 0 \rightarrow -7 - 14 < 0 \rightarrow -21 < 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = 3 \rightarrow -7 \cdot (3)^2 + 14 \cdot (3) < 0 \rightarrow -63 + 42 < 0 \rightarrow -21 < 0 \text{ (es solución)}$$

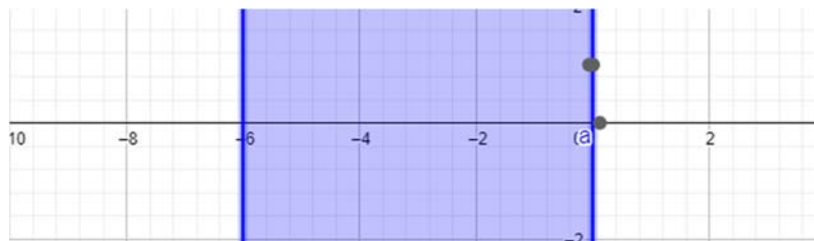
$$x = 0.5 \rightarrow -7 \cdot (0.5)^2 + 14 \cdot (0.5) < 0 \rightarrow -\frac{7}{4} + 7 < 0 \rightarrow \frac{21}{4} < 0 \text{ (no es solución)}$$

Solución: $\rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

f) $-5x^2 - 30x \geq 0$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Raíces: $x = 0$ $x = -6$



$$x = 1 \rightarrow -5 \cdot (1)^2 - 30 \cdot (1) \geq 0 \rightarrow -35 \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

$$x = -1 \rightarrow -5 \cdot (-1)^2 - 30 \cdot (-1) \geq 0 \rightarrow 25 \geq 0 \text{ (es solución)}$$

$$x = -10 \rightarrow -5 \cdot (-10)^2 - 30 \cdot (-10) \geq 0 \rightarrow -200 \geq 0 \text{ (no es solución)}$$

Solución $\rightarrow [-6, 0]$

28. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

Al estar todos los coeficientes multiplicados por una variable elevada a 2, podemos llegar a una conclusión, da igual si el valor de x es positivo o negativo, pues, al estar elevado a 2, aunque el número de la base de la potencia sea negativo, el resultado de la potencia será positivo

$$x^2 = \text{positivo}$$

Por lo tanto, el signo final de la operación será el mismo que el del término a

$$ax^2 = \text{positivo}$$

$$-ax^2 = \text{negativo}$$

Existe una excepción a este razonamiento, el cual sería si $x = 0$, pues cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0

$$a0^2 = 0$$

$$-a0^2 = 0$$

Por lo que siguiendo este razonamiento el ejercicio se puede realizar a partir de razonamientos lógicos

- a) $5x^2 \leq 0$ ¿Por qué número tengo que multiplicar a 5 para que sea igual que o menor que 0?, la única solución posible a esa cuestión es $x = 0$
- b) $7x^2 > 0 \rightarrow$ Aplicando el razonamiento explicado cualquier número multiplicado por una potencia con exponente 2, el resultado será positivo, menos multiplicándolo por 0, entonces podemos llegar a la conclusión de que la solución es $\mathbb{R} - [0]$

- c) $-2x^2 < 0 \rightarrow$ Sabiendo que $-ax^2 = \text{negativo}$, podemos llegar a la conclusión de que

La solución es $\mathbb{R} - [0]$

- d) $6x^2 \geq 0 \rightarrow$ Sabiendo que $ax^2 = \text{positivo}$ y que $a0^2 = 0$, podemos llegar a la conclusión de que la solución es $\mathbb{R}$

29. Calcula los valores de x para que sea posible obtener las siguientes raíces:

Para despejar x, tenemos que resolver la expresión que hay en el radicando, y estudiar cuando es mayor que 0.

a) $\sqrt{2x^2 + x + 3}$

Solución: todos los valores que toma el radicando son positivos por lo que da igual el valor que le demos a x, pues cualquier número es solución ($\mathbb{R}$)

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{2(0)^2 + 0 + 3} \rightarrow \sqrt{3} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = 100 \rightarrow \sqrt{2(100)^2 + 100 + 3} \rightarrow \sqrt{20103} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = -100 \rightarrow \sqrt{2(-100)^2 + 100 + 3} \rightarrow \sqrt{20103} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

b) $\sqrt{x^2 + x + 1}$

Solución: todos los valores que toma el radicando son positivos por lo que da igual el valor que le demos a x, pues cualquier número es solución ($\mathbb{R}$)

$$x = -100 \rightarrow \sqrt{(-100)^2 - 100 + 1} \rightarrow \sqrt{9901} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = 100 \rightarrow \sqrt{(100)^2 + 100 + 1} \rightarrow \sqrt{10101} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{(0)^2 + 0 + 1} \rightarrow \sqrt{1} = 1 \rightarrow \text{tiene solución real}$$

c) $\sqrt{-1 + 2x - x^2} \rightarrow \sqrt{-x^2 + 2x - 1} \rightarrow \sqrt{-1(x - 2x + 1)} \rightarrow \sqrt{-1(x - 1)^2}$

No tiene solución pues los valores del radicando siempre son negativos

d) $\sqrt{x^2 + 3x + 5}$

Solución: todos los valores del radicando son positivos por lo que da igual el valor que le demos a x, pues cualquier número es solución ($\mathbb{R}$)

$$x = -100 \rightarrow \sqrt{(-100)^2 - 1200 + 36} \rightarrow \sqrt{8836} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = 100 \rightarrow \sqrt{(100)^2 + 2 \cdot 100 + 5} \rightarrow \sqrt{10205} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{(0)^2 + 2 \cdot 0 + 5} \rightarrow \sqrt{5} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

e) $\sqrt{-x^2 + 12x + 36} \rightarrow -x^2 + 12x + 36$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Soluciones: $x = 6 + 6\sqrt{2}$ $x = 6 - 6\sqrt{2}$



$$x = 10 \rightarrow \sqrt{-(10)^2 + 120 + 36} \rightarrow \sqrt{56} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = -10 \rightarrow \sqrt{-(-10)^2 - 120 + 36} \rightarrow \sqrt{-184} \rightarrow \text{no tiene solución real}$$

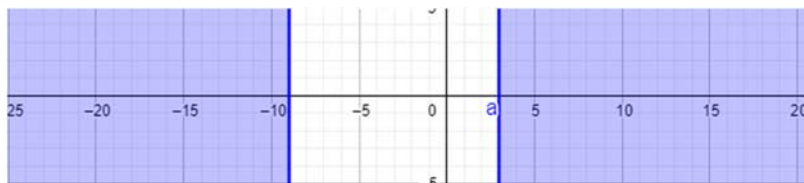
$$x = 100 \rightarrow \sqrt{-(100)^2 + 1200 + 36} \rightarrow \sqrt{-8764} \rightarrow \text{no tiene solución real}$$

Solución $\rightarrow x \in \mathbb{R} / 6 - 6\sqrt{2} \leq x \leq 6 + 6\sqrt{2}$

f) $\sqrt{x^2 + 6x - 27} \rightarrow x^2 + 6x - 27$

Aplicamos $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Soluciones: $x = -9$ $x = 3$



$$x = -10 \rightarrow \sqrt{(-10)^2 - 60 - 27} \rightarrow \sqrt{133} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = -10 \rightarrow \sqrt{(-10)^2 - 60 - 27} \rightarrow \sqrt{13} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = 0 \rightarrow \sqrt{(0)^2 + 0 - 27} \rightarrow \sqrt{-27} \rightarrow \text{no tiene solución real}$$

Solución $\rightarrow x \in \mathbb{R} / -9 \leq x \leq 3$

g) $\sqrt{1 - 4x^2} \rightarrow \sqrt{-4x^2 + 1} \rightarrow \sqrt{-1(4x^2 - 1)} \rightarrow \sqrt{-1(2x - 1)(2x + 1)}$

Soluciones: $x = \frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{2}$



$$x = 0 \rightarrow \sqrt{-1(0 - 1)(0 + 1)} \rightarrow \sqrt{1} \rightarrow \text{tiene solución real}$$

$$x = -1 \rightarrow \sqrt{-1(2 \cdot (-1) - 1)(2(-1) + 1)} \rightarrow \sqrt{-1(-2 - 1)(-2 + 1)} \rightarrow$$

$$\sqrt{-1(-3)(-1)} \rightarrow \sqrt{-3} \rightarrow \text{no tiene solución real}$$

$$x = 1 \rightarrow \sqrt{-1(2-1)(2+1)} \rightarrow \sqrt{-1(1)(3)} \rightarrow \sqrt{-3} \rightarrow \text{no tiene solución real}$$

$$\text{Solución: } x \in \mathbb{R} / -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2} + 5xy^3 - \frac{6}{z}$ en $x=2, y=-1, z=-1$ es:

- a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

$$\frac{3 \cdot 2 - 7}{2 - 3(-1)^2} + 5 \cdot 2 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{-1} = \frac{-1}{-1} - 10 + 6 = -3$$

Con lo cual el valor numérico de la expresión sería -3.

C) -3

2. Al dividir el polinomio $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 1$ entre $q(x) = x^2 + x + 1$ el polinomio resto resultante:

- a) Debe ser de grado 2 b) puede ser de grado 2
c) debe ser de grado menor que 2 d) ninguna de las opciones precedentes

El resto debería ser de grado menor que 2 ya que el divisor $q(x)$ es de grado dos y el grado del resto ha de ser de un grado menor que el del divisor.

C) debe ser de grado menor que 2

3. Todo polinomio con coeficientes enteros de grado tres:

- a) tiene tres raíces reales b) Tiene más de tres raíces reales
c) tiene tres raíces complejas d) tiene alguna raíz real

La correcta sería la D ya que podría tener alguna raíz real pero no todas, al igual que no podría tener todas las raíces complejas ni más de tres raíces porque el polinomio es de grado 3.

d) tiene alguna raíz real

4. ¿Es posible que un polinomio, con coeficientes enteros, de grado cuatro tenga exactamente tres raíces reales, ya sean diferentes o con alguna múltiple?

No es posible porque el polinomio al ser de grado 4 si tiene exactamente 3 raíces reales la otra debe ser compleja y esto no es posible pues las raíces complejas siempre son pares.

5. Tiene como solución $x=2$ la inecuación siguiente:

- a) $x < 2$ b) $x > 2$ c) $x \leq 2$ d) $x + 3 < 5$

La solución sería la c ya que su símbolo es menor igual $\leq$ e indica que x es igual a 2.

c) $x \leq 2$

6. La ecuación $x^2 \leq 4$ tiene de soluciones:

Primero hay que averiguar para que valores x^2 es igual que 4

$$x^2 = 4 \quad x = \sqrt{4}; \quad x = 2, \quad x = -2$$

Obtenemos los intervalos $(-\infty, -2)$ $(-2, 2)$ $(2, \infty)$

Tomamos valores pertenecientes a los intervalos y sustituimos en la inecuación

Para $x = -10$ $(-10)^2 \leq 4$ NO

Para $x = 0$ $0^2 \leq 4$ SI

Para $x = 10$ $10^2 \leq 4$ NO

La respuesta correcta es la

b) $x \in [-2, 2]$

7. La solución de la inecuación $|-x + 7| \leq 8$ es:

Para resolver una inecuación con valor absoluto tenemos que aplicar la fórmula $-a \leq x \leq a$

$$\begin{aligned} -8 \leq -x + 7 \leq 8 & \quad ; \quad -8 - 7 \leq -x \leq 8 - 7 \\ -15 \leq -x \leq 1 & \quad ; \quad 15 \geq x \geq -1 \quad ; \quad -1 \leq x \leq 15 \end{aligned}$$

Y obtenemos que el resultado es la **a) $[-1, 15]$**

8. Las soluciones posibles de $\sqrt{5x - 9}$ son:

Para resolver una inecuación tendremos que saber que el resultado de la raíz no puede ser menor que 0, por que no existen raíces de números negativos en el plano real., debemos calcular con que números esta ecuación es mayor o igual que 0.

$$5x - 9 \geq 0 \quad ; \quad 5x \geq 9 \quad ; \quad x \geq \frac{9}{5}$$

La respuesta correcta es la **d) $x \geq \frac{9}{5}$**

9. La solución de la inecuación $\frac{2x-3}{x-2} < 1$

Para resolver esta inecuación hay que mover todos los términos al mismo lado, y dar por hecho que $2 \neq x$ porque no se puede dividir entre cero.

$$\frac{2x-3}{x-2} - 1 < 0 \quad ; \quad \frac{2x-3-(x-2)}{x-2} < 0 \quad ; \quad \frac{x-1}{x-2} < 0$$

Resolvemos $x - 1 = 0$; $x = 1$; y $x - 2 = 0$; $x = 2$

Obtenemos los intervalos $(-\infty, 1)$ $(1, 2)$ $(2, \infty)$

Tomamos valores pertenecientes a los intervalos y sustituimos en la inecuación

Para $x = -10$ $\frac{-10-1}{-10-2} < 0$ NO

Para $x = 1,5$ $\frac{1,5-1}{1,5-2} < 0$ SI

Para $x = 10$ $\frac{10-1}{10-2} < 0$ NO

La solución correcta es la **a) $(1, 2)$**

10. Justifica la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes frases:

a) La regla de Ruffini sirve para dividir dos polinomios cualesquiera.

Falso, la regla de Ruffini se usa para dividir un polinomio cualquiera entre otro con la forma $ax+b$

b) La regla de Ruffini permite dictaminar si un número es raíz o no de un polinomio.

Verdadero, al dividir un polinomio entre otro por Ruffini podemos saber si el polinomio es raíz del polinomio.

c) La regla de Ruffini solo es válida para polinomios con coeficientes enteros.

Falso, la regla de Ruffini solo sirve para polinomios reales, no solo polinomios con coeficientes enteros.

d) La regla de Ruffini es un algoritmo que nos proporciona todas las raíces de un polinomio.

Falso, solo nos proporciona las raíces enteras.

Matemáticas I
1º Bachillerato
Capítulo 3: Sucesiones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

1. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 7, 10, 13, 16, ...

b) 2, 5, 10, 17, ...

c) 1, 3, 5, 7, ...

d) 0, 3, 8, 15, 24, ...

a) 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, ...;

b) 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, ...;

c) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, ...;

d) 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, ...

2. Escribe el término que ocupa el lugar 100 de cada una de las sucesiones anteriores.

a) múltiplos de 3 y empieza en 7: $a_n = 3n + 4$; $a_{100} = 3 \cdot 100 + 4 = 304$

b) cuadrados más 1: $a_n = n^2 + 1$; $a_{100} = 100^2 + 1 = 10\,001$

c) impares: $a_n = 2n - 1$; $a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 199$

d) múltiplos de 3 empezando en 0: $a_n = 3n - 3$; $a_{100} = 3 \cdot 100 - 3 = 297$

3. Sabemos que un cuerpo con densidad suficiente que cae libremente sobre la Tierra tiene una velocidad que aumenta 9.8 m/s. Si en el primer segundo su velocidad es de 10 m/s, escribe en tu cuaderno la velocidad en los segundos indicados en la tabla. ¿Observas alguna regla que te permita conocer la velocidad al cabo de 30 segundos? Representa gráficamente esta sucesión.

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10				

Debemos sumar 9,8 cada segundo:

Tiempo en segundos	1	2	3	30	n
Velocidad en m/s	10	19.8	29.6	304	$10+n \cdot 9.8$

Para calcular la velocidad a los 30 segundos sustituimos en $a_n = 10 + 9,8n$; $a_{30} = 10 + 9,8 \cdot 30 = 304$ m/s

4. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 3n^2 + 3$

b) $b_n = \frac{2n-1}{n+3}$

c) $c_1 = 1$, $c_n = 2c_{n-1} + 4$

d) $d_1 = 2$, $d_2 = 5$, $d_n = 3d_{n-1} + 2d_{n-2}$

a) $a_1 = 3 \cdot 1^2 + 3 = 6$; $a_2 = 3 \cdot 2^2 + 3 = 15$; $a_3 = 3 \cdot 3^2 + 3 = 30$; $a_4 = 3 \cdot 4^2 + 3 = 51$

b) $b_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1 + 3} = \frac{1}{4}$; $b_2 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 + 3} = \frac{3}{5}$; $b_3 = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3 + 3} = \frac{5}{6}$; $b_4 = \frac{2 \cdot 4 - 1}{4 + 3} = \frac{7}{7} = 1$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = 2c_1 + 4 = 2 \cdot 1 + 4 = 6$; $c_3 = 2c_2 + 4 = 2 \cdot 6 + 4 = 16$; $c_4 = 2c_3 + 4 = 2 \cdot 16 + 4 = 36$

d) $d_1 = 2$; $d_2 = 5$; $d_3 = 3d_2 + 2d_1 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$; $d_4 = 3d_3 + 2d_2 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 5 = 67$

5. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) $\{-2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, \dots\}$ b) $\{0, 3, 8, 15, 24, 35, \dots\}$ c) $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ d) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{10}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \dots\right\}$

a) Siempre 2 cambiando de signo, impares negativos: $a_n = (-1)^n \cdot 2$

b) $a_1 = 0$, $a_n = a_{n-1} + (2n - 1)$

c) Múltiplos de 2: $a_n = 2n$

d) Numerador impares, denominador cuadrados más 1: $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$

6. En una sucesión el primer término es 5 y los demás se obtienen sumando 3 al término anterior. Hallar los 10 primeros términos de la sucesión.

$a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 3$, luego tenemos: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32

7. Escribe el término general de las sucesiones:

a) 6, 18, 54, 162, ... b) 3, 2, 5/3, 6/4, 7/5, ... c) 7, 0.7, 0.07, 0.007, ... d) 2, 5, 8, 11, 15, ...

a) Potencias de 3, siendo 6 el primer término: $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$

b) Numerador, consecutivos empezando en 3, denominador, ídem desde 1: $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

c) Dividir entre 10 cada término nuevo, comenzando por 7: $a_n = 7 \cdot 10^{n-1}$

d) Múltiplos de 3 menos 1: $a_n = 3n - 1$

8. Un satélite artificial se puso en órbita a las 10 horas y 30 minutos. Tarda en dar una vuelta completa a su órbita 90 minutos.

a) Completa en tu cuaderno la tabla adjunta.

b) Escribe una expresión general que te permita conocer la hora en que ha completado la vuelta n -ésima.

c) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la hora de la órbita anterior.

d) Busca una expresión que te permita conocer la hora en función de la primera.

e) ¿Cuántas vueltas completas habrá dado 30 días más tarde a las 9 horas?

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado						

a) Como empieza a las 10h 30min y tarda 90 minutos = 1h 30 min en una órbita, habrá que sumar esta cantidad por cada órbita: 10 y 30 + 1 y 30 = 12:00

Nº de órbitas	1	2	3	4	5	6
Hora en la que la ha completado	12	13.30	15	16.30	18	19.30

b) $a_n = 10:30 + 1:30 \cdot n$

c) $a_n = a_{n-1} + 1:30$

d) $a_n = 10:30 + 1:30 \cdot n$

e) 30 días tarde son $24 \cdot 30 = 720$ horas, a las 10:30, como nos pide a las 9 horas, es 1:30 horas menos, es decir dentro 718:30 horas, dividimos entre 1:30 = 90 minutos que tarda en una vuelta, $\frac{718 \cdot 60 + 30}{90} = 479$ vueltas.

9. Escribe los 4 primeros términos de las sucesiones siguientes e indica si son progresiones aritméticas, progresiones geométricas o de otro tipo.

a) $a_n = 3 \cdot 3^n$

b) $a_n = 5n + 7$

c) $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$

d) $a_n = \frac{(-1)^n + 2n}{3n}$

a) $a_1 = 3 \cdot 3^1 = 9$, $a_2 = 3 \cdot 3^2 = 27$, $a_3 = 3 \cdot 3^3 = 81$, $a_4 = 3 \cdot 3^4 = 243$ (geométrica)

b) $a_1 = 5 \cdot 1 + 7 = 12$, $a_2 = 5 \cdot 2 + 7 = 17$, $a_3 = 5 \cdot 3 + 7 = 22$, $a_4 = 5 \cdot 4 + 7 = 27$ (aritmética)

c) $a_1 = 3 \cdot 2^1 - 1 = 5$, $a_2 = 3 \cdot 2^2 - 1 = 11$, $a_3 = 3 \cdot 2^3 - 1 = 23$, $a_4 = 3 \cdot 2^4 - 1 = 47$ (otro tipo)

$$d) a_1 = \frac{(-1)^1 + 2 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{(-1)^2 + 2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}, \quad a_3 = \frac{(-1)^3 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9}, \quad a_4 = \frac{(-1)^4 + 2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{9}{12} \text{ (otro tipo)}$$

10. En las sucesiones del problema anterior que sean progresiones aritméticas, calcula la suma de los 6 primeros términos.

La b) es progresión aritmética, $S_n = n \cdot (a_1 + a_n) / 2$; $a_n = 5n + 7$ $a_6 = 5 \cdot 6 + 7 = 37$
 $S_6 = 6 \cdot (a_1 + a_6) / 2 = 6 \cdot (12 + 37) / 2 = 176$

11. En las que sean progresiones geométricas, calcula el producto de los 6 primeros términos y la suma de los 6 primeros términos.

La a) es progresión geométrica, $S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$, $S_6 = a_1 \cdot \frac{r^6 - 1}{r - 1} = 9 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 3276$

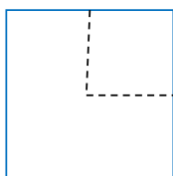
$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}; \quad a_n = 3 \cdot 3^n, \quad a_6 = 3 \cdot 3^6 = 3^7; \quad P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(9 \cdot 3^7)^6} = 3^{27}$$

12. Calcula la suma de los infinitos términos de la sucesión: 6, 3, 3/2, 3/4, ...

Es una progresión geométrica de término general $a_n = a_{n-1} \cdot r$ siendo $r = 1/2$.

Como $|r| < 1$, $S_\infty \approx \frac{a_1}{1-r} = \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12$

13. Tenemos un cuadrado de área 1 en la mano, y lo cortamos por las líneas de puntos como indica la figura. El trozo mayor lo dejamos sobre la mesa y nos quedamos en la mano con el cuadrado, al que volvemos a cortar de la misma forma. Y así sucesivamente. ¿Qué área tienen los sucesivos cuadrados que tengo en la mano? ¿Crece o disminuye? Escribe el término general de la sucesión de áreas que tenemos en la mano. ¿Y los recortes que quedan sobre la mesa? ¿Crece el área sobre la mesa o disminuye? Vamos sumando áreas, calcula la suma de estas áreas si hubiéramos hecho infinitos cortes.



En la mano vamos teniendo 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}^2$, ..., Disminuye.

Sobre la mesa va quedando, $0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}^2 + \dots$, Aumenta.

El área en la mano tiende a 0

El área en la mesa tiende a 1

14. El error de Euler: Euler fue un gran matemático, pero se encontró con el siguiente problema. Quizás tú seas capaz de ayudarlo a resolverlo. Hizo la siguiente suma, donde r es un número positivo:

$$\dots + \frac{1}{r^n} + \dots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$$

Primero sumó la primera parte, aplicando la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r}$: $\dots + \frac{1}{r^n} + \dots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r-1}{r}} = \frac{1}{r-1}$

Luego la segunda: $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r}$

Y al sumar ambas obtuvo: $\frac{1}{r-1} + \frac{1}{1-r} = \frac{1}{r-1} + \frac{-1}{r-1} = 0$, que evidentemente está mal pues la suma de infinitos números positivos no puede ser 0. ¿Dónde está el error?

La expresión $1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots = \frac{1}{1-r}$ es cierta sólo si r, en valor absoluto es menor que 1.

En la suma: $\dots + \frac{1}{r^n} + \dots + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots$ en una parte es menor que 1, pero en la otra, no, pues si $|r| < 1$, $\left|\frac{1}{r}\right| > 1$ y viceversa si $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$, $|r| > 1$.

15. Calcula la fracción generatriz del número $4,5\overline{61}$

$$4,5\overline{61} = 4,5 + 0,061 + 0,00061 + \dots = \frac{45}{10} + \frac{61}{10 \cdot 100} + \frac{61}{10 \cdot 100 \cdot 100} + \dots$$

$$\frac{61}{10 \cdot 100} + \frac{61}{10 \cdot 100 \cdot 100} + \dots \text{ es una progresión geométrica de razón } \frac{1}{100} < 1 \quad S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{61}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{61}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{61}{990}$$

$$\frac{45}{10} + \frac{61}{10 \cdot 100} + \frac{61}{10 \cdot 100 \cdot 100} + \dots = \frac{45}{10} + \frac{61}{990} = \frac{45 \cdot 99 + 61}{990} = \frac{4516}{990}$$

16. Un empresario acude a una entidad financiera para informarse sobre cómo invertir los 6000 € de beneficios que ha tenido en un mes. Le plantean dos opciones: Mantener ese capital durante 5 años al 3,5 % anual o recibir el 5 % del capital durante los dos primeros años y el 3 % los tres años restantes. ¿Qué opción le interesa más?

Calculamos el capital final en cada caso:

1ª opción: $C_t = C_0 \cdot (1+r)^t = 6000 \cdot (1+0,035)^5 = 7126,12$; $7126,12 - 6000 = 1126,12 \text{ €}$ de interés

2ª opción: 2 primeros años, $C_t = 6000 \cdot (1+0,05)^2 = 6615$; 3 años siguientes $C_t = 6000 \cdot (1+0,03)^3 = 6556,36$

Los intereses en la 2ª opción son $6615 - 6000 = 615$ y $6556,36 - 6000 = 556,36$ que en total suponen: $615 + 556,36 = 1171,32 \text{ €}$

Por tanto, la segunda opción le interesa más.

2. LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{n^2+2}{3n^2}$ b) $a_n = \frac{2n+2}{3(n+1)}$ c) $a_n = \frac{7}{5^n}$ d) $a_n = 4 + \frac{n+2}{n-3}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{3(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{5^n} = \frac{7}{\infty} = 0$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{n+2}{n-3}\right) = 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-3}\right) = 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 4 + 1 = 5$

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

a) $a_n = \frac{5n^3+2n}{n-6}$ b) $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$ c) $a_n = 2 + \frac{7}{5^n}$ d) $a_n = 6 + \frac{5n+2}{2n-3}$

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3+2n}{n-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5n^2 = \infty$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{1+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{7}{5^n}\right) = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{5^n} = 2 + \frac{7}{\infty} = 2 + 0 = 2$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{5n+2}{2n-3}\right) = 6 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+2}{2n-3} = 6 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{2n} = 6 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2} = 6 + \frac{5}{2} = \frac{17}{2}$$

19. Escribe una sucesión cuyo límite sea 2, y otra de límite 0.

$$a) a_n = \frac{2n}{n-6} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$b) a_n = \frac{n^2+2}{3n^4} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{3n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes, si es que lo tienen:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2-6} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{1+2n+7n^3} \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{7}{n}\right) \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{n-3} - 3\right)$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{1+2n+7n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{7n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{7n^2} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 - \frac{7}{n}\right) = 6 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} = 6 - \frac{7}{\infty} = 6 - 0 = 6$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{n-3} - 3\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{n-3} - 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} - 3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} - 3 = 2 - 3 = -1$$

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$a) a_n = \left(\frac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n} \quad b) a_n = \left(\frac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2} \quad c) a_n = \left(1 + \frac{7}{n+3}\right)^{n^2} \quad d) a_n = \left(\frac{2n+2}{2n-3}\right)^{\frac{n^3+1}{n}}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n} = 1^\infty ; \quad \frac{5n^3+2n}{5n^3-6} = 1 + \frac{2n+6}{5n^3-6}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3+2n}{5n^3-6}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+6}{5n^3-6}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n^3-6}{2n+6}}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5n^3-6}{2n+6}}\right)^{\frac{5n^3-6}{2n+6}}\right]^{\frac{2n+6}{5n^3-6} \cdot 2n} = \\ &= [e]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+6}{5n^3-6} \cdot 2n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+12n}{5n^3-6}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{5n^3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{5n}} = e^{\frac{4}{\infty}} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2} = 1^\infty ; \quad \frac{3+2n}{5+2n} = 1 + \frac{-2}{5+2n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+2n}{5+2n}\right)^{3n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{5+2n}\right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5+2n}{-2}}\right)^{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5+2n}{-2}}\right)^{\frac{5+2n}{-2}}\right]^{\frac{-2}{5+2n} \cdot (3n+2)} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5+2n}{-2}} \right)^{\frac{5+2n}{-2}} \right]^{\frac{-6n+4}{5+2n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n+4}{5+2n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n}{2n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6}{2}} = e^{-3}$$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n+3} \right)^{n^2} = 1^\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n+3} \right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+3}{7}} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+3}{7}} \right)^{\frac{n+3}{7}} \right]^{\frac{7}{n+3} n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+3}{7}} \right)^{\frac{n+3}{7}} \right]^{\frac{7n^2}{n+3}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{n+3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} 7n} = e^\infty = \infty \end{aligned}$$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n-3} \right)^{\frac{n^3+1}{n}} = 1^\infty$; $\frac{2n+2}{2n-3} = 1 + \frac{5}{2n-3}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n-3} \right)^{\frac{n^3+1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{2n-3} \right)^{\frac{n^3+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n-3}{5}} \right)^{\frac{n^3+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n-3}{5}} \right)^{\frac{2n-3}{5}} \right]^{\frac{5}{2n-3} \cdot \frac{n^3+1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n-3}{5}} \right)^{\frac{2n-3}{5}} \right]^{\frac{5n^3+5}{2n^2-3n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3+5}{2n^2-3n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3}{2n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{2}} = e^\infty = \infty \end{aligned}$$

22. Calcula 1/e con tres cifras decimales exactas.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 + \frac{-1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \dots \text{tomando hasta } n = 7, \text{ obtenemos}$$

$$\frac{1}{e} = 1 + \frac{-1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \frac{(-1)^5}{5!} + \frac{(-1)^6}{6!} + \frac{(-1)^7}{7!} = 0,36785 \dots \text{ que ya tiene 3 cifras decimales exactas}$$

23. Calcula con $\sqrt{e}$ tres cifras decimales exactas.

$$\sqrt{e} = 1.6487$$

24. Calcula el logaritmo neperiano de 1/e y de $\sqrt{e}$.

$$\ln(1/e) = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1, \quad \ln(\sqrt{e}) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

25. Resuelve la ecuación $\ln(x + 2) + \ln(3x) = 1$

$$\ln(x + 2) + \ln(3x) = 1 \quad \ln(x + 2) + \ln(3x) \rightarrow \ln(x + 2) \cdot (3x) = \ln e \rightarrow (x + 2) \cdot (3x) = e \rightarrow$$
$$\rightarrow 3x^2 + 6x = e \rightarrow 3x^2 + 6x - e = 0 \text{ resolvemos ecuación de segundo grado, } x = e, x = e/3 - 2$$

26. Resuelve la ecuación: $8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2$

$$8^{x^2} \cdot 2^{3x} = 4^2 \rightarrow (2^3)^{x^2} \cdot 2^{3x} = (2^2)^2 \rightarrow 2^{3x^2} \cdot 2^{3x} = 2^4 \rightarrow 2^{3x^2+3x} = 2^4 \text{ igualando exponentes}$$
$$3x^2 + 3x = 4 \rightarrow 3x^2 + 3x - 4 = 0, \text{ resolviendo la ecuación de segundo grado, } x_1 = -1,74 ; x_2 = -4,25$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. SUCESIONES

1. Calcula el término que ocupa el lugar 1000 de una progresión aritmética cuyo primer término es igual a 2 y la diferencia es 3.

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) \quad , \quad a_{1000} = 2 + 3(1000 - 1) = 2999$$

2. El término octavo de una progresión aritmética es 5 y la diferencia $1/2$. Halla el primer término y el término 100.

$$a_n = a_k + d \cdot (n - k) \quad a_n = a_8 + \frac{1}{2} \cdot (n - 8) = 5 + \frac{1}{2} n - 4 = \frac{1}{2} n + 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 3/2 \quad ; \quad a_{100} = \frac{1}{2} \cdot 100 + 1 = 51$$

3. Calcula los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que sus medidas, expresadas en metros, están en progresión aritmética de diferencia 2.

Sumamos de 2 en 2, $a, a + 2, a + 2 + 2$ Tenemos: $a, a + 2, a + 4$.

$$(a+4)^2 = (a+2)^2 + a^2 \quad ; \quad a^2 + 8a + 16 = a^2 + 4a + 4 + a^2 \quad ; \quad a^2 - 4a - 12 = 0 \text{ resolviendo}$$

$a = -2$, $a = 6$, los lados serían: 6, 8, 10. (-2 no es válido)

4. Calcula la suma de los múltiplos de 42 comprendidos entre 1000 y 2000.

$$a_n = 42 \cdot n, 1000 = 42n, n = 1000/42 = 23,81$$

luego el primer término que se pasa de 1000 es el 24 que vale 1008

$$2000 = 42n \quad , \quad n = 2000/42 = 47,62 \text{ el último término inferior a 2000 es el 47, que vale 1974.}$$

Debemos sumar desde el término 24 hasta el 47

Considerando el término 24 como a_1 , como de 47 a 24 hay 24 términos,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}; \quad S_{24} = \frac{(a_1 + a_{24}) \cdot 24}{2} = \frac{(1008 + 1974) \cdot 24}{2} = 35784$$

5. La suma de 16 números en progresión aritmética es 548 y el término 16 es 60.5. Halla el primer término.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}; \quad S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2}; \quad 548 = \frac{(a_1 + 60,5) \cdot 16}{2}; \quad a_1 = \frac{548}{8} - 60,5 = 8 \quad a_1 = 8$$

6. El producto de 4 términos en progresión geométrica es 5184 y el primer término es 3. Escribe el resto de términos.

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}; \quad P_4 = \sqrt{(a_1 \cdot a_4)^4}; \quad 5184 = \sqrt{(3 \cdot a_4)^4} = (3 \cdot a_4)^2; \quad 3 \cdot a_4 = \sqrt{5184} = 72$$

$$a_4 = 24$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow 24 = 3 \cdot r^3 \rightarrow r^3 = 8 \rightarrow r = 2$$

Multiplicando por 2 sucesivamente obtenemos los términos: 3, 6, 12, 24.

7. Por el alquiler de una casa se acuerda pagar 700 euros al mes durante el primer año, y cada año se aumentará el alquiler en 30 euros mensuales. ¿Cuánto se pagará mensualmente al cabo de 10 años?

Se trata de una progresión aritmética de primer término 700 y diferencia 30.

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) \quad , \quad a_{10} = 700 + 30(10 - 1) = 700 + 270 = 970$$

Al cabo de 10 años se pagará 970€ mensuales.

8. El quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \rightarrow 48 = 3 \cdot r^4 \rightarrow r^4 = 16 \rightarrow r = 2$$

3, 6, 12, 24, 48; $r = 2$.

9. Halla x para que $x - 1$, $x + 1$, $2(x + 1)$ estén en progresión geométrica.

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2(x+1)}{x+1} \rightarrow (x+1)^2 = 2(x+1)(x-1) \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 - 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 3, x = -1 \quad x = -1 \text{ no es válido}$$

$$x = 3; \quad x - 1 = 2; \quad x + 1 = 4; \quad 2(x+1) = 8; \quad r = 2.$$

10. A una cuerda de 350 m de longitud se le dan dos cortes, de modo que uno de los trozos extremos tiene una longitud de 50 m. Sabiendo que las longitudes de los trozos están en progresión geométrica, determina la longitud de cada trozo.

$$350 = 50 + 50r + 50r^2 \rightarrow 7 = 1 + r + r^2 \rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \rightarrow r = 2, r = -3$$

$r = -3$, no es válido, los trozos son: 50, 100, 200.

11. Halla la fracción generatriz del número decimal 0.12121212..., como suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada

$$0,1212121212 \dots = \frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \dots \quad \text{Suma de infinitos términos de una progresión}$$

$$\text{geométrica de primer término } \frac{12}{100} \text{ y razón } \frac{1}{100} \quad S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

12. Se tiene una cuba de vino que contiene 512 litros. El 1 de diciembre se vació la mitad del contenido; al día siguiente se volvió a vaciar la mitad de lo que quedaba, y así sucesivamente todos los días. ¿Qué cantidad de vino se sacó el día 15 de diciembre?

Progresión geométrica de primer término 256, pues es lo que se saca el primer día y razón $\frac{1}{2}$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_{15} = a_1 \cdot r^{15-1} = 256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 0.015625$$

Se sacaron el día 15: 0.015625 litros

13. Dado un cuadrado de 1 m de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; obtenemos un nuevo cuadrado, en el que volvemos a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las infinitas áreas así obtenidas.

El área de un cuadrado es su lado al cuadrado, el segundo cuadrado tiene de lado $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

luego las áreas son: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

14. Triángulo de Sierpinski: Vamos a construir un fractal. Se parte de un triángulo equilátero. Se unen los puntos medios de los lados y se forman cuatro triángulos. Se elimina el triángulo central. En cada uno de los otros tres triángulos se repite el proceso. Y así sucesivamente. A la figura formada por iteración infinita se la denomina Triángulo de Sierpinski, y es un fractal.

a) Imagina que el primer triángulo tiene un área A. Cuando aplicamos la primera iteración, el área es $(\frac{3}{4})A$. ¿Y en la segunda? Escribe la sucesión de las áreas. ¿Es creciente o decreciente?



b) Imagina ahora que la longitud de cada lado del triángulo inicial es L. Escribe la sucesión de las longitudes. ¿Es creciente o decreciente?

a) A, $(\frac{3}{4})A$, $(\frac{9}{16})A$, ... , $(\frac{3}{4})^{n-1}A$, esta es la sucesión de las áreas, que es decreciente y tiende a 0.

b) Se entiende que la pregunta es la longitud total de los lados del triángulo, es decir, si el lado del primer triángulo es L, la longitud total es 3L, los lados de los triángulos de la primera iteración miden $L/2$, como tiene 3 lados, la longitud total es $3 \cdot L/2$ y como hay 3 triángulos la longitud total será $3 \cdot 3 \cdot L/2 = 9/2 \cdot L = 4,5L$, sucesivamente en la siguiente iteración la longitud total es $3^3/2^2 L = 6,75L$, así tenemos: 3L, 4,5L, 6,75L, ... la sucesión es creciente, tiende a infinito.

2. LÍMITE DE SUCESIONES

15. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{2n^3+2n}{2n^3-6}$

b) $a_n = \frac{5n^2-4}{n^2-6n}$

c) $a_n = \frac{5n^{10}+2n^2}{3n^{10}+8n}$

d) $a_n = \frac{n-3}{n+7}$

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+2n}{2n^3-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-4}{n^2-6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{1} = 5$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^{10}+2n^2}{3n^{10}+8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^{10}}{3n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

16. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{2n^2+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \frac{5n-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \frac{5n^7+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \frac{-3}{n+7}$

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n}{2n^3-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-4}{n^2-6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 0$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7+2n^2}{3n^{10}+8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7}{3n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3n^3} = 0$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{n} = 0$

17. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{2n^5+2n}{2n^3-6}$ b) $a_n = \frac{5n^7-4}{n^2-6n}$ c) $a_n = \frac{5n^{12}+2n^2}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \frac{n^2-3}{n+7}$

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5+2n}{2n^3-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1} = \infty$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7-4}{n^2-6n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^5}{1} = \infty$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^{12}+2n^2}{3n^{10}+8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^{12}}{3n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{3} = \infty$
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3}{n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1} = \infty$

18. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

a) $a_n = \frac{\sqrt{2n^5+2n}}{2n^3-6}$ b) $a_n = \frac{5n^7-4}{\sqrt{n^2-6n}}$ c) $a_n = \frac{\sqrt{n^{12}+2n^2}}{3n^{10}+8n}$ d) $a_n = \frac{\sqrt{n^2-3}}{n+7}$

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^5+2n}}{2n^3-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^5}}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \cdot n^{\frac{5}{2}}}{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{2n^{\frac{1}{2}}} = 0$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7-4}{\sqrt{n^2-6n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^7}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^6}{1} = \infty$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}+2n^2}}{3n^{10}+8n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^{12}}}{3n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6}{3n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n^4} = 0$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2-3}}{n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

19. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$a) a_n = \left(1 + \frac{3}{2n^3-6}\right)^{2n+1} \quad b) a_n = \left(1 - \frac{4}{5n^7-6n}\right)^{n-2} \quad c) a_n = \left(1 + \frac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$$

Son límites del tipo 1^∞ , los resolvemos buscando el número e.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n^3-6}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n^3-6}{3}}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n^3-6}{3}}\right)^{\frac{2n^3-6}{3}}\right]^{\frac{3}{2n^3-6} \cdot (2n+1)} =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(2n+1)}{2n^3-6}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n^3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}} = e^0 = 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{5n^7-6n}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n^7-6n}{-4}}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5n^7-6n}{-4}}\right)^{\frac{5n^7-6n}{-4}}\right]^{\frac{-4}{5n^7-6n} \cdot (n-2)} =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4(n-2)}{5n^7-6n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{5n^7}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{5n^6}} = e^0 = 1$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n+8}{2}}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n+8}{2}}\right)^{\frac{3n+8}{2}}\right]^{\frac{2}{3n+8} \cdot \frac{n^2+3}{n-1}} =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n+8} \cdot \frac{n^2+3}{n-1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+6}{3n^2+5n-8}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

20. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$a) a_n = \left(\frac{2n^3+2n}{2n^3-6}\right)^{2n+1} \quad b) a_n = \left(\frac{5n^7-4}{5n^7-6n}\right)^{n-2} \quad c) a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+8}\right)^{\frac{n^2+3}{n-1}}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3+2n}{2n^3-6}\right)^{2n+1}, \text{ efectuamos la división, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+6}{2n^3-6}\right)^{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n^3-6}{2n+6}}\right)^{2n+1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n^3-6}{2n+6}}\right)^{\frac{2n^3-6}{2n+6}}\right]^{\frac{2n+6}{2n^3-6} \cdot (2n+1)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+8n+6}{2n^3-6}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{2n^3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^7-4}{5n^7-6n}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6n-4}{5n^7-6n}\right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n^7-6n}{6n-4}}\right)^{n-2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5n^7-6n}{6n-4}} \right)^{\frac{5n^7-6n}{6n-4} \cdot \frac{6n-4}{5n^7-6n} (n-2)} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2-16n-8}{5n^7-6n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{5n^7}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{5n^5}} = e^0 = 1$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+8} \right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3n+8} \right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n+8}{-6}} \right)^{\frac{n^2+3}{n-1}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3n+8}{-6}} \right)^{\frac{3n+8}{-6} \cdot \frac{n^2+3}{n-1}} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2-18}{3n^2+5n-8}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2}{3n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6}{3}} = e^{-2}$$

21. Calcula el límite de las sucesiones siguientes:

$$a) a_n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2-6} \right)^{2n-3}$$

$$b) a_n = \left(\frac{n^2-4}{n^2-6n} \right)^{n-2}$$

$$c) a_n = \left(\frac{n+2}{n-5} \right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}}$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2-6} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+6}{n^2-6} \right)^{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-6}{2n+6}} \right)^{2n-3} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-6}{2n+6}} \right)^{\frac{n^2-6}{2n+6} \cdot \frac{2n+6}{n^2-6} (2n-3)} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+6n-18}{n^2-6}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} 4} = e^4$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-4}{n^2-6n} \right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6n-4}{n^2-6n} \right)^{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-6n}{6n-4}} \right)^{n-2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-6n}{6n-4}} \right)^{\frac{n^2-6n}{6n-4} \cdot \frac{6n-4}{n^2-6n} (n-2)} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2-16n+8}{n^2-6n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2}{n^2}} = e^6$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-5} \right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n-5} \right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-5}{7}} \right)^{\frac{2n^2+3}{3n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n-5}{7}} \right)^{\frac{n-5}{7} \cdot \frac{7}{n-5} \cdot \frac{2n^2+3}{3n-1}} \right] =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n^2+21}{3n^2-16n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14n^2}{3n^2}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{14}{3}} = e^{\frac{14}{3}}$$

3. EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

22. La población de peces de una piscifactoría sigue un modelo de crecimiento exponencial y ha pasado de 100 ejemplares a 1500 en 60 días. ¿Qué población tendrá en 100 días?

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}; \quad a_{60} = a_1 \cdot r^{60-1}; \quad 1500 = 100 \cdot r^{59} \quad r = \sqrt[59]{\frac{1500}{100}} = 1,047$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad S_{100} = 100 \cdot \frac{1,047^{100} - 1}{1,047 - 1} = 208.042 \text{ peces habrá en 100 días.}$$

23. Ingresamos en un banco 20.000 euros al 3 % de interés compuesto anual. ¿En cuánto tiempo habremos duplicado nuestro dinero?

$$C_t = C_0 \cdot (1 + r)^t \rightarrow 2 \cdot 20.000 = 20.000 \cdot (1 + 0,03)^t \rightarrow 2 = 1,03^t \rightarrow \ln 2 = t \cdot \ln 1,03 \rightarrow t = \ln 2 / \ln 1,03 = 23,44$$

Tardará 23,44 años en duplicar el capital.

24. Vanesa ha comprado un coche por 17.000 euros. Se estima que el precio se devalúa un 10 % cada año. ¿A cuánto lo podrá vender al cabo de 5 años? Si tiene un accidente en que el coche queda destrozado cuando tiene 7 años, ¿cuánto le pagará la compañía de seguros?

Como se devalúa un 10% su valor es el 90% del que tenía

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} ; a_5 = 17.000 \cdot 0,9^4 = 11.153€ \text{ lo puede vender a los 5 años}$$

$$a_7 = 17.000 \cdot 0,9^6 = 9.034€ \text{ le pagará el seguro.}$$

25. La escala de Richter relaciona la intensidad de un terremoto, x, con su energía y (en ergios): $\log y = 11,4 + 1,5 x$. Calcula la energía de un terremoto: a) de una intensidad 5 en dicha escala, y b) de una intensidad 7.

$$a) \log y = 11,4 + 1,5 \cdot 5 = 18,9 \quad y = 10^{18,9} = 7,94 \cdot 10^{18} \text{ ergios}$$

$$b) \log y = 11,4 + 1,5 \cdot 7 = 21,9 \quad y = 10^{21,9} = 7,94 \cdot 10^{21} \text{ ergios}$$

26. Juan ha visto cucarachas en su casa. Mira de que tipo es y se entera que se triplican cada mes siguiendo un modelo exponencial. Estima que en este momento podría tener 20. Si no hiciera nada, ¿cuántas tendría al cabo de 5 meses?

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} ; a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} ; a_5 = 20 \cdot 3^4 = 1620, \text{ tendría 1620 cucarachas.}$$

27. En la fórmula del término n-ésimo de una progresión geométrica, despeja n, aplicando logaritmos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} ; \log a_n = \log (a_1 \cdot r^{n-1}) ; \log a_n = \log a_1 + (n - 1) \cdot \log r ; \log a_n = \log a_1 + n \cdot \log r - \log r$$

$$n \cdot \log r = \log a_n - \log a_1 + \log r ; n = \frac{\log a_n - \log a_1 + \log r}{\log r} = \frac{\log(\frac{a_n \cdot r}{a_1})}{\log r} ; n = \frac{\log(\frac{a_n \cdot r}{a_1})}{\log r}$$

28. Nieves tiene un gran frasco de perfume muy concentrado de un litro. Saca con una pipeta 10 cm³ que sustituye con agua. Vuelve a sacar de la mezcla con una pipeta 10 cm³ que vuelve a sustituir con agua. Así hasta conseguir una mezcla con el 75 % de la inicial. ¿Cuántas operaciones ha debido hacer?

1ª extracción queda 90% de perfume (ha extraído 10% de perfume)

2ª extracción (extrae 10% del 90% que es el 9% de perfume) queda 81% de perfume.

3ª extracción 10% del 81% es el 8,1%, queda 72,9% de perfume.

Con el proceso no se alcanza el 75%.

29. Resuelve, tomando logaritmos, la ecuación exponencial: $(0,99)^n = 0,75$.

$$(0,99)^n = 0,75 ; \log(0,99)^n = \log 0,75 ; n \cdot \log 0,99 = \log 0,75 ; n = \log 0,75 / \log 0,99 = 28,6536.$$

30. Utiliza la calculadora para estimar el valor de 2^{63} . Estima también $2^{64} - 1$.

$$2^{63} = 9,2233 \cdot 10^{18} ; 2^{64} - 1 = 1,8446 \cdot 10^{19}$$

31. Resuelve las ecuaciones:

a) $3^{2x-4} = 81$ b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[7]{5}$ c) ${}^{x-1}\sqrt{8} = 2$ d) $3^{\frac{1}{5}x} = 27$

a) $3^{2x-4} = 81 \rightarrow 3^{2x-4} = 3^4 \rightarrow 2x - 4 = 4 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4$

b) $\sqrt{5^x} = \sqrt[7]{5} \rightarrow (5^x)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{7}} \rightarrow 5^{\frac{x}{2}} = 5^{\frac{1}{7}} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{7} \rightarrow 7x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{7}$

c) ${}^{x-1}\sqrt{8} = 2 \rightarrow 8^{\frac{1}{x-1}} = 2 \rightarrow (2^3)^{\frac{1}{x-1}} = 2^1 \rightarrow 2^{\frac{3}{x-1}} = 2^1 \rightarrow \frac{3}{x-1} = 1 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$

d) $3^{\frac{1}{5}x} = 27 \rightarrow 3^{\frac{x}{5}} = 3^3 \rightarrow \frac{x}{5} = 3 \rightarrow x = 15$

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es la razón de la siguiente progresión geométrica: $a_n = 7 \cdot 4^{n-1}$?

- a) 7 b) 4 c) -1 d) No es una progresión geométrica

7, 7·4, 7·4·4, 7·4·4·4, ... Respuesta: **b)**

2. En la sucesión de múltiplos de 11, el 121 ocupa el lugar:

- a) 1 b) 2 c) 11 d) 121

$a_n = 11 \cdot n$ $121 = 11 \cdot n$ $n = 11$ Respuesta: **c)**

3. La suma de los diez primeros términos de la progresión aritmética: 5, 10, 15, 20, ... es:

- a) 220 b) 275 c) 55 d) 250

$$a_n = 5 \cdot n \quad , \quad a_{10} = 5 \cdot 10 = 50 \quad ; \quad S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \rightarrow S_{10} = 10 \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} \rightarrow S_{10} = 10 \cdot \frac{5+50}{2} = 275$$

Respuesta: **b)**

4. La sucesión 1, 1/5, 1/25, 1/125, ...:

- a) Es una progresión geométrica de razón 5
b) Es una progresión aritmética de diferencia 5
c) Es una progresión geométrica de razón 1/5
d) Es una progresión aritmética de diferencia 1/5.

Respuesta: **c)**

5. La solución de la ecuación $5^{\frac{1}{5}x} = 625$ es:

- a) 40 b) 8 c) 10 d) 20

$$5^{\frac{1}{5}x} = 625 \rightarrow 5^{\frac{x}{5}} = 5^4 \rightarrow \frac{x}{5} = 4 \rightarrow x = 20$$

Respuesta: **d)**

6. La progresión aritmética cuyo primer término es 3 y su diferencia 5, tiene como término general:

- a) $a_n = 5n$ b) $a_n = 5n + 2$ c) $a_n = 5n - 1$ d) $a_n = 5n - 2$

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) \quad ; \quad a_n = 3 + 5 \cdot (n - 1) = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$$

Respuesta: **d)**

7. Pepa está preparando el examen de selectividad. Para no dejar toda la materia para el final ha decidido estudiar cada día el doble de páginas que el día anterior. Si el primer día estudió dos páginas, ¿cuántas habrá estudiado al cabo de 5 días?

- a) 62 b) 32 c) 1024 d) 128

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad ; \quad a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \quad ; \quad a_5 = 2 \cdot 2^4 = 32$$

Respuesta: b)

8. A Luis le han tocado 6000 € en la lotería y decide depositarlos en el banco a un tipo de interés compuesto del 4 %. ¿Cuánto dinero tendrá al cabo de 5 años?

- a) 6240 € b) 6104 € c) 7832,04 € d) 7299,92 €

$$C_f = C_i \cdot (1 + r)^t ; \quad C_f = 6000 \cdot (1 + 0,04)^5 = 7299,92$$

Respuesta: d)

9. La sucesión $a_n = \frac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2}$ tiene como límite:

- a) 0 b) ∞ c) $-3/2$ d) 7

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 4n + 3}{n^2 - 6n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 7$$

Respuesta: d)

10. La sucesión $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$ tiene como límite:

- a) e^2 b) ∞ c) e^{-2} d) $-e$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-2}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{-2}}\right)^{\frac{n}{-2}}\right]^{-2} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} (-2)} = e^{-2} \end{aligned}$$

Respuesta: c)

Matemáticas I

1º Bachillerato

Capítulo 4: Trigonometría

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Alumnado 1º Bachillerato

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1) Expresa en radianes las siguientes medidas: 60° , 120° , 225° , 330° .

$$a) 60^\circ \rightarrow 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} rad$$

$$b) 120^\circ \rightarrow 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} rad$$

$$c) 225^\circ \rightarrow 225^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{5\pi}{4} rad$$

$$d) 330^\circ \rightarrow 330^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6} rad$$

2) Expresa en grados sexagesimales: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{10\pi}{6}$ radianes.

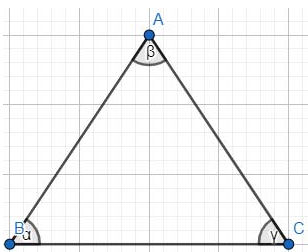
$$a) \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$$

$$b) \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

$$c) \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 270^\circ$$

$$d) \frac{10\pi}{6} \rightarrow \frac{10\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$$

3) ¿Cuánto suman en radianes los ángulos de un triángulo? ¿Cuánto mide un ángulo recto en radianes?



Se tiene en cuenta que $\pi + \beta + \gamma = 180^\circ$, ya que, si descompusiéramos el triángulo y pusiéramos todos los ángulos juntos, obtendríamos un ángulo llano de 180° .

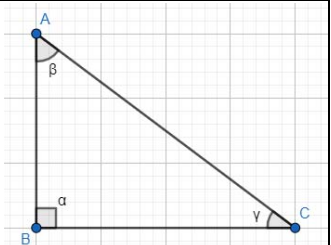
Como nos piden el ángulo en radianes, hay que convertir de grados a radianes, y teniendo en cuenta que 180° es igual a π radianes, se obtiene que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a π radianes.

$$\rightarrow 180^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \pi rad$$

Teniendo en cuenta lo anterior y sabiendo que un ángulo recto es la mitad de uno llano ($\alpha = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$), se demuestra que:

$$\rightarrow \alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \quad \rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = 90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{2}\pi rad$$



4) Para ver la utilidad de los radianes, supongamos un móvil que se mueve en una circunferencia de dos metros de radio con una velocidad de 4m/s. Calcula su velocidad en rad/s y en grados por segundo. ¿Cuántas vueltas da por minuto?

DATOS

$$V=4\text{m/s} \quad R=2\text{m} \quad \rightarrow \omega=?$$

$$V=\omega \cdot R \rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ rad/s} \quad ; \text{ en grados: } 2 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = \frac{360^\circ}{\pi} = 114,6^\circ/\text{s}$$

$$\text{Multiplicamos por 60: } 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 60\text{s} = 120 \text{ rad} \quad 114,6^\circ \cdot 60 = 6786^\circ$$

5) Un móvil ha recorrido 3 rad en una circunferencia de radio 2m. ¿Cuánto espacio hemos recorrido? ¿Y si la circunferencia tuviera radio de 0,5m?

DATOS

$$\rightarrow \theta = 3 \text{ rad} \quad R=2\text{m}/0,5\text{m} \quad x=?$$

$$x = \theta \cdot R = 3 \cdot 2 = 6\text{m}$$

$$x = \theta \cdot R = 3 \cdot 0,5 = 1,5\text{m}$$

6) Hemos recorrido 40 grados de una circunferencia de radio 2m. ¿Cuánto espacio hemos recorrido? ¿Y si tuviera radio 0,5m? ¿Es más fácil o más difícil que hacerlo con radianes?

DATOS

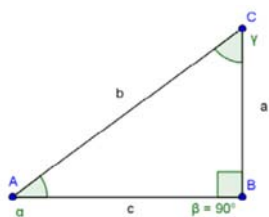
$$\rightarrow \theta = 40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ rad} \quad R=2\text{m}/0,5\text{m} \quad X=?$$

$$x = \theta \cdot R = \frac{2\pi}{9} \cdot 2 = \frac{4\pi}{9} \text{ m}$$

$$x = \theta \cdot R = \frac{2\pi}{9} \cdot 0,5 = \frac{\pi}{9} \text{ m}$$

Es más fácil hacerlo con radianes pues la fórmula para calcular la distancia hay que hacerla con radianes.

7. En la figura se verifica el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$. Utilizando dicho teorema, demuestra la primera relación fundamental.



$$\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{b} \quad b \cdot \text{sen}\alpha = a$$

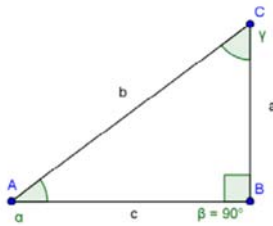
$$\text{cos}\alpha = \frac{c}{b} \quad b \cdot \text{cos}\alpha = c$$

$$\text{Sustituimos en el teorema de Pitágoras: } a^2 + c^2 = b^2$$

$$(b \cdot \text{sen}\alpha)^2 + (b \cdot \text{cos}\alpha)^2 = b^2 \rightarrow b^2 \text{sen}^2\alpha + b^2 \text{cos}^2\alpha = b^2 \rightarrow b^2 (\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha) = b^2$$

$$\text{dividiendo entre } b^2 \text{ ambos miembros: } \text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$$

8. Utilizando las definiciones de las razones trigonométricas, demuestra la segunda relación fundamental.



$$\tan \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{dividimos numerador y denominador entre } b:$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{c} = \frac{a/b}{c/b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

9. Utilizando la definición de las identidades, demuestra:

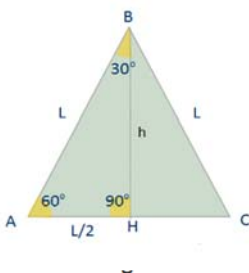
a) $1 + (\tan \alpha)^2 = (\sec \alpha)^2$

$$1 + (\tan \alpha)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

b) $1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$

$$1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

10. Comprueba las anteriores relaciones a partir de los ángulos de 30° y 60°



$$h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} = \frac{\sqrt{3} L}{2}$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3} L}{2} : L = \frac{\sqrt{3} L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{L}{2} : h = \frac{L}{2} : \frac{\sqrt{3} L}{2} = \frac{2L}{2\sqrt{3}L} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3} L}{2} : L = \frac{\sqrt{3} L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

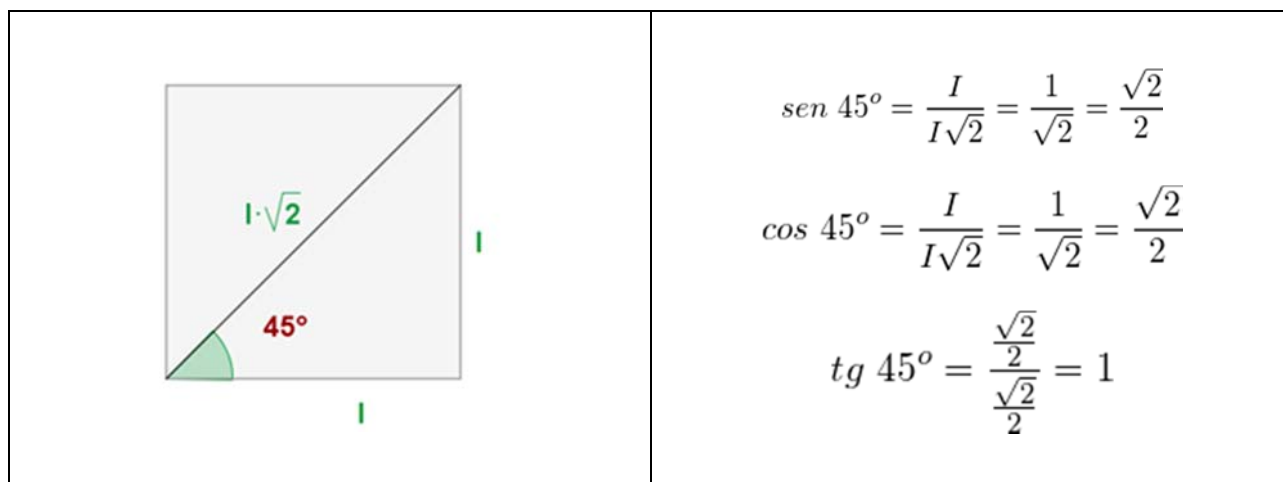
$$\cos 60^\circ = \frac{L}{2} : L = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = h : \frac{L}{2} = \frac{2h}{L} = \frac{2\sqrt{3}L}{2L} : L = \frac{2\sqrt{3}L}{2L} = \sqrt{3}$$

11. Explica, a partir de lo visto en este apartado, porqué el seno y coseno de 45° son iguales, y porqué la tangente vale una unidad.

La diagonal del cuadrado es igual a la hipotenusa de los triángulos formados, aplicando el teorema de Pitágoras.

$$d = \sqrt{I^2 + I^2} = \sqrt{2I^2} = I\sqrt{2}$$



12. Copia y sitúa en el cuadrante que corresponda y expresa en función de un ángulo agudo las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

ÁNGULO	SENO	COSENO	TAN	SEC	COSEC	COTAN	CUADRANTE
135	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	segundo
120	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}/3$	segundo
210	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{3}$	tercer
315	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1	cuarto
390	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$	primer
3000	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}/3$	primer
-150	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	-2	$\sqrt{3}$	primer

13. Utiliza la calculadora para encontrar todos los ángulos positivos menores que 360° cuyo seno es de 0,6.

$$\alpha = \arcsen(0,6) = 36,87^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 36,87^\circ = 143,13^\circ$$

14. Ídem todos los ángulos negativos menores en valor absoluto que 360° cuya tangente vale 4.
 $\arctan(4) = 76^\circ$

$$\beta = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 76^\circ = 284^\circ$$

15. Ídem todos los ángulos comprendidos entre 360° y 720° cuyo coseno vale 0,75.
 $\arccos(0,75) = 41^\circ + 360^\circ K$

$$\alpha = 401^\circ$$

$$\beta = 499^\circ$$

16. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30° , 45° , 60° y 90° las razones trigonométricas de 75° , 120° , 150° , 105° y 135° .

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2 \quad \operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ \quad \sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ \quad \operatorname{cotg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \operatorname{cosec} 150^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sec 150^\circ = -\sec 30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \operatorname{cotg} 150^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \cos 30^\circ \quad \operatorname{cosec} 120^\circ = \sec 30^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ \quad \sec 120^\circ = -\operatorname{cosec} 30^\circ$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{cotg} 30^\circ \quad \operatorname{cotg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 30^\circ$$

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 \quad \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ \text{ y } \cos 45^\circ$$

$$\cos 135^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ \text{ y } -\cos 45^\circ$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ \text{ y } -\operatorname{cotg} 45^\circ$$

$$\operatorname{cosec} 150^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ \text{ y } \sec 45^\circ$$

$$\sec 135^\circ = -\operatorname{cosec} 45^\circ \text{ y } -\sec 45^\circ$$

$$\operatorname{cotg} 135^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ \text{ y } -\operatorname{cotg} 45^\circ$$

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \operatorname{cosec} 75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \sec 75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \quad \operatorname{cotg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ$$

$$\cos 105^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = -\operatorname{cotg} 75^\circ$$

$$\operatorname{cosec} 75^\circ = \operatorname{cosec} 75^\circ$$

$$\sec 75^\circ = -\operatorname{cosec} 75^\circ$$

$$\operatorname{cotg} 75^\circ = -\operatorname{tg} 75^\circ$$

17. Comprueba que las razones trigonométricas de 90° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 30° y de 60° .

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} & \operatorname{cosec} 30^\circ = 2 & \operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ \quad \operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ \\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} & \cos 60^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ \quad \sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ \\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} & \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3} & \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{cotg} 30^\circ \end{array}$$

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 60^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\cos 90^\circ = \cos(30^\circ + 60^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} \text{ no existe} \quad \operatorname{cotg} 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

18. Calcula a partir de las razones trigonométricas de 30° , 45° , 60° y 90° las razones trigonométricas de 15° .

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})}{6} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{6} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{6} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2 - \sqrt{3})}{6} = (2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

19. Comprueba que las razones trigonométricas de 30° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90° y de 60° .

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 1 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

20. Demuestra las fórmulas de ángulos complementarios usando las fórmulas de la resta. Es decir, verifica que $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ y los demás usando estas fórmulas. Observa que esta demostración que acabas es más general que la que hicimos antes, porque ahora α no tiene por qué ser agudo.

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 90^\circ \cdot \operatorname{sen} \alpha = 1 \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos 90^\circ \cdot \cos \alpha + \operatorname{sen} 90^\circ \cdot \operatorname{sen} \alpha = 0 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha$$

21. Calcula las razones trigonométricas de 22.5° y 11.25° a partir de las razones trigonométricas de 45° .

$$\operatorname{sen} 25.5^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0.707}{2}} = \sqrt{0.146} = 0.38$$

$$\cos 25.5^\circ = \cos \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0.707}{2}} = \sqrt{0.853} = 0.92$$

$$\operatorname{tg} 25.5^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - 0.707}{1 + 0.707}} = \sqrt{0.171} = 0.41$$

$$\operatorname{sen} 11.25^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{22.5^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 22.5^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0.92}{2}} = \sqrt{0.04} = 0.2$$

$$\cos 11.25^\circ = \cos \left(\frac{22.5^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 22.5^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + 0.92}{2}} = \sqrt{0.96} = 0.97$$

$$\operatorname{tg} 11.25^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{22.5^\circ}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 22.5^\circ}{1 + \cos 22.5^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0.92}{1 + 0.92}} = \sqrt{0.04} = 0.2$$

22. Comprueba que las razones trigonométricas de 45° se pueden obtener a partir de las razones trigonométricas de 90°

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \cos \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + 0}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - 0}{1 + 0}} = \pm 1$$

23) Calcula $\cos(3x)$ en función únicamente de $\cos(x)$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = (\cos 3x + i \sin 3x)$$

Según la cuarta fila de la pirámide de Tartaglia: 1,3,3,1

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^3 &= (\cos x)^3 + 3(\cos x)^2(i \sin x) + 3(\cos x)(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x + 3\cos^2 x i \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) + i(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x) \end{aligned}$$

De donde, igualando,

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= (\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x) = (\cos^3 x - 3\cos x (1 - \cos^2 x)) = (\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x) = \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x \end{aligned}$$

24) Calcula $\sin(4x)$ en función únicamente de $\sin(x)$ y $\cos(4x)$ en función únicamente de $\cos(x)$

a) $\sin(4x)$ en función únicamente de $\sin(x)$

$$(\cos x + i \sin x)^4 = (\cos 4x + i \sin 4x)$$

Según la quinta fila de la pirámide de Tartaglia: 1,4,6,4,1

$$(\cos x + i \sin x)^4 = (\cos x)^4 + 4(\cos x)^3(i \sin x) + 6(\cos x)^2(i \sin x)^2 + 4(\cos x)(i \sin x)^3 + (i \sin x)^4 =$$

$$= \cos^4 x + 4\cos^3 x i \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4\cos x i \sin^3 x + \sin^4 x =$$

$$= (\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + i(4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x), \text{ igualando,}$$

$$\sin(4x) = (4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x) = (4\sqrt{1 - \sin^2 x}^3 \cdot \sin x - 4\sqrt{1 - \sin^2 x} \cdot \sin^3 x)$$

b) $\cos(4x)$ en función únicamente de $\cos(x)$

Realizamos el mismo procedimiento que en el apartado a)

$$\cos(4x) = (\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1 - \cos^2 x) + (1 - \cos^2 x)^2 =$$

$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x + 6\cos^4 x + 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

25. Calcula sin hacer uso de la calculadora

$$\sin(75^\circ) - \sin(15^\circ)$$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \sin \frac{(\alpha - \beta)}{2}$

$$\sin(75^\circ) - \sin(15^\circ) = 2 \cos \frac{(75^\circ + 15^\circ)}{2} \sin \frac{(75^\circ - 15^\circ)}{2} = 2 \cos \frac{(90^\circ)}{2} \sin \frac{(60^\circ)}{2} = 2 \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

26. Utiliza las transformaciones de sumas en productos para poner en función del seno y coseno del ángulo a

$$\text{a) } \sin(45^\circ + a) + \sin(45^\circ - a)$$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{(\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2}$

$$2 \sin \frac{(45^\circ + a + 45^\circ - a)}{2} \cos \frac{(45^\circ + a - (45^\circ - a))}{2} = 2 \sin \frac{(90^\circ)}{2} \cos \frac{(2a)}{2} = \sqrt{2} \cos a$$

b) $\cos(120^\circ + a) + \cos(60^\circ - a)$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos: $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{(\alpha+\beta)}{2} \cos \frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$$2 \cos \frac{(120^\circ + a + 60^\circ - a)}{2} \cos \frac{(120^\circ + a - (60^\circ - a))}{2} = 2 \cos \frac{(180^\circ)}{2} \cos \frac{(60^\circ + 2a)}{2} = 2 \cos(90^\circ) \cos(30^\circ + a) = 0$$

c) $\cos(270^\circ - a) - \cos(90^\circ - a)$

Para realizar el ejercicio, recurrimos a la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos: $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{(\alpha+\beta)}{2} \sin \frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$$-2 \sin \frac{(270^\circ - a + 90^\circ - a)}{2} \sin \frac{(270^\circ - a - (90^\circ - a))}{2} = -2 \sin \frac{(360^\circ - 2a)}{2} \sin \frac{(180^\circ)}{2} = -2 \sin(180^\circ - a) \sin 90^\circ = -2 \sin(180^\circ - a) = -2 \sin a$$

27. Simplifica las siguientes expresiones hasta obtener una única razón trigonométrica

a) $\frac{\sin(5a) + \sin(3a)}{\cos(5a) + \cos(3a)}$

Para resolverlo, debemos simplificar denominador y numerador, utilizando la transformación de sumas de razones trigonométricas en productos

$$\frac{\sin(5a) + \sin(3a)}{\cos(5a) + \cos(3a)} = \frac{2 \sin \frac{(5a+3a)}{2} \cos \frac{(5a-3a)}{2}}{2 \cos \frac{(5a+3a)}{2} \cos \frac{(5a-3a)}{2}} = \frac{2 \sin \frac{(8a)}{2} \cos \frac{(2a)}{2}}{2 \cos \frac{(8a)}{2} \cos \frac{(2a)}{2}} = \frac{2 \sin 4a \cos a}{2 \cos 4a \cos a} = \operatorname{tg} 4a$$

b) $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)}$

Para resolverlo, hacemos como en el apartado a)

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \frac{-2 \sin \frac{(x-y+x+y)}{2} \sin \frac{(x-y-(x+y))}{2}}{2 \sin \frac{(x+y+x-y)}{2} \cos \frac{(x+y-(x-y))}{2}} = \frac{-2 \sin \frac{(2x)}{2} \sin \frac{(-2y)}{2}}{2 \sin \frac{(2x)}{2} \cos \frac{(2y)}{2}} = \frac{-2 \sin x (-\sin y)}{2 \sin x \cos y} = \operatorname{tg} y$$

28. Simplifica las siguientes expresiones hasta obtener una única razón trigonométrica:

a) $\frac{\operatorname{sen}(5a) + \operatorname{sen}(3a)}{\cos(5a) + \cos(3a)}$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{(5a+3a)}{2} \cos \frac{(5a-3a)}{2}}{2 \cos \frac{(5a+3a)}{2} \cos \frac{(5a-3a)}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{(5a+3a)}{2}}{\cos \frac{(5a+3a)}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 4a}{\cos 4a} = \operatorname{tg}(4a)$$

b) $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)}$

$$= \frac{-2 \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)}{-2 \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \operatorname{tg} x$$

29. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas

a) $\cos(3x) = 0$

$$3x = 90^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3} = 30^\circ + 120^\circ k$$

$$3x = 270^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{270^\circ + 360^\circ k}{3} = 90^\circ + 120^\circ k$$

$$\begin{cases} 30^\circ + 360^\circ k \\ 150^\circ + 360^\circ k \\ 270^\circ + 360^\circ k \\ 90^\circ + 360^\circ k \\ 210^\circ + 360^\circ k \\ 330^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

b) $\operatorname{tg}(2x) = -1$

$$2x = 135^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{135^\circ + 360^\circ k}{2} = 67,5^\circ + 180^\circ k$$

$$2x = 315^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{315^\circ + 360^\circ k}{2} = 157,5^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \begin{cases} 67,5^\circ + 360^\circ k \\ 247,5^\circ + 360^\circ k \\ 157,5^\circ + 360^\circ k \\ 337,5^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

c) $\operatorname{sen}(4x) = -1$

$$4x = 270^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{270^\circ + 360^\circ k}{4} = 67,5^\circ + 90^\circ k \quad x = \begin{cases} 67,5^\circ + 360^\circ k \\ 157,5^\circ + 360^\circ k \\ 247,5^\circ + 360^\circ k \\ 337,5^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

30. Expresa en radianes las soluciones de la actividad resuelta ($\operatorname{sen}(2x) = 1/2$) y de la actividad propuesta anterior

$\operatorname{sen}(2x) = 1/2$	$x = \begin{cases} 15^\circ + 360^\circ k \\ 195^\circ + 360^\circ k \\ 75^\circ + 360^\circ k \\ 255^\circ + 360^\circ k \end{cases}$	$x = \begin{cases} \pi/12 + 2k\pi \\ 13\pi/12 + 2k\pi \\ 5\pi/12 + 2k\pi \\ 17\pi/12 + 2k\pi \end{cases}$
--------------------------------	--	---

31. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos(5x) - (\cos x) = 0$

$$\cos(5x) - (\cos x) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{5x+x}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5x-x}{2}\right) = -2 \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(2x) = 0 ; \operatorname{sen} 3x \cdot \operatorname{sen} 2x = 0$$

$$\operatorname{sen} 3x = 0 ; 3x = 180^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} = 60^\circ + 120^\circ k$$

$$\operatorname{sen} 2x = 0 ; 2x = 180^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{2} = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \begin{cases} 60^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \\ 90^\circ + 360^\circ k \\ 270^\circ + 360^\circ k \end{cases}$$

b) $\text{sen}(2x) - \text{sen}(4x) = 0$

$$\text{sen}(2x) - \text{sen}(4x) = 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{4x-2x}{2}\right) = 2\cos 3x \cdot \text{sen} x = 0$$

$$\cos 3x = 0 ; 3x = 0^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{0^\circ + 360^\circ k}{3} = 120^\circ k$$

$$3x = 180^\circ + 360^\circ k ; x = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{3} = 60^\circ + 120^\circ k$$

$$\text{sen} x = 0 ; x = 0^\circ + 360^\circ k ; x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \begin{cases} 120^\circ + 360^\circ k \\ 240^\circ + 360^\circ k \\ 60^\circ + 360^\circ k \\ 180^\circ + 360^\circ k \\ 300^\circ + 360^\circ k \\ 360^\circ k \end{cases}$$

32. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas:**a) $\text{sen}(x) + \cos(x) = 1$**

En la circunferencia goniométrica el sen y cos corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa 1, por tanto, su suma no puede ser 1 salvo $\text{sen} x = 0$ y $\cos x = 1$ y viceversa, por tanto,

$$x = 0^\circ + 360^\circ k ; x = 90^\circ + 360^\circ k$$

También, multiplicando toda la expresión por $\frac{\sqrt{2}}{2}$ obtenemos $\frac{\sqrt{2}}{2} \text{sen} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sustituyendo, $\cos 45^\circ \cdot \text{sen} x + \text{sen} 45^\circ \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ de donde, $\text{sen}(x+45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x+45^\circ = 45^\circ + 360^\circ k , x = 360^\circ k$$

$$x+45^\circ = 135^\circ + 360^\circ k , x = 90^\circ + 360^\circ k$$

b) $\text{sen}(2x) = 2 \cos(x)$

$$2 \text{sen} x \cdot \cos x = 2 \cos x ; \text{sen} x \cdot \cos x = \cos x ; \text{sen} x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (\text{sen} x - 1) = 0 ; \cos x = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen} x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 ; x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\text{sen} x - 1 = 0 ; \text{sen} x = 1 ; x = 90^\circ + 360^\circ k$$

c) $\text{sen}^2(x) - \cos^2(x) - \cos(2x) = 1$

$$\text{sen}^2(x) - \cos^2(x) - \cos(2x) = -\cos(2x) - \cos(2x) = 1 ; -2\cos(2x) = 1 ; \cos(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$2x = 120^\circ + 360^\circ k ; x = 60^\circ + 180^\circ k, \text{ de donde, } x = 360^\circ k \quad x = 240^\circ + 360^\circ k$$

$$2x = 240^\circ + 360^\circ k ; x = 120^\circ + 180^\circ k \text{ de donde, } x = 120^\circ + 360^\circ k \quad x = 300^\circ + 360^\circ k$$

33. Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

Restamos la 2ª menos la primera $\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y = -1$; $\cos 2y = -1$

$$2y = 180^\circ + 360^\circ k ; y = 90^\circ + 180^\circ k ; y = 90^\circ + 360^\circ k ; y = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$y = 90^\circ ; x + \operatorname{sen}^2 90^\circ = 2 ; x + 1 = 2 ; x = 1$$

$$y = 270^\circ ; x + \operatorname{sen}^2 270^\circ = 2 ; x + 1 = 2 ; x = 1$$

(1, $90^\circ + 360^\circ k$) y (1, $270^\circ + 360^\circ k$) también (1, $90^\circ + 180^\circ k$)

$$b) \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones, $\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$$\text{restando la 1ª menos 2ª, } \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

de donde, $\operatorname{sen}(x + y) = 1$; $x + y = 90^\circ$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \frac{1}{2} ; x - y = 30^\circ \text{ sumando, } 2x = 120^\circ ;$$

$$x = 60^\circ + 360^\circ k ; y = 30^\circ + 360^\circ k$$

34. Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$$

$$x = y + \pi \text{ sustituyendo } \operatorname{sen}(y + \pi) - \operatorname{sen} y = 0$$

$$\operatorname{sen} y \cos \pi + \cos y \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} y = 0 \quad \operatorname{sen} y(-1) + \cos y \cdot 0 - \operatorname{sen} y = 0 ;$$

$$-2\operatorname{sen} y = 0 ; \operatorname{sen} y = 0 ; y = 90^\circ ; y = 270^\circ$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k , y = 90^\circ + 360^\circ k ; x = 90^\circ + 360^\circ k , y = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$c) \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - y ; \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos y = \frac{1}{2} \quad \cos y \cdot \cos y = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 y = \frac{1}{2} ; \cos y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \quad y = 45^\circ ; y = 135^\circ ; y = 225^\circ ; y = 315^\circ$$

$$x = 45^\circ, y = 45^\circ ; x = 315^\circ, y = 135^\circ ; x = 225^\circ, y = 225^\circ ; x = 135^\circ, y = 315^\circ$$

35. Resuelve los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} \cos(x - y) = 0 \\ \cos(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 90^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 270^\circ \\ x + y = 270^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 90^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 180^\circ, \quad x = 90^\circ, \quad y = 0^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 90^\circ \\ x + y = 270^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 360^\circ, \quad x = 180^\circ, \quad y = 90^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 270^\circ \\ x + y = 270^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 540^\circ, \quad x = 270^\circ, \quad y = 0^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 270^\circ \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 360^\circ, \quad x = 180^\circ, \quad y = 270^\circ$$

b)
$$\begin{cases} \sin(x - y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 30^\circ \\ x + y = 60^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 150^\circ \\ x + y = 120^\circ \end{cases}$$

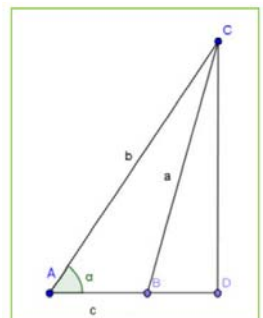
$$\begin{cases} x - y = 30^\circ \\ x + y = 60^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 90^\circ, \quad x = 45^\circ, \quad y = 15^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 30^\circ \\ x + y = 120^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 150^\circ, \quad x = 75^\circ, \quad y = 45^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 150^\circ \\ x + y = 60^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 210^\circ, \quad x = 105^\circ, \quad y = 315^\circ$$

$$\begin{cases} x - y = 150^\circ \\ x + y = 120^\circ \end{cases} \quad \text{sumando, } 2x = 270^\circ, \quad x = 135^\circ, \quad y = 345^\circ$$

36. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras, si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del coseno en ese caso [Pista: los únicos cambios aparecen al despejar AD que se suma en vez de restar].



Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C . Esta altura cae fuera del lado AB . Queremos calcular el lado $a = BC$. Por el teorema de Pitágoras es $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2$. El problema es que no tenemos ni CD ni DB . Lo que sí tenemos es $b = AC$, $c = AB$ y el ángulo α . Sabemos que $\sin(\alpha) = CD/AC \Rightarrow CD = AC \sin(\alpha)$. Sabemos también $\cos(\alpha) = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC \cos(\alpha)$. Pero, por construcción $AD = AB + BD$ y AB sí lo tenemos. Luego es $DB = AD - AB$. Recapitulando y escribiendo en función de a , b y c que son los datos originales:

$$CD = AC \sin(\alpha) \Rightarrow CD = b \sin(\alpha)$$

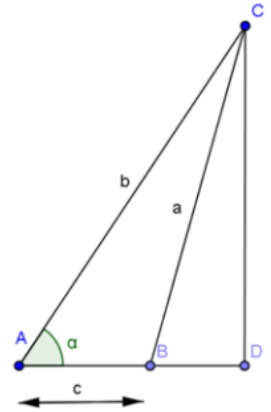
$$DB = AD - AB = b \cos(\alpha) - c$$

Finalmente $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2 = [b \sin(\alpha)]^2 + [b \cos(\alpha) - c]^2$. Basta operar un poco:

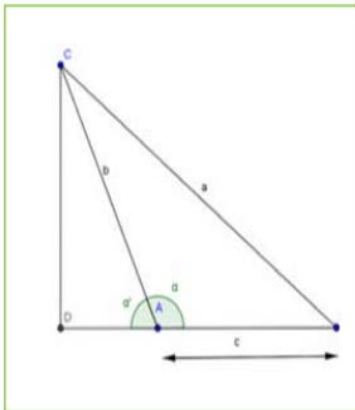
$$a^2 = [b \sin(\alpha)]^2 + [b \cos(\alpha) - c]^2 = b^2 \sin^2(\alpha) + c^2 - 2bc \cos(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 \sin^2(\alpha) + b^2 \cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc \cos(\alpha) = b^2 [\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)] + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Pero $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ con lo que finalmente tenemos el resultado deseado.



37. Demuestra que el teorema del coseno también vale para ángulos entre 90 y 180 grados. Para ello, procede como sigue:



a) En la figura que tienes a tu izquierda considera el ángulo α' . Se cumple que $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$, ¿por qué?

b) Considera el triángulo rectángulo DBC y pon a en función de CD y DB .

c) De la misma manera que antes, pon CD y DB en función de b , c y α' .

d) Sustituye en la expresión para a hasta llegar a una fórmula para a en función de b , c y α' . Al sustituir el $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ tienes el resultado.

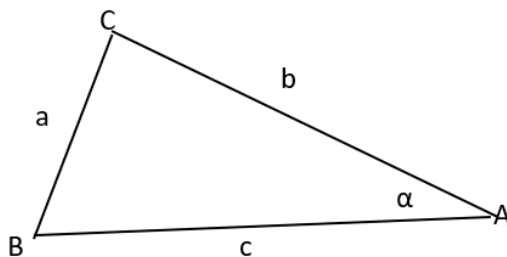
Solución: a) El coseno de α es negativo.

b) $a^2 = CD^2 + DB^2$;

c) $DB = c + b \cos(\alpha')$; $CD = b \sin(\alpha')$;

d) $a^2 = b^2 \sin^2(\alpha') + (c + b \cos(\alpha'))^2 = b^2 \sin^2(\alpha') + c^2 + b^2 \cos^2(\alpha') + 2cb \cos(\alpha')$
 $= b^2 + c^2 + 2cb \cos(\alpha') = b^2 - c^2 + 2cb \cos(\alpha)$

38. Dibuja un triángulo con $b = 5$, $c = 8$ y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$ (usa una regla y un transportador). Calcula el otro lado con el teorema del coseno y comprueba que coincide con el resultado medido. No te saldrá exactamente por el redondeo y el error de medida, pero debería ser muy similar.



1. Escribo la ecuación del teorema del coseno.
2. Sustituyo con los datos del problema.
3. Realizo la operación con ayuda de la calculadora

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \rightarrow a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ \rightarrow$$

$$a^2 = 27.71644455 \rightarrow a = \sqrt{27.72} = 5.265$$

39. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.

$$a = 7 \quad b = 3 \quad c = 5$$

TEOREMA DEL COSENO

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \alpha \rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = -2b \cdot c \cdot \cos \alpha \rightarrow$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2b \cdot c} \rightarrow \frac{7^2 - 3^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 0.5 \rightarrow$$

$$\alpha = \arccos(0.5) = 60^\circ \rightarrow \text{En el 2º cuadrante es } 120^\circ \rightarrow A = 120^\circ$$

TEOREMA DEL COSENO

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \beta \rightarrow b^2 - a^2 - c^2 = -2a \cdot c \cdot \cos \beta \rightarrow$$

$$\cos \beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2a \cdot c} \rightarrow \frac{3^2 - 7^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = -\frac{13}{14} \rightarrow$$

$$\beta = \arccos\left(-\frac{13}{14}\right) = 158.21^\circ \rightarrow \text{su opuesto es } 21.79^\circ \rightarrow B = 21.79^\circ$$

TEOREMA DEL COSENO

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2b \cdot a \cdot \cos \gamma \rightarrow c^2 - b^2 - a^2 = -2b \cdot a \cdot \cos \gamma \rightarrow$$

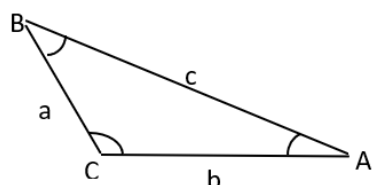
$$\cos \gamma = \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2b \cdot a} \rightarrow \frac{5^2 - 3^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{11}{14} \rightarrow$$

$$\gamma = \arccos\left(-\frac{11}{14}\right) = 141.79^\circ \rightarrow \text{su opuesto es } 38.21^\circ \rightarrow C = 38.21^\circ$$

Los opuestos se sacan restando a 180 el ángulo que te dé el arccos.

40. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del coseno para calcular el otro lado. Obtendrás dos soluciones. b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos ¿serías capaz de dibujarlos?



$$B = 30^\circ$$

$$b = 2$$

$$A = \alpha = ?$$

$$a = ?$$

$$C = \gamma = ?$$

$$c = 3$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \rightarrow \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin \gamma} \rightarrow \sin \gamma = \frac{3 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 0.75 \rightarrow$$

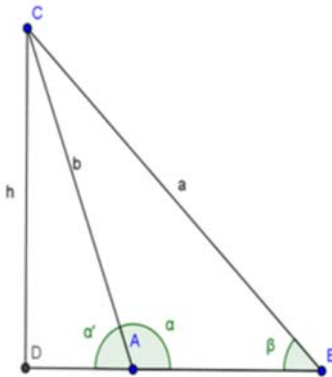
$$\gamma = \arcsin(0.75) = 48.59^\circ \rightarrow \text{su opuesto} \rightarrow 90 - 48.59^\circ = 41.41^\circ = \alpha$$

TEOREMA DEL COSENO:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \rightarrow a^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 41.41^\circ \rightarrow$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

41. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras, si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del seno en ese caso [Pista: hay que utilizar α' en vez de α y ver la relación entre el seno de ambos ángulos].



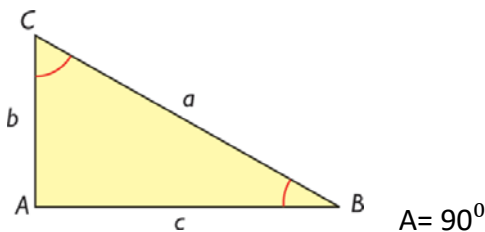
1. Sabemos las ecuaciones por definición.
2. Despejamos 'h' en las dos ecuaciones.
3. Igualamos las ecuaciones que obtenemos y operamos con ellas hasta obtener el resultado final.

$$\text{sen}(\alpha') = \frac{h}{b} ; \text{sen}(\beta') = \frac{h}{a} \rightarrow h = b \text{sen}(\alpha') ; h = a \text{sen}(\beta') \rightarrow$$

$$b \text{sen}(\alpha') = a \text{sen}(\beta') \rightarrow \frac{a}{\text{sen}(\alpha')} = \frac{b}{\text{sen}(\beta')} \rightarrow$$

$$\text{sen}(\alpha') = \text{sen}(\beta')$$

42. El ejercicio anterior ya demuestra que el teorema del seno vale para triángulos obtusángulos ¿por qué? Demuestra el teorema para un triángulo rectángulo usando que $\text{sen}90^\circ = 1$.



$$\text{sen}B = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\text{sen}B} ; \text{sen}C = \frac{c}{a} \rightarrow a = \frac{c}{\text{sen}C} ; \text{sen}90^\circ = 1 \rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

43. Como antes, dibuja un triángulo con $b = 5$, $c = 8$ y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^\circ$. Calcula con el teorema del seno el ángulo opuesto al lado b y calcula, SIN UTILIZAR EL TEOREMA DEL COSENO el otro ángulo y el lado que falta. Comprueba que te sale lo mismo que si hubieras utilizado el teorema del coseno para calcular a

	$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} ; \quad \frac{a}{\text{sen}40^\circ} = \frac{5}{\text{sen}B} = \frac{8}{\text{sen}C}$ $\frac{a}{\text{sen}40^\circ} = \frac{5}{\text{sen}B} ; \quad \frac{5}{\text{sen}B} = \frac{8}{\text{sen}C} ; \quad B + C = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
--	--

$$a \cdot \text{sen}B = 5 \cdot 0,64 ; \quad 5 \cdot \text{sen}C = 8 \cdot \text{sen}B ; \quad B + C = 140^\circ$$

$$C = 140^\circ - B \quad \text{sustituimos}$$

$$a \cdot \text{sen}B = 5 \cdot 0,64 ; \quad 5 \cdot \text{sen}(140^\circ - B) = 8 \cdot \text{sen}B$$

$$5 \cdot \sin(140^\circ - B) = 8 \cdot \sin B ; \quad 5 \cdot (\sin 140^\circ \cos B - \cos 140^\circ \sin B) = 8 \cdot \sin B$$

$$5 \cdot (0,64 \cdot \cos B - (-0,77) \cdot \sin B) = 8 \cdot \sin B ; \quad 3,2 \cos B + 3,85 \sin B = 8 \cdot \sin B$$

$$\sin B = \frac{3,2}{a} ; \quad 3,2 \cos B - 4,15 \sin B = 0 \quad 3,2 \cos B - 4,15 \frac{3,2}{a} = 0$$

$$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2} ; \quad 3,2 \sqrt{1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2} - 4,15 \frac{3,2}{a} = 0$$

$$3,2 \sqrt{1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2} = 4,15 \cdot \frac{3,2}{a} \quad 10,24 \left(1 - \left(\frac{3,2}{a}\right)^2\right) = \left(4,15 \cdot \frac{3,2}{a}\right)^2$$

$$10,24 - 10,24 \left(\frac{3,2}{a}\right)^2 = 17,22 \left(\frac{3,2}{a}\right)^2 ; \quad 10,24 = 27,46 \left(\frac{3,2}{a}\right)^2 ; \quad \frac{3,2}{a} = \sqrt{\frac{10,24}{27,46}} = 0,61$$

$$a = \frac{3,2}{0,61} = 5,25 ; \quad \sin B = \frac{3,2}{5,25} = 0,61 ; \quad B = \arcsin 0,61 = 37,59^\circ$$

$$C = 140^\circ - 37,59^\circ = 102,41^\circ$$

Con el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \rightarrow a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 40^\circ = 27,72 \rightarrow a = \sqrt{27,72} = 5,26$$

44. Un triángulo tiene dos ángulos que valen 40 y 60 grados respectivamente. El lado entre ellos es de 8 cm. Calcula todos sus ángulos y lados.

Si $A = 40^\circ$, $B = 60^\circ$ $C = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$ el lado $c = 8$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} ; \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin 80^\circ} \rightarrow b = \frac{8 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \rightarrow b = 7,04 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{a}{\sin 40^\circ} = \frac{8}{\sin 80^\circ} \rightarrow a = \frac{8 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \rightarrow a = 5,22 \text{ cm}$$

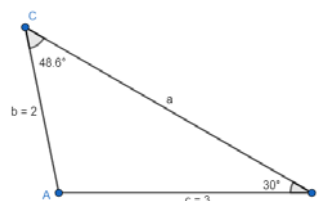
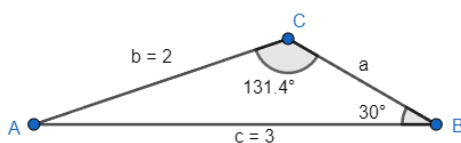
45. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del seno para calcular el otro ángulo. Hay dos soluciones porque hay dos ángulos con el mismo seno. Calcula los dos.

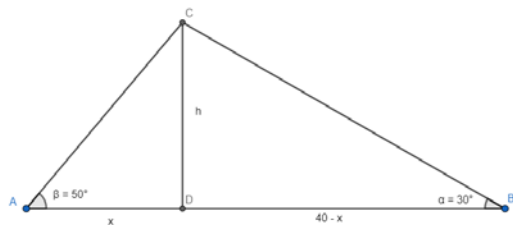
b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos, ¿serías capaz de dibujarlos?

$$AB \dots c = 3 ; \quad AC \dots b = 2 ; \quad \beta = 30^\circ ; \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{\sin C} \rightarrow \sin C = \frac{3 \cdot \sin 30^\circ}{2} \rightarrow \sin C = 0,75 \text{ cm} \rightarrow C = 48,59^\circ ; C = 131,41^\circ$$



46. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?



$$\operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{h}{40-x} \quad ; \quad \operatorname{tg} 50^{\circ} = \frac{h}{x}$$

$$0,58 = \frac{h}{40-x} \quad ; \quad 1,19 = \frac{h}{x}$$

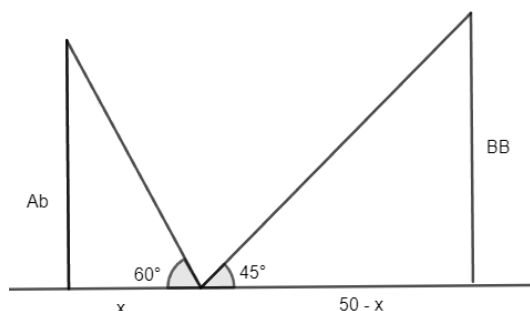
$$0,58(40-x) = h \quad ; \quad 1,19x = h$$

$$23,2 - 0,58x = h \quad ; \quad 23,2 - 0,58x = 1,19x$$

$$1,77x = 23,2 \quad ; \quad x = \frac{23,2}{1,77} = 13,1m$$

$$1,19x = h \quad ; \quad h = 1,19 \cdot 13,1 = 15,6m$$

47. En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divide el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60°, y el Big Ben con un ángulo de 45°. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio?



$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{BB}{50-x} \quad ; \quad \operatorname{tg} 60^{\circ} = \frac{Ab}{x}$$

$$1 = \frac{BB}{50-x} \quad ; \quad 1,73 = \frac{30}{x}$$

$$x = \frac{30}{1,73} \quad ; \quad x = 17,34$$

$$1 = \frac{BB}{50-x} \quad ; \quad 1 = \frac{BB}{50-17,34} \quad ; \quad BB = 32,66$$

El Big Ben mide 32,66 metros. Se encuentra a 17,34 m de la Abadía y 32,66 m del Big Ben.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ hallar las restantes razones trigonométricas del ángulo

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin^2 a + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1; \quad \sin^2 a + \frac{5}{9} = 1; \quad \sin^2 a = 1 - \frac{5}{9}; \quad \sin a = \sqrt{\frac{4}{9}} \rightarrow \sin a = \frac{2}{3} \quad ; \sin a = -\frac{2}{3}$$

Nos da dos resultados (del primer y cuarto cuadrante)

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}; \quad \tan a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Volvemos a calcular para el cuarto cuadrante

$$\tan a = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}; \quad \tan a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \sin a = \frac{2}{3}; \quad \tan a = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{si } \alpha \in I \text{ cuadrante}$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \sin a = -\frac{2}{3}; \quad \tan a = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{si } \alpha \in IV \text{ cuadrante}$$

2. Calcula sin hacer uso de la calculadora las demás razones trigonométricas

a) Sabiendo que $\sin a = 0,2$ es del segundo cuadrante

Para calcular el coseno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$0,2^2 + \cos^2 a = 1; \quad 0,04 + \cos^2 a = 1; \quad \cos a = \sqrt{0,96}; \quad \cos a = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{0,2}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}; \quad \tan a = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} \quad \tan a = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1 / \sin a$

$$\csc a = \frac{1}{0,2}; \quad \csc a = 5$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1 / \cos a$

$$\sec a = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}; \quad \sec a = \frac{-5\sqrt{6}}{12}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1 / \tan a$

$$\cot a = \frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{6}}}; \quad \cot a = -2\sqrt{6}$$

$$\cos a = -\frac{2\sqrt{6}}{5}; \quad \sin a = \frac{1}{5}; \quad \tan a = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\csc a = 5; \quad \sec a = -\frac{5\sqrt{6}}{12}; \quad \cot a = -2\sqrt{6}$$

b) Sabiendo que $\cos a = -0,3$ es del tercer cuadrante

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin^2 a + (-0,3)^2 = 1 \quad ; \quad \sin^2 a + 0,09 = 1 \quad ; \quad \sin a = \sqrt{0,91} \quad ; \quad \sin a = -\frac{\sqrt{91}}{10}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{-\frac{\sqrt{91}}{10}}{-\frac{3}{10}} \quad ; \quad \tan a = \frac{\sqrt{91}}{3}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1 / \sin a$

$$\csc a = \frac{1}{-\frac{\sqrt{91}}{10}} \quad \csc a = -10\sqrt{91}/91$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1 / \cos a$

$$\sec a = \frac{1}{-0,3} \quad ; \quad \sec a = -\frac{10}{3}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1 / \tan a$

$$\cot a = \frac{1}{\frac{\sqrt{91}}{3}} \quad ; \quad \cot a = \frac{3\sqrt{91}}{91}$$

$$\cos a = -0,3 \quad ; \sin a = -\frac{\sqrt{91}}{10} \quad ; \quad \tan a = \sqrt{91}/3$$

$$\csc a = -10\sqrt{91}/91 \quad ; \sec a = -\frac{10}{3} \quad ; \quad \cot a = \frac{3\sqrt{91}}{91}$$

c) Sabiendo que $\tan a = 2$ es del primer cuadrante

Para calcular el coseno, utilizamos $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

$$1 + 2^2 = \sec^2 a \quad ; \quad 5 = \sec^2 a \quad ; \quad \sqrt{5} = \sec a \quad ; \quad \sqrt{5} = \frac{1}{\cos a} \quad ; \quad \cos a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\sin^2 a + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \quad ; \sin^2 a + \frac{1}{5} = 1 \quad ; \quad \sin a = \sqrt{\frac{4}{5}} \quad ; \sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1 / \sin a$

$$\csc a = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \quad ; \csc a = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1 / \cos a$

$$\sec a = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad ; \quad \sec a = \sqrt{5}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1 / \tan a \quad ; \cot a = \frac{1}{2}$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \sin a = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \quad \tan a = 2$$

$$\csc a = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad \sec a = \sqrt{5} \quad ; \quad \cot a = \frac{1}{2}$$

3. Sabiendo que $\sin a = -\frac{4}{5}$ (tercer cuadrante) halla el coseno y la tangente

Para calcular el coseno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 a = 1 \quad ; \quad \frac{16}{25} + \cos^2 a = 1 \quad ; \quad \cos a = \sqrt{\frac{9}{25}} \quad ; \quad \cos a = -\frac{3}{5}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \quad ; \quad \tan a = \frac{4}{3}$$

4. Sabiendo que $\tan x = \frac{1}{3}$ (primer cuadrante) calcula:

a) $\tan(180^\circ - x) = -\tan(x) = -\frac{1}{3}$

b) $\sin(180^\circ + x)$

Para calcular el coseno, utilizamos $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \sec^2 x \quad ; \quad \frac{10}{9} = \sec^2 x \quad ; \quad \sqrt{\frac{10}{9}} = \sec x \quad ; \quad \frac{\sqrt{10}}{3} = \sec x \quad ; \quad \cos x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Para calcular el seno, utilizamos $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin^2 x + \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 = 1 \quad \sin^2 x + \frac{9}{10} = 1 \quad \sin x = \sqrt{0,1} \quad ; \quad \sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\sin(180^\circ + x) = -\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

c) $\cos(360^\circ - x)$

$$\cos(360^\circ - x) = \cos x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

5. Sabiendo que $\sin a = 0,5$ ($a \in II$ c) calcula las otras razones

Para calcular el coseno, utilizamos $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$$0,5^2 + \cos^2 a = 1 \quad 0,25 + \cos^2 a = 1 \quad \cos a = \sqrt{0,75} \quad \cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular la tangente, utilizamos $\sin a / \cos a$

$$\tan a = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \tan a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular la cosecante, $\csc a = 1 / \sin a$

$$\csc a = \frac{1}{0,5} \quad \csc a = 2$$

Para calcular la secante, $\sec a = 1 / \cos a$

$$\sec a = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \sec a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Para calcular la cotangente, $\cot a = 1 / \tan a$

$$\cot a = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \cot a = -\sqrt{3}$$

$$\cos a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin a = 0,5 \quad ; \quad \tan a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc a = 2 \quad ; \quad \sec a = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad \cot a = -\sqrt{3}$$

6. Resolver las ecuaciones trigonométricas:

a) $3 \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$

$$3(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 \quad ; \quad 3 - 3\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$$

$$3 - 2\cos^2 x + \cos x = 0 \quad \text{Ecuación de segundo grado}$$

$$a = -2; \quad b = 1; \quad c = 3$$

$$\text{Utilizando } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ calculamos}$$

$$\cos x = -1; \quad \cos x = \frac{3}{2} \quad \text{Hacemos el Arco coseno comprobamos en ambos resultados}$$

$$\cos x = -1 \rightarrow x = 180^\circ + 360^\circ K \quad ; \quad \cos x = \frac{3}{2} \rightarrow x \text{ no existe}$$

$$b) \tan x = \sqrt{2} \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2} \cos x$$

$$\text{Usamos } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x = \sqrt{2} (\cos x)^2$$

$$\sin x = \sqrt{2} (1 - \sin^2 x)$$

$$\text{Usamos } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin x = \sqrt{2} - \sqrt{2} \sin^2 x ; \sin x - \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin^2 x = 0 ; \text{ Ordenamos y usamos } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = \sqrt{2}; b = 1; c = -\sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin x = -\sqrt{2} \quad \text{Hacemos el Arco seno comprobamos en ambos resultados}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ K \quad y \quad x = 135^\circ + 360^\circ K$$

$$\sin x = -\sqrt{2} \rightarrow x \text{ no existe}$$

7. Demuestra las siguientes identidades

$$a) (\operatorname{tg} x) \cdot (\cos x) = \operatorname{sen} x$$

$$(\operatorname{tg} x) \cdot (\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos x = \operatorname{sen} x$$

$$b) \cot g^2 x - 1 = \frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \cot g^2 x - 1$$

$$c) \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$d) 1 + \cos(2x) = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\sec^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \cos^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x = \cos^2 x + 1 - \operatorname{sen}^2 x =$$

$$= 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos(2x).$$

$$e) \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot g^2 x$$

$$1 + \cot g^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x$$

8. Demuestra que son ciertas las siguientes igualdades:

$$a) \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{cosec} a \cdot \cos(a - b) = \operatorname{cosec} b$$

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cosec} b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cosec} a ; \cos(a - b) = \operatorname{cosec} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{cosec} a \cdot \cos(a - b) = \operatorname{sen} a (\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cosec} b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cosec} a) + \operatorname{cosec} a (\operatorname{cosec} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{cosec} b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec}^2 a \cdot \cos b - \operatorname{cosec} a \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b =$$

$$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{cosec} b + \operatorname{cosec}^2 a \cdot \cos b = \operatorname{cosec} b (\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a) = \operatorname{cosec} b \cdot 1 = \operatorname{cosec} b$$

$$b) \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x}{\cos x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x$$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $\cos 2a - 3\operatorname{sen} a + 1 = 0$

$$\cos 2a - 3\operatorname{sen} a + 1 = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a - 3\operatorname{sen} a + \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 0$$

$$2 \cos^2 a - 3 \operatorname{sen} a = 0 \rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 a) - 3 \operatorname{sen} a = 0 \rightarrow 2 - 2 \operatorname{sen}^2 a - 3 \operatorname{sen} a = 0$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-2)2}}{2(-2)} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{3 \pm 5}{-4}; \operatorname{sen} a = -2, \operatorname{sen} a = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 30^\circ + 360^\circ k; a_2 = 150^\circ + 360^\circ k$$

b) $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 0; \operatorname{sen} x = -\cos x \quad x = 135^\circ + 360^\circ k; x = 315^\circ + 360^\circ k$$

10. Di si son ciertas o falsas las siguientes igualdades:

a) $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\cot^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\cot^2 x} \rightarrow \frac{\sec^2 x}{\csc^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

b) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} &= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

11. Demuestra que son ciertas

a) $\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$

$$\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}} = \frac{2\operatorname{sen} x}{\frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{2\operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

b) $\frac{1-\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} = 2 - \cos^2 x$

$$\begin{aligned} \frac{1-\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x} &= \frac{(1+\operatorname{sen}^2 x)(1-\operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{(1+\operatorname{sen}^2 x)\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{sen}^2 x = 1 + (1 - \cos^2 x) = \\ &= 1 + 1 - \cos^2 x = 2 - \cos^2 x \end{aligned}$$

12. Comprueba que son ciertas las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \frac{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}{1+\cot^2(\alpha)} = \operatorname{tg}^2(\alpha) \quad ; \quad \frac{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}{1+\cot^2(\alpha)} = \frac{\sec^2(\alpha)}{\csc^2(\alpha)} = \frac{\frac{1}{\cos^2(\alpha)}}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}} = \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \operatorname{tg}^2(\alpha)$$

b) $\frac{\cos^2(\alpha)}{1+\operatorname{sen}(\alpha)} = 1 - \operatorname{sen}(\alpha)$

$$\frac{\cos^2(\alpha)}{1+\sin(\alpha)} = \frac{(1-\sin^2\alpha)}{1+\sin(\alpha)} = \frac{(1-\sin(\alpha))(1+\sin(\alpha))}{(1+\sin(\alpha))} = 1 - \sin(\alpha)$$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: a) $\cos x \cdot \cos 2x + \cos^2 x = 0$

b) $\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$

a) $\cos x \cdot \cos 2x + \cos^2 x = 0$; $\cos x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos^2 x = 0$; $\cos^3 x - \cos x \sin^2 x + \cos^2 x = 0$;

$$\cos^3 x - \cos x(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 0 \quad ; \quad \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x + \cos^2 x = 0$$

$$2\cos^3 x - \cos x + \cos^2 x = 0 \quad ; \quad \cos x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0 \quad ; \quad \cos x = 0 \quad ; 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0, \quad x = 90^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \quad ; \quad \cos x = -1 \quad ; \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1, \quad x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad x = 60^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 300^\circ + 360^\circ k$$

b) $\operatorname{tg} x - \sin 2x = 0$; $\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x \cos x = 0$; $\sin x - 2\sin x \cos^2 x = 0$; $\sin x(1 - 2\cos^2 x) = 0$

$$\sin x = 0, \quad x = 0^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$1 - 2\cos^2 x = 0 \quad ; \quad \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = 45^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 315^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = 135^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad x = 225^\circ + 360^\circ k$$

14. Demuestra que son ciertas las igualdades:

a) $\cos(\alpha - \beta) - \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sec \beta}$ b) $\sin(270^\circ - \alpha) + \cos \alpha = 0$

a) $\cos(\alpha - \beta) - \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \beta \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos \alpha =$
 $= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta - \sin \beta \sin \alpha = \cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \frac{1}{\frac{1}{\cos \beta}} = \cos \alpha \frac{1}{\sec \beta} = \frac{\cos \alpha}{\sec \beta}$

b) $\sin(270^\circ - \alpha) + \cos \alpha = \sin(270^\circ) \cos \alpha - \cos(270^\circ) \sin \alpha + \cos \alpha =$
 $= (-1) \cos \alpha - 0 \sin \alpha + \cos \alpha = 0$

15. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2\alpha + 1 = 4\cos \alpha$ (dando TODAS las soluciones posibles)

$$\cos 2\alpha + 1 = 4\cos \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 - 4\cos \alpha = 0 \rightarrow \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) + 1 - 4\cos \alpha = 0 \rightarrow$$

$$2\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha = 0 \rightarrow 2\cos \alpha(\cos \alpha - 2) = 0 \rightarrow \cos \alpha - 2 = 0, \text{ no es posible}$$

$$\cos \alpha = 0, \quad \alpha = 90^\circ + 360^\circ k \quad ; \quad \alpha = 270^\circ + 360^\circ k$$

16. Resuelve la ecuación trigonométrica $\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x = 1$ (dando TODAS las soluciones posibles)

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x = 1 \rightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} + \cos^2 x = 1 \rightarrow 2 \cos^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow$$

$$3 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}} ; x = 54,74^\circ + 360^\circ k ; x = 305,26^\circ + 360^\circ k$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}} ; x = 125,26^\circ + 360^\circ k ; x = 234,74^\circ + 360^\circ k$$

17. Resuelve la ecuación trigonométrica $\cos 2x + \cos x = 0,2$ (dando TODAS las soluciones posibles)

$$\cos 2x + \cos x = 0,2 \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0,2 \rightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0,2 \rightarrow$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1,2 = 0 ; \cos x = 0,5639 ; \cos x = -1,063 \text{ no válida}$$

$$\cos x = 0,5639 \quad x = 55,67^\circ + 360^\circ k ; x = 304,33^\circ + 360^\circ k$$

18. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$

$$\sin(x) \cdot (\sin(x) - 1) = 0$$

Solución1: $\sin(x) = 0$

Solución2: $\sin(x) = 1$

$$\arcsen 0 = 0^\circ \rightarrow 360^\circ k$$

$$\arcsen 1 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$$

b) $\cos(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\cos(x) + 1 - \cos^2(x) = 1$$

$$-\cos^2(x) + \cos(x) = 0 \rightarrow \cos(x) \cdot (-\cos(x) + 1) = 0$$

Solución 1: $\arccos 0 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$

Solución 2: $\arccos 1 = 0^\circ \rightarrow 360^\circ k$

c) $3 \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x)$

$$3 \operatorname{tg}^2(x) = \sec^2(x) \rightarrow \frac{3 \cdot \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \rightarrow \frac{3 \cdot (1 - \cos^2(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$3 \cdot (1 - \cos^2(x)) = \cos^2(x) \rightarrow -3 \cdot \cos^2(x) - \cos^2(x) + 3 = 0$$

Solución 1: $\cos(x) = 1,17$ No existe

Solución 2: $\cos(x) = -0,83 \rightarrow \arccos(-0,83) = 146^\circ \rightarrow 146^\circ + 360^\circ k$
 $180^\circ - 146^\circ = 34^\circ \rightarrow 34^\circ + 360^\circ k$

d) $\sin(2x) = 0,5$

$$\sin(2x) = \sin 30^\circ \rightarrow 2x = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 15^\circ + 180^\circ k$$

$$\sin(2x) = \sin 150^\circ \rightarrow 2x = 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 75^\circ + 180^\circ k$$

19. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $x + \operatorname{sen}^2 y = 2$

$x + \cos^2 y = 1$

$x + 1 - \cos^2(y) = 2 \rightarrow \cos^2(y) = x - 1$

$x + \cos^2 y = 1$ sustituimos lo anterior en esta ecuación

$x + x - 1 = 1 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

1ª ec: $1 + 1 - \cos^2 y = 2 \rightarrow -\cos^2 y = 0 \rightarrow y = -\arccos 0 = -90^\circ \rightarrow y = -90^\circ + 360^\circ k$

2ª ec: $1 + \cos^2 y = 1 \rightarrow \cos^2 y = 0 \rightarrow y = \arccos 0 = 90^\circ \rightarrow y = 90^\circ + 360^\circ k$

$x + 1 - (1 - x) = 2 \rightarrow x + 1 - 1 + x = 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

b) $\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) = \frac{3}{4}$

$\cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{4}$ sumamos y restamos

$\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} ; \operatorname{sen}(x+y) = 1 ; x+y = 90^\circ$

$\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) - \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} ; \operatorname{sen}(x-y) = \frac{1}{2} ; x-y = 30^\circ, x-y = 150^\circ$

Sumamos y si $2x = 120^\circ, x = 60^\circ$ y si $2x = 240^\circ, x = 120^\circ$ por tanto,

$x = 60^\circ + 360^\circ k, y = 30^\circ + 360^\circ k ; x = 120^\circ + 360^\circ k, y = -30^\circ + 360^\circ k$

c) $\cos(x) + \cos(y) = 1$

$\cos(x+y) = 1$

$x+y=0 \rightarrow y=-x$

$\cos(x) + \cos(-x) = 1 \rightarrow \cos(x) + \cos(x) = 1 \rightarrow 2\cos(x) = 1 \rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}$

$\arccos \frac{1}{2} = 60^\circ \rightarrow 60^\circ + 360^\circ k$

$\cos 60^\circ + \cos y = 1 \rightarrow \cos y = 1 - 0,5 \rightarrow \cos y = 0,5 \rightarrow \arccos 0,5 = 60^\circ \rightarrow 60^\circ + 360^\circ K$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}(45^\circ + 2x) = \operatorname{sen} 60^\circ \rightarrow 45^\circ + 2x = 60^\circ \rightarrow 2x = 15^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 7,5^\circ + 180^\circ k$

$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \rightarrow \operatorname{sen}(45^\circ + 2x) = \operatorname{sen} 120^\circ \rightarrow 45^\circ + 2x = 120^\circ \rightarrow 2x = 75^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 37,5^\circ + 180^\circ k$

b) $\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(30^\circ) = 0$

$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 30^\circ \rightarrow 3x = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 10^\circ + 120^\circ k$

$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \rightarrow 3x = 150^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 50^\circ + 120^\circ k$

c) $\operatorname{sen}(2x) = 2 \cdot \cos(x)$

$2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) = 2 \cdot \cos(x) \rightarrow \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) - \cos(x) = 0 \rightarrow \cos(x) \cdot (\operatorname{sen}(x) - 1) = 0$

Solución 1: $\cos(x) = 0 \rightarrow \arccos 0 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$

Solución 2: $\operatorname{sen}(x) = 1 \rightarrow \arccos 1 = 90^\circ \rightarrow 90^\circ + 360^\circ k$

21. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))^2 + (\operatorname{sen}(x) - \cos(x))^2$

$(\operatorname{sen}^2(x) + 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x)) + (\operatorname{sen}^2(x) - 2 \cdot \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) + \cos^2(x)) =$

$$= 2 \cdot \operatorname{sen}^2(x) + 2 \cdot \operatorname{cos}^2(x) = 2 \cdot (\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x)) = 2 \cdot 1 = 2$$

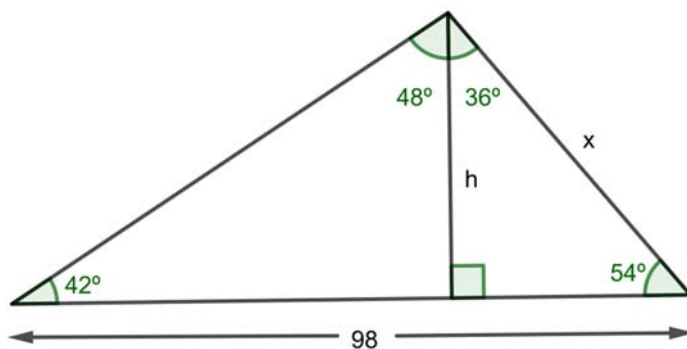
$$\text{b) } \frac{\operatorname{sen}(2a) \cdot \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \operatorname{cos} 2a)} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) \cdot \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{sen}(a) \cdot (1 + \operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a))} = \frac{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)}{1 + \operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)} = \frac{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)}{1 + \operatorname{cos}^2(a) - 1 + \operatorname{cos}^2(a)} = \frac{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)}{2 \cdot \operatorname{cos}^2(a)} = 1$$

$$\text{c) } \frac{\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}^3(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} = 1$$

$$\text{d) } \frac{\operatorname{tg}(a)}{\operatorname{tg}(2a) - \operatorname{tg}(a)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}{\frac{\operatorname{sen}(2a)}{\operatorname{cos}(2a)} - \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}{\frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a)}{\operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)} - \frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{cos}(a)}}{\frac{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) - \operatorname{sen}(a) \cdot (\operatorname{sen}^2(a) \cdot \operatorname{cos}(a))}{\operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)}} = \frac{\operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}^2(a) - \operatorname{sen}^2(a)}{2 \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{cos}(a) - \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}^2(a) \cdot \operatorname{cos}(a)} = \frac{\operatorname{cos}(a) - \operatorname{sen}(a)}{2 \cdot \operatorname{sen}^2(a) \cdot \operatorname{cos}^2(a)}$$

$$\text{e) } \frac{\operatorname{sen}(x-y) - \operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{cos}(x+y) - \operatorname{cos}(x-y)} = \frac{(\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) - \operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)) - (\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) + \operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))}{(\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y)) - (\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{cos}(y) + \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))} = \frac{-2 \cdot (\operatorname{cos}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))}{-2 \cdot (\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y))} = \frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \operatorname{cotg}(x)$$

22. Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables, que forman con la antena ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 98 metros. Calcula la altura de la antena.

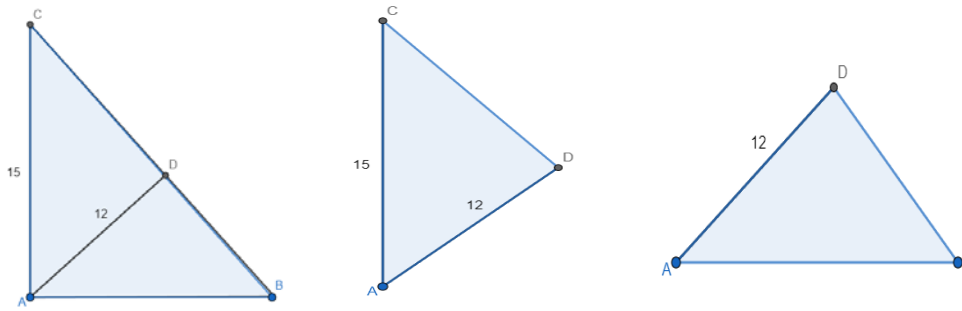


$$48 + 36 = 84$$

$$\frac{\sin(84)}{98} = \frac{\sin(42)}{x}; x = \frac{98 \cdot \sin(42)}{\sin(84)} = 65,94; h = 65,94 \cdot \sin(54) = 53,3 \text{ m}$$

La altura mide 53,3 m

23. Calcula los lados y los ángulos del triángulo ABC, rectángulo en A, del que conocemos el cateto AC = 15cm. y la altura relativa a la hipotenusa AD = 12cm.



En el triángulo CAD: $\operatorname{sen} C = \frac{12}{15} = 0,8$; $C = 53,13^\circ$ como $D = 90^\circ$; ángulo $CAD = 36,87^\circ$

$$\operatorname{sen} CAD = \frac{CD}{15}, \operatorname{sen} 36,87^\circ = \frac{CD}{15} ; 0,6 = \frac{CD}{15} ; CD = 0,6 \cdot 15 = 9$$

En el triángulo ABC: rectángulo en A, como $C = 53,13^\circ$, $B = 36,87^\circ$

En el triángulo DAB: rectángulo en D,

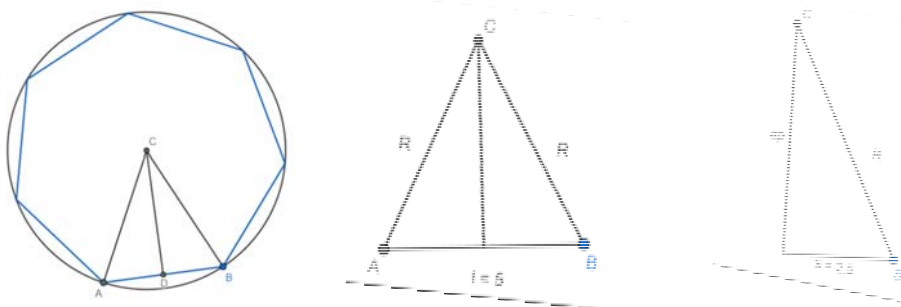
$$\operatorname{tg} B = \frac{12}{DB}, \operatorname{tg} 36,87^\circ = \frac{12}{DB} ; 0,75 = \frac{12}{DB} ; DB = \frac{12}{0,75} = 16$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{12}{AB}, \operatorname{sen} 36,87^\circ = \frac{12}{AB} ; 0,6 = \frac{12}{AB} ; AB = \frac{12}{0,6} = 20$$

$$CB = CD + DB = 9 + 16 = 25$$

Hipotenusa: 25, catetos: 15 y 20, ángulos: $C = 53,13^\circ$ y $B = 36,87^\circ$

24. Calcular el área de un heptágono regular, inscrito en una circunferencia, de 35cm de perímetro. Calcular el radio de la circunferencia inscrita.



Segmentamos el heptágono en 7 partes: $\frac{35}{7} = 5\text{cm}$, $\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 25'$

Partimos el triángulo isósceles obtenido en dos rectángulos: $\frac{5}{2} = 2,5\text{cm}$, $\frac{51^\circ 25'}{2} = 25^\circ 42'$

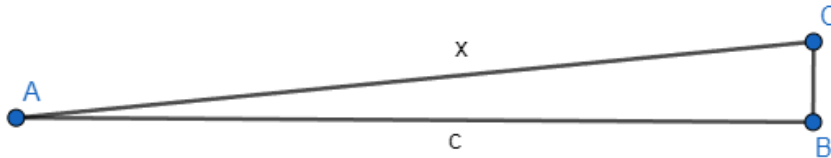
$\cos 25^\circ 37' = \frac{x}{R} = \frac{2,5}{R} \rightarrow R = \frac{2,5}{\cos 25^\circ 42'} = 2,78\text{cm}$ es el radio de la circunferencia.

$$90^\circ = 25^\circ 47' + \delta \rightarrow \delta = 90^\circ - 25^\circ 42' = 64^\circ 58'$$

Determinamos la apotema: $\operatorname{sen} 25^\circ 37' = \frac{ap}{R} = \frac{ap}{2,78} \rightarrow ap = 2,78 \cdot \operatorname{sen} 25^\circ 37' = 1,2\text{cm}$

$$\text{área} = \frac{p \cdot ap}{2} \rightarrow \frac{35 \cdot 1,2}{2} = 21 \text{ cm}^2$$

25. En un tramo de carretera la inclinación es del 5% (sube 5m cada 100m). Calcular el ángulo que forma con la horizontal la carretera. Sabemos que hemos subido 100m. ¿Cuánto hemos andado por la carretera?



Si hemos subido 100 metros en vertical, hemos hecho 2000 metros en horizontal, $c = 2000$

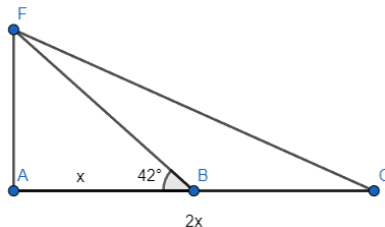
$$\operatorname{tg} A = \frac{100}{2000} = 0,05 \rightarrow A = \operatorname{tg}^{-1} 0,05 = 2,86^\circ$$

El ángulo con la horizontal de la carretera es de $2,86^\circ$.

$$\cos A = \frac{2000}{x} \rightarrow x = \frac{2000}{\cos 2,86^\circ} = 2002,49 \text{ m}$$

Hemos andado 2.002,49 metros.

26. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42 grados. ¿bajo qué ángulo se ve colocándose al doble de la distancia?

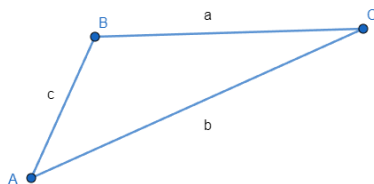


$$\tan 42^\circ = 0,9 = \frac{h}{x}$$

$$\tan C = \frac{h}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{x} = \frac{1}{2} \cdot 0,9 = 0,45$$

$$C = \tan^{-1} 0,45 = 24^\circ 13'$$

27. En un triángulo conocemos dos de sus ángulos y un lado: $A = 55^\circ$, $B = 98^\circ$, $a = 7,5 \text{ cm}$. Resuélvelo.



$$A = 55^\circ, B = 98^\circ, a = 7,5 \text{ cm}$$

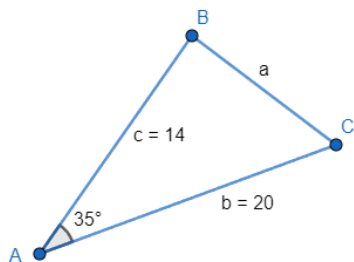
$$A + B + C = 180^\circ \rightarrow 55^\circ + 98^\circ + C = 180^\circ$$

$$C = 27^\circ$$

$$\frac{7,5}{\sin 55^\circ} = \frac{c}{\sin 27^\circ} \rightarrow \sin 55^\circ \cdot c = 7,5 \cdot \sin 27^\circ \rightarrow c = \frac{7,5 \cdot \sin 27^\circ}{\sin 55^\circ} = 4,157 \text{ cm}$$

$$\frac{7,5}{\sin 55^\circ} = \frac{b}{\sin 98^\circ} \rightarrow b \cdot \sin 55^\circ = 7,5 \cdot \sin 98^\circ \rightarrow b = \frac{7,5 \cdot \sin 98^\circ}{\sin 55^\circ} = 9,066 \text{ cm}$$

28. En un triángulo conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos $A = 35^\circ$, $b = 20$ cm, $c = 14$ cm. Resuélvelo.



$$A = 35^\circ \quad c = 14 \text{ cm} \quad b = 20 \text{ cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \rightarrow$$

$$a^2 = 20^2 + 14^2 - 2 \cdot 20 \cdot 14 \cdot \cos 35 = 137,27 \rightarrow$$

$$a = \sqrt{137,27}, \quad a = 11,726 \text{ cm}$$

$$20^2 = 14^2 + 11,716^2 - 2 \cdot 14 \cdot 11,716 \cdot \cos B$$

$$\cos B = \frac{20^2 - 14^2 - 11,716^2}{-2 \cdot 14 \cdot 11,716} = -0,20339$$

$$B = \cos^{-1}(-0,20339) = 101,7^\circ$$

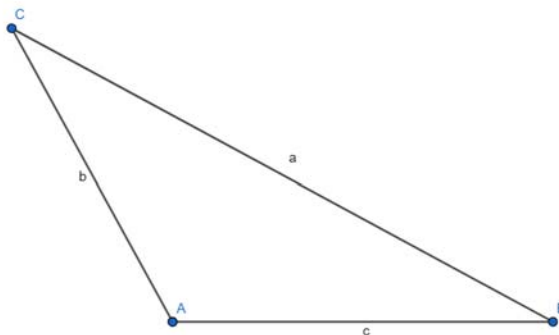
$$C = 180^\circ - 35^\circ - 101,7^\circ = 43,3^\circ$$

Método alternativo: podemos usar el teorema del seno para calcular C porque seguro que es agudo (ya que no es el opuesto al lado más largo):

$$\frac{14}{\sin C} = \frac{11,716}{\sin 35}; \sin C = \frac{14 \cdot \sin 35}{11,716} = 0,6854; C = \sin^{-1} 0,6854 = 43,3^\circ$$

$$B = 180^\circ - 35^\circ - 43,3^\circ = 101,7^\circ$$

29.- Halla los ángulos de un triángulo del que se conocen los tres lados: $a=37$ cm, $b=42$ cm y $c=68$ cm



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \Rightarrow 37^2 = 42^2 + 68^2 - 2 \cdot 42 \cdot 68 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$1369 = 1764 + 4624 - 5712 \cdot \cos \alpha \Rightarrow 5712 \cdot \cos \alpha = 5019 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5019}{5712} \Rightarrow \cos \alpha = 0,878$$

$$\arccos(0,878) \Rightarrow \alpha = 28^\circ 31'$$

$$\frac{37}{\sin 28^\circ 31'} = \frac{42}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = (42 \cdot \sin 28^\circ 31') / 37 = 0,54; \arcsen(0,54) \Rightarrow \beta = 32^\circ 41'$$

$$32^\circ 41' + 28^\circ 31' = 61^\circ 12' \Rightarrow 180^\circ - 61^\circ 12' \Rightarrow \gamma = 118^\circ 48'$$

Para hacer este ejercicio, he tenido que hacer el teorema del coseno para averiguar el seno de alfa, y así conseguir el valor de alfa. Después, he utilizado el teorema de los senos para averiguar el valor de beta. Por último, solo he tenido que restarle a 180° la suma de los dos ángulos anteriores para averiguar el valor de gamma

30.- Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127° . El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde? (nudo = milla/hora; milla = 1850m)

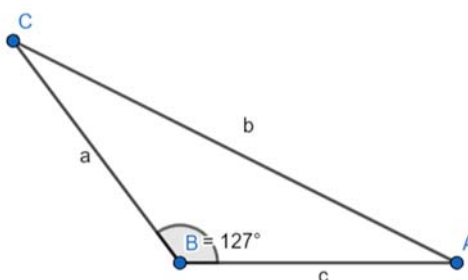
Barco A: 17 nudos $\cdot$ 5 horas = 85 millas $\Rightarrow$ 85 millas $\cdot$ 1850 metros $\Rightarrow$ $c = 157.250$ metros

Barco C: 26 nudos $\cdot$ 3,5 horas = 91 millas $\Rightarrow$ 91 millas $\cdot$ 1850 metros $\Rightarrow$ $a = 168.350$ metros

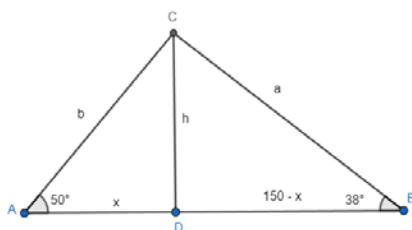
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos y \Rightarrow b^2 = 157.250^2 + 168.350^2 - 2 \cdot 157.250 \cdot 168.350 \cdot \cos 127^\circ \Rightarrow$$

$$b = \sqrt{157.250^2 + 168.350^2 - 2 \cdot 157.250 \cdot 168.350 \cdot \cos 127^\circ} \Rightarrow \quad \mathbf{b = 291.432,7}$$

$291.432,7\text{m} > 150\text{km}$ No podrán ponerse en contacto



31.- Dos amigos están en una playa a 150m de distancia y en el mismo plano vertical que una cometa que se encuentra volando entre ambos. En un momento dado, uno la ve con un ángulo de elevación de 50° y el otro con un ángulo de 38° . ¿Qué distancia hay desde cada uno de ellos a la cometa?



$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{h}{x} \quad ; \quad \operatorname{tg} 38^\circ = \frac{h}{150 - x}$$

$$h = x \operatorname{tg} 50^\circ \quad ; \quad h = (150 - x) \operatorname{tg} 38^\circ$$

$$x \operatorname{tg} 50^\circ = (150 - x) \operatorname{tg} 38^\circ$$

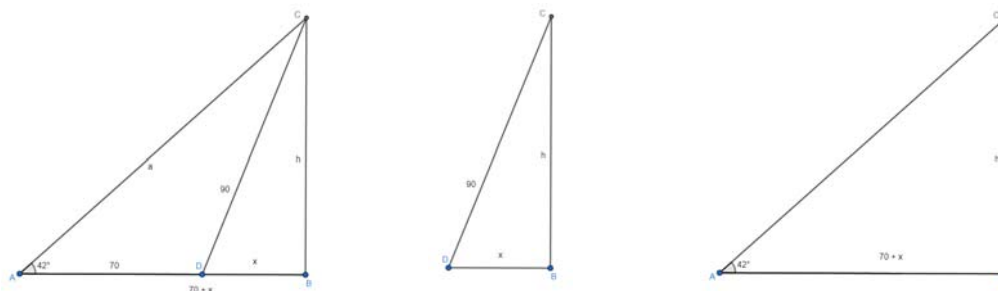
$$x \cdot 1,19 = (150 - x) \cdot 0,78$$

$$1,96x = 117 \quad ; \quad x = 59,7$$

$$\cos 50^\circ = \frac{x}{b} = \frac{59,7}{b} \quad ; \quad \mathbf{b = \frac{59,7}{\cos 50^\circ} = 92,88\text{m}}$$

$$\cos 38^\circ = \frac{150 - x}{a} = \frac{90,3}{a} \quad ; \quad \mathbf{a = \frac{90,3}{\cos 38^\circ} = 114,6\text{m}}$$

32.- Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 70 metros. El cable más corto mide 90 metros y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 42° . Calcula:



a) La medida del otro cable:

En el triángulo DBC: $90^2 = x^2 + h^2$

En el triángulo ABC: $tg42^\circ = \frac{h}{70+x}$; $h = tg42^\circ(70+x) = 63 + 0,9x$

$$90^2 = x^2 + h^2 ; 90^2 = x^2 + (63 + 0,9x)^2 = x^2 + 3969 + 113,4x + 0,81x^2$$

$$8100 = x^2 + 3969 + 113,4x + 0,81x^2 \quad 1,81x^2 + 113,4x - 4131 = 0 \quad ; \quad x = 25,8 \text{ metros}$$

$$h = 63 + 0,9x \quad ; \quad h = 63 + 0,9 \cdot 25,8 = \mathbf{66,22 \text{ metros}}$$

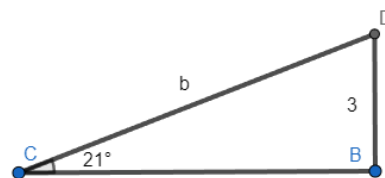
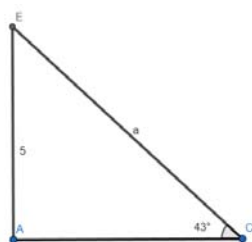
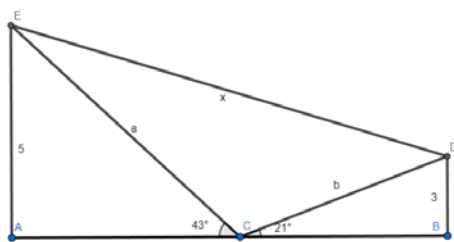
En el triángulo ABC: $sen42^\circ = \frac{h}{a}$; $0,67 = \frac{66,22}{a}$; $a = \frac{66,22}{0,67} = \mathbf{98,84 \text{ metros}}$

El otro cable mide 98,84 metros

b) La distancia del globo al suelo

la distancia del globo al suelo, altura, es de 66,22 metros

33.- Desde un faro se ve un barco A con un ángulo de 43° con la costa, y el barco B con 21° . El barco B está a 3 km de la costa, y el A a 5 km. Calcula la distancia entre los barcos



En el triángulo EAC : $sen43^\circ = \frac{5}{a}$; $a = \frac{5}{sen43^\circ} = 7,33$

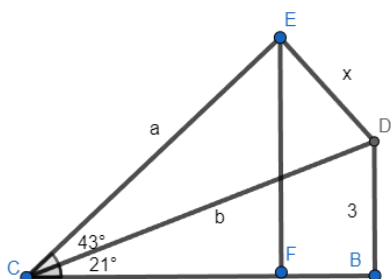
En el triángulo CBD : $sen21^\circ = \frac{3}{b}$; $b = \frac{3}{sen21^\circ} = 8,37$

$$43^\circ + 21^\circ + C = 180^\circ \quad ; \quad C = 116^\circ$$

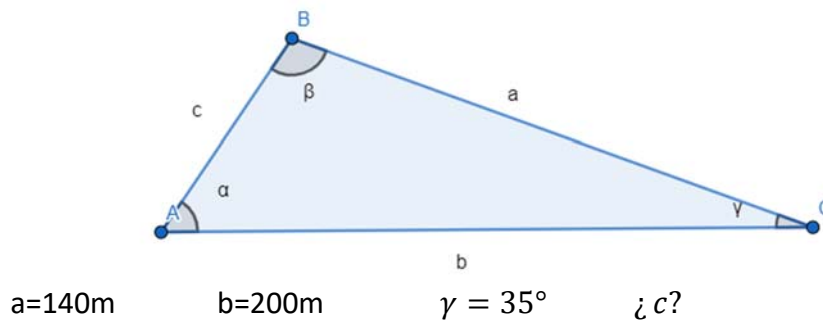
En el triángulo ECD: $x^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cosC$; $x^2 = 7,33^2 + 8,37^2 - 2 \cdot 7,33 \cdot 8,37 \cdot cos116^\circ$

$$x^2 = 177,58 \quad ; \quad x = 13,33 \quad \text{La distancia entre los barcos es de } \mathbf{13,33 \text{ km.}}$$

De forma semejante se haría según la propuesta de los apuntes



34. Una finca tiene forma triangular. Dos de sus lados miden 140 m y 200 m y el ángulo comprendido entre ambos es de 35° . Calcula el perímetro y la superficie de la finca.



$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \\
 c^2 &= 140^2 + 200^2 - 2(140)(200)(\cos 35^\circ) \\
 c^2 &= 19600 + 40000 - 56000 \cdot \cos 35^\circ \\
 c &= \sqrt{59600 - 56000 \cdot \cos 35^\circ} \\
 c &= 117,16m
 \end{aligned}$$

¿P?

$$P_{\text{triángulo}} = a + b + c \qquad P = 140 + 200 + 117,16 \qquad P = 457,16m$$

¿A?

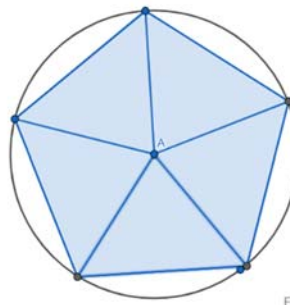
Fórmula de Herón $\text{área} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, siendo $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{457,16}{2} = 253,58$

$$\text{área} = \sqrt{253,58 \cdot (253,58 - 140) \cdot (253,58 - 200) \cdot (253,58 - 117,16)} = 8030 \text{ m}^2$$

35 calcula el área y el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 3 cm.

Para realizar este ejercicio tenemos que:

- 1) Dibujar el pentágono inscrito en la circunferencia
- 2) Dividir el pentágono en 5 triángulos tal y como se muestra, pues si realizamos esto, al conocer el radio de la circunferencia podemos conocer el valor de dos de los lados de los triángulos



- 3) Calcular el valor del ángulo interior del triángulo teniendo en cuenta que se trata de un triángulo isósceles podemos saber el valor de los otros dos ángulos.
- 4) Para conocer el ángulo interior de un pentágono se realiza la siguiente operación:

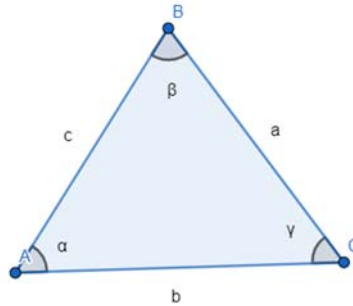
$$\text{ángulos interiores} = \frac{360^\circ}{\text{número de triángulos}} \qquad \text{ángulos interiores} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Para calcular los ángulos que no son interiores, como se trata de un triángulo isósceles podemos

realizar la siguiente operación

$$\text{ángulos exteriores} = \frac{180 - (\text{ángulo interior})}{2}$$

$$\text{ángulos exteriores} = \frac{180 - (72)}{2} = 58^\circ$$



Para calcular el perímetro necesitamos calcular b y multiplicarlo por 5

$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma}$$

$$b = \frac{c \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\gamma}$$

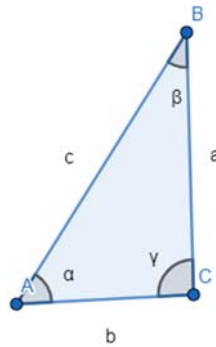
$$b = \frac{3 \cdot \text{sen}72^\circ}{\text{sen}54^\circ} \rightarrow 3,52\text{cm}$$

$$P = \text{lateral} \cdot n^\circ \text{ de lados}$$

$$P = 3,52 \cdot 5$$

$$P = 17,6\text{cm}$$

Para calcular el área calculamos la altura del triángulo
(h es la apotema del pentágono)



$$b = \frac{3,52}{2}$$

$$c = 3\text{cm}$$

$$\text{¿ } a? (a = h)$$

$$c^2 = b^2 + h^2$$

$$h^2 = c^2 - b^2$$

$$h^2 = 3^2 - 1,76^2$$

$$h = \sqrt{5,9}$$

$$h = 2,42\text{cm}$$

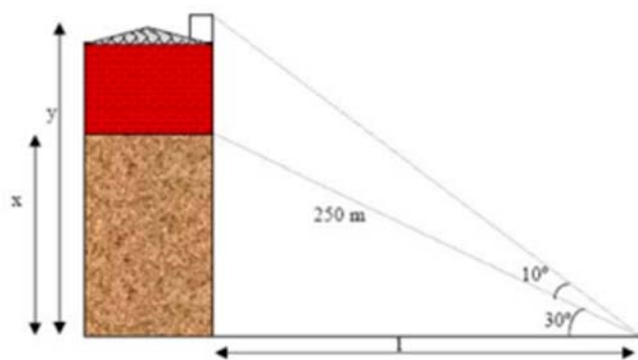
$$A_{\text{pentágono}} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$A = \frac{17,6 \cdot 2,42}{2} = 21,29\text{cm}^2$$

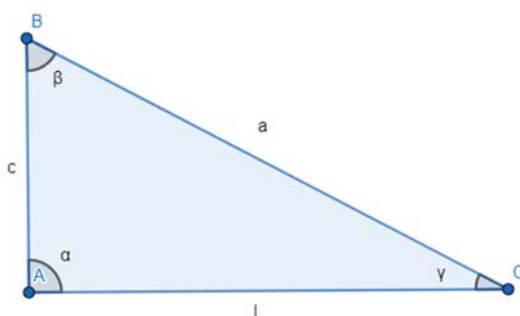
36. Calcula la altura del edificio:

Para calcular la altura del edificio:

- 1) Se divide el problema en dos triángulos
- 2) Se calcula l en el primer triángulo
- 3) Como l es igual en los dos triángulos, una vez calculada a partir del primer triángulo, aplicamos la definición de tg en el segundo, y calculamos la altura



$$l = 250 \cdot \cos 30^\circ \quad l = 216m$$



Calculamos β

$$\beta = 180 - (90 + 40) \quad \beta = 50^\circ$$

$$tg = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$tg\beta = \frac{l}{c}$$

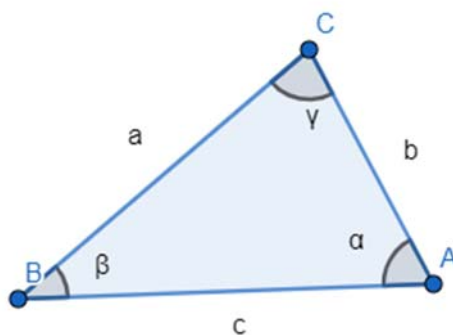
$$c = \frac{l}{tg\beta}$$

$$c = \frac{216}{tg50}$$

$$c = 181,24m$$

El edificio mide 181,24m

37. Dos personas A y B distan entre sí 200 m y ven un globo que está situado entre ambas. La primera persona lo ve con un ángulo de 30° y la segunda con un ángulo de 60° .



$$c = 200m$$

$$\beta = 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

a) ¿A qué distancia está B del globo?

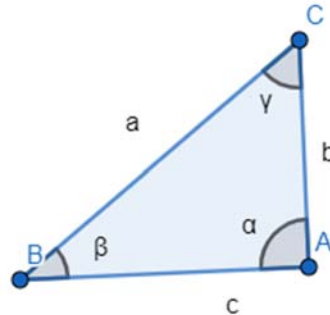
$$\gamma = 180 - (90) \quad \gamma = 90^\circ$$

$$a = \frac{c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \gamma}$$

$$a = \frac{200 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ}$$

$$a = 173,2m$$

b) ¿A qué altura está el globo?



$$\beta = 30^\circ$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$a = 173,2m$$

¿b?

$$b = a \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$b = 173,2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$b = 86,6m$$

c) Una persona que esté situada dentro del globo ¿Con qué ángulo ve a A y B?

¿Con qué ángulo ve a la persona B?

Calculamos γ en el triángulo del apartado b

$$\gamma = 180^\circ - (a + b) \quad \gamma = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) \quad \gamma = 60^\circ$$

¿Con qué ángulo ve a la persona A?

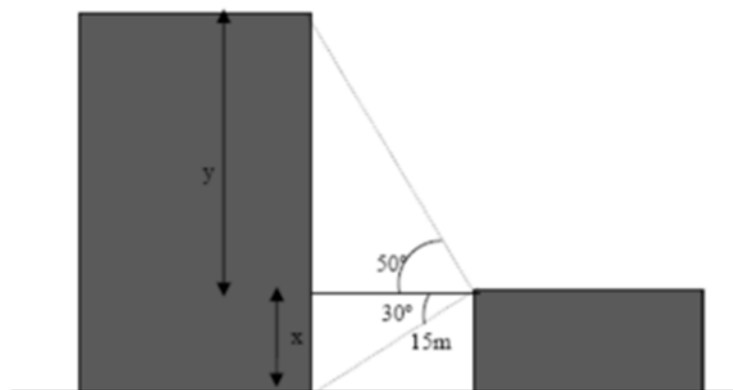
Para saber el ángulo con el que la persona A es vista, tenemos que restarle al ángulo total menos el ángulo con el que es vista b

$$x = 90^\circ - 60^\circ \quad x = 30^\circ$$

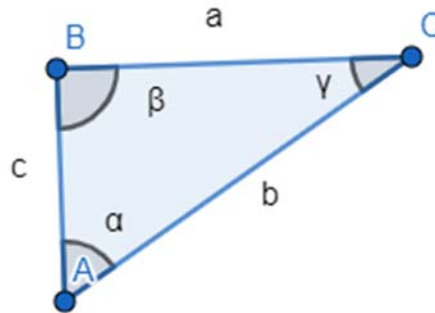
La persona A, es vista con un ángulo de 30°

La persona B, es vista con un ángulo de 60°

38. Calcula la altura de la torre grande a partir del siguiente dibujo.



$$\text{Altura total} = x + y$$



$$c = x \quad b = 15m \quad \gamma = 30^\circ \quad \beta = 90^\circ$$

¿c?

$$c = b \cdot \operatorname{sen} \gamma$$

$$c = 15 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$c = 7,5m$$

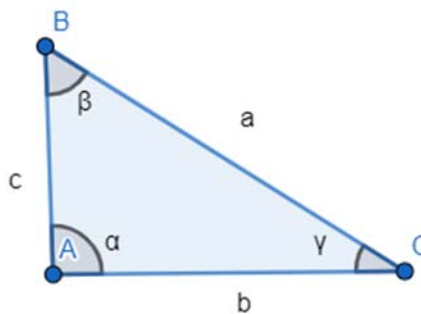
$$x = 7,5m$$

¿a?

$$a = b \cdot \cos \gamma$$

$$a = 15 \cdot \cos 30^\circ$$

$$a = 13m$$



$$c = y \quad \gamma = 50^\circ \quad \alpha = 90^\circ \quad b = 13m$$

Calculamos β

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ)$$

$$\beta = 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

$$c = \frac{b}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$c = \frac{13}{\operatorname{tg} 40^\circ} \rightarrow 15,49m$$

$$y = 15,49m$$

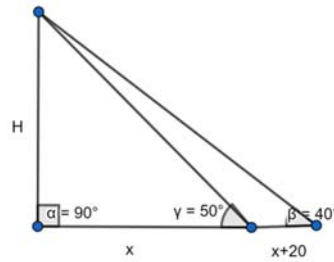
Calculamos la altura total

$$A_{\text{total}} = x + y \quad A = 7,5 + 15,49 \quad A = 22,99m$$

El edificio mide aproximadamente 23m de altura

39. Deseamos medir la altura de un edificio. Si lo observamos desde un punto A lo vemos con un ángulo de 50° . Ahora bien, si lo contemplamos desde 20m más lejos el ángulo es de 40° . ¿Cuál es la

altura del edificio? ¿A qué distancia está el punto B de dicho edificio?



$$\tan 50^\circ = \frac{H}{x} \rightarrow x \cdot \tan 50^\circ = H$$

$$\tan 40^\circ = \frac{H}{x+20} \rightarrow \tan 40^\circ (x+20) = H \rightarrow x \cdot \tan 40^\circ + 16,78 = H$$

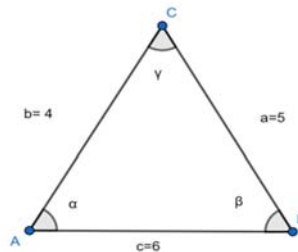
Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones, lo resolveremos por el método de igualación:

$$x \cdot \tan 40^\circ + 16,78 = x \cdot \tan 50^\circ \quad 0,3526x = 16,78 \quad x = 47,59m$$

$$\tan 50^\circ = \frac{H}{47,59} \quad H = 56,72m$$

Solución: la distancia con el punto B es de 47,59m y la altura es de 56,72m

40. Calcula todos los ángulos de un triángulo de lados 4,5 y 6. ¿Hay más de una solución? Si hay más de una, calcúlalas todas, si hay una sola, explica por qué.



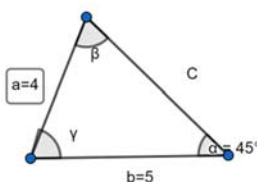
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA \quad cos\alpha = -\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$$

$$cos\alpha = -\frac{5^2 - 4^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = 0,5625 \rightarrow \alpha = arccos 0,5625 = 55,77^\circ$$

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} ; \frac{5}{sen55,77^\circ} = \frac{4}{sen\beta} ; sen\beta = \frac{4 \cdot sen55,77^\circ}{5} = 0,66 \rightarrow \beta = arcsen 0,66 = 41,41^\circ$$

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\gamma} ; \frac{5}{sen55,77^\circ} = \frac{6}{sen\gamma} \quad senc = \frac{sen55,77^\circ \cdot 6}{5} ; \gamma = 82,81^\circ$$

41. Justifica que hay EXACTAMENTE DOS triángulos con lados a = 4, b = 5 y ángulo α (el opuesto al lado a) igual a 45°.



Utilizamos el teorema del seno para obtener β

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \quad \frac{4}{sen45^\circ} = \frac{5}{sen\beta} \quad sen\beta = 0,8838 \quad \beta_1 = arcsen 0,8838 = 62,11^\circ$$

$$\gamma_1 = 180 - (62,11 + 45) = 72,89^\circ$$

Para obtener el valor de c volvemos a hacer el teorema del seno:

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 72,89^\circ} \rightarrow c = 5,406 \text{ cm}$$

Este es un triángulo, pero a partir del mismo $\operatorname{sen} \beta = 0,8838$, podemos obtener otro triángulo a partir del 2º cuadrante:

$$\beta_2 = 180^\circ - 72,89^\circ = 117,89^\circ \quad \gamma_2 = 180^\circ - (117,89^\circ + 45^\circ) = 17,11^\circ$$

$$\frac{4}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} 17,11^\circ} \quad c = 1,664 \text{ cm}$$

42. Resuelve los siguientes triángulos:

a) $\alpha = 45^\circ$, $b = 50 \text{ m}$, $a = 40 \text{ m}$

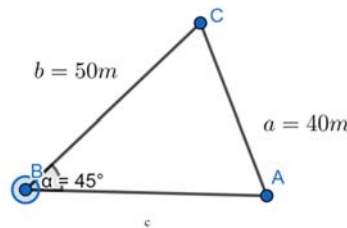
b) $\beta = 30^\circ$, $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$

c) $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $b = 20 \text{ m}$

d) $\alpha = 45^\circ$, $b = 10 \text{ m}$, $c = 6 \text{ m}$

e) $a = 5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$

a) $\alpha = 45^\circ$, $b = 50 \text{ m}$, $a = 40 \text{ m}$



Primeramente averiguamos el seno de β mediante el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \quad \frac{40}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} \beta} \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ \cdot 50}{40} = 0,88 \rightarrow \beta = \operatorname{arcsen} 0,88 = 62,11^\circ$$

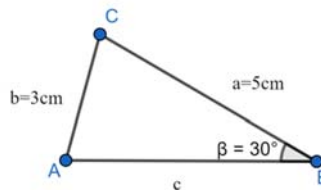
Al tener el valor de β y el valor de α podremos averiguar el valor de γ :

$$\gamma = 180^\circ - (62,11^\circ + 45^\circ) = 72,89^\circ$$

Para averiguar el lado c del triángulo, aplicamos el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad c^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 72,89^\circ \quad c = 54,06 \text{ cm}$$

b) $\beta = 30^\circ$, $a = 5 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$



Primeramente averiguamos el seno de α mediante el teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \quad \frac{5}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{3}{\operatorname{sen} 30^\circ} \quad \operatorname{sen} \alpha = 56,44^\circ$$

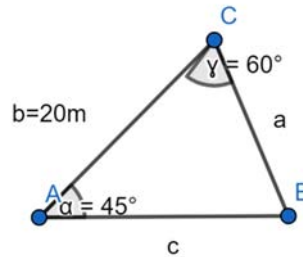
Al tener el valor de β y el valor de α podremos averiguar el valor de γ :

$$\gamma = 180^\circ - (56,44^\circ + 30^\circ) = 93,56^\circ$$

Para averiguar el lado c del triángulo, aplicamos el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad c^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos 93,56^\circ \quad c = \sqrt{35,86} = 6 \text{ cm}$$

c) $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $b = 20\text{m}$



El primer paso es restar 180° a los ángulos $\alpha = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$

$$\beta = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

El siguiente paso es averiguar a mediante el teorema del seno

$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} \quad \frac{a}{\text{sen}45^\circ} = \frac{20}{\text{sen}75^\circ} \quad a = \frac{\text{sen}45^\circ \cdot 20}{\text{sen}75^\circ} = 14,64\text{m}$$

Para averiguar c realizamos el teorema del coseno

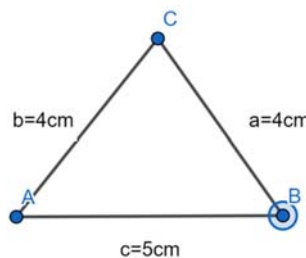
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad c^2 = 14,64^2 + 20^2 - 2 \cdot 14,64 \cdot 20 \cdot \cos60^\circ \quad c = 17,93\text{m}$$

d) $\alpha = 45^\circ$, $b = 10\text{m}$, $c = 6\text{m}$

$$\frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} \quad \frac{10}{\text{sen}\beta} = \frac{6}{\text{sen}45^\circ} \quad \text{sen}\beta = 1,178$$

No existe el triángulo ya que el seno es mayor que 1

e) $a = 5\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $c = 4\text{cm}$



En este caso, el triángulo resultante es un triángulo isósceles, por lo que:

$$\cos\alpha = \frac{2,5}{4} = 0,625 \quad \alpha = 51,32^\circ$$

Ahora calculamos el seno del ángulo β

$$\text{sen}\beta = \frac{2,5}{4} \quad \beta = 38,68^\circ$$

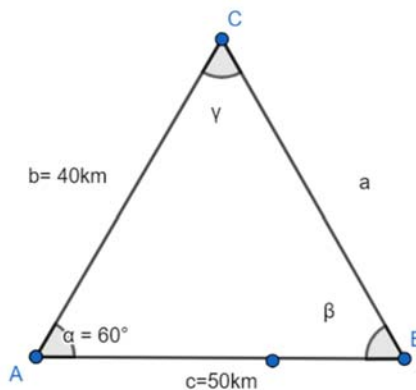
Hemos de multiplicar este resultado por 2 ya que solo es la mitad del ángulo

$$\beta = 38,68^\circ \cdot 2 = 77,36^\circ$$

Para averiguar el ángulo restante restamos los dos ángulos obtenidos a 180°

$$\gamma = 180^\circ - (51,32^\circ + 77,36^\circ) = 51,32^\circ$$

43. Comenzamos en una ciudad A y observamos un cartel. La ciudad B está a 50 Km y la ciudad C a 40 Km. Medimos el ángulo que forman las dos carreteras y resulta ser de 60° . ¿A qué distancia está B de C? Desde la ciudad B ¿Con qué ángulo se ven las otras dos ciudades? [En otras palabras: si consideramos el triángulo ABC, ¿cuánto vale el ángulo que corresponde al vértice B?]



Para hallar la distancia que hay entre las ciudades B y C debemos realizar el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad a^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ \quad a = 45,82 \text{ km}$$

Para hallar el ángulo que corresponde al vértice B utilizamos el teorema del coseno:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \rightarrow \frac{45,82}{\sin 60^\circ} = \frac{40}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = 0,756 \rightarrow \beta = \arcsen(0,756) = 49,11^\circ$$

Solución: la distancia entre las ciudades B y C es de 45,82km, y el ángulo correspondiente al vértice B es 49,11°

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcula las siguientes razones trigonométricas sin hacer uso de la calculadora.

- a) $\text{Sen } (-750^\circ)$
- b) $\text{Tg } (570^\circ)$
- c) $\text{Cos } (20\pi/3)$

a) $\text{Sen } (-750^\circ) = -\text{sen } (750^\circ) = -\text{sen } (30^\circ) = -1/2$

Solución: $-1/2$

PASOS:

1º Simplificar el ángulo negativo usando la simetría par/impar de las funciones trigonométricas.

2º Hallar el ángulo en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

3º Utilizar la tabla de valores trigonométricos.

b) $\text{Tg } (570^\circ) = \text{tg } (210^\circ) = \sqrt{3}/3$

Solución: $\sqrt{3}/3$

PASOS:

1º Hallar el ángulo en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ]$.

2º Utilizar la tabla de valores trigonométricos.

c) $\text{Cos } (20\pi/3) = -1/2$

Solución: $-1/2$

PASOS:

1º Calcular el valor trigonométrico.

2. A partir de las razones trigonométricas de la suma calcula las siguientes razones trigonométricas:

- a) $\text{Sen } (105^\circ)$
- b) $\text{Cos } (75^\circ)$

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA:

1º $\text{Sen}(a+b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$

2º $\text{Cos}(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$

3º $\text{Tg}(a+b) = \text{tg}(a) + \text{tg}(b) / 1 - \text{tg}(a) \cdot \text{tg}(b)$

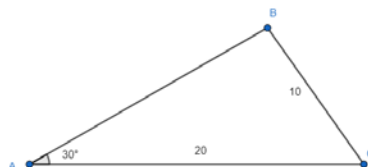
a) $\text{Sen } (105^\circ) = \text{Sen } (45^\circ + 60^\circ) = \text{Sen } (45^\circ) \cdot \text{Cos } (60^\circ) + \text{Cos } (45^\circ) \cdot \text{Sen } (60^\circ) = \sqrt{2}/2 \cdot 1/2 + \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2$
 $= \sqrt{6} + \sqrt{2} / 4$

Solución: $\sqrt{6} + \sqrt{2} / 4$

b) $\text{Cos } (75^\circ) = \text{Cos } (30^\circ + 45^\circ) = \text{Cos } (30^\circ) \cdot \text{Cos } (45^\circ) - \text{Sen } (30^\circ) \cdot \text{Sen } (45^\circ) = \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{2}/2 - 1/2 \cdot \sqrt{2}/2$
 $= \sqrt{6} - \sqrt{2} / 4$

Solución: $\sqrt{6} - \sqrt{2} / 4$

3. Sea un triángulo del que conocemos los siguientes datos $a = 10\text{cm}$, $b = 20\text{cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$. Calcula los demás datos del triángulo. Calcula el área del triángulo.

**TEOREMA DEL SENO:**

$$a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C$$

$$10 / \sin 30^\circ = 20 / \sin B ; \sin B = 20 \cdot \sin 30^\circ / 10 = 1 \longrightarrow B = \arccos(1) = 90^\circ$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$30^\circ + 90^\circ + C = 180^\circ ; C = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$

TEOREMA DEL COSENO:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cos C$$

$$c^2 = 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 60^\circ = 17,32 \text{ cm}$$

ÁREA DEL TRIANGULO:

$$\text{BASE} \cdot \text{ALTURA} / 2$$

$$10 \cdot 17,32 / 2 = 86,6 \text{ cm}^2$$

SOLUCIONES:

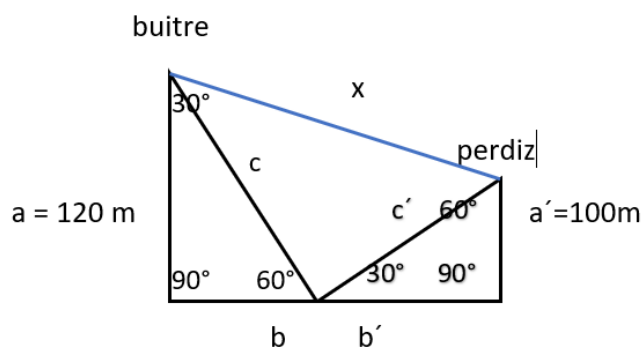
$$B = 90^\circ$$

$$C = 60^\circ$$

$$c = 17,32 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = 86,6 \text{ cm}^2$$

4. Un buitre vuela a 120 m de altura y formando un ángulo con la horizontal respecto de nosotros de 60° . En la misma dirección, pero formando un ángulo de 30° vuela una perdiz a 100m de altura. Si el buitre quiere comerse a la perdiz, pero sólo lo consigue si la distancia entre ambos es menor de 150m. ¿Puede el buitre cazar a la perdiz? ¿A qué distancia están?



$$\sin \alpha = \text{cateto opuesto} / \text{hipotenusa}; \sin 60^\circ = 120 / c; c = 120 / \sin 60^\circ = \mathbf{138,56 \text{ m}}$$

$$\sin \alpha = \text{cateto opuesto} / \text{hipotenusa}; \sin 30^\circ = 100 / c'; c' = 100 / \sin 30^\circ = \mathbf{200 \text{ m}}$$

$$a^2 + b^2 = c^2; \quad c^2 + c'^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{(138,56)^2 + (200)^2} = 243\text{m}$$

Solución: no puede cazar a la perdiz porque están a 243m.

5. Calcula sin utilizar la calculadora el resto de las razones trigonométricas (seno, coseno) de α , sabiendo que $\text{tg}(\alpha) = 1/2$ y $\alpha \in 3^{\text{er}}$ cuadrante.

Utilizamos la fórmula: $\text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$$(1/2)^2 + 1 = 1/\cos^2\alpha; \quad 1/4 + 1 = 1/\cos^2\alpha; \quad 5/4 = 1/\cos^2\alpha; \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{4/5}$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{4/5} = -2\sqrt{5}/5 \text{ (porque el coseno en el } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante es negativo)}$$

Utilizamos la fórmula: $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

$$(\sin\alpha)^2 + (-\sqrt{4/5})^2 = 1; \quad (\sin\alpha)^2 = 1 - (-\sqrt{4/5})^2; \quad (\sin\alpha)^2 = 1 - 4/5; \quad (\sin\alpha)^2 = 1/5 = \pm\sqrt{1/5}$$

$$\sin\alpha = -\sqrt{1/5} = -\sqrt{5}/5 \text{ (porque el seno en el } 3^{\text{er}} \text{ cuadrante es negativo).}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

Aplicando la fórmula del ángulo mitad

$$6 \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \right)^2 + \cos x = 1 \quad ; \quad 3 \cdot (1 + \cos x) + \cos x = 1 \quad ; \quad 4 \cos x = -2$$

$$\cos x = \frac{-2}{4} \rightarrow \cos x = \frac{-1}{2}$$

Como el coseno es negativo el ángulo puede estar en el 2º cuadrante o en el 3º

$$\cos 60^\circ = 0,5$$

$$2^\circ \text{ cuadrante: } 180^\circ - 60^\circ; x = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$3^\circ \text{ cuadrante: } 180^\circ + 60^\circ; x = 240^\circ + 360^\circ k$$

b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

1. Elevo toda la ecuación al cuadrado para quitar la raíz

$$(\sin x + \cos x)^2 = (\sqrt{2})^2$$

2. La raíz se va con el exponente

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2$$

3. Aplico la formula del cuadrado de una suma que es "cuadrado del primero más el cuadrado del segundo más el doble del primero por el segundo".

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2$$

4. Sabemos que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ por lo cual:

$$1 + 2\sin x \cdot \cos x = 2$$

5. Sabemos que $\sin(2a) = 2\sin a \cdot \cos a$

$$2\sin x \cdot \cos x = 1 \quad \sin 2x = 1$$

$$2x = 90^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 45^\circ + 180^\circ k$$

SOLUCIÓN

$$x = 45^\circ + 360^\circ k$$

$$x = 225^\circ + 360^\circ K$$

7. Resuelve los siguientes sistemas

a) EC1: $\text{sen}x + \text{sen}y = 1$

EC2: $x + y = \pi$

1. Despejo x en la EC2: $x = \pi - y$

2. sustituyo x en la EC1:

$$\text{sen}(\pi - y) + \text{sen}y = 1 \quad \text{sen}\pi \cdot \cos y - \cos \pi \cdot \text{sen}y + \text{sen}y = 1$$

3. sabemos que: $\text{sen}\pi = 0$ y que $\cos \pi = -1$

sustituyendo $0 - (-1) \cdot \text{sen}y + \text{sen}y = 1$

$$2\text{sen}y = 1 \quad \text{sen}y = \frac{1}{2}$$

$$y = 30^\circ + 360^\circ k = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad ; \quad y = 150^\circ + 360^\circ k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{5\pi}{6} - 2\pi k \quad ; \quad x = \pi - \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) = \frac{\pi}{6} - 2\pi k$$

SOLUCIONES: Si $x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi k$ $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; si $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi k$ $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

b) EC1 $\text{sen}x + \text{sen}y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

EC2 $\text{sen}x - \text{sen}y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Hacemos $X = \text{sen}(x)$ $Y = \text{sen}(y)$

$$X + Y = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$X - Y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

sumamos las 2 ecuaciones :

$$2X = \sqrt{3} \quad , \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{sustituyendo o restando las ecuaciones} \quad Y = \frac{1}{2}$$

$$X = \text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad Y = \text{sen}(y) = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ + 360^\circ k \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ k$$

$$y = 30^\circ + 360^\circ k \rightarrow y = 150^\circ + 360^\circ k$$

c) EC1: $x + y = \frac{\pi}{2}$

EC2: $\text{sen}x + \text{sen}y = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Despejando x en la primera ecuación : $x = \frac{\pi}{2} - y$ sustituyendo en la segunda

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad ; \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(y) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \text{sen}(y) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\cos(y) + \text{sen}(y) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

SABIENDO QUE $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ y entonces $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$

$$\sqrt{1 - \text{sen}^2 y} + \text{sen}y = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$1 - \text{sen}^2 y = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \text{sen}y\right)^2$$

$$1 - \operatorname{sen}^2 y = \operatorname{sen}^2 y - \sqrt{6} \cdot \operatorname{sen} y + \frac{3}{2}$$

$$2\operatorname{sen}^2 y = \sqrt{6} \cdot \operatorname{sen} y - \frac{1}{2}$$

$$2a^2 - \sqrt{6} \cdot a - \frac{1}{2} = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = y_1 = 75^\circ + 360^\circ k$$

$$105^\circ + 360^\circ k$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = y_2 = 15^\circ + 360^\circ k$$

$$165^\circ + 360^\circ k$$

8. Demuestra las siguientes igualdades

a) $\cos(x + y + z) = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \cos x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos z$

Tomando $\cos(x + y + z)$

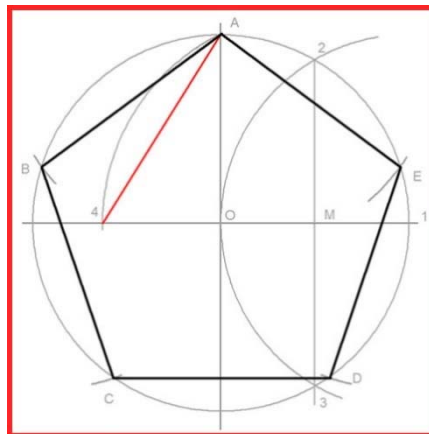
$$\begin{aligned} \cos((x + y) + z) &= \cos(x + y) \cdot \cos z - \operatorname{sen}(x + y) \cdot \operatorname{sen} z = \\ &= (\cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y) \cdot \cos z - (\operatorname{sen} x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen} y) \cdot \operatorname{sen} z = \\ &= \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos z - (\operatorname{sen} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sen} z + \cos x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} z) = \\ &= \cos x \cdot \cos y \cdot \cos z - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \cos z - \operatorname{sen} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sen} z - \cos x \cdot \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} z \end{aligned}$$

b) $\frac{\operatorname{sen}^2(2a)}{(1 - \cos^2 a)(\cos a)} = 4 \cdot \cos a$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(2a)}{(1 - \cos^2 a)(\cos a)} = \frac{(2\operatorname{sen} a \cdot \cos a)^2}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a} = \frac{4\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a} = 4 \cos(a)$$

VERDADERO

9. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en un circunferencia de 30cm de radio. calcula su área.



$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \quad \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \frac{l}{30}$$

PARA CALCULAR EL LATERAL/LADO

$$30 \cdot \operatorname{sen} 36^\circ = \frac{\ell}{2}$$

$$2 \cdot 30 \cdot \operatorname{sen} 36^\circ = \ell$$

$$\ell = 35,27 \text{ cm}$$

PARA CALCULAR EL ÁREA DEL PENTÁGONO

$$ap = \cos 36^\circ \cdot 30 = 24,27 \text{ cm}$$

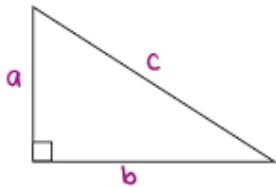
PARA CALCULAR EL PERÍMETRO

$$p = 35,27 \cdot 5 = 176,35 \text{ cm}$$

PARA CALCULAR EL ÁREA

$$A = \frac{p \cdot ap}{2} = \frac{176,35 \cdot 24,27}{2} = 2.140 \text{ cm}^2 = 21,40 \text{ m}^2$$

10. En las señales de tráfico indican la pendiente de la carretera la información que nos dan es el porcentaje de subida en función del avance del coche. Calcula el ángulo para una pendiente del 15 por ciento.



$$\alpha = ? \quad c=100 \quad a=15 \quad ; \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{15}{100} = 0,15 \quad \alpha = 8,63^\circ$$

Matemáticas I

Capítulo 7: Funciones

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Adrián, Álvaro, Carlota, Celia, Diego, Gabriel, Gonzalo, Inocencio, Irene, Javier, Jose, Lucía N., Lucía R., Manuel J., Manuel L., María, Nacho, Natalia, Pablo, Sara C., Sara D., Sara M., Víctor, Cristina, Hugo, María C., Pilar y Laura.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

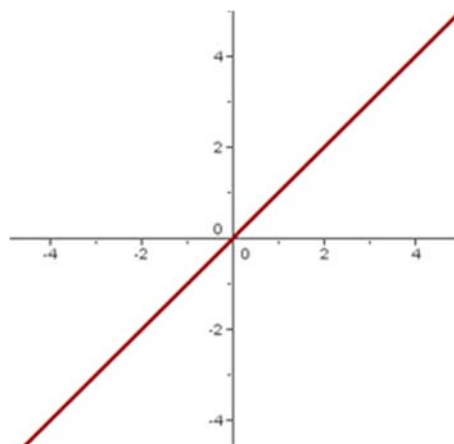
Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Realiza una tabla de valores y representa la función identidad.

$$f(x)=x$$

y	-1	0	1	
x	-1	0	1	



2. Calcula las imágenes de los números: -3 ; 0 ; 1 ; $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{3}{2}$; 10 por la función

$$f(x) = -x^2 + 2x - 3$$

$$f(-3) = -(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = -18$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{-1}{2} - 3 = -4,25$$

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 - 3 = -2$$

$$f(\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} - 3 = -5 + 2\sqrt{2} = -2,17$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = -2,25$$

$$f(10) = -(10)^2 + 2 \cdot 10 - 3 = -83$$

3. Copia en tu cuaderno las siguientes gráficas de funciones e indica si el índice es par o impar en las representaciones de las siguientes funciones raíz:

FUNCIÓN	ÍNDICE		FUNCIÓN	ÍNDICE	
	Par	Impar		Par	Impar
		X		X	
	X				X
1 impar		2 par	3 par		4 impar

4. Realiza en tu cuaderno una tabla de valores y la gráfica para un caso similar, suponiendo que el número de bacterias se duplica cada hora

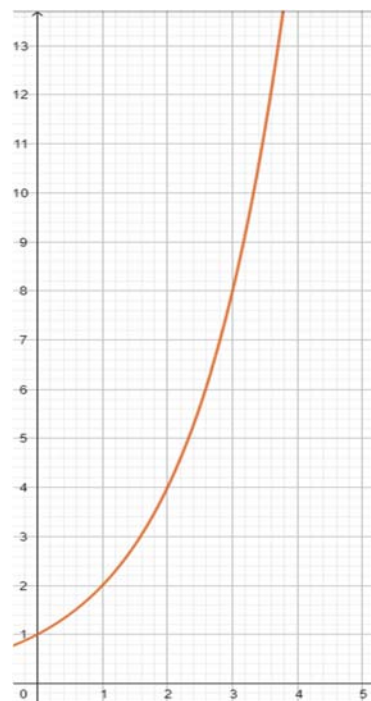
Le damos valores entre 0 y 5

"x" es el número de horas que pasan y "y" es el número de bacterias que hay.

la ecuación sería: $y = f(x) = 2^x$

Esta es la representación gráfica:

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32



5. Vuelve a realizar el ejercicio anterior pero ahora suponiendo que el número de bacterias queda dividido por 2 cada hora

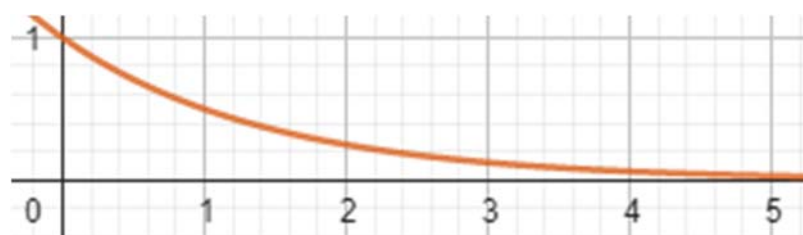
Le damos valores entre 0 y 5

"X" es el número de horas que pasan y "y" es el número de bacterias que hay.

la ecuación sería: $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Esta es la representación gráfica:

x	y
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,0625
5	0,03125



Observamos que, en el primer caso, los valores de “y” aumentan mucho más deprisa y enseguida se salen del papel. Mientras que los valores de “x” aumentan de 1 en 1 los valores de y se van multiplicando por 2. Esto se llama **crecimiento exponencial**. En el segundo caso, como en lugar de multiplicar se trata de dividir, tenemos un **decrecimiento exponencial**.

6. En tu cuaderno, representa conjuntamente las gráficas de $y = f(x) = x^2$. (función potencial) y $f(x) = 2^x$. (función exponencial), con valores de “x” entre 0 y 5. Observa la diferencia cuantitativa entre el crecimiento potencial y el crecimiento exponencial.

Hacemos las 2 tablas de valores.

Le damos valores entre 0 y 5

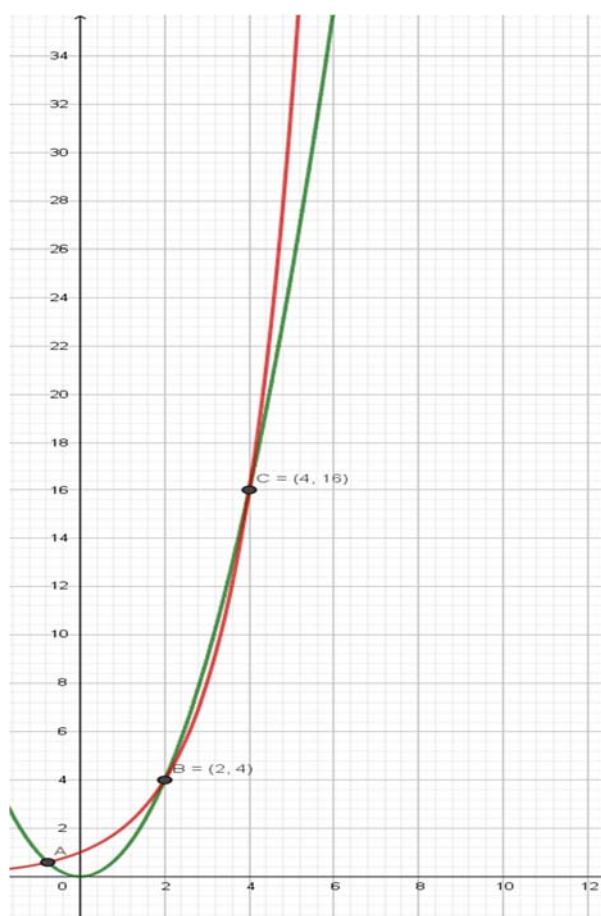
Hacemos la representación conjunta:

$$y = f(x) = 2^x$$

x	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

$$y = f(x) = x^2$$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25



7. Utilizando la calculadora, haz en tu cuaderno una tabla de valores y representa las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$.

$$f(x) = e^x \rightarrow y = e^x$$

Sustituimos x por algunos valores, para así obtener y.

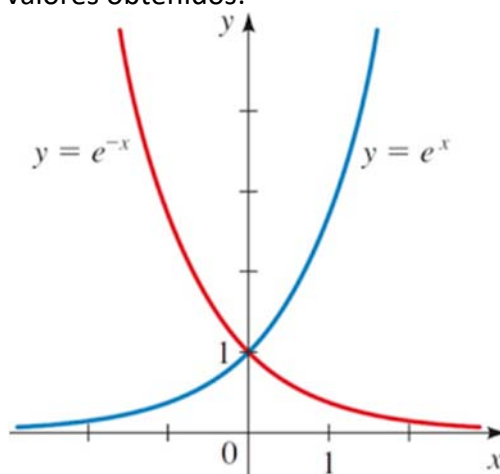
x	-2	-1	0	1	2	3
y	0,135	0,367	1	2,718	7,389	20,085

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow y = e^{-x}$$

Sustituimos al igual que antes en esta ecuación:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	7.389	2,718	1	0,367	0,135	0,049

Representamos en la gráfica los valores obtenidos:



8. Una persona ha ingresado una cantidad de 5 000 euros a interés del 2% en un banco, de modo que cada año se capital de multiplica 1,02.

a. Escribe en tu cuaderno una tabla de valores con el dinero que tendrá esta persona al cabo de 1, 2, 3, ,4 ,5 y 10 años.

b. Indica la fórmula de la función que expresa el capital en función del número de años.

c. Representa en tu cuaderno gráficamente dicha función. Piensa bien que unidades deberás utilizar en los ejes.

Hallar la ecuación. Dice que se cantidad ingresada es de 5 000 euros y que cada año se le multiplica 1,02 de intereses, por lo que la ecuación sería la siguiente:

$$f(x) = 5\,000 \cdot 1,02^x \rightarrow C = 5\,000 \cdot 1,02^x$$

'x' siendo los años que pasan e 'y' siendo la cantidad de dinero resultante obtenida cada año.

a) Se hace una tabla de valores:

x (años)	1	2	3	4	5	10
y (capital)	5 100	5 202	5 306,04	5 412,160	5 520,404	6 094,972

$$f(1) = 5\,000 \cdot 1,02^1 = 5\,000 \cdot 1,02 = 5\,100$$

$$f(2) = 5\,000 \cdot 1,02^2 = 5\,000 \cdot 1,0404 = 5\,202$$

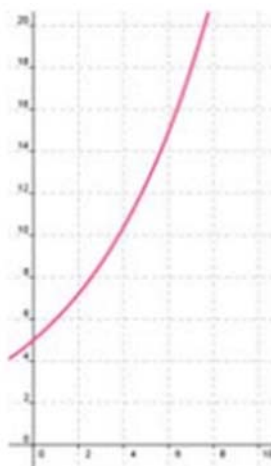
$$f(3) = 5\,000 \cdot 1,02^3 = 5\,306,04$$

$$f(4) = 5\,000 \cdot 1,02^4 = 5\,412,160$$

$$f(5) = 5\,000 \cdot 1,02^5 = 5\,520,404$$

$$f(10) = 5\,000 \cdot 1,02^{10} = 6\,094,972$$

c) en el eje de abscisas se representarán los años y en el eje de coordenadas el capital.



9. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multiplique por $\frac{1}{3}$ cada hora. Si la cantidad a las 9 de la mañana es de 10 millones de bacterias:

a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora, desde las 3 de la mañana a las 12 de mediodía (observa que tienes que calcular también “hacia atrás”).

b) Representa gráficamente estos datos.

Hallar la ecuación. Si la cantidad de bacterias es de 10 000 000 y se multiplica por $\frac{1}{3}$ cada hora la ecuación sería la siguiente: $f(x) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Pero, dice que es a las nueve cuando se tiene ese número de bacterias por lo que se tendrían que restar el número de la hora a 9 para saber las bacterias:

$$f(x) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-x}$$

Siendo ‘x’ el número de la hora en el que queremos saber las bacterias existentes y siendo ‘y’ el número de bacterias que hay.

x (horas)	3	4	5	6	7
y (bacterias)	13.717,4	41.152,2	123.456,7	370.370,3	1.111.111,1
x (horas)	8	9	10	11	12
y (bacterias)	3.333.333,3	10.000.000	30.000.000	90.000.000	270.000.000

$$f(3) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-3} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 13.717,4$$

$$f(4) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-4} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 41.152,2$$

$$f(5) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-5} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 123.456,7$$

$$f(6) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-6} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 370.370,3$$

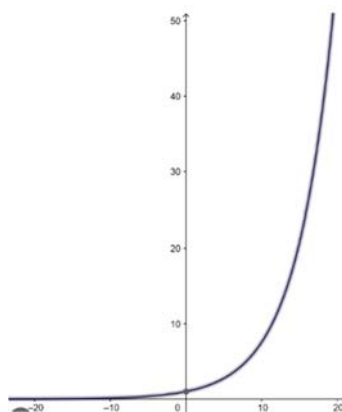
$$f(7) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-7} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1.111.111,1$$

$$f(8) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-8} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 3.333.333,3$$

$$f(10) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-10} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 10\,000\,000 \cdot 3 = 30\,000\,000$$

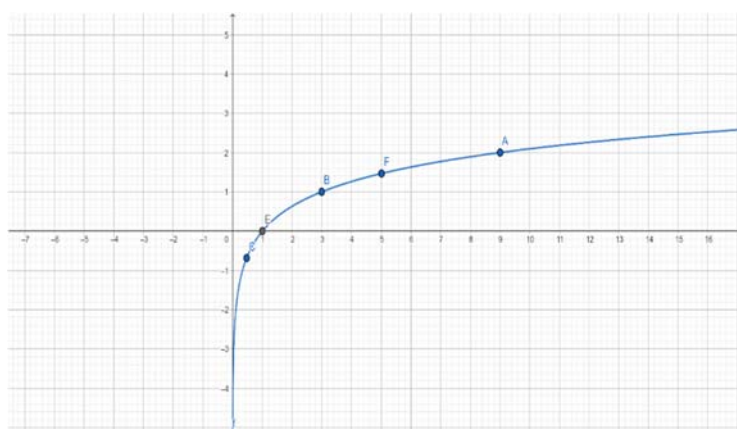
$$f(11) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-11} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 90.000.000$$

$$f(12) = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-12} = 10\,000\,000 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 270.000.000$$



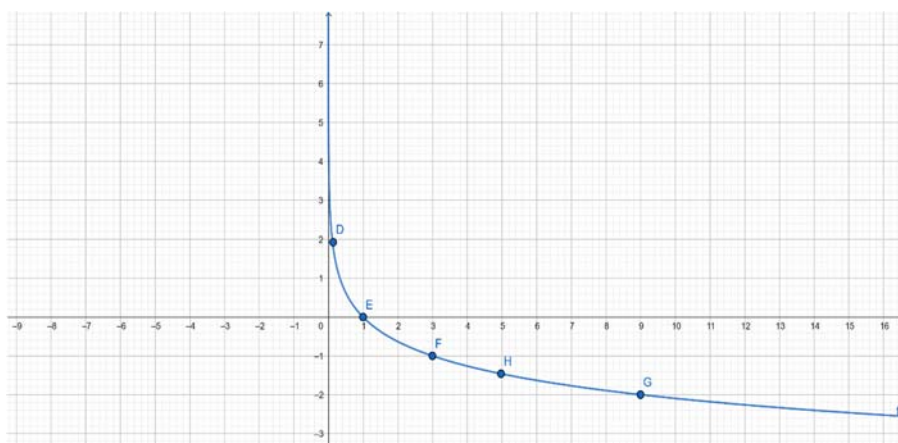
10. Representa en tu cuaderno, mediante tablas de valores, las gráficas de las siguientes funciones :

a) $f(x) = \log_3(x)$



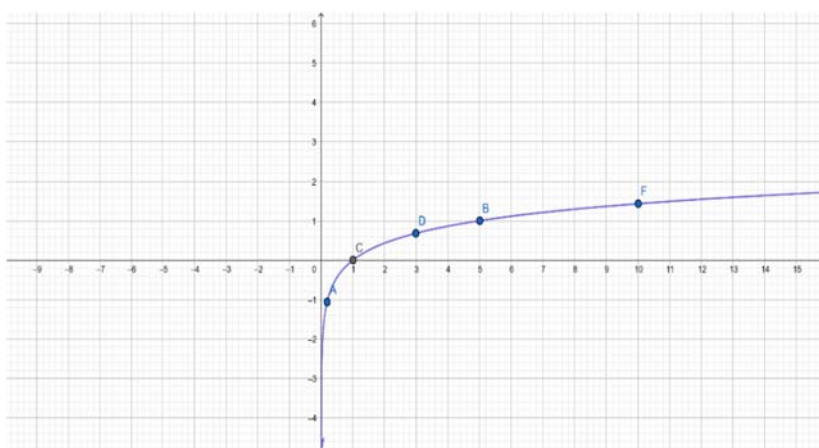
x	$\log_3 x$
0,1	-2,09
0,5	-0,63
0,7	-0,32
1	0
3	1
5	1,46
9	2

b) $f(x) = \log_{1/3}(x)$



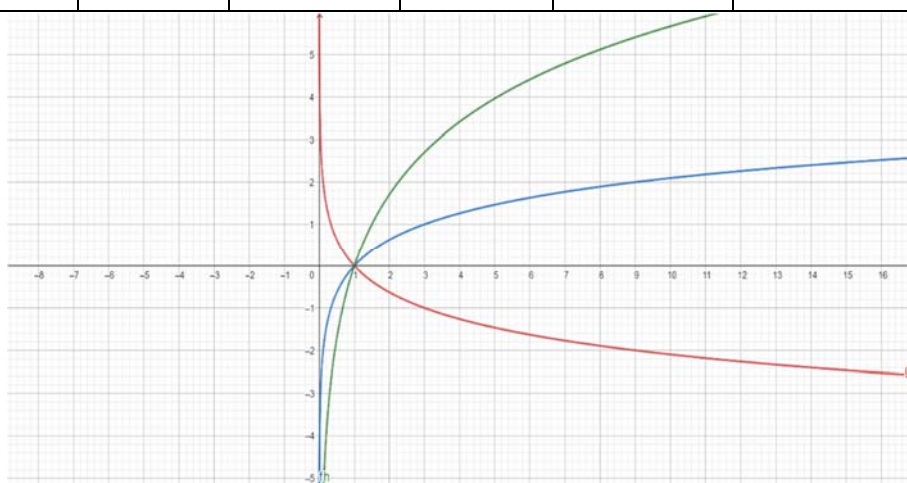
x	$\log_{1/3} x$
0,1	2,09
0,5	0,63
0,7	0,32
1	0
3	-1
5	-1,46
9	-2

c) $f(x) = \log_5(x)$



x	$\log_5 x$
0,1	-1,43
0,5	-0,43
0,7	-0,22
1	0
3	0,68
5	1
10	1,43

x	1/3	2/3	1	3/2	3	4
$y = \log_3 x$	-1	-0.37	0	-0.37	1	1.26
$y = \log_{1/3} x$	1	0.37	0	0.37	-1	-1.26
$y = \log_{1.5} x$	-2.71	-1	0	1	2.71	3.42

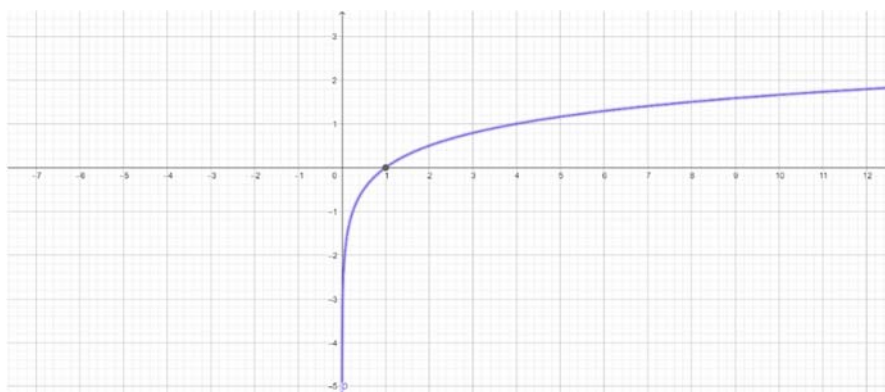


11. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas, sabiendo que son funciones logarítmicas.

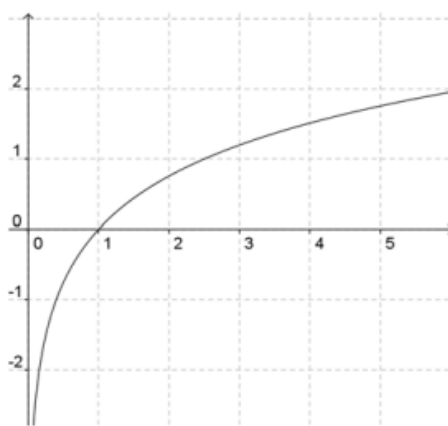
a) $y = \log_b x$

Cogemos un punto de la gráfica (4,1)

$$\log_b 4 = 1, \quad b^1 = 4 \quad b = 4 \quad y = \log_4 x$$



b) $y = \log_b x$



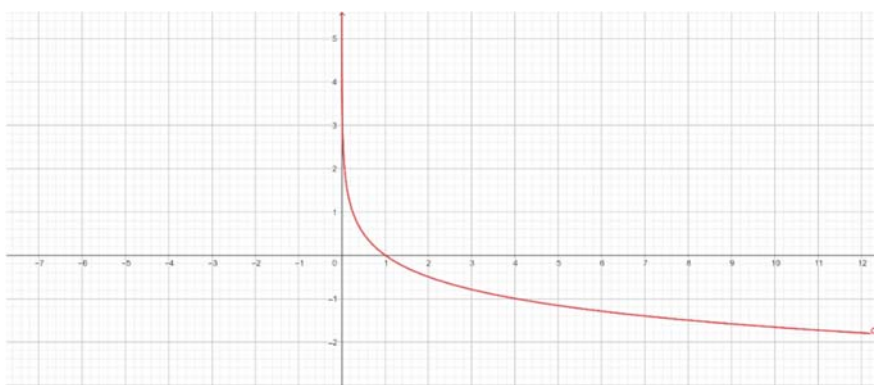
Cogemos un punto de la gráfica (6,2) y los sustituimos en $y = \log_b x$

$$\log_b 6 = 2 \quad b^2 = 6 \quad (b^2)^{1/2} = (6)^{1/2} \quad b = 6^{1/2} \quad y = \log_{\sqrt{6}} x$$

c) $y = \log_b x$

Cogemos un punto de la gráfica (4, -1),

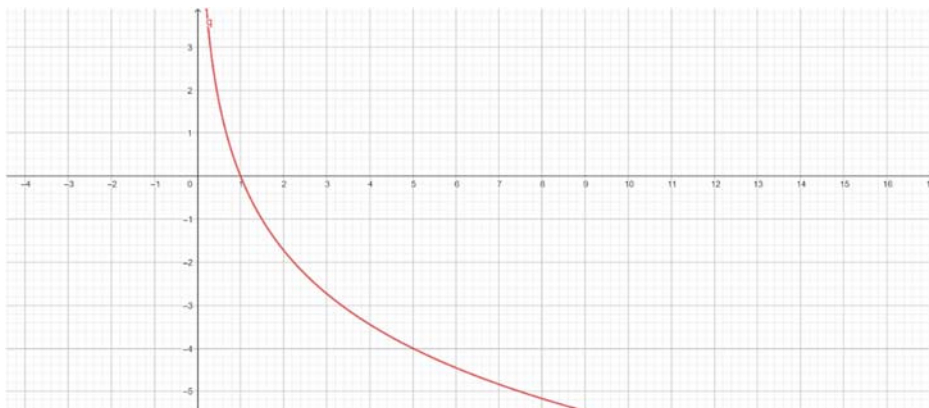
$$\log_b 4 = -1 \quad (b)^{-1} = 4 \quad b = 4^{-1} \quad b = \frac{1}{4} \quad y = \log_{1/4} x$$



d) $y = \log_b x$

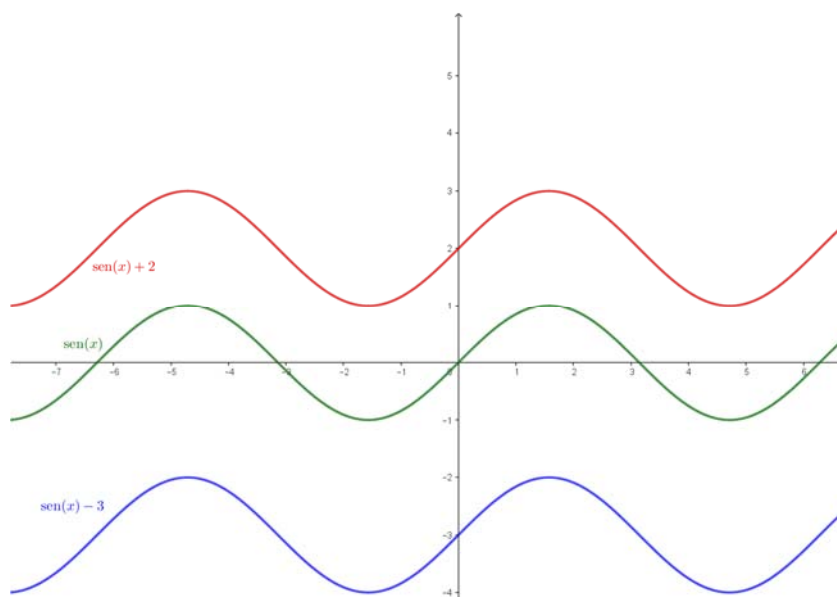
Cogemos un punto de la gráfica (5,-4)

$$\log_b 5 = -4 \quad b^{-4} = 5 \quad (b^{-4})^{-1/4} = (5)^{-1/4} \quad b = 5^{-1/4} \quad y = \log_{5^{-1/4}} x$$



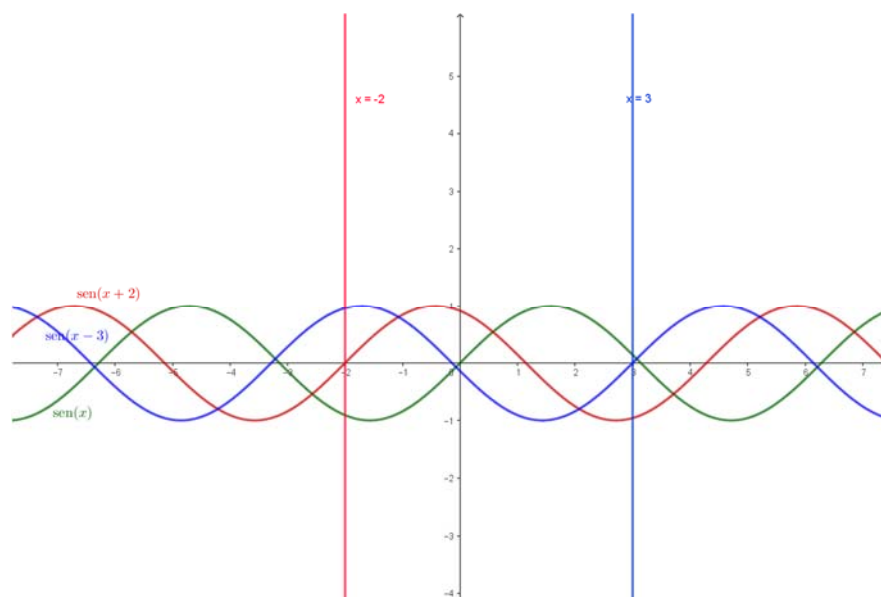
12. Utiliza la función seno ($y = \sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(x)+k$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- **La gráfica de la función:** Se traslada hacia arriba o hacia abajo
- **El período de la función:** No cambia
- **El signo de la constante k :** $k > 0$ hacia arriba, $k < 0$ hacia abajo



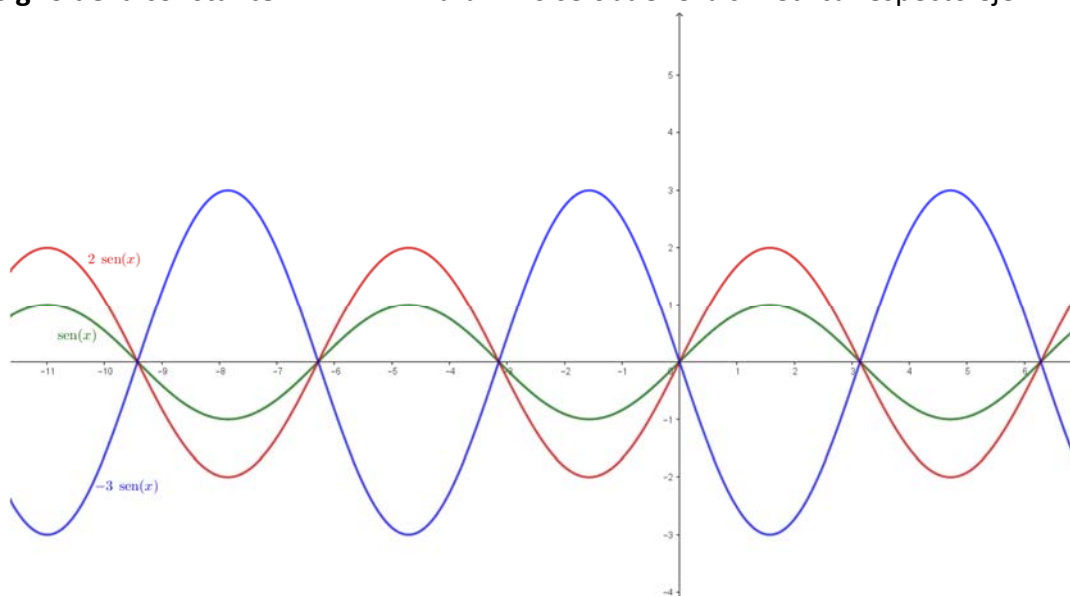
13. Utiliza la función seno ($y = \sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(x+k)$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- **La gráfica de la función:** Se traslada a izquierda o derecha
- **El período de la función:** No cambia
- **El signo de la constante k :** $k > 0$ hacia izquierda, $k < 0$ hacia derecha



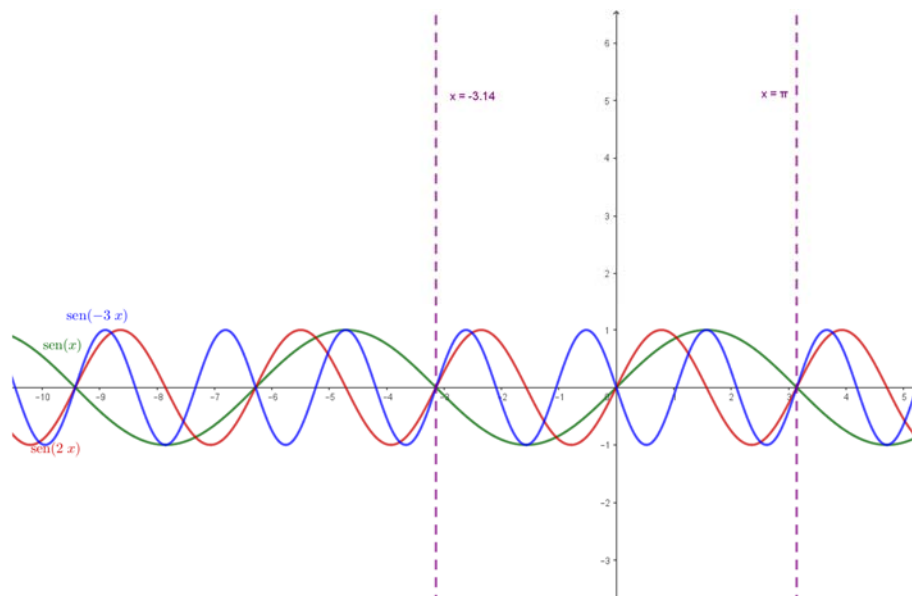
14. Utiliza la función seno ($y = \sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $k \cdot f(x)$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- La gráfica de la función: Aumenta o disminuye la amplitud de la gráfica
- El período de la función: No cambia
- El signo de la constante k : Para $k < 0$ se obtiene la simétrica respecto eje X



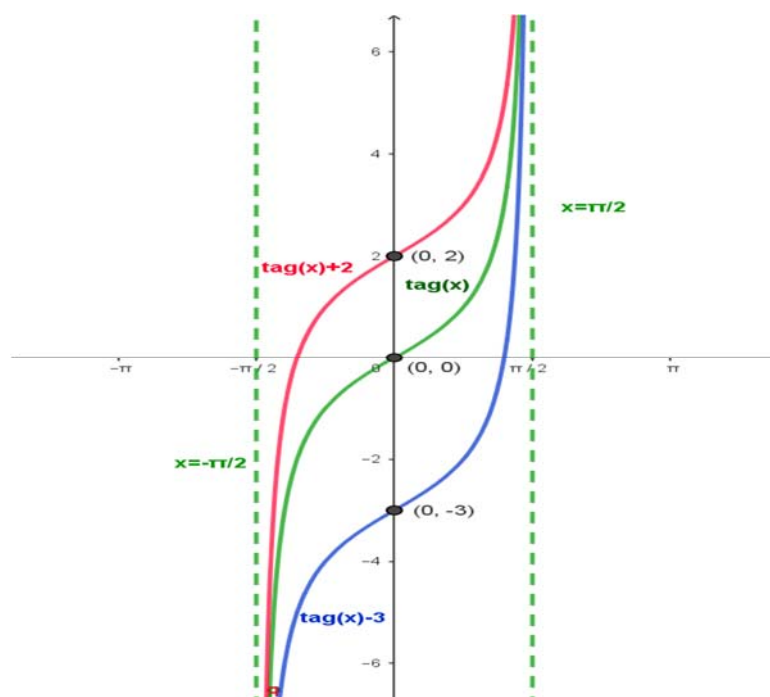
15. Utiliza la función seno ($y = \sin(x)$) para investigar cómo influye una transformación del tipo $f(kx)$ en la función $f(x)$ con respecto a:

- La gráfica de la función: Cambia el periodo y la frecuencia
- El período de la función: Valor absoluto de $k > 1$ periodo π/k , si es < 1 , $k\pi$
- El signo de la constante k : Si $k < 0$ se obtiene la simétrica



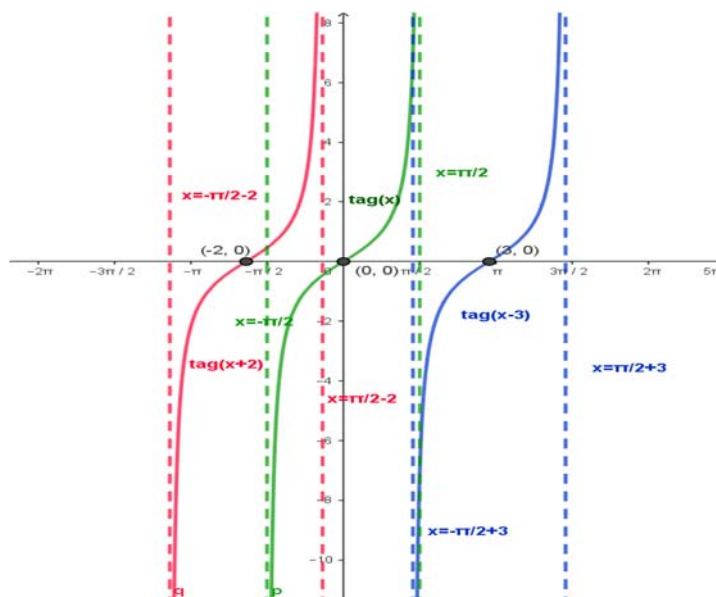
16. Abre un nuevo archivo de GeoGebra, representa la función tangente: $f(x) = \tan(x)$, estudia su comportamiento respecto a transformaciones de la forma $f(x)+k$, $f(x+k)$, $k \cdot f(x)$ y $f(k \cdot x)$ y busca alguna diferencia con la función $\cos(x)$ respecto a estas transformaciones.

o $f(x)+k$



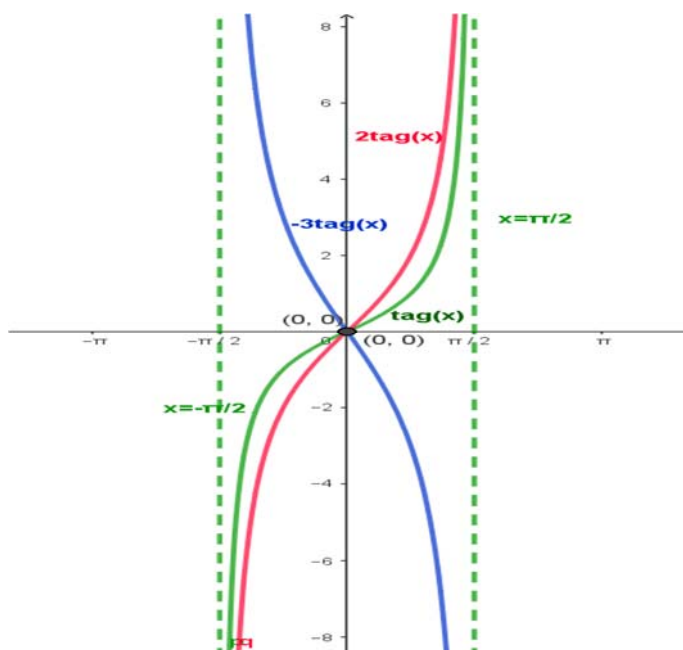
- La gráfica de la función: Se desplaza hacia arriba o hacia abajo
- El período de la función: No cambia
- El signo de la constante k : $k > 0$ hacia arriba, $k < 0$ hacia abajo

o $f(x+k)$



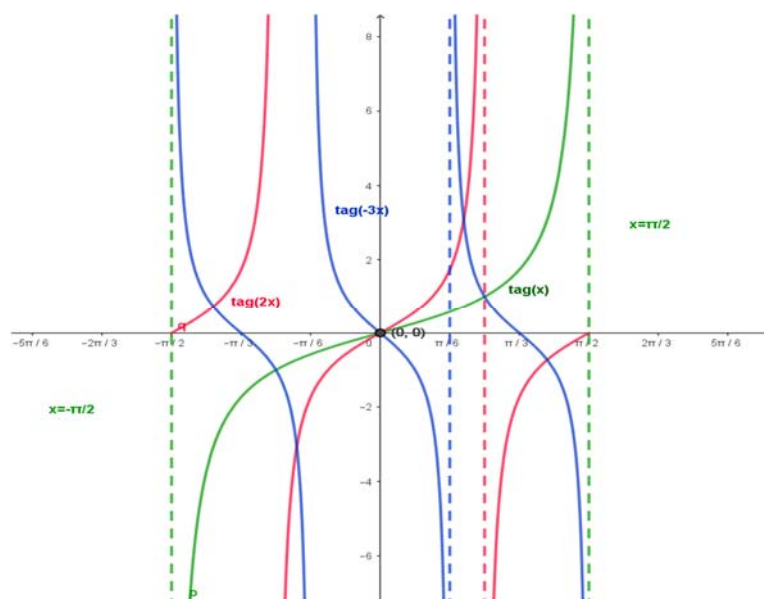
- La gráfica de la función: Se desplaza hacia izquierda o derecha
- El período de la función: No cambia
- El signo de la constante k : $k > 0$ hacia izquierda, $k < 0$ hacia derecha

o $kf(x)$



- La gráfica de la función: Aumenta o disminuye la amplitud de la gráfica
- El período de la función: No cambia
- El signo de la constante k : Para $k < 0$ se obtiene la simétrica respecto eje X

o $kf(x)$



- **La gráfica de la función:** Cambia el periodo y la frecuencia
- **El período de la función:** Valor absoluto de $k > 1$ periodo $\pi/2k$, si es < 1 , $k\pi/2$
- **El signo de la constante k :** Si $k < 0$ se obtiene la simétrica

17. Esboza, sin utilizar GeoGebra, las gráficas de las funciones $f(x) = -\sin(x+1)$, $g(x) = 2\cos(3x)$ y $h(x) = \sin(3x+2)$, calculando el periodo de cada una de ellas. Comprueba con GeoGebra los resultados y justifícalos.

PERIODOS:

$$f(x) = -\sin(x+1) \quad 2\pi$$

$$g(x) = 2\cos(3x) \quad 2\pi/3$$

$$h(x) = \sin(3x+2) \quad 2\pi/3$$

18. Calcula el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)}{(x+1)} = \frac{1(1-3)}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

19. Calcula el límite:

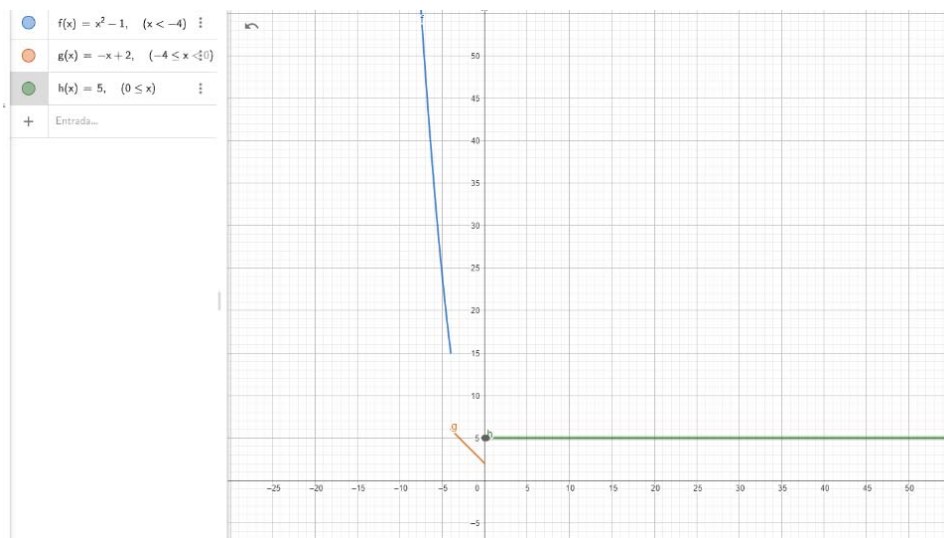
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{6}+x-3}{x^2-9} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(\sqrt{6}+x-3)(\sqrt{6}+x+3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{6}+x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(\sqrt{6}+x)^2 - 3^2}{(x-3)(x+3)(\sqrt{6}+x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6+x-9}{(x-3)(x+3)(\sqrt{6}+x+3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x-3}{(x-3)(x+3)(\sqrt{6}+x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{(x+3)(\sqrt{6}+x+3)} \right) = \left(\frac{1}{(3+3)(\sqrt{6}+3+3)} \right) = \left(\frac{1}{6 \cdot 6} \right) = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

20. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los puntos que tienes que calcular.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -4 \\ -2 + 2 & -4 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \end{cases}$

Puntos: -6, -4, -1/2, -0,2, 0, 1, 3/2, 4

$y = x^2 - 1$	$y = -x + 2$	$y = 5$																										
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>-4</td><td>15</td></tr><tr><td>-6</td><td>35</td></tr></table>	x	y	-4	15	-6	35	<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>-4</td><td>6</td></tr><tr><td></td><td>2,5</td></tr><tr><td>-0,2</td><td>2,2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td></tr></table>	x	y	-4	6		2,5	-0,2	2,2	0	2	<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>0</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>3/2</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td></tr></table>	x	y	0	5	1	5	3/2	5	4	5
x	y																											
-4	15																											
-6	35																											
x	y																											
-4	6																											
	2,5																											
-0,2	2,2																											
0	2																											
x	y																											
0	5																											
1	5																											
3/2	5																											
4	5																											



b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < -3 \\ 2 & -3 \leq x < 2 \\ \sqrt{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

Puntos: -5, -3, -1/2, -0'2, 0, 2, 9/4, 4

$y = \frac{1}{x}$

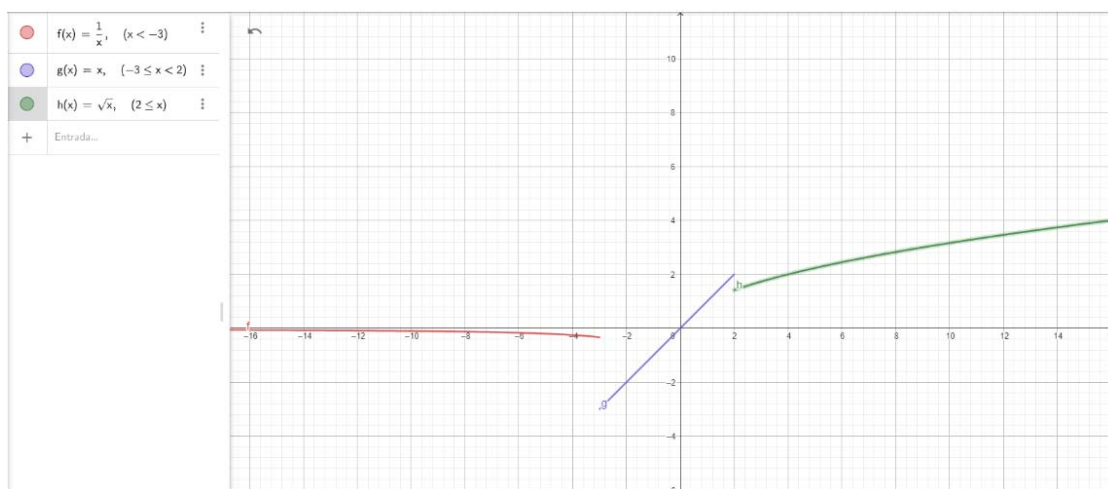
x	y
-3	-0,3
-5	-0,2

$y = x$

x	y
-3	-3
-1/2	-1/2
-0'2	-0,2
0	0
2	2

$y = \sqrt{x}$

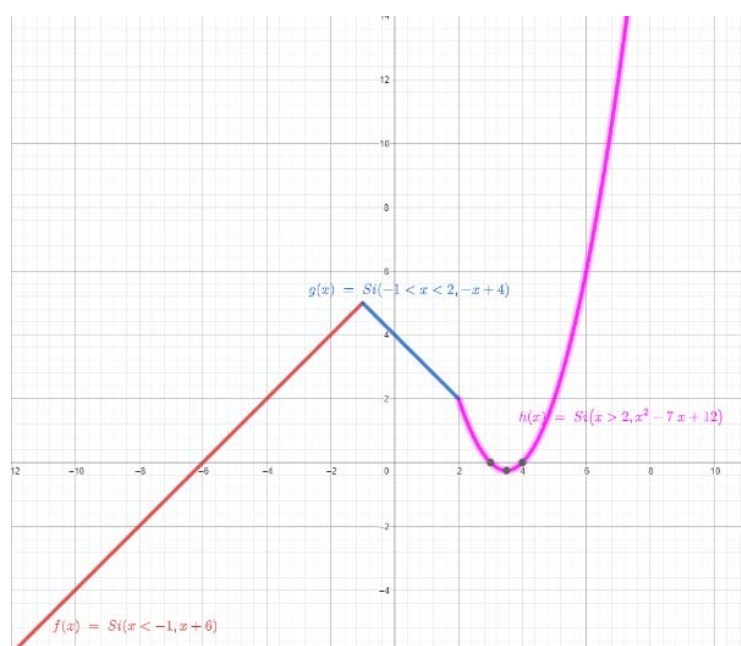
x	y
2	1,41
9/4	1,5
4	2



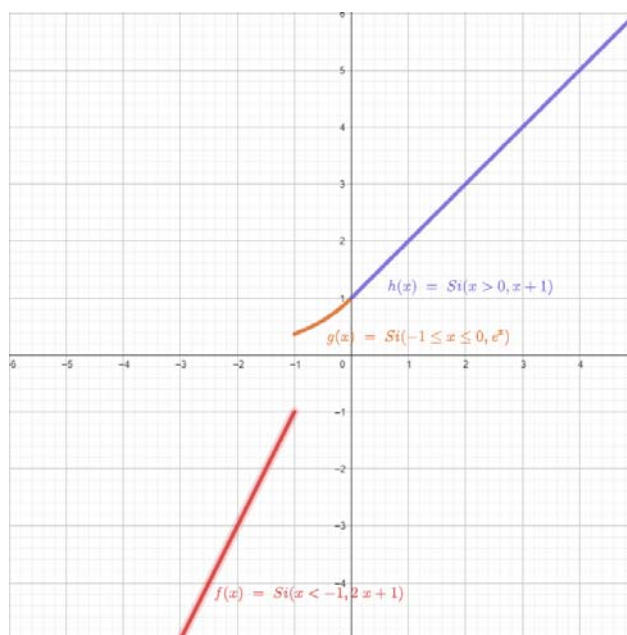
21. Utiliza Geogebra para representar las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ -x + 4 & \text{si } x \in [-1, 2] \\ x^2 - 7x + 12 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ e^x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ -x + 4 & \text{si } x \in [-1, 2] \\ x^2 - 7x + 12 & \text{si } x \in (2, \infty) \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ e^x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



22. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, por saco de naranjas, en la segunda fila, las cantidades de demandas de naranjas por semanas y en la tercera fila las cantidades ofrecidas.

1Paso: Realizar una tabla con los datos que nos da el ejercicio.

Precio por saco(euros)	8	6	4	2
Cantidad demanda (miles de sacos por semana)	50	100	200	400
Cantidad ofrecida (miles de sacos por semana)	300	250	200	100

2Paso: Dibujamos o hacemos una gráfica con los datos de esta tabla.

3Paso: Representamos en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas.

4Paso: Unimos con un trazo continuo ambas curvas tanto la cantidad de demanda y de cantidad de ofrecida.

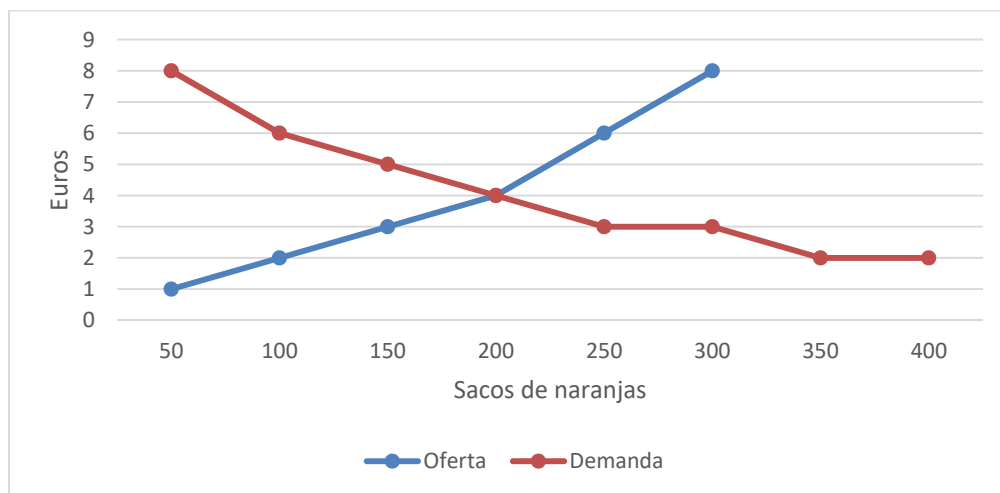
5Paso: Es que debemos saber que la curva de cantidad demandada es un ejemplo de función de demanda y la curva de cantidad ofrecida es una función de oferta.

6Paso: Lo que hacemos es realizar una gráfica y ponemos en el eje vertical llamado eje x los precio por saco de naranjas, y en eje horizontal o también llamado eje y ponemos la cantidad demandada y cantidad ofrecida.

7Paso: Es poner los datos del eje x de menor a mayor e igual con el eje y.

8Paso: Ponemos los puntos según los datos de la tabla y a esos puntos le ponemos una letra y una vez que tengas los puntos los unes y obtienes la primera curva y lo mismo con la segunda en este caso de

cantidad ofrecida ponemos los puntos como antes en la gráfica los dibujas, luego los unimos y obtenemos la segunda curva.



9Paso: Observamos que la función de demanda es una función decreciente, pues al aumentar los precios el consumidor demanda menor cantidad del producto en este caso las naranjas.

10Paso: La función de ofrecida excede la cantidad demandada, y al haber depósitos de mercancía no vendida la competencia entre vendedores hará que el precio baje hasta un punto de equilibrio.

Pregunta b) Determina de forma aproximada en la gráfica anterior el punto de equilibrio de ambas gráficas.

El punto de intersección se encuentra en (200,4), la oferta de 200 sacos y el precio de 4 euros

23. Los datos de la tabla indican en la primera fila, los precios, en euros, del alquiler de un piso de $70m^2$, en la segunda fila, la cantidad de personas que desean alquilar un piso, y en la tercera fila los pisos vacíos en una determinada ciudad.

1Paso: Realizar una tabla con los datos que nos da el ejercicio.

Precio de un piso(euros)	1500	1000	500
Cantidad demandada (personas que desean alquilar)	10	100	500
Cantidad ofrecida (pisos libres)	600	200	50

2Paso: Dibujamos o hacemos una gráfica con los datos de esta tabla.

3Paso: Representamos en el eje vertical los precios, y en el eje horizontal las cantidades demandadas y ofrecidas.

4Paso: Unimos con un trazo continuo ambas curvas tanto la cantidad de demanda y de cantidad de ofrecida.

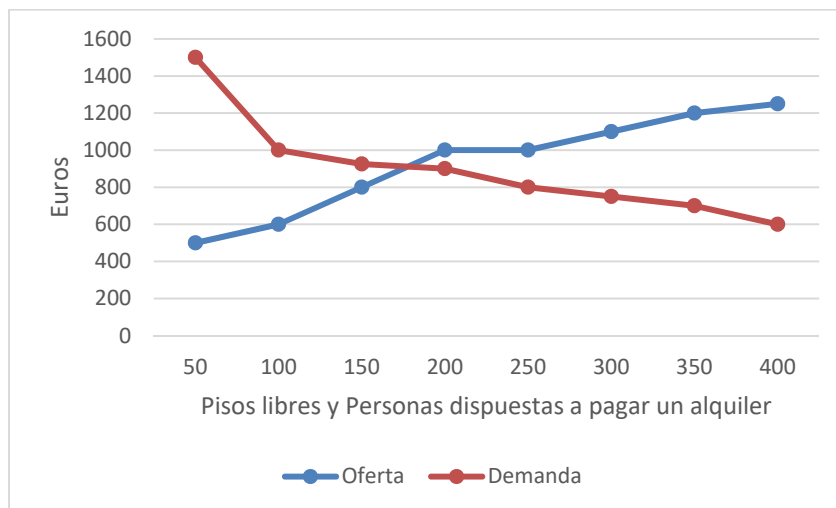
5Paso: Es que debemos saber que la curva de cantidad demandada es un ejemplo de función de demanda y la curva de cantidad ofrecida es una función de oferta.

6Paso: Lo que hacemos es realizar una gráfica y ponemos en el eje vertical llamado eje y los precios de los pisos, y en el eje horizontal o también llamado eje x y ponemos la cantidad demandada y cantidad ofrecida.

7Paso: Es poner los datos del eje x de menor a mayor e igual con el eje y.

8Paso: Ponemos los puntos según los datos de la tabla y a esos puntos le ponemos una letra y una vez que tengamos los puntos los unimos y obtenemos la primera curva y lo mismo con la segunda en este caso de cantidad que desean alquilar los pisos, y la cantidad ofrecida por último ponemos los puntos como antes en la gráfica los dibujas, luego los unimos y obtenemos la segunda curva.

Pregunta a) Dibuja una gráfica de las curvas de oferta y demanda:



Pregunta b) Determina de forma aproximada el punto de equilibrio:

La intersección entre oferta y demanda es el punto (175, 900), donde la oferta es de 900 euros de alquiler para los 175 pisos, y hay 175 personas con un presupuesto de 900 euros para pagar un alquiler

24. Realizar las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6$$

$$s(x) = 3x^2 - x \quad ; \quad f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ;$$

$$j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4} \quad ; \quad k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$n(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \quad ; \quad a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \text{Log}_{10}\left(\frac{x-1}{3}\right)$$

$$c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \text{Log}_{10}(x^3 - 1)$$

a) $(p + q)(x)$

$$(-5x + 3 + 2x^2 - x + 7) = (2x^2 - 6x + 10) = 2x^3 - 6x^2 + 10x$$

b) $(q + r)(x)$

$$(2x^2 - x + 7 + (-x^3 + 6)) = (-x^3 + 2x^2 - x + 13)$$

c) $(q + r + s)(x)$

$$(2x^2 - x + 7) + (-x^3 + 6) + (3x^2 - x) = (-x^3 + 5x^2 - 2x + 13)$$

d) (s - q) (x)

$$3x^2 - x - (2x^2 - x + 7) = 3x^2 - x - 2x^2 + x - 7 = (x^2 - 7)$$

e) (q - r) (x)

$$(2x^2 - x + 7 - (-x^3 + 6)) = 2x^2 - x + 7 + x^3 - 6 = (x^3 + 2x^2 - x + 1)$$

f) (r - p) (x)

$$(-x^3 + 6 - (2x^2 - x + 7)) = -x^3 - 2x^2 + x - 1 =$$

g) (f + p) (x)

$$\left(\frac{2x-4}{x+3} + \frac{-5x+3}{1}\right) = \left(\frac{2x-4+(-5x^2+3x-15x+9)}{x+3}\right) = \left(\frac{-5x^2-10x+5}{x+3}\right)$$

h) (j - f) (x)

$$\left(\frac{-x^2}{x^2-4} - \frac{2x-4}{x+3}\right) = \left(\frac{-x^2 \cdot (x+3) - (2x-4) \cdot (x^2-4)}{(x^2-4) \cdot (x+3)}\right) =$$

$$\frac{-x^3-3x^2-(2x^3-8x-4x^2+16)}{(x^2-4) \cdot (x+3)} = \frac{-x^3-3x^2-2x^3+8x+4x^2-16}{(x^2-4) \cdot (x+3)} = \frac{-3x^3+x^2+8x-16}{(x^2-4) \cdot (x+3)}$$

i) (g + k)

$$\left(\frac{-3}{x} + e^{x-4}\right)$$

j) (m - a)

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2(2-2)\right)$$

k) (b + d) (x)

$$\text{Log}_{10}\left(\frac{x-1}{3}\right) + \text{Log}_{10}(x^3-1) = \text{Log}_{10}\left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x^3-1}{1}\right) = \text{Log}_{10}\left(\frac{x^4-x^3-x+1}{3}\right)$$

l) (r + m) (x)

$$\left(-x^3 + 6 + \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)$$

m) (p · q) (x)

$$(-5x + 3) \cdot (2x^2 - x + 7) = (-10x^3 + 5x^2 - 7x + 6x^2 - 3x + 21) =$$

$$= (-10x^3 + 11x^2 - 10x + 21)$$

n) (q · r) (x)

$$(2x^2 - x + 7)(-x^3 + 6) = (2x^5 + x^4 - 7x^3 + 12x^2 + 42)$$

o) $(q \cdot r : s)(x)$

$$(2x^2 - x + 7) \cdot (-x^3 + 6) : (3x^2 - x)$$

$$\frac{-2x^5 + 12x^2 + x^4 - 6x - 7x^3}{3x^2 - x} = \frac{-2x^5 + x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 6x}{x(3x - 1)} = \frac{-2x^4 + x^3 - 7x^2 + 12x - 6}{3x - 1}$$

p) $(p : q)(x)$

$$\left(\frac{-5x + 3}{2x^2 - x - 7} \right)$$

q) $(f \cdot p)(x)$

$$\left(\frac{2x - 4}{x + 3} \cdot (-5x + 3) \right) = \left(\frac{-10x^2 + 20x + 6x - 12}{x + 3} \right) = \left(\frac{-10x^2 + 26x - 12}{x + 3} \right)$$

r) $(j \cdot f)(x)$

$$\left(\frac{-x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{2x - 4}{x + 3} \right) = \left(\frac{-2x^3 + 4x^2}{x^3 + 3x^2 - 4x - 12} \right)$$

s) $(g : k)(x)$

$$\left(\frac{-3}{x} : e^{x-4} \right) = \left(\frac{-3}{x \cdot e^{x-4}} \right)$$

t) $(a \cdot b)(x)$

$$\left(L(x - 2) \cdot \log_{10} \left(\frac{x - 3}{3} \right) \right)$$

u) $(p \circ q)(x)$

q compuesto de p $\rightarrow (p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(2x^2 - x + 7) \rightarrow$ donde ponga x en p ponemos $q(x) = 2x^2 - x + 7$

$$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(2x^2 - x + 7) = -5(2x^2 - x + 7) + 3 = -10x^2 + 5x - 35 + 3 = -10x^2 + 5x - 32$$

v) $(a \circ b)(x)$

b compuesto de a $\rightarrow (a \circ b)(x) = a(b(x)) = a\left(\log\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) \rightarrow$ donde ponga x en a ponemos

$$b(x) = \log\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$(a \circ b)(x) = a(b(x)) = a\left(\log\left(\frac{x-1}{2}\right)\right) = L\left(\left(\log\frac{x-1}{3}\right) - 2\right)$$

w) $(r \circ s)$

s compuesto de r $\rightarrow (r \circ s)(x) = r(s(x)) = r(3x^2 - x) \rightarrow$ donde ponga x en r ponemos

$$s(x) = 3x^2 - x$$

$$(r \circ s)(x) = r(s(x)) = r(3x^2 - x) = -(3x^2 - x)^3 + 6$$

$$\begin{aligned} \text{calculamos aparte } (3x^2 - x)^3 &= (3x^2 - x) \cdot (3x^2 - x) \cdot (3x^2 - x) = \\ &= (9x^4 - 6x^3 + x^2) \cdot (3x^2 - x) = 27x^6 - 18x^5 + 3x^4 - 9x^5 + 6x^4 - x^3 = \\ &= 27x^6 - 27x^5 + 9x^4 - x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r \circ s)(x) &= r(s(x)) = r(3x^2 - x) = -(3x^2 - x)^3 + 6 = -(27x^6 - 27x^5 + 9x^4 - x^3) + 6 = \\ &= -27x^6 + 27x^5 - 9x^4 + x^3 + 6 \end{aligned}$$

$$x) \quad (f \circ p)(x)$$

$$(f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(-5x + 3) = \left(\frac{2(-5x+3)-4}{(-5x+3)+3} \right) = \left(\frac{-10x+2}{-5x+6} \right)$$

$$y) \quad (j \circ f)(x)$$

$$(j \circ f)(x) = j(f(x)) = j\left(\frac{2x-4}{x+3}\right) = \left(\frac{-\left(\frac{2x-4}{x+3}\right)^2}{\left(\frac{2x-4}{x+3}\right)^2 - 4} \right) = \left(\frac{\frac{-(2x-4)^2}{(x+3)^2}}{\frac{(2x-4)^2}{(x+3)^2} - 4} \right) = \left(\frac{\frac{-(2x-4)^2}{(x+3)^2}}{\frac{(2x-4)^2 - 4 \cdot (x+3)^2}{(x+3)^2}} \right) =$$

$$= \left(\frac{(2x-4)^2}{(2x-4)^2 - 4 \cdot (x+3)^2} \right) = \left(\frac{4x^2 - 16x + 16}{4x^2 - 16x + 16 - 4 \cdot (x^2 + 6x + 9)} \right)$$

$$z) \quad (g \circ k)(x)$$

$$(g \circ k)(x) = g(k(x)) = g(e^{x-4}) = \frac{-3}{e^{x-4}}$$

25. Calcula en tu cuaderno las inversas que existan de las funciones del ejercicio anterior:

$$\cdot p(x) = -5x + 3 \rightarrow y = -5x + 3 \rightarrow x = -5y + 3 \rightarrow y = \frac{3-x}{5}$$

$\cdot q(x) = 2x^2 - x + 7 \rightarrow y = 2x^2 - x + 7 \rightarrow$ No existe función inversa porque cualquier elemento tiene dos imágenes y una función puede tener a lo sumo una imagen

$$\cdot r(x) = -x^3 + 6 \rightarrow y = -x^3 + 6 \rightarrow x^3 = -y + 6 \rightarrow y = \sqrt[3]{-x + 6}$$

$$\cdot s(x) = 3x^2 - x \rightarrow y = 3x^2 - x \rightarrow \text{No existe por el mismo motivo que en el apartado } q(x)$$

$$\begin{aligned} \cdot f(x) &= \frac{2x-4}{x+3} \rightarrow y = \frac{2x-4}{x+3} \rightarrow y \cdot (x+3) = 2x-4 \rightarrow xy + 3y = 2x-4 \rightarrow \\ xy - 2x &= -3y-4 \rightarrow x(y-2) = -3y-4 \rightarrow x = \frac{-3y-4}{y-2} \rightarrow y = \frac{3x+4}{2-x} \end{aligned}$$

$$\cdot g(x) = \frac{-3}{x} \rightarrow y = \frac{-3}{x} \rightarrow x = \frac{-3}{y} \rightarrow y = \frac{-3}{x}$$

$$\cdot h(x) = \frac{x+1}{x^2} \rightarrow y = \frac{x+1}{x^2} \rightarrow x = \frac{x+1}{x^2} \rightarrow \text{No existe}$$

$$\cdot j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4} \rightarrow y = \frac{-x^2}{x^2-4} \rightarrow \text{No existe función inversa}$$

$$\cdot k(x) = e^{x-4} \rightarrow y = e^{x-4} \rightarrow x = e^{y-4} \rightarrow \ln(e^{y-4}) = \ln(x) \rightarrow (y-4)\ln(e) = \ln(x) \rightarrow (y-4) \cdot 1 = \ln(x) \rightarrow y-4 = \ln(x) \rightarrow y = \ln(x) + 4$$

$$\cdot l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \rightarrow y = 2^{\frac{1}{x}} \rightarrow x = 2^{\frac{1}{y}} \rightarrow x = \log_2 \frac{1}{y} \rightarrow x = \frac{1}{\log_2 y} \rightarrow y = \frac{1}{\log_2 x}$$

$$\cdot m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \rightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^y \rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} y \rightarrow y = \log_{\frac{2}{3}} x$$

$$\cdot n(x) = e^{\frac{x}{x-1}} \rightarrow y = e^{\frac{x}{x-1}} \rightarrow x = e^{\frac{y}{y-1}} \rightarrow \ln\left(e^{\frac{y}{y-1}}\right) = \ln(x) \rightarrow \frac{y}{y-1}\ln(e) = \ln(x) \rightarrow \frac{y}{y-1} = \ln(x) \rightarrow (y-1)\ln(x) = y \rightarrow y\ln x - \ln x = y \rightarrow y\ln x - y = \ln x \rightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1}$$

$$a(x) = \ln(x-2) \rightarrow y = \ln(x-2) \rightarrow x = \ln(y-2) \rightarrow e^x = y-2 \rightarrow y = e^x + 2$$

$$b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \rightarrow y = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \rightarrow x = \log\left(\frac{y-1}{3}\right) \rightarrow 10^x = \frac{y-1}{3} \rightarrow 3 \cdot 10^x = y-1 \rightarrow y = 3 \cdot 10^x + 1$$

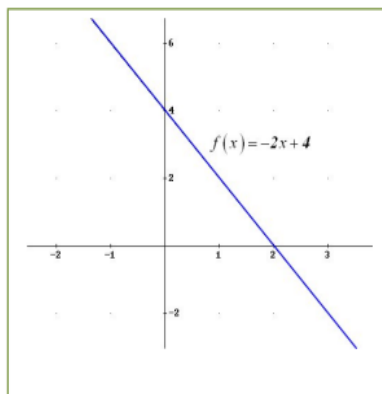
$$c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \rightarrow y = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \rightarrow x = L\frac{y^2-1}{2y+4} \rightarrow \text{No existe función inversa}$$

$$d(x) = \log(x^3 - 1) \rightarrow y = \log(x^3 - 1) \rightarrow x = \log(y^3 - 1) \rightarrow 10^x = y^3 - 1 \rightarrow y^3 = 10^x + 1 \rightarrow y = \sqrt[3]{10^x + 1}$$

FUNCIÓN	INVERSA	FUNCIÓN	INVERSA
a) p(x)	$y = \frac{(3-x)}{5}$	b) q(x)	No existe
c) r(x)	$\sqrt[3]{-x+6}$	d) s(x)	No existe
e) f(x)	$y = \frac{(3x+4)}{2-x}$	f) g(x)	$y = \frac{(-3)}{x}$
g) h(x)	No existe	h) j(x)	No existe
i) k(x)	$y = \ln(x) + 4$	j) l(x)	$y = \frac{1}{\log_2 x}$
k) m(x)	$y = \log_2 x$	l) n(x)	$y = \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1}$
m) a(x)	$y = 2 + e^x$	n) b(x)	$y = 1 + 3 \cdot 10^x$
o) c(x)	No existe	p) d(x)	$y = \sqrt[3]{1 + 10^x}$

26. Calcula la función inversa de:

$$f(x) = -2x + 4$$



Para realizar la inversa de esta función, llamamos y a $f(x)$

$$y = -2x + 4,$$

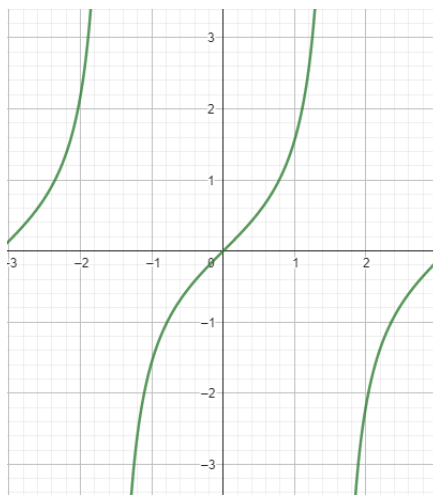
Despejamos x en función de y : $x = \frac{-y+4}{2}$

Y finalmente, cambiamos x e y : $y = \frac{-x+4}{2} = -\frac{1}{2}x + 2$

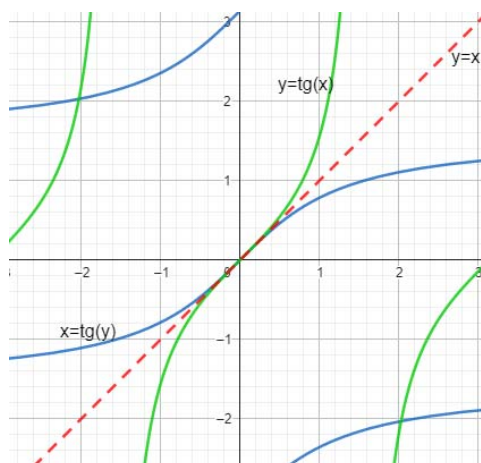
27. Realiza el proceso anterior para la función arco tangente: $y = \arctg x \Leftrightarrow x = tg(y), y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Para poder dibujar la función $x = tg(y)$, primero hay que dibujar la función $y = tg(x)$.

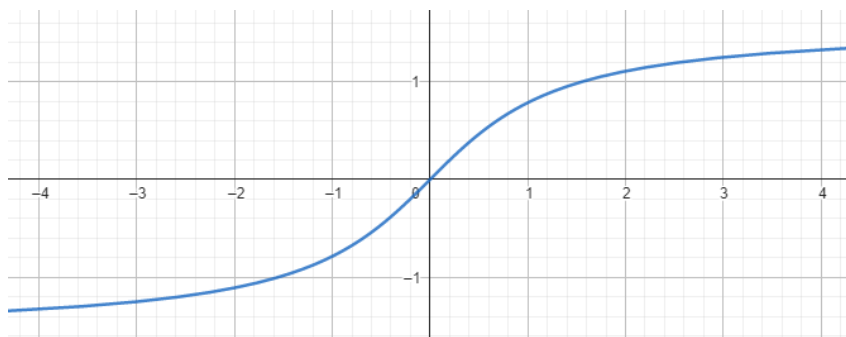
Sabiendo que $tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)}$, se representa la función $y = tg(x)$:



Una vez representada la función anterior, sabemos que $y = \arctg x$, es lo mismo que $x = tg(y)$, por lo que para obtener esta función hay que realizar la función inversa de $y = tg(x)$, a través del eje de simetría $y = x$. De este modo, se obtiene:



Finalmente se obtiene que $y = \arctg(x)$ se representa de la siguiente forma:



28. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-3} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow Dom f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$

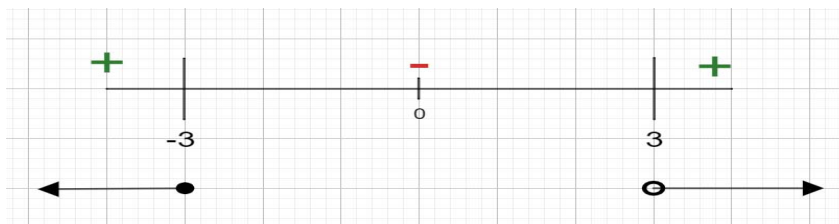
$$\rightarrow x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\rightarrow Dom f(x) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow Dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$

$$\rightarrow \frac{x+3}{x-3} \geq 0 \rightarrow \text{Raíces numerador: } x = -3 / \text{Raíces denominador: } x = 3$$

$$\text{En } x=0 \rightarrow \frac{0+3}{0-3} \geq 0 \rightarrow -1 \leq 0$$

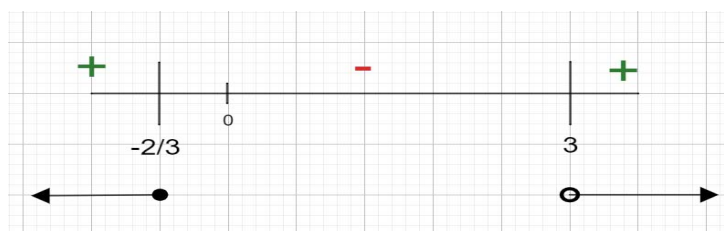


$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = (-\infty, -3] \cup (3, \infty)$$

$$\text{c) } f(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$$

$$\rightarrow \frac{3x+2}{x-3} \geq 0 \rightarrow \text{Raíces numerador: } 3x+2=0 \rightarrow x = -\frac{2}{3} / \text{Raíces denominador: } x=3$$

$$\text{En } x=0 \rightarrow \frac{3 \cdot 0 + 2}{0-3} \geq 0 \rightarrow -\frac{2}{3} \leq 0$$



$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup (3, \infty)$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2-4} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$$

$$\rightarrow x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$$

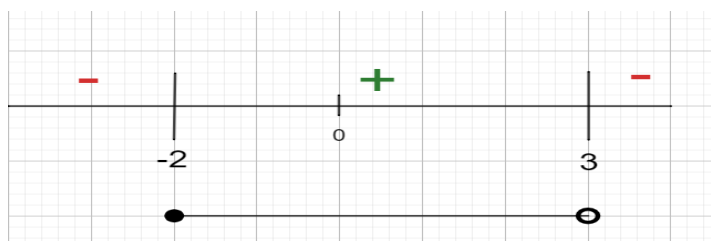
$$\rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$$

$$\rightarrow \frac{x+2}{3-x} \geq 0 \rightarrow \text{Raíces numerador: } x = -2 / \text{Raíces denominador: } x = 3$$

$$\text{En } x=0 \rightarrow \frac{0+2}{3-0} \geq 0 \rightarrow \frac{2}{3} \geq 0$$



$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = [-2, 3)$$

$$g) f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \rightarrow f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$$

$$\rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$h) f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \text{Dom } f(x) = \text{Dom } g(x)$$

$$\rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 0 \rightarrow \text{Dom } g(x) = \{\mathbb{R} - x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$$

$$\rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

29. Calcula en tu cuaderno el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $p(x) = -x+3$

Como sabemos que es una función polinómica su dominio serán todos los reales: $\text{Dom } p = \mathbb{R}$

b) $q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7}$

Como sabemos que en las funciones irracionales si el índice es par, $\text{dom } q: \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$

Como $f(x) = 2x^2 - x + 7$, es siempre positiva, $\text{Dom } q: \mathbb{R}$

c) $r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1}$

Como sabemos que en las funciones irracionales si el índice es par, $\text{dom } q: \{x \in \mathbb{R} / f(x) \geq 0\}$

Calculamos $f(x): -x^3 - 1 \geq 0 \rightarrow -x^3 - 1 = 0$ y con la calculadora nos da $x \leq -1$

$$\text{Dom } r: (-\infty, -1]; \quad \text{Dom } r: \{x \in \mathbb{R}; x \leq -1\}$$

d) $s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$

como el índice es impar, $\text{Dom } s = \text{Dom } f$

$f(x): 3x^2 - x$ es polinómica, $\text{Dom } s: \mathbb{R}$

e) $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$

Sabemos que $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$

$$h(x): x+3=0; x=-3; \text{Dom } f: \mathbb{R} - \{-3\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}; x \neq -3\}$$

f) $g(x) = \frac{-3}{x}$

$$f(x)=x; x=0; \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$$

g) $h(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$

$$f(x) = x^2 + 1 = 0; x^2 = -1; x = \sqrt{-1}; \text{Dom } h: \mathbb{R}$$

h) $j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$

$$f(x) = x^2 - 4 = 0; x^2 = 4; x = \sqrt{4}; x = 2; x = -2; \text{Dom}f: \mathbb{R} - \{2; -2\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}; x \neq -2 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$i) k(x) = e^{x-4}$$

Sabemos que $\text{Dom}k = \text{Dom}f(x)$

Como $f(x) = x - 4$, es una función polinómica, $\text{Dom}k: \mathbb{R}$

$$j) l(x) = 2^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = x = 0; \text{Dom}l: \mathbb{R} - \{0\}$$

$$k) m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$$

Como $f(x) = x + 1$ es una función polinómica, $\text{Dom}m: \mathbb{R}$

$$l) n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$f(x) = x^2 - 1 \geq 0; x^2 - 1 = 0; x = -1; x = 1$$

$$\text{Dom}n: \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1 \text{ y } x \neq 1\}$$

$$m) a(x) = L(x+2)$$

Sabemos que $\text{dom}a: \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\}$

$$f(x) = x + 2 > 0; x > -2; \text{dom}a: \{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$$

$$n) b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

Sabemos que $\text{Dom}n: \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\}$ porque es una función logarítmica.

$$f(x) = \frac{x^2}{4} > 0$$

$$x^2 = 0; x = \sqrt{0}; x = 0; \text{Dom}b: \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$$

$$o) c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right)$$

Sabemos que $\text{Dom}c: \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\}$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x+4} > 0$$

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1} = \text{no es solución}$$

$$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = \frac{-4}{2} \rightarrow x = -2$$

$$\text{Dom}c: (-2, \infty)$$

$$p) d(x) = \log(x^3 - 5)$$

Sabemos que $\text{Dom}d: \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\}$ por ser una función logarítmica.

$$x^3 - 5 > 0; x^3 > 5; x > \sqrt[3]{5}$$

$$\text{Dom}d: \{x \in \mathbb{R}; x > \sqrt[3]{5}\}$$

30. Calcula los puntos de cortes con los ejes de las funciones siguientes:

Las ordenadas hay q sustituir la x por cero y las ABSCISAS hay q igualar a cero y resolver.

- a) $p(x) = 5x + 3$

$$\text{ORDENADAS} = 5 \cdot 0 + 3 = 3 \quad \text{punto de corte} = (0, 3).$$

ABSCISAS: $-5x+3=0 \Rightarrow x=3/5$ Puntos de corte: $(3/5, 0)$

• **b) $q(x) = \sqrt{2x^2 - x + 7}$**

ORDENADAS: $\sqrt{2 \cdot 0^2 - 0 + 7} = \sqrt{7}$ Punto de corte: $(0, \sqrt{7})$

ABSCISAS no tiene ningún punto de corte con ABSCISAS

• **c) $r(x) = \sqrt[4]{-x^3 - 1}$**

ORDENADAS no tiene ya q al sustituir por cero no hay resultado por lo que no hay ningún punto de corte con ordenadas

ABSCISAS: $\sqrt[4]{-x^3 - 1} = 0 ; -x^3 - 1 = 0 ; x = -1$ Puntos de corte con abscisas $(-1, 0)$

• **d) $s(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$**

ORDENADAS: $\sqrt[3]{3 \cdot 0^2 - 0} = 0$ Punto de corte $(0, 0)$

ABSCISAS: $\sqrt[3]{3x^2 - x} = 0 ; 3x^2 - x = 0 ; x(3x - 1) = 0$

$1 \ x=0$

$2 \ 3x-1=0$ por lo que $3x=1$ por lo que $x=1/3$

Puntos de corte $(0, 0), (1/3, 0)$

• **e) $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$**

ORDENADAS: $\frac{2 \cdot 0 - 4}{0 + 3} = \frac{-4}{3}$ punto de corte $(-4/3, 0)$

ABSCISAS: $\frac{2x-4}{x+3} = 0 ; 2x - 4 = 0 ;$ por lo que $x = 4/2 = 2$ punto de corte $(2, 0)$

• **f) $g(x) = \frac{-3}{x}$**

ORDENADAS :no tiene ningún punto de corte

ABSCISAS: no se puede igualar a cero por lo que no tiene ningún punto de corte

• **g) $h(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$**

ORDENADAS: $\frac{0+1}{0^2-1} = -1$ punto de corte $(0, -1)$

ABSCISAS: $\frac{x+1}{x^2-1} = 0 ; x + 1 = 0 ; x = -1$ punto de corte $(-1, 0)$

• **h) $j(x) = \frac{-x^2+2x}{x^2-4}$**

ORDENADAS: $\frac{-0^2+2 \cdot 0}{0^2-4} = 0$ Punto de corte $(0, 0)$

ABSCISAS : $-x^2 + 2x = 0 ; x(-x + 2) = 0 ; x = 0 ; x = 2$

Puntos de corte $(0, 0), (2, 0)$

• **i) $k(x) = e^{x-4}$**

ORDENADAS : $e^{0-4} = e^{-4}$ Punto de corte $(0, e^{-4})$

ABSCISAS: no tiene ningún punto de corte con eje de ABSCISAS

• **j) $l(x) = 2^{\frac{1}{x}}$**

ORDENADAS: $2^{\frac{1}{0}}$ no existe

ABSCISAS: $2^{\frac{1}{x}} = 0$ no tiene solución

- k) $m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$**

ORDENADAS: $\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1} = \frac{2}{3}$ punto de corte (0, 2/3)

ABSCISAS: no tiene puntos de corte

- l) $n(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$**

ORDENADAS: $e^{\frac{0}{0^2-1}} = e^0 = 1$ punto de corte (0, 1)

ABSCISAS: $e^{\frac{x}{x^2-1}} = 0$ no tiene solución

- m) $a(x) = L(x+2)$**

ORDENADAS: $L(0+2) = L(2)$ punto de corte (0, L(2))

ABSCISAS: $L(x+2)=0$; $x+2=1$; $x=-1$ Punto de corte (-1,0)

- n) $b(x) = \log\left(\frac{x^2}{4}\right)$**

ORDENADAS: $\log\left(\frac{0^2}{4}\right)$ no hay ningún punto de corte

ABSCISAS: $\log\left(\frac{x^2}{4}\right) = 0$; $\frac{x^2}{4} = 1$; $x^2 = 4$; $x = -2$; $x = 2$

Puntos de corte (-2, 0), (2, 0)

- o) $c(x) = L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right)$**

ORDENADAS: $L\left(\frac{0^2+1}{2\cdot 0+4}\right) = L\left(\frac{1}{4}\right)$ Punto de corte (0, $L\left(\frac{1}{4}\right)$)

ABSCISAS: $L\left(\frac{x^2+1}{2x+4}\right) = 0$; $\frac{x^2+1}{2x+4} = 1$; $x^2 + 1 = 2x + 4$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $x = -1$, $x = 3$

Puntos de corte (-1, 0) (3, 0)

- p) $d(x) = \log(x^3 - 5)$**

ORDENADAS: $\log(0^3 - 5) = \log(-5)$ no tiene punto de corte

ABSCISAS: $\log(x^3 - 5) = 0$; $x^3 - 5 = 1$; $x^3 = 6$; $x = \sqrt[3]{6}$ punto de corte ($\sqrt[3]{6}$, 0)

FUNCION	PUNTOS CORTES EJES		FUNCION	PUNTOS CORTES EJES	
	ORDENADAS	ABSCISAS		ORDENADAS	ABSCISAS
p(x)	(0,3)	(3/5,0)	q(x)	(0, $\sqrt{7}$)	NINGUNO
r(x)	NINGUNO	(-1,0)	s(x)	(0,0)	(0,0), (1/3,0)
f(x)	(0, -4/3)	(2,0)	g(x)	NINGUNO	NINGUNO
h(x)	(0,1)	(-1,0)	j(x)	(0,0)	(0,0)(2,0)
k(x)	(0, e^{-4})	NINGUNO	l(x)	(0,0)	(0,0)
m(x)	(0,2/3)	NINGUNO	n(x)	(0,1)	NINGUNO
a(x)	(0,L(2))	(-1,0)	b(x)	NINGUNO	(-2,0),(2,0)
c(x)	(0,L(1/4))	(-1,0)	d(x)	NINGUNO	($\sqrt[3]{6}$, 0)

31. Estudia las simetrías y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{-x-1} - 1 \Rightarrow f(-x) = 2^{-x-24} \cdot 4^{-3x+1} \cdot 8^{x-1} - 1$; $-f(-x) = -2^{-x-24} \cdot 4^{-3x+1} \cdot 8^{x-1} + 1$

Como $f(x)$ es distinto de $f(-x)$, no es una función par

Como $f(x)$ es distinto de $-f(-x)$, no es una función impar

$f(0) = 2^{0-24} \cdot 4^{3 \cdot 0+1} \cdot 8^{0-1} - 1$; Corte eje Y en (0,-1) aproximadamente.

$f(x) = 2^{x-24} \cdot 4^{3x+1} \cdot 8^{x-1} - 1 = 0 \Rightarrow x = 25/4 = 6,25 \Rightarrow$ Corte de X en (6,25 , 0)

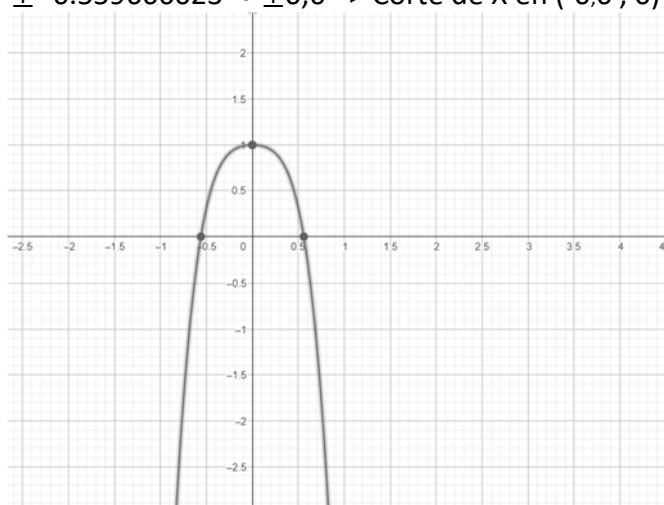


b) $g(x) = -7x^4 - x^2 + 1 \Rightarrow g(-x) = -7(-x)^4 - (-x)^2 + 1 = -7x^4 - x^2 + 1$

Como $g(x)$ es igual que $g(-x)$, es una función par

$g(x=0) = -7 \cdot 0 - 0 + 1 =$ Corte de Y en (0,1)

$g(x) = -7x^4 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 0.559666023 \approx \pm 0,6 \Rightarrow$ Corte de X en (-0,6 , 0) y (0 , 0,6)



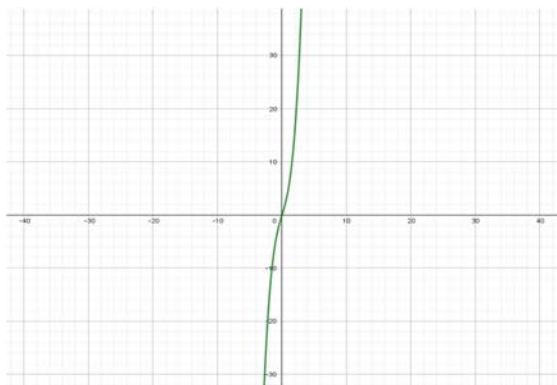
c) $h(x) = x^3 + 4x \Rightarrow h(-x) = (-x)^3 + 4(-x) = -x^3 - 4x \Rightarrow -h(-x) = -(-x^3 - 4x) = x^3 + 4x$

Como $h(x)$ es distinto de $h(-x)$, no es una función par

Como $h(x)$ es igual de $-h(-x)$, es una función impar

$h(0) = 0^3 + 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ Corte en el eje Y (0,0)

$h(x) = x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ Corte en el eje X (0,0)



d) $j(x) = \sqrt{15x - 3\sqrt{-x - 9}}$

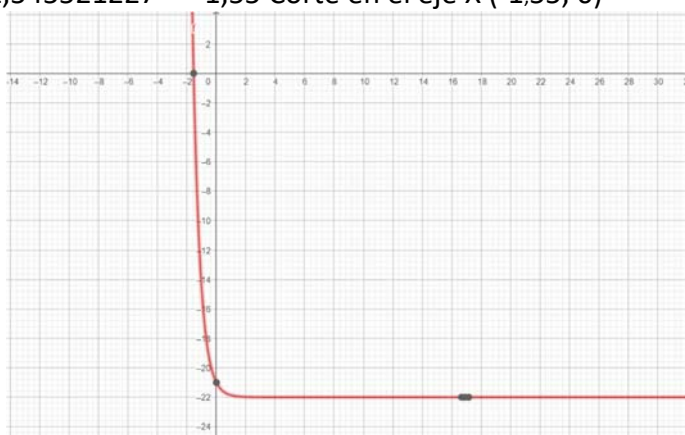
No toma valores reales para ningún número real, pues $-3\sqrt{-x - 9}$ es siempre negativo y sólo existe para $x \leq -9$ que al sustituir en $15x$ nos da otro número negativo.

e) $k(x) = e^{-2x} - 22 \Rightarrow k(-x) = e^{2x} - 22$

Como $k(x)$ no es igual a $k(-x)$ ni a $-k(-x)$, no es par ni impar

$k(0) = 1 - 22 = -21$ Corte en el eje Y (0, -21)

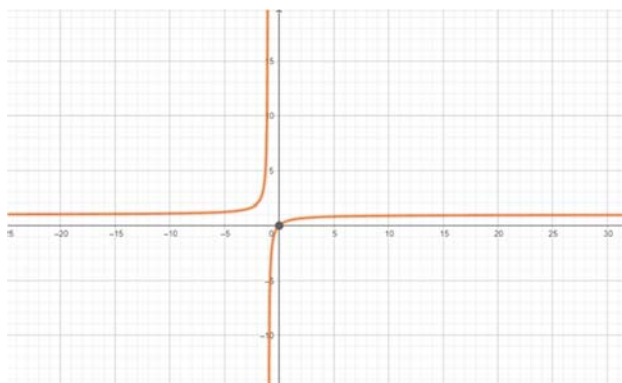
$k(x) = e^{-2x} - 22 = 0 \Rightarrow x = -1,545521227 \approx -1,55$ Corte en el eje X (-1,55, 0)



f) $l(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow l(-x) = \frac{-x}{-x+1}$

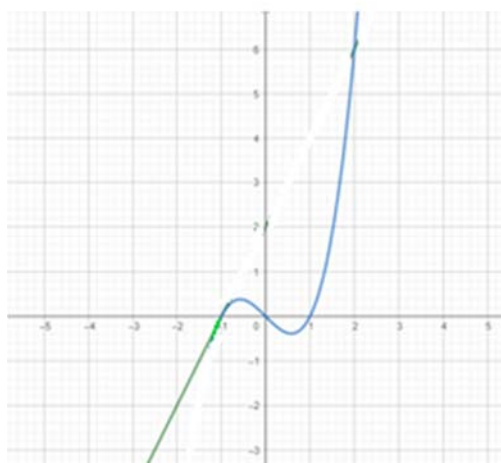
Como $l(x)$ es distinto a $l(-x)$ y a $-l(-x)$, no es par ni impar

$l(0) = \frac{0}{0+1} = 0$ Con el eje Y y con el eje X (0,0)



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Esboza la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \leq -2 \\ x^2 - 2x - 2 & x > -2 \end{cases}$



2. Realiza las operaciones indicadas con las siguientes funciones:

$$p(x) = -5x + 3 \quad ; \quad q(x) = 2x^2 - x + 7 \quad ; \quad r(x) = -x^3 + 6 \quad ; \quad s(x) = 3x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{-3}{x} \quad ; \quad h(x) = \frac{x+1}{x^2} \quad ; \quad j(x) = \frac{-x^2}{x^2-4}$$

$$k(x) = e^{x-4} \quad ; \quad l(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad m(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad ; \quad n(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$a(x) = L(x-2) \quad ; \quad b(x) = \log\left(\frac{x-1}{3}\right) \quad ; \quad c(x) = L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) \quad ; \quad d(x) = \log(x^3-1)$$

a) $(s+q)(x)$

$$3x^2 - x + 2x^2 - x + 7 = 5x^2 - 2x + 7$$

b) $(r+p)(x)$

$$-x^3 + 6 - 5x + 3 = -x^3 - 5x + 9$$

c) $(p-q)(x)$

$$-5x + 3 - (2x^2 - x + 7) = -5x + 3 - 2x^2 + x - 7 = -2x^2 - 4x - 4$$

d) $(p+q+r+s)(x)$

$$-5x + 3 + 2x^2 - x + 7 - x^3 + 6 + 3x^2 - x = -x^3 + 5x^2 - 7x + 16$$

e) $(q-r-s)(x)$

$$2x^2 - x + 7 - (-x^3 + 6) - (3x^2 - x) = 2x^2 - x + 7 + x^3 + 6 - 3x^2 + x = x^3 - x^2 + 13$$

f) $(p-q+r-s)(x)$

$$-5x + 3 - (2x^2 - x + 7) + (-x^3 + 6) - (3x^2 - x) = -5x + 3 - 2x^2 + x - 7 - x^3 + 6 - 3x^2 + x = -x^3 - 5x^2 - 3x + 2$$

g) $(g+h)(x)$

$$-\frac{3}{x} + \frac{x+1}{x^2} = \frac{-3x + x + 1}{x^2} = \frac{-2x + 1}{x^2}$$

h) (s-g)(x)

$$\frac{x+1}{x^2} - \left(-\frac{3}{x}\right) = \frac{x+1}{x^2} + \frac{3}{x} = \frac{x+1+3x}{x^2} = \frac{4x+1}{x^2}$$

i) (n-k)(x)

$$e^{\frac{x}{x-1}} - e^{x-4}$$

j) (g+d)(x)

$$-\frac{3}{x} + \log(x^3 - 1)$$

k) (b-d)(x)

$$\log\left(\frac{x-1}{3}\right) - \log(x^3 - 1) = \log\frac{\frac{x-1}{3}}{\frac{x^3-1}{1}} = \log\frac{x-1}{3(x^3-1)} = \log\frac{x-1}{3x^3-1}$$

l) (c+s)(x)

$$L\left(\frac{x^2-1}{2x+4}\right) + 3x^2 - x$$

m) (s·q·r)(x)

$$\begin{aligned} (3x^2-x)(2x^2-x+7)(-x^3+6) &= \\ = 6x^4 - 3^3 + 21 - 2x^3 + x^2 - 7x &= 6x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 21 = \\ = -6x^7 + 5x^6 - x^5 + 7x^4 - 21x^3 + 36x^4 - 30x^3 + 6x^2 - 42x + 126 &= \\ = 6x^7 + 5x^6 - x^5 + 43x^4 - 51x^3 + 6x^2 - 42x + 126 \end{aligned}$$

n) (r·p)(x)

$$(-x^3+6)(-5x+3) = 5x^4 - 3x^3 - 30x + 18$$

o) (q:p)(x)

$$\frac{2x^2-x+7}{-5x+3}$$

p) (s:q)(x)

$$\frac{3x^2-x}{2x^2-x+7}$$

q) (g·h)(x)

$$\left(\frac{-3}{x}\right)\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{-3x-3}{x^3}$$

r) (s:g)(x)

$$\frac{\frac{3x^2}{-3}}{\frac{-3}{x}} = \frac{3x^3}{-3} = -x^3$$

s) (n·k)(x)

$$(e^{\frac{x}{x-1}})(e^{x-4}) = e^{\frac{x}{x-1}+x-4}$$

t) $(g \circ d)(x)$

$$\frac{\frac{-3}{x}}{\frac{\log(x^3-1)}{1}} = \frac{3}{x \log_{10}(x^2-1)}$$

u) $(s \circ q)(x)$

$$(s \circ q)(x) = s(q(x)) = s(2x^2 - x + 7) = 3((2x^2 - x + 7)^2 - (2x^2 - x + 7))$$

v) $(r \circ p)(x)$

$$(r \circ p)(x) = r(p(x)) = r(-5x + 3) = -(-5x + 3)^3 + 6 = 125x^3 - 225x^2 + 135x - 21$$

w) $(q \circ p)(x)$

$$(q \circ p)(x) = q(p(x)) = q(-5x + 3) = 2(-5x + 3)^2 - (-5x + 3) + 7 = 50x^2 - 55x + 22$$

x) $(g \circ h)(x)$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{x+1}{x^2}\right) = \frac{-3}{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{3x^2}{(x+1)}$$

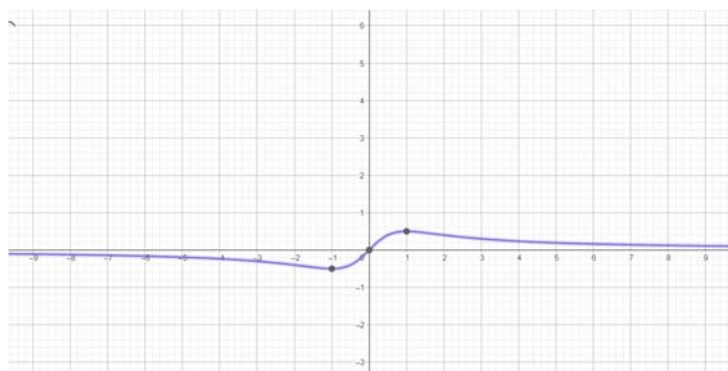
y) $(s \circ g)(x)$

$$(s \circ g)(x) = s(g(x)) = s\left(\frac{-3}{x}\right) = 3\left(\frac{-3}{x}\right)^2 - \left(\frac{-3}{x}\right) = \frac{27}{x^2} + \frac{3}{x}$$

z) $(n \circ k)(x)$

$$(n \circ k)(x) = n(k(x)) = n(e^{x-4}) = e^{\left(\frac{e^{x-4}}{e^{x-4}-1}\right)}$$

3. Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$. Determina los siguientes elementos: su dominio, punto de corte con los ejes, signos y simetría.



- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$
- Puntos de corte: eje X $(0, 0)$; eje Y $(0, 0)$.
- Simetría: una función puede tener simetría par o impar:

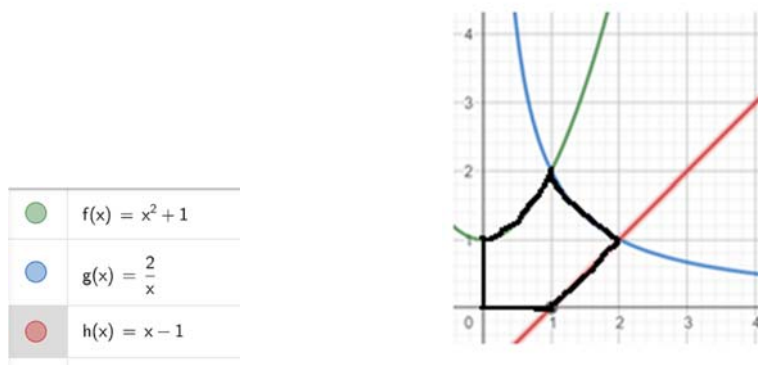
Simetría par: $f(x) = f(-x)$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \rightarrow f(-x) = \frac{(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{-x}{1+x^2}; \quad f(x) \neq f(-x), \text{ la función no es par.}$$

Simetría impar: $f(-x) = -f(x)$

$$-f(x) = -1 \cdot \frac{2}{1+2^2} = \frac{-2}{1+2^2}; \quad f(-x) = -2(2) \text{ se cumple, la función es impar.}$$

4. Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas $y = \frac{2}{x} + 2$
 $y = \frac{2}{x}$ e $y = x - 1$



El recinto de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 0)$

5. Consideremos las siguientes funciones:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$g(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}}$$

$$h(x) = 2^{-x+1}$$

$$j(x) = L(x^5 - 1)$$

$$k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1} \cdot 12^{-x+1}$$

$$l(x) = \frac{x^2 - 9}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}$$

$$m(x) = \sqrt[4]{-5 + 2x}$$

$$n(x) = (4x^2 - 4x + 1)^{-\frac{1}{3}}$$

a) Calcular las siguientes composiciones:

- **h compuesto con f**

$$f \circ h \Rightarrow (f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(2^{-x+1}) = (2^{-x+1})^3 - 3(2^{-x+1})^2 + 3(2^{-x+1}) - 1$$

- **h compuesto con g**

$$g \circ h \Rightarrow (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2^{-x+1}) = \left(\sqrt{\frac{2^{-x+1}-2}{2^{-x+1}+7}} \right)$$

- **j compuesto con g**

$$g \circ j \Rightarrow (g \circ j)(x) = g(j(x)) = g(L(x^5 - 1)) = \left(\sqrt{\frac{L(x^5 - 1) - 2}{L(x^5 - 1) + 7}} \right)$$

- **h compuesto con k**

$$k \circ h \Rightarrow (k \circ h)(x) = k(h(x)) = k(2^{-x+1}) = 2^{2^{-x+1}} \cdot 30^{2^{-x+1}-1} \cdot 12^{2^{-x+1}+1}$$

- **j compuesto con h compuesto con g**

$$\begin{aligned} g \circ h \circ j \Rightarrow (g \circ h \circ j)(x) &= (g \circ h)(j(x)) = (g \circ h)(L(x^5 - 1)) = g(h(L(x^5 - 1))) = \\ &= g(2^{-L(x^5 - 1) + 1}) = \sqrt{\frac{2^{-L(x^5 - 1) + 1} - 2}{2^{-L(x^5 - 1) + 1} + 7}} \end{aligned}$$

- **j compuesto con m**

$$m \circ j \Rightarrow (m \circ j)(x) = m(j(x)) = m(L(x^5 - 1)) = \left(\sqrt[4]{-5 + 2(L(x^5 - 1))} \right)$$

- **h compuesto con l**

$$l \circ h \Rightarrow (l \circ h)(x) = l(h(x)) = l(2^{-x+1}) = \frac{(2^{-x+1})^2 - 9}{(2^{-x+1})^3 + 7(2^{-x+1})^2 + 15(2^{-x+1}) + 9}$$

- **h compuesto con m**

$$m \circ h \Rightarrow (m \circ h)(x) = m(h(x)) = m(2^{-x+1}) = \left(\sqrt[4]{-5 + 2(2^{-x+1})} \right)$$

- **h compuesto con j**

$$j \circ h \Rightarrow (j \circ h)(x) = j(h(x)) = j(2^{-x+1}) = L((2^{-x+1})^5 - 1)$$

- **m compuesto con l**

$$\begin{aligned} l \circ m \Rightarrow (l \circ m)(x) &= l(m(x)) = l(\sqrt[4]{-5 + 2x}) = \\ &= \frac{(\sqrt[4]{-5 + 2x})^2 - 9}{(\sqrt[4]{-5 + 2x})^3 + 7(\sqrt[4]{-5 + 2x})^2 + 15(\sqrt[4]{-5 + 2x}) + 9} \end{aligned}$$

b) Calcular:

función inversa de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Esta función no tiene función inversa

función inversa de $h(x) = 2^{-x+1}$

Cambiamos la h por una y

$$y = 2^{-x+1}$$

Remplazar x con y

$$x = 2^{-y+1}$$

$$\text{Si } f(x) = g(x), \text{ entonces } \ln(f(x)) = \ln(g(x))$$

$$\ln(x) = \ln(2^{-y+1})$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a(x)$

$$\ln(2^{-y+1}) = (-y+1)\ln(2); \quad \ln(x) = (-y+1)\ln(2)$$

$$\text{Despejamos y, } \ln(x) = (-y+1)\ln(2): \quad y = -\frac{\ln(x)-\ln(2)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{\ln(2)} = 1 - \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$$

FUNCION INVERSA DE $k(x) = 2^x \cdot 30^{x-1} \cdot 12^{-x+1}$

$$k(x) = 2^x \cdot 30^x \cdot \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^x \cdot 12 = \frac{12}{30} \cdot \left(2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{12}\right)^x = \frac{2}{5} \cdot 5^x$$

$$x = \frac{2}{5} \cdot 5^y; \quad \frac{5x}{2} = 5^y; \quad y = \log_5 \frac{5x}{2}$$

FUNCION INVERSA DE $j(x) = L(x^5 - 1)$

$$x = L(y^5 - 1); \quad e^x = y^5 - 1; \quad y^5 = e^x + 1; \quad y = \sqrt[5]{e^x + 1}$$

FUNCION INVERSA DE $n(x) = (4x^2 - 4x + 1)^{\frac{-1}{3}}$

Remplazar x con y

$$x = (4y^2 - 4y + 1)^{\frac{-1}{3}}$$

Elevar ambos lados de la ecuación a la potencia -3

$$x^{-3} = \left((4y^2 - 4y + 1)^{\frac{-1}{3}} \right)^{-3} = (4y^2 - 4y + 1)$$

Aplicamos las leyes de los exponentes $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

$$\frac{1}{x^3} = 4y^2 - 4y + 1$$

Multiplicamos ambos lados por x^3

$$\frac{1}{x^3} x^3 = 4y^2 x^3 - 4yx^3 + 1 \cdot x^3 \Rightarrow 1 = 4x^3 y^2 - 4x^3 y + x^3$$

Es una ecuación de segundo grado

$$4x^3 y^2 - 4x^3 y + x^3 - 1 = 0$$

Dos soluciones

$$y = \frac{x^3 + x^{\frac{3}{2}}}{2x^3}; \quad y = \frac{x^3 - x^{\frac{3}{2}}}{2x^3}$$

c) Calcular todos los dominios:

El dominio de una función es el conjunto de entradas o valores de los argumentos para los cuales la función es real y definida.

$$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < \infty\}$$

$$\text{Dom } h(x) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < \infty\}$$

$$\text{Dom } k(x) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < \infty\}$$

$$\text{Dom } m(x) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \geq \frac{5}{2}\right\}; \quad -5 + 2x \geq 0$$

$$\text{Dom } g(x) = \{x \in \mathbb{R}; x < -7 \text{ or } x \geq 2\}; \quad \frac{x-2}{x+7} \geq 0$$

$$\text{Dom } j(x) = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}; \quad x^5 - 1 > 0$$

$$\text{Dom } l(x) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -1, x \neq -3\}; \quad x^3 + 7x^2 + 15x + 9 = 0$$

$$\text{Dom } n(x) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{1}{2}\right\}; \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

d) Calcular los puntos de corte con los ejes de todas las funciones

$$f(x): (x) \Rightarrow 3.84732 \dots, 0$$

$$g(x): (x) \Rightarrow (2, 0)$$

$$(y) \Rightarrow (0, -1)$$

el eje y no lo corta

$$h(x): \text{el eje x no lo corta}$$

$$j(x): (x) \Rightarrow (1, 0)$$

$$(y) \Rightarrow (0, 2)$$

$$(y) \Rightarrow (0, -1)$$

$$k(x): \text{el eje x no lo corta}$$

$$l(x): (x) \Rightarrow (3, 0)$$

$$(y) \Rightarrow \left(0, \frac{2}{5}\right)$$

$$(y) \Rightarrow (0, -1)$$

$$m(x): (x) \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$n(x): \text{el eje x no lo corta}$$

El eje y no lo corta

$$(y) \Rightarrow (0, 1)$$

6. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por $h(t) = 5 + 4t - t^2$.

Calcula la altura desde la que se lanza el objeto y a la que se encuentra después de 1 segundo.

$$h(1) = 5 + 4 \cdot 1 - 1^2 = 8 \text{ m. Se encontrará a 8 metros después de 1 segundo.}$$

$$h(0) = 5 + 4 \cdot 0 - 0^2 = 5 \text{ m. El objeto se lanza desde 5 metros de altura.}$$

Determina en que instante alcanzará la altura máxima y cual será.

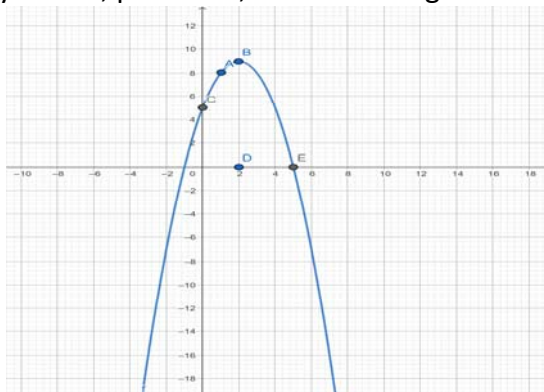
$$h'(t) = -2t + 4 = 0$$

$$-2t = 4 \quad \text{Por tanto, } t=2 \text{ segundos. A los dos segundos alcanzará la altura máxima.}$$

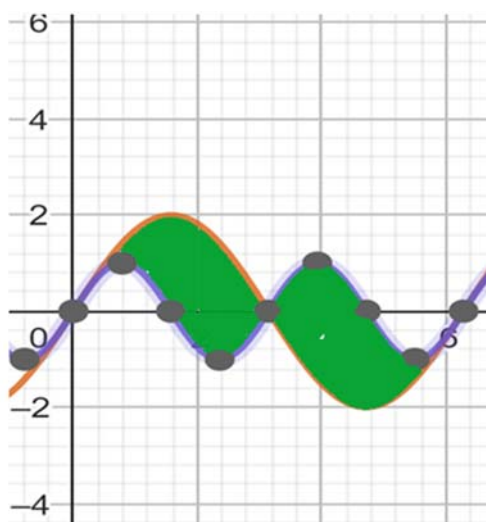
$$h(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 9 \text{ metros será la altura máxima}$$

Por último, calcula el instante en el que caerá al suelo y representa gráficamente la solución con los datos obtenidos anteriormente.

$$-t^2 + 4t + 5 = 0 \quad t = 5 \text{ y } t = -1, \text{ por tanto, cae a los 5 segundos.}$$



7. Considera las funciones $f, g: (0, 2\pi)$. $f(x)=2\sin x$ y $g(x)=\sin(2x)$. Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y g .



8. Sea la función dada por $f(x)=x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que es impar y que pasa por el punto $(1, 2)$.

Como es impar:

$$f(x) = -f(-x)$$

$$f(-x) = (-x)^3 + a(-x)^2 + b(-x) + c = -x^3 + ax^2 - bx + c$$

$$-f(-x) = x^3 - ax^2 + bx - c$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + c = -ax^2 - c \quad \text{Por tanto, } a=0 \text{ y } c=0$$

Como pasa por el punto $(1, 2)$:

$$f(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c =$$

$$1 + b = -2 \quad \text{Por tanto } b = -3 \quad \text{de donde } f(x) = x^3 - 3x$$

9. Un determinado antibiótico hace que la cantidad de ciertas bacterias se multipliquen por $1/3$ cada una, si la cantidad a las nueve de la mañana es de 10 millones de bacterias.

a) Haz una tabla calculando el número de bacterias que hay cada hora desde las tres de la mañana a las doce del mediodía (observa que tienes que calcular también hacia atrás).

b) Representa gráficamente estos datos

a) si a las 9 de la mañana hay 10.000.000 y cada hora que pasa se multiplica por $1/3$, significa que a la hora siguiente habrá 3 veces menos que la anterior, y así sucesivamente

9→10.000.000

10→3.333.333 ($10.000.000 \times 1/3$)

11→1.111.111 ($3.333.333 \times 1/3$)

12→370.370 ($1.111.111 \times 1/3$)

Por el contrario, antes de las 9 de la mañana se dividirá entre $1/3$

3→7.290.000.000 ($2.430.000.000:1/3$)

4→2.430.000.000 ($810.000.000:1/3$)

5→810.000.000 ($270.000.000:1/3$)

6→270.000.000 ($90.000.000:1/3$)

7→90.000.000 ($30.000.000:1/3$)

8→30.000.000 ($10.000.000:1/3$)

9→10.000.000

3→7.290 ($7.290.000.000 : 10^6$)

4→2.430 ($2.430.000.000 : 10^6$)

5→810 ($810.000.000 : 10^6$)

6→270 ($270.000.000 : 10^6$)

7→90 ($90.000.000 : 10^6$)

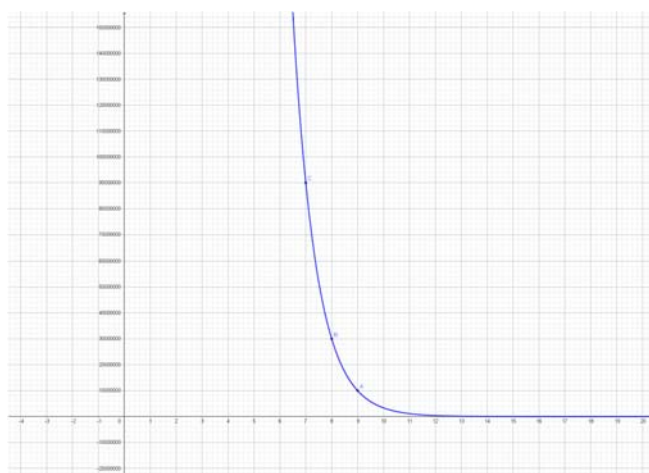
8→30 ($30.000.000 : 10^6$)

9→10 ($10.000.000 : 10^6$)

10→3,33 ($3.333.333 : 10^6$)

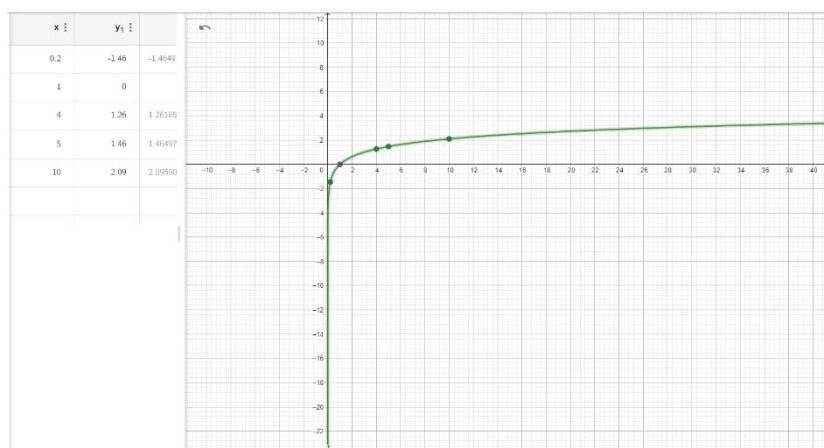
11→1,11 ($1.111.111 : 10^6$)

12→0,37 ($370.370 : 10^6$)

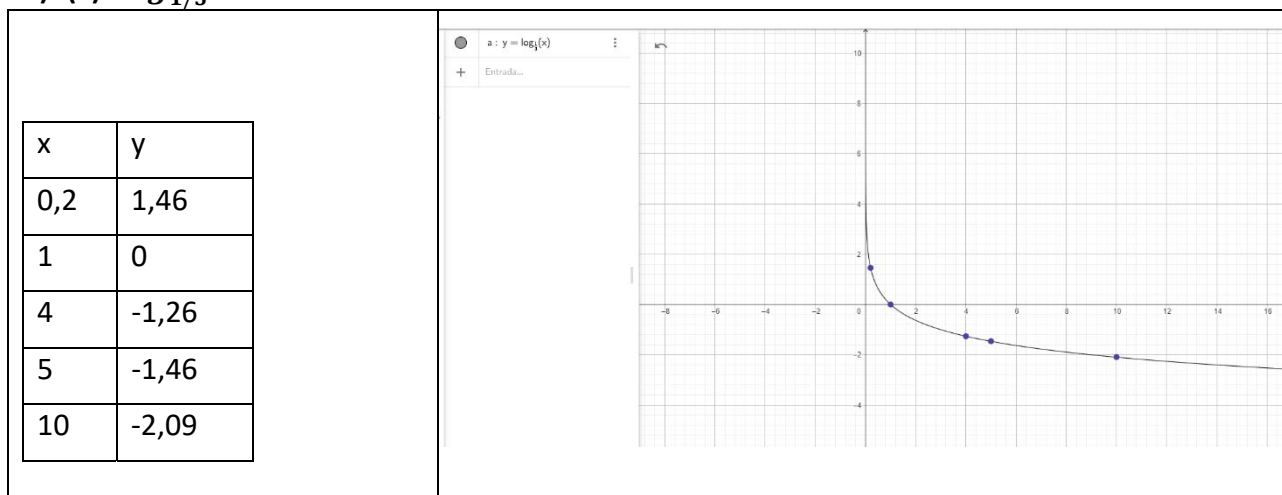


10. representa en tu cuaderno, mediante tabla de valores, las gráficas de las siguientes funciones:

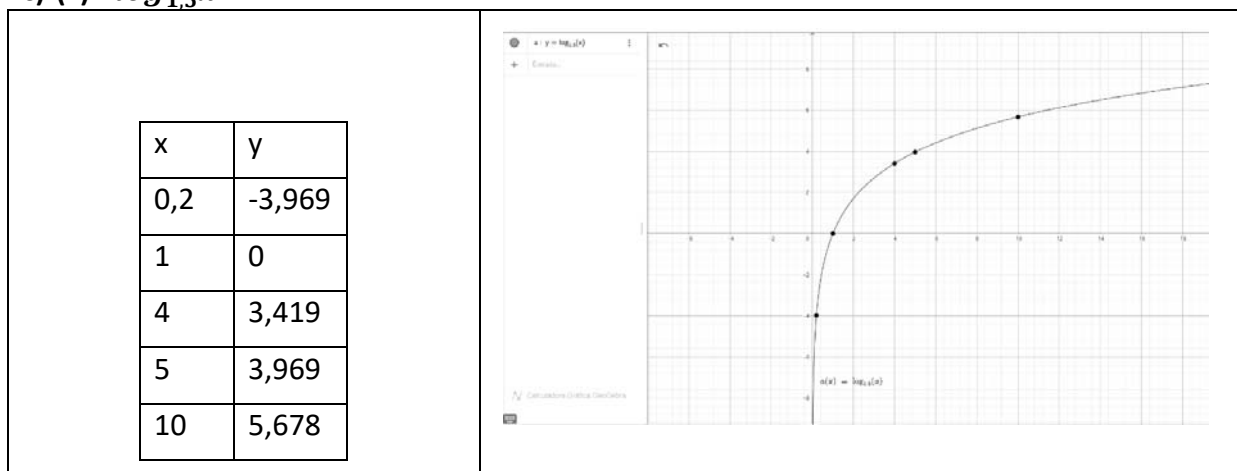
a) $f(x) = \log_3 x$



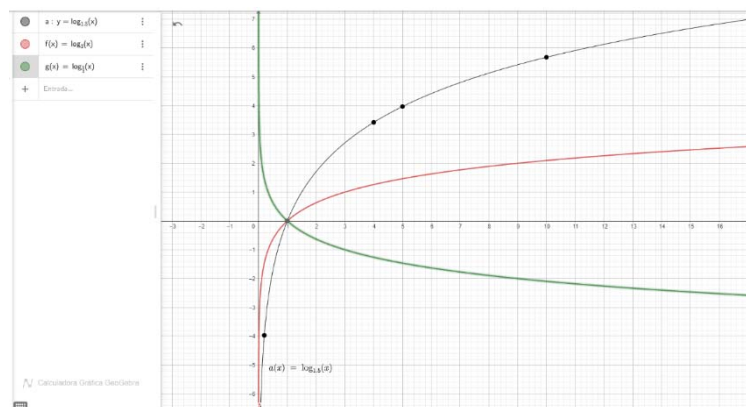
b) $f(x) = \log_{1/3} x$



c) $f(x) = \log_{1,5} x$

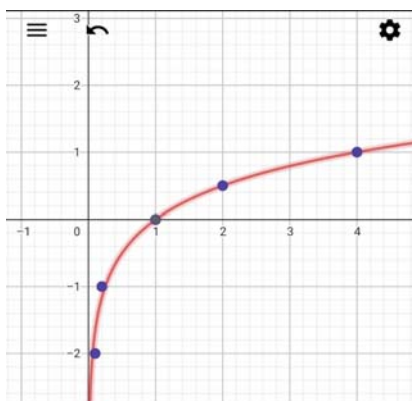


(Esta es una gráfica de las 3 funciones juntas)



11. Identifica las fórmulas de las siguientes funciones a partir de sus gráficas ,sabiendo que son funciones logarítmicas

a)



Cojo el punto (4 , 1)

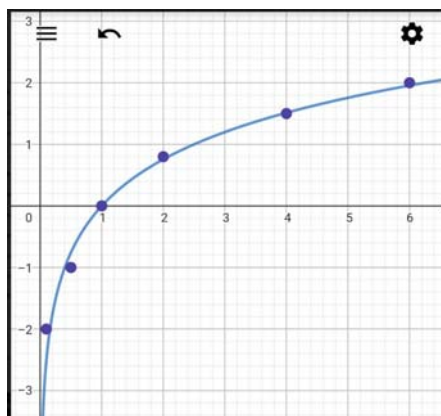
$$1 = \log_a 4$$

$$a^1 = 4$$

$$a = 4$$

$$f(x) = \log_4 x$$

b)



Cojo el punto (6 , 2)

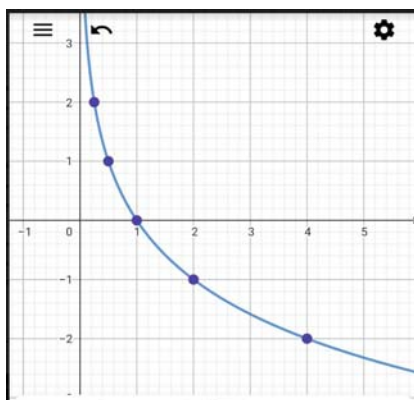
$$2 = \log_a 6$$

$$a^2 = 6$$

$$a = \sqrt{6}$$

$$f(x) = \log_{\sqrt{6}} x$$

c)



Cojo el punto (4, -1)

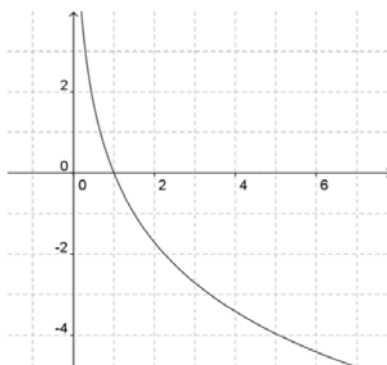
$$-1 = \log_a 4$$

$$a^{-1} = 4$$

$$a = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$$

d)



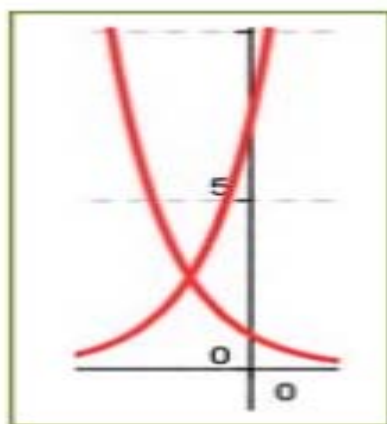
Cojo el punto (5, -4)

$$-4 = \log_a 5$$

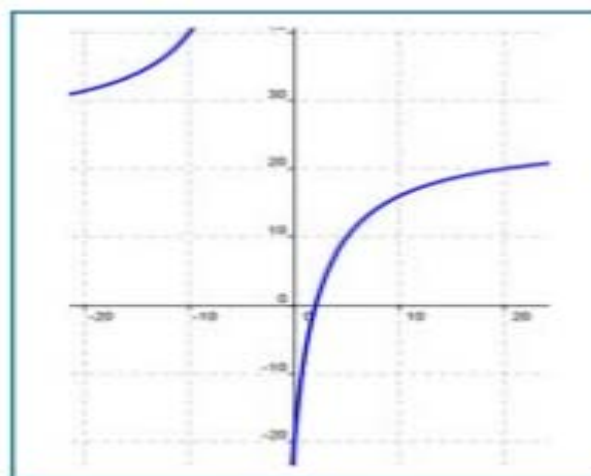
$$a^{-4} = 5$$

$$a = 5^{-\frac{1}{4}}$$

$$f(x) = \log_{5^{-\frac{1}{4}}} x$$

12. Dibuja el recinto limitado por las curvas, $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x=0$.Tiene de vértices (0, 1), (0, e²) y (-1, e).

13. Las ganancias de una empresa, en millones de pesetas, se ajustan a la función $f(x) = \frac{50x-100}{2x+5}$, donde x representa los años de vida de la empresa, cuando $x \geq 0$. Calcula el dominio, corte con los ejes, signo y simetrías de dicha función.



Dominio: La función está definida en toda la recta real salvo en el punto $x = -5/2$;

Intersección con los ejes: $(2, 0)$, $(0, -20)$.

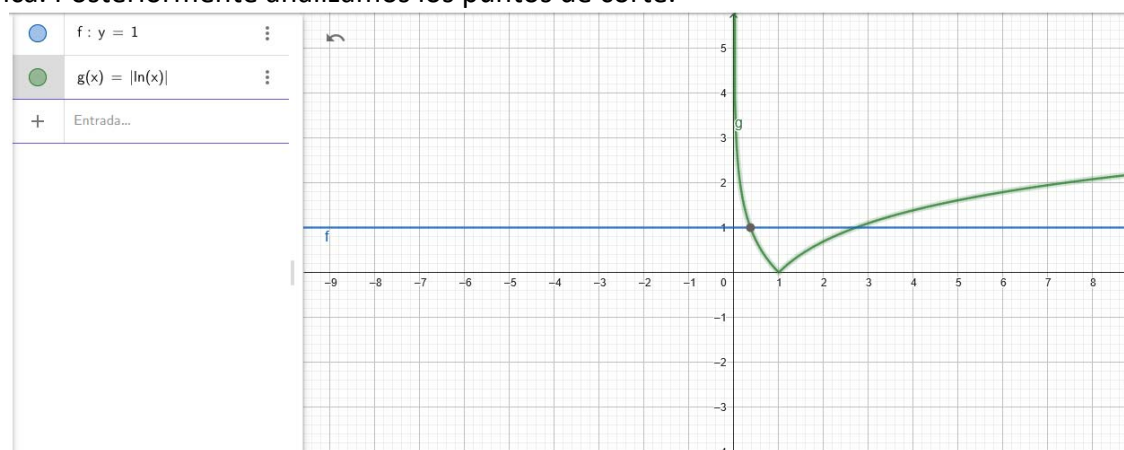
No es simétrica.

Tiene una asíntota vertical para $x = -5/2$.

Para $x < -5/2$ y para $x > 2$ la función es positiva, y para $-5/2 < x < 2$ es negativa.

14. Considera la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$ (donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano). Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

Utilizando el programa GeoGebra introducimos los valores que nos dice el enunciado y se nos dibuja una gráfica. Posteriormente analizamos los puntos de corte.



Los puntos de corte obtenidos con la recta y son los siguientes:

- Punto A: $(1/e, 1)$

- Punto B: $(e, 1)$

15. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{Lx}{x^2} \rightarrow \text{Dom } f: (0, \infty)$

Los logaritmos son de 0 a infinito, lo cual ya excluye el 0 del denominador.

b) $g(x) = (1-x^3) \cdot \cos(x) \rightarrow \text{Dom } g: \mathbb{R}$

Tanto las funciones polinómicas como el coseno tienen todo $\mathbb{R}$ como dominio

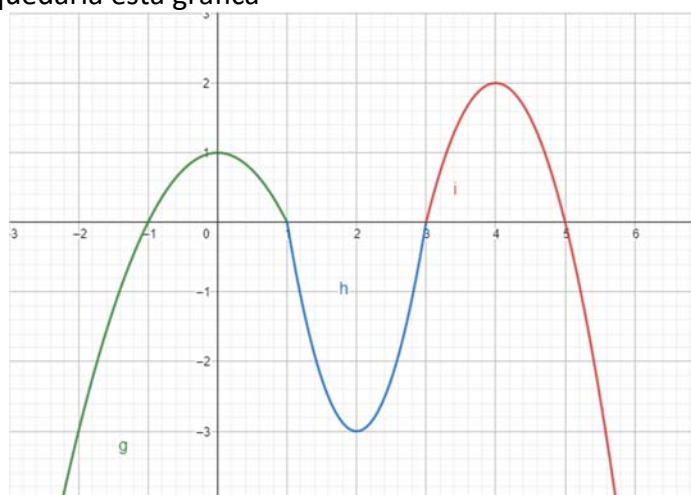
c) $h(x) = 4 \cdot x^3 - 5 \cdot x + \frac{1}{e^x} \rightarrow \text{Dom } h: \mathbb{R}$

Función polinómica y el denominador no se anula nunca

16. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Dibuja su gráfica y, a la vista de ella, indica su dominio, sus puntos de corte con los ejes y su signo.

Una vez dibujada $f(x)$, quedaría esta gráfica



Dominio:

Se trata de una función definida a trozos, formada por 3 funciones polinómicas, como el dominio de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$ podemos decir que:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Puntos

puntos de corte con el eje X $\rightarrow (-1, 0) ; (1, 0) ; (3, 0) ; (5, 0)$

punto de corte con el eje Y $\rightarrow (0, 1)$

corte:

Signo de la función:

Zonas donde $f(x)$ es positiva:

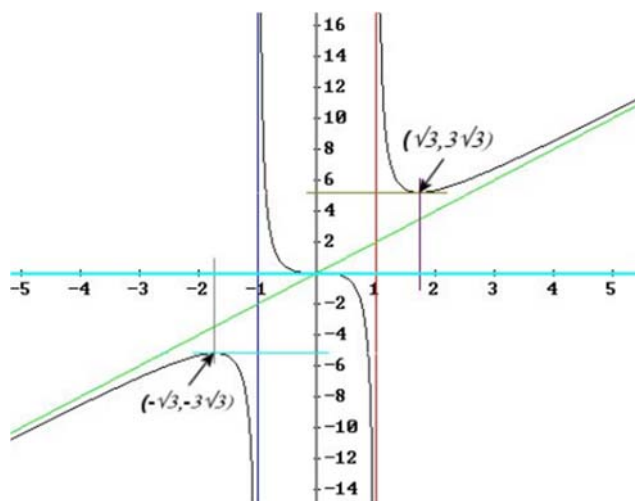
$$(-1, 1) \cup (3, 5)$$

Zonas donde $f(x)$ es negativa

$$(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (5, \infty)$$

17) Estudia el dominio, puntos de corte con los ejes y signo de las siguientes funciones:

a)



$$\text{Dom}f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

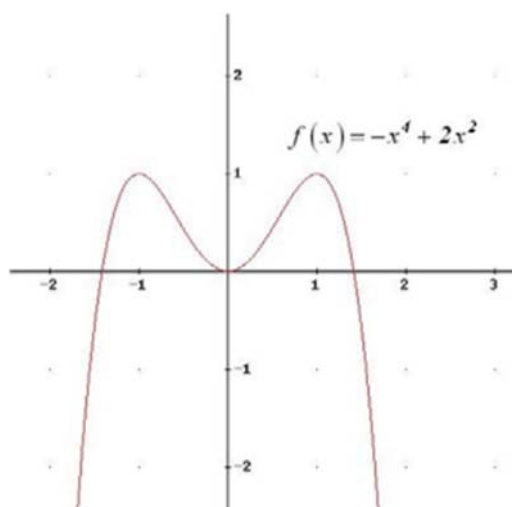
PUNTOS DE CORTE CON EL EJE X
(0,0)

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE Y
(0,0)

FUNCIÓN CON SIGNO NEGATIVO
 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

FUNCIÓN SIGNO POSITIVO
 $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

b)



Dominio:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Cortes eje X:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 \quad ; \quad -x^4 + 2x^2 = 0 \quad ; \quad x = -\sqrt{2} \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad x = \sqrt{2}$$

puntos de corte: $(-\sqrt{2}, 0)$; $(0, 0)$; $(\sqrt{2}, 0)$

Punto de corte con el eje Y

Para calcular el punto de corte con el eje Y, se le da a x el valor de 0: $x = 0$

Como todos los términos de la ecuación llevan x, el punto de corte con el eje y será el $(0, 0)$

Signo:

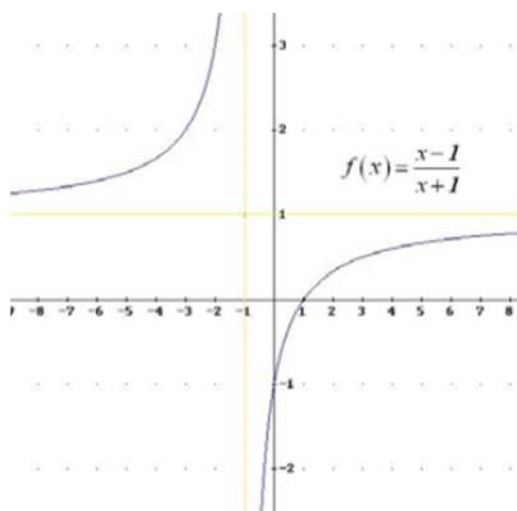
Zonas negativas

$$(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$$

Zonas positivas

$$(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$$

c)



Dominio:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Puntos de corte:

El punto de corte con el eje X es $(1, 0)$

El punto de corte con el eje Y es el punto $(0, -1)$

Signos:

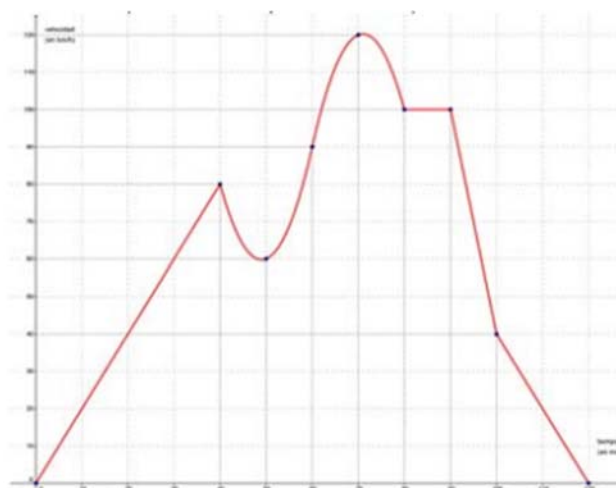
Zonas donde la función es positiva

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Zonas donde la función es negativa

$$(-1, 1)$$

d)



$$\text{Dom}f(x) = x \in / (0 \leq x \leq 120)$$

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE X

$$(0,0) \\ (120,0)$$

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE Y

$$(0,0)$$

Zonas donde la función es positiva

$$(0,120)$$

Zonas donde la función es negativa

No existe zona negativa

18. El estudio de la rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de $f(x)$ millones de €, siendo: $f(x) = x^2/50 + 8x/25 - 8/5$, si $0 \leq x \leq 5$ y $5/2x$ si $x > 5$. Razona cual es el rango de valores de la variable, los puntos problemáticos de cada una de las fórmulas y, finalmente, el dominio de la función.

-rango valores de la variable: $(0, +\infty)$ porque los valores, $(0 \leq x \leq 5)$ y $(x > 5)$, que nos proporciona el enunciado nos lo indican.

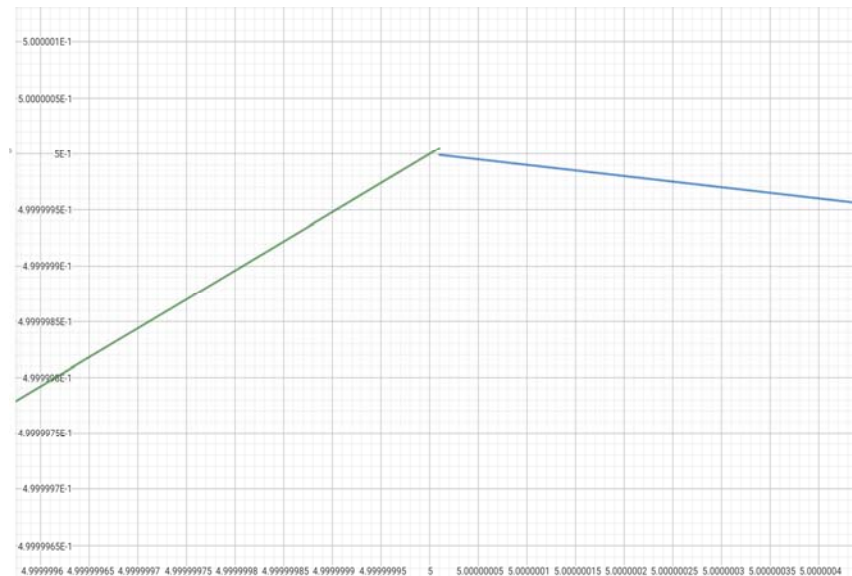
-Puntos problemáticos:

$X=5$ se estudia como punto problemático porque pasamos de una función a otra.

Es continua en todos los puntos excepto en el punto problemático, como se puede observar en la

gráfica

-Dominio: $\text{dom } f(x) = [0, +\infty)$



19. Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba de modo que la altura "h" (en metros). A a la altura que se encuentra en a cada instante "t" (en segundos) viene dada por la expresión $h(t) = -5t^2 + 40t$.

a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?

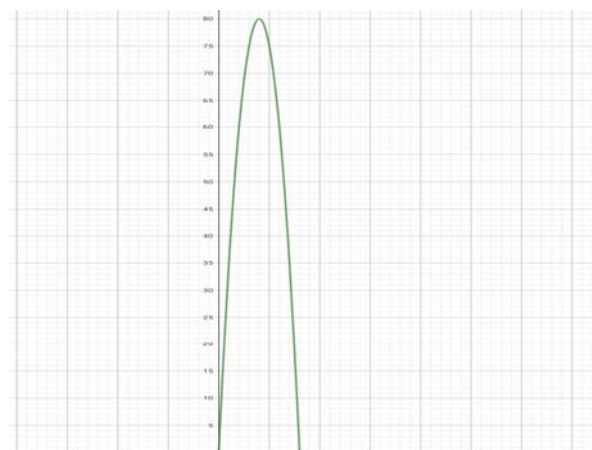
Averiguar el valor de x con la fórmula del vértice de la ecuación. ($x = t$)

$$x = -b/2a, x = -40/2 \cdot (-5) = 4 \text{ segundos}$$

$$h = -5 \cdot (4)^2 + 40 \cdot 4 = -5 \cdot 16 + 160 = -80 + 160 = 80 \text{ metros}$$

La altura máxima es a los 4 segundos, 80 metros.

b) Representa gráficamente la función h(t)



c) ¿En qué momento de su caída se encuentra el objeto a 60 metros de altura?

$$h(t) = -5t^2 + 40t$$

$$60 = -5t^2 + 40t, -5t^2 + 40t - 60 = 0, t_1 = 6 \text{ y } t_2 = 2.$$

El momento de la caída a los 60 metros es 6 segundos, a los 2 segundos también está a 60 metros, pero es de subida.

d) ¿En qué instante llega al suelo?

Sustituimos $h=0$ en la ecuación.

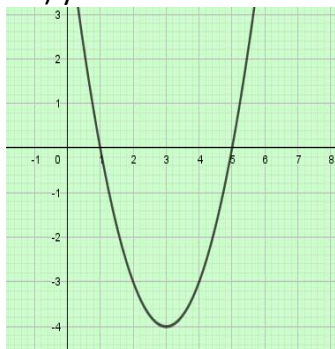
$$0 = -5t^2 + 40t, t_1 = 8 \text{ y } t_2 = 0$$

Llega al suelo a los 8 segundos.

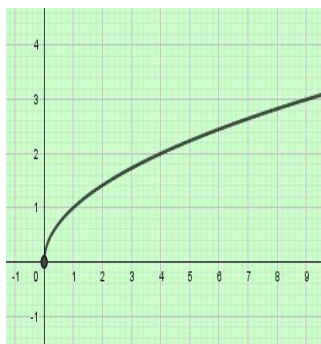
AUTOEVALUACIÓN

1. Señala cuál de las siguientes gráficas no corresponde a una función:

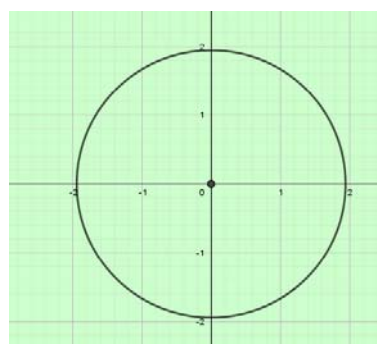
a) $y = x^2 - 6x + 5$



b) $y = \sqrt{x}$



c) $x^2 + y^2 + 1$



d) función a trozos

La c) no es una función, pues cuando una abscisa "x" tiene más de una ordenada "y", esta no puede ser función

2. La fórmula de la composición *fog* de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2$ es:

$$fog \rightarrow (fog)(x) = f(g(x)) = f(-x^2 + 2) = -(2x - 1)^2 + 1 = -(4x^2 - 4x + 1) + 2 \rightarrow (-4x^2 + 4x + 1)$$

Es la c)

3. La fórmula de la función inversa o recíproca de $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ es:

$$y = \frac{x-1}{x+2} \rightarrow y(x+2) = x-1 \rightarrow yx + 2y = x-1 \rightarrow yx - x = -2y-1 \rightarrow x(y-1) = -2y-1 \rightarrow x = \frac{-2y-1}{y-1} ; y = \frac{-2x-1}{x-1}$$

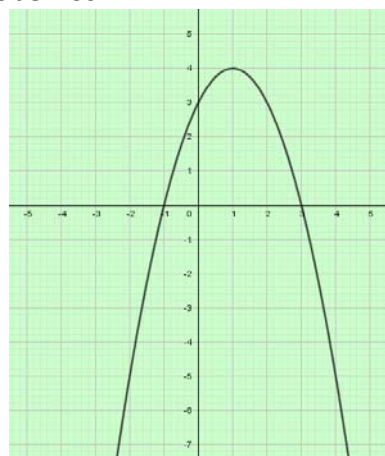
Es la d) $y = \frac{-2x-1}{x-1}$

4. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es:

Deberá ser una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Al ser $a < 0$ debe ser cóncava, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

Es entonces la d). Comprobemos:

x	y
-1	0
0	3
1	4
2	3
3	0



5. El dominio de la función $f(x) = e^{\frac{x}{x^2-1}}$ es:

$$e^{\frac{x}{x^2-1}} \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Es la c)

6.) El recorrido de la función.

Es la opción a) $[-1, \infty)$

Porque el -1 es el punto el cual determina el inicio de la imagen de la función y va hacia el infinito.

7) Los puntos de corte con el eje de abscisas de la función.

Para sacar los puntos de corte con el eje x se tiene que igualar la función a 0

$$\ln(x^2 - 3x + 3) = 0$$

Gracias al número e $\rightarrow e^{\ln(x^2-3x+3)} = e^0$; $x^2 - 3x + 3 = 1$; $x^2 - 3x + 3 - 1 = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ Las soluciones a esta ecuación de segundo grado son 1 y 2 por lo tanto, es la opción b, (1,0) y (2,0).

8) La única función impar es:

El apartado d porque se cumple que $f(-x) = -f(x)$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2 - 8} = \frac{-x^3}{2x^2 - 8} = -f(x)$$

Además, toda función de simetría impar es simétrica respecto al origen de coordenadas y la gráfica del apartado d es la única que es simétrica respecto al origen de coordenadas.

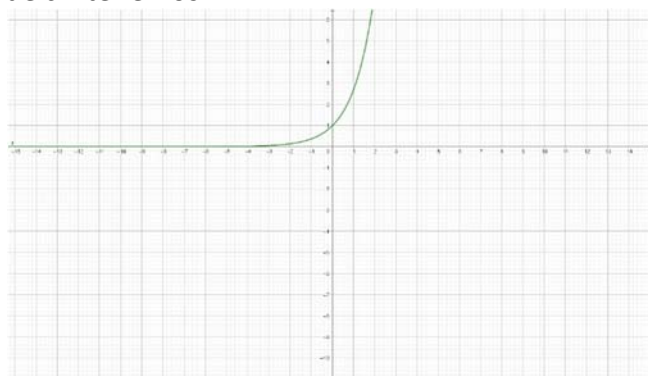
9) El intervalo donde la función es negativa.

Para que una función sea negativa en un intervalo se debe cumplir que $f(x) < 0$, esto se consigue en el intervalo abierto $(-1, 1)$. Es abierto porque tanto en el -1 y en el 1 la función se hace 0 y no es negativa.

10) La única función No periódica es la de e^x .

El $\sin(x)$ es periódica de periodo 2π , La $\tan(x)$ es de periodo π y la $\text{cosec}(x)$ tiene periodo 2π

Si nos fijamos en la gráfica de e^x tenemos



Esta función no es periódica.

Matemáticas I
1º Bachillerato
Capítulo 7: Límites

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

Adrián, Álvaro, Carlota, Celia, Diego, Gabriel, Gonzalo, Inocencio, Irene, Javier, Jose, Lucía N., Lucía R., Manuel J., Manuel L. María, Nacho, Natalia, Pablo, Sara C., Sara D., Sara M., Víctor.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x \rightarrow 1} x = 1$.

Sea un ε cualquiera, hemos de ver que existe un δ , de tal manera que si $0 < |x-1| < \delta$ entonces $|x-1| < \varepsilon$

Para que $|x-1| < \varepsilon$ para cualquier ε , basta tomar $\delta = \varepsilon$.

2. Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x + 3) = -2 \cdot 1 + 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 2) = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Como existen los 2 límites laterales y son iguales, existe el $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y es = 1.

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} & \text{si } x < 1 \\ \frac{5x^2}{x+3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow \frac{-2 \cdot 1 + 3}{1+5} = \frac{1}{6} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \frac{5 \cdot 1^2}{1+5} = \frac{5}{6}$$

No existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ya que no dan el mismo resultado cuando calculamos los límites laterales.

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &\rightarrow \frac{7}{1^2+4} = \frac{7}{5} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \frac{1-1}{1^2} = 0 \end{aligned}$$

No existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ya que no dan el mismo resultado cuando calculamos los límites laterales.

3. Escribe la definición de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ($x \rightarrow -\infty$)

Decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a ∞ , es ∞ si para cualquier número real h hasta el cual las imágenes de $x < h$ son mayores que k .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ si } \forall k \in \mathbb{R} \exists h \in \mathbb{R} / \text{si } x > h \rightarrow f(x) > k$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \text{ si } \forall k \in \mathbb{R} \exists h \in \mathbb{R} / \text{si } x < h \rightarrow f(x) > k$$

4. Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Sea un ε cualquiera, hemos de ver que existe un $k > 0$, tal que siempre que $x > k$, se cumple $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon \rightarrow |\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$; $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$; $|\frac{1}{\varepsilon}| < x$, basta con tomar $k > \frac{1}{\varepsilon}$.

5. Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \leftrightarrow \forall k > 0, \exists \delta > 0$, tal que ,siempre que, $0 < x < \delta$, $x \in X$, se cumple $1/x > k \rightarrow 1/k > \delta > x$, luego dado $k > 0$ basta elegir $\delta > 1/k$ para que se verifiquen las condiciones.

6. Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos y calcúlalos:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty^2 = -\infty$ infinito de variable infinita

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} +x^2 = +\infty^2 = \infty$ infinito de variable infinita

c) $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 3^2 = 9$ finito de variable finita

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ finito de variable finita

7. Calcula los límites indicando el signo:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -(+\infty^3) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = -(-\infty^3) = +\infty^3 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{-\infty^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

8. calcula los siguientes límites indicando el signo:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{1^+-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{1^--1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-5}{x-3} = \frac{-5}{3^+-3} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-5}{x-3} = \frac{-5}{3^--3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

9. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

Como determinar una asíntota vertical:

$$f(x) = P(x) / Q(x); \quad Q(x) = 0; \quad x = a; \quad x = b.$$

$$a) \quad f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-2)} = \frac{(x+4)}{(x-1)}; \quad (x-1)=0; \quad x=1$$

Solución: A.V. en $x=1$.

$$b) \quad f(x) = \frac{x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}; \quad (x-2)=0; \quad (x-3)=0; \quad x=2; \quad x=3$$

Solución: A.V. en $x=2$ y en $x=3$.

$$c) \quad f(x) = \frac{(x+4)^2}{(x-1) \cdot (x+4)} = \frac{(x+4)}{(x-1)}; \quad (x-1)=0; \quad x=1$$

Solución: A.V. en $x=1$.

$$d) \quad f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}; \quad (x-1)=0; \quad (x-3)=0; \quad (x-5)=0; \quad (x+1)=0; \quad x=1; \quad x=3; \quad x=5; \quad x=-1.$$

Solución: A.V. en $x=1$, en $x=3$, en $x=5$ y en $x=-1$.

10. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

Una asíntota horizontal de una función es una recta horizontal a la cual su gráfica se va aproximando indefinidamente sin llegar nunca a cruzarla, por lo que, para averiguar la asíntota horizontal de una función tendremos que calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \rightarrow y = k$

$$a) \quad f(x) = \frac{(x+4) \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow y = 1$$

$$b) \quad f(x) = \frac{3x \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 12x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = \frac{3}{1} = 3 \rightarrow y = 3$$

$$c) \quad f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1) \cdot (x-4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 16}{2x^2 - 10x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$d) \quad f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^4} = 0 \rightarrow y = 0$$

11. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las siguientes funciones:

Para resolver la A.O de cada función, debemos seguir el mismo procedimiento en todas las f(x):

1) A.O $\rightarrow y = mx + n$ $m = \text{pendiente}$ $n = \text{ordenada origen}$

2) Identificar si existe A.H.: si A.H existe, A.O no.

$$3) m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$$

$$4) n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

$$5) \text{ Posición } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)), \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n))$$

$$\mathbf{a) f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)}}$$

$$\text{A.V} \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

1) Identificar si existe A.H.: si A.H existe, A.O no.

$$\text{A.H} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \infty \text{ A.H no existe}$$

$$2) m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+4)(x-2)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1$$

$$3) n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} - 1x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4x - 8 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 8}{x-1} = 3 \rightarrow n = 3$$

$$4) \text{ A.O} \rightarrow y = mx + n$$

$$\text{A.O} \rightarrow y = x + 3$$

$$5) \text{ Posición } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)), \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n))$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} - (x + 3) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 4x - 8 - 1x^2 + 1x - 3x + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} - (x + 3) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 4x - 8 - 1x^2 + 1x - 3x + 3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} = 0^+$$

$$\mathbf{b) f(x) = \frac{2x^2(x+2)}{(x-2)(x-2)}}$$

$$\text{A.V} \rightarrow (x-2) \cdot (x-3) = 0 \rightarrow x = 2 \quad x = 3$$

1) Identificar si existe: si A.H existe, A.O no.

$$\text{A.H} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{0} = 0 \text{ A.H no existe}$$

$$2) m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2(x+4)}{x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3 \rightarrow m = 3$$

$$3) n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 12x^2 - 3x^3 + 9x^2 + 6x^2 - 18x}{x^2 - 3x - 2x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x^2}{x^2} = 27 \rightarrow n = 27$$

$$4) \text{ A.O} \rightarrow y = mx + n$$

$$\text{A.O} \rightarrow y = 3x + 27$$

5) Posición $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n))$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n))$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} - (3x + 27) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 12x^2 - 3x^3 + 9x^2 + 6x^2 - 18x - 27x^2 + 81x - 54x - 162}{x^2 - 3x - 2x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x}{x^2} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} - (3x + 27) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 12x^2 - 3x^3 + 9x^2 + 6x^2 - 18x - 27x^2 + 81x - 54x - 162}{x^2 - 3x - 2x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{27x}{x^2} = 0^-$$

c) $f(x) = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$

A.V $\rightarrow 2(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1$

1) Identificar si existe A.H.: si A.H existe, A.O no.

A.H $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \infty$ A.H no existe

2) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+4}{2(x-1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{2x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

3) $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+8-2x^2+2x}{4x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \rightarrow n = \frac{1}{2}$$

4) A.O $\rightarrow y = mx + n$

A.O $\rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

5) Posición $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n))$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n))$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+4}{2(x-1)} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4-x^2-x+1}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+4}{2(x-1)} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4-x^2-x+1}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2x} = 0^-$$

d) $f(x) = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}$

A.V $\rightarrow x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

1) Identificar si existe: si A.H existe, A.O no.

A.H $\rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2+4)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} = 0$ A.H no existe

2) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} \rightarrow m = 2$$

3) $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x^2+4)}{(x+1)} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4-2x^2-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{x} = -2 \rightarrow n = -2$$

4) A.O $\rightarrow y = mx + n$

A.O $\rightarrow y = 2x - 2$

5) Posición $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n))$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n))$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x^2+4)}{(x+1)} - (2x-2) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4-2x^2-2x+2x+2}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(2x^2+4)}{(x+1)} - (2x-2) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+4-2x^2-2x+2x+2}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0^-$$

12. Analizar el comportamiento en el infinito de cada una de estas funciones

a) $f(x) = (x+4)^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+4)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 8x + 16) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = (\infty)^2 = +\infty$$

b) $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2-4x+4} = \frac{3}{(\infty)^2} = 0$$

c) $f(x) = x^3 + 4$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 4) = (\infty)^3 + 4 = \infty$$

d) $f(x) = \frac{2x^5+4}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5+4}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{1} = \infty$$

13) Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right)$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right) = \left(\frac{1}{3^2-9} - \frac{1}{3-3} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{(x+3)(x-3)} - \frac{1}{x-3} \right) \rightarrow mcm = (x+3)(x-3)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1-(x+3)}{(x+3)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1-x-3}{(x+3)(x-3)} \right) = \left(\frac{1-3-3}{(3+3)(3-3)} \right) = \frac{-5}{6 \cdot 0} = -\frac{5}{0} = -\infty$$

14) Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) = \left(\frac{1}{1^2-1} - \frac{1}{1-1} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1} \right) \rightarrow mcm = (x+1)(x-1)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-1(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right) = \frac{1-1-1}{(1+1)(1-1)} = \frac{-1}{2 \cdot 0} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

15) Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \left(\frac{1}{-2+2} - \frac{1}{(-2)^2-4} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)(x-2)} \right) \rightarrow mcm = (x+2)(x-2)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1(x-2)-1}{(x+2)(x-2)} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2-1}{(x+2)(x-2)} \right) = \left(\frac{-2-2-1}{(-2+2)(-2-2)} \right) = \frac{-5}{0 \cdot (-4)} = -\frac{5}{0} = -\infty$$

16) Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} \right)$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} \right) = \left(\frac{-2-2}{-2+2} - \frac{-2}{(-2)^2-4} \right) = \frac{-4}{0} - \left(-\frac{2}{0} \right) = -\infty + \infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x}{(x+2)(x-2)} \right) \rightarrow mcm = (x+2)(x-2)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(x-2)^2-x}{(x+2)(x-2)} \right) = \left(\frac{(-2-2)^2-(-2)}{(-2+2)(-2-2)} \right) = \left(\frac{(-4)^2+2}{0 \cdot (-4)} \right) = \frac{16+2}{0} = \frac{18}{0} = +\infty$$

17. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \right) = \frac{3^2-5 \cdot 3+6}{3^2-9} = \frac{9-15+6}{9-9} = \frac{0}{0}$$

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2) \quad x^2-9 = (x-3)(x+3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+3} = \frac{3-2}{3+3} = \frac{1}{6}$$

18. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2-4x+3)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)}{(x+1)} = \frac{1(1-3)}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x = (x-3)(x-1) \quad x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

19. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{6+x})^2-3^2}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6+x-9}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{6+x}+3)} = \frac{1}{(3+3)(\sqrt{6+3}+3)} = \frac{1}{6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$$

$$x^2-9 = (x+3)(x-3)$$

20. Calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \right) = \left(\frac{\sqrt{4}-2}{1-1} \right) = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+x-4}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

21. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} \right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x} \right) \cdot \frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{3-x})^2 - (\sqrt{3})^2}{x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x-3}{x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(\sqrt{3-x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{3-x} + \sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

Solución= El límite cuando x tiende a 0 es $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$

22. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2} = \frac{2-\sqrt{2+2}}{2-2} = \frac{2-\sqrt{4}}{2-2} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2} \cdot \frac{2+\sqrt{2+x}}{2+\sqrt{2+x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^2 - (\sqrt{2+x})^2}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2-x}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2+\sqrt{2+x}} = \frac{-1}{2+\sqrt{2+2}} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

Solución= El límite cuando x tiende a 2 es $\frac{-1}{4}$

23. Escribe sin hacer cálculos el valor de los límites siguientes

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1} = 1$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^2$ en el numerador y $5x^2$ en el denominador. Al ser iguales, se simplifican las x^2 , quedando $5/5$. De modo que la solución es 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1} = \infty$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^5$ en el numerador y $5x^2$ en el denominador, al simplificar queda en el numerador x^3 . La fracción final quedaría $\frac{\infty}{5}$ y esto es igual a ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1} = 0$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^2$ en el numerador y $5x^7$ en el denominador, al simplificar queda en el denominador x^5 . La fracción final quedaría en el denominador x^5 . El resultado final quedaría $\frac{5}{\infty}$ que es igual a 0.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x} = 2$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $4x^3$ en el numerador y $2x^3$ en el denominador. Al ser iguales, se simplifican las x^3 , quedando $4/2$. De modo que la solución es 2.

24. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{x} \right) = -1 \quad ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x} \right) = (0 - 1) = -1$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{x-1} - 3x \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{1} - 3x \right) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{x-1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2-3x(x-1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2-3x^2+3x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{x-1} \right),$$

dividimos entre x, numerador y denominador,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{x} \right) = 3 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1 \quad ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} \right) = \frac{3}{1} = 3$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x}) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}} \right) =$$

dividimos numerador y denominador entre x

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (3-\frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}})} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3-\frac{1}{x}) = 3 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right) = 2$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} \right) =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (5)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3})} = \frac{5}{\infty} = 0$$

25. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{(\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{x-4})^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4})}{8} = \frac{\infty}{8} = \infty$$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{sen } x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{sen} x) = \text{no existe}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 7x}{x^5 + 100x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 7x}{x^5 + 100x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5}{x^5} = 3$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x) \rightarrow (e^{+\infty}) = \infty$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = (\ln 0^+) = -\infty$$

26. Determina los siguientes límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x^2-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x^2-1} = 1^\infty \quad ; \quad \text{Utilizo } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1+2-2}{x-2} \right)^{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} \right)^{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{2x^2-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}} \right)^{2x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3}} \right)^{\frac{x-2}{3} \cdot \frac{3}{x-2} \cdot (2x^2-1)} \right] = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2-3}{x-2} \right)} = e^\infty = \infty \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x+2-2}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-2}{3x^2-2} + \frac{2+2}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}} \right)^{\frac{2x^2-1}{x} \cdot \frac{3x^2-2}{3x^2-2} \cdot \frac{2+x}{2+x}} \right] = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x} \cdot \frac{2+x}{3x^2-2} \right)} = e^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+5} \right)^{3x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+5} \right)^{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1-5+5}{x^3+5} \right)^{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3+5}{x^3+5} + \frac{-6}{x^3+5} \right)^{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{x^3+5} \right)^{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{\frac{x^3+5}{-6}}\right]^{\frac{3x^2 \cdot -6}{x^3+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{\frac{x^3+5}{-6}}\right]^{3x^2 \cdot \frac{-6}{x^3+5}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x^2 \cdot \frac{-6}{x^3+5}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-18x^2}{x^3+5}\right)} = e^0 = 1$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3+1-1}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x+1} + \frac{2}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}\right]^{\frac{5x+1}{2} \cdot \frac{2}{5x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{5x+1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{5x} \cdot \frac{2}{5x+1}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{5x} \cdot \frac{2}{5x+1}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-2}{25x^2+5x}\right)} = e^{\frac{2}{25}}$$

27. Determina los límites siguientes (observa que no son de tipo e)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{x+1}\right) = 5; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = 5^\infty = \infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2)}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{4x^3}\right) = \frac{1}{4}; \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^\infty = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 \left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{2}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{2}{x^2}}\right) = \frac{3+0}{3-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right)}{x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 2 \cdot 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)} = 1^0 = 0$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{5 + \frac{1}{x^2}}\right) = \frac{5 \cdot 0 + 3 \cdot 0}{5 + 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{5x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)}{5x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}{5} \right) = \frac{0-0}{5} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{5x^3} \right)} = 0^0$$

Aplicamos $a^x = e^{\ln(a^x)}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}} = e^{\ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{5x^3} \cdot \ln \left(\frac{5x+3}{5x^2+1} \right)}$

28. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$;

$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$ Continua en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{-1+1}{(-1)^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Esta función presenta una discontinuidad evitable en $x = -1$

b) $f(x) = \sqrt{x-5}$;

Continua en $\mathbb{R}, x \geq 5$ porque su dominio es $x - 5 \geq 0, x \geq 5$

c) $f(x) = \log_2(x-3)$;

Continua en $\mathbb{R}, x > 3$ porque su dominio es $x - 3 > 0$

d) $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$1. f(0) = 2 + 0^2 = 2 \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 + x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + e^x) = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ si existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

3. $f(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ es continua en $x = 0$

29. Determina el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x \leq 1 \\ k + x & x > 1 \end{cases}$$

f es continua en toda la recta real salvo en $x = 1$,

Continuidad en $x=1$

Paso 1. $f(1) = 2 - 1^2 = 1$

Paso 2. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x^2) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (k + x) = k + 1 \end{cases}$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ los límites laterales han de ser iguales, de donde, $k+1=1$; $k=0$

30. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 2 + x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en todo su dominio salvo en $x = -1, x = 1$, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas y una racional cuyo denominador no se anula, que son continuas.

Continuidad en $x = -1$

$$1^{\circ} f(-1) = 2 + (-1)^2 = 3$$

$$2^{\circ}. \left\{ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + 3) = 5 \right\}$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2 + x^2) = 3 \right\}$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, los límites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando $x = -1$

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

Continuidad en $x = 1$

$$1^{\circ}. f(1) = 2 + 1^2 = 3$$

$$2^{\circ}. \left\{ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 + x^2) = 3 \right\}$$

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{x} \right) = 3 \right\}$$

$$3^{\circ}. \text{ Como } f(1) = 3 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ } f \text{ es continua en } x = 1$$

$$b) f(x) = x - \sqrt{x - 2}$$

1º Encontrar dominio para identificar intervalos continuos

$$\text{Dom de: } x - \sqrt{x - 2}; x \geq 2$$

“El dominio de una función es el conjunto de entradas o valores de los argumentos para los cuales la función es real y definida”

2º Encontrar valores no negativos para las raíces; $x \geq 2$

$$\sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0; x - 2 \geq 0; x \geq 2$$

$$\text{Dom } f = x \geq 2 \Rightarrow \text{Intervalos continuos en } x \geq 2$$

$$c) f(x) = |x - 3| - 1$$

La función no tiene puntos no definidos ni limitaciones de dominio.

Por lo tanto, el dominio es $-\infty < x < \infty$ y es continua en $-\infty < x < \infty$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los límites siguientes:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2-9} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x^2-9} \rightarrow \frac{-3+3}{9-9} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ Indeterminación} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \rightarrow \frac{1}{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x-3} \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x-3} \rightarrow \frac{9-9}{-3-3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x} \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x} \rightarrow \frac{-3+3}{(-3)^2+3-3} \rightarrow \frac{-27+27}{9-9} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ Indeterminación} \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2-3x+9)}{x} \rightarrow \frac{9+9+9}{-3} \rightarrow -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2} \rightarrow \frac{1-1}{1+1-2} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ Indeterminación} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+2)} \rightarrow \frac{1+1+1}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{-x-2} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{-x-2} \rightarrow \frac{(-2)^3}{-(-2)-2} \rightarrow \frac{-8+8}{2-2} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ Indeterminación} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{-x-2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{-1(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2-2x+4)}{-1} = -[(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4] = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1} \rightarrow \frac{2-4}{0} \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3} \rightarrow \frac{-98}{-5} = \frac{98}{5} \end{aligned}$$

2. Calcula los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-1} = \frac{\infty^2}{-1} \rightarrow -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+8}{-x^5-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x^5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{-\infty^2} \rightarrow 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+8}{-x^3-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{-x^2-4} - \frac{2}{x-2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{-x^2-4} - \frac{2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{-x^2} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{-x} - \frac{2}{x} \right) = \frac{3}{-\infty} - \frac{2}{\infty} \rightarrow 0 - 0 = 0$$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x^2-4} - \frac{x-3}{x+2} \right) = 0 - 1 = -1$$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x} - \sqrt{x^2}) = -\infty$$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2})$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}) \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2}) \cdot (\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1-x+2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x}}} \right) = \frac{0}{\sqrt{1-0} + \sqrt{1-2 \cdot 0}} = 0 \end{aligned}$$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2}}{4} \right) = -\infty$$

3. Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-3}$

Asíntota vertical $x - 3 = 0 \quad x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \frac{3}{0^+} = \infty$$

Asintota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \infty \text{ no tiene AH}$$

Asintota oblicua

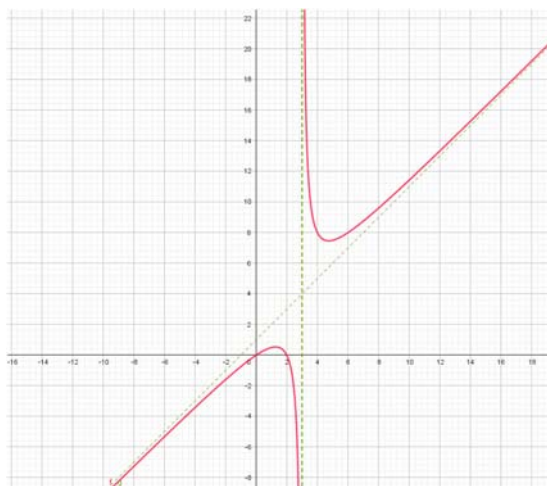
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{x - 3}}{\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x - 3} = 1$$

$$y = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} - x - 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 - x + 3x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x - 3} = \frac{3}{\infty^+} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x}{x - 3} - x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 - x + 3x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 3} = \frac{3}{-\infty} = 0^-$$



b) $f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$

$AV \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \quad x = 2, \quad x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{x^2 - 4} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x^2 - 4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

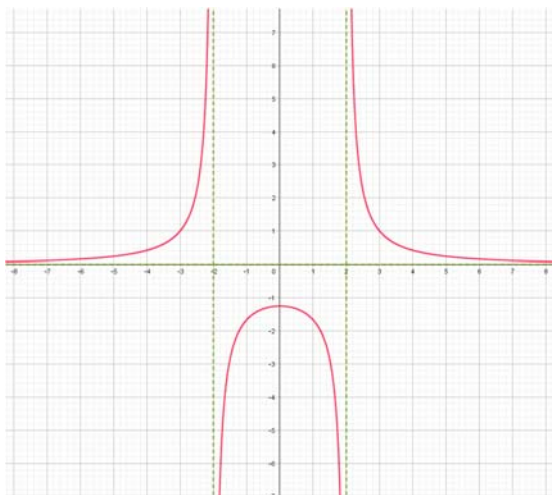
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{5}{x^2 - 4} = \frac{5}{-0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5}{x^2 - 4} = \frac{5}{-0^+} = -\infty$$

$AH \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^2} = 0$

$y = 0$

No existe AO porque hay AH



c) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

AV $\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \quad x = 2, x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{0}{0^-} = \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{0}{0^+} = \text{indeterminación}$$

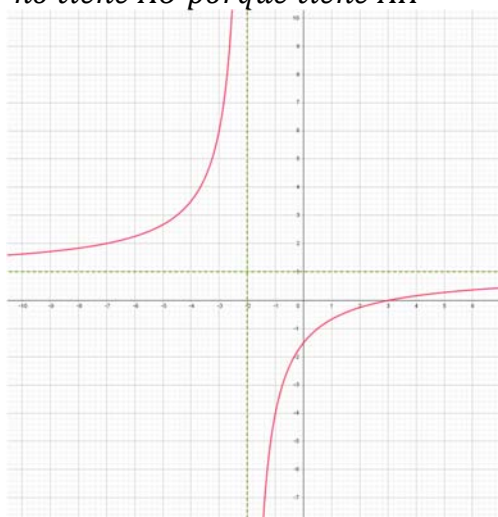
no existe la asíntota $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{20}{-0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{20}{-0^+} = -\infty$$

AH $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad y = 1$

no tiene AO porque tiene AH



d) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 1}$

AV $\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \quad x = 1, x = -1$

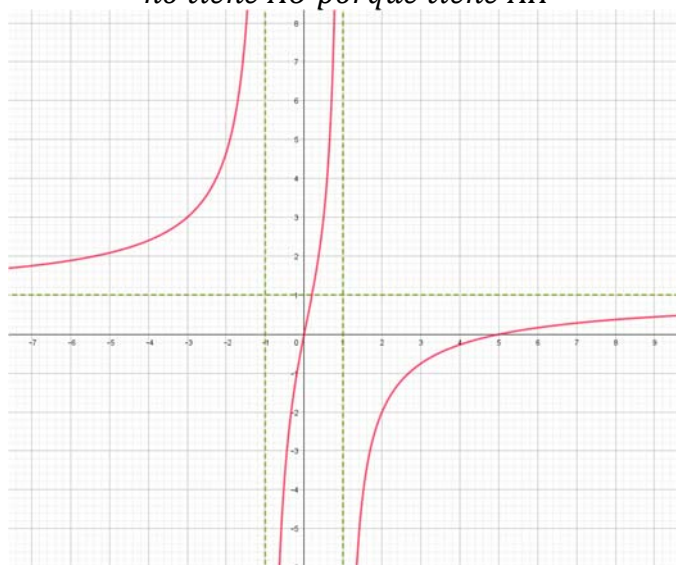
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{6}{-0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{6}{-0^+} = -\infty$$

$$AH \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1, \quad y = 1$$

no tiene AO porque tiene AH



e) $f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2}$

asíntotas verticales

Igualamos el denominador a 0 $\rightarrow (x - 1)^2 = 0$; $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

A.V. $\rightarrow x = 1$

asíntotas horizontales

Hacemos el límite con $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{x} = 0$$

A.H $\rightarrow y = 0$

Asíntota oblicua no tiene ya que sí tiene horizontal.

f) $f(x) = \frac{-5x^2 - 5}{(x-1)^2}$

asíntotas verticales

Igualamos el denominador a 0 $\rightarrow (x - 1)^2 = 0$; $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{-}{0^+} = -\infty$$

A.V. $\rightarrow x = 1$

asíntotas horizontales

Hacemos el límite con $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = -5$$

A.H $\rightarrow y = -5$

Asíntota oblicua no tiene ya que sí tiene horizontal.

g) $f(x) = \ln \frac{-5x}{(x-1)^2}$

asíntotas verticales

Igualamos la ecuación, quitando el logaritmo neperiano, a 0.

$$\frac{-5x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow -5x = 0 \rightarrow x = 0$$

Averiguamos el dominio:

Raíces y polos de $\frac{-5x}{(x-1)^2}$: $x = 1$; $-5x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{-5} = 0 \rightarrow x = 0$

$x = -1$	Es positivo
$x = 1$	Es negativo
$x = 2$	Es negativo

Por lo tanto, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Solo hacemos el límite en 0^- porque $f(x)$ no está definida por la derecha de 0 (0^+).

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(t); \text{ si } x = 0^- \text{ y } t = \frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-5x}{x^2-2x+1} = \frac{+}{+} = 0^+$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Usando la propiedad: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

A.V. $\rightarrow x = 0$

asíntotas horizontales

Hacemos el límite con $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{-5x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{-\infty} = \frac{5}{\infty} = 0$$

A.H $\rightarrow y = 0$ cuando x tiende a $-\infty$

Asíntota oblicua no tiene ya que tiene horizontal.

h) $f(x) = \sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}}$

asíntotas verticales

Calculamos el dominio de $f(x)$.

Raíces y polos de $\frac{-5x}{(x-1)^2}$: $x = 1$; $-5x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{-5} = 0 \rightarrow x = 0$

$x = -1$	Es positivo
$x = 0,5$	Es negativo
$x = 2$	Es negativo

Por lo tanto, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

No tiene A.V. porque solo está definida para $x \leq 0$.

asíntotas horizontales

Hacemos el límite con $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{-5x}{x^2}} = \sqrt{0} = 0$$

A.H $\rightarrow y = 0$

Asíntota oblicua no tiene ya que tiene horizontal.

4.- Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad:

$$a) f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x < -2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \log_2 x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Cuando $x=-2$

$$1.- f(-2) = 4 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

$$2.- \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -2^-} (3^x) = (3^{-2}) = \frac{1}{9} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \lim_{x \rightarrow -2^+} (4 - x^2) = (4 - (-2)^2) = 0 \end{cases}$$

3.- Como no existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, $f(x)$ no es continua en $x=-2$. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

Cuando $x=1$

$$1.- f(1) = 4 - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

$$2.- \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} (3^x) = (3^1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - x^2) = (4 - (1)^2) = 3 \end{cases}$$

3.- Como no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(x)$ no es continua en $x=1$. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

$$b) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Cuando $x=0$

$$1.- g(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$2.- \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3x) = ((0)^2 - 3 \cdot 0) = 0 \end{cases}$$

3.- Como no existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, $g(x)$ no es continua en $x=0$. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito

Cuando $x=3$

$$1.- g(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$$

$$2.- \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3x) = ((3)^2 - 3 \cdot 3) = 0 \end{cases}$$

3.- Como no existe $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$, $g(x)$ no es continua en $x=3$. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

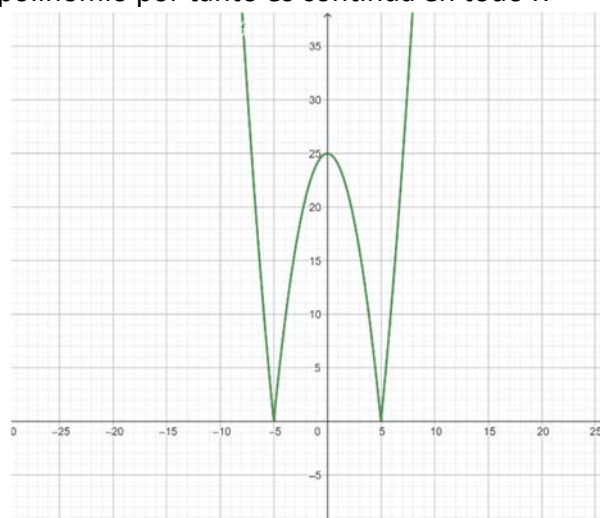
c) $|x^2 - 5x|$

Es continua porque es el valor absoluto de una función polinómica

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad

a) $f(x) = |x^2 - 25|$

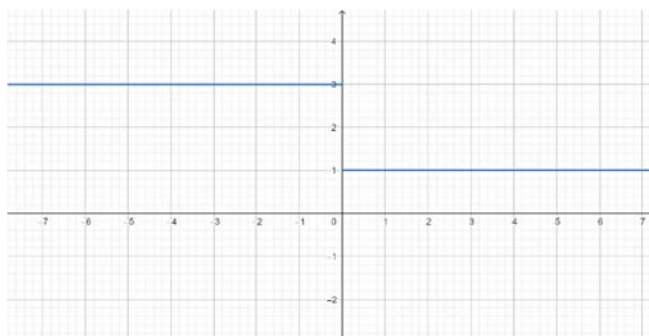
Es el valor absoluto de un polinomio por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$



b) $g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - \left(-\frac{x}{x}\right) = 2 + 1 = 3 & x < 0 \\ 2 - \left(\frac{x}{x}\right) = 2 - 1 = 1 & x > 0 \end{cases}$$

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto finito



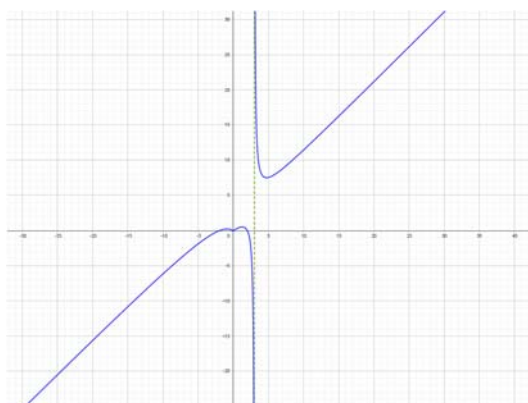
$$\text{c) } h(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{x-3}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2(-x)}{x-3} = \frac{x^2 + 2x}{x-3} & x < 0 \\ \frac{x^2 - 2(x)}{x-3} = \frac{x^2 - 2x}{x-3} & x \geq 0 \end{cases}$$

En $x = 0$ la función es continua.

Estudiamos la continuidad en $x = 3$

$f(3)$ no existe y los límites laterales son $\pm\infty$ por tanto hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.



6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $\frac{3x+5}{x^2-4x+3}$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 ; x = 1 \text{ y } x = 3$$

Es continua en todos los números reales salvo en $x = 1$ y $x = 3$

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en cada valor.

b) $\frac{7x+2}{x^2+x}$

$$x^2 + x = 0 ; x = 0 ; x = -1$$

Es continua en todos los números reales salvo en $x = 0$ y $x = -1$

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en cada valor.

c) $\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 ; x = 3 ; x = -1$$

Es continua en todos los números reales salvo en $x = 3$ y $x = -1$

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en los dos valores.

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow x = -2$

Se sustituyen los valores que nos ha dado como resultado la ecuación de segundo grado en la raíz y con ambos valores obtenemos 0.

Cogemos los siguientes valores: por ejemplo $-3 / 0 / 4$

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{6}$ por lo que es positivo y existe.
- Si sustituimos con 0 nos da $\sqrt{-6}$ por lo que no existe la raíz.
- Si sustituimos por 4 nos da $\sqrt{6}$ por lo que es positivo y existe.

Al haber calculado el dominio se calcula también la continuidad, por lo que:

Dom: $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$

Continuidad: $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$ en el resto no existe la función no existe

b) $g(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}} \rightarrow \frac{2-x}{x^2-4} > 0 \rightarrow 2-x=0 \rightarrow x=2$
 $\rightarrow x^2-4=0 \rightarrow (x+2) \cdot (x-2)=0 \rightarrow x=-2$
 $\rightarrow x=2$

Vamos a sustituir con los siguientes valores: $-3 / 0 / 3$

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{1}$ por lo que es positivo y el dominio existe.
- Si sustituimos con 0 nos da $\sqrt{\frac{2}{-4}}$ por lo que no existe la raíz y el dominio tampoco.
- Si sustituimos con 3 nos da $\sqrt{\frac{-1}{5}}$ por lo que no existe la raíz y el dominio tampoco.

Al no existir las dos últimas raíces:

Dom: $(-\infty, -2)$

Continuidad: $(-\infty, -2)$

c) $h(x) = \sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}} \rightarrow \frac{3-x}{x^2-3x} > 0 \rightarrow 3-x=0 \rightarrow x=3$
 $\rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow x=3$
 $\rightarrow x=0$

Vamos a sustituir con los siguientes valores: $-3 / 1 / 4$

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{\frac{6}{18}}$ por lo que es positivo y existe.
- Si sustituimos con 1 nos da $\sqrt{\frac{2}{-2}}$ por lo que no existe la raíz.
- Si sustituimos con 4 nos da $\sqrt{\frac{-1}{4}}$ por lo que no existe la raíz.

Al no existir las dos últimas raíces:

Dom: $(-\infty, -3)$

Continuidad: $(-\infty, -3)$

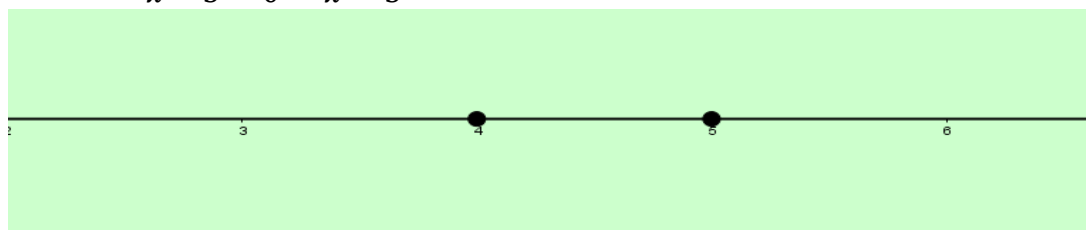
8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)$

Como es logaritmo neperiano:

$$\frac{4-x}{x-5} > 0 \quad 4-x=0 \rightarrow -x=-4 \rightarrow x=4$$

$$x-5=0 \rightarrow x=5$$



Sustituimos valores de los intervalos:

$$x=3 \rightarrow \frac{4-3}{3-5} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$x=4,5 \rightarrow \frac{4-4,5}{4,5-5} = \frac{-0,5}{-0,5} = 1$$

$$x=6 \rightarrow \frac{4-6}{6-5} = \frac{-2}{1} = -2$$

Es continua en los puntos que son mayores que cero, por lo que:

Continua en (4,5) en el resto no existe la función

b) $g(x) = \ln(-x^2 - x + 2)$

Al ser logaritmo neperiano

$$-x^2 - x +$$

$$2 > 0 \rightarrow$$

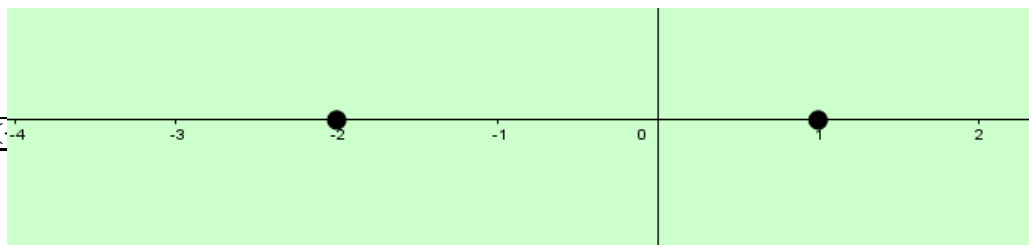
$$-x^2 - x +$$

$$2 = 0 \rightarrow x =$$

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{-2}$$

$$\frac{1 \pm 3}{-2} \rightarrow x =$$

$$-2, x=1$$



Sustituimos valores de los intervalos:

$$x=-3 \rightarrow -(-3)^2 - (-3) + 2 = 0 \rightarrow -9 + 3 + 2 = -4$$

$$x=0 \rightarrow 0 - 0 + 2 = 2$$

$$x=2 \rightarrow -(2)^2 - 2 + 2 = -4$$

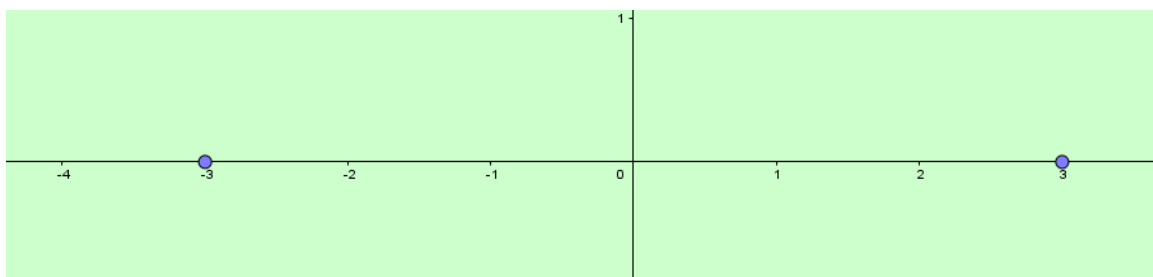
Continua en (-2,1) en el resto la función no existe

c) $\ln\left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$

Como a) y b).

$$\frac{9-x^2}{(x-3)^2} > 0 \quad 9-x^2=0 \rightarrow -x^2=-9 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=3; x=-3$$

$$(x-3)^2=0 \rightarrow x=3$$



Sustituimos valores de los intervalos:

$$x = -4 \rightarrow \frac{9-16}{(-4-3)^2} = -\frac{1}{7}$$

$$x = 0 \rightarrow \frac{9}{(0-3)^2} = 1$$

$$x = 4 \rightarrow \frac{9-16}{(4-3)^2} = -7$$

Continua en $(-3,3)$, en el resto no existe la función

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad

a) $f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$

Dom $f(x)$: $7+x \neq 0$; $7+x=0 \rightarrow x = -7$

Dom $f(x) \rightarrow \mathbb{R} - \{-7\}$

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = e^{\frac{-7^2-9}{7-7}} = e^{\infty} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = e^{\frac{-7^2-9}{7-7}} = e^{-\infty} = 0$$

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito

b) $g(x) = e^{\sqrt{x-5}}$

Dom $g(x)$, $x-5 \geq 0$; $x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

Dom $g(x) \rightarrow \{x \in \mathbb{R}; x \geq 5\}$

Es continua ahí ya que es el dominio de definición de la función

c) $h(x) = 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

Dom $h(x)$, $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

Dom $h(x)$, $x^2-1 \neq 0 \rightarrow x \neq +1 \text{ y } -1$

Dom $h(x) \rightarrow \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$, aquí es continua.

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x < 0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$

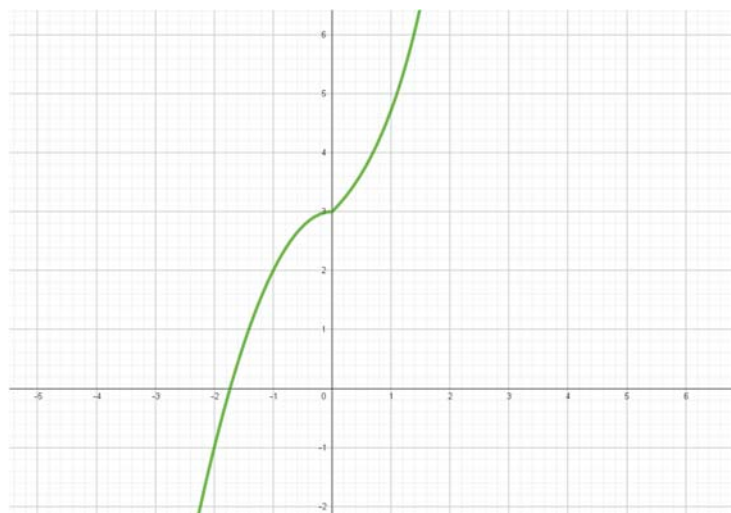
a) Estudia su continuidad

b) Representa su gráfica

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} (3 - x^2) = 3 - 0^2 = 3$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + e^x) = 2 + 1 = 3$

La función es continua

b)



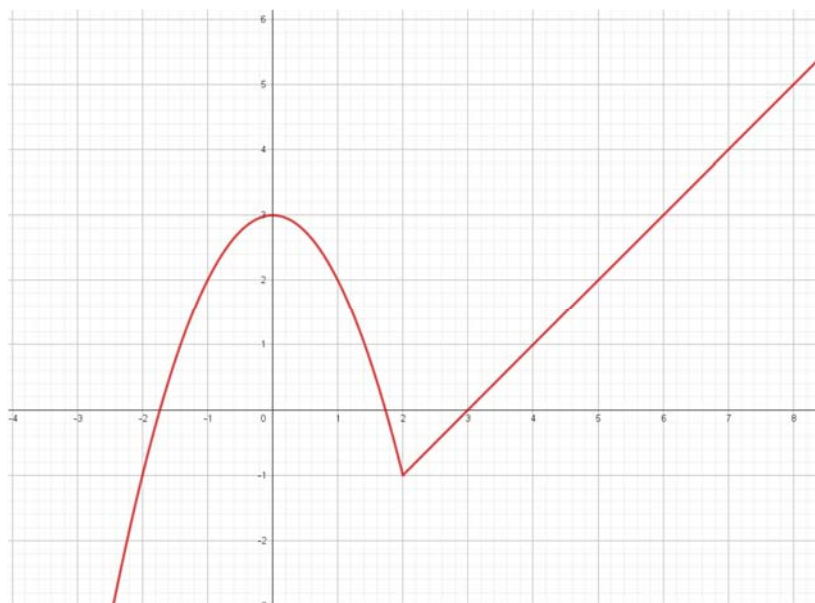
11. Dada la función $f(x) \begin{cases} 3 - x^2 & x < 2 \\ k + x & x \geq 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de k para que sea continua en toda la recta real.

b) Representa su gráfica

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (3 - x^2) = 3 - 2^2 = -1$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} (k + x) = k + 2$; $k + 2 = -1$; $k = -3$

b)



12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < -1 \\ x^2-5 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad

b) Representa su gráfica

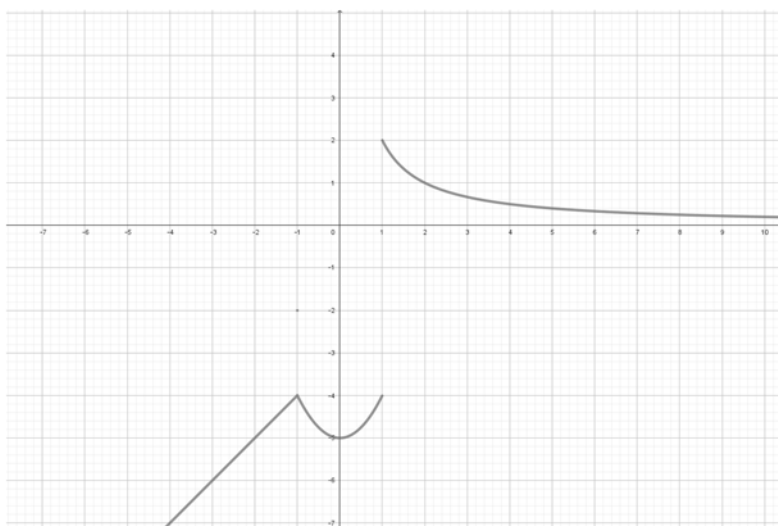
a) Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x}\right) = 2/1 = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 5) = 1 - 5 = -4 \text{ . No es continua}$$

Continuidad en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x-3) = -1-3 = -4 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 5) = 1-5 = -4 \text{ . Es continua}$$

b)



13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x < 2 \\ x^2-4 & x \geq 2 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad

PASO 1. Estudio de la continuidad de la función en el punto $x=2$

$$f(x) = x^2 - 4 \quad x \geq 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$$

PASO 2. Calculo los límites:

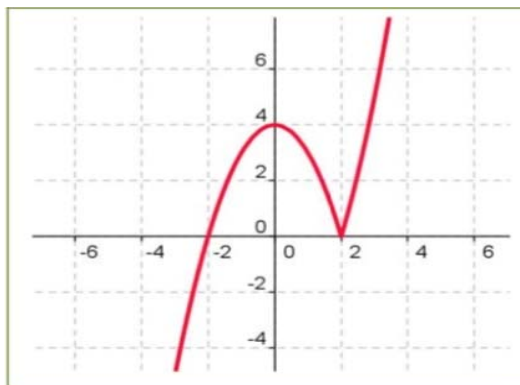
-Límite por la izquierda $f(x) = 4 - x^2 \quad x < 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x^2) = 4 - 2^2 = 0$

-Límite por la derecha $f(x) = x^2 - 4 \quad x \geq 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 2^2 - 4 = 0$

PASO 3. Entonces $f(2) = 0 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en $x=2$

b) Representa la gráfica



14. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Asíntotas verticales:

$$x^2 - 25 = 0 \quad \begin{array}{l} x + 5 = 0 \quad x = -5 \\ x - 5 = 0 \quad x = 5 \end{array}$$

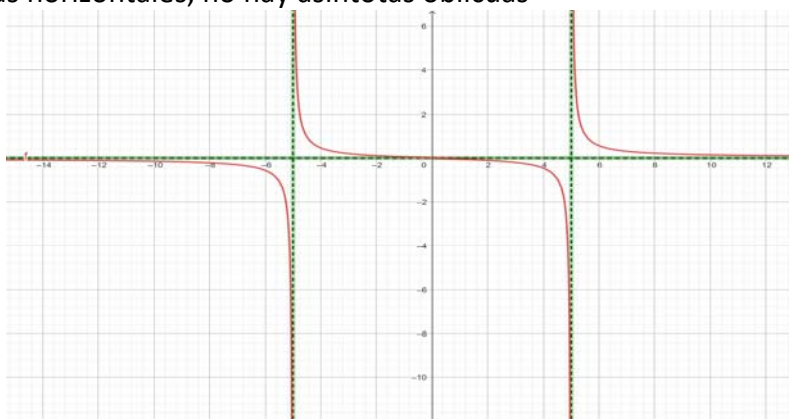
Posición:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = \frac{5}{0^- +} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = \frac{5}{0^+ +} = \infty$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = 0 \quad y = 0$$

Como hay asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas



Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, $x=5$ y $x = -5$ discontinuidad inevitable de primera especie de salto infinito.

15. Esboza la gráfica de la función $\frac{x^2}{x^2 - 25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Asíntotas verticales

$$x^2 - 25 = 0 \quad \begin{array}{l} x - 5 = 0 \quad x = 5 \\ x + 5 = 0 \quad x = -5 \end{array}$$

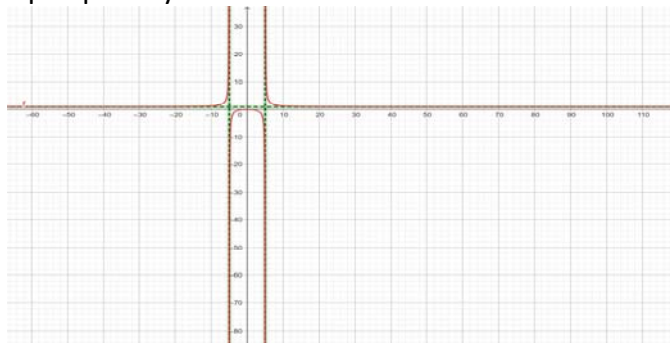
$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{25}{0^- +} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{25}{0^+ +} = \infty$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-25} = 1$$

$$y = 1$$

No hay asíntotas oblicuas porque hay asíntotas horizontales



Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, $x=5$ y $x=-5$, hay una discontinuidad inevitable de primera especie de salto infinito.

AUTOEVALUACIÓN

1. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right)$ vale:

- a) $-\infty$ b) 0 c) 1 d) $2/3$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{1^2-1} - \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1-x-1}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{x^2-1} = \frac{-1}{1^2-1} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

Solución: a) $-\infty$

2. El límite $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 2) \left(\frac{1}{x+2} \right)$ vale:

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) -1

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 2) \left(\frac{1}{x+2} \right) = (-2^2 - (-2) - 2) \left(\frac{1}{-2+2} \right) = (+4) \left(\frac{1}{0} \right) = \frac{4}{0} = \infty$$

Solución: a) ∞

3. El límite $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2} \right)$ vale:

- a) ∞ b) 0 c) $-2/3$ d) -1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2} \right) = \left(\frac{1^2-4(1)+3}{1^2+1-2} \right) = \left(\frac{1-4+3}{1+1-2} \right) = \frac{0}{0} \text{ indeterminación}$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-3)}{(x+2)} \right) = \frac{1-3}{1+2} = \frac{-2}{3}$$

Solución: c) $\frac{-2}{3}$

4. El límite $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ vale:

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $-\infty$ d) -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1} = \frac{0}{0}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2+x})^2 - 1^2}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2+x-1}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(\sqrt{2+x}+1)(\sqrt{2+x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{2-1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Solución: a) $\frac{1}{2}$

5. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}$ vale:

- a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+7x-4}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Solución: a) ∞

6. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}$ vale:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3+7x-4}{x^3+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{x^3} = 5$$

Solución: c) 5

7. El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x^2+1}$ vale:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2+1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{3x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 + 1) = \infty$$

Obtenemos: $1^\infty = \text{Indeterminación}$

Calculamos:
$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2+1) \left(\frac{3x+1}{3x-2} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2+1) \left(\frac{3x+1-3x+2}{3x-2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2+1) \cdot \frac{3}{3x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{1} \cdot \frac{3}{3x-2}} =$$

$$e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2+3}{3x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2}{3x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} 2x} = e^\infty = \infty$$

Solución: a) ∞

8. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x=0$.

1. $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$

2. El segundo paso es calcular los límites por la izquierda y por la derecha utilizando las dos expresiones fijándonos en los símbolos $>$ o $<$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3-3}{x} \right) = \frac{-3}{0^-} = \infty$$

Al darnos ∞ no hace falta calcular el siguiente límite.

Al ser el límite $= \infty$, tiene una discontinuidad inevitable, de primera especie de salto infinito.

Solución: d) de un salto infinito.

9. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x=2$.

1. $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

2. El segundo paso es calcular los límites por la izquierda y por la derecha utilizando las dos expresiones fijándonos en los símbolos $>$ o $<$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 3) = (8 - 3) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 2) = (6 + 2) = 8 \end{cases}$$

Como los límites laterales son distintos, tiene una discontinuidad inevitable de primera especie de salto finito.

Solución: c) con un salto finito.

10. Estudia la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 2 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x=2$.

1. $f(2)$ no existe.

2. El segundo paso es calcular los límites por la izquierda y por la derecha utilizando las dos expresiones fijándonos en los símbolos $>$ o $<$.

Así sabremos si es evitable o inevitable.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3) = (2^3) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + 2) = (6 + 2) = 8 \end{cases}$$

Como los dos límites dan la misma solución y son finitos, al no existir $f(2)$, tenemos una discontinuidad evitable.

Solución: b) tiene una discontinuidad evitable

Matemáticas I
1º Bachillerato
Capítulo 8: Derivadas

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

1º Bachillerato 22-23

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Halla la tasa de variación media en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$ de las funciones siguientes:

a) $y = 3x - 4$ b) $y = -2x - 3$ c) $y = 0.5x + 2$ d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

$$\text{Tasa variación media TVM } [a, b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

	$[-3, 2]$	$[1, 5]$	$[0, 3]$
a)	$\frac{2-(-13)}{2-(-3)} = 3$	$\frac{11-(-1)}{5-1} = 3$	$\frac{5-(-4)}{3-0} = 3$
b)	$\frac{-7-3}{2-(-3)} = -2$	$\frac{-13-(-5)}{5-1} = -2$	$\frac{-9-(-3)}{3-0} = -2$
c)	$\frac{3-0,5}{2-(-3)} = 0,5$	$\frac{4,5-2,5}{5-1} = 0,5$	$\frac{3,5-2}{3-0} = 0,5$
d)	$\frac{1-(-4)}{2-(-3)} = 1$	$\frac{4-0}{5-1} = 1$	$\frac{2-(-1)}{3-0} = 1$

La tasa de variación media de las funciones polinómicas de primer grado es siempre igual a la pendiente de la recta.

2. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 1$ en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$. ¿Es ahora constante?

$$\text{Tasa variación media} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Primero calculo los valores en la función de cada uno de los dos extremos del intervalo

Intervalo $[-3, 2]$	Intervalo $[1, 5]$	Intervalo $[0, 3]$
$y = (-3)^2 - 1 = 8$	$y = 1^2 - 1 = 0$	$y = 0^2 - 1 = -1$
$y = 2^2 - 1 = 3$	$y = 5^2 - 1 = 24$	$y = 3^2 - 1 = 8$

Después aplico la fórmula de la tasa de variación media

$$\frac{3-8}{2-(-3)} = \frac{-5}{5} = -1 \quad \frac{24-0}{5-1} = \frac{24}{4} = 6 \quad \frac{8-(-1)}{3-0} = \frac{9}{3} = 3$$

Ahora no es constante

3. Halla la tasa de variación media de la función $y = x^3 + 1$ en los intervalos $[-3, 2]$, $[1, 5]$ y $[0, 3]$.

La tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ se calcula mediante la fórmula:

$$\text{TVM} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Para la función dada $y = x^3 + 1$, calculemos la tasa de variación media en los intervalos mencionados:

1. Intervalo $[-3, 2]$:

$$\text{TVM}_1 = \frac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)} = \frac{(2^3+1)-((-3)^3+1)}{5} = \frac{9+1-(-26+1)}{5} = \frac{10+27}{5} = \frac{37}{5}$$

2. Intervalo [1,5]:

$$\text{TVM}_2 = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{(5^3+1)-(1^3+1)}{4} = \frac{126-2}{4} = \frac{124}{4} = 31$$

3. Intervalo [0,3]:

$$\text{TVM}_3 = \frac{(3^3+1)-(0^3+1)}{3} = \frac{28-1}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

1. Intervalo [-3,2]: $\text{TVM}_1 = \frac{37}{5}$

2. Intervalo [1,5]: $\text{TVM}_2 = 31$

3. Intervalo [0,3]: $\text{TVM}_3 = 9$

4. Al hacer un estudio sobre el aterrizaje de aviones se graba una película desde el momento en que el avión toca tierra hasta que se para, y se miden los tiempos y las distancias recorridas:

Tiempo (segundos)	0	2	4	6	8	10	12	14
Distancia (metro)	0	100	175	230	270	300	325	340

a) Calcula la velocidad media del avión.

-Calculas la velocidad media con la fórmula de tasa de variación media.

$$\frac{340 - 0}{14 - 0} = 24,29 \text{ m/s}$$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos: [0, 6], [2, 10] y [6, 14].

-Calculas la velocidad media de los intervalos dados con la fórmula de tasa de variación media.

$$\frac{230 - 0}{6 - 0} = 38,3 \text{ m/s}$$

$$\frac{300 - 100}{10 - 2} = 25 \text{ m/s}$$

$$\frac{340 - 230}{14 - 6} = 13,75 \text{ m/s}$$

c) ¿Es constante?

-No es constante, ya que como podemos ver la velocidad varía a lo largo de su recorrido, va disminuyendo.

5. Se estudia la posición de un coche respecto de la salida de un túnel y se obtienen los datos siguientes:

Tiempo (segundos)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia (metros)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Calcula la velocidad media del coche en el intervalo [0, 40].

Para calcular la velocidad media se usa la “Tasa de variación media”

$$\text{TVM}(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula nos queda

$$\text{TVM}(0, 40) = \frac{720 - 0}{40 - 0} = 18 \text{ m/s}$$

b) Calcula la velocidad media en los intervalos [15, 25] y [20, 30]. ¿Es constante?

Para calcular la velocidad media en estos dos intervalos, volvemos a usar la “Tasa de variación media”.

$$\text{TVM}(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sustituyes los valores del primer intervalo [15, 25]

$$\text{TVM}(15, 25) = \frac{430 - 290}{25 - 15} = 14 \text{ m/s}$$

Sustituyes los valores del segundo intervalo [20, 30]

$$\text{TVM}(20, 30) = \frac{510 - 370}{30 - 20} = 14 \text{ m/s}$$

Cómo la velocidad no varía se puede decir que son constantes.

c) Si la velocidad máxima permitida es de 120 km/h, ¿consideras que ha podido sobrepasarla en algún momento? ¿Y si la velocidad máxima fuese de 80 km/h?

120 Km/h = 33 m/s. Parece difícil que la haya sobrepasado. 80 K/h = 22.2 m/s. No es posible asegurar que no haya ido más deprisa pues en el primer intervalo su velocidad media es de 20 m/s.

6. El tren AVE sale de la estación y aumenta su velocidad hasta llegar a 250 km/h en 10 minutos, mantiene entonces esa velocidad constante durante hora y media, y comienza a disminuirla hasta pararse en otros 10 minutos.

a) Representa en una gráfica la función tiempo - velocidad.



b) Ya sabes que la aceleración nos indica la variación de velocidad. Indica la aceleración media en los primeros 10 minutos.

$$a_m[0, 10] = \frac{250 - 0}{10 - 0} = 25 \text{ km/h}^2$$

c) Indica la aceleración media entre el minuto 10 y el minuto 90.

$$a_m[10, 90] = \frac{250 - 250}{90 - 10} = 0, \text{ velocidad constante.}$$

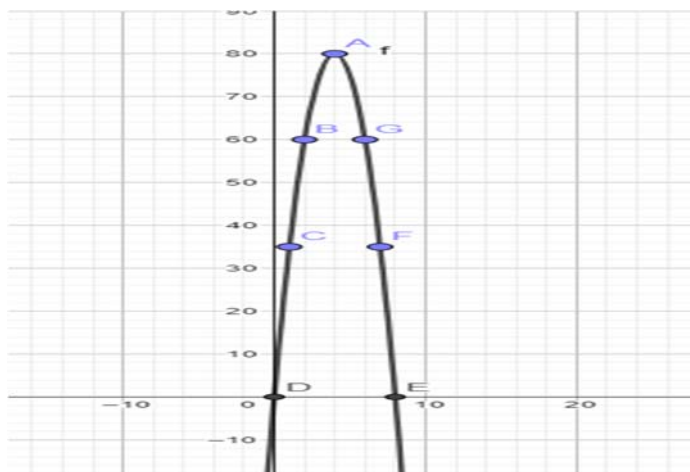
d) Determina la aceleración en los últimos 10 minutos.

$$a_m [100, 110] = \frac{0-250}{110-100} = -25 \text{ km/h}^2.$$

7. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y , que alcanza a los x segundos viene dada por la función: $y = 40x - 5x^2$.

a) Escribe una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función. ¿Tiene sentido para valores de x menores que 0? ¿Y mayores a 8?

x	y
0	0
1	35
2	60
4	80
6	60
7	35
8	0



No tendría sentido para valores menores que 0, porque el tiempo no puede tomar valores negativos.

Tampoco tiene sentido para valores mayores que 8 pues en ese instante llega al suelo.

b) Calcula la velocidad media del objeto en los intervalos siguiente: $[0, 2]$, $[0, 8]$, $[1, 4]$, $[4, 8]$ y $[1, 8]$.

$$Vm = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{60}{2} = 30 \frac{m}{s} \rightarrow [0,2]$$

$$Vm = \frac{f(8)-f(0)}{8-0} = \frac{0}{8} = 0 \frac{m}{s} \rightarrow [0,8]$$

$$Vm = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{45}{3} = 15 \frac{m}{s} \rightarrow [1,4]$$

$$Vm = \frac{f(8)-f(4)}{8-4} = \frac{-80}{4} = -20 \frac{m}{s} \rightarrow [4,8]$$

$$Vm = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{-35}{7} = -5 \frac{m}{s} \rightarrow [1,8]$$

c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

La altura máxima alcanzada es de 80 metros y se alcanza a los 4 segundos.

8. Halla la derivada de las funciones siguientes en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$:

a) $y = 3x - 4$; b) $y = -2x - 3$; c) $y = 0.5x + 2$; d) $y = x - 1$

A la vista de lo que has obtenido, ¿crees que la derivada de las funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa?

· Para resolver este ejercicio, es necesaria la aplicación de la definición de derivada:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a) $y = 3x - 4$

Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x - 1} = \frac{3 \cdot 1 - 3}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

Para $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 4 - 5}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 9}{x - 3} = \frac{3 \cdot 3 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x - 3)}{x - 3} = 3$$

Para $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 4 - 11}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x - 5} = \frac{15 - 15}{5 - 5} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x - 5)}{x - 5} = 3$$

b) $y = -2x - 3$

Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x - 3 + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 2}{x - 1} = \frac{-2 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{x - 1} = -2$$

Para $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x - 3 + 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x + 6}{x - 3} = \frac{6 - 6}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2(x - 3)}{x - 3} = -2$$

Para $x = 5$:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-2x - 3 + 13}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-2x + 10}{x - 5} = \frac{-2 \cdot 5 + 10}{5 - 5} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-2x + 10}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-2(x - 5)}{x - 5} = -2$$

c) $y = 0,5x + 2$

Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0,5x + 2 - 2,5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0,5x - 0,5}{x - 1} = \frac{0,5 \cdot 1 - 0,5}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{0,5x - 0,5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{0,5(x - 1)}{x - 1} = 0,5$$

-Para $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,5x + 2 - 3,5}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,5x - 1,5}{x - 3} = \frac{1,5 - 1,5}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,5x - 1,5}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{0,5(x - 3)}{x - 3} = 0,5$$

-Para $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{0,5x+2-4,5}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{0,5x-2,5}{x-5} = \frac{0,5 \cdot 5 - 2,5}{5-5} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{0,5x-2,5}{x-5} = \frac{0,5(x-5)}{x-5} = 0,5$$

d) $y = x - 1$

Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Para $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = \frac{3-3}{3-3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

Para $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x-5} = \frac{5-5}{5-5} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x-5} = 1$$

La derivada en funciones polinómicas de primer grado es siempre constante e igual a la pendiente de la recta que la representa, según lo que hemos podido observar en este ejercicio.

9. Halla la derivada de la función $y = x^2 - 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$. ¿Es ahora constante?

Para $x = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Para $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-1-8}{x-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

Para $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-1-24}{x-5} = \frac{25-25}{5-5} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10$$

La derivada no es constante

10. Halla la derivada de la función $y = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$, $x = 3$ y $x = 5$.

Habrás comprobado que en los dos últimos ejercicios la derivada no es constante

Para $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1-2}{x-1} = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Para $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 1 - 28}{x - 3} = \frac{27 - 27}{3 - 3} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 3^2 + 3 \cdot 3 + 9 = 27$$

Para $x = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 + 1 - 76}{x - 5} = \frac{75 - 75}{5 - 5} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 75}{x - 5} = \frac{(x-5)(x^2 + 5x + 25)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + 5x + 25) = 75$$

11. Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba la altura (en metros) y, que alcanza a los x segundos es: $y = 40x - 5x^2$.

Calcula la velocidad a los $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ y $x = 6$ segundos. Determina también la altura de la piedra a esos segundos.

¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el objeto?

1º Para obtener la velocidad que alcanza, realizamos la derivada de $y = 40x - 5x^2$

Si $y = 40x - 5x^2$ entonces $y' = 1 \cdot 40 \cdot x^{1-1} - 2 \cdot 5 \cdot x^{2-1}$

La derivada es $y' = 40 - 10x$

2º Cuando la piedra alcanza la **altura máxima**, la velocidad es igual a 0 m/s, por lo que para obtener la altura máxima debemos igualar la derivada a cero:

$$y' = 40 - 10x = 0 ; \quad x = 4$$

$$y = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 80 \text{ la altura máxima es de 80 metros}$$

-Para $x = 0$

$$y' = 40 - 10x \quad y' = 40 - 10 \cdot 0 = 40 \text{ m/s} \quad \text{La velocidad en } x=0 \text{ es de 40 m/s}$$

$$y = 40 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 = 0 \text{ m} \quad \text{La altura es de 0m cuando } x=0$$

-Para $x = 2$

$$y' = 40 - 10x \quad y' = 40 - 10 \cdot 2 = 20 \text{ m/s} \quad \text{La velocidad en } x=2 \text{ es de 20 m/s}$$

$$y = 40 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 60 \text{ m} \quad \text{La altura es de 60m cuando } x=2$$

-Para $x = 4$

$$y' = 40 - 10x \quad y' = 40 - 10 \cdot 4 = 0 \text{ m/s} \quad \text{La velocidad cuando } x=4 \text{ es de 0 m/s}$$

$$y = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 80 \text{ m} \quad \text{En } x=4 \text{ la altura será de 80 m}$$

-Para $x = 6$

$$y' = 40 - 10x \quad y' = 40 - 10 \cdot 6 = -20 \text{ m/s} \quad \text{La velocidad en } x=6 \text{ será de -20 m/s}$$

$$y = 40 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = 60 \text{ m} \quad \text{La altura en } x=6 \text{ será de 60 m}$$

12. En el viaje de la actividad de introducción el coche recorría entre la primera hora y la segunda una distancia y dada por la ecuación:

$$y = 0.2x^2 + 110x - 67.2. \text{ Determina la velocidad que llevaba el coche para } x = 1.5.$$

Primero, realizamos la derivada de la ecuación proporcionada:

$$f'(x) = 2 \cdot (0,2)x + 110$$

$$f'(x) = 0,4x + 110 \quad ; \quad f'(1,5) = 0,4 \cdot 1,5 + 110 = 110,6$$

La velocidad que llevaba el coche era 110,6 m/s

13. En dicho viaje la distancia recorrida para $2, 5 \leq x \leq 3$ viene dada por la ecuación $y = 110x - 121,4$. Y para $3 \leq x \leq 5$ por $y = 0,1x^2 + 118x - 146,3$. Para $x=3$ hay un cambio en la velocidad. Calcula la velocidad antes de $x=3$, y la velocidad después de $x=3$.

Tenemos ambas ecuaciones, a las que calculamos las derivadas:

$$y = 110x - 121,4 \rightarrow y' = 110$$

$$y = 0,1x^2 + 118x - 146,3 \rightarrow y' = 0,2x + 118$$

En $x = 3 \rightarrow y' = 110 \rightarrow$ velocidad antes de $x = 3$; 110m/s

En $x = 3 \rightarrow y' = 0,2x + 118 = 0,2(3) + 118 = 0,6 + 118 = 118,6 \rightarrow$ velocidad después de $x = 3 = 118,6\text{m/s}$

14. Al caer un cuerpo en el vacío la distancia d (en metros), recorrida a los t segundos viene dada aproximadamente por la expresión: $d = 5t^2$. (La expresión es $d = 1/2gt^2$, donde g es la aceleración de la gravedad terrestre, aproximadamente de 9,8):

a) ¿A qué velocidad llegará al suelo una persona que en un incendio se lance a la lona de los bomberos y tarde 4 segundos en llegar a ella?

b) ¿A qué velocidad llegará si se lanza de una altura de 10 metros?

Hacemos antes la derivada, que es la velocidad(distancia/tiempo):

$$d = 5t^2 \rightarrow v = 10t$$

a) Tenemos el tiempo ($t=4\text{s}$):

$$v = 10t \rightarrow v = 10(4) = 40\text{m/s}$$

b) Calculamos el tiempo, tenemos la altura(10m):

$$d = 5t^2 \rightarrow 10 = 5t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

Ahora sustituimos en la derivada:

$$v = 10t \rightarrow v = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,142 \dots \sim 14\text{m/s}$$

15. Un vehículo espacial despegue de un planeta con una trayectoria dada por: $y = 50x - 0,2x^2$ (x e y en km). La dirección del vehículo nos la proporciona la recta tangente en cada punto. Determina la dirección del vehículo cuando está a 2km de distancia sobre el horizonte.

La fórmula de la recta tangente: $f(a) + f'(a)(x - a)$

$$f(x) = 50x - 0,2x^2 \quad \begin{cases} f(2) = 50(2) - 0,2(2)^2 = 100 - 0,8 = 99,2 \\ f'(x) = 50 - 0,4x \\ f'(2) = 50 - 0,4(2) = 50 - 0,8 = 49,8 \end{cases}$$

en $x = 2$

Ecuación recta tg:

$$99,2 + 49,8(x - 2) \rightarrow y = 99,2 + 49,8x - 99,6 \rightarrow y = 49,8x - 0,4$$

Solución: $y = 49,8x - 0,4$

16. Desde un avión nodriza se suelta un avión experimental cuyo impulsor se enciende a la máxima potencia y permanece encendido 20 segundos. La distancia que separa al avión experimental del

avión nodriza viene dada por $d = 0,3t^4$. Calcula la velocidad del avión experimental a los 3,4,7 y 10 segundos de haber sido soltado.

Calculamos la derivada, que es la velocidad(distancia/tiempo):

$$d = 0,3t^4 \rightarrow d' = 1,2t^3 = v$$

Sustituimos en los valores (3,4,7,10):

$$v(3) = 1,2(3)^3 = 1,2(27) = 32,4m/s$$

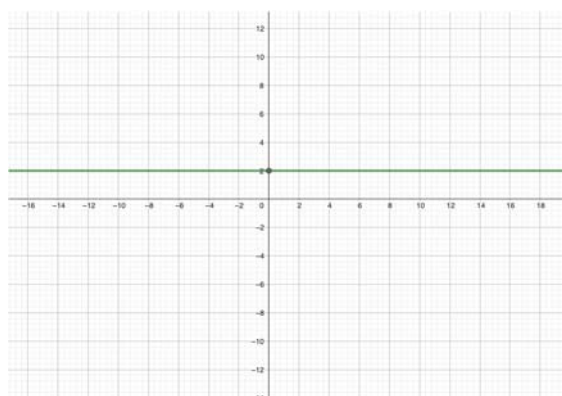
$$v(4) = 1,2(4)^3 = 1,2(64) = 76,8m/s$$

$$v(7) = 1,2(7)^3 = 1,2(343) = 411,6m/s$$

$$v(10) = 1,2(10)^3 = 1,2(1000) = 1200m/s$$

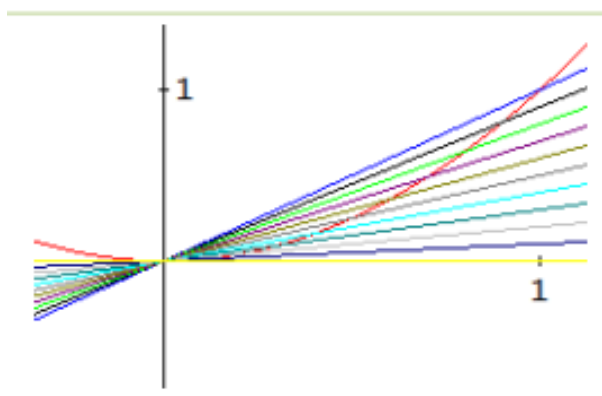
17. Representa gráficamente la función $y = 2$, y determina su derivada para $x = 1, 2, 3 \dots$ ¿Cuánto vale? ¿Es siempre la misma? ¿Ocurrirá lo mismo para cualquier recta horizontal $y = b$?

1Paso: Representamos la gráfica, $y = 2$



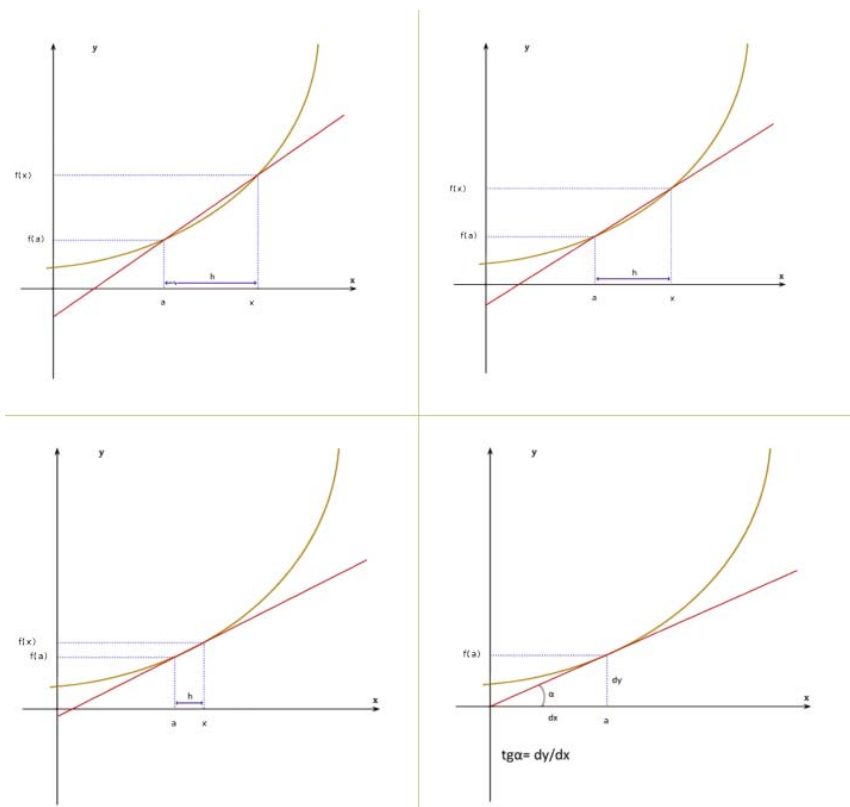
Solución de las preguntas a, b, c: $y = 2$ es una recta horizontal, y su derivada siempre vale 0, igual que le ocurre a $y = b$.

18: Dibuja una función cualquiera y dos puntos sobre ella, $f(x)$ y $f(a)$, correspondientes a las ordenadas de x y a . Interpreta geoméricamente la definición de derivada a partir del dibujo.



Es la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$.

19. Dibuja una función y un punto cualesquiera sobre la función, $f(a)$. Dibuja también un segmento sobre el eje de abscisas con origen de derivada en un punto basándose en dicha figura.



20. Calcula la derivada mediante el límite de la $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = 1$. Calcula la derivada del límite de la función $y = x^2 - x + 1$ en el punto $x = a$ mediante la expresión de $f'(1)$.

1 Paso: Calcular la derivada mediante el límite de la función $y = x^2 - x + 1$

$$2 \text{ Paso} \rightarrow f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - (1+h) + 1 - 1}{h} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h^2+2h) - (1+h) + 1 - 1}{h}$$

$$3 \text{ Paso} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h^2+2h-1-h-1+1}{h} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2+2h}{h} = \frac{0}{0} \text{ Es una indeterminación.}$$

4 Paso: Que hay que resolver la indeterminación que se hace así:

$$\text{Limite} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = 0 + 2 = 2$$

21. Caída libre de una pelota. En la figura se muestran, mediante fotografía estroboscópica, las posiciones de la pelota a intervalos regulares de tiempo: Para $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$, el espacio recorrido es proporcional a 1, 4, 9, 16, 25... Calcula la función de posición $y = f(t)$, y, calcula la velocidad y la aceleración derivando de la función de posición.

t	1	2	3	4	5
e	1	4	9	16	25

$$y = f(t) = t^2; e(t) = t^2$$

- $v(t) = \frac{de}{dt} = 2 \cdot t$

$$v(1) = 2 \cdot 1 = 1 \quad v(2) = 2 \cdot 2 = 4 \quad v(3) = 2 \cdot 3 = 6 \quad v(4) = 2 \cdot 4 = 8 \quad v(5) = 2 \cdot 5 = 10$$

- $a(t) = \frac{dv}{dt} = 2$

La aceleración es constante. $a = \text{cte.}$

22.- Completa la siguiente tabla con derivadas

Función	$f(x)=x^3$	$f(x)=2$	$f(x)=x^2$	$f(x)=x$	$f(x)=k$	$f(x)=2x+3$	$f(x)=2x^2+3x$
Derivadas	$f'(x)=3x^2$	$f'(x)=0$	$f'(x)=2x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=0$	$f'(x)=2$	$f'(x)=4x+3$

23.-Piensa en un ejemplo de función no derivable y que si sea continua

$|x+3| \Rightarrow$ Al ser un valor absoluto, nos encontramos ante una función continua, pero no derivable

24.- Escribe las funciones derivadas de las funciones siguientes

- a) $f(x) = x^{24}$; $f'(x) = 24x^{23}$
 b) $g(x) = 6x^{10}$; $g'(x) = 60x^9$
 c) $h(x) = 6/7 x^{13}$; $h'(x) = 78/7 x^{12}$
 d) $j(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$; $j'(x) = 12x^3 - 10x$
 e) $p(x) = 5x^3 - x$; $p'(x) = 15x^2 - 1$

25.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones polinómicas

- a) $y = 6 + x - 5x^2$; $y' = -10x + 1$
 b) $y = 6x^2 - 7x + 3x^5$; $y' = 12x + 15x^4 - 7$
 c) $y = 2/3x^7 + 8/5x^5 - 9/4x^4$; $y' = 14/3x^6 + 40/5x^4 - 36/4x^3$
 d) $y = x^8 - x$; $y' = 8x^7 - 1$

26.- Un determinado gas ocupa un volumen de 2m^3 a una presión de 5 Newtons por m^2 . Según la ley de Boyle a cada presión ejercida sobre el gas corresponde un volumen dado por $V = 10/P$. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen cuando la presión es de 10 Newtons por m^2 ? ¿y cuándo es de 20 Newtons por m^2 ? ¿Es la mitad?

- a) $y = \frac{10}{p} \Rightarrow y = \frac{10}{x}$; $y' = \frac{-10}{x^2}$; $y'(10) = -\frac{10}{10^2} = -\frac{10}{10 \cdot 10} = -\frac{1}{10}$
 b) $y'(20) = -\frac{10}{20^2} = -\frac{1}{40}$
 c) Claramente no es la mitad

27. Ya hemos obtenido la derivada de $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Utilízala para obtener la derivada en $x = 1, 4, 5 \dots$ ¿Puedes obtener la derivada en $x = 0$? Razona la respuesta.

La derivada de $y = \sqrt{x}$ es $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$\text{En } x = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 1^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{En } x = 4 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{En } x = 5 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = 0.2236$$

En $x = 0 \rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot 0^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot 0^{\frac{1}{2}}} \rightarrow$ No existe, puesto que cuando el 0 se encuentra en el denominador no es un valor real.

28. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = (x^2 + 3) \cdot (6x^6 - 5)$

Se aplica la fórmula de la derivada de la multiplicación: $y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $\rightarrow y' = 2x \cdot (6x^6 - 5) + (x^2 + 3) \cdot 36x^5$

b) $y = (7x^3 - 1) \cdot (5x^4 + 4)$

Se aplica la fórmula de la derivada de la multiplicación: $y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $\rightarrow y' = 21x^2 \cdot (5x^4 + 4) + (7x^3 - 1) \cdot 20x^3$

c) $y = \sqrt{x} \cdot (x^3 - 5x)$

Se aplica la fórmula de la derivada de la multiplicación: $y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
 $\rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^3 - 5x) + \sqrt{x} \cdot (3x^2 - 5)$

29. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x-1}{x+3}$

Se aplica la fórmula de la derivada de la división: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
 $\rightarrow y' = \frac{1 \cdot (x+3) - (x-1) \cdot 1}{(x+3)^2}$

b) $y = x^2 + \frac{5}{3}x^3 - 2x + 7$

Se aplica la fórmula de la derivada de la potencia: $y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$
 $\rightarrow y' = 2x + 5x^2 - 2$

c) $y = \frac{2x^3 - 5x^2}{6x^4 - 2x^3}$

Se aplica la fórmula de la derivada de la división: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
 $\rightarrow y' = \frac{(6x^2 - 10x) \cdot (6x^4 - 2x^3) - (2x^3 - 5x^2) \cdot (24x^3 - 6x^2)}{(6x^4 - 2x^3)^2}$

d) $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x+2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x+2}$

Se aplica la fórmula de la derivada de la división: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$\rightarrow y' = \frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot (x+2) - (\sqrt{x^3}) \cdot 1}{(x+2)^2}$$

30. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[5]{x^7} = x^{\frac{7}{5}}$

Se aplica la fórmula de la derivada de la potencia: $y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

$$\rightarrow y' = \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}}$$

b) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}}{x^3+5}$

Se aplican la fórmula de la derivada de la división: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$; y la fórmula de la derivada de la multiplicación: $y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\rightarrow y' = \frac{\left[\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot (\sqrt{x}) + \left(\sqrt[3]{x^2} \right) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot (x^3+5) - \left(\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} \right) \cdot 3x^2}{(x^3+5)^2}$$

c) $y = \frac{(x^4-2) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^5}}$

Se aplican la fórmula de la derivada de la división: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$; y la fórmula de la derivada de la multiplicación: $y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\rightarrow y' = \frac{\left[4x^3 \cdot \sqrt{x} + (x^4-2) \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \right] \cdot \left(\sqrt[4]{x^5} \right) - \left((x^4-2) \cdot \sqrt{x} \right) \cdot \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}}{\left(\sqrt[4]{x^5} \right)^2}$$

d) $y = \frac{\sqrt[6]{x^{11}}}{x+2} = \frac{x^{\frac{11}{6}}}{x+2}$

Se aplica la fórmula de la derivada de la división: $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$$\rightarrow y' = \frac{\frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}} \cdot (x+2) - \left(\sqrt[6]{x^{11}} \right) \cdot 1}{(x+2)^2}$$

31. Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $y = (x^5 - 7x^3)^{12}$; $y' = 12(x^5 - 7x^3)^{11}(5x^4 - 21x^2)$

b) $y = (3x^3 - 5x^2)^7$; $y' = 7(3x^3 - 5x^2)^6(9x^2 - 10x)$

c) $y = \sqrt{(4x^5 - 8x^3)^5}$; $y = (4x^5 - 8x^3)^{\frac{5}{2}}$; $y' = \frac{5}{2}(4x^5 - 8x^3)^{\frac{3}{2}}(20x^4 - 24x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{(2x^2 + 4x^7)^4}$; $y = (2x^2 + 4x^7)^{\frac{4}{3}}$; $y' = \frac{4}{3}(2x^2 + 4x^7)^{\frac{1}{3}}(4x + 28x^6)$

32. Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $y = \sqrt{\frac{3x^2-5x}{2x^3+7}} (x^4-6x^3)^2$; $y = \left(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7} (x^4-6x^3)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7} (x^4-6x^3)^2 \right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(\frac{(6x-5)(2x^3+7) - (3x^2-5x)(6x^2)}{(2x^3+7)^2} \right) \cdot (x^4-6x^3)^2 +$$

$$+ \left(\frac{3x^2-5x}{2x^3+7} \right) \cdot 2(x^4-6x^3)(4x^3-18x^2)$$

b) $y = \sqrt{\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5}}; \quad y = \left(\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2+3)(x^2-7)}{x^3-5} \right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \left(\frac{2x(x^2-7) + (x^2+3)2x(x^3-5) - ((x^2+3)(x^2-7))3x^2}{(x^3-5)^2} \right)$$

c) $y = \sqrt{\left(\frac{5x^3+3x}{8x^3-2x^2} \right)^3}; \quad y = \left(\frac{5x^3+3x}{8x^3-2x^2} \right)^{\frac{3}{2}}$

$$y' = \frac{3}{2} \left(\frac{5x^3+3x}{8x^3-2x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{(10x+3)(8x^3-2x^2) - (5x^3+3x)(24x^2-4x)}{(x^3-5)^2} \right)$$

d) $y = \sqrt[3]{3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}}}; \quad y = \left(3 + \sqrt{x - \frac{2}{x^3}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(3 + \left(x - \frac{2}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{1}{3} \left(3 + \left(x - \frac{2}{x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{x^3} \right)^{\frac{-1}{2}} (1 - 6x^{-4})$$

33. Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $y = \log(x^5 - 7x^3)^{12}; \quad y' = \frac{12(x^5-7x^3)^{11}(5x^4-21x^2)}{(x^5-7x^3)^{12}} \log e = \frac{12(5x^4-21x^2)}{x^5-7x^3} \log e$

b) $y = \log_2(3x^3 - 5x^2)^7; \quad y' = \frac{7(3x^3-5x^2)^6(9x^2-10x)}{(3x^3-5x^2)^7} \log 2 = \frac{7(9x^2-10x)}{3x^3-5x^2} \log 2$

c) $y = \ln \sqrt{\frac{4x^5-8x^3}{3x-2}}; \quad y = \ln \left(\frac{4x^5-8x^3}{3x-2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (5 \ln(4x^5-8x^3) - \ln(3x-2))$

$$y' = \frac{1}{2} \left(5 \frac{20x^4-24x^2}{4x^5-8x^3} - \frac{3}{3x-2} \right)$$

d) $y = \ln \sqrt[3]{(2x^2+4x^7)^4}; \quad y = \ln(2x^2+4x^7)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \ln(2x^2+4x^7)$

$$y' = \frac{4}{3} \cdot \frac{4x+28x^6}{2x^2+4x^7}$$

34. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^{x^5-7x^3} \rightarrow \ln y = (x^5 - 7x^3) \ln x \rightarrow \frac{y'}{y} = (5x^4 - 21x^2) \ln x + (x^5 - 7x^3) \left(\frac{1}{x} \right) \rightarrow$

$$\rightarrow y' = [(5x^4 - 21x^2) \ln x + (x^4 - 7x^2)] \cdot x^{x^5-7x^3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= (x+1)^{3x^3-5x^2} \rightarrow \ln y = (3x^3-5x^2) \ln(x+1) \rightarrow \\ \frac{y'}{y} &= (9x^2-10x) \ln(x+1) + (3x^3-5x^2) \left(\frac{1}{x+1}\right) \rightarrow \\ y' &= \left[(9x^2-10x) \ln(x+1) + \frac{3x^3-5x^2}{x+1}\right] \cdot (x+1)^{3x^3-5x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y &= e^{(4x^5-8x^3)^5} \rightarrow \ln y = (4x^5-8x^3)^5 \ln e \rightarrow \frac{y'}{y} = (5(4x^5-8x^3)^4 \cdot (20x^4-24x^2)) \ln e \rightarrow \\ y' &= [(5(4x^5-8x^3)^4 \cdot (20x^4-24x^2))] e^{(4x^5-8x^3)^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y &= \sqrt[3]{(x-1)(2x^2+4x^7)^4} \rightarrow \ln y = (x-1)^{\frac{1}{3}} (2x^2+4x^7)^{\frac{4}{3}} \rightarrow \ln y = \left(\frac{1}{3}\right) (2x^2+4x^7)^4 \ln(x-1) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{y'}{y} &= \frac{1}{3} \left[(4(2x^2+4x^7)^3 \cdot (4x+28x^6)) \cdot (\ln(x-1)) + (2x^2+4x^7)^4 \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right) \right] \rightarrow \\ \rightarrow \frac{y'}{y} &= \frac{1}{3} \left[(4(2x^2+4x^7)^3 \cdot (4x+28x^6)) \cdot (\ln(x-1)) + \frac{(2x^2+4x^7)^4}{x-1} \right] \rightarrow \\ \rightarrow y' &= \frac{1}{3} \left[(4(2x^2+4x^7)^3 \cdot (4x+28x^6)) \cdot (\ln(x-1)) + \frac{(2x^2+4x^7)^4}{x-1} \right] \cdot \sqrt[3]{(x-1)(2x^2+4x^7)^4} \end{aligned}$$

35. Utilizando que la derivada de $y = e^{f(x)}$ es $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$, calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = e^{x^5-7x^3} \rightarrow y' = e^{x^5-7x^3} \cdot (5x^4-21x^2)$$

$$\text{b) } y = (e^{3x^3-5x^2})^7 \rightarrow y' = 7(e^{3x^3-5x^2})^6 e^{3x^3-5x^2} (18x^2-10x)$$

$$\text{c) } y = e^{(4x^5-8x^3)^5} \rightarrow y' = e^{(4x^5-8x^3)^5} \cdot 5(4x^5-8x^3)^4 (20x^4-24x^2)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y &= \sqrt[3]{e^{(2x^2+4x^7)^4}} \rightarrow y = \left(e^{(2x^2+4x^7)^4}\right)^{\frac{1}{3}} \\ y' &= \frac{1}{3} \left(e^{(2x^2+4x^7)^4}\right)^{-\frac{2}{3}} e^{(2x^2+4x^7)^4} 4(2x^2+4x^7)^3 (4x+28x^6) \end{aligned}$$

36. Recuerda la definición de cosecante: $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$. Demuestra que: $(\operatorname{cosec}(x))' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

$$(\operatorname{cosec}(x))' = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)' = \frac{0 \cdot \operatorname{sen}(x) - (1 \cdot (\cos x))}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{0 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

37.- Recuerda la definición de secante: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Demuestra que: $(\sec(x))' = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

$$(\sec(x))' = \frac{0 \cdot \cos(x) - (1 \cdot (-\operatorname{sen} x))}{\cos^2 x} = \frac{0 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

38. Recuerda la definición de cotangente: $\cotg(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$. Demuestra que: $(\cotg(x))' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

$$(\cotg(x))' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)' = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

39. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}(x^5 - 7x^3)$

$$y' = \cos(x^5 - 7x^3) \cdot \frac{d}{dx}[x^5 - 7x^3]$$

$$y' = \cos(x^5 - 7x^3) \left(\frac{d}{dx}[x^5] - 7 \cdot \frac{d}{dx}[x^3] \right)$$

$$y' = \cos(x^5 - 7x^3)(5x^4 - 7 \cdot 3x^2)$$

SOLUCIÓN: $y' = (5x^4 - 21x^2) \cos(x^5 - 7x^3)$

b) $y = (\text{sen}(3x^3 - 5x^2))^7$

$$y' = 7(\text{sen}(3x^3 - 5x^2))^6 \frac{d}{dx}(\text{sen}(3x^3 - 5x^2))$$

$$y' = 7(\text{sen}(3x^3 - 5x^2))^6 \cos(3x^3 - 5x^2)(9x^2 - 10x)$$

SOLUCIÓN: $y' = 7\text{sen}^6(3x^3 - 5x^2)\cos(3x^3 - 5x^2)(9x^2 - 10x)$

c) $y = \text{sen}^5(x) \cdot \cos^3(x)$

$$y' = \frac{d}{dx}(\text{sen}^5(x) \cdot \cos^3(x))$$

$$y' = \frac{d}{dx}(\text{sen}^5(x)) \cdot \cos^3(x) + \frac{d}{dx}(\cos^3(x)) \cdot \text{sen}^5(x)$$

$$y' = 5\text{sen}^4(x) \cos(x) \cos^3(x) + (-3\cos^2(x) \sin(x)) \text{sen}^5(x) \text{ (simplificar)}$$

SOLUCIÓN: $y' = 5\text{sen}^4(x)\cos^4(x) - 3\text{sen}^6(x)\cos^2(x)$

d) $y = \sqrt[3]{\text{sen}(2x^2 + 4x^7)^4}$

$$y' = \frac{d}{dx} \sqrt[3]{\text{sen}(2x^2 + 4x^7)^4}$$

$$y' = \frac{1}{3(\text{sen}(2x^2 + 4x^7)^4)^{\frac{2}{3}}} \frac{d}{dx}(\text{sen}(2x^2 + 4x^7)^4)$$

$$y' = \frac{1}{3(\text{sen}(2x^2 + 4x^7)^4)^{\frac{2}{3}}} \cdot 4(2x^2 + 4x^7)^3 \cos(2x^2 + 4x^7)^4 (4x + 28x^6) \text{ (simplificar)}$$

SOLUCIÓN: $y' = \frac{4(2x^2 + 4x^7)^3 \cos(2x^2 + 4x^7)^4 \text{sen}^{\frac{1}{3}}(4x^7 + 2x^2)(28x^6 + 4x)}{3}$

40. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(e^{x^5} + 4x^3)$

$$y' = \frac{d}{dx}(\cos(e^{x^5} + 4x^3))$$

$$y' = -\operatorname{sen}(e^{x^5} + 4x^3) \frac{d}{dx}(e^{x^5} + 4x^3)$$

$$\text{SOLUCIÓN: } y' = -\operatorname{sen}(e^{x^5} + 4x^3)(e^{x^5} \cdot 3x^4 + 12x^2)$$

$$\text{b) } y = [\cotg(5x^3 - 3x^2)]^4$$

$$\text{SOLUCIÓN: } y' = -4[\cotg(5x^3 - 3x^2)]^3 \cdot \operatorname{cosec}^2(5x^3 - 3x^2) \cdot (15x^2 - 6x)$$

$$\text{c) } y = \operatorname{sen}[\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)]$$

$$y' = \frac{d}{dx} \operatorname{sen}[\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)]$$

$$y' = (\cos(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)])$$

$$y' = \cos(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2))(-\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2) \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2])$$

$$y' = -\cos(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2))(\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)2(7x^5 - 3x^3)(1 + \operatorname{tg}^2(7x^5 - 3x^3)^2) \frac{d}{dx}[7x^5 - 3x^3])$$

$$y' = -\cos(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2))(\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)(1 + \operatorname{tg}^2(7x^5 - 3x^3)^2)2(7x^5 - 3x^3)(7 \cdot \frac{d}{dx}[x^5] - 3 \cdot \frac{d}{dx}[x^3]))$$

$$y' = -\cos(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2))(\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)((1 + \operatorname{tg}^2(7x^5 - 3x^3)^2)2(7x^5 - 3x^3)(7 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2)))$$

$$y' = -2(35x^4 - 9x^2)((1 + \operatorname{tg}^2(7x^5 - 3x^3)^2)2(7x^5 - 3x^3)(\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)) \cdot \cos(\cos(\operatorname{tg}(7x^5 - 3x^3)^2)))$$

$$\text{d) } y = \sqrt[3]{\operatorname{ch}[\operatorname{sh}(2x + 1)]^4} = (\operatorname{ch}[\operatorname{sh}(2x + 1)]^4)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{d}{dx}[(\operatorname{ch}[\operatorname{sh}(2x + 1)]^4)^{\frac{1}{3}}]$$

$$y' = \frac{1}{3} \operatorname{ch}^{\frac{1}{3}-1}(\operatorname{sh}(2x + 1))^4 \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{ch}[\operatorname{sh}(2x + 1)]^4]$$

$$y' = \frac{\operatorname{sh}[\operatorname{sh}(2x+1)]^4 \frac{d}{dx}[\operatorname{sh}(2x+1)]^4 \cdot (\operatorname{ch}[\operatorname{sh}(2x+1)]^4)^{\frac{-2}{3}}}{3}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sh}[\operatorname{sh}(2x+1)]^4 [\operatorname{ch}(2x+1)]^4 \frac{d}{dx}[(2x+1)]^4 \cdot (\operatorname{ch}[\operatorname{sh}(2x+1)]^4)^{\frac{-2}{3}}}{3}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sh}[\operatorname{sh}(2x+1)]^4 [\operatorname{ch}(2x+1)]^4 \cdot 4 \cdot [(2x+1)]^3 \cdot 2 \cdot (\operatorname{ch}[\operatorname{sh}(2x+1)]^4)^{\frac{-2}{3}}}{3}$$

SOLUCIÓN: $y' = \frac{\text{sh}[\text{sh}(2x+1)]^4 [\text{ch}(2x+1)]^4 \cdot 8 \cdot [(2x+1)]^3}{3(\text{ch}[\text{sh}(2x+1)]^4)^{\frac{2}{3}}}$

41. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \text{tg} \frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}}$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\text{tg} \frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}} \right)$$

$$y' = \left(1 + \text{tg}^2 \left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}} \right) \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}} \right) = \left(1 + \text{tg}^2 \left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}} \right) \right) \frac{3 \cdot e^{3x} \cdot (1-e^{3x}) - (1+e^{3x}) \cdot (-3e^{3x})}{(1-e^{3x})^2}$$

SOLUCIÓN: $y' = 1 + \text{tg}^2 \left(\frac{1+e^{3x}}{1-e^{3x}} \right) \frac{6e^{3x}}{(1-e^{3x})^2}$

b) $y = (2 - 3x) \cdot \text{sh}(2 - 3x)$

SOLUCIÓN: $y' = 2 \cdot \text{sh}(2 - 3x) + (2 - 3x) \cdot \text{ch}(2 - 3x)(-3)$

c) $y = \text{tg} \frac{\sqrt{4-9\text{sen } x}}{3+2\cos x}$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\text{tg} \frac{\sqrt{4-9\text{sen } x}}{3+2\cos x} \right)$$

$$y' = \sec^2 \left(\frac{\sqrt{4-9\text{sen } x}}{3+2\cos x} \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{4-9\text{sen } x}}{3+2\cos x} \right)$$

SOLUCIÓN: $y' = \sec^2 \left(\frac{\sqrt{4-9\text{sen } x}}{3+2\cos x} \right) \frac{(-9\cos(x)) \frac{1}{2}(4-9\text{sen } x)^{-\frac{1}{2}}(3+2\cos(x)) + 4\text{sen}(x)\sqrt{4-9\text{sen}(x)}}{(3+2\cos(x))^2}$

d) $y = \frac{\text{sen } x - x \cdot \cos x}{\cos x + x \cdot \text{sen } x}$

$$y' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\text{sen } x - x \cdot \cos x}{\cos x + x \cdot \text{sen } x} \right)$$

$$y' = \frac{\left(\frac{d}{dx} [\text{sen}(x) - x \cos(x)] \right) \cdot (\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x)) - (\text{sen}(x) - x \cos(x)) \cdot \frac{d}{dx} [\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x)]}{(\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x))^2}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{d}{dx} [\text{sen}(x)] - \left(\frac{d}{dx} [x \cos(x)] \right) \right) (\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x)) - (\text{sen}(x) - x \cos(x)) \left(\frac{d}{dx} [\cos(x)] + \frac{d}{dx} [x \cdot \text{sen}(x)] \right)}{(\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x))^2}$$

$$y' = \frac{(\cos(x) - \left(\frac{d}{dx} [x] \cdot \cos(x) + x \cdot \frac{d}{dx} [\cos(x)] \right)) (\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x)) - (\text{sen}(x) - x \cos(x)) \left(\frac{d}{dx} [x] \cdot \text{sen}(x) + x \cdot \frac{d}{dx} [\text{sen}(x)] + (-\text{sen}(x)) \right)}{(\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x))^2}$$

$$y' = \frac{(\cos(x) - 1 \cos(x) - (-\text{sen}(x))x) (\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x)) - (\text{sen}(x) - x \cos(x)) (1 \text{sen}(x) + x \cos(x) - \text{sen}(x))}{(\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x))^2}$$

$$y' = \frac{x \text{sen}(x) (\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x)) - x \cos(x) (\text{sen}(x) - x \cos(x))}{(\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x))^2} = \frac{x^2}{(\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x))^2}$$

SOLUCIÓN: $y' = \frac{[x^2(\sen^2 x + \cos^2 x)]}{(x \cdot \sen x + \cos x)^2} = \frac{x^2}{(x \cdot \sen x + \cos x)^2}$

42. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y = \arcsen \sqrt{x+1}$; $y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-1/2}}{\sqrt{1-(\sqrt{x+1})^2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-1/2}}{\sqrt{1-x-1}} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})\sqrt{-x}}$

b) $y = \ln(\arccos x)$; $y' = \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arccos x}$

c) $y = \arctg(e^{2x+3})$, $y' = \frac{e^{2x+3} \cdot (2)}{1+(e^{2x+3})^2}$

d) $y = \arccos(\sen(\cos x))$, $y' = \frac{\cos(\cos x)(-\sen x)}{\sqrt{1-(\sen(\cos x))^2}}$

43. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y = \arcsen \sqrt{\frac{1+\sen x}{1-\sen x}} = \arcsen \left(\frac{1+\sen x}{1-\sen x} \right)^{\frac{1}{2}}$ $y' = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1+\sen x}{1-\sen x} \right)^{-1/2} \cdot \cos x \cdot (1-\sen x) - (1+\sen x)(-\cos x)}{\sqrt{1-\left(\left(\frac{1+\sen x}{1-\sen x} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2}}$

b) $y = e^{\arccos \sqrt{x+3}}$ $y' = e^{\arccos \sqrt{x+3}} \cdot \frac{-\frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}}{\sqrt{1-(\sqrt{x+3})^2}}$

c) $y = \sen \left(\arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$; $y' = \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x)}{\left(\sqrt{1-x^2} \right)^2} \cos \left(\arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$

d) $y = \arccos \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$; $y' = \frac{1 \cdot \sqrt{9-x^2} - x \cdot \frac{1}{2}(9-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x)}{\left(\sqrt{9-x^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right)^2}}$

44. Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $y = \argsh \sqrt{2x+3}$ $y' = \frac{\frac{1}{2}(2x+3)^{-1/2} \cdot 2}{\sqrt{1+(\sqrt{2x+3})^2}}$

b) $y = \ln(\argth(5x))$ $y' = \frac{\frac{5}{1-(5x)^2}}{\argth(5x)}$

c) $y = \argch(e^{4x-1})$ $y' = \frac{e^{4x-1} \cdot 4}{\sqrt{(e^{4x-1})^2 - 1}}$

$$d) y = \operatorname{argsh}(\operatorname{argth}(x)) \quad y' = \frac{\frac{1}{1-x^2}}{\sqrt{1+(\operatorname{argth} x)^2}}$$

45. Calcula las derivadas de las siguientes funciones

$$a) y = \operatorname{argsh} \sqrt{\frac{1+\operatorname{sh} x}{1-\operatorname{sh} x}} = \operatorname{argsh} \left(\frac{1+\operatorname{sh} x}{1-\operatorname{sh} x} \right)^{1/2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1+\operatorname{sh} x}{1-\operatorname{sh} x} \right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot (1-\operatorname{sh} x) - (1+\operatorname{sh} x) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{(1-\operatorname{sh} x)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1+\operatorname{sh} x}{1-\operatorname{sh} x} \right)^2}}$$

$$b) y = \sqrt{e^{\operatorname{argch} \sqrt{x+3}}} = (e^{\operatorname{argch} \sqrt{x+3}})^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2} (e^{\operatorname{argch} \sqrt{x+3}})^{-1/2} \cdot e^{\operatorname{argch} \sqrt{x+3}} \cdot \frac{1}{2} (x+3)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{x+3})^2}}$$

$$c) y = \operatorname{sh}(\operatorname{argth} \frac{3x+7}{\sqrt{9-4x^2}}) \quad y' = \operatorname{ch}(\operatorname{argth} \frac{3x+7}{\sqrt{9-4x^2}}) \cdot \frac{\frac{3\sqrt{9-4x^2} - (3x+7) \frac{1}{2}(9-4x^2)^{-1/2} \cdot 8x}{(\sqrt{9-4x^2})^2}}{1 - \left(\frac{3x+7}{\sqrt{9-4x^2}} \right)^2}$$

$$d) y = \operatorname{argch} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x^2}} \quad y' = \frac{\cos x \sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x^2} - \operatorname{sen} x \frac{1}{2}(9-\operatorname{sen}^2 x^2)^{-1/2} (-2 \operatorname{sen} x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x}{(\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x^2})^2 - \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x^2}} \right)^2 - 1}$$

46. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 7x^2 + 5x - 3$ en $x=2$

1. Tengo que aplicar la fórmula de la recta tangente que es: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$
2. Para calcular $f(x_0)$ tengo que saber que $x_0 = 2$ y posteriormente sustituir 2 por x en la función.
 $f(2) = 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 3 = 35$
3. Para calcular $f'(x_0)$ primero tengo que calcular $f'(x) = 14x + 5$ (derivo) y ahora calculo $f'(x_0) \rightarrow$
 $f'(2) = 14 \cdot 2 + 5 = 33$
4. Por último, sustituyo en la fórmula del principio $y = 35 + 33 \cdot (x - 2)$
5. **SOLUCION:** $y = 33x - 31$

47. El perfil de una cierta montaña tiene la forma de una parábola $y = 0.05x - 0.01x^2$, donde x e y se miden en km. Escribe la ecuación de la recta tangente para $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$.

1. Tengo que aplicar la fórmula de la recta tangente que es: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ para todos los valores de x.

PARA $x=0 \rightarrow x_0 = 0$

$$f(0) = 0.05 \cdot 0 - 0.01 \cdot 0^2 = 0 \quad f'(x) = 0.05 - \frac{1}{50}x \quad f'(0) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 0 = 0.05$$

$$y = 0 + 0.05 \cdot (x - 0)$$

SOLUCION: $y = 0.05x$

PARA $x=1 \rightarrow x_0 = 1$

$$f(1) = 0.05 \cdot 1 - 0.01 \cdot 1^2 = 0.04 \quad f'(1) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 1 = 0.03$$

$$y = 0.04 + 0.03 \cdot (x - 1)$$

SOLUCION: $y = 0.03x + 0.01$

PARA $x=2 \rightarrow x_0 = 2$

$$f(2) = 0.05 \cdot 2 - 0.01 \cdot 2^2 = 0.06 \quad f'(2) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 2 = 0.01$$

$$y = 0.06 + 0.01 \cdot (x - 2)$$

SOLUCION: $y = 0.01x - 0.04$

PARA $x=3 \rightarrow x_0 = 3$

$$f(3) = 0.05 \cdot 3 - 0.01 \cdot 3^2 = -0.04 \quad f'(3) = 0.05 - \frac{1}{50} \cdot 3 = -0.01$$

$$y = -0.04 + (-0.01) \cdot (x - 3)$$

SOLUCION: $y = -0.01x + 0.09$

48. Un coche recorre una distancia e , en km, a las t horas, siendo $e = 20t + 0.5t^2$. Determina su función velocidad y su función aceleración, ¿Es constante la aceleración?, ¿en qué instante sobrepasa la velocidad máx. permitida 120km/h?

1. Para calcular su función velocidad tenemos que saber que $v = \frac{de}{dt} = 20 + t$ km/h
2. Para calcular la función aceleración tenemos que saber que $a = \frac{dv}{dt} = 1$ km/h²
3. Para saber a qué instante sobrepasará 120km/h tengo que igualar 120 con la función de velocidad. $120 = 20 + t \rightarrow t = 100$ h

SOLUCIÓN: La aceleración es constante, $a = 1$ km/h² y sobrepasará los 120 a las 100 horas.

49. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^3 + 3x$. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = x^3 - 3x$. ¿Cómo es en $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$?

1. Calculo la derivada de $y = x^3 + 3x \rightarrow y' = 3x^2 + 3$, ahora igualo la derivada a 0 ($y'=0$) $\rightarrow 3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-1}$; como y' es siempre positiva la función es siempre creciente

2. Calculo la derivada de $y = x^3 - 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 3$, ahora igualo a cero la derivada ($y'=0$) $\rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$

$y'(0) = -3 < 0$ / Decreciente

$y'(2) = 1 > 0$ / Creciente

$y'(-2) = 1 > 0$ / Creciente

Creciente $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Decreciente $(-1, 1)$

50- Calcula los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 4x^2 + 3$ $y' = 8x$ $8x = 0$ $x = 0$
 $y'' = 8 > 0$ En $x = 0$ hay un mínimo.

b) $y = 5x^4 - 2$ $y' = 20x^3$; $20x^3 = 0$; $x = 0$;
 $(-\infty, 0)$ decreciente, $(0, \infty)$ creciente en $x = 0$ hay un mínimo

c) $y = 3x^3 + 1$ $y' = 9x^2$ como siempre es positiva, no hay máximos ni mínimos

d) $y = 4x^4 - 2x^2 + 5$ $y' = 16x^3 - 4x \rightarrow y' = 4x \cdot (4x^2 - 1) \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ y $x = 0$
 $y'' = 48x^2 - 4$

SOLUCIÓN

$y''\left(\frac{1}{2}\right) = 8 > 0$ Es un mínimo relativo

$y''\left(-\frac{1}{2}\right) = -16 < 0$ Es un máximo relativo

$y''(0) = -4 < 0$ Es un máximo relativo

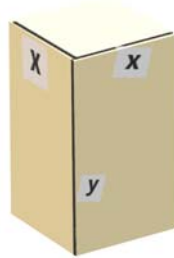
e) $y = 7x^3 - 3x$ $y' = 21x^2 - 3 \rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{3}{21}}$ $y'' = 42x$

SOLUCIÓN

$y''\left(\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42 \cdot \sqrt{\frac{3}{21}} = 6 \cdot \sqrt{7} > 0$ Es un mínimo relativo

$y''\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = 42x \rightarrow 42\left(-\sqrt{\frac{3}{21}}\right) = -6 \times \sqrt{7} < 0$ Es un máximo relativo

51. Se desea fabricar envases con forma de prisma recto cuadrangular de base cuadrada de forma que el volumen sea de un litro y la superficie empleada sea mínima.



1 litro es 1 dm^3

Función a optimizar, superficie: $S(x, y) = 2 \cdot x \cdot x + 4 \cdot x \cdot y = 2x^2 + 4xy$

Condición: $x \cdot x \cdot y = 1$, $x^2 y = 1$

Despejamos y , $y = \frac{1}{x^2}$ sustituimos en la función, $S(x) = 2x^2 + 4x \frac{1}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$

Derivamos $S'(x) = 4x - \frac{4}{x^2}$

Iguamos a 0 y resolvemos, $4x - \frac{4}{x^2} = 0$, $4x = \frac{4}{x^2}$, $x^3 = 1$, $x = 1$

Calculamos la segunda derivada, $S''(x) = 4 + \frac{8}{x^3}$ y $S''(1) = 4 + \frac{8}{1^3} = 12 > 0$

Luego en $x = 1$ hay un mínimo, $y = \frac{1}{1^2} = 1$

La mínima superficie se obtiene con un cubo de 1dm de arista.

52. Determina los máximos y mínimos de las funciones siguientes:

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$; b) $y = x^3 - 3x + 5$; c) $y = |x - 4|$; d) $y = |x + 1| + |x - 2|$.

a) $y = 6x^3 - 2x^2 + 5x + 7$; $y' = 18x^2 - 4x + 5$; $18x^2 - 4x + 5 = 0$, sin raíces reales
 $y'(0) = 5 > 0$, por tanto siempre creciente, no hay máximos ni mínimos

b) $y = x^3 - 3x + 5$; $y' = 3x^2 - 3$; $3x^2 - 3 = 0$; $x = -1$, $x = 1$
 $y'' = 6x$; $y''(-1) = -6 < 0$, máximo ; $y''(1) = 6 > 0$, mínimo.

c) $y = |x - 4|$ $x - 4 = 0$, $x = 4$, mínimo en $x = 4$.

d) $y = |x + 1| + |x - 2|$ $|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ $|x - 2| = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

sumando $|x + 1| + |x - 2| = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ que no tiene máximos ni mínimos.

53. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, en el intervalo $[-4, 3]$ y en el intervalo $[0, 5]$.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 72x$, $f'(x) = 6x^2 - 6x + 72$, $6x^2 - 6x + 72 = 0$, no tiene solución real

No hay máximos ni mínimos relativos

Intervalo $[-4, 3]$:

$f(-4) = -464$, $f(3) = 243$

En $x = -4$, hay un mínimo absoluto

En $x = 3$, hay un máximo absoluto.

intervalo $[0, 5]$

$f(0) = 0$, $f(5) = 535$.

En $x = 0$, hay un mínimo absoluto

En $x = 5$, hay un máximo absoluto.

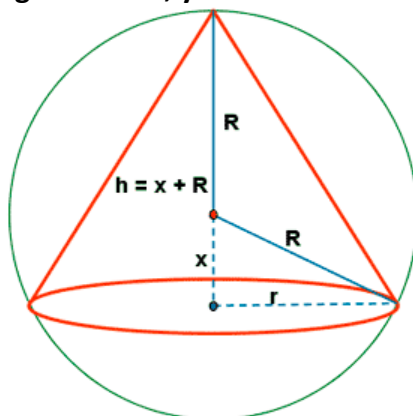
54. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 2|$ en el intervalo $[-3, 5]$.

$x + 2 = 0$, $x = -2$, en $x = -2$ hay un mínimo relativo.

$f(-3) = 1$, $f(-2) = 0$, $f(5) = 7$

en $x = -2$ hay un mínimo absoluto y en $x = 5$ hay un máximo absoluto.

55.- Determina las dimensiones de un cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio $R = 5$ cm. (Ayuda: La altura del cono es igual a $R + x$, y el radio de la base $r^2 = R^2 - x^2$).



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2 (R+x)}{3} = \frac{\pi (R^2 - x^2)(R+x)}{3} = \frac{\pi (25 - x^2)(5+x)}{3} = \frac{\pi}{3} (125 + 25x - 5x^2 - x^3) =$$

$$= \frac{\pi}{3} (-x^3 - 5x^2 + 25x + 125), \text{ derivamos}$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (-3x^2 - 10x + 25)$$

Igualemos a 0, para resolver, $(-3x^2 - 10x + 25) = 0$, $x = 1.66$ cm $x = -5$ no válida

$$V'' = \frac{\pi}{3} (-6x - 10); \quad V''(1.66) < 0, \text{ por tanto, es un máximo.}$$

$$r^2 = R^2 - x^2 = 5^2 - 1.66^2; \quad r = 4.83 \text{ cm}$$

$$h = R + x = 5 + 1.66 = 6.66 \text{ cm}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x^3$ en el punto $x = 2$.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{8 - 8}{2 - 2} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación}$$

haciendo Ruffini, de $(x^3 - 8)$, obtenemos $(x^2 + 2x + 4)(x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 4 + 4 = 12$$

$$f'(2) = 12$$

2. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

3. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = \frac{1}{x^2}$ en $x = 4$.

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{16}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{16 - x^2}{16x^2}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{16x^2(x - 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{16x^3 - 64x^2} = \frac{16 - 4^2}{16(4^3) - 64(4^2)} = \frac{16 - 16}{1024 - 1024} = \frac{0}{0}, \text{indeterminación} . =$$

A través de ruffini obtenemos que $-x^2 + 16$ es igual a $-(x - 4)(4 + x)$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x - 4)(4 + x)}{16x^2(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{4 + x}{16x^2} = -\frac{4 + 4}{16(4^2)} = -\frac{8}{256} = -\frac{1}{32}$$

$$f'(4) = -\frac{1}{32}$$

4. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = 3x^2 - 5x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2 - (3 - 5 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2 - 3 + 5 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1} =$$

$$\frac{3(1^2) - 5 \cdot 1 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{indeterminación}$$

Por medio de Ruffini, se obtiene $(3x - 2)(x - 1)$ de $3x^2 - 5x + 2$. La fracción se vería de la siguiente manera...

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x - 2)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2) = (3 - 2) = 1$$

$$f'(1) = 1$$

5. Utiliza la definición de derivada para calcular la derivada de la función $y = x - 3$ en $x = 2$.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3 - (-1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3 + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$f'(2) = 1$$

6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones

$$a) y = 4x^2 + 2x - 3 ; \quad y' = 8x + 2$$

$$b) y = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 5 ; \quad y' = 6x^2 - 6x + 7$$

$$c) y = x^2 - 5x + 2 ; \quad y' = 2x - 5$$

$$d) y = 8x^7 - 9x^6 - 5x^3 ; \quad y' = 56x^6 - 54x^5 - 15x^2$$

7. Calcula:

$$a) D(5x^2 + 7x^4 - 3x) = 10x + 28x^3 - 3$$

$$b) D(6x^5 - 4x^2 + 7x + 5x^3) = 30x^4 - 8x + 7 + 15x^2$$

$$c) D(x^5 - 7x^4 + 2x^3) = 5x^4 - 28x^3 + 6x^2$$

$$d) \frac{dy}{dx}(3x^3 - 9x^6 - 2x^8) = 9x^2 - 54x^5 - 16x^7$$

8. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = 7x^2 + 3x - \frac{1}{x} \rightarrow y' = 14x + 3 + \frac{1}{x^2}$$

$$b) y = 5x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} \rightarrow y' = 15x^2 - 4x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$c) y = \frac{\sqrt{x}}{(x+3)(x^2-5x+2)} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x+3)(x^2-5x+2) - \sqrt{x} \cdot 1 \cdot [(x^2-5x+2) + (x+3) \cdot (2x-5)]}{[(x+3)(x^2-5x+2)]^2}$$

$$d) y = \frac{\sqrt{x} \cdot (x+5)}{(x^2-5)} \rightarrow y' = \frac{[\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (x+5) + \sqrt{x} \cdot 1] \cdot (x^2-5) - \sqrt{x} \cdot (x+5) \cdot 2x}{(x^2-5)^2}$$

9. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{7}{3}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{8}{3x} \rightarrow y' = \frac{14}{3}x + \frac{3}{5} + \frac{8}{3}x^{-2}$$

$$b) y = \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{5}\sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{10}{2}x - \frac{6}{3}x^2 + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 5x - 2x^2 + \frac{3}{5}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$c) y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{7}x^2 + \frac{7}{\sqrt{x}} \rightarrow y' = \frac{12}{3}x^2 - \frac{10}{7}x + 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = 4x^2 - \frac{10}{7}x - \frac{7}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

10. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{(x-1)(2x-3)}{x+2}$$

$$y' = \frac{[1 \cdot (2x-3) + (x-1) \cdot 2] \cdot (x+2) - (x-1)(2x-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{(4x-8)(x+2) - (x-1)(2x-3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+5x-19}{(x+2)^2}$$

$$b) y = \frac{(3x^2+4) \cdot (4x-2)}{7x-1}$$

$$y' = \frac{[6x \cdot (4x-2) + (3x^2+4) \cdot 4] \cdot (7x-1) - (3x^2+4) \cdot (4x-2) \cdot 7}{(7x-1)^2} = \frac{2(84x^3-39x^2+6x+20)}{(7x-1)^2}$$

$$c) y = \frac{(8x+5x^2) \cdot (2x^5-7)}{4x+6}$$

$$y' = \frac{[(8+10x) \cdot (2x^5-7) + (8x+5x^2) \cdot (10x)] \cdot (4x+6) - (8x+5x^2) \cdot (2x^5-7) \cdot 4}{(4x+6)^2} = \frac{60x^7 + 185x^6 + 144x^5 - 35x^2 - 105x - 84}{(4x+6)^2}$$

$$d) y = \frac{(x+9) \cdot (2x-3)}{(x+3) \cdot (x+2)}$$

$$y' = \frac{[1 \cdot (2x+3) + 2 \cdot (x+9)] \cdot (x+3) \cdot (x+2) - (x+9) \cdot (2x-3) \cdot [1 \cdot (x+2) + 1 \cdot (x+3)]}{(x+3)^2(x+2)^2} = \frac{5x^2 - 78x - 225}{(x+3)^2(x+2)^2}$$

11. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$a) y = \sqrt{x^3 + 5} = (x^3 + 5)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} (x^3 + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2$$

$$b) y = \sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 - 1} = (2x^3 + 4x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3} (2x^3 + 4x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} (6x^2 + 8x)$$

$$c) y = (5x^3 + 2)^5 \Rightarrow y' = 5(5x^3 + 2)^4 \cdot 15x^2$$

$$d) y = (2x^2 + 5x)^9 \Rightarrow y' = 9(2x^2 + 5x)^8 (4x + 5)$$

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones

$$a) y = \sqrt{x^3 + 5} \cdot (x^7 + 3x^2)^6 \Rightarrow$$

$$y' = \left[\frac{1}{2} (x^3 + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2 \right] (x^7 + 3x^2)^6 + \sqrt{x^3 + 5} [6(x^7 + 3x^2)^5 (7x^6 + 6x)]$$

$$b) y = \frac{\sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 - 1}}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{3} (2x^3 + 4x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} (6x^2 + 8x) (x+1) - \sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 - 1} \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$c) y = (5x^3 + 2)^5 \cdot (x^5 - 6x^8) \Rightarrow y' = [5(5x^3 + 2)^4 \cdot 15x^2] (x^5 - 6x^8) + (5x^3 + 2)^5 (5x^4 - 48x^7)$$

$$d) y = \frac{(2x^3 - 5x^2)^9}{(7x^4 - 5x^3)^2} \Rightarrow y' = \frac{[9(2x^3 - 5x^2)^8 (6x^2 - 10x)] (7x^4 - 5x^3)^2 - (2x^3 - 5x^2)^9 [2(7x^4 - 5x^3) (28x^3 - 10x^2)]}{((7x^4 - 5x^3)^2)^2}$$

13. Utiliza derivación logarítmica para calcular las derivadas de las funciones siguientes:

$$a) y = (3x)^{x^5 - 2x^3} \Rightarrow \ln y = (x^5 - 2x^3) \ln 3x \Rightarrow \frac{y'}{y} = (5x^4 - 6x^2) (\ln 3x) + (x^5 - 2x^3) \frac{3}{3x} \Rightarrow$$

$$y' = y(5x^4 - 6x^2) (\ln 3x) + (x^5 - 2x^3) \frac{3}{3x} \Rightarrow$$

$$y' = 3x^{x^5 - 2x^3} (5x^4 - 6x^2) (\ln 3x) + (x^5 - 2x^3) \frac{1}{x}$$

$$b) y = (2x + 4)^{5x^3 + 7x^2} \Rightarrow$$

$$\ln y = (5x^3 + 7x^2) \ln(2x + 4) \Rightarrow \frac{y'}{y} = (15x^2 + 14x) \ln(2x + 4) + (5x^3 + 7x^2) \frac{2}{2x+4} \Rightarrow$$

$$y' = y(15x^2 + 14x) \ln(2x + 4) + (5x^3 + 7x^2) \frac{2}{2x+4} \Rightarrow$$

$$y' = (2x + 4)^{5x^3+7x^2} (15x^2 + 14x)(\ln 2x + 4) + 5x^3 + 7x^2 \cdot \frac{2}{2x+4}$$

c) $y = e^{2x^5-5x^3} \Rightarrow y' = e^{2x^5-5x^3} \cdot (10x^4 - 15x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{(2x+5)(x^4+6x^5)^3} = ((2x+5)(x^4+6x^5)^3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$$\ln y = \ln((2x+5)(x^4+6x^5)^3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}(x^4+6x^5)^3 \ln((2x+5))$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} 3(x^4+6x^5)^2(4x^3+30x^4) \ln((2x+5)) + \frac{1}{3}(x^4+6x^5)^3 \frac{2}{2x+5}$$

$$y' = y \cdot \left[(x^4+6x^5)^2(4x^3+30x^4) \ln((2x+5)) + \frac{1}{3}(x^4+6x^5)^3 \frac{2}{2x+5} \right]$$

$$y' = \sqrt[3]{(2x+5)(x^4+6x^5)^3} \left[(x^4+6x^5)^2(4x^3+30x^4) \ln((2x+5)) + \frac{1}{3}(x^4+6x^5)^3 \frac{2}{2x+5} \right]$$

14) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = e^{x^5+4x^3} \rightarrow$ exponencial con "e"
fórmula: $y' = e^u \cdot u'$

Resultado: $y' = e^{x^5+4x^3} \cdot (5x^4 + 12x^2)$

b) $y = (e^{2x^3-7x^2})^7 \rightarrow$ exponencial con "e" y potencial
Resultado: $y' = 7 \cdot (e^{2x^3-7x^2})^6 \cdot (e^{2x^3-7x^2} \cdot 6x^2 - 14x)$

c) $y = e^{(3x^5+5x^3)^5} \rightarrow$ exponencial con "e"
fórmula: $y' = e^u \cdot u'$
Resultado: $y' = e^{(3x^5+5x^3)^5} \cdot (5 \cdot (3x^5+5x^3)^4 \cdot 15x^4 + 15x^2)$

d) $y = \sqrt[3]{e^{(6x^5-9x^8)^2}} \rightarrow$ exponencial con "e" y potencial
Resultado: $y' = \frac{1}{3} \cdot (e^{(6x^5-9x^8)^2})^{\frac{2}{3}} \cdot (e^{(6x^5-9x^8)^2}) \cdot 2 \cdot (6x^5 \cdot 9x^8) \cdot (30x^4 - 72x^7)$

15) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \ln((7x^5-2x^3)^{12}(2x+3)) \rightarrow$ función logaritmo
fórmula: $y' = \frac{u'}{u}$

Resultado: $y' = \frac{(2x+3) \cdot (12(7x^5-2x^3)^{11} \cdot (35x^4-6x^2) + (7x^5-2x^3)^{12} \cdot 2)}{((7x^5-2x^3)^{12} \cdot (2x+3))}$

b) $y = \ln \sqrt{(3x^3 + 2x^2)^3} \rightarrow$ función logaritmo

$$\text{fórmula: } y' = \frac{u'}{u}$$

$$\text{Resultado: } y' = \frac{\frac{3}{2}(3x^3+2x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (9x^2+4x)}{(3x^3+2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot (9x^2+4x)}{3x^3+2x^2}$$

c) $y = \ln \sqrt{\frac{4x^5-7x}{6x-1}} \rightarrow$ función logaritmo

$$\text{fórmula: } y' = \frac{u'}{u}$$

$$\text{Resultado: } y' = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{4x^5-7x}{6x-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(6x-1) \cdot (20x^4-7) - 6 \cdot (4x^5-7x)}{(6x-1)^2}}{\left(\frac{4x^5-7x}{6x-1} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{(6x-1) \cdot (20x^4-7) - 6 \cdot (4x^5-7x)}{(6x-1)^2}}{\frac{4x^5-7x}{6x-1}}$$

d) $y = \ln \sqrt[3]{(x^4 - 2x^5)^2} \rightarrow$ función logaritmo

$$\text{fórmula: } y' = \frac{u'}{u}$$

$$\text{Resultado: } y' = \frac{\frac{2}{3}(x^4-2x^5)^{-\frac{1}{3}} \cdot (4x^3-10x^4)}{(x^4-2x^5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot (4x^3-10x^4)}{x^4-2x^5}$$

16) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{\cos x}{3 + \sin(x^2)}$

$$\text{Resultado: } f'(x) = \frac{-\sin x \cdot (3 + \sin(x^2)) - \cos x \cdot (-\cos(x^2) \cdot 2x)}{(3 + \sin(x^2))^2}$$

b) $f(x) = \operatorname{sen}(sh^3 2x)$

$$\text{Resultado: } f'(x) = -\cos(sh^3 2x) 3sh^2 2x \cdot 2$$

c) $f(x) = \operatorname{ch}(sh(5x))$

$$\text{Resultado: } f'(x) = sh(sh(5x)) \cdot ch(5x) \cdot 5$$

d) $f(x) = th(2x + 3x^2)$

$$\text{Resultado: } f'(x) = (1 - th^2(2x + 3x^2))(2 + 6x)$$

17) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 9\sqrt{\operatorname{sen}^3(5x+2)} = (\operatorname{sen}(5x+2))^{\frac{3}{2}}$

$$\text{Resultado: } f'(x) = 9 \cdot \frac{3}{2} (\operatorname{sen}(5x+2))^{\frac{1}{2}} \cdot (-\cos(5x+2)) \cdot 5$$

$$\text{b) } f(x) = \ln \sqrt{\frac{3+\cos x}{3-2\cos x}}$$

$$\text{Resultado: } f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3+2\cos x}{3-2\cos x} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(3-2\cos x)(-\sin x) - (3+\cos x)(2\sin x)}{(3-2\cos x)^2} \right)}{\sqrt{\frac{3+2\cos x}{3-2\cos x}}}$$

$$\text{c) } f(x) = \operatorname{ch}(\operatorname{sen}(5x-2)^2)$$

$$\text{Resultado: } f'(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{sen}(5x-2)^2)(-\cos(5x-2)^2)(2(5x-2) \cdot 5)$$

$$\text{d) } f(x) = \ln(\cos^2(x-1))$$

$$\text{Resultado: } f'(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x-1)2\cos(x-1)}{\cos^2(x-1)} = \frac{-\operatorname{sen}(x-1)2}{\cos(x-1)}$$

18. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \cos(x^5 - 7x^3) \cdot \sin(x^5 - 7x^3)$$

PASOS DE DERIVACIÓN:

1º Es una multiplicación por lo que utilizaremos: $y' = u \cdot v' + u' \cdot v$

2º Tenemos un coseno al principio, así que también utilizaremos: $y' = -u' \cdot \sin u$

3º Por último también utilizaremos la del sin: $y' = u' \cdot \cos u$

$$y' = \cos(x^5 - 7x^3)(5x^4 - 21x^2) \cos(x^5 - 7x^3) - (5x^4 - 21x^2) \sin(x^5 - 7x^3) \sin(x^5 - 7x^3)$$

$$y' = (5x^4 - 21x^2)(\cos^2(x^5 - 7x^3) - \sin^2(x^5 - 7x^3))$$

$$\text{b) } y = \cos^7(3x^3 - 5x^2) \cdot \sin^5(3x^3 - 5x^2)$$

FÓRMULAS:

$$1^\circ y = u \cdot v \rightarrow y' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$2^\circ y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

$$3^\circ y = \cos u \rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$4^\circ y = \sin u \rightarrow y' = u' \cdot \cos u$$

$$\text{SOLUCIÓN: } y' = -7\cos^6(3x^3 - 5x^2)(9x^2 - 10x) \sin(3x^3 - 5x^2) \sin^5(3x^3 - 5x^2) +$$

$$+ 5\sin^4(3x^3 - 5x^2)(9x^2 - 10x) \cos(3x^3 - 5x^2) \cos^7(3x^3 - 5x^2)$$

$$\text{c) } y = \cos(4x^5 - 8x^3)^5$$

FÓRMULAS:

$$1^\circ y = \cos u \rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$2^\circ y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

$$\text{SOLUCIÓN: } y' = -5(4x^5 - 8x^3)^4(20x^4 - 24x^2) \sin(4x^5 - 8x^3)$$

$$\text{d) } y = \sqrt[3]{\cos(2x^2 + 4x^7)^4} \rightarrow y = (\cos(2x^2 + 4x^7)^4)^{\frac{1}{3}}$$

FÓRMULAS:

$$1^\circ y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$$

$$2^\circ y = \cos u \rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$y' = -\frac{1}{3}(\cos(2x^2 + 4x^7)^4)^{-\frac{2}{3}} \sin(2x^2 + 4x^7)^4 (4x + 28x^6)4(2x^2 + 4x^7)^3$$

19. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = sh(2e^{x^5} - 5x^3)^2$

FÓRMULAS:

1º $y = sh(x) \rightarrow y' = ch(f(x)) \cdot f'(x)$

2º $y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

3º $y = e^u \rightarrow y' = e^u \cdot u'$

SOLUCIÓN: $y' = ch(2e^{x^5} - 5x^3)^2 \cdot 2 \cdot (2e^{x^5} - 5x^3) \cdot (2e^{x^5} \cdot 5x^4 - 15x^2)$

b) $y = (\tan(5x^3 - 3x^2))^4$

FÓRMULAS:

1º $y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

2º $y = \tan u \rightarrow y' = (1 + \tan^2 f(x)) \cdot f'(x)$

SOLUCIÓN: $y' = 4 \cdot (\tan(5x^3 - 3x^2))^3 \cdot (1 + \tan^2(5x^3 - 3x^2)) \cdot (15x^2 - 6x)$

c) $y = \sin(\cos(\tan(7x^5 - 3x^3)^2))$

FÓRMULAS:

1º $y = \sin u \rightarrow y' = u' \cdot \cos u$

2º $y = \cos u \rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$

3º $y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

4º $y = \tan u \rightarrow y' = (1 + \tan^2 f(x)) \cdot f'(x)$

SOLUCIÓN: $y' = -\cos(\cos(\tan(7x^5 - 3x^3)^2)) \sin(\tan(7x^5 - 3x^3)^2) 2(7x^5 - 3x^3)(35x^4 - 9x^2)(1 + \tan^2(7x^5 - 3x^3)^2)$

d) $y = \sqrt[3]{ch(sh(2x - 1))^4} \rightarrow y = (ch(sh(2x - 1)))^{\frac{4}{3}}$

FÓRMULAS:

1º $y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

2º $y = ch(x) \rightarrow y' = sh(f(x)) \cdot f'(x)$

3º $y = sh(x) \rightarrow y' = ch(f(x)) \cdot f'(x)$

SOLUCIÓN: $y' = \frac{1}{3} (ch(sh(2x - 1)))^{-\frac{2}{3}} \cdot 4(ch(sh(2x - 1)))^3 \cdot sh(sh(2x - 1)) \cdot ch(2x - 1) \cdot 2$

20. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sin \frac{3+2e^{3x}}{3-2e^{3x}}$

FÓRMULAS:

1º $y = \sin u \rightarrow y' = u' \cdot \cos u$

2º $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u \cdot v' - u' \cdot v}{v^2}$

3º $y = e^u \rightarrow y' = e^u \cdot u'$

SOLUCIÓN: $y' = \cos \frac{3+2e^{3x}}{3-2e^{3x}} \cdot \frac{(3-2e^{3x}) \cdot (2e^{3x} \cdot 3) - (-2e^{3x} \cdot 3) \cdot (3+2e^{3x})}{(3-2e^{3x})^2}$

b) $f(x) = (3x - 5x^2) \cdot ch(3x - 5x^2)$

FÓRMULAS:

1º $y = u \cdot v \rightarrow y' = u \cdot v' + u' \cdot v$

2º $y = ch(f(x)) \rightarrow y' = sh(f(x)) \cdot f'(x)$

SOLUCIÓN: $y' = (3x - 5x^2) \cdot (sh(3x - 5x^2))(3 - 10x) + (3 - 10x) \cdot ch(3x - 5x^2)$

c) $f(x) = \tan \frac{\sqrt{25-14 \cdot \sin x}}{4+5 \cdot \cos x}$

FÓRMULAS:

1º $y = \tan u \rightarrow y' = (1 + \tan^2 f(x)) \cdot f'(x)$

2º $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u \cdot v' - u' \cdot v}{v^2}$

3º $y = u^k \rightarrow y' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

4º $y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$

5º $y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$

SOLUCIÓN: $y' = \left(1 + \tan^2 \frac{\sqrt{25-14 \cdot \sin x}}{4+5 \cdot \cos x}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot (25-14 \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-14 \cos x)\right)(4+5 \cdot \cos x) - (\sqrt{25-14 \cdot \sin x})(-5 \sin x)}{(4+5 \cdot \cos x)^2}$

d) $f(x) = \frac{shx - xchx}{chx + xshx}$

FÓRMULAS:

1º $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u \cdot v' - u' \cdot v}{v^2}$

2º $y = ch(f(x)) \rightarrow y' = sh(f(x)) \cdot f'(x)$

3º $y = sh(x) \rightarrow y' = ch(f(x)) \cdot f'(x)$

SOLUCIÓN: $y' = \frac{(chx - chx - xshx)(chx + xshx) - (shx + shx + xchx) \cdot (shx + xchx)}{(chx + xshx)^2}$

21. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln \sqrt{e^{2shx}-1} = \frac{1}{2} \ln(e^{2shx}-1) = \frac{1}{2} (2shx - 1) lne = \frac{1}{2} (2shx - 1)$

FÓRMULAS:

1º $y = sh(x) \rightarrow y' = ch(f(x)) \cdot f'(x)$

SOLUCIÓN: $y' = \frac{1}{2} \cdot 2chx = chx$

b) $f(x) = \arcsin \frac{5-3x^2}{5+3x^2}$

FÓRMULAS:

1º $y = \arcsin u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

2º $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u \cdot v' - u' \cdot v}{v^2}$

SOLUCIÓN: $y' = \frac{\frac{(5+3x^2) \cdot (-6x) - (6x)(5-3x^2)}{(5+3x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{5-3x^2}{5+3x^2}\right)^2}}$

c) $f(x) = 7 \arccos \frac{4 \cdot \sin x + 3}{5 - 2 \cdot \sin x}$

FÓRMULAS:

1º $y = k \cdot u \rightarrow y' = k \cdot u'$

2º $y = \arccos u \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

3º $y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u \cdot v' - u' \cdot v}{v^2}$

4º $y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$

$$\text{SOLUCIÓN: } y' = 7 \cdot \frac{\frac{4\cos x(5-2\sin x)-(4\sin x+3)(-2\cos x)}{(5-2\sin x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{4\sin x+3}{5-2\sin x}\right)^2}}$$

$$\text{d) } f(x) = \arcsin \frac{2 \cdot \cos x}{4 \cdot \sin x + 3 \cdot \cos x}$$

FÓRMULAS:

$$1^\circ y = \arcsin u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$2^\circ y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u \cdot v' - u' \cdot v}{v^2}$$

$$3^\circ y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$

$$4^\circ y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

$$\text{SOLUCIÓN: } y' = \frac{\frac{(-2\sin x)(4\sin x+3\cos x)-(2\cos x) \cdot (4\cos x-3\sin x)}{(4\sin x+3\cos x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2\cos x}{4\sin x+3\cos x}\right)^2}}$$

22. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \arcsen(e^{2x-3}) \quad ; \quad y' = \frac{2 \cdot e^{2x-3}}{\sqrt{1-(e^{2x-3})^2}}$$

$$\text{b) } y = \sqrt{\ln(\arccos(x))} \quad ; \quad y = (\ln(\arccos(x)))^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} (\ln(\arccos(x)))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1}{\arccos(x)} = \frac{-1}{2 \cdot \sqrt{\ln(\arccos(x))} \cdot \arccos(x) \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{c) } y = \arctg(\ln^3 \sqrt{3x-2}) \quad ; \quad y = \arctg\left(\frac{1}{3} \ln(3x-2)\right)$$

$$y' = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3x-2}}{1 + \left(\frac{1}{3} \ln(3x-2)\right)^2} = \frac{1}{[1 + \left(\frac{1}{3} \ln(3x-2)\right)^2](3x-2)} = \frac{1}{[1 + \ln^2 \sqrt{3x-2}](3x-2)}$$

$$\text{d) } y = \arcsen\left(\operatorname{tg}(\sen(5x-1))\right) \quad ; \quad y' = \frac{\sec^2(\sen(5x-1)) \cos(5x-1) \cdot 5}{\sqrt{1-(\operatorname{tg}(\sen(5x-1)))^2}}$$

23. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \arctg \sqrt{\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x}} \quad , \quad y = \arctg \left(\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2\cos x(3-2\sen x) - (-2\cos x) \cdot (3+2\sen x)}{(3-2\sen x)^2}}{1 + \left(\sqrt{\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x}} \right)^2} = \frac{\frac{12\cos x}{(3-2\sen x)^2}}{2 \cdot \left[1 + \frac{3+2\sen x}{3-2\sen x} \right] \left(\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x} \right)^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{12\cos x}{2 \cdot \left[1 + \frac{3+2\sen x}{3-2\sen x} \right] \left(\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3-2\sen x)^2} = \frac{6\cos x}{\left[\frac{6}{3-2\sen x} \right] \sqrt{\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x}} (3-2\sen x)^2} = \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{3+2\sen x}{3-2\sen x}} \cdot (3-2\sen x)} =$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{\frac{3+2\sin x}{3-2\sin x}(3-2\sin x)^2}} = \frac{\cos x}{\sqrt{(3+2\sin x)(3-2\sin x)}} = \frac{\cos x}{\sqrt{9-4\sin^2 x}}$$

b) $y = e^{\arcsen \sqrt{2x-5}}$

$$y' = e^{\arcsen \sqrt{2x-5}} \cdot \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x-5}}}{\sqrt{1-(\sqrt{2x-5})^2}} = e^{\arcsen \sqrt{2x-5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2x+5}\sqrt{2x-5}} = \frac{e^{\arcsen \sqrt{2x-5}}}{\sqrt{(6-2x)(2x-5)}}$$

c) $y = \cos\left(\arcsen \frac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}}\right)$

$$y' = -\sen\left(\arcsen \frac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}}\right) \cdot \frac{\frac{4\sqrt{5-3x^2}-(4x-5) \cdot \frac{-6x}{2\sqrt{5-3x^2}}}{(\sqrt{5-3x^2})^2}}{\sqrt{1-(\sqrt{5-3x^2})^2}} =$$

$$= -\sen\left(\arcsen \frac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}}\right) \cdot \frac{\frac{4(5-3x^2)+3x(4x-5)}{\sqrt{5-3x^2}}}{(5-3x^2)\sqrt{1-(\sqrt{5-3x^2})^2}} = -\sen\left(\arcsen \frac{4x-5}{\sqrt{5-3x^2}}\right) \cdot \frac{20-15x}{\sqrt{(5-3x^2)^3}\sqrt{3x^2-4}}$$

d) $y = \arcsen \frac{2x}{\sqrt{8-x^2}}$

$$y' = \frac{\frac{2\sqrt{8-x^2}-2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}}{(\sqrt{8-x^2})^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{8-x^2}}\right)^2}} = \frac{16}{\sqrt{8-x^2} \cdot (8-x^2) \cdot \sqrt{1-\frac{4x^2}{8-x^2}}} = \frac{16}{(8-x^2)\sqrt{(8-x^2) \cdot (1-\frac{4x^2}{8-x^2})}} =$$

$$= \frac{16}{(8-x^2)\sqrt{(8-x^2-4x^2)}} = \frac{16}{(8-x^2)\sqrt{(8-5x^2)}}$$

24 Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y = \arctg \sqrt{5x-7}$

$$y' = \frac{\frac{5}{2(\sqrt{5x-7})}}{1+(\sqrt{5x-7})^2} = \frac{\frac{5}{2(\sqrt{5x-7})}}{5x-6} = \frac{5}{(5x-6)2(\sqrt{5x-7})} = \frac{5}{(10x-12)(\sqrt{5x-7})}$$

b) $y = \ln(\sqrt{\arcsen(2x+1)})$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\arcsen(2x+1)}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}}{2\sqrt{\arcsen(2x+1)}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2} 2\sqrt{\arcsen(2x+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2} \arcsen(2x+1)}$$

c) $y = \arcsen(e^{4x-7})$

$$y' = \frac{e^{4x-7} \cdot 4}{\sqrt{1-(e^{4x-7})^2}} = \frac{4e^{4x-7}}{\sqrt{1-(e^{8x-14})^2}}$$

d) $y = \arctg(\arcsen(\sen(2x-1)))$

$$y' = \frac{1}{1+\arcsen^2(\sen(2x-1))} \cdot \frac{-1 \cdot \cos(2x-1)(2)}{\sqrt{1-\sen^2(2x-1)}} = \frac{-2\cos(2x-1)}{(1+\arcsen^2(\sen(2x-1)))\sqrt{1-\sen^2(2x-1)}}$$

25 Calcula las derivadas de las siguientes funciones

a) $y = \argch\sqrt{x-2}$

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x-2}^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{(x-2) \cdot (x-3)}}$$

b) $y = \ln(\argsh(2x-3))$

$$y' = \frac{\frac{2}{\sqrt{1+(2x-3)^2}}}{\argsh(2x-3)} = \frac{2}{\sqrt{1+(2x-3)^2} \cdot \argsh(2x-3)} = \frac{2}{\argsh(2x-3)\sqrt{4x^2-12x+10}}$$

c) $y = \argth(e^{3x-5})$

$$y' = \frac{e^{3x-5} \cdot 3}{1-(e^{3x-5})^2} = \frac{3e^{3x-5}}{1-(e^{6x-10})}$$

d) $y = \argch\sqrt{\argth(x)}$

$$y' = \frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\sqrt{\argth(x)}}}{\sqrt{(\sqrt{\argth(x)})^2-1}} = \frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2\sqrt{\argth(x)}}}{\sqrt{\argth(x)-1}} = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\argth(x)}\sqrt{\argth(x)-1}}$$

26. Calcula la derivada de la siguientes funciones:

a) $y = \argch\sqrt{\frac{3+2chx}{3-2chx}}$

$$y' = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{3+2chx}{3-2chx}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2shx(3-2chx) - (-2shx)(3+2chx)}{(3-2chx)^2}}{\sqrt{\sqrt{\frac{3+2chx}{3-2chx}}^2-1}} = \frac{\frac{12shx}{(3-2chx)^2}}{2\sqrt{\frac{3+2chx}{3-2chx}}\sqrt{\frac{3+2chx}{3-2chx}-1}}$$

b) $y = \sqrt{e^{\argsh\sqrt{5x-2}}}$

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\argsh\sqrt{5x-2}}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\argsh\sqrt{5x-2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{(5x-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5}{\sqrt{1+\sqrt{5x-2}^2}} = \frac{\sqrt{e^{\argsh\sqrt{5x-2}} \cdot 5}}{\sqrt{5x-2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5x-1}}$$

c) $y = ch\left(\argsh\frac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}}\right)$

$$y' = sh\left(\arg sh \frac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}}\right) \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{25-9x^2} - (2x-5) \cdot 8x \cdot \frac{1}{2\sqrt{25-9x^2}}}{\sqrt{25-9x^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}}\right)^2}} = sh\left(\arg sh \frac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}}\right) \frac{\frac{2 \cdot \sqrt{25-9x^2} - \frac{4x \cdot (2x-5)}{\sqrt{25-9x^2}}}{25-9x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2x-5}{\sqrt{25-9x^2}}\right)^2}}$$

$$d) y = \arg th \frac{\cos x}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{-\sin x \cdot \sqrt{4-\cos^2 x^2} - \cos x \cdot \frac{2 \cos x^2 \cdot \sin x^2 \cdot 2x}{2\sqrt{4-\cos^2 x^2}}}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}}}{1 - \left(\frac{\cos x}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}}\right)^2} = \frac{\frac{-\sin x \cdot \sqrt{4-\cos^2 x^2} - \cos x \cdot \frac{\cos x^2 \cdot \sin x^2 \cdot 2x}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}}}{4-\cos^2 x^2}}{1 - \left(\frac{\cos x}{\sqrt{4-\cos^2 x^2}}\right)^2}$$

27. Calcula las rectas tangentes de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x$ en $x=0$, $x=1$ y $x=2$.

Usamos: $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

• **$y = x^3 - 3x$ en $x=0$, $a = 0$**

Sustituimos en la ecuación: $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$

Derivada de la función: $y' = 3x^2 - 3$; $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3$

Y Sustituimos en $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

$y = 0 + (-3)(x-0)$; $y = -3x$

• **$y = x^3 - 3x$ en $x=1$**

Sustituimos en la ecuación: $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

Derivada de la función: $y' = 3x^2 - 3$; $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 = 0$

Y Sustituimos en $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

$y = -2 + 0(x-1)$; $y = -2$

• **$y = x^3 - 3x$ en $x=2$.**

Sustituimos en la ecuación: $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$

Derivada de la función: $y' = 3x^2 - 3$; $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$

Y Sustituimos en $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

$y = 2 + 9(x-2)$; $y = 9x - 16$

28. Calcula las rectas tangentes de las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados:

a) $y = x^3$ en $x=2$

Usamos: $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$

$f(2) = 2^3 = 8$

$y' = 3x^2$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

Sustituimos: $y = 8 + 12(x-2)$; $y = 12x - 16$

b) $y = 2x^2 + 4x - 5$ en $x=1$

Repetimos igual que el anterior apartado.

$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 5 = 1$

$y' = 4x + 4$; $f'(1) = 4 \cdot 1 + 4 = 8$

$y = 1 + 8(x-1)$; $y = 8x - 7$

c) $y = x^3 - 7x^2 + 3$ en $x=0$

$f(0) = 0^3 - 7 \cdot 0^2 + 3 = 3$

$$y' = 3x^2 - 14x \quad ; \quad f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 = 0$$

$$y = 3 + 0(x - 0) \quad ; \quad y = 3$$

29. Indica la pendiente de la recta tangente de:

a) $y = x^3 + 3x$ en $x = 3$

$$y' = 3x^2 + 3$$

$$\text{Sustituimos: } f'(3) = 3 \cdot 3^2 + 3 = 30 \quad ; \quad m = 30$$

b) $y = 4x^3 - 5x^2 + 2$ en $x = 1$

$$y' = 12x^2 - 10x$$

$$\text{Sustituimos: } f'(1) = 12 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 = 2 \quad ; \quad m = 2$$

30. Determina las coordenadas de los puntos de la gráfica $y = x^3 - 3x + 2$ en los que su tangente sea paralela: a) a la recta $y = 0$; b) a la recta $y = 6x$.

a) Cualquier recta paralela a esta tendrá pendiente 0.

Hacemos la ecuación de la derivada:

$$y = x^3 - 3x + 2 \quad ; \quad y' = 3x^2 - 3 \quad ; \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad y \quad x = -1$$

Sustituimos con las x obtenidas:

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0 \quad ; \quad f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4$$

Los puntos donde la tangente a la curva es paralela al eje son: $(1, 0)$ y $(-1, 4)$

B) $y = x^3 - 3x + 2$

$$y = 6x.$$

pendiente, $m = 6$

$$y = x^3 - 3x + 2 \quad ; \quad y' = 3x^2 - 3 \quad ; \quad 3x^2 - 3 = 6 \quad ; \quad 3x^2 = 9 \quad ; \quad x = \sqrt{3} \quad ; \quad x = -\sqrt{3}$$

Sustituimos con las x obtenidas:

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} + 2 = 2$$

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 3(-\sqrt{3}) + 2 = 2$$

Los puntos son: $(\sqrt{3}, 2)$ y $(-\sqrt{3}, 2)$

31. Determina la recta tangente de la función $y = \sqrt{x^3}$ en $x = 0$.

Para poder determinar una recta tangente de $f(x)$ necesitamos:

a) El valor de $f(x)$ en el punto $x = 0$: $f(0)$

$$f(0) = \sqrt{0^3} = 0$$

b) La derivada de $f(x)$: $f'(x)$

$$f(x) = \sqrt{x^3} = (x)^{\frac{3}{2}}$$

Con la nueva expresión de $f(x)$ derivamos por tabla

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

c) El valor de $f'(x)$ en el punto $x = 0$: $f'(0)$

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2} \rightarrow f'(0) = \frac{3}{2} \cdot 0^{1/2} = 0$$

Con estos valores podemos calcular la recta tangente, utilizamos la fórmula:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

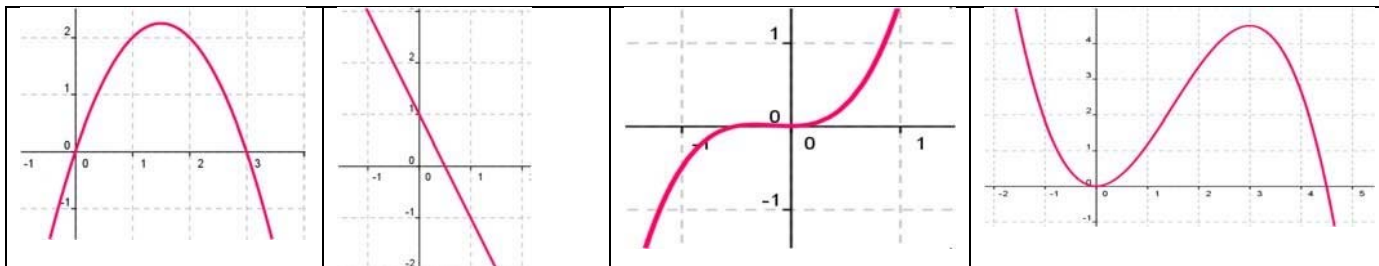
Donde a es el valor de x donde queremos determinar la recta tangente. En este caso es 0

Remplazamos con los valores que calculamos de $f(0)$, $f'(0)$ y 0

$$y - 0 = 0(x - 0) \rightarrow y = 0$$

La recta tangente de la función $y = \sqrt{x^3}$ en $x = 0$ es $y = 0$

32. Si $f'(x) = x(3 - x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas podría ser la de $f(x)$?



Con la función $f'(x) = x(3 - x)$ podemos determinar los puntos críticos de $f(x)$

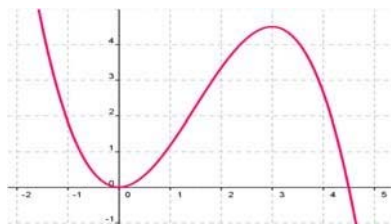
Igualamos a cero a $f'(x)$

$$x(3 - x) = 0 \rightarrow \text{Tiene dos resultados}$$

$$x = 0 \quad ; \quad 3 - x = 0 \rightarrow x = 3$$

tiene extremos relativos en los puntos $x = 0$ y $x = 3$

Esta es la gráfica que cumple con los requisitos:



33. Determina las rectas tangentes a la función $f(x) = 4x^3 - 12x$ en los puntos en los que la pendiente es 12. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva? ¿En qué puntos se alcanza?

$$\text{Derivamos } f(x) = 4x^3 - 12x \quad ; \quad f'(x) = 12x^2 - 12$$

Para saber en qué puntos de x la pendiente es 12, igualamos $f'(x)$ a 12

$$12x^2 - 12 = 12 \rightarrow 12x^2 = 24 \rightarrow x^2 = \frac{24}{12} \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

En $x = \pm\sqrt{2}$ la pendiente de las rectas tangentes es 12

Utilizamos la formula $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ para calcular las rectas.

$$a = x = \pm\sqrt{2}$$

$$y = f(\pm\sqrt{2}) + f'(\pm\sqrt{2})(x - \pm\sqrt{2})$$

Calculamos $f(\sqrt{2})$

$$f(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^3 - 12(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$$

Remplazamos en la fórmula para calcular las rectas tangentes

$$y = -4\sqrt{2} + 12(x - \sqrt{2}) \rightarrow y = -4\sqrt{2} + 12x - 12\sqrt{2} \rightarrow y = 12x - 16\sqrt{2}$$

Y repetimos el proceso con $a = -\sqrt{2}$

Calculamos $f(-\sqrt{2})$

$$f(-\sqrt{2}) = 4(-\sqrt{2})^3 - 12(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

Remplazamos en la fórmula para calcular las rectas tangentes

$$y = 4\sqrt{2} + 12(x - (-\sqrt{2})) \rightarrow y = 4\sqrt{2} + 12x + 12\sqrt{2} \rightarrow y = 12x + 16\sqrt{2}$$

Ahora, para saber cuál es el menor valor que puede tener la pendiente a esta curva, debemos calcular los puntos críticos de $f(x)$ con $f'(x) = 0$

$$12x^2 - 12 = 0 \rightarrow 12x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Evaluar cada punto crítico con la segunda derivada $f''(x)$

$$f''(x) = 24x$$

$$f''(-1) = -24 < 0, \text{ por lo tanto, } x = -1 \text{ es un máximo.}$$

$$f''(1) = 24 > 0, \text{ por lo tanto, } x = 1 \text{ es un mínimo.}$$

La pendiente en el punto $x = 1$ es:

$$f'(1) = 12(1)^2 - 12 = 0$$

Por lo tanto, el valor mínimo de la pendiente es 0.

Para encontrar los puntos en los que la pendiente es 0, se debe evaluar la función $f(x)$ en el punto $x = 1$, ya que es el único punto crítico donde la pendiente es igual a 0.

$$f(1) = 4(1)^3 - 12(1) = -8$$

El punto en el que la pendiente es mínima y la función alcanza ese valor mínimo es $(1, -8)$.

34. Determina la recta tangente a la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el punto $A(-1, 2)$. ¿En qué otro punto corta la recta tangente a la función?

Primero calculamos la recta tangente a $f(x)$ en $A(-1, 2)$

Calculamos la derivada y el valor de $f(-1)$ y $f'(-1)$

$$f(x) = x^3 - 3x \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) \rightarrow 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 \rightarrow 0$$

Aplicamos la formula $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

$$y = 2 + 0(x - 0)$$

Para calcular en que otro punto la recta corta la función, igualamos a $f(x)$ a "y"

$$x^3 - 3x = 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \text{ En la calculadora nos da dos raíces: } x = -1 ; x = 2$$

Por ende, $x = 2$ es el otro punto por donde pasa la recta $y = 2$ en la función. Llamaremos a este punto $B(2,2)$

35. Determina los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, que pasa por el punto A (1, 2) y es tangente a la recta $y = x$ en el punto O (0, 0).

Tenemos que utilizar la información a nuestra disposición para calcular las tres incógnitas.

Primero, sabiendo que $f(x)$ es tangente a la recta en (0,0), sabemos que cuando $x = 0 ; y = 0$

Por ende, sabemos que $c = 0$

También sabemos que $f'(0) = 1$ porque la pendiente de la recta $y = x$ es 1

$$f'(x) = 3ax^2 + b \rightarrow f'(0) = 3 \cdot a \cdot 0 + b = 1 \rightarrow f'(0) = b = 1$$

Luego, para encontrar el valor de a podemos utilizar más información: $f(x)$ pasa por el punto A (1, 2).

$$\text{Por ende, } f(1) = 2 \rightarrow a \cdot 1^3 + 1 \cdot 1 + 0 = 2 \rightarrow a = 1$$

En resumen, $a = 1, b = 1, c = 0$

36. Determina los coeficientes a, b y c para que las funciones $f(x) = x^3 + bx + c$ y $g(x) = ax - x^2$ tengan la misma recta tangente en el punto A (1,0).

Primero hacemos la derivada de ambas funciones.

$$f(x) = x^3 + bx + c ; f'(x) = 3x^2 + b$$

$$g(x) = ax - x^2 ; g'(x) = a - 2x$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1 + b = 3 + b \quad g'(1) = a - 2 \cdot 1 = a - 2$$

Teniendo este resultado sabemos que:

$a = 5 + b$ pues tienen la misma recta tangente

$$f(1) = 0 \Rightarrow b + c = 0$$

$$g(1)=0 \quad a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Sustituimos $a=-1$ en $a=5+b$

$$-1 = 5 + b \Rightarrow b = -6$$

Y ahora sustituimos $b=-6$ en $b+c=0$

$$-6 + c = 0 \Rightarrow c = 6$$

37. Determina el coeficiente a, para que la función $f(x) = x^2 + a$ sea tangente a la recta $y = x$.

Hacemos la derivada de la función

$$f(x) = x^2 + a \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$y=x$ quiere decir que la pendiente es $m = 1$

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ como } y \text{ es igual que } x \quad y = \frac{1}{2}$$

Ahora sustituimos $\frac{1}{2}$ en la función

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a = \frac{1}{2}$$

Despejamos a , $a = \frac{1}{4}$

38. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Para empezar, debemos hallar el dominio de la función.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Ahora tenemos que hacer la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} ; f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Una vez tenemos la derivada le damos valores a la función mayores y menores que 0.

$$f(-10) < 0 \text{ Es decreciente } (-\infty, 0)$$

$$f(10) > 0 \text{ Es creciente } (0, \infty)$$

39. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = \frac{1}{x}$

Para empezar, debemos hallar el dominio de la función.

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Ahora hacemos la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{1}{x} ; f'(x) = \frac{0 \cdot x + 1 \cdot x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Una vez tenemos la derivada le damos valores mayores y menores que 0.

$$f(-10) < 0 \text{ Es decreciente } (-\infty, 0)$$

$$f(10) < 0 \text{ Es decreciente } (0, \infty)$$

40. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Calcula sus máximos y sus mínimos y haz un esbozo de su gráfica.

Hacemos la derivada de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Una vez tenemos la derivada la igualamos a 0.

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 ; 3x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f'(-10) > 0 \text{ Es creciente } (-\infty, 0)$$

$$f'(1) < 0 \text{ Es decreciente } (0, 2) \quad \text{máximo en } x = 0$$

$$f'(10) > 0 \text{ Es creciente } (2, \infty) \quad \text{mínimo en } x = 2$$

Esto quiere decir que:

$$\text{Es creciente } (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

$$\text{Es decreciente } (0, 2)$$

Para calcular el máximo igualamos la x de la función sin derivar a 0

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \Rightarrow (0, 4)$$

Para calcular el mínimo igualamos la x de la función sin derivar a 2

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0 \Rightarrow (2, 0)$$

41. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$. Calcula sus máximos y mínimos. ¿En qué punto corta al eje de ordenadas? Haz un esbozo de su gráfica.

punto de corte eje de ordenadas

Para conocer el corte con el eje de ordenadas (eje Y), tenemos que sustituir $x = 0$ en $f(x)$, es decir, tenemos que calcular $f(x = 0)$ para saber el punto donde corta el eje Y

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x + 6 \\f(x = 0) &= 0^3 - 6(0^2) + 9(0) + 6 \\f(x = 0) &= 6\end{aligned}$$

punto de corte eje de ordenadas $(0, 6)$

crecimiento, decrecimiento, máximos relativos y mínimos relativos

Para calcular las siguientes características de la función seguimos estos pasos.

paso 1. calcular la derivada de $f(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x + 6 \\f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9\end{aligned}$$

paso 2. calculamos las soluciones de $f'(x) = 0$

Soluciones de $f'(x)$

$$x = 1, \quad x = 3$$

paso 3. damos valores a los distintos tramos de la función dados los resultados obtenidos e interpretamos los resultados

PASO 3.1. Determinamos los tramos

Tramo 1 $\rightarrow (-\infty, 1)$

Tramo 2 $\rightarrow (1, 3)$

Tramo 3 $\rightarrow (3, \infty)$

PASO 3.2. Damos valores en $f'(x)$

$$\begin{aligned}f'(x = 0) &> 0 \\f'(x = 2) &< 0 \\f'(x = 10) &> 0\end{aligned}$$

PASO 3.3. Interpretamos los resultados

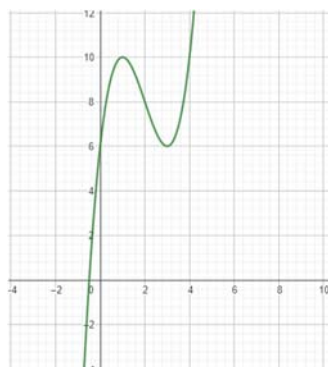
La función es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

La función es decreciente en $(1, 3)$

Existe un máximo relativo cuando $(x = 1)$ pues la función deja de crecer y comienza a decrecer

Existe un mínimo cuando $(x = 3)$ pues la función deja de decrecer y comienza a crecer

Esbozo de $f(x)$



42. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y mínimos relativos de la función, seguimos estos pasos.

paso 1. calcular la derivada de $f(x)$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3, \quad f'(x) = 6x^2 - 6x$$

paso 2. calculamos las soluciones de $f'(x) = 0$

$$x = 0, \quad x = 1$$

paso 3. determinamos los tramos de la función dadas las soluciones

Tramo 1 $\rightarrow (-\infty, 0)$

Tramo 2 $\rightarrow (0, 1)$

Tramo 3 $\rightarrow (1, \infty)$

paso 4. damos valores a los tramos en $f'(x)$

$$f'(x = -1) > 0, \quad f'(x = 0,5) < 0, \quad f'(x = 2) > 0$$

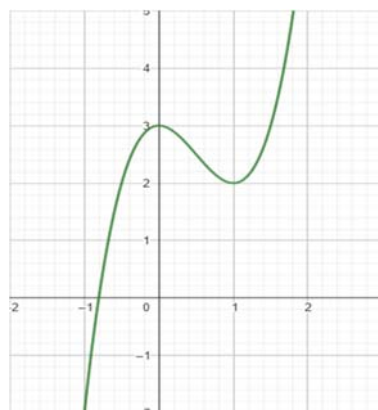
paso 5. interpretamos resultados

Tramos crecientes $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

Tramos decrecientes $(0, 1)$

Existe un máximo relativo cuando $(x = 0)$ pues la función deja de crecer y comienza a decrecer

Existe un mínimo cuando $(x = 1)$ pues la función deja de decrecer y comienza a crecer



43. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^3 - 9x$. Calcula sus máximos y mínimos. Haz un esbozo de su gráfica.

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y mínimos relativos de la función, seguimos estos pasos.

paso 1. calcular la derivada de $f(x)$

$$f(x) = x^3 - 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

paso 2. calculamos las soluciones de $f'(x) = 0$

$$x = -3, \quad x = 3$$

paso 3. determinamos los tramos de la función dadas las soluciones

Tramo 1 $\rightarrow (-\infty, -3)$

Tramo 2 $\rightarrow (-3, 3)$

Tramo 3 $\rightarrow (3, \infty)$

paso 4. damos valores a los tramos en $f'(x)$

$$f'(x = -10) > 0$$

$$f'(x = 0) < 0$$

$$f'(x = 10) > 0$$

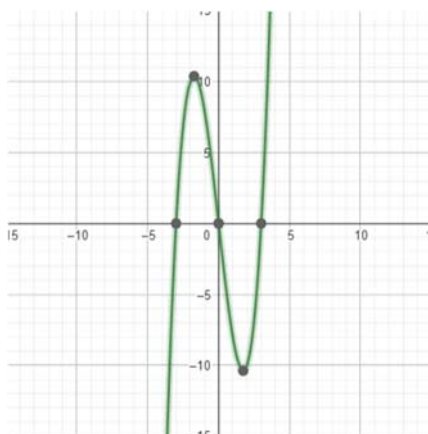
paso 5. interpretamos resultados

Tramos crecientes $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

Tramos decrecientes $(-3, 3)$

Existe un máximo relativo cuando $(x = -3)$ pues la función deja de crecer y comienza a decrecer

Existe un mínimo cuando $(x = 3)$ pues la función deja de decrecer y comienza a crecer



44. Calcula los máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$ en el intervalo $[-7, 2]$ y en el intervalo $[0, 8]$.

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y mínimos relativos de la función, seguimos estos pasos.

paso 1. calcular la derivada de $f(x)$

1º Bachillerato. Capítulo 8: Derivadas. RESPUESTAS

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 72x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 12x + 72$$

$$f'(x) = 12(x^2 - x + 6)$$

paso 2. calculamos las soluciones de $f'(x)$

No tiene soluciones reales, no tiene máximos o mínimos relativos

crecimiento

La función es siempre creciente pues la derivada es siempre positiva

máximos y mínimos absolutos

Máximos y mínimos absolutos en $f(x)$ en los intervalos $[-7, 2]$ y $[0, 8]$

$$f(x = -7) = 4(-343) - 6(49) + 72(-7)$$

$$f(x = -7) = -1372 - 294 - 504 \rightarrow -2170$$

mínimo absoluto de $f(x)$ $(-7, -2170)$

$$f(x = 8) = 4(512) - 6(64) + 72(8)$$

$$f(x = 8) = 2048 - 384 + 576 \rightarrow 2240$$

máximo absoluto $f(x)$ $(8, 2240)$

45. Determina los máximos y mínimos, absolutos y relativos, de la función $f(x) = |x + 3|$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Escribimos $f(x)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x > -3 \\ -(x + 3) & \text{si } x < -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

No tiene máximos ni mínimos relativos

Máximos y mínimos absolutos:

Sustituimos en $f(x)$ los valores de los extremos del intervalo, es decir sustituimos las x por 3 y -3

$$f(x = 3) \rightarrow 3 + 3 \rightarrow 6$$

máximo absoluto = $(3, 6)$

$$f(x = -3) \rightarrow -(-3 + 3) \rightarrow 0$$

mínimo absoluto = $(0, -3)$

46. El espacio recorrido, en metros por un vehículo a los t segundos de pasar por un control de radar, viene dado por: $y = 15t + 0,8t^2$. ¿Qué velocidad lleva al pasar por el control? ¿Y a los 5 seg? ¿Si continúa así, en qué momento pasará de los 5km/h?

Derivamos la función del espacio recorrido con respecto al tiempo, y así me da la velocidad instantánea.

$$y = 15t + 0.8t^2 \quad dy/dt = 15 + 1.6t$$

La velocidad del vehículo en cualquier momento t es: $15 + 1.6t$ m/s.

Para encontrar la velocidad del vehículo al pasar por el control de radar, pongo que $t=0$ en la expresión de velocidad.

Velocidad al pasar por el control = $15 + 1.6(0) = 15$ m/s

para saber la velocidad del vehículo a los 5 s. pongo que $t=5$ en la expresión de velocidad.

Velocidad después de 5 segundos = $15 + 1.6(5) = 23$ m/s.

para saber en qué momento el vehículo supera los 120km/h. debo pasarlos a m/s.

120KM/H= 33,33 m/s

Resuelvo la ecuación $15 + 1.6t = 33.33$ para encontrar el momento en que el vehículo supera los 120 km/h

$1.6t = 18.33$ $t = 11.46$ segundos.

Por lo tanto, el vehículo superará los 120 km/h después de 11.46 segundos de pasar por el control de radar.

47. Sabiendo que la aceleración es la derivada de la función velocidad, calcula la aceleración del vehículo del ejercicio anterior a los $t = 0$ segundos, y a los $t = 5$ segundos. ¿Cómo es la aceleración? ¿Es constante o variable?

Para encontrar la aceleración del vehículo en cualquier momento, necesitamos derivar la función de velocidad con respecto al tiempo

$$v = 15 + 1.6t \quad dv/dt = 1.6$$

Por lo tanto, la aceleración del vehículo en cualquier momento t es constante y es 1.6 m/s².

Para encontrar la aceleración del vehículo al momento $t = 0$, pongo que la expresión de aceleración en $t = 0$

aceleración en $t=0$, 1.6 m/s².

Para encontrar la aceleración del vehículo después de 5 segundos, pongo que la expresión de aceleración en $t = 5$:

aceleración en $t=5$, 1.6 m/s².

En resumen, la aceleración del vehículo es constante y es igual a 1.6 m/s², independientemente del tiempo transcurrido.

48. La temperatura, T , en grados, de una bola de hierro que se está calentando viene dada por $T = 200 - 500/t$, donde t es el tiempo en segundos. El radio, r , en mm, de la bola cuando la temperatura es de T grados viene dado por $r = 40 + 0.001T$. ¿A qué velocidad varía el radio cuando la temperatura es de 50° , 75° , 100° ? ¿A qué velocidad varía la temperatura a los 30 segundos? ¿Y para $t = 90$ segundos? ¿A qué velocidad varía el radio a los 10 segundos, a los 30 segundos y a los 90 segundos?

Para encontrar la velocidad de cambio del radio con respecto a la temperatura, derivó la expresión del radio con respecto a la temperatura

$$r = 40 + 0.001T \quad dr/dT = 0.001$$

Por lo tanto, la velocidad de cambio del radio con respecto a la temperatura es constante y es igual a 0.001 mm/°.

Para encontrar la velocidad de cambio del radio cuando la temperatura es de 50° , 75° y 100° , uso la expresión del radio:

Cuando $T = 50^\circ$: $r = 40 + 0.001(50) = 40.05$ mm La velocidad de cambio del radio en $T = 50^\circ$ es: $dr/dT = 0.001$ mm/ $^\circ$.

Cuando $T = 75^\circ$: $r = 40 + 0.001(75) = 40.075$ mm La velocidad de cambio del radio en $T = 75^\circ$ es: $dr/dT = 0.001$ mm/ $^\circ$.

Cuando $T = 100^\circ$: $r = 40 + 0.001(100) = 40.1$ mm La velocidad de cambio del radio en $T = 100^\circ$ es: $dr/dT = 0.001$ mm/ $^\circ$.

Para encontrar la velocidad de cambio de la temperatura en cualquier momento, derivo la expresión de la temperatura con respecto al tiempo:

$$T = 200 - 500/t \quad dT/dt = 500/t^2$$

Para encontrar la velocidad de cambio de la temperatura a los 30 segundos, pongo que la expresión de la derivada en $t = 30$:

$$dT/dt \text{ en } t=30 = 500/(30)^2 = 0.56 \text{ }^\circ/\text{s}.$$

Para encontrar la velocidad de cambio de la temperatura a los 90 segundos, pongo que la expresión de la derivada en $t = 90$:

$$dT/dt \text{ en } t=90 = 500/(90)^2 = 0.0617 \text{ }^\circ/\text{s}.$$

Para encontrar la velocidad de cambio del radio en cualquier momento, derivo la expresión del radio con respecto al tiempo:

$$r = 40 + 0.001T \quad dr/dt = 0.001(dT/dt)$$

Por lo tanto, la velocidad de cambio del radio en cualquier momento t es igual a 0.001 veces la velocidad de cambio de la temperatura en ese momento.

Para encontrar la velocidad de cambio del radio a los 10 segundos, pongo que la expresión de la velocidad de cambio del radio en $t = 10$:

$$dT/dt \text{ en } t=10 = 500/(10)^2 = 5 \text{ }^\circ/\text{s} \quad \text{La velocidad de cambio del radio en } t = 10 \text{ es: } dr/dt \text{ en } t=10 = 0.001(5) = 0.005 \text{ mm/s}.$$

Para encontrar la velocidad de cambio del radio a los 30 segundos, pongo que la expresión de la velocidad de cambio del radio en $t = 30$:

$$dT/dt \text{ en } t=30 = 500/(30)^2 = 0.56 \text{ }^\circ/\text{s} \quad \text{La velocidad de cambio del radio en } t = 30 \text{ es: } dr/dt \text{ en } t=30 = 0.001(0.56) = 0.00056 \text{ mm/s}.$$

Para encontrar la velocidad de cambio del radio a los 90 segundos, pongo que la expresión de la velocidad de cambio del radio en $t = 90$:

$$dT/dt \text{ en } t=90 = 500/(90)^2 = 0.0617 \text{ }^\circ/\text{s} \quad \text{La velocidad de cambio del radio en } t = 90 \text{ seg}$$

49. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la Tierra a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 5t^2$. Si se cae un tornillo desde la primera plataforma de la Torre Eiffel, (que está a 57 m de altura), ¿a qué velocidad llegaría al suelo? ¿Y si cayera desde la segunda plataforma (que está a 115m)? ¿Y desde la tercera plataforma (que está a 274 m)?

Para el primer caso, si el tornillo se cae desde una altura de 57 m, la distancia recorrida será:

$$d = 57 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación de distancia, obtenemos: $d = 5t^2$, $57 = 5t^2$

Despejando t : $t \approx 4.01 \text{ s}$

Ahora, podemos calcular la velocidad final:

$$d' = 10t \quad v = 10 \cdot 4,01 = 40,1 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, el tornillo llegaría al suelo a una velocidad de aproximadamente 40,1 m/s si se cae desde la primera plataforma de la Torre Eiffel.

Para el segundo caso, si el tornillo se cae desde una altura de 115 m, la distancia recorrida será:

$$d = 115 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación de distancia, obtenemos:

$$d = 5t^2 \quad 115 = 5t^2$$

Despejando t:

$$t \approx 5,09 \text{ s}$$

Ahora, podemos calcular la velocidad final:

$$d' = 10t \quad v = 10 \cdot 5,09 = 50,9 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, el tornillo llegaría al suelo a una velocidad de aproximadamente 50,9 m/s si se cae desde la segunda plataforma de la Torre Eiffel.

Para el tercer caso, si el tornillo se cae desde una altura de 274 m, la distancia recorrida será:

$$d = 274 \text{ m}$$

Sustituyendo en la ecuación de distancia, obtenemos:

$$d = 5t^2 \quad 274 = 5t^2$$

Despejando t:

$$t \approx 7,34 \text{ s}$$

Ahora, podemos calcular la velocidad final:

$$d' = 10t \quad v = 10 \cdot 7,34 = 73,4 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, el tornillo llegaría al suelo a una velocidad de aproximadamente 73,4 m/s si se cae desde la tercera plataforma de la Torre Eiffel.

50. Se ha lanzado desde la superficie de la Tierra una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 4,9t^2$.

A) Determina la aceleración de la gravedad terrestre.

Tenemos que hacer la segunda derivada de la función $h = 24t - 4,9t^2$:

$$h = 24t - 4,9t^2; \quad h' = 24 - 2(4,9)t; \quad h'' = 2(-4,9) = \boxed{-9,8 \text{ m/s}^2}$$

B) ¿Hasta qué altura llega la piedra?

Para ello en la fórmula sustituyes la t por el tiempo que tarda en llegar a dicha altura (que es cuando se para, es decir, la velocidad es 0):

$$h' = 24 - 2(4,9)t = 0 \quad t = \frac{24}{9,8} = 2,45$$

$$h = 24t - 4,9t^2; \quad h = 24(2,45) - 4,9(2,45)^2 = \boxed{29,39 \text{ metros}}$$

C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura?

Resuelto en B)

D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire?

$$2 \cdot 2,45 = 4,9 \text{ segundos.}$$

E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 10 segundos en llegar al fondo, ¿qué

profundidad tiene la grieta?

Para ello sustituimos el 10 en la fórmula principal:

$$h = 24t - 4,9t^2 ; 24(10) - 4,9(10)^2 = \boxed{250 \text{ metros}}$$

51. Se ha lanzado desde la superficie de la luna una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s, y alcanza una altura $h = 24t - 0,8t^2$

A) Determina la aceleración de la gravedad en la superficie de la luna.

Para ello lo primero que tenemos que hacer es la segunda derivada de la función $h = 24t - 0,8t^2$

$$h = 24t - 0,8t^2 ; h' = 24 - 2(0,8)t ; h'' = 2(-0,8) = \boxed{-1,6 \text{ m/s}^2}$$

La gravedad es de $1,6 \text{ m/s}^2$

B) ¿Hasta qué altura llega la piedra?

$$\text{Cuando la velocidad sea } 0; 24 - 1,6t = 0; t = \frac{24}{1,6} = 15$$

$$h = 24(15) - 0,8(15)^2 = \boxed{175 \text{ metros}}$$

C) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicha altura?

$$24 - 1,6t = 0; t = \frac{24}{1,6} = 15 \quad \boxed{15 \text{ segundos}}$$

D) ¿Durante cuánto tiempo permanece la piedra en el aire?

$$t = 2 \cdot 15 = \boxed{30 \text{ segundos}}$$

E) Se deja caer ahora la piedra por una grieta y tarda 20 segundos en llegar al fondo; ¿qué profundidad tiene la grieta?

Para ello sustituimos el 20 en la fórmula principal

$$h = 24t - 0,8t^2 ; 24(20) - 0,8(20)^2 = \boxed{160 \text{ metros}}$$

52. La distancia, d , en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la luna a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 0,83t^2$.

A) ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en la luna al cabo de 1s, 4s, 8s, 30s?

Lo que tenemos que hacer es calcular la derivada de la función $d = 0,83t^2$, después de esto hay que sustituir los valores en la variable t :

$$d = 0,83t^2 ; d' = 2(0,83)t$$

$$.t_{(1)} = 2(0,83)1 = 1,66 \text{ m/s}$$

$$.t_{(4)} = 2(0,83)4 = 6,64 \text{ m/s}$$

$$.t_{(8)} = 2(0,83)8 = 13,28 \text{ m/s}$$

$$.t_{(30)} = 2(0,83)30 = 49,8 \text{ m/s}$$

B) En la luna se está construyendo una antena de transmisión sobre una base de hormigón que puede agrietarse si cayera un tonillo con una velocidad de 20m/s. Para garantizar que esto no ocurra, ¿cuál debe ser la altura de la antena?

$$d = 0,83t^2 ; d' = 2(0,83)t = 1,66t \text{ esta es la velocidad de caída}$$

$$1,66t = 20 ; t = \frac{20}{1,66} = 12 \text{ segundos}$$

Por último, calculamos h:

$$h = 0,83 \cdot 12^2 = \boxed{120 \text{ metros}} \quad \text{o menos debe ser la altura}$$

53. La distancia, d, en metros, recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Marte a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 1,86t^2$.

A) ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Marte al cabo de 1s, 4s, 8s, 30s?

Lo que tenemos que hacer es calcular la derivada, una vez hecho esto, sustituimos los diferentes valores en la variable t:

$$d = 1,86t^2; \quad d' = 2(1,86)t$$

$$.t_{(1)} = 2(1,86)1 = 3,72 \text{ m/s}$$

$$.t_{(4)} = 2(1,86)4 = 14,88 \text{ m/s}$$

$$.t_{(8)} = 2(1,86)8 = 29,76 \text{ m/s}$$

$$.t_{(30)} = 2(1,86)30 = 111,6 \text{ m/s}$$

B) Determina la aceleración de la gravedad en Marte.

Para ello tendremos que calcular la segunda derivada de la ecuación principal

$$d = 1,86t^2; \quad d' = 2(1,86)t; \quad d'' = 2(1,86) = \boxed{3,72 \text{ m/s}^2}$$

54. La distancia d, en metros. recorrida por un objeto en caída libre en la superficie de Júpiter a los t segundos, viene dada aproximadamente por $d = 11,44t^2$. ¿Qué velocidad llevaría un objeto que cayera en caída libre en Júpiter al cabo de 1 s, 4 s, 8 s, 30 s? Determina la aceleración de la gravedad en Júpiter.

$$V(t) = d' = 22,88t$$

$$V(1) = 22,88 (1) = 22,88 \text{ m/s}$$

$$V(4) = 22,88 (4) = 91,52 \text{ m/s}$$

$$V(8) = 22,88 (8) = 183,04 \text{ m/s}$$

$$V(30) = 22,88 (30) = 686,4 \text{ m/s}$$

Aceleración :

$$\frac{dv}{dt} = a \quad a = v' = 22,88 \text{ m/s}^2$$

55. La función $e = f(t)$ indica el espacio recorrido, e, en metros, por un cuerpo en el tiempo t (en segundos). Determina en cada caso la función velocidad y la función aceleración.

$$a) e = t^2 - 4t + 3 \quad v = 2t - 4 \quad a = 2 \text{ m/s}^2$$

$$b) e = 2t^3 - 5t^2 + 4t \quad v = 6t^2 - 10t + 4 \quad a = 12t - 10 \text{ m/s}^2$$

$$c) e = -t^2 + 4t + 3 \quad v = -2t + 4 \quad a = -2 \text{ m/s}^2$$

$$d) e = (3t - 4)^2 \quad v = 6(3t - 4) \quad a = 18 \text{ m/s}^2$$

la v es la derivada de la e y la a es la derivada de la v

56. Un depósito cilíndrico de 10 metros de diámetro se llena de agua a $0,3 \text{ m}^3$ por minuto. ¿A qué velocidad varía la altura de agua a los 2 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

$$V = \pi r^2 h; \quad 0,3 \text{ m}^3 / \text{min} = \pi \cdot 5^2 \cdot h \quad h = \frac{0,3}{25\pi} = 0,0038 \text{ m/min}$$

$$v(2) = 2 \cdot 0,0038 \text{ m/min} = 0,0076 \text{ m/min}; \quad v(5) = 5 \cdot 0,0038 \text{ m/min} = 0,019 \text{ m/min}$$

57. La distancia, d , en metros, recorrida por un trineo que se desliza por una pendiente helada, a los t segundos, viene dada por $d = 0,2t^2 + 0,01t^3$. Determina la velocidad del trineo a los 2, 4, 7 y 15 segundos. Se sabe que si la velocidad del trineo alcanza los 60 km/h le pueden fallar los frenos, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

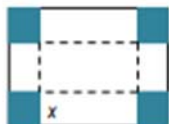
$$V(t) = d' = 0,4t + 0,03t^2$$

$$V(2) = 0,92\text{m/s}$$

$$V(4) = 2,08\text{m/s}$$

$$V(7) = 4,27\text{m/s}$$

$$V(15) = 12,75\text{m/s}$$



Si alcanza los 60 km/h, ¿cuándo debería comenzar a aplicar los frenos para no perder el control?

$$d = 0,2t^2 + 0,01t^3 \quad d' = 0,4t + 0,03t^2 = 60 \quad 0,03t^2 + 0,4t - 60 = 0 ; \quad t = 38,55 \text{ s ,}$$

tiene que frenar

58. Queremos construir cajas usando cartulinas rectangulares de 20 cm por 25 cm. Para ello se corta en cada esquina un cuadrado de lado x , y se dobla. ¿Qué valor debe tener el lado del cuadrado, x , recortado para que las cajas contengan un volumen máximo? Ayuda: Tendrás que escribir el volumen de las cajas en función de x .

$$V = x(25-2x)(20-2x) = 4x^3 - 90x^2 + 500x$$

Derivamos para obtener posibles máximos y mínimos:

$$V' = 12x^2 - 180x + 500 ; \quad 12x^2 - 180x + 500 = 0$$

Tendríamos dos resultados:

1º) 11,3 no es válido pues al cortar no queda cartulina

2º) 3,7

Seguimos derivando, por lo cual tendríamos:

$$V'' = 24x - 180$$

Se sustituye la x y obtenemos -91,2 por lo que es un máximo

59. Unos barriles para almacenar aceite son cilíndricos y tienen una capacidad de 150 litros. Si se desea construirlos de forma que su superficie total sea mínima, ¿cuánto debe medir su altura y el radio de su base?

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

El valor de $V=150$ y luego despejamos h , los litros son dm^3

$$150 = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad h = \frac{150}{\pi r^2}$$

Utilizamos la fórmula de superficie $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

Habiendo despejado anteriormente la h , se sustituye en la ecuación por lo que sería:

$$2\pi r(150/\pi r^2) + 2\pi r = f(r) ; \quad f(r) = 2(150/r^2) + 2\pi r \quad \text{derivamos}$$

$$f'(r) = (-150/r^2) + 2\pi r \quad \text{igualamos a 0 ; } 2\pi r^3 - 150 = 0$$

$r = \sqrt[3]{\frac{150}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm. calculamos la segunda derivada $f''(r) = (300/r^3) + 2\pi$ sustituimos r y nos da positivo por tanto para ese valor tenemos un mínimo, sustituyendo en la expresión de h

$$h = \frac{150}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{75}{\pi}\right)^2}} = \frac{150}{8,29\pi} = 5,76 \text{ dm.}$$

60. Al hacer las pruebas de un nuevo medicamento se comprueba que, según la dosis, x, en miligramos, que se administre, el porcentaje de curaciones, y, viene dado por: $y = 100 - \frac{80}{x+5}$. Sin embargo, el medicamento tiene efectos secundarios ya que perjudica al riñón. El número de enfermos a los que el tratamiento produce efectos secundarios aumenta un 2 % por cada miligramo que se aumenta la dosis. ¿Podrías ayudar a determinar la dosis de medicamento adecuada? Razona la respuesta.

Las curaciones vendrán dadas por $y = 100 - \frac{80}{x+5} - 2x$, queremos calcular el valor de x que haga máxima esta función, para ello derivamos $y' = \frac{80}{(x+5)^2} - 2 = \frac{80}{x^2+10x+25} - 2$, igualamos a 0

$$\frac{80}{x^2+10x+25} - 2 = 0 \quad 80 - 2(x^2+10x+25) = -2x^2 - 20x + 30 = 0$$

$$x_1 = -8,25 \quad x_2 = -1,75$$

Cogeríamos -1,75 porque da un valor inferior a 100.
Al sustituir daría como resultado 78,88.

61. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba y alcanza una altura $h = 1,6t - 0,16t^2$ metros al cabo de t segundos. ¿Qué altura alcanza la piedra?

Lo que debemos hacer es derivar, para calcular la velocidad de subida, e igualar a cero, que es cuando la piedra se para, y obtener el valor de t despejando.

$$h' = 1,6 - 0,32t = 0 \quad ; \quad t = 1,6/0,32 = 5$$

Ahora sustituimos en la ecuación original para averiguar la altura:

$$h = 1,6 \cdot 5 - 0,16 \cdot 5^2 = 4 \text{ metros}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de las siguientes expresiones es la definición de derivada de una función en $x = a$:

a) $\lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$
 e) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

2. La derivada de $y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$ en $x = 1$ es:

a) 0 b) 1/2 c) 1 d) 2

$$y = \sqrt{x} \cdot (x - 1)$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} \cdot (1+h-1)) - (\sqrt{1} \cdot (1-1))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} \cdot h}{h} = \sqrt{1+0} = 1$$

c) 1

3. La derivada de $\frac{x^2+1}{x^3+3}$ en $x = 2$ es:

a) 15/11 b) -10/25 c) -16/121 d) 1/3

$$y = \frac{x^2+1}{x^3+3}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(2+h)^2+1}{(2+h)^3+3} - \frac{2^2+1}{2^3+3}}{h} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(4+4h+h^2)+1}{(8+12h+6h^2+h^3)+3} - \frac{4+1}{8+3}}{h} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2+4h+5}{h^3+6h^2+12h+11} - \frac{5}{11}}{h} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{11(h^2+4h+5) - 5(h^3+6h^2+12h+11)}{11(h^3+6h^2+12h+11)}}{h}$$

$$\rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{11h^2+44h+55-5h^3-30h^2-60h-55}{h \cdot 11(h^3+6h^2+12h+11)} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h^3-19h^2-16h}{h \cdot 11(h^3+6h^2+12h+11)} \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-5h^2-19h-16)}{h \cdot 11(h^3+6h^2+12h+11)} \rightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h^2-19h-16}{11(h^3+6h^2+12h+11)} \rightarrow \frac{-16}{11 \cdot 11} \rightarrow \frac{-16}{121}$$

c) $\frac{-16}{121}$

4. La derivada de $y = e^{x^2+3}$ es:

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$ b) $y' = 2(e^x)^2 \cdot e^x$ c) $y' = 3 + e^{x^2} \cdot 2x$ d) $y' = 2e^{x^2}$

Sabemos que: $y = e^u$; $y' = e^u \cdot u'$

Entonces: $y = e^{x^2+3}$ $y' = e^{x^2+3} \cdot 2x + 0$ $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$

a) $y' = 2x \cdot e^{x^2+3}$

5. La derivada $y = \cos(x^3)$ es:

a) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x^3))$ b) $y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$ c) $y' = -\sin(x^3) \cdot \cos(3x^2)$ d) $y' = 3(\cos(x))^2 \cdot (-\sin(x))$

Sabemos que: $y = \cos(u)$; $y' = -u' \sin(u)$

Entonces: $y = \cos(x^3)$ $y' = -(3x^2) \sin(x^3)$ $y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$

b) $y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$

6. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 5+2x+3x^2-2x^3$ en $x = 1$ es:

a) $y = -2x - 6$ b) $y = x + 8$ c) $y = 2x + 6$ d) $y = 8 + 2x$

1) La ecuación de la recta tangente es:

$$Y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

2) identificar los términos

$$y = 5 + 2x + 3x^2 - 2x^3 \quad a = 1$$

$$3) \text{ cálculos} \quad f(1) = -2 + 3 + 5 = 8 \quad f'(x) = -6x^2 + 6x + 2 \quad f'(1) = 2$$

4) sustituir en la fórmula

$$Y = 8 + 2(x-1) \quad y = 2x + 6$$

Respuesta: c) $y = 2x + 6$

7. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = 3x^2 - 2x^3$ en $x = 0$ es:

- a) $y = 2x + 3$ b) $y = x + 8$ c) $y = 6x$ d) $y = 0$**

1) identificar los términos

$$y = 3x^2 - 2x^3 \quad a = 0$$

$$2) \text{ cálculos} \quad f(0) = 0 \quad f'(x) = -6x^2 + 6x \quad f'(0) = 0$$

3) sustituir en la fórmula

$$y = 0 + 0(x-0) = 0 \quad y = 0$$

Respuesta: d) $y = 0$

8. La función $y = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ en $x = 1$ es:

- a) creciente b) decreciente c) alcanza un mínimo d) alcanza un máximo**

$$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 1 \quad f'(1) = 0$$

(decreciente)		(creciente)
$f'(-2) < 0$	1	$f'(2) > 0$
		$x=1$ mínimo relativo

Respuesta: c) alcanza un mínimo

9. Si la derivada de una cierta función es $y' = x(x-4)$ entonces los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función son:

- a) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente**
b) $x < 0$, decreciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
c) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, creciente; $x > 4$, decreciente
d) $x < 0$, creciente; $0 < x < 4$, decreciente; $x > 4$, creciente

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento de una función debemos operar primero su derivada y a continuación igualarla a 0 para poder encontrar los puntos donde la función varié

$$f'(x) = x(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \quad x(x-4) = 0 \quad x=4 \quad x=0$$

(creciente)		(decreciente)		(creciente)
$f'(-2) > 0$	0	$f'(2) < 0$	4	$f'(6) > 0$

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

La función es decreciente en $(0, 4)$

Respuesta: d)

10. La función $y = 3x^2 - 2x^3$ alcanza los siguientes máximos y mínimos:

- a) (0, 0) máximo y (1, 1) mínimo
- b) (-1, 5) máximo y (1, 1) mínimo
- c) (6, -324) mínimo y (1, 1) máximo
- d) (0, 0) mínimo y (1, 1) máximo

Para estudiar el máximos y mínimos de una función debemos *calcular* primero su derivada y a continuación igualarla a 0 para poder encontrar los puntos donde la función varíe

$$f'(x) = 6x - 6x^2 \quad ; \quad 6x - 6x^2 = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad x = 0$$

(decreciente)		(creciente)		(decreciente)
$f'(-2) < 0$	0	$f'(0.5) > 0$	1	$f'(2) < 0$

Para calcular los máximos y mínimos relativos debemos de sustituir en la ecuación principal

$$x=0 \quad \text{mínimo} \quad f(0)=0 \quad (0,0)$$

$$x=1 \quad \text{máximo} \quad f(1)=1 \quad (1,1)$$

Respuesta: d)

Matemáticas I
1º Bachillerato
Capítulo 9: Probabilidad

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-072022

Fecha y hora de registro: 2015-08-13 18:28:37.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Realizados por:

1º Bachillerato 22-23

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Indica si son, o no, fenómenos aleatorios:

Primero explicar lo que es un fenómeno aleatorio: Un fenómeno o experimento aleatorio es aquel que, manteniendo las mismas condiciones en la experiencia, no se puede predecir el resultado.

- a) La superficie de las provincias españolas. No
- b) Anotar el sexo del próximo bebé nacido en una clínica determinada. Si
- c) El área de un cuadrado del que se conoce el lado. No
- d) Tirar tres dados y anotar la suma de los valores obtenidos. Si
- e) Saber si el próximo año es bisiesto. No

2. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: “Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar”.

El conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio es: $E = \{a, e, i, o, u\}$.

Estos son los cinco únicos resultados posibles, mutuamente excluyentes entre sí, lo que significa que no pueden salir ambas al mismo tiempo.

3. Escribe el conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio: “Tirar una chincheta y anotar si cae de punta o no”.

El conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio es: $E = \{\text{punta, no punta}\}$.

Estos son los dos únicos resultados posibles, mutuamente excluyentes entre sí, lo que significa que la chincheta solo puede caer de una manera u otra, pero no ambas al mismo tiempo.

4. Inventa dos sucesos del experimento aleatorio: Tirar dos monedas

Dos sucesos que se pueden definir para este experimento aleatorio son:

$E = \{CC, CX, XC, XX\}$

- Aparecer al menos una cara: este suceso se cumple si, después de tirar dos monedas, al menos una de ellas cae con la cara hacia arriba, Es importante destacar que este suceso también se cumple si ambas monedas caen con la cara hacia arriba.

$A = \{CC, XX\}$

- Ambas monedas mostrarán el mismo lado: este suceso se cumple si después de tirar dos monedas, ambas caen mostrando el mismo lado, es decir, ambas caen con la cara hacia arriba o con la cruz.

5. En el juego de la lotería, indica dos sucesos respecto a la cifra de las unidades del primer Premio.

Espacio muestral: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Suceso A: obtener un número par $\{0, 2, 4, 6, 8\}$

Suceso B: obtener un número menor que 8 $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

6. Escribe tres sucesos aleatorios del experimento aleatorio sacar una carta de una baraja española.

Espacio muestral: $\{\text{As de bastos, As de espadas...}\}$

Suceso A: sacar una de bastos $\{1b, 2b, 3b, 4b, 5b, 6b, 7b, Sb, Cb, Rb\}$

Suceso B: sacar una carta par $\{2c, 4c, 6c, Sc, Rc, 2b, 4b, 6b, Rb, 2e, 4e, 6e, Se, Re, 2o, 4o, 6o, So, Ro\}$

Suceso C: sacar un As $\{\text{as de oros, as de copas, as de espadas y as de bastos}\}$

7. Al sacar una carta de una baraja española, llamamos B al suceso sacar un as y A al suceso sacar una figura. Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$

$B = \{ \text{As de Oros, As de Bastos, As de Copas, As de Espadas} \}$

$A = \{ \text{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE} \}$

$A \cup B = \{ \text{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE, As de oros, As de bastos, As de copas, As de Espadas} \}$

$A \cap B = \emptyset$; son sucesos incompatibles

$A - B = \{ \text{SO, CO, RO, SB, CB, RB, SC, CC, RC, SE, CE, RE} \}$

8. Sea A el suceso tirar un dado y sacar un número mayor que 4. Escribe el suceso contrario de A

El suceso sacar un número mayor que cuatro es $A = \{5, 6\}$

Por tanto, el suceso contrario es que se saquen números menores que 4 o igual a 4, luego:

$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$

9. Un suceso y su suceso contrario, ¿cómo son, compatibles o incompatibles? Razona tu respuesta

A y $\bar{A}$ son sucesos incompatibles, ya que no puede ocurrir a la vez un suceso y su contrario.

10. En el experimento aleatorio, sacar una carta de una baraja española, escribe tres sucesos incompatibles con el suceso “sacar un as”

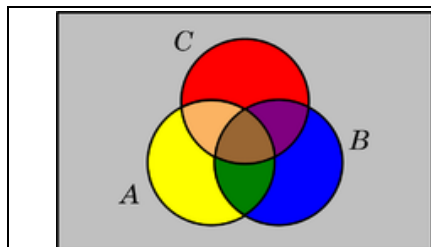
Suceso sacar un as = A

Suceso no sacar un as = $\bar{A}$

Suceso sacar un 6 = B

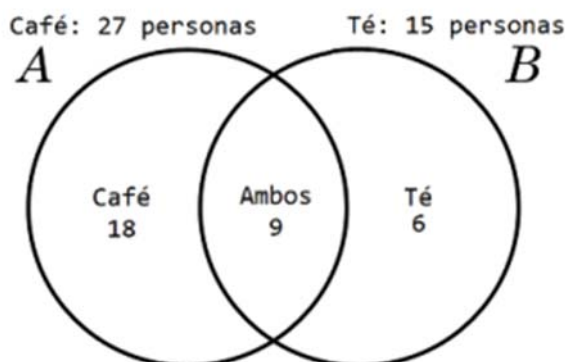
Suceso sacar un rey = C

11. Utiliza un diagrama de Venn para escribir a $A \cup B \cup C$ como unión de conjuntos disjuntos.



La unión de $A \cup B \cup C$ mediante conjuntos disjuntos estaría formada por los conjuntos determinados por los 7 colores

12. Considera ahora un diagrama de Venn con sólo dos conjuntos, y representa en él la siguiente situación: Se sabe que, en un grupo de trabajo de 35 personas, hay 15 personas que toman té, 27 que toman café y 2 personas que no toman ninguna bebida.



A) ¿Suman más de 35? Eso es porque hay personas que toman té y café, ¿cuántas?

Hay 2 personas que no toman nada, por lo tanto 33 personas en total toman alguna bebida.

$$27 + 15 = 42 ; \quad 42 - 33 = 9$$

Hay 9 personas que toman té y café.

B) ¿Cuántas personas sólo toman té y cuántas toman sólo café?

Café: $27 - 9 = 18$

Té: $15 - 9 = 6$

C) Vamos a llamar A al conjunto de las personas que toman té, y B al de las que toman café. Nombra con letras a los conjuntos siguientes e indica de cuántas personas están formados: a) Toman café y té.**b) No toman ni café ni té. c) Toman té o bien toman café. d) Toman té y no toman café.**

Toman té: $A = 15$ Toman café: $B = 27$

a) Toman café y té: $A \cap B = 9$

b) No toman ni café ni té: $\bar{A} \cap \bar{B} = 2$

c) Toman té o bien toman café: $A \cup B$

d) Toman té y no toman café: toman únicamente té $A \cap \bar{B} = 6$

D) De entre las personas que toman café, ¿cuántas toman también té? A este conjunto lo nombramos A/B.

Toman café 27

únicamente café 18

toman café y también té 9 personas

$A/B = 9$

E) ¿Cuántas personas no toman café? Nómbrese con letras.

Toman únicamente té: $A \cap \bar{B} = 6$

No toman nada: $\bar{A} \cap \bar{B} = 2$

No toman café: $\bar{B} = 8$

F) ¿Cuántas personas toman al menos una de las dos bebidas? Compara el resultado con el de las personas que no toman ninguna de las dos bebidas.

No toman ninguna de las dos bebidas: $\bar{A} \cap \bar{B} = 2$

Toman sólo café: 18

Toman sólo té: 6

Toman las 2: 9

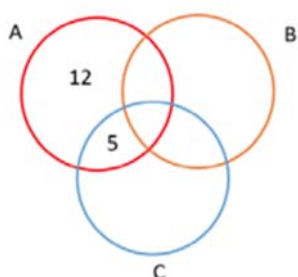
En total 33 personas toman una de las dos bebidas frente a las 2 personas que no toman ninguna de las dos, que suman las 35 personas.

13. En el mismo lugar del problema anterior, con 35 personas, ahora se ha añadido a la máquina de bebidas el chocolate (C), y ahora se sabe que 12 personas toman solo té, que 5 personas toman té y chocolate, pero no café, que 20 personas no toman ni té ni chocolate. Es posible saber cuántas personas toman al menos una de las tres bebidas; cuántas, de entre las que tomaban café, tomaban también chocolate... Investiga si tienes datos suficientes para conocerlo todo, o debes ampliar la encuesta para conocer nuevos datos.

Datos:

- Total: 35 personas
- Bebidas:
 - Té: A
 - Café: B
 - Chocolate: C
- 12 personas solo toman té
- 5 personas toman té y chocolate, pero no café
- 20 no toman ni té ni chocolate

Para ver los datos de una manera más clara realizamos un diagrama de Venn:



Las 20 personas no pueden ser incluidas de momento ya que no sabemos los suficientes datos y habría que hacer otra encuesta. Si sumamos el conjunto de personas obtenido de los datos ($12+5+20=37$) obtenemos que el resultado total de las personas que tendría que haber es 37 cuando el número real de personas que hay es 35, por lo que se debería realizar otra encuesta ya que el resultado de la anterior es erróneo.

14. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja sea una espada.

En una baraja estándar de 52 cartas, hay 13 cartas de espadas. Por lo tanto, la probabilidad de sacar una carta de espadas al azar de una baraja es de $13/52$, lo cual equivaldría a un 25% de probabilidad de sacar una espada.

15. Para saber la probabilidad de que un recién nacido sea zurdo, ¿te basarías en el estudio de las frecuencias relativas o lo asignarías por simetría?

Sería preferente basarse en si será zurdo o no mediante el estudio de las frecuencias relativas.

16. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar un 5 al tirar el dado? ¿Y de no sacar un múltiplo de 3? ¿Y de no sacar un número menor que 2?

No sacar un 5

En un dado de seis caras, hay cinco caras que no muestran el número 5, por lo que la probabilidad de no sacar un 5 al tirar un dado es de $5/6$, esta es la probabilidad de que salga cualquier número que no sea 5, ya que todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

No sacar un múltiplo de 3

En un dado de seis caras, los múltiplos de 3 son 3 y 6, por lo que hay 4 caras que no muestran un múltiplo de 3. Por lo tanto, la probabilidad de no sacar un múltiplo de 3 al tirar un dado es de $4/6$ o $2/3$.

No sacar número menor que 2

En un dado de seis caras, el número más pequeño que 2 es 1. Por lo tanto, la probabilidad de no sacar un número menor que 2 al tirar un dado es de $5/6$.

17. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

$E = \{CC, CX, XC, XX\}$

No sacar ninguna cara

Cuando se lanza una moneda dos veces, hay cuatro posibles resultados: cara-cara, cara-cruz, cruz-cara y cruz-cruz. De estos cuatro resultados, solo hay uno en el que no se saca ninguna cara, que es el resultado cruz-cruz.

Por lo tanto, la probabilidad de no sacar ninguna cara al tirar una moneda dos veces es de $\frac{1}{4}$.

$$P(X \cap X) \rightarrow P(X) \cdot P(X) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4}$$

Hay 0.25 de probabilidad de sacar dos veces cruz

Sacar al menos una cara

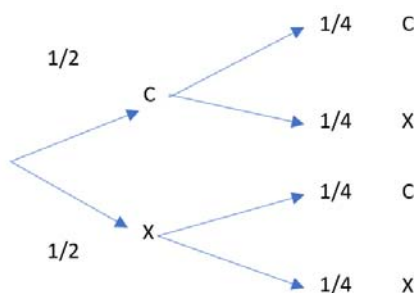
La probabilidad de sacar al menos una cara al tirar una moneda dos veces es el complemento de la probabilidad de no sacar ninguna cara en dos lanzamientos consecutivos, es decir:

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

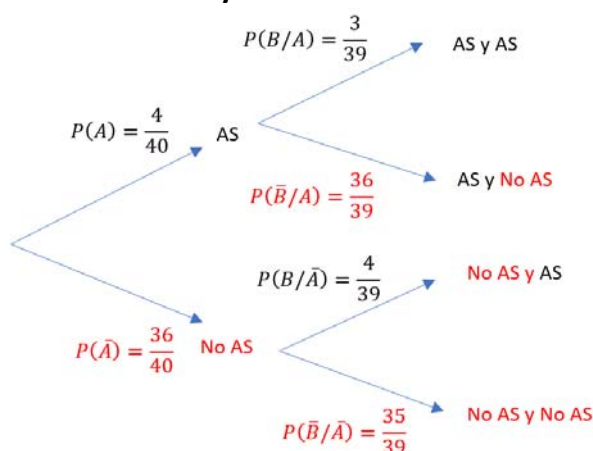
Esto significa que hay una probabilidad del 75% de sacar al menos una cara al lanzar una moneda dos veces.

$$P(\text{Sacar una C}) \rightarrow 1 - P(X \cap X) \rightarrow 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Hay 0.75 de probabilidad de sacar al menos una C



18. Dibujar un diagrama de árbol de los sucesos A y B. A = Sacar un as y $\bar{A}$ = no sacar un as en la primera extracción. B = Sacar un as y $\bar{B}$ = No sacar un as en la segunda.



¿Cuál es la probabilidad de sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera?

La probabilidad de sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera es $P(B/\bar{A}) = \frac{4}{39}$

¿Y la de no sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera?

La probabilidad de sacar as en la segunda extracción condicionado a no haberlo sacado en la primera es $P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{35}{39}$

¿Cuál es la probabilidad de sacar dos ases?

Se calcula $P(A \cap B)$ multiplicando $P(A)$ por $P(B/A) \rightarrow \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

¿Y la de sacar un solo as?

Se suma $P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \rightarrow$

Se calcula $P(A \cap \bar{B})$ multiplicando $P(A) \cdot P(\bar{B}/A) \rightarrow \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39} = \frac{6}{65}$

Se calcula $P(\bar{A} \cap B)$ multiplicando $P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A}) \rightarrow \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{6}{65}$

$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{6}{65} + \frac{6}{65} = \frac{12}{65}$

19. En el diagrama de árbol anterior indica cual es la probabilidad de “no salen 2 ases” y la de “no sale ningún as”.

Cuál es la probabilidad de “no salen 2 ases”

No sacar as es la suma de las probabilidades de sacar un solo as o ninguno, pero también el suceso contrario de sacar dos ases.

Calculamos el suceso contrario de $P(A \cap B) = \frac{1}{130}$

Se subtrae $P(A \cap B)$ de 1 para obtener su contrario

$1 - \frac{1}{130} = \frac{129}{130} = P(\overline{A \cap B})$

Cuál es la probabilidad de “no sale ningún as”

La probabilidad de no sacar ningún As es $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}/\bar{A}) \rightarrow \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$

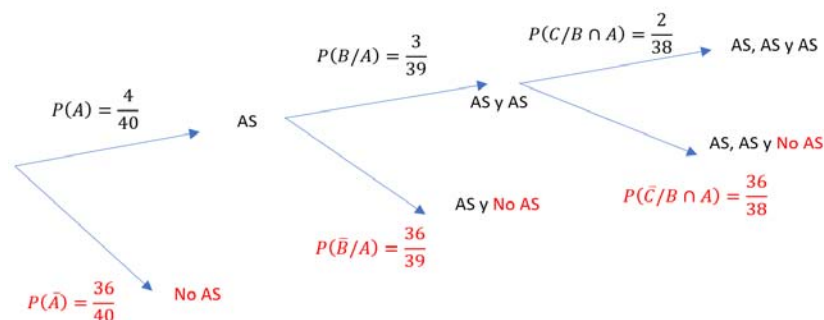
20. Sacando tres cartas seguidas, ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres ases? Con y sin reemplazo

Con reemplazo (llamando **A** a la primera carta, **B** a la segunda y **C** a la tercera), basta con calcular

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/B \cap A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{1}{1000}$

Sin reemplazo (llamando **A** a la primera carta, **B** a la segunda y **C** a la tercera), sería

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/B \cap A) \rightarrow \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{1}{2470}$



21. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de que salga un seis doble.

$$P(6 \cap 6) = P(6) \cdot P(6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

22. Al tirar dos veces un dado calcula la probabilidad de sacar al menos un 6. Ayuda: Quizás te sea más fácil calcular la probabilidad de no sacar ningún 6, y utilizar el suceso contrario.

$$P(\bar{6} \cap \bar{6}) = P(\bar{6}) \cdot P(\bar{6}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$P(\text{al menos un } 6) = 1 - P(\text{no sacar } 6) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

23. Lanzamos dos dados que no estén trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades.

a) Comprueba que $P(A) = 5/36$ (casos favorables: 2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2) y que $P(B) = 8/36$ (casos favorables: (1,3), (2,4), ...).

b) Calcula las probabilidades de: $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$; $P(A \cap B^c)$; $P(A^c \cap B)$; $P(A^c \cap B^c)$.

c) Calcula $P(A/B)$; $P(A/B^c)$; $P(A^c/B)$.

a)

- Para calcular la $P(A)$ primero debemos encontrar el número total de resultados posibles que es, al tener ambos dados seis caras, $6 \cdot 6 = 36$.

Todos los casos en que la suma de ambos dados sea igual a ocho son las siguientes: 2+6; 3+5; 4+4; 5+3; 6+2. Por lo que la probabilidad de A es igual a número de casos favorables/ número de casos posibles dando como resultado: $5/36$.

- Para calcular la probabilidad de B contamos con los datos que nos ofrece el enunciado; dos números que pueden diferir en dos unidades: (1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4). Por lo que la $P(B) =$ número de casos favorables/ número de casos posibles: $8/36$.

b)

- Para calcular $P(A \cap B)$, Los únicos dos resultados que se repiten en ambos suceso, son: (3,5) y (5,3).

Por lo tanto, la probabilidad de $(A \cap B) =$ número de casos favorables/ número de casos posibles, que es igual a $2/36$. $1/18$.

- Para obtener $(A \cup B)$ utilizamos la fórmula siguiente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 5/36 + 8/36 - 2/36 = 11/36$$

- Para calcular la intersección de A y no B; es decir, $P(A \cap B^c)$, apuntamos los resultados que están en A y no en B: (2,6), (4,4), (6,2).

$$P(A \cap B^c) = \text{número de casos favorables} / \text{casos posibles} = 3/36. \quad 1/12.$$

- Para calcular la intersección de no A y B; es decir, $P(A^c \cap B)$, apuntamos los resultados que están en B pero no se cumplen en A: (1,3), (2,4), (4,6), (3,1), (4,2), (6,4).

$$P(A^c \cap B) = \text{número de casos favorables} / \text{casos posibles} = 6/36. \quad 1/6.$$

- Para calcular la intersección de no A y no B; es decir, $P(A^c \cap B^c)$, notamos los resultados que no están ni en A ni en B: (1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5) y (6,6).

$$\text{Por lo que } P(A' \cap B') = \text{número de casos favorables} / \text{número de casos posibles} = 25/36.$$

c)

- Para calcular la probabilidad condicional $P(A/B)$, que es la probabilidad de que la suma de las dos caras sea 8 dado que los números difieren en dos unidades, debemos considerar solo los casos en los que ocurre B. De modo que restringimos el espacio muestral a los casos en los que los números difieren en dos unidades: (1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3) y (6,4). De estos solo hay dos casos en los que la suma de las dos caras es igual a 8: (3,5) y (5,3)

$$\text{Por lo que } P(A/B) = \text{número de casos favorables} / \text{número de casos posibles de B} = 2/8. \quad 1/4.$$

- Para calcular $P(A/B^c)$, es la probabilidad de que la suma de las dos caras sea 8 ya que los números no difieren en dos unidades. Debemos considerar los casos en los que B^c ocurre. Es decir, tenemos que restringir E a los casos en los que los números no difieren en dos unidades: (1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (2,6), (3,2), (3,3), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,5) y (6,6). De todos estos casos, solo hay tres que su suma es igual a 8: (2,6), (4,4), (6,2).

$$P(A/B^c) = \text{número de casos favorables} / \text{número total de casos posibles de } B^c = 3/28.$$

- Por último, para calcular $P(A^c/B)$, que es la probabilidad de que la suma de las dos caras no sea 8 dado que los números difieren en dos unidades: (1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (3,1), (4,2), (5,3), (6,4). De todos estos, solo hay seis que no suman ocho: (1,3), (2,4), (4,6), (3,1), (4,2) y (6,4).

$$P(A^c/B) = \text{número de casos favorables} / \text{número total de casos posibles de A} = 6/8. \quad 3/4.$$

24. La probabilidad del suceso A es 2/3, la del suceso B es 3/4 y la de la intersección es 5/8. Halla: (a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos. (b) La probabilidad de que no ocurra B. (c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B. (d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B.

a)

- La probabilidad de que se verifique alguno de los sucesos sea A o B se puede calcular mediante la fórmula de la unión de los sucesos...

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2/3 + 3/4 - 5/8 = 19/24.$$

La probabilidad de que se verifique A o B es 19/24.

b)

- La probabilidad de que no ocurra B se puede calcular restando a la probabilidad de B ($3/4$) la probabilidad total (1).

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 3/4 = 1/4.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que no ocurra B es $1/4$.

c)

- La probabilidad de que no se verifiquen ni A ni B se puede calcular restando a la probabilidad de la unión de A y B la probabilidad total (1).

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 19/24 = 5/24.$$

Para concluir, la probabilidad de que no se verifiquen ni A ni B es $5/24$.

d) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B se puede calcular mediante la fórmula de la probabilidad condicional

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = 5/8 / 3/4 = 5/6.$$

La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B es $5/6$.

25. En un supermercado se ha estudiado el número de clientes que compran tres productos A, B y C. Del estudio se ha obtenido que un 14% de los clientes compra el producto A y un 12% compra el producto B. Además, un 4% compra A y B, un 2% compra A y C y ningún cliente que compre C compra también B.

(a) ¿Cuántos clientes compran únicamente el producto B?

(b) Sabiendo que un cliente ha comprado A, ¿cuál es la probabilidad de que también haya comprado C, pero no B?

a) Para calcular el número de clientes que compran únicamente el producto B, utilizamos la fórmula de la suma de probabilidades:

$$P(B) = P(B \text{ y no A y no C}) + P(B \text{ y A y no C}) + P(B \text{ y no A y C})$$

$$P(A) = 0,14 \quad P(B) = 0,12 \quad P(A \text{ y B}) = 0,04 \quad P(A \text{ y C}) = 0,02. \quad P(A \cup B \cup C) = 1. \text{ De esto podemos sacar...}$$

$$P(\text{no A y no C}) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0,14 - 0 = 0,86$$

$$P(B \text{ y no A y no C}) = P(B) - P(A \text{ y B}) = 0,12 - 0,04 = 0,08$$

$$P(B \text{ y A y no C}) = P(A \text{ y B}) = 0,04$$

$$P(B \text{ y no A y C}) = P(B) - P(A \text{ y B}) - P(C \text{ y B}) = 0,12 - 0,04 - 0 = 0,08$$

Sacamos como resultado que el número de clientes que compran únicamente el producto B $P(B \text{ y no A y no C}) = 0,08$ que representa el 8% de los clientes.

b) Para calcular la probabilidad de que un cliente que ha comprado A también haya comprado C pero no B utilizamos nuevamente la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P(C \text{ y no B} / A) = P(A \cap C) / P(A \cup B \cup C) = 0,02 / 1 = 0,02$$

La probabilidad de que un cliente que haya comprado el producto A también haya comprado el producto C pero no B es 0,02.

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ y $P(A \cup B) = 7/15$, hallar:

(a) La probabilidad de que se verifique A y B.

(b) La probabilidad de que se verifique A y no B.

(c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

(d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B.

a)

- La probabilidad de que se verifique A y B se calcula utilizando la fórmula de intersección de eventos:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1/3 + 1/5 - 7/15 = 1/15.$$

La probabilidad de que se verifique A y B es 1/15

b)

- La probabilidad de que se verifique A y no B se calcula utilizando la misma fórmula:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 1/3 - 1/15 = 4/15.$$

La probabilidad de que se verifique A y no B es 4/15

c)

- La probabilidad de que no se verifiquen ni A ni B se obtiene mediante la regla de complemento:

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 7/15 = 8/15.$$

La probabilidad de que no se verifiquen ni A ni B es **8/15**

d)

- La probabilidad de que no se verifique A si no se ha verificado B se calcula utilizando la fórmula de Bayes:

Calculamos primero $P(B^c)$ utilizando la regla de complemento:

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 1/5 = 4/5$$

$$P(A^c/B^c) = P(A^c \cap B^c)/P(B^c) = 8/15 / 4/5 = 2/3.$$

La probabilidad de que no se verifique A si no se ha verificado B es 2/3

26. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Sabiendo que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ y $P(A \cup B) = 7/15$, hallar:

a) La probabilidad de que se verifique A y B.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{7}{15}; \quad P(A \cap B) = \frac{1}{15}$$

b) La probabilidad de que se verifique A y no B

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$$

c) La probabilidad de que no se verifique ni A ni B.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right) = \frac{8}{15}$$

d) La probabilidad de que no se verifique A, si no se ha verificado B

$$P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{4}{5}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

27. Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}$

Calcula $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\bar{A}/B)$, $P(\bar{B}/A)$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{5}$$

28. Se considera dos sucesos A y B tales que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Calcula razonadamente: a) $P(A \cap B)$, b) $P(B)$, c) $P(\bar{B}/A)$ y c) $P(\bar{A}/\bar{B})$

$$a) P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$b) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{12}$$

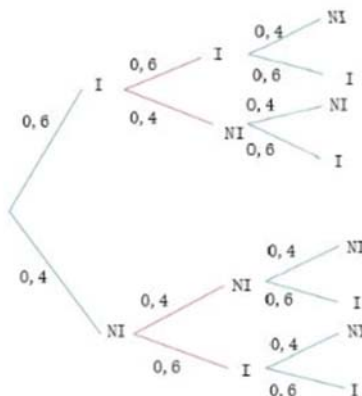
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = P(B); P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$c) P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$d) P(\bar{A}/\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

29. Dibuja en tu cuaderno un diagrama en árbol para tres incendios, y calcula la probabilidad de que al menos uno haya sido por negligencia siendo $P(N) = 0.4$.



$$P(\text{al menos 1 intencionado}) = 1 - P(\text{ninguno intencionado}) = 1 - (0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4) = 0,936$$

$$P(\text{al menos 1 intencionado}) = 1 - P(\text{ninguno intencionado}) = 1 - (0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4) = 0,936$$

30. En una aeronave se han instalado tres dispositivos de seguridad: A, B y C. Si falla A se pone B en funcionamiento, y si también falla B empieza a funcionar C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada dispositivo son: $P(A) = 0.96$; $P(B) = 0.98$ y $P(C) = 0.99$. a) Calcula la probabilidad de que fallen los tres dispositivos. b) Calcula la probabilidad de que todo vaya bien.

$$a) P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,96 = 0,04;$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,98 = 0,02;$$

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,99 = 0,01$$

$$P(\text{fallo}) = P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 0,04 \cdot 0,02 \cdot 0,01 = 0,000008$$

$$b) P(\text{todo bien}) = 1 - P(\text{fallo}) = 1 - 0,000008 = 0,999992$$

31. Una fábrica de muñecas desecha normalmente el 0.3 % de su producción por fallos debidos al azar. Calcula la probabilidad de que: a) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar ambas. b) Al coger dos muñecas al azar haya que desechar sólo una. c) Al coger dos muñecas al azar no haya que

desechar ninguna d) Verificamos 4 muñecas, calcula la probabilidad de desechar únicamente la tercera muñeca elegida.

Sea D...desechar muñeca , $P(D) = 0,003$

a) $P(D \cap D) = 0,003 \cdot 0,003 = 0,000009$

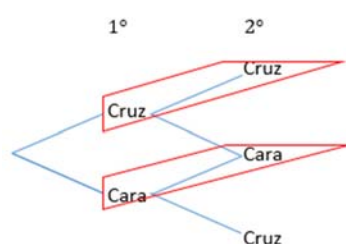
b) $P(D \cap \bar{D}) + P(\bar{D} \cap D) = 0,003 \cdot 0,997 + 0,997 \cdot 0,003 = 0,005982$

c) $P(\bar{D} \cap \bar{D}) = 0,997 \cdot 0,997 = 0,994$

d) $P(\bar{D} \cap \bar{D} \cap D \cap \bar{D}) = 0,997 \cdot 0,997 \cdot 0,003 \cdot 0,997 = 0,00297$

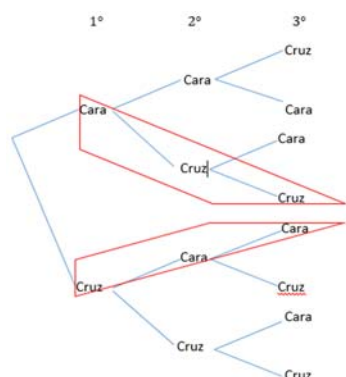
32. Lanzamos una moneda hasta que aparezca dos veces seguidas del mismo lado. Calcula las probabilidades de que: A) La experiencia termine al segundo lanzamiento. B) Termine al tercer lanzamiento. C) Termine en el cuarto. D) Termine a lo sumo en el cuarto lanzamiento (es decir, que termine en el segundo o en el tercero o en el cuarto).

A)



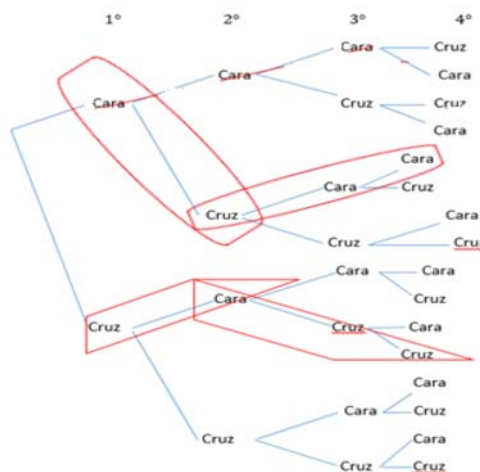
$$P(2^\circ \text{ lanzamiento}): P(\text{Cruz} \cap \text{Cruz}) + P(\text{Cara} \cap \text{Cara}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

B)



$$P(3^\circ): P(\text{Cruz} \cap \text{Cara} \cap \text{Cara}) + P(\text{Cara} \cap \text{Cruz} \cap \text{Cruz}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

C)



$$P(2^\circ): P(Cara \cap Cruz \cap Cara \cap Cara) + P(Cruz \cap Cara \cap Cruz \cap Cruz) = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

D)

Y para hacer el D es tan fácil como sumar todos los resultados del A), B) y C)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

33. Se ha hecho un estudio estadístico sobre accidentes de tráfico y se han determinado las siguientes probabilidades en la tabla de contingencia.

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0.27		0.56
Accidente con sólo daños materiales (M)			
Totales	0.58		1

a) Copia la tabla en tu cuaderno y complétala. b) Determina las siguientes probabilidades: $P(V \cap C)$; $P(V \cap U)$; $P(M \cap C)$; $P(M \cap U)$; $P(V)$; $P(M)$; $P(C)$ y $P(U)$. c) Calcula $P(U|V)$; $P(C|V)$; $P(V|U)$; $P(V|C)$. ¿Son dependientes o independientes los sucesos: accidente con víctimas y accidente en carretera?

a)

	Accidente en carretera (C)	Accidente en zona urbana (U)	Totales
Accidente con víctimas (V)	0.27	0.29	0.56
Accidente con sólo daños materiales (M)	0.31	0.13	0.44
Totales	0.58	0.42	1

b)

$$P(V \cap C) = 0,27 \quad ; \quad P(V \cap U) = 0,29 \quad ; \quad P(M \cap C) = 0,31 \quad ; \quad P(M \cap U) = 0,13 \\ P(V) = 0,56 \quad ; \quad P(M) = 0,44 \quad ; \quad P(C) = 0,58 \quad ; \quad P(U) = 0,42$$

c)

$$P(U / V) = \frac{P(U \cap V)}{P(V)} = 0,52 \quad ; \quad P(C / V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = 0,48 \\ P(V / U) = \frac{P(V \cap U)}{P(U)} = 0,69 \quad ; \quad P(V / C) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = 0,47$$

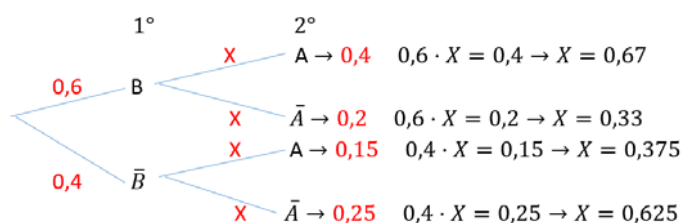
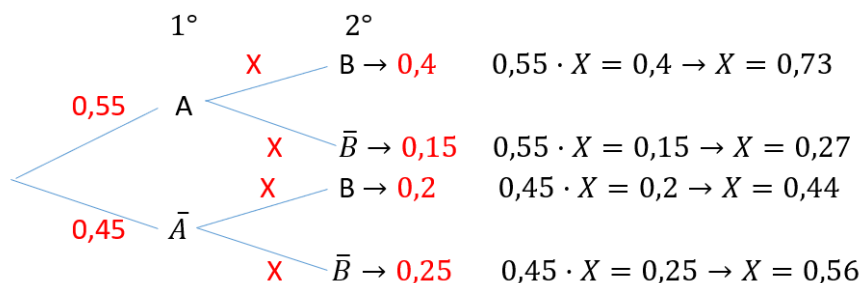
34. Inventa una tabla de contingencia considerando que los accidentes puedan ser de carretera (C) o Urbanos (U), pero que ahora los clasificamos en Leves (L), Grave (G) o Mortales (M). Observa que lo fundamental para confeccionar la tabla es que los sucesos sean incompatibles dos a dos.

	Acc en Carretera (C)	Acc en Carretera Urbana	Totales
Leve	0,27	0,29	0,56
Grave	0,29	0,14	0,44
Mortal	0,60	0,40	1

35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol.

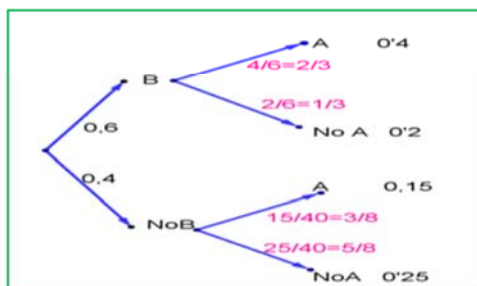
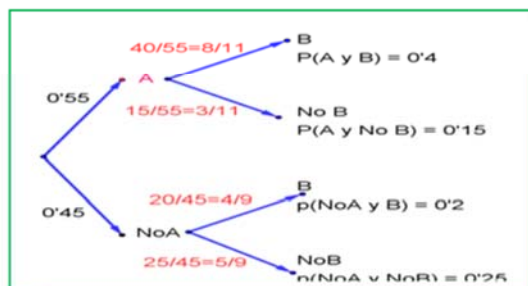
	A	No $A = \bar{A}$	
B	0.4	0.2	0.6
No $B = \bar{B}$	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1

Solución

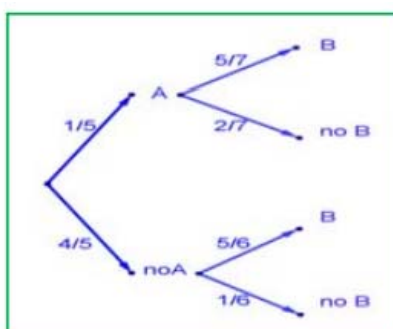


35. Dada la tabla de contingencia, construye dos diagramas de árbol

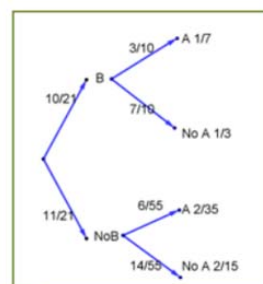
	A	No $A = \bar{A}$	
B	0.4	0.2	0.6
No $B = \bar{B}$	0.15	0.25	0.4
	0.55	0.45	1



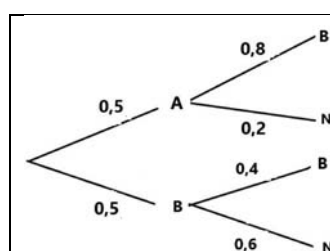
36. Dado el diagrama de árbol del margen, construye la tabla de contingencia, y después el otro diagrama de árbol.



	A	noA	Totales
B	$5/35 = 1/7$	$20/30 = 1/3$	$10/21$
No B	$2/35$	$4/30 = 2/15$	$11/21$
Totales	$7/35 = 1/5$	$24/30 = 4/5$	1



37. Tenemos dos urnas, A y B. La primera con 8 bolas blancas y 2 bolas negras. La segunda con 4 bolas blancas y 6 bolas negras. Se saca una bola al azar, de una de las dos urnas, también al azar y resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la urna A?



$$\begin{aligned}
 P(N) &= P(A \cap N) + P(B \cap N) = \\
 &= P(A) \cdot P(N/A) + P(B) \cdot P(N/B) = \\
 &= 0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,6 = 0,4
 \end{aligned}$$

$$P(A/N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A) \cdot P(N/A)}{P(N)} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,4} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

38. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta.

	Medicamento (M)	Placebo ($\bar{M}$)	
Curados (C)	50	30	80
No curados ($\bar{C}$)	10	10	20
	60	40	100

Se utilizan esos valores para asignar probabilidades. Calcula:

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento.

$$\text{La fórmula que debemos aplicar es: } P(M/C) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C/M) \cdot P(M)}{P(C)}$$

$$\rightarrow P(M) = \frac{M \text{ total}}{n^{\circ} \text{ de personas}} = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$\rightarrow P(C) = \frac{C \text{ total}}{n^{\circ} \text{ de personas}} = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$\rightarrow P(C/M) = \frac{n^{\circ} \text{ de enfermos curados con el medicamento}}{M \text{ total}} = \frac{50}{60} = 0,833$$

$$\rightarrow P(M/C) = \frac{P(C/M) \cdot P(M)}{P(C)} = \frac{0,833 \cdot 0,6}{0,8} = 0,625$$

La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento es de un 62.5%.

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo.

$$\text{La fórmula que debemos aplicar es: } P(\bar{M}/C) = \frac{P(\bar{M} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C/\bar{M}) \cdot P(\bar{M})}{P(C)}$$

$$\rightarrow P(\bar{M}) = \frac{\bar{M} \text{ total}}{n^{\circ} \text{ de personas}} = \frac{40}{100} = 0,4$$

$$\rightarrow P(C) = \frac{C \text{ total}}{n^{\circ} \text{ de personas}} = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$\rightarrow P(C/\bar{M}) = \frac{n^{\circ} \text{ de enfermos curados con el placebo}}{\bar{M} \text{ total}} = \frac{30}{40} = 0.75$$

$$\rightarrow P(\bar{M}/C) = \frac{P(C/\bar{M}) \cdot P(\bar{M})}{P(C)} = \frac{0.75 \cdot 0.4}{0.8} = 0.375$$

La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo es de un 37.5%.

39. Se sabe que, en cierta población, la probabilidad de ser hombre y daltónico es un doceavo y la probabilidad de ser mujer y daltónica es un veinticincoavo. La proporción de personas de ambos sexos es la misma. Se elige una persona al azar.

Hacemos la tabla de contingencia y el diagrama de árbol

$$\frac{1}{12} + x = \frac{1}{2} ; x = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{25} + x = \frac{1}{2} ; x = \frac{23}{50}$$

	<i>H</i>	<i>M</i>	
<i>D</i>	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{37}{300}$
<i>D^c</i>	$\frac{5}{12}$	$\frac{23}{50}$	$\frac{263}{300}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

a) Si la persona elegida es hombre, hallar la probabilidad de que sea daltónico.

$$P(D/H) = \frac{P(D \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

b) Si la persona elegida es mujer, hallar la probabilidad de que sea daltónica.

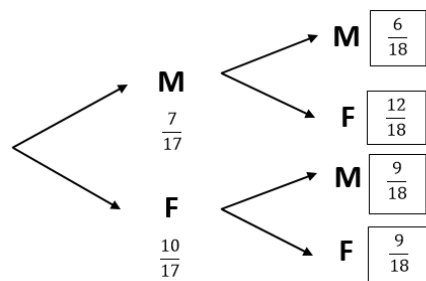
$$P(D/M) = \frac{P(D \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{25}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca daltonismo?

$$P(D) = \frac{1}{12} + \frac{1}{25} = \frac{37}{300}$$

40. Una caja de caramelos contiene 7 caramelos de menta y 10 de fresa. Se extrae al azar un caramelo y se sustituye por dos del otro sabor. A continuación, se extrae un segundo caramelo. Hállese la probabilidad de que:

a) El segundo caramelo sea de fresa



Antes de comenzar a operar realizamos el dibujo sabiendo que pueden ocurrir dos casos: Si al escoger uno al azar sale uno de menta, tendríamos 6 caramelos de menta y 12 de fresa. Si sale uno de fresa, tendríamos 9 de menta y 9 de fresa.

Una vez que sabemos esto, para calcular la probabilidad de que salga de fresa utilizamos:

$$P(F) = P(M \cap F) + P(F \cap F) = P(M) \cdot P(F/M) + P(F) \cdot P(F/F)$$

$$P(F) = \frac{7}{17} \cdot \frac{12}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{29}{51} = 0.569$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el segundo caramelo que salga sea de fresa es del 56.9%.

b) El segundo caramelo sea de del mismo sabor que el primero.

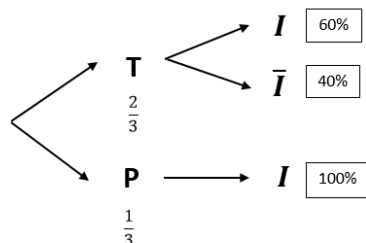
Teniendo en cuenta todos los datos del apartado anterior podemos calcular la probabilidad de que el segundo caramelo tenga el mismo sabor con esta ecuación:

$$P[(M \cap M) \cup (F \cap F)] = P(M \cap M) + P(F \cap F) = P(M) \cdot P(M/M) + P(F) \cdot P(F/F)$$

$$P[(M \cap M) \cup (F \cap F)] = \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{18} + \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{18} = \frac{22}{51} = 0.4314$$

Por tanto, la probabilidad de que el segundo caramelo sea del mismo sabor que el primero es del 43.14%.

41. En un avión de línea regular existe clase turista y clase preferente. La clase turista ocupa las dos terceras partes del pasaje y la clase preferente el resto. Se sabe que todos los pasajeros que viajan en la clase preferente saben hablar inglés y que el 40% de los pasajeros que viajan en clase turista no saben hablar inglés. Se elige un pasajero del avión al azar.



a) Calcúlese la probabilidad de que el pasajero elegido sepa hablar inglés.

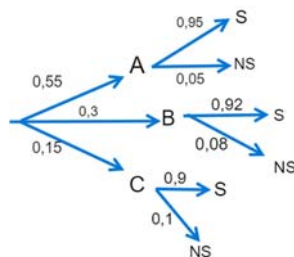
$$P(I) = P(T \cap I) + P(P \cap I) = P(T) \cdot P(I/T) + P(P) \cdot P(I/P) = \frac{2}{3} \cdot 0.6 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{15}$$

b) Si se observa que el pasajero elegido sabe hablar inglés, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en la clase turista?

$$P(T/I) = \frac{P(T \cap I)}{P(I)} = \frac{P(T) \cdot P(I/T)}{P(I)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0.6}{\frac{11}{15}} = \frac{0.4}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11}$$

42. Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre A no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre B ni el 10 % de los atendidos por el sastre C. El 55 % de los arreglos se encargan al sastre A, el 30 % al B y el 15 % restante al C. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.



NS= No satisfecho

$$P(NS) = P(A \cap NS) + P(B \cap NS) + P(C \cap NS) = P(A) \cdot P(NS/A) + P(B) \cdot P(NS/B) + P(C) \cdot P(NS/C) =$$

$$= 0,55 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0665$$

La probabilidad de que el cliente no quede satisfecho es de 0,0665.

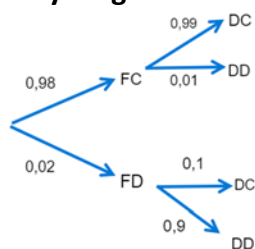
b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre A.

$$P(A/NS) = \frac{P(A \cap NS)}{P(NS)} = \frac{0,55 \cdot 0,05}{0,0665} = \frac{55}{133} = 0,414$$

La probabilidad de que el cliente no satisfecho haya sido atendido por el sastre A es de 0,414.

43. En un proceso de fabricación de móviles se detecta que el 2 % salen defectuosos. Se utiliza un dispositivo para detectarlos que resulta que detecta el 90 % de los móviles defectuosos, pero señala como defectuosos un 1 % que no lo son.

Ayuda: Utiliza primero un diagrama en árbol y luego una tabla de contingencia.



	Fabricado correcto(FC)	Fabricado defectuoso(FD)	TOTAL
Detectado como Correcto(DC)	0,9702	0,002	0,9722
Detectado como Defectuoso(DD)	0,0098	0,018	0,0278
	0,98	0,02	1

A) Calcula la probabilidad de que sea correcto un móvil que el dispositivo ha calificado como defectuoso.

$$P(FC/DD) = \frac{P(FC \cap DD)}{P(DD)} = \frac{0,0098}{0,0278} = 0,3525$$

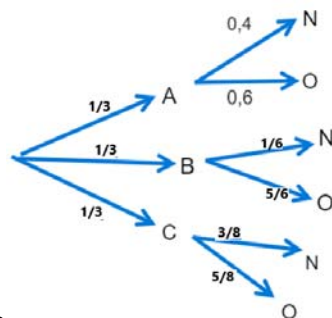
La probabilidad de que un móvil sea ciertamente defectuoso es de 0,3525.

B) Calcula la probabilidad de que sea defectuoso un móvil que el dispositivo ha calificado como correcto.

$$P(FD/DC) = \frac{P(FD \cap DC)}{P(DC)} = \frac{0,002}{0,9722} = 0,002$$

La probabilidad de que el móvil calificado como correcto sea defectuoso es de 0,002.

44. Se tienen 3 cajas, A, B y C. La caja A tiene 10 bolas de las cuales 4 son negras. La caja B tiene 6 bolas con una bola negra. La caja C tiene 8 bolas con 3 negras. Se coge una caja al azar y de esa caja se saca una bola, también al azar. Comprueba que la probabilidad de que la bola sea negra es 113/360.

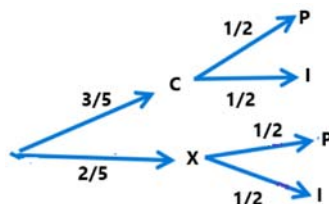


N.....negra ; O....otra

$$P(N) = P(A \cap N) + P(B \cap N) + P(C \cap N) = P(A) \cdot P(N/A) + P(B) \cdot P(N/B) + P(C) \cdot P(N/C) = \\ = \left(\frac{1}{3} \cdot 0,4\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}\right) = \frac{113}{360}$$

SOLUCIÓN: Sí se cumple.

45. Tenemos una moneda trucada cuya probabilidad de obtener cara es $\frac{3}{5}$ y la de cruz es $\frac{2}{5}$. Si sale cara se escoge al azar un número del 1 al 8, y si sale cruz, se escoge un número del 1 al 6. Calcula la probabilidad de que el número escogido sea impar.



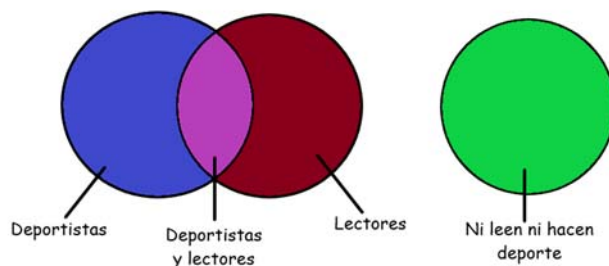
Utilizamos el teorema de la probabilidad total para calcular la probabilidad de que se escoja un número impar:

$$P(\text{Impar}) = P(\text{Cara}) \cdot P(\text{Impar/Cara}) + P(\text{Cruz}) \cdot P(\text{Impar/Cruz})$$

$$P(\text{Impar}) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) ; P(\text{Impar}) = \left(\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{2}{10}\right) \quad P(\text{Impar}) = \frac{1}{2}$$

46. Al analizar las actividades de ocio de un grupo de trabajadores fueron clasificados como deportistas o no deportistas y como lectores o no lectores. Se sabe que el 55 % de los trabajadores se clasificaron como deportistas o lectores, el 40 % como deportistas y el 30 % lectores. Se elige un trabajador al azar: a) Calcúlese la probabilidad de sea deportista y no lector. b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista.

Se representan las diferentes categorías de trabajadores en un diagrama de Venn



El 55 % de los trabajadores son deportistas o lectores.

Lo que significa que el 45 % restante no son deportistas ni lectores.

Por lo tanto, el tamaño del rectángulo exterior es el 100 % y la suma de las áreas de deportistas y lectores sería el 55% del total.

También sabemos que del 55% de los lectores y deportistas:

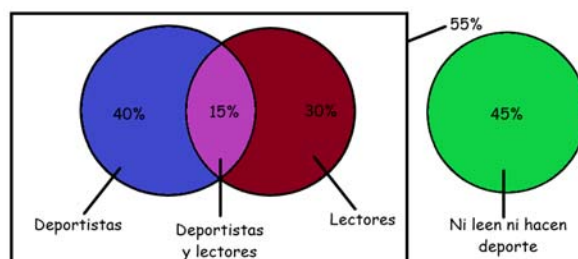
- El 40 % de los trabajadores son deportistas
- El 30 % de los trabajadores son lectores
- Por lo tanto, el porcentaje de personas que leen y hacen deporte es de un 25%

Para calcular el último dato se suman los porcentajes de lectores y deportistas “puros”, al hacerlo, el porcentaje es superior a 55%, lo cual nos indica que existe un porcentaje de personas que realizan

ambas actividades, para calcular el porcentaje de personas que realizan ambas actividades utilizamos la siguiente fórmula en este caso

$$\%Violeta = (\%Azul + \%Rojo) - 55\%$$

Con los datos dichos, quedaría el siguiente diagrama de Venn



Una vez planteado el diagrama de Venn podemos contestar a las cuestiones planteadas

a) Probabilidad de sea deportista y no lector

La probabilidad de que sea deportista no lector sería la porción representada en azul.

Para calcular esta, debemos tener en cuenta que hay que restar el porcentaje de personas que leen y hacen deporte al porcentaje total de personas que hacen deporte

Es decir

$$\%Solo\ deportista = \%Azul$$

Lo que significa que

$$\%Solo\ deportista = \%Azul - \%Rosa$$

$$\%Solo\ deportista = 40\% - 15\%$$

$$\%Solo\ deportista = 25\%$$

b) Sabiendo que el trabajador elegido es lector, calcúlese la probabilidad de que sea deportista

L = Lector D = Deportista

$$P(D \cup L) = 0,55 \quad ; \quad P(D) = 0,40 \quad ; \quad P(L) = 0,30$$

$$P(D/L) = \frac{P(D \cap L)}{p(L)} = \frac{0,15}{0,30} = 0,5$$

Es decir, la probabilidad para que sea deportista cuando es lector es de un 50%

47. Tres máquinas A, B y C fabrican tornillos del mismo tipo. La probabilidad de que un tornillo fabricado en la máquina A sea defectuoso es 0.01, de que lo sea uno fabricado en B es 0.02 y de que lo sea si ha sido manufacturado en C es 0.03 En una caja se mezclan 120 tornillos: 15 de la máquina A, 30 de la B y 75 de la C. a) Calcúlese la probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso. b) Elegido un tornillo al azar resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina B?

120 tornillos ; 15 de la A ; 30 de la B y 75 de la C

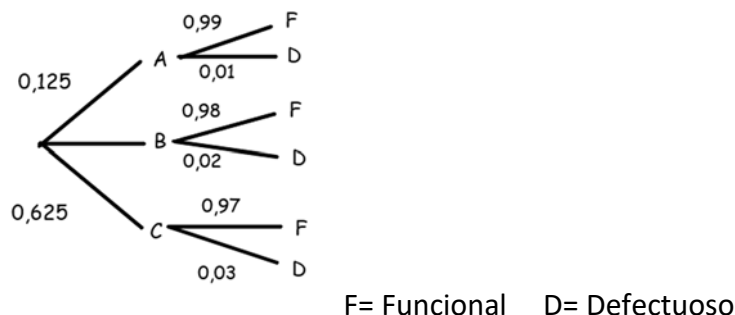
$$P(A) = \frac{15}{120} = 0,125 \quad ; \quad P(B) = \frac{30}{120} = 0,25 \quad ; \quad P(C) = \frac{75}{120} = 0,625$$

12,5% de los tornillos son de la A

25% de los tornillos son de la B

62,5% de los tornillos son de la C

a) Hacemos un árbol de probabilidad para visualizarlo de mejor manera



$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) = P(A) \cdot P(F/A) + P(B) \cdot P(F/B) + P(C) \cdot P(F/C)$$

$$P(F) = 0,125 \cdot 0,99 + 0,25 \cdot 0,98 + 0,625 \cdot 0,97 = 0,975$$

Existe un 92,5% probabilidad de que al coger un tornillo aleatorio sea funcional

b) Para calcular la probabilidad de que un tornillo sea defectuoso, sabiendo que solo existen dos sucesos posibles y uno es conocido podemos aplicar la siguiente fórmula

$$P(D) = 1 - P(F) ; \quad P(D) = 1 - 0,975 ; \quad P(D) = 0,025$$

Es decir, la probabilidad de que al coger un tornillo aleatorio salga uno defectuoso es de un 2,5%
Probabilidad de que ese tornillo defectuoso haya sido creado por la maquina B

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,25 \cdot 0,02}{0,025} = 0,2$$

48. Una escuela de natación ofrece cursos de iniciación y perfeccionamiento en las categorías prebenjamín (7-8 años), benjamín (9-10 años) y alevín (11-12 años). La siguiente tabla contiene la información con el número de nadadores matriculados en cada curso:

	Pre-benjamín	Benjamín	Alevín	Total
Iniciación	120	70	10	200
Perfeccionamiento	40	90	150	280
Total	160	160	160	480

Se elige al azar un nadador de la escuela.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de iniciación?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento o bien sea alevín?

c) Si el nadador elegido es un benjamín, ¿cuál es la probabilidad de que esté en el curso de perfeccionamiento?

d) Si el nadador elegido está en el curso de iniciación, ¿cuál es la probabilidad de que sea benjamín?

Para comenzar el ejercicio, visualizando la tabla hacemos un diagrama de árbol con los datos que tenemos.

Calculamos el porcentaje de personas en iniciación y perfeccionamiento que hay

$$\text{Iniciación} = \frac{200}{480} = 0,416 = 41,6\%$$

$$\text{perfeccionamiento} = \frac{280}{480} = 0,583 = 58,3\%$$

Ahora calculamos los porcentajes de personas que están de las distintas categorías en ambos niveles

Iniciación

$$(I \cap Pb) = \frac{120}{200} = 0,6 \quad ; \quad (I \cap B) = \frac{70}{200} = 0,35 \quad ; \quad (I \cap A) = \frac{10}{200} = 0,05$$

Perfeccionamiento

$$P(Perf \cap Pb) = \frac{40}{280} = 0,142 \quad ; \quad P(Perf \cap B) = \frac{90}{280} = 0,321 \quad ; \quad P(Perf \cap A) = \frac{160}{280} = 0,57$$

Con los datos que tenemos ya podemos crear un diagrama de árbol

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En un colegio se selecciona un grupo de 200 estudiantes de los cuales todos estudian francés o inglés. De ellos 150 estudian inglés y 70 estudian francés. ¿Cuántos estudian francés e inglés?
En otro centro escolar se estudian varios idiomas: francés, inglés, alemán, italiano. Se seleccionan también 200 estudiantes de los cuales, 150 estudian inglés, 70 francés y 40 ambos idiomas, ¿cuántos estudiantes de ese centro no estudian ni francés ni inglés?

- Estudiantes-> total 200
- Inglés-> total 150 = $\frac{3}{4}$
- Francés-> total 70 = $\frac{7}{20}$

$$P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F); \quad P(I \cap F) = P(I) + P(F) - P(I \cup F);$$

$$P(I \cap F) = \frac{3}{4} + \frac{7}{20} - \frac{200}{200}; \quad P(I \cap F) = \frac{1}{10}$$

Ya que la probabilidad es de $\frac{1}{10}$, del total, 20 alumnos estudian inglés y francés.

- Estudiantes -> total 200 = $\frac{200}{200}$
- Inglés -> total 150 = $\frac{3}{4}$
- Francés -> total 70 = $\frac{7}{20}$
- Ambos -> total 40 = $\frac{1}{5}$

150 - 40 = 110 solo estudian inglés

70 - 40 = 30 solo estudian francés

110 que estudian inglés más 30 que estudian francés más 40 que estudian ambos idiomas es igual a 180 estudiantes de inglés, francés o ambos.

200 - 180 = 20 estudiantes que hacen otros idiomas, (ni francés ni inglés).

2. Lanzamos un dado. Calcula la probabilidad de: a) Sacar un número impar. b) No sacar un 3. c) Sacar un número mayor que 3. d) Sacar un número mayor que 3 y que sea impar. e) Sacar un número mayor que 3 o bien que sea impar.

$$\text{Regla de Laplace: } P(\text{suceso}) = \frac{\text{numero de casos favorables}}{\text{numero de casos posibles}}$$

$$a) \text{ probabilidad de que salga impar} = \frac{\text{numeros impares}}{\text{numeros de caras}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$b) \text{ probabilidad que salga 3} = \frac{1}{6}$$

$$c) \text{ probabilidad que salga un numero mayor que tres} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$d) \text{ probabilidad de que salga un numero impar mayor que 3} = \frac{1}{6}$$

$$e) \text{ probabilidad de que salga un numero mayor que 3 o impar} = \frac{5}{6}$$

3. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

C - chico al azar

- a) $P(C \cap A) = P(C)P(A/C); \quad P(C \cap A) = \left(\frac{24}{38}\right)\left(\frac{1}{3}\right); \quad P(C \cap A) = \frac{4}{19}$
- b) *Chicas con ojos azules* $\frac{1}{2}$ de 14 = 7; *chicos con los ojos azules* $\frac{1}{3}$ de 24 = 8,
en total hay 15 con los ojos azules
 $P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = \frac{24}{38} + \frac{15}{38} - \frac{8}{38} = \frac{31}{38}$

4. Antonio, Juan y Jorge tienen una prueba de natación. Antonio y Juan tienen la misma probabilidad de ganar, y doble a la probabilidad de Jorge. Calcula la probabilidad de que gane Juan o Jorge

Voy a llamar $P(A)$ la probabilidad de que Antonio gane, $P(J)$ la probabilidad de que Juan gane y $P(G)$ la probabilidad de que Jorge gane.

Se sabe que $P(A) = P(J)$, y que $P(J) = 2P(G)$.

Además, las probabilidades de ganar de los tres competidores deben sumar 1, es decir:

$$P(A) + P(J) + P(G) = 1$$

Puedo utilizar estas ecuaciones para obtener las probabilidades de cada competidor:

$$P(A) + P(J) + P(G) = 1$$

$$P(A) = P(J)$$

$$P(J) = 2P(G)$$

Reemplazando $P(A)$ y $P(J)$ en la segunda ecuación, obtengo:

$$P(J) = 2P(G) = P(A) = P(J)$$

Lo que implica que $P(G) = 1/5$, $P(J) = 2/5$ y $P(A) = 2/5$.

Entonces, la probabilidad de que gane Juan o Jorge es la suma de las probabilidades de que gane Juan y de que gane Jorge:

$$P(J) + P(G) = 2/5 + 1/5 = 3/5$$

Por lo tanto, la probabilidad de que Juan o Jorge ganen la prueba de natación es 3/5.

5. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz. Solución: A) 1/2; B) 1/2; C) 3/4; D) 1/4; E) 1/2.

Moneda de 50 cts {C, X} moneda de 1 € {c, x}

a) $P(c) = \frac{1}{2}$

b) $P(C \cap x) + P(X \cap c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c) $P(\text{al menos 1 cara}) = 1 - P(X \cap x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

d) $P(X \cap x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

e) $P(C \cap x) + P(X \cap c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

6. Lanzamos tres monedas. Calcula las probabilidades de:

A) No salga ninguna cara.

B) Salga al menos una cara.

C) Salgan dos caras y una cruz.

A) $P(X \cap X \cap X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ probabilidades hay de que no salga ninguna cara

B) Teniendo en cuenta que, si la probabilidad de que no salga ni una cara es $1/8$, la probabilidad de que salga por lo menos una cara es el resto, es decir $1 - 1/8 = 7/8$ probabilidades.

C) $P(C \cap X \cap C) + P(C \cap C \cap X) + P(X \cap X \cap C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ probabilidades de salir dos caras y una cruz.

7. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, ... sea 12.

Regla de Laplace: $P(Z) = \frac{\text{nº de casos favorables } Z}{\text{nº de casos posibles}}$

En este caso las posibilidades que tenemos en total son:

Dado 1: 6 posibilidades

Dado 2: 6 posibilidades

Total: $6 \times 6 = 36$ combinaciones totales

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$P(1) = 0$; $P(2) = \frac{1}{36}$; $P(3) = \frac{2}{36}$; $P(4) = \frac{3}{36}$; $P(5) = \frac{4}{36}$; $P(6) = \frac{5}{36}$; $P(7) = \frac{6}{36}$; $P(8) = \frac{5}{36}$;
 $P(9) = \frac{4}{36}$; $P(10) = \frac{3}{36}$; $P(11) = \frac{2}{36}$; $P(12) = \frac{1}{36}$

8. ¿Qué es más probable al tirar tres dados, que la suma de sus caras superiores sea 9 o sea 10? Escribe el suceso "sea 9" o el suceso "sea 10" y calcula las probabilidades de sus sucesos elementales.

Con tres dados, el nº de casos posibles son 6^3 , o lo que es lo mismo 216

a) Para calcular $P(9)$: Considerando que el tercer dado puede tomar valores del 1-6, los que pueden ser válidos para sumar 9 son representados en la siguiente tabla, en la que aparecen las sumas de los valores de los otros dos dados (el resto de los valores se descartan):

	1	2	3	4	5	6
1	-	-	4(+5)	5(+4)	6(+3)	7(+2)
2	-	4(+5)	5(+4)	6(+3)	7(+2)	8(+1)
3	4(+5)	5(+4)	6(+3)	7(+2)	8(+1)	-
4	5(+4)	6(+3)	7(+2)	8(+1)	-	-
5	6(+3)	7(+2)	8(+1)	-	-	-
6	7(+2)	8(+1)	-	-	-	-

Por tanto, de los 216 casos posibles, se tiene que 25 son favorable para $P(9)$ y según Laplace:

$$P(9) = \frac{25}{216}$$

b) Para calcular $P(10)$: Al igual que en el caso anterior, el tercer dado toma valores del 1-6; se representan en la tabla los posibles valores que puedan sumar 10 (Los que no cumplen dicha condición se descartan):

	1	2	3	4	5	6
1	-	-	4(+6)	5(+5)	6(+4)	7(+3)
2	-	4(+6)	5(+5)	6(+4)	7(+3)	8(+2)
3	4(+6)	5(+5)	6(+4)	7(+3)	8(+2)	9(+1)
4	5(+5)	6(+4)	7(+3)	8(+2)	9(+1)	-
5	6(+4)	7(+3)	8(+2)	9(+1)	-	-
6	7(+3)	8(+2)	9(+1)	-	-	-

Por lo tanto, de los 216 casos probables, para $P(10)$ son favorables 27 y según Laplace:

$$P(10) = \frac{27}{216}$$

SOLUCIÓN: Lo más probable que salga suma 10

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Llama A al suceso "Salga cara y un número par", B al suceso "Salga cruz y un número primo" y al suceso C "Salga un número primo". Calcula las probabilidades de A, B y C. ¿Cómo son estos sucesos? Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles son incompatibles.

$$\text{Regla de Laplace} = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ casos posibles}}$$

La siguiente tabla representa tanto los valores tomados por el dado como las caras de la moneda:

	1	2	3	4	5	6
c	C1	<u>C2</u>	<u>C3</u>	C4	<u>C5</u>	C6
x	X1	<u>X2</u>	<u>X3</u>	X4	<u>X5</u>	<u>X6</u>

$$A = (\text{cara y par}); \quad B = (\text{cruz y par}); \quad C = (\text{Nº primo})$$

$$a) P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$b) P(A \cap B) = 0; \text{incompatibles} \quad P(A \cap C) = \frac{1}{2}; \text{Compatibles} \quad P(B \cap C) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}; \text{Compatibles}$$

10. Lanzamos una moneda 50 veces, ¿Qué es más probable, obtener 50 caras seguidas u obtener en las 25 tiradas cara y en las 25 siguientes cruz? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN:

- La probabilidad de los dos casos es la misma porque la moneda no guarda los datos de sus tiradas, es decir, no tiene memoria.

11. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos obtener cara y obtener cruz al tirar una moneda.

$$\begin{aligned} & \begin{array}{cc} C \text{ (cara)} & X \text{ (cruz)} \end{array} \\ & P(C) = 2 \cdot P(X) \quad \text{y} \quad P(C) + P(X) = 1 \\ & 2P(X) + P(X) = 1 \rightarrow 3P(X) = 1 \rightarrow P(X) = \frac{1}{3}; \quad P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ & P(X) = \frac{1}{3} \quad P(C) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

12. Tres chicos y dos chicas juegan un torneo de ajedrez. Todos los chicos tienen idéntica probabilidad de ganar, y todas las chicas, también. Pero la probabilidad de ganar una chica es doble de la de ganar un chico. Calcula la probabilidad de que un chico gane el torneo.

· Chico 1,2,3 = probabilidad x cada uno · Chica 1,2 = probabilidad $2x$ cada una

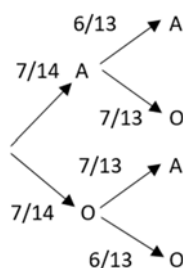
Por tanto, debemos calcular cuánto vale x . $7x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{7}$

Es decir, la probabilidad de que gane un chico el torneo es $1/7$.

13. Siete parejas de novios están en una habitación. Se seleccionan dos personas al azar. Calcula la probabilidad de: a) Sean un chico y una chica. b) Sean una pareja de novios. Ahora se escogen 4 personas al azar. Calcula la probabilidad de: c) Haya al menos una pareja de novios. d) No haya ninguna pareja de novios.

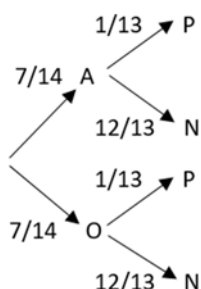
Chica: A; chico: O Pareja: P; No pareja: N

a)



$$P(A \cap O) = P(A) \cdot P(O/A) + P(O) \cdot P(A/O) = \frac{7}{14} \cdot \frac{7}{13} + \frac{7}{14} \cdot \frac{7}{13} = \frac{49}{182} + \frac{49}{182} = \frac{98}{182} = \frac{7}{13} = 0,54$$

b)



$$P(P) = P(A \cap P) + P(O \cap P) = P(A) \cdot P(P/A) + P(O) \cdot P(P/O) = \frac{7}{14} \cdot \frac{1}{13} + \frac{7}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{7}{182} + \frac{7}{182} = \frac{14}{182} = \frac{1}{13} = 0,08$$

$$c) P(\text{al menos una pareja}) = 1 - \frac{14}{14} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{11} = 1 - \frac{13440}{24024} = 1 - \frac{80}{143} = \frac{63}{143} = 0,44$$

$\frac{14}{14}$ es la probabilidad de sacar a una persona; $\frac{12}{13}$ es la probabilidad de que la segunda persona seleccionada no sea la pareja de la anterior; $\frac{10}{12}$ es la probabilidad de que la tercera persona que se elija no sea la pareja ni de la anterior ni de la primera; $\frac{8}{11}$ es la probabilidad de que la cuarta persona escogida no sea pareja de ninguna de las anteriores personas elegidas.

$$d) P(N) = \frac{14}{14} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{13440}{24024} = \frac{80}{143} = 0,56$$

14. Tenemos un dado truco de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

I: 1, 3, 5

P: 2, 4, 6

PR: 2, 3, 5

Los números de casos posibles no serían 6 ya que los impares tienen doble probabilidad, serían 9.

$$P(I) = \frac{n^{\circ} \text{ de casos favorables}}{n^{\circ} \text{ de casos posibles}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

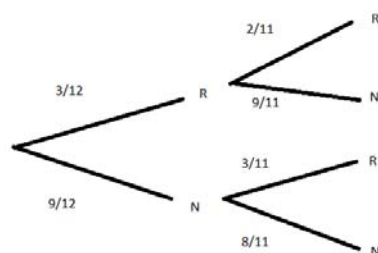
$$P(PR) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

$$P(I \cap PR) = P(3) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(I \cup PR) = P(1) + P(2) + P(3) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

15.- En un grupo de 15 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos al azar. Calcula las posibilidades de que: a) Ambas sean rubias. b) Al menos una sea rubia. c) Ninguna sea rubia. d) Una sea rubia y la otra no

R (que sea rubia) N (que no sea rubia)



a) $P(R \cap R) = P(R) P(R/R) = 3/12 \cdot 2/11 = 6/132 = \underline{1/22}$

b) $P(\text{al menos una sea rubia}) = 1 - P(N \cap N) = P(N) P(N/N) = 1 - 9/12 \cdot 8/11 = \underline{5/11}$

c) $P(N \cap N) = P(N) P(N/N) = 9/12 \cdot 8/11 = \underline{6/11}$

d) $P(N \cap R) + P(R \cap N) = P(N) P(R/N) + P(R) P(N/R) = 9/12 \cdot 9/11 + 3/12 \cdot 3/11 = \underline{15/22}$

16. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

A) Realizamos un diagrama cartesiano donde se indican los posibles valores de cada dado al lanzarlos:

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B) Realizamos un diagrama cartesiano donde se indican los posibles valores de cada dado al lanzarlos:

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

$$P(B) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

C) Realizamos un diagrama cartesiano donde se indican los posibles valores de cada dado al lanzarlos:

Dado1/dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2	2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3	3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	3-6
4	4-1	4-2	4-3	4-4	4-5	4-6
5	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6
6	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6

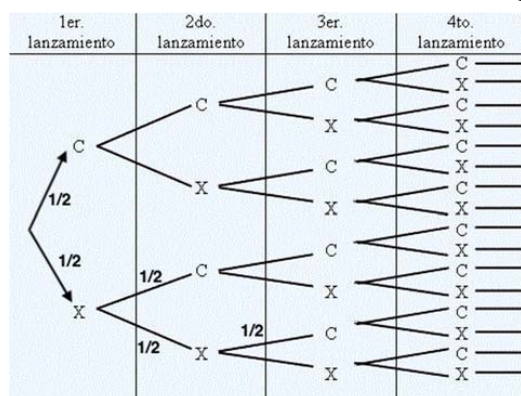
$$P(C) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

17. Lanzamos una moneda hasta que salga cara. Calcula la probabilidad de que: A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento. B) Salga cara después del octavo lanzamiento.

A) Salga cara antes del cuarto lanzamiento: Será la probabilidad de que salga cara en el primer lanzamiento, $(1/2)$ o que salga cara en el segundo lanzamiento, $((1/2) \cdot (1/2))$ o que salga cara en el tercer lanzamiento, $((1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2))$.

$$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

B) Salga cara después del octavo lanzamiento: El camino seguido corresponde al que sale X en ocho



lanzamientos y en el noveno sale cara. Como la probabilidad de que salga X es siempre $(1/2)$, y la que salga cara también es $(1/2)$, la probabilidad de que salga cara después del octavo lanzamiento es:

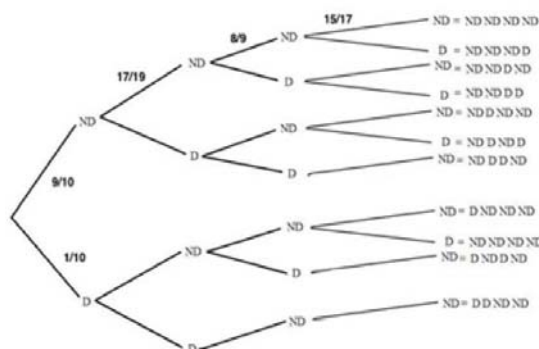
$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}$$

18. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

$$1^{\text{a}} \text{ Ext: } P(D) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}; \quad P(ND) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

$$2^{\text{a}} \text{ Ext: } P(ND/ND) = \frac{17}{19}; \quad 3^{\text{a}} \text{ Ext: } P(ND/ND) = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}; \quad 4^{\text{a}} \text{ Ext: } P(ND/ND) = \frac{15}{17}$$

$$P(ND \cap ND \cap ND \cap ND) = \frac{9}{10} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{17} = \frac{12}{19}$$



19. Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores es 7. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

$$P(3/\text{suma}7) = \frac{P(3 \cap \text{suma}7)}{P(\text{suma}7)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

- a) $5/6$ b) $11/36$ c) $25/36$ d) $30/36$

La probabilidad de no sacar un 5 en un lanzamiento de un dado es $5/6$, ya que hay 5 caras del dado que no son un 5, y 6 caras en total.

Por lo tanto, la probabilidad de no sacar un 5 en dos lanzamientos consecutivos de un dado es

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

La probabilidad de sacar al menos un 5 en dos lanzamientos consecutivos de un dado es complementaria a la probabilidad de no sacar ningún 5, es decir, $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

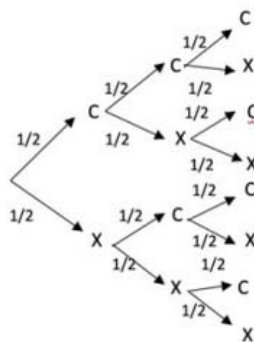
Respuesta: b) $11/36$.

2. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

- a) $1/2$ b) $3/4$ c) $3/8$ d) $5/8$

$$P(\text{CCX}) + P(\text{CXC}) + P(\text{XCC}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

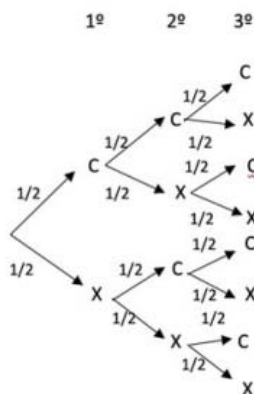
1ª 2ª 3ª



Respuesta: c) $3/8$.

3. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

- a) $1/2$ b) $3/4$ c) $3/8$ d) $5/8$



$$P(A) = P(CCC) + P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(C/CC) + P(C) \cdot P(C/C) \cdot P(X/CC) + P(C) \cdot P(X/C) \cdot P(C/CX) + P(X) \cdot P(C/X) \cdot P(C/XC)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Respuesta: a) $1/2$.

4. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40

b) 19/40

c) 36/40

d) 3/4

Teniendo en cuenta que en la baraja española tenemos cuatro palos, la probabilidad de obtener un oro es de 10/40.

Como en cada palo tenemos 3 cartas múltiplos de 2 (2, 4, 6), la probabilidad de sacar una carta par es de 12/40.

Como hay 3 cartas que son tanto oros como pares tenemos que restar la probabilidad de que salgan para que no se repitan.

$$P(O \cup \text{mult}2) = P(O) + P(\text{mult}2) - P(O \cap \text{mult}2) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$$

Respuesta: b) 19/40

5. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es siempre correcta.

a) $P(A) + P(\text{no}A) = 1$; b) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$; c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

La afirmación siempre correcta es la a) $P(A) + P(\text{no}A) = 1$. Esto se conoce como la regla de la probabilidad complementaria, que establece que la probabilidad de que un evento ocurra es igual a la probabilidad de que ocurra más la probabilidad de que no ocurra. Es decir, el conjunto de todos los posibles resultados debe sumar una probabilidad total de 1.

La afirmación b) $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$ es una fórmula que solo es cierta en el caso de que A y B sean eventos independientes, es decir, cuando la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. Si los eventos no son independientes, esta fórmula no se aplica.

La afirmación c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ solo es cierta si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, es decir, si no pueden ocurrir simultáneamente. Si los eventos no son mutuamente excluyentes, debemos restar la probabilidad de la intersección de ambos eventos para evitar contar dos veces las probabilidades en común. Por lo tanto, esta afirmación no es siempre cierta.

Respuesta: a) $P(A) + P(\text{no}A) = 1$