Matemáticas I
1º Bachillerato
Capítulo 7: Límites

Respuestas a los ejercicios y problemas propuestos

www.apuntesmareaverde.org.es

Realizados por:

Adrián, Álvaro, Carlota, Celia, Diego, Gabriel, Gonzalo, Inocencio, Irene, Javier, Jose, Lucía N., Lucía R., Manuel J., Manuel L. María, Nacho, Natalia, Pablo, Sara C., Sara D., Sara M., Víctor.

IES ATENEA, CIUDAD REAL

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Todas las imágenes han sido creadas con *software* libre (GeoGebra)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Utiliza la definición de límite para probar que $\lim_{x \to 1} x = 1$.

Sea un Ɛ cualquiera, hemos de ver que existe un δ, de tal manera que si 0 < |x-1| < δ entonces |x - 1|< Ɛ

Para que |x - 1|< Ɛ para cualquier Ɛ, basta tomar δ = Ɛ.

2. Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -2x + 3 \ si \ x < 1 \\ 3x - 2 \ \ si \ x \geq 1 \end{cases}}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-2x + 3) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x - 2) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

Como existen los 2 límites laterales y son iguales, existe el $\lim_{x \to 1} f(x)$ y es = 1.

b) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{-2x+3}{x+5} \ si \ x < 1 \\ \frac{5x^2}{x+3} \ \ si \ x \geq 1 \end{cases}}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \to \frac{-2 \cdot 1+3}{1+5} = \frac{1}{6} \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) \to \frac{5 \cdot 1^2}{1+5} = \frac{5}{6}$$

No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ ya que no dan el mismo resultado cuando calculamos los límites laterales.

c) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{7}{x^2+4} \ si \ x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2} \ \ si \ x \geq 1 \end{cases}}$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \to \frac{7}{1^2+4} = \frac{7}{5} \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) \to \frac{1-1}{1^2} = 0$$

No existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ ya que no dan el mismo resultado cuando calculamos los límites laterales.

3. Escribe la definición de $\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty}$ $\quad (\boldsymbol{x \to -\infty})$

Decimos que el límite de una función f(x) cuando x tiende a ∞ , es ∞ si para cualquier número real h hasta el cual las imágenes de x<h son mayores que k.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \mapsto$ si ∀ k ∈ R ∃h ∈ R / si x>h → f (x)> k

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \mapsto$ si ∀ k ∈ R ∃h ∈ R / si x<h → f (x)> k

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

4. Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Sea un Ɛ cualquiera, hemos de ver que existe un k > 0, tal que siempre que x > k, se cumple $|\frac{1}{x} - 0|$ < Ɛ → $|\frac{1}{x} - 0|$ < Ɛ ; $|\frac{1}{x}|$ < Ɛ ; $|\frac{1}{\varepsilon}|$ < x, basta con tomar k > $\frac{1}{\varepsilon}$.

5.Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=\infty$

$\lim\limits_{X\to 0^+} \frac{1}{x}=\infty \leftrightarrow \forall$k>0, $\exists\delta$>0, tal que ,siempre que, 0<x<δ, x∈ X,se cumple 1/x>k → 1/k>δ>x, luego dado k>0 basta elegir δ>1/k para que se verifiquen las condiciones.

6.Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos y calcúlalos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2 = -\infty^2 = -\infty$ infinito de variable infinita

b) $\lim\limits_{x\to\infty} +x^2 = +\infty^2 = \infty$ infinito de variable infinita

c) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$ finito de variable finita

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ finito de variable finita

7.Calcula los limites indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -(+\infty^3) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = -(-\infty^3) = +\infty^3 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty^2 = \infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{-\infty^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

8.calcula los siguientes limites indicando el signo:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{1^+-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{1^--1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{-5}{x-3} = \frac{-5}{3^+-3} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{-5}{x-3} = \frac{-5}{3^--3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$

9. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

Como determinar una asíntota vertical:

f(x) = P(x) / Q(x); Q(x) = 0; x= a; x=b.

a) f(x) = $\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$ **=** $\frac{(x+4)}{(x-1)}$ **;** (x-1)=0 **;** x=1

Solución: A.V. en x=1.

b) f(x) = $\frac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$ **;** (x-2)=0; (x-3)=0 **;** x=2; x= 3

Solución: A.V. en x= 2 y en x= 3.

c) f(x) = $\frac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)} = \frac{(x+4)}{(x-1)}$ **;** (x-1)=0 ; x=1

Solución: A.V. en x=1.

d) f(x) = $\frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$ **;** (x-1)=0; (x-3)=0; (x-5)=0; (x+1)=0 **;** x=1; x=3; x=5; x= -1.

Solución: A.V. en x=1, en x = 3, en x=5 y en x= -1.

10. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

·Una asíntota horizontal de una función es una recta horizontal a la cual su gráfica se va aproximando indefinidamente sin llegar nunca a cruzarla , por lo que, para averiguar la asíntota horizontal de una función tendremos que calcular: $\lim_{x\to\infty} f(x) = k \to y = k$

a)$f(x) = \frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-3)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \to y = 1$$

b)$f(x) = \frac{3x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+12x}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \frac{3}{1} = 3 \to y = 3$$

c)$f(x) = \frac{(x+4)^2}{2(x-1)\cdot(x-4)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+8x+16}{2x^2-10x+8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \to y = \frac{1}{2}$$

d)$f(x) = \frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^4-8x^3+14x^2+8x-15} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^4} = 0 \to y = 0$$

11. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las siguientes funciones:

Para resolver la A.O de cada función, debemos seguir el mismo procedimiento en todas las f(x):
1) A.O → y = mx +n   m = pendiente   n = *ordenada origen*
2) Identificar si existe *A.H.*: si A.H existe, A.O no.
3) m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$
4) n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$
5) Posición $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+n)), \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx+n))$

a) $\mathbf{f(x) = \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)}}$

A.V → x -1 = 0 → x = 1
1) Identificar si existe *A.H.*: si A.H existe, A.O no.
A.H → $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty$ A.H no existe
2) m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$
m = $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+4)(x-2)}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ → m = 1
3) n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$
n = $\lim_{x\to\infty}(\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} - 1x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+4x-8-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x} = 1$ → n = *3*
4) A.O → y = mx +n
A.O → y = x+*3*
5) Posición $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+n)), \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx+n))$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} - (x+3)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+4x-8-1x^2+1x-3x+3}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{(x+4)(x-2)}{(x-1)} - (x+3)) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+4x-8-1x^2+1x-3x+3}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{x} = 0^+$$

b) $\mathbf{f(x) = \frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)}}$

A.V → (x-2) ·(x-3) = 0 → **x = 2**   **x= 3**
1) Identificar si existe: si A.H existe, A.O no.
A.H → $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{0} = 0$ A.H no existe
2) m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \pm\infty, 0$
m = $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2(x+4)}{x^3-3x^2-2x^2+6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{x^3} = 3$ → m = 3
3) n = $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$
n = $\lim_{x\to\infty}(\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)} - 3x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+12x^2-3x^3+9x^2+6x^2-18x}{x^2-3x-2x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{27x^2}{x^2} = 27$ → n = 27
4) A.O → y = mx +n
A.O → **y = 3x+27**

5) Posición $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(mx+n))$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+n))$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)}-(3x+27)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+12x^2-3x^3+9x^2+6x^2-18x-27x^2+81x-54x-162}{x^2-3x-2x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{27x}{x^2}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2(x+4)}{(x-2)(x-3)}-(3x+27)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+12x^2-3x^3+9x^2+6x^2-18x-27x^2+81x-54x-162}{x^2-3x-2x+6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{27x}{x^2}=$$
0^-

c) $\mathbf{f(x)=\frac{x^2+4}{2(x-1)}}$

A.V → $2(x-1)=0$ → **x = 1**

1) Identificar si existe *A.H.*: si A.H existe, A.O no.

A.H → $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}=\infty$ A.H no existe

2) m = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\neq\pm\infty, 0$

m = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+4}{2(x-1)}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{2x^2-2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}$ → m = $\frac{1}{2}$

3) n = $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

n = $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+8-2x^2+2x}{4x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}$ → n = $\frac{1}{2}$

4) A.O → y = mx +n

A.O → **y = $\frac{1}{2}$x + $\frac{1}{2}$**

5) Posición $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(mx+n))$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+n))$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{2(x-1)}-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4-x^2-x+x+1}{2x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4}{2(x-1)}-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4-x^2-x+x+1}{2x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{2x}=0^-$$

d) $\mathbf{f(x)=\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}}$

A.V → x + 1 = 0 → **x = -1**

1) Identificar si existe: si A.H existe, A.O no.

A.H → $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x}=0$ A.H no existe

2) m = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\neq\pm\infty, 0$

m = $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}$ → m = 2

3) n = $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

n = $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4-2x^2-2x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x}$ = -2 → n = -2

4) A.O → y = mx +n

A.O → **y = 2x-2**

5) Posición $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-(mx+n))$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(mx+n))$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}-(2\mathrm{x}-2)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4-2x^2-2x+2x+2}{(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}-(2\mathrm{x}-2)\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+4-2x^2-2x+2x+2}{(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=0^-$$

12. Analizar el comportamiento en el infinito de cada una de estas funciones

a) $f(x)=(x+4)^2$

$$\lim_{x\to\infty}(x+4)^2=\lim_{x\to\infty}(x^2+8x+16)=\lim_{x\to\infty}x^2=(\infty)^2=+\infty$$

b) $f(x)=\frac{3}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{(x-2)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2-4x+4}=\frac{3}{(\infty)^2}=0$$

c) $f(x)=x^3+4$

$$\lim_{x\to\infty}(x^3+4)=(\infty)^3+4=\infty$$

d) $f(x)=\frac{2x^5+4}{x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+4}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{1}=\infty$$

13) Calcula el límite: $\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$

$\rightarrow \lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)=\left(\frac{1}{3^2-9}-\frac{1}{3-3}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ → Indeterminación

$\rightarrow \lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{(x+3)(x-3)}-\frac{1}{x-3}\right)\rightarrow mcm=(x+3)(x-3)$

$\rightarrow \lim_{x\to3}\left(\frac{1-(x+3)}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{1-x-3}{(x+3)(x-3)}\right)=\left(\frac{1-3-3}{(3+3)(3-3)}\right)=\frac{-5}{6\cdot0}=-\frac{5}{0}=-\infty$

14) Calcula el límite: $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

$\rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\left(\frac{1}{1^2-1}-\frac{1}{1-1}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ → Indeterminación

$\rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{(x+1)(x-1)}-\frac{1}{x-1}\right)\rightarrow mcm=(x+1)(x-1)$

$\rightarrow \lim_{x\to1}\left(\frac{1-1(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\frac{1-1-1}{(1+1)(1-1)}=\frac{-1}{2\cdot0}=-\frac{1}{0}=-\infty$

15) Calcula el límite: $\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$

$\rightarrow \lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\left(\frac{1}{-2+2}-\frac{1}{(-2)^2-4}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$ → Indeterminación

$\rightarrow \lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(x+2)(x-2)}\right)\rightarrow mcm=(x+2)(x-2)$

$\rightarrow \lim_{x\to-2}\left(\frac{1(x-2)-1}{(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to-2}\left(\frac{x-2-1}{(x+2)(x-2)}\right)=\left(\frac{-2-2-1}{(-2+2)(-2-2)}\right)=\frac{-5}{0\cdot(-4)}=-\frac{5}{0}=-\infty$

16) Calcula el límite: $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)$

$\rightarrow \lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)=\left(\frac{-2-2}{-2+2}-\frac{-2}{(-2)^2-4}\right)=\frac{-4}{0}-\left(-\frac{2}{0}\right)=-\infty+\infty \rightarrow$ Indeterminación

$\rightarrow \lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{(x+2)(x-2)}\right)\rightarrow mcm=(x+2)(x-2)$

$\rightarrow \lim_{x\to -2}\left(\frac{(x-2)^2-x}{(x+2)(x-2)}\right)=\left(\frac{(-2-2)^2-(-2)}{(-2+2)(-2-2)}\right)=\left(\frac{(-4)^2+2}{0\cdot(-4)}\right)=\frac{16+2}{0}=\frac{18}{0}=+\infty$

17. Calcula el límite: $\lim_{x\to 3}(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9})$

$\lim_{x\to 3}(\frac{x^2-5x+6}{x^2-9})=\frac{3^2-5\cdot 3+6}{3^2-9}=\frac{9-15+6}{9-9}=\frac{0}{0}$

x^2-5x+6 = (x-3)(x-2) x^2-9 = (x-3)(x+3)

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{3-2}{3+3}=\frac{1}{6}$

18. Calcula el límite: $\lim_{x\to 1}(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1})$

$\lim_{x\to 1}(\frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1})=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-4x+3)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-3)}{(x+1)}=\frac{1(1-3)}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1$

x^3-4x^2+3x = (x-3)(x-1) x^2-1 = (x-1)(x+1)

19. Calcula el límite: $\lim_{x\to 3}(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9})$

$\lim_{x\to 3}(\frac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9})=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}\ \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{6+x})^2-3^2}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{6+x-9}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=$
$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)(\sqrt{6+x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{6+x}+3)}=\frac{1}{(3+3)(\sqrt{6+3}+3)}=\frac{1}{6\cdot 6}=\frac{1}{36}$

x^2-9 = (x+3)(x-3)

20. Calcula el límite: $\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1})$

$\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1})=(\frac{\sqrt{4}-2}{1-1})=\frac{2-2}{1-1}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1}(\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1})=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{3+x})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{3+x-4}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=$
$\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$

21. Calcula el límite $\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x})$

$\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x})=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}}{0}=\frac{0}{0}=$ indeterminación

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}}=$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{3-x})^2-(\sqrt{3})^2}{x\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0} \frac{3-x-3}{x\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x\,(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}$$

Solución= El límite cuando x tiende a 0 es $\frac{-1}{2\sqrt{3}}$

22. Calcula el límite $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2} = \frac{2-\sqrt{2+2}}{2-2} = \frac{2-\sqrt{4}}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\operatorname{Lim}_{x\to 2} \frac{(2-\sqrt{2+x})}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{2+x}}{x-2} \cdot \frac{2+\sqrt{2+x}}{2+\sqrt{2+x}} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2^2-(\sqrt{2+x})^2}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})} = \lim_{x\to 2} \frac{4-2-x}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)(2+\sqrt{2+x})} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2+\sqrt{2+x}} = \frac{-1}{2+\sqrt{2+2}} = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$$

Solución= El límite cuando x tiende a 2 es $\frac{-1}{4}$

23. Escribe sin hacer cálculos el valor de los límites siguientes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1} = 1$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^2$ *en el numerador y* $5x^2$ en el denominador. Al ser iguales, se simplifican las x^2, quedando 5/5 . De modo que la solución es 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1} = \infty$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^5$ *en el numerador y* $5x^2$ en el denominador, al simplificar queda en el numerador x^3. La fracción final quedaría $\frac{\infty}{5}$ y esto es igual a ∞.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1} = 0$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $5x^2$ *en el numerador y* $5x^7$ en el denominador, al simplificar queda en el denominador x^5. La fracción final quedaría en el denominador x^5. El resultado final quedaría $\frac{5}{\infty}$ que es igual a 0.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x} = 2$$

Explicación: En este límite, la x tiende a ∞ por lo que se coge el monomio de mayor grado en ambas partes de la fracción (numerador y denominador). En este caso es $4x^3$ *en el numerador y* $2x^3$ en el denominador. Al ser iguales, se simplifican las x^3, quedando 4/2 . De modo que la solución es 2.

24. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}\right)=0 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x+1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{x}\right)=-1 \quad ;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x}\right)=(0-1)=-1$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{1}-3x\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2-3x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2-3x^2+3x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right),$$

dividimos entre x, numerador y denominador,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}\right)=3 \quad ; \quad \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1\,;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=\frac{3}{1}=3$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-3x}}\right)=$$

dividimos numerador y denominador entre x

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} \;;\; \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3 \;;\; \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)=2$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)=\infty-\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}\right)=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(5)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{5}{\infty}=0$$

25. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{(x-4)}\right)}{\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{(x-4)}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{(x-4)}\right)}{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-\left(\sqrt{(x-4)}\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)}{8}=$$

$$\frac{\infty}{8}=\infty$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(sen x)$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$$\lim_{n\to\infty}(senx) = no\ existe$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-7x}{x^5+100x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^5}{x^5} = 3$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x) \to (e^{+\infty}) = \infty$$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)$

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x) = (\ln 0^+) = -\infty$$

26. Determina los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1} = 1^\infty \quad ; \qquad \text{Utilizo } \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+2-2}{x-2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x-2}+\frac{3}{x-2}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{2x^2-1}\right]^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right]^{(2x^2-1)\cdot\frac{3}{x-2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-3}{x-2}\right)} = e^\infty = \infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x+2-2}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2}{3x^2-2}+\frac{2+2}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}\right]^{\frac{3x^2-2}{2+x}\cdot\frac{2+x}{3x^2-2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right)^{\frac{3x^2-2}{2+x}}\right]^{\frac{2x^2-1}{x}\cdot\frac{2+x}{3x^2-2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x}\cdot\frac{2+x}{3x^2-2}\right)} = e^{\frac{2}{3}}$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1-5+5}{x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+5}{x^3+5}+\frac{-6}{x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{x^3+5}\right)^{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{3x^2}\right]^{\frac{x^3+5}{-6}\cdot\frac{-6}{x^3+5}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^3+5}{-6}}\right)^{\frac{x^3+5}{-6}}\right]^{3x^2\cdot\frac{-6}{x^3+5}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^2\cdot\frac{-6}{x^3+5}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-18x^2}{x^3+5}\right)} = e^0 = 1$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3+1-1}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+1}+\frac{2}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{5x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}\right]^{\frac{5x+1}{2}\cdot\frac{2}{5x+1}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5x+1}{2}}\right)^{\frac{5x+1}{2}}\right]^{\frac{x^2-1}{5x}\cdot\frac{2}{5x+1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x}\cdot\frac{2}{5x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-2}{25x^2+5x}\right)} = e^{\frac{2}{25}}$$

27.Determina los limites siguientes (observa que no son de tipo e)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right) = 5\ ;\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = \infty\quad ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+3}{x+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x}} = 5^\infty = \infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2)};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{4x^3}\right) = \frac{1}{4};\ \lim_{x\to\infty}(3x^2) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{4x^3+5}\right)^{3x^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^\infty = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(3-\frac{2}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x^2}}\right) = \frac{3+0}{3-2\cdot 0} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right) = 2\cdot 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)} = 1^0 = 0$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cdot\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(5+\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}}\right) = \frac{5\cdot 0+3\cdot 0}{5+0} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{5x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{5}\right)=\frac{0-0}{5}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{5x^3}\right)}=0^0$$

Aplicamos $a^x=e^{ln(a^x)}$ $\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}=e^{ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{5x^3}\cdot ln\left(\frac{5x+3}{5x^2+1}\right)}$

28. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $\boldsymbol{f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}}$;

$Dom\ f\ (x)=\Re\ -\{1-1\}$ $\quad$ Continua en $\Re\ -\{1-1\}$

$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{-1+1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=$ Indeterminación, $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x-1)}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$

Esta función presenta una discontinuidad evitable en x = -1

b)$\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x-5}}$ **;**

Continua en $\Re$, $x\geq 5$ porque su dominio es $x-5\geq 0$, $x\geq 5$

c) $\boldsymbol{f(x)=\log_2(x-3)}$;

Continua en $\Re$, $x>3$ porque su dominio es $x-3>0$

d)$\boldsymbol{f(x)}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{2+x^2\ si\ x\leq 0}\\ \boldsymbol{1+e^x\ si\ x>}0\end{Bmatrix}$

1. f(0) = 2+0^2= 2 $\qquad$ **2.** $\lim_{x\to0}f(x)=\begin{Bmatrix}\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2+x^2)=2\\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1+e^x)=2\end{Bmatrix}$

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)$ si existe $\lim_{x\to0}f(x)=2$

3. $f(0)$= 2 = $\lim_{x\to0}f(x)$ es continua en x = 0

29. Determina el valor de k para que la función sea continua en toda la recta real.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}2-x^2 & x\leq 1\\ k+x & x>1\end{cases}}$$

f es continua en toda la recta real salvo en x = 1,

Continuidad en x=1

Paso 1. $f(1)=2-1^2=1$

Paso2. $\qquad \lim_{x\to1}f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2-x^2)=1\\ \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(k+x)=k+1\end{cases}$

Para que exista $\lim_{x\to1}f(x)$ los limites laterales han de ser iguales, de donde, k+1=1 ; k=0

30. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-2x+3 & si\ \ x<-1\\ 2+x^2 & si\ \ -1\le x\le 1\\ \frac{3}{x} & si\ \ x>1\end{cases}}$

$f(x)$ es continua en todo su dominio salvo en $x=-1, x=1$, por ser una función definida a trozos de funciones polinómicas y una racional cuyo denominador no se anula, que son continuas.

Continuidad en $x=-1$

1º$f(-1)=2+(-1)^2=3$

2º. $\left\{\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-2x+3)=5\right\}$

$\left\{\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(2+x^2)=3\right\}$

Para que exista $\lim_{x\to -1} f(x)$, los limites laterales han de ser iguales por tanto al no ser iguales no existe el límite cuando x=-1

La función tiene una discontinuidad inevitable de 1º especie de salto finito.

Continuidad en $x=1$

1º.$f(1)=2+1^2=3$

2º. $\left\{\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2+x^2)=3\right\}$

$\left\{\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{x}\right)=3\right\}$

3º. Como $f(1)=3=\lim_{x\Rightarrow 1}\quad f(x)\ \ f\ es\ continua\ en\ x=1$

b) $\boldsymbol{f(x)=x-\sqrt{x-2}}$

1º Encontrar dominio para identificar intervalos continuos

$$Dom\ de\text{: } x-\sqrt{x-2}\,; x\ge 2$$

"El dominio de una función es el conjunto de entradas o valores de los argumentos para los cuales la función es real y definida"

2ºEncontrar valores no negativos para las raíces; $x\ge 2$

$\sqrt{f(x)}\Rightarrow\ f(x)\ge 0\,; x-2\ge 0,;\ x\ge 2$

$Domf\ =x\ge 2\Rightarrow$ Intervalos continuos en $x\ge 2$

c) $\boldsymbol{f(x)=|x-3|-1}$

La función no tiene puntos no definidos ni limitaciones de dominio.

Por lo tanto, el dominio es $-\infty<x<\infty$ y es continua en $-\infty<x<\infty$

IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2-9} \to \frac{-3+3}{9-9} \to \frac{0}{0}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3} \to \frac{1}{-6}$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x-3}$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x-3} \to \frac{9-9}{-3-3} = 0$$

c) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+3x}$

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+3x} \to \frac{-3+3}{(-3)^2+3-3} \to \frac{-27+27}{9-9} \to \frac{0}{0}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x(x+3)} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{(x^2-3x+9)}{x} \to \frac{9+9+9}{-3} \to -9$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2} \to \frac{1-1}{1+1-2} \to \frac{0}{0}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)}{(x+2)} \to \frac{1+1+1}{3} = 1$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{-x-2}$

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{-x-2} \to \frac{(-2)^3}{-(-2)-2} \to \frac{-8+8}{2-2} \to \frac{0}{0}$ Indeterminación

$\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{-x-2} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{-1(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{(x^2-2x+4)}{-1} = -[(-2)^2 - 2\cdot(-2) + 4] = -12$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-4}{x-1} \to \frac{2-4}{0} \to -\infty$

g) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3} \to \frac{-98}{-5} = \frac{98}{5}$

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+8}{-x-2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+8}{-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-1}=\frac{\infty^2}{-1}\to-\infty$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+8}{-x^5-2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+8}{-x^5-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-x^2}=\frac{1}{-\infty^2}\to 0$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+8}{-x^3-2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+8}{-x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{-1}=\frac{3}{-1}=-3$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3x}{-x^2-4}-\frac{2}{x-2})$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{-x^2-4}-\frac{2}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{-x^2}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{-x}-\frac{2}{x}\right)=\frac{3}{-\infty}-\frac{2}{\infty}\to 0-0=0$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x^2-4}-\frac{x-3}{x+2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x^2-4}-\frac{x-3}{x+2}\right)=0-1=\mathbf{-1}$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x}-\sqrt{x^2}\right)=-\infty$$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2})\cdot(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1-x+2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\right)=\frac{0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1-2\cdot 0}}=0$$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{4}\right)=-\infty$$

3. Determina las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x-3}$

$$Asintota\ vertical\quad x-3=0\ \ \boldsymbol{x=3}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{3}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{3}{0^+}=\infty$$

$$Asintota\ horizontal$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\infty\ no\ tiene\ AH$$

$$Asintota\ oblicua$$

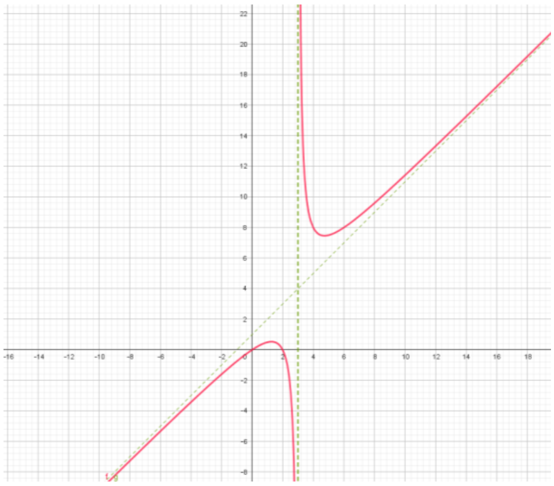
$$\text{m}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x}{x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{X^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2-3x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3x}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}=1 \qquad \boldsymbol{y=x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x-3}-x-1=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2-x+3x+3}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x-3}=\frac{3}{\infty^+}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{x-3}-x-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2-x+3x+3}{x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x-3}=\frac{3}{-\infty}=0^-$$



b) $\boldsymbol{f(x)=\frac{5}{x^2-4}}$

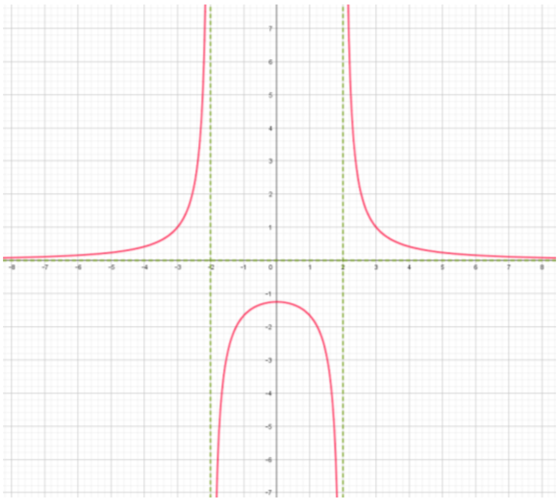
$AV\ => x^2-4=0\quad \boldsymbol{x=2}\ ,\quad \boldsymbol{x=-2}$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{5}{x^2-4}=\frac{5}{0^-}=-\infty \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{5}{x^2-4}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{5}{x^2-4}=\frac{5}{-0^-}=+\infty \qquad \lim_{x\to -2^+}\frac{5}{x^2-4}=\frac{5}{-0^+}=-\infty$$

$AH\ \ =>\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=0 \qquad$ **y = 0**

No existe AO porque hay AH



c) $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

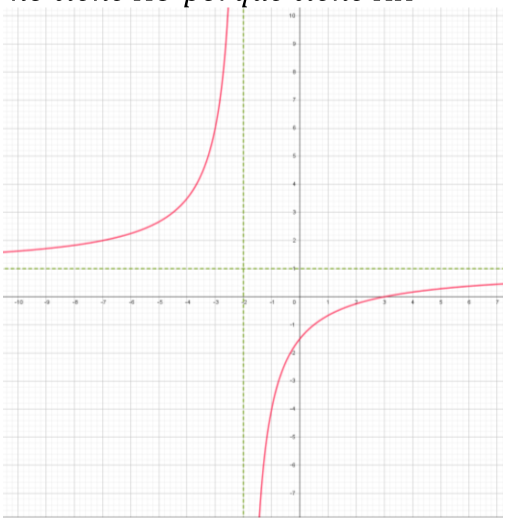
$AV \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \quad x = 2 \;, \;\; \boldsymbol{x = -2}$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{0}{0^-} = indeterminación \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{0}{0^+}$$
$$= indeterminacion$$
$$no\ existe\ la\ asintota\ x = 2$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{20}{-0^-} = +\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \frac{20}{-0^+} = -\infty$$

$AH \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad$ **y = 1**

$$no\ tiene\ AO\ porque\ tiene\ AH$$



d) $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2-1}$

$AV \;\; \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \qquad \boldsymbol{x = 1\,,\;\; x = -1}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-4}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{6}{-0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{6}{-0^+} = -\infty$$

$AH \quad => \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-5x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \qquad , \ \boldsymbol{y = 1}$

$$no\ tiene\ AO\ porque\ tiene\ AH$$

e) f(x) = $\frac{-5x}{(x-1)^2}$

asíntotas verticales

Igualamos el denominador a 0 → $(x-1)^2$ = 0; x = 1

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-}{0^+}$ = -∞

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-}{0^+}$ = -∞

A.V. → x = 1

asíntotas horizontales

Hacemos el límite con x → ∞

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5}{x} = 0$

A.H → y = 0

Asíntota oblicua no tiene ya que sí tiene horizontal.

f) f(x) = $\frac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

asíntotas verticales

Igualamos el denominador a 0 → $(x-1)^2$ = 0 ; x = 1

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{-}{0^+}$ = -∞

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{-}{0^+}$ = -∞

A.V. → x = 1

asíntotas horizontales

Hacemos el límite con x → ∞

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$ = -5
A.H → y = -5
Asíntota oblicua no tiene ya que sí tiene horizontal.

g) f(x) = $\ln \frac{-5x}{(x-1)^2}$
asíntotas verticales
Igualamos la ecuación, quitando el logaritmo neperiano, a 0.
$\frac{-5x}{(x-1)^2}$ = 0 → -5x = 0 → x = 0
Averiguamos el dominio:
Raíces y polos de $\frac{-5x}{(x-1)^2}$: x = 1; -5x = 0 → x = $\frac{0}{-5}$ = 0 → x = 0

x = -1	Es positivo
x = 1	Es negativo
x = 2	Es negativo

Por lo tanto, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
Solo hacemos el límite en 0^- porque f(x) no está definida por la derecha de 0 (0^+).
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ln(t)$; si x = 0^- y t = $\frac{-5x}{(x-1)^2} = \frac{-5x}{x^2-2x+1} = \frac{+}{+} = 0^+$
$\lim_{t\to 0^+} ln(x)$ = - ∞
Usando la propiedad: $\lim_{x\to 0^+} ln(x)$ = - ∞
A.V. → x = 0

asíntotas horizontales
Hacemos el límite con x → - ∞
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln \frac{-5x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-5x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-5}{x} = \frac{-5}{-\infty} = \frac{5}{\infty}$ = 0
A.H → y = 0 cuando x tiende a - ∞
Asíntota oblicua no tiene ya que tiene horizontal.

h) f(x) = $\sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}}$
asíntotas verticales
Calculamos el dominio de f(x).
Raíces y polos de $\frac{-5x}{(x-1)^2}$: x = 1; -5x = 0 → x = $\frac{0}{-5}$ = 0 → x = 0

x = -1	Es positivo
x = 0,5	Es negativo
x = 2	Es negativo

Por lo tanto, el dominio es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
No tiene A.V. porque solo está definida para x ≤ 0.

asíntotas horizontales
Hacemos el límite con x → ∞

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{-5x}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{-5x}{x^2}} = \sqrt{0} = 0$

A.H → y = 0
Asíntota oblicua no tiene ya que tiene horizontal.

4.- Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad:

a) $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3^x & si\ x < -2 \\ 4 - x^2 & si -2 \le x \le 1 \\ \log_2 x & si\ x > 1 \end{cases}}$

<u>Cuando x=-2</u>
1.- f(-2) = 4 - (-2)^2 = 4 – 4 = 0

2.- $\lim_{x\to-2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to-2^-} f(x);\ \lim_{x\to-2^-}(3^x) = (3^{-2}) = \frac{1}{9} \\ \lim_{x\to-2^+} f(x);\ \lim_{x\to-2^+}(4-x^2) = (4-(-2)^2\ ) = 0 \end{cases}$

3.- Como no existe $\lim_{x\to-2} f(x)$, f(x) no es continua en x=2. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

<u>Cuando x=1</u>
1.- f(1) = 4 – (1)^2 = 4 – 1 = 3

2.- $\lim_{x\to1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to1^-} f(x);\ \lim_{x\to1^-}(3^x) = (3^3) = 27 \\ \lim_{x\to1^+} f(x);\ \lim_{x\to1^+}(4-x^2) = (4-(1)^2\ ) = 3 \end{cases}$

3.- Como no existe $\lim_{x\to1} f(x)$, f(x) no es continua en x=1. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

b) $\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x < 0 \\ x^2 - 3x & si\ 0 \le x \le 3 \\ \sqrt{x-3} & si\ x \ge 3 \end{cases}}$

<u>Cuando x=0</u>
1.- g(0) = 0^2 -3 · 0 = 0

2.- $\lim_{x\to0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to0^-} f(x);\ \lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = -\infty \\ \lim_{x\to0^+} f(x);\ \lim_{x\to0^+}(x^2-3x) = ((0)^2 - 3\cdot 0\ ) = 0 \end{cases}$

3.- Como no existe $\lim_{x\to0} g(x)$, g(x) no es continua en x=1. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito

<u>Cuando x=3</u>
1.- g(3) = 3^2 – 3 · 3 = 0

2.- $\lim_{x\to 3} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x);\ \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ \lim_{x\to 3} f(x);\ \lim_{x\to 3^+}(x^2-3x) = ((3)^2 - 3\cdot 3) = 0 \end{cases}$

3.- Como no existe $\lim_{x\to 3} g(x)$, g(x) no es continua en x=3. Discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

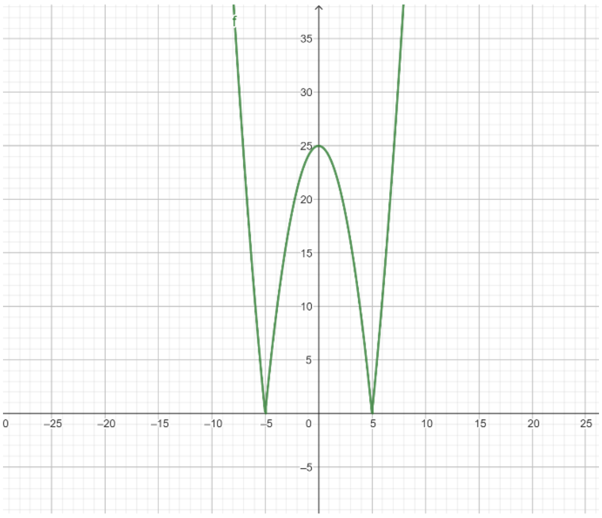
c) $|x^2 - 5x|$

Es continua porque es el valor absoluto de una función polinómica

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad

a) $f(x) = |x^2 - 25|$

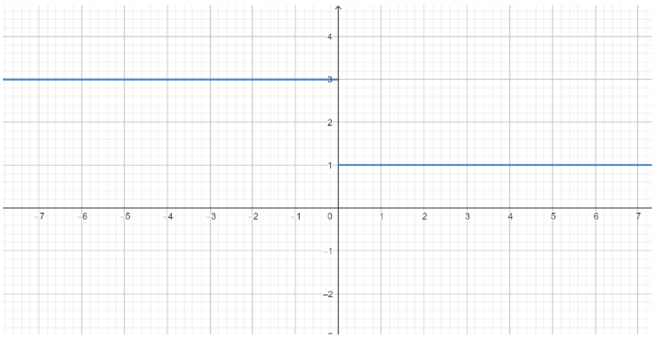
Es el valor absoluto de un polinomio por tanto es continua en todo R



b) $g(x) = 2 - \frac{|x|}{x}$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - \left(-\frac{x}{x}\right) = 2 + 1 = 3 & x < 0 \\ 2 - \left(\frac{x}{x}\right) = 2 - 1 = 1 & x > 0 \end{cases}$$

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto finito



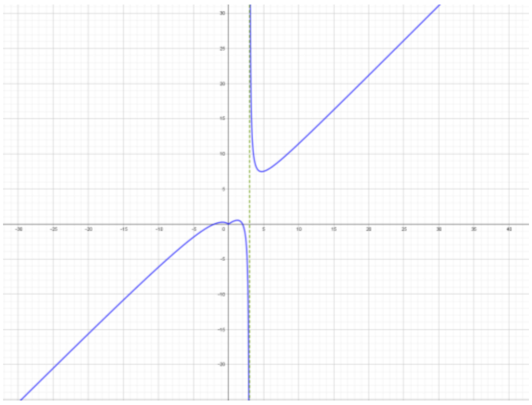
c) $\boldsymbol{h(x)=\frac{x^2-2|x|}{x-3}}$

$$h(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2(-x)}{x-3}=\frac{x^2+2x}{x-3} & x<0\\ \frac{x^2-2(x)}{x-3}=\frac{x^2-2x}{x-3} & x\geq 0\end{cases}$$

En x = 0 la función es continua.

Estudiamos la continuidad en x = 3

f(3) no existe y los límites laterales son $\pm\infty$ por tanto hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito.



6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $\boldsymbol{\frac{3x+5}{x^2-4x+3}}$

$x^2-4x+3=0$; x = 1 y x = 3

Es continua en todos los números reales salvo en x = 1 y x = 3

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en cada valor.

b) $\boldsymbol{\frac{7x+2}{x^2+x}}$

$x^2+x=0$; x = 0 ; x = -1

Es continua en todos los números reales salvo en x = 0 y x = -1

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en cada valor.

c) $\boldsymbol{\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}}$

$x^2-2x-3=0$; x = 3 ; x = -1

Es continua en todos los números reales salvo en x = 3 y x = -1

Hay una discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito, en los dos valores.

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) f(x)= $\sqrt{x^2 - x - 6}$ → x^2-x-6=0 → x=3 →x=-2

Se sustituyen los valores que nos ha dado como resultado la ecuación de segundo grado en la raíz y con ambos valores obtenemos 0.

Cogemos los siguientes valores: por ejemplo -3 / 0 / 4

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{6}$ por lo que es positivo y existe.
- Si sustituimos con 0 nos da $\sqrt{-6}$ por lo que no existe la raíz.
- Si sustituimos por 4 nos da $\sqrt{6}$ por lo que es positivo y existe.

Al haber calculado el dominio se calcula también la continuidad, por lo que:

Dom: (-∞, -2] U [3, ∞)

Continuidad: (-∞, -2] U [3, ∞) en el resto no existe la función no existe

b) **g(x)=** $\sqrt{\frac{2-x}{x^2-4}}$ → $\frac{2-x}{x^2-4} > 0$ →2-x=0 →x=2

→x^2-4=0 → (x+2)·(x-2)=0 → x= -2

→ x= 2

Vamos a sustituir con los siguientes valores: -3 / 0 / 3

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{1}$ por lo que es positivo y el dominio existe.
- Si sustituimos con 0 nos da $\sqrt{\frac{2}{-4}}$ por lo que no existe la raíz y el dominio tampoco.
- Si sustituimos con 3 nos da $\sqrt{\frac{-1}{5}}$ por lo que no existe la raíz y el dominio tampoco.

Al no existir las dos últimas raíces:

Dom: (-∞,-2)

Continuidad: (-∞,-2)

c) h (x)= $\sqrt{\frac{3-x}{x^2-3x}}$ →$\frac{3-x}{x^2-3x}$>0 → 3-x= 0 →x=3

→ X^2-3x= 0→ x=3

→x= 0

Vamos a sustituir con los siguientes valores: -3 / 1 / 4

- Si sustituimos con -3 nos da $\sqrt{\frac{6}{18}}$ por lo que es positivo y existe.
- Si sustituimos con 1 nos da $\sqrt{\frac{2}{-2}}$ por lo que no existe la raíz.
- Si sustituimos con 4 nos da $\sqrt{\frac{-1}{4}}$ por lo que no existe la raíz.

Al no existir las dos últimas raíces:

Dom: (-∞, -3)

Continuidad: (-∞, -3)

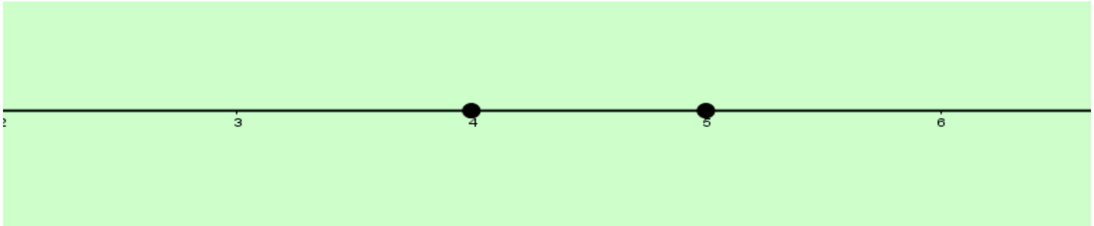
8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada casi el tipo de discontinuidad.

a) $\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{x-5}\right)}$

Como es logaritmo neperiano:

$\frac{4-x}{5-x} > 0 \qquad 4 - x = 0 \rightarrow -x = -4 \rightarrow x = 4$

$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$



Sustituimos valores de los intervalos:

$x = 3 \rightarrow \frac{4-3}{3-5} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$x = 4{,}5 \rightarrow \frac{4-4{,}5}{4{,}5-5} = \frac{-0{,}5}{-0{,}5} = 1$

$x = 6 \rightarrow \frac{4-6}{6-5} = \frac{-2}{1} = -2$

Es continua en los puntos que son mayores que cero, por lo que:

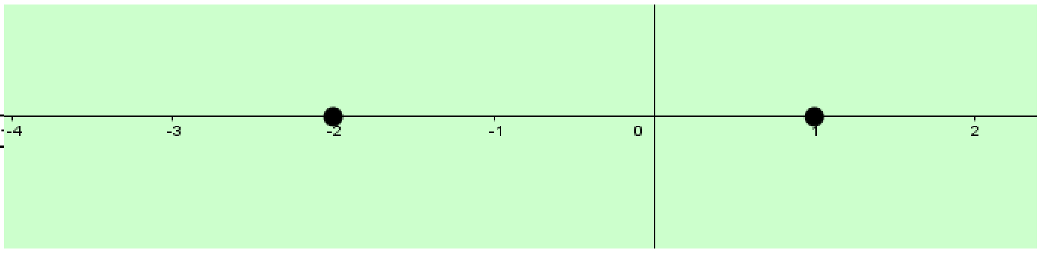
Continua en (4,5) en el resto no existe la función

b) $\boldsymbol{g(x) = \ln(-x^2 - x + 2)}$

Al ser logaritmo neperiano

$-x^2 - x + 2 > 0 \rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot(\cdot}}{-2}$

$\frac{1\pm3}{-2} \rightarrow x = -2, \quad x = 1$



Sustituimos valores de los intervalos:

$x = -3 \rightarrow -(-3)^2 - (-3) + 2 = 0 \rightarrow -9 + 3 + 2 = -4$

$x = 0 \rightarrow 0 - 0 + 2 = 2$

$x = 2 \rightarrow -(2)^2 - 2 + 2 = -4$

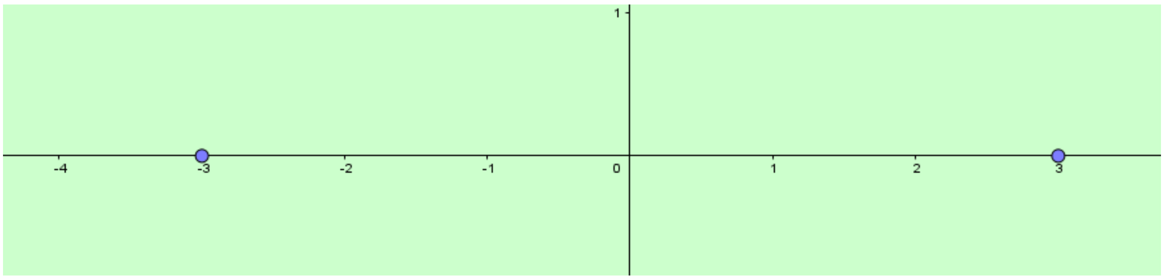
Continua en (-2,1) en el resto la función no existe

c) $\boldsymbol{\ln\left(\frac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)}$

Como a) y b).

$\frac{9-x^2}{(x-3)^2} > 0 \qquad 9 - x^2 = 0 \rightarrow -x^2 = -9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3; x = -3$

$(x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$



Sustituimos valores de los intervalos:

$x = -4 \rightarrow \frac{9-16}{(-4-3)^2} = -\frac{1}{7}$

$x = 0 \rightarrow \frac{9}{(0-3)^2} = 1$

$x = 4 \rightarrow \frac{9-16}{(4-3)^2} = -7$

Continua en (-3,3), en el resto no existe la función

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad

$\boldsymbol{a)\ f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}}$

Dom $f(x)$: $7 + x \neq 0$; $7 + x = 0 \ \text{-->}\ x = -7$

Dom$f(x) \rightarrow \Re - \{-7\}$

$\lim_{x \to -7^+}$ f(x)= $e^{\frac{-7^2-9}{7-7}}$ = e^{∞} = ∞ $\lim_{x \to -7^-}$ f(x)= $e^{\frac{-7^2-9}{7-7}}$ = $e^{-\infty}$ = 0

Discontinuidad no evitable de 1ª especie de salto infinito

$\boldsymbol{b)\ g(x) = e^{\sqrt{x-5}}}$

Dom$g(x)$, $x - 5 \geq 0$ $x - 5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$

Dom$g(x) \rightarrow \{x \in \Re;\ x \geq 5\}$

Es continua ahí ya que es el dominio de definición de la función

$\boldsymbol{c)\ h(x) = 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}}$

Dom$h(x)$, $x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$

Dom$h(x)$, $x^2 - 1 \neq 0 \rightarrow x = +1\ y\ -1$

Dom$h(x) \rightarrow \{x \in \Re;\ x > 1\}$, aquí es continua.

10. Dada la función $\boldsymbol{f(x)\begin{cases} 3 - x^2 & x < 0 \\ 2 + e^x & x \geq 0 \end{cases}}$

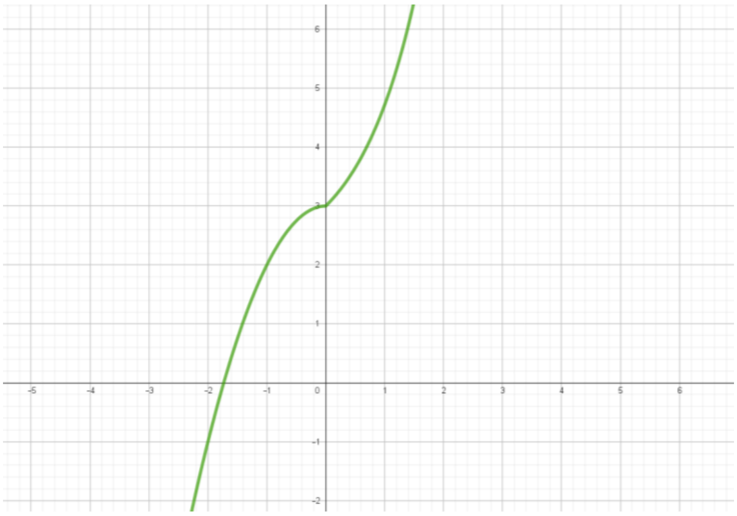
a) Estudia su continuidad

b) Representa su gráfica

a) $\lim_{x\to 0^-}(3-x^2)$= 3-0^2 = 3 $\lim_{x\to 0^+}(2+e^x)$= 2+ 1= 3

La función es continua

b)



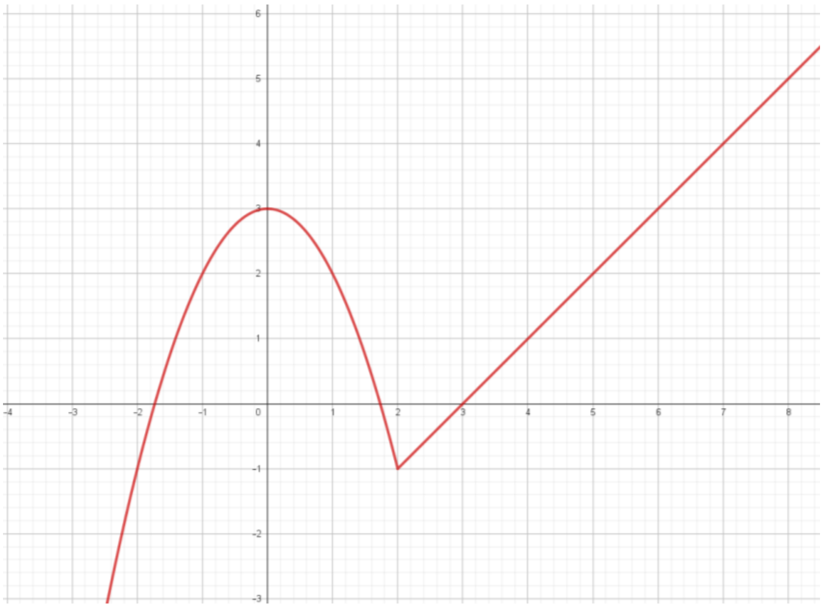
11. Dada la función $f(x)\begin{cases} 3-x^2 & x<2 \\ k+x & x\geq 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de k para que sea continua en toda la recta real.

b) Representa su gráfica

a) $\lim_{x\to 2^-}(3-x^2)$= 3-2^2= -1 ; $\lim_{x\to 2^+}(k+x)$ =k+2 ; k + 2 = -1 ; k = -3

b)



IES ATENEA Ciudad Real

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

12. Dada la función $f(x)\begin{cases} x-3 & x<-1 \\ x^2-5 & -1\le x<1 \\ \frac{2}{x} & x\ge 1\end{cases}$

a) Estudia su continuidad

b) Representa su gráfica

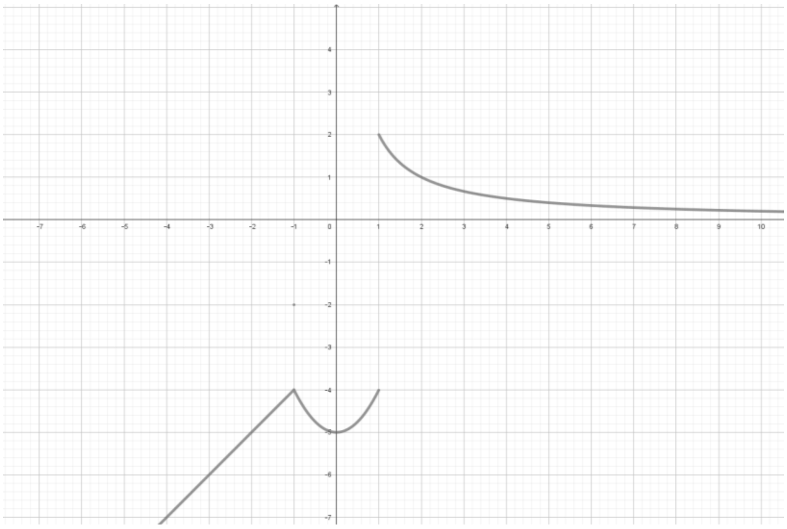
a) Continuidad en x = 1

$\lim_{x\to 1^+}(\frac{2}{x})$ = 2/1 = 2 $\lim_{x\to 1^-}(x^2-5)$ = 1-5 = -4 . No es continua

Continuidad en x = -1

$\lim_{x\to -1^-}$(x-3) = -1-3 = -4 $\lim_{x\to -1^+}(x^2-5)$ 1-5 = -4. Es continua

b)



13.Dada la función $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} 4-x^2 & x<2 \\ x^2-4 & x\ge 2\end{cases}}$

a)Estudia su continuidad

PASO 1. Estudio de la continuidad de la función en el punto x=2

$f(x)=x^2-4 \quad x\ge 2$

$f(2)=2^2-4=4-4=0$

PASO 2. Calculo los limites:

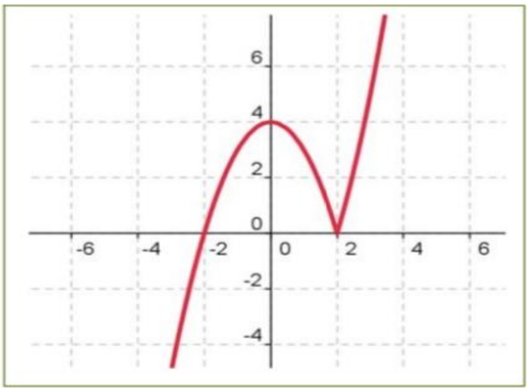
-Limite por la izquierda $f(x)=4-x^2 \quad x<2$ $\lim_{x\to 2^-}(4-x^2)=4-2^2=0$

-Limite por la derecha $f(x)=x^2-4 \quad x\ge 2$ $\lim_{x\to 2^+}(x^2-4)=2^2-4=0$

PASO 3. Entonces $f(2)=0=\lim_{x\to 2}f(x)$

Como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en x=2

b)Representa la gráfica



14. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Asíntotas verticales:

$$x^2 - 25 = 0 \quad \begin{cases} x + 5 = 0 & \boldsymbol{x = -5} \\ x - 5 = 0 & \boldsymbol{x = 5} \end{cases}$$

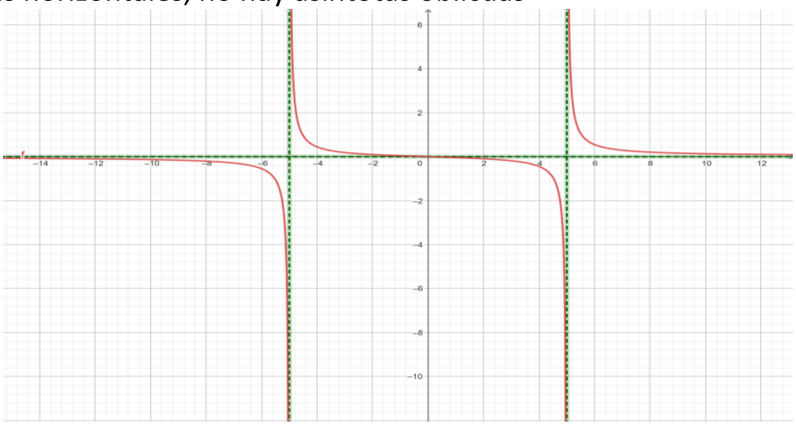
Posición:

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = \frac{5}{0^- \ +} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 5^+} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = \frac{5}{0^+ \ +} = \infty$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = 0 \qquad \boldsymbol{y = 0}$$

Como hay asíntotas horizontales, no hay asíntotas oblicuas



Los puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, x=5 y x = -5 discontinuidad inevitable de primera especie de salto infinito.

15. Esboza la gráfica de la función $\frac{x^2}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Asíntotas verticales

$$x^2 - 25 = 0 \quad \begin{cases} x - 5 = 0 & \boldsymbol{x = 5} \\ x + 5 = 0 & \boldsymbol{x = -5} \end{cases}$$

IES ATENEA Ciudad Real
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
Ilustraciones: Creadas con GeoGebra

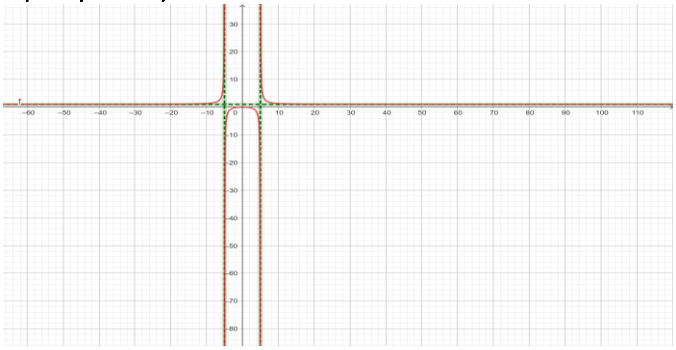
$\lim\limits_{x \to 5^-} \frac{x^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{25}{0^-\ +} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 5^+} \frac{x^2}{(x-5)(x+5)} = \frac{25}{0^+\ +} = \infty$

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{(x-5)(x+5)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-25} = 1$

$$\boldsymbol{y = 1}$$

No hay asíntotas oblicuas porque hay asíntotas horizontales



Loa puntos de discontinuidad son cuando se anula el denominador, x=5 y x=-5, hay una discontinuidad inevitable de primera especie de salto infinito.

AUTOEVALUACIÓN

1. El límite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ *vale*:

a) -∞ b)0 c) 1 d) 2/3

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{1^2-1}-\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-x}{x^2-1}=\frac{-1}{1^2-1}=\frac{-1}{0}=-\infty\right.$$

Solución: a) $-\infty$

2. El límite $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-x-2)\left(\frac{1}{x+2}\right)$ *vale*:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) -1

$$\lim_{x\to -2}(x^2-x-2)\left(\frac{1}{x+2}\right)=(-2^2-(-2)-2)\left(\frac{1}{-2+2}\right)=(+4)\left(\frac{1}{0}\right)=\frac{4}{0}=\infty$$

Solución: a) ∞

3. El límite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)$ *vale*:

a) ∞ b) 0 c) -2/3 d) -1

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)=\left(\frac{1^2-4(1)+3}{1^2+1-2}\right)=\left(\frac{1-4+3}{1+1-2}\right)=\frac{0}{0}\quad indeterminación$$
$$x^2-4+3=(x-3)(x-1)$$
$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-3)(x-1)}{(x-1)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-3)}{(x+2)}\right)=\frac{1-3}{1+2}=\frac{-2}{3}$$

Solución: c) $\frac{-2}{3}$

4. El límite $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ *vale*:

a) ½ b) 0 c) -∞ d) -1

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}=\frac{0}{0};\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{2+x}\right)^2-1^2}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to -1}\frac{2+x-1}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(\sqrt{2+x}+1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(\sqrt{2+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2-1}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Solución: a) $\frac{1}{2}$

5. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}$ *vale*:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{1}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

Solución: a) ∞

6. El límite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}$ vale:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3}{x^3}=5$$

Solución: c) 5

7. El límite $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x^2+1}$ vale:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{\lim_{x\to\infty}2x^2+1}$; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3x}=1$; $\lim_{x\to\infty}(2x^2+1)=\infty$

Obtenemos: $1^{\infty}=Indeterminación$

Calculamos: $e^{\lim_{x\to\infty}(2x^2+1)\left(\frac{3x+1}{3x-2}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}(2x^2+1)\left(\frac{3x+1-3x+2}{3x-2}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}(2x^2+1)\cdot\frac{3}{3x-2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{1}\cdot\frac{3}{3x-2}}=$
$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3}{3x-2}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{3x}}=e^{\lim_{x\to\infty}2x}=e^{\infty}=\infty$

Solución: a) ∞

8. Estudia la continuidad de f(x)=$\begin{cases}\frac{x^3-3}{x} \text{ si } x<0\\ 3x+2 \text{ si } x\geq 0\end{cases}$ en x=0.

1. f (0) = $3\cdot 0+2=0+2=2$
2. El segundo paso es calcular los límites por la izquierda y por la derecha utilizando las dos expresiones fijándonos en los símbolos > o <.

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3-3}{x}\right)=\frac{-3}{0^-}=\infty$

Al darnos ∞ no hace falta calcular el siguiente límite.
Al ser el límite = ∞, tiene una discontinuidad inevitable, de primera especie de salto infinito.

Solución: d) de un salto infinito.

9. Estudia la continuidad de f(x)=$\begin{cases}x^3-3 \text{ si } x<2\\ 3x+2 \text{ si } x\geq 2\end{cases}$ en x=2.

1. f (2) = $3\cdot 2+2=6+2=8$
2. El segundo paso es calcular los límites por la izquierda y por la derecha utilizando las dos expresiones fijándonos en los símbolos > o <.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^3-3)=(8-3)=5\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x+2)=(6+2)=8\end{cases}$$

Como los límites laterales son distintos, tiene una discontinuidad inevitable de primera especie de salto finito.

Solución: c) con un salto finito.

10. Estudia la continuidad de f(x)=$\begin{cases}x^3 \text{ si } x<2\\ 3x+2 \text{ si } x>2\end{cases}$ en x=2.

1. f (2) no existe.
2. El segundo paso es calcular los límites por la izquierda y por la derecha utilizando las dos expresiones fijándonos en los símbolos > o <.

Así sabremos si es evitable o inevitable.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^3)=(2^3)=8\\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(3x+2)=(6+2)=8\end{cases}$$

Como los dos limites dan la misma solución y son finitos, al no existir f(2), tenemos una discontinuidad evitable.

Solución: b) tiene una discontinuidad evitable