Coedución en la clase de Matemáticas de Secundaria

Adela Salvador y María Molero

1. Introducción

Resumen

En este libro, se proponen algunas estrategias adecuadas para la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria, como *hacer Matemáticas en la clase de Matemáticas*, promover la *investigación* en el aula, la *colaboración* y la *cooperación* frente a la competitividad, prestar atención a las exposiciones orales y escritas, trabajar la visión espacial en el aula especialmente en la enseñanza de la *geometría*, proporcionar modelos de *mujeres matemáticas* en la historia y analizar datos en la clase de estadística que tengan en cuenta la variable de género. La razón para todo ello se debe a que todavía existen desigualdades en nuestra sociedad y la escuela tiene la obligación de modificar actitudes sociales y corregir estereotipos sexistas. Por ejemplo, si se analizan los libros de texto desde un punto de vista coeducativo puede observarse que, aunque van mejorando lentamente, transmiten en general un “currículo oculto” con una valoración positiva de los patrones masculinos.

1.1. La escuela

En el año 1970 se anuló la **prohibición** de educar conjuntamente a los chicos y las chicas. Desde entonces ¿existe la coeducación en nuestras aulas? Si se pregunta a muchos profesores y profesoras veremos que opinan que la educación es idéntica para unos y para otras, que tanto unos como otras tienen las mismas oportunidades y que el trato del profesorado también es idéntico. Sin embargo hay quien considera que no todo es todavía tan perfecto, incluso que las alumnas han entrado en una escuela pensada y hecha sólo para alumnos. Mostraremos algunos datos que prueban que existen diferencias y que el medio social es el factor determinante de las diferencias debidas al género.

La escuela debe emprender una acción compensatoria y buscar estrategias de acción positiva para eliminar esas diferencias. Conseguir que alumnos y alumnas aprendan a cooperar en sus tareas desde pequeños supone preparar hombres y mujeres para que mantengan ese espíritu cooperador en las futuras relaciones de familia y sociedad que les va a exigir la convivencia. La competencia intelectual negada a la mujer tiene consecuencias tan nefastas como la imposibilidad de expresar los sentimientos que le ha sido negada al hombre y que ha empobrecido tanto a unos como a otras. Compartir las adquisiciones intelectuales y los sentimientos hacen más personas a ambos. Habría que modificar actitudes sociales de todos aquellos que ejercen una influencia directa sobre las alumnas y los alumnos, como padres y madres, profesorado, redactores/as de libros de texto, editores, medios de comunicación...

Las matemáticas se presentan en ocasiones centradas en intereses masculinos, con problemas y ejemplos relacionados con experiencias masculinas, por lo que las chicas pierden confianza e interés en ese terreno que no les es propio, y si tienen buenos resultados en matemáticas tienen miedo a las consecuencias que pueda tener su éxito en una materia considerada masculina.

Se puede controlar en el aula si participan por igual chicos y chicas, si la enseñanza es cooperativa en lugar de ser competitiva, si las expectativas son imparciales frente a chicas y chicos. Puede ser muy interesante tratar que chicos y chicas hagan conscientes sus actitudes: ¿Por qué les gusta o no les gusta las matemáticas? ¿Por qué son importantes? ¿Cuáles son sus sentimientos hacia las matemáticas?

1.1.1. Objetivos

Los objetivos de este libro son:

- Resaltar algunos hechos que prueban que todavía existen diferencias debidas al género.
- Analizar de qué forma es el medio social el causante de esas diferencias.
- Aportar algunas ideas para que se pueda emprender una acción compensatoria en el aula de Matemáticas

1.1.2. Hechos

Algunos de los hechos ya han sido suficientemente resaltados en otras ocasiones, como, por ejemplo:

- Algunos datos numéricos:
  - En educación

En las **facultades de matemáticas** españolas Basel porcentaje de alumnas es algo superior al cincuenta por ciento, sin embargo es pequeña la proporción de mujeres que continúan en la universidad, aún menor la de mujeres que son alumnas de tercer ciclo o que escriben una tesis en matemáticas y mínima la de catedráticas en matemáticas en la universidad española. En los países anglosajones sólo el 2'7 % de las mujeres ocupa puestos docentes universitarios, contra el todavía muy bajo del **17 %** en los países latinos (Italia, España).

Si se analiza la distribución de mujeres en el profesorado según la enseñanza que imparten se observa que mientras son el 81,9 % en educación infantil y primaria, bajan al 37,2 % en la enseñanza universitaria[1]. Esta participación es diferente según las categorías del profesorado universitario siendo en el curso 2009/10 del 41,8 % en Titulares de Escuela Universitaria, 38,3 % en Titulares de Universidad, 30,3 % en Catedráticos de escuela Universitaria y 16,6 % en Catedráticos de Universidad.

Un “indicador estructural” utilizado en la Unión Europea es la proporción de graduados en ciencias, matemáticas y tecnología por cada 1000 habitantes con edades comprendidas entre 20 y 29 años. Se observa que este indicador crece ligeramente cada año, siendo en 2009 en España de 17,0

[1] Mujeres y Hombre en España. Instituto Nacional de Estadística.

para graduados varones y de 7,8 para graduados mujeres, mientras que en la Unión Europea, en ese mismo año, el valor del indicador para hombres es algo superior, 19,2 por mil, y para mujeres de 9,4 por mil.

En la Real Academia de Ciencias Exactas, Física, Químicas y Naturales sólo el 4,4 % de los académicos son mujeres, según datos de 2011 del Instituto Nacional de Estadística, aunque estos datos han mejorado, pues en 2008 era del 2,3 %. En este sentido, un caso sorprendente es el de la Real Academia de Medicina, en la que a pesar de la progresiva feminización de la profesión, sólo el 2,1 % son mujeres.

¿Qué explicación podemos dar a esto?

– Empleo

Según el Instituto Nacional de Estadística y el Ministerio de Educación las mujeres sacan mejores notas en sus estudios que los hombres, lo que no se traduce en la vida laboral. El salario medio anual de las mujeres es un 22 % menor que el de los hombres, es de 19502 € frente a 25001 € de los hombres.

Sólo el 11,5 % de los consejeros de las empresas que cotizan en el Ibex-35 son mujeres.

El 97,3 % de las personas ocupadas a tiempo parcial para hacerse cargo del cuidado de los hijos de menos de 14 años son mujeres. Entre los desempleados por hacerse cargo del cuidado de los hijos, el 82,2 % son mujeres. El 91,9 % de las mujeres realizan tareas domésticas y se ocupan del cuidado de niños, ancianos y personas dependientes frente al 74,7 % de los varones.

Las mujeres dedican de media diaria 4 horas y 29 minutos al hogar y la familia, mientras que los hombres dedican 2 horas y 32 minutos.

- ¿Existen diferencias entre los alumnos y las alumnas?

  – ¿Son peores las alumnas en Matemáticas? Si tienen la misma capacidad y la enseñanza que reciben es igual, ¿por qué se producen diferencias?

Si no hay diferencias significativas en las capacidades que soportan la aptitud matemática entre chicos y chicas, ¿cómo se pueden explicar todos estos hechos? Si tienen la misma capacidad y la enseñanza que reciben es igual ¿por qué se producen desigualdades? ¿Hay otras diferencias biológicas que lo expliquen? ¿Las mujeres son menos competentes o menos competitivas?

  – Se deben al factor cultural. No existe fundamento biológico o antropológico para dichas diferencias.

Incluso en los aspectos más tradicionales, considerados como "instintivos", estudios antropológicos apoyan la teoría de que los prototipos masculinos y femeninos no tienen base biológica, sino cultural. Por ello el "factor cultural" tiene una influencia decisiva a la hora de determinar los tipos masculinos y femeninos. En un mundo en el que las nuevas funciones y roles sociales pueden ser desempeñadas, en general, tanto por uno como por otro sexo, pues están ligadas más a funciones psíquicas que físicas (como por ejemplo la fuerza bruta), la diferenciación debida al género se resiente.

Podemos concluir que no hay un fundamento biológico o antropológico que explique las diferencias en habilidades e intereses.

1.1.3. Causas

- La sociedad es un factor determinante de las diferencias debidas al género.
- La educación que reciben hombres y mujeres es muy diferente, como prueban los mensajes que se reciben desde la televisión, o el hecho de que no resulta femenino dedicarse a las Ciencias o a las Matemáticas. Desde la sociedad el mensaje recibido es que ser una “buena mujer” significa ocuparse de los demás y estar siempre guapa y atractiva.

En nuestra sociedad **la educación** que reciben hombres y mujeres es muy diferente. Podemos analizar, y anotar con un cuaderno en la mano, al ver la televisión durante una hora, que prototipos, modelos y profesiones masculinas y femeninas aparecen. ¿Cuál es el mensaje que reciben nuestras alumnas sobre lo que la sociedad (la televisión) espera de ellas? ¿Qué sean muy atractivas estando extremadamente delgadas, que laven muy blanco... o que resuelvan bien problemas técnicos, científicos o matemáticos? Naturalmente reciben que no resulta "femenino" dedicarse a las ciencias y las matemáticas. Mientras en nuestra civilización el estereotipo sexual exija preocuparse de la familia, la infancia, los enfermos, los ancianos, la casa... entonces ser una buena madre, una buena esposa, una buena hija, y por tanto ser una buena mujer signifique ocuparse de los demás y estar además siempre espectacularmente atractiva.

1.1.4. Libros de texto.

Podemos analizar los libros de texto y materiales escolares controlando el número y porcentaje de figuras masculinas y femeninas y los modelos, profesiones y papeles que representan en ilustraciones, ejercicios y texto; si los ejemplos y problemas recogen por igual experiencias e intereses de chicos y chicas; o si aparecen mujeres matemáticas.

Si se realiza un análisis de los libros de texto observamos que las mujeres y las chicas están escasamente representadas; las mujeres adultas apenas aparecen y los papeles que representan son pasivos. La lectura que de esto puede hacer una chica es que la ciencia no se espera nada de ella en la vida adulta.

La sociedad es el factor más decisivamente determinante de las diferencias debidas al género.

1.1.5. Coeducación

Se entiende por **coeducación** la fusión de las pautas culturales "femeninas" y "masculinas" en un proceso integral de persona. Supone la corrección de los estereotipos sexistas para promover la igualdad entre los géneros.

Hay autores que opinan que la enseñanza no es coeducativa pues se ha dejado entrar a la alumna en una enseñanza adecuada e ideada por y para el hombre.

La escuela tiene como función y obligación compensar las carencias y deficiencias de la familia y la sociedad.

Es interesante llevar a cabo actividades que puedan reflejar, dentro del profesorado, si existen diferencias de expectativas entre alumnas y alumnos, o si el trato en el aula es realmente el mismo a unas y a otros.

Debemos evitar que el **currículum oculto** transmita normas y actitudes de manera inconsciente, como la valoración de los patrones masculinos en detrimento de los femeninos, y que el lenguaje se dirija exclusivamente al género masculino silenciando la presencia femenina.

1.2. Ideas para la clase de matemáticas

Vamos a analizar algunas propuestas para emprender una acción compensatoria en la enseñanza de las Matemáticas ya que **la discriminación que experimenta la alumna fuera del aula de matemáticas puede ser contrarrestada dentro de ésta**. Como la situación de partida es desigual debemos evitar el refuerzo de los roles y desarrollar mecanismos equilibradores, debemos generar la autoestima de las alumnas en el aprendizaje de las matemáticas reforzando una mayor confianza en sus capacidades y actitudes, un mayor respeto por sus actuaciones y reducir así la ansiedad matemática.

1.2.1. Trabajo en grupo

En lugar de promover la competitividad y el individualismo debemos **potenciar la colaboración** y el sentido de cooperación. Una forma de conseguirlo puede ser enseñar a **trabajar en equipo**, con clases de resolución de problemas, elaboración de trabajos de investigación, exposición de materiales y trabajos...

1.2.2. Hacer matemáticas en la clase de matemáticas

La idea de que en las matemáticas sólo existe la situación de verdadero o falso, acierto o error, provoca el bloqueo ante una situación que no permite una elaboración de la respuesta, una ansiedad ante esas matemáticas. Por esta razón en el aula de matemáticas podemos trabajar unas matemáticas abiertas, con problemas e investigaciones que no sean de una única respuesta, donde el alumnado pueda hacerse preguntas y pueda elegir diferentes caminos, donde el error no sea castigado sino que pueda promover nuevas investigaciones y mejorar el aprendizaje. ¿Son éstas unas matemáticas "femeninas"? Pensamos que no. No son ni femeninas, ni masculinas. Mejorarán el aprendizaje tanto de las chicas como de los chicos.

La enseñanza tradicional del profesor/a que explica y alumno/a que recibe la enseñanza de forma pasiva refuerza la tradicional pasividad de las chicas. Crear dentro del aula un lugar donde alumnos y alumnas tengan tiempo para reflexionar, abstraer y hagan un trabajo intelectual es conveniente para todos, pero beneficia al proyecto sin discriminación de la mujer en el sentido de que la alumna tiene menos oportunidades en la vida cotidiana para dedicarse a pensar. **Hagamos matemáticas en la clase de matemáticas** y demos a nuestros alumnos y alumnas ocasiones de desarrollar su pensamiento matemático.

1.2.3. Geometría

Conviene no descuidar la **enseñanza de la geometría en la clase de matemáticas**. No dejar los trabajos de geometría "para casa" sino dar un tiempo y un lugar para hacerlos en el aula. Es conveniente poder dotar de intuiciones geométricas apoyándonos en materiales de aula adecuados según la edad del alumnado. Si no proporcionamos este trabajo en el aula, desmerecerá el aprendizaje de todos, pero en particular de aquellas chicas que, por el tipo de juegos de su infancia, han desarrollado poco la visión espacial. Tradicionalmente el niño salta, corre, juega con construcciones mientras que la niña juega tranquilamente sentada con una muñeca entre los brazos.

1.2.4. Estadística

En la clase de **estadística** podemos hacer investigaciones, encuestas, recogidas de datos y estudios que hagan reflexionar sobre el estado en ese momento de la mujer en la sociedad. Por ejemplo, podemos confeccionar encuestas parecidas a la que dio como resultado el tiempo que las mujeres dedican a las "labores del hogar" y el que dedican los hombres, que revelan la desigualdad en el espacio público y privado. Como se ha comentado antes, según el Instituto Nacional de Estadística la mujer dedica a las tareas domésticas, al día, 4 horas y 29 minutos frente a las 2 horas y 32 minutos que dedican los hombres. De donde se desprende que mientras la mujer se va incorporando al trabajo remunerado, el hombre no colabora en la misma medida a la realización de los trabajos domésticos. En una encuesta pasada por el Instituto de la Mujer hace ya muchos años se observa que ese dato va cambiando pues entonces el “ama de casa” dedicaba 6 horas y 12 minutos, cuando la mujer realizaba un trabajo remunerado aumentaba el número total de horas de trabajo en más de cuatro horas diarias (4 horas, 48 minutos) en la realización de los trabajos tradicionalmente asignados a la mujer dentro del hogar, mientras los hombres apenas contribuían con una hora de su tiempo (1 hora 6 minutos).

Imaginamos que al repetir encuestas similares por el alumnado en ámbitos diferentes las cifras obtenidas serán muy distintas, en ocasiones incluso aún más exageradas, pero, es de esperar que en las generaciones más jóvenes los hombres se estén incorporando en estas tareas. El hombre dispone de más tiempo de ocio. Podemos analizar no sólo los tiempos globales, sino la distribución de los tiempos en el control de los ingresos, o en el tiempo dedicado a los niños por los hombre, las amas de casa y las mujeres trabajadoras, o cómo el automóvil es un trabajo de hombres.

Datos, muchos datos, se pueden obtener buscando en Internet. Por ejemplo, el Instituto Nacional de Estadística edita y actualiza desde 2006 la página "Mujeres y hombre en España" con datos sobre educación, empleo, violencia de género…

1.2.5. Verbalización

En la clase de matemáticas se debe prestar una mayor atención a las exposiciones, tanto orales como escritas. Motivar y valorar la verbalización de los procesos matemáticos mejora el aprendizaje, desvela al profesorado los procesos mentales utilizados por el alumnado, y también favorece a las alumnas, que tienen mejor dominio de los procesos verbales, con lo que aumenta su motivación.

1.2.6. Evolución histórica de las matemáticas

En la clase de matemáticas usualmente se proporcionan los conceptos y los hechos totalmente elaborados y no se estudian las dificultades, las razones o los procedimientos de los que han surgido. Conocer la **evolución**

histórica de las matemáticas, la forma de trabajar del matemático y la contribución de éste, mejora el aprendizaje.

Mejora la enseñanza de las matemáticas conocer la evolución histórica de los conceptos y la contribución de mujeres y hombres matemáticos.

1.3. Historia de mujeres en las matemáticas

Proponemos ampliar esta historia añadiendo también la contribución de las mujeres científicas y matemáticas, pues el simple conocimiento de que estas mujeres han existido ya puede servir como modelo a las chicas. En el cuadro adjunto hemos recogido algunas de estas mujeres, de diferentes épocas y distintos países.

1. Teano
2. Hipatia
3. Émilie de Breteuil, marquesa de Châtelet
4. Sophie Germain
5. Caroline Herschel y otras mujeres astrónomas
6. María Gaetana Agnesi
7. Ada Lovelace. Las mujeres y la informática
8. Mary Somerville
9. Sonia Kovalevskaya

10. Emmy Noether

11. Grace Chisholm Young

El conocimiento científico se acumula en un proceso lento de descubrimiento. Las mujeres también han contribuido a este proceso y sin embargo la historia de la ciencia que conocemos es una historia de hombres en la ciencia occidental.

> *"El trabajo científico necesita de inteligencia, creatividad, instrucción y decisión. Como resultado de ello, la historia de la ciencia es siempre la de un grupo selecto de individuos. Por desgracia, la historia de las mujeres en la ciencia es aún más selectiva. Es, en su mayoría, la historia de mujeres privilegiadas, con una situación que les permite instruirse y cultivar sus intereses científicos a pesar de estar excluidas de las instalaciones educativas y de las fraternidades formales e informales de los hombres de ciencia".*

[ALIC, M. (1991): El Legado de Hipatia].

El desarrollo de las Matemáticas, como el de cualquier ciencia, ha tenido un proceso de elaboración muy distinto al que se presenta cuando estudiamos su historia, que aparece como una acumulación de descubrimientos individuales con una estructura lineal, olvidando, además de los intentos fallidos y las hipótesis refutadas, todas las colaboraciones que han contribuido mediante pequeños logros a la construcción del conocimiento.

La Historia de las Matemáticas que conocemos, forma parte de la Ciencia occidental y está centrada en los descubrimientos de un grupo selecto de hombres de raza blanca, cuya situación de privilegio por haber recibido una esmerada formación y pertenecer a una familia de clase acomodada, les permitió cultivar sus inquietudes científicas.

Entre estos nombres podemos destacar el de algunas mujeres que han logrado sobrevivir a la influencia masculina de una sociedad patriarcal, que les ha puesto muchas dificultades para desarrollar un trabajo científico y aún más para que éste sea reconocido en los libros de historia, en muchos de ellos, como por ejemplo en el Boyer, no se menciona la biografía de ninguna mujer matemática y a duras penas se reconocen los logros de Sonia Kovalevskaya y Emmy Noether

Las barreras que tuvieron que superar estas mujeres para acceder a la Ciencia son muchas y muy variadas pero tienen ciertos elementos comunes que queremos resaltar, ya que son la base para explicar por qué se conocen tan pocos nombres de mujeres matemáticas.

El problema de su **educación** que las mantuvo alejadas del conocimiento científico, las que por fin accedieron a él, habían recibido, previamente, una educación femenina y casi todas tuvieron que ocuparse de las tareas que la sociedad ha tenido asignadas a las mujeres, cuidar enfermos, hijos, hermanos, y en general de "sus labores".

Los distintos elementos que impidieron o al menos obstaculizaron **su reconocimiento como autoras**. Algunas tuvieron que ocultarse bajo un seudónimo o unas siglas, otras vincularon su trabajo a la sombra de una figura masculina y sólo fueron reconocidas cuando sobrevivieron a su compañero, sin olvidar a las que han sido maltratadas por la Historia y al cabo del tiempo son más recordadas por una anécdota de su vida, sin importancia, que por su trabajo matemático.

Los graves problemas que se encontraron para **vivir de la Ciencia**, así como para poder acceder a las distintas instituciones científicas y obtener un merecido reconocimiento por su trabajo.

1.3.1. La educación de las mujeres.

Hasta hace poco más de un siglo a la mayoría de las mujeres se les ha vetado el derecho a la educación. Actualmente ya vemos como los talibanes siguen considerando muy peligroso que accedan las niñas a la formación. De esta situación sólo se salvaron algunas por su posición social, pero, en general, se pretendía orientarlas hacia el arte, la literatura y por supuesto hacia todas las habilidades domésticas y sólo en casos excepcionales recibieron una instrucción orientada al conocimiento científico.

A pesar de ello en todas las épocas han existido mujeres que han escrito su nombre en la historia de las Matemáticas. Por supuesto estas mujeres habían recibido una esmerada educación, así Emilia Breteuil, marquesa de Châtelet (1706-1749) y Ada Byron, condesa de Lovelace (1815-1852), eran aristócratas y tuvieron a su servicio buenos profesores de matemáticas. Hipatia (370-415), María Gaetana Agnesi (1718-1799) y Emmy Noether (1882-1935) eran hijas de matemáticos, crecieron en un ambiente donde las matemáticas eran conocidas y apreciadas, y su talento reconocido.

El acceso a los libros fue también un factor de importancia ya que no existían las bibliotecas públicas y sólo algunas como Sophie Germain (1776-1831) y Sonia Kovalevskaya (1850-1891) pudieron encontrarlos en las bibliotecas de sus familias.

Sin embargo muchas de ellas tuvieron que compartir sus estudios matemáticos con las tareas domésticas, cuidar de niños, enfermos y demás funciones que la sociedad les tenía asignadas. Es el caso de María Gaetana Agnesi que a los veintiún años se encontró sin madre y con veinte hermanos pequeños, o de Carolina Herschel (1750-1848) que después de estar durante veinticuatro años como ayudante de su hermano William, a la vez que se encargaba de las tareas domésticas, a los cincuenta y ocho años tuvo que cuidar de su hermano Dietrich durante cuatro años.

1.3.2. El reconocimiento de su trabajo científico.

Muchas de ellas son recordadas más por su posición social que como mujeres de ciencia. Así, Emilia Breteuil, marquesa de Châtelet, que contribuyó a divulgar, estudiar, traducir y hacer comprensible el pensamiento de Leibniz y de Newton es recordada como amante de Voltaire, y Sophie Germain que después de sus importantes trabajos sobre teoría de números, sus investigaciones sobre la teoría de superficies elásticas, y de sus obras filosóficas, en su certificado de defunción, el empleado municipal escribió "*rentière*" (rentista) para indicar su profesión.

Al no tener acceso a la educación formal, dependían de padres, hermanos o maridos. Por ejemplo, Sonia Kovalevskaya hubo de casarse con Kovalevky para poder salir de su país, Rusia, e ir a Alemania a estudiar matemáticas, donde fue alumna de Weierstrass.

En no pocas ocasiones su trabajo estaba en peligro de ser atribuido a sus colegas masculinos, como es el caso de muchas astrónomas de los siglos XVII y XVIII que accedieron a esta ciencia como ayudantes de sus hermanos, padres o maridos. Pero muchas veces sus importantes aportaciones quedaron enmascaradas por las del hombre con el que trabajaron, y sólo en casos muy concretos o cuando al morir éstos, ellas siguieron trabajando solas, se les reconoció la autoría del trabajo realizado. Entre las astrónomas más importantes de esta época tenemos a Sophia Brahe (1556-1643), que trabajó con su hermano Tycho Brahe y a la que se le atribuye la observación del eclipse lunar de diciembre de 1573; María Cunitz (1610-1664) que encontró algunos errores en las tablas astronómicas de Kepler; Elisabetha Hevelius (1647-1693) que trabajó con su marido Johannes Hevelius, treinta y seis años mayor que ella y después de la muerte de éste publicó muchos trabajos, entre ellos un catálogo con mil quinientas sesenta y cuatro estrellas con su posición y magnitudes; María Winkelman (1670-1720) que se casó con Gottfried Kirch, treinta y un años mayor que ella, realizó los cálculos necesarios para confeccionar el calendario, descubrió un cometa, y se han podido identificar dos publicaciones suyas, pero a la muerte de su marido le fue denegada la plaza que él tenía en la Academia de Ciencias de Berlín y como nadie ponía en duda su capacidad profesional para ocupar este puesto, el argumento que soportó esta decisión de los miembros de la Academia es que no era un ejemplo para otras mujeres; Nicole Lepaute (1723-1788) que trabajó con su esposo y calculó la tabla de las oscilaciones de los péndulos, que fue publicada en el "*Traité d´horlogerie*" como obra de su marido, y Carolina Herchel que es la astrónoma más famosa de todos los tiempos, pues además del trabajo que realizó a la sombra de su hermano, descubrió diez cometas y tres nebulosas, una de ellas la compañera de Andrómeda y realizó un catálogo con dos mil quinientas nebulosas por el que recibió la Medalla de Oro de la Real Sociedad de Astronomía.

Los problemas de identificación de autor se han complicado por la pérdida del apellido de algunas mujeres al casarse, como en el caso de Mary Somerville (1780-1872). Se cuenta que un día, cuando Laplace estaba cenando con los Somerville éste afirmó ingenuamente*:*

> *"He escrito libros que nadie puede leer. Sólo dos mujeres han leído la Mecánica Celeste, ambas escocesas, la señora Greig y usted",*

pues Laplace no sabía que el nombre del primer marido de Mary era Samuel Greig.

También se vieron, a veces, obligadas a utilizar un seudónimo masculino para garantizar que su trabajo fuese tomado en serio. Es el caso de Sophie Germain que firmaba como Monsieur Le Blanc cuando mantenía correspondencia con Gauss, y presentó una memoria anónima para acceder al premio extraordinario de la Academia de Ciencias o el de Ada Byron que firmaba sus trabajos únicamente con sus iniciales.

Por último cuando los apellidos de estas mujeres aparecen en los libros de matemáticas no se identifican con ellas. Cuando se estudian en Algebra Conmutativa los anillos noetherianos o el teorema de Noether no se sabe que Noether se llamaba Emmy y era una mujer; cuando en teoría de números aparecen los primos de Germain o el teorema de Germain seguro que casi nadie piensa que el nombre que precede a Germain es Sophie, y quién va a sospechar al estudiar en ecuaciones diferenciales el teorema de Cauchy-Kovalevskaya que este apellido ruso se refiere a una mujer.

En el plano de la anécdota es curioso recordar como fue desvirtuada la personalidad de María Gaetana Agnesi con la curva que lleva su nombre, cuando al traducir al inglés su libro "*Instituzioni Analitiche*", en su referencia a la cúbica de Agnesi, o curva sinusoidal versa (versiera en italiano), se cambió el término versiera por witch que en inglés significa bruja, que fue mantenido en posteriores ediciones y traducciones y como "La bruja de Agnesi" se recuerda a esta mujer en muchas referencias históricas de las Matemáticas.

1.3.3. Su acceso a las instituciones científicas y su trabajo profesional.

Estas mujeres tuvieron, en general, grandes dificultades para ganarse la vida con su trabajo profesional. Por ejemplo, Sonia Kovalevskaya, que se había casado únicamente para salir de Rusia y continuar sus estudios de matemáticas, al llegar a Heidelberg se encontró con que allí tampoco se permitía el acceso de las mujeres a la Universidad y después de muchos esfuerzos logró que la admitieran como oyente, y cuando más tarde quiso estudiar en la Universidad de Berlín sólo logró que Weierstrass accediera a trabajar con ella de modo privado. Con él comenzó su trabajo de doctorado y obtuvo en 1874 un título "in absentia" en Göttingen con una brillante tesis sobre ecuaciones diferenciales, pero no se le permitió dar clases en la univesidad, hasta que más tarde fue admitida como profesora de Matemáticas Avanzadas en la Universidad de Estocolmo.

También la vida de Emmy Noether, fue una continua lucha por acceder a la Ciencia, comenzó a estudiar en la Universidad de Erlangen, donde su padre era profesor, con un permiso especial para asistir a clase pero que le impedía examinarse, pues dicha Universidad había prohibido el ingreso de las mujeres ya que esto *"destrozaría el orden académico*", más tarde cambió la ley y pudo continuar sus estudios de una forma normal, después de una brillante tesis sobre invariantes, intentó trabajar en la Universidad de Göttingen, pero de momento no tuvo éxito a pesar de los esfuerzos de Hilbert que para conseguirlo dijo al respecto:

> *"no veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños"*.

Tuvo que conformarse con impartir cursos que se anunciaban bajo el nombre de Hilbert hasta que después de la Primera Guerra Mundial, se modificó la ley y pudo impartir cursos con su nombre, primero sin derecho a sueldo y posteriormente en 1922 con un salario modesto, hasta que en 1933 con la llegada de Hitler al poder, como era judía, tuvo que exiliarse a Estados Unidos, allí trabajo en Princenton donde estaba también A. Einstein.

1.3.4. En la sociedad actual...

En la actualidad y en sociedades desarrolladas, nadie niega a las mujeres el acceso al conocimiento científico. De hecho, estudios estadísticos recientes nos muestran que cada vez existe mayor afluencia de mujeres a disciplinas académicas tradicionalmente masculinas. Pero ni en estos entornos favorables se puede considerar que "todo está conseguido".

El derecho a la educación es común a unos y a otras y parece que no existen barreras a la hora de que las mujeres elijan lo que desean estudiar en el mundo occidental. Sin embargo, sigue constatándose que son minoría las que desarrollan una carrera científica, no ya como estudiantes sino como investigadoras, ocupando puestos de relevancia en las universidades y organismos o empresas. ¿Está preparada la sociedad para asumir que una mujer dedique la mayor parte de su tiempo a la investigación sin culpabilizarla del "abandono" al que somete a su familia? Esta es una de las muchas preguntas que están en el aire y que las mujeres científicas actuales se ven obligadas a contestar, pero sólo ellas.

Si lanzamos una mirada a otros lugares del mundo en los que la pobreza y los conflictos sociales y políticos son endémicos la situación de las mujeres es peor que la que tuvieron nuestras antepasadas hace trescientos años.

Nuestra reflexión pretende ir en los dos sentidos, en principio tomando de la historia aquellos aspectos que nos resultan válidos para analizar la situación actual, y, por supuesto, reivindicar el acceso de las mujeres a la educación en todas las naciones y culturas, y en especial al conocimiento científico y tecnológico.

2. Resolución de problemas y emociones.

2.1. Introducción

Ya hemos comentado que en la enseñanza de las matemáticas es conveniente, como afirmaba Freudenthal, "*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*" y una forma de conseguirlo, es organizar clases de resolución de problemas o proponer pequeñas investigaciones. Esto es bueno para todos y todas. Mejora el aprendizaje de los alumnos y de las alumnas.

2.1.1. El origen de los problemas.

Al principio, toda la Matemática se reducía a problemas de Geometría y Aritmética.

Los avances de la Matemática en Egipto y Mesopotamia estaban asociados a problemas prácticos de la vida cotidiana y posteriormente en Grecia, asociados a la Filosofía, pasaron a ser problemas teóricos.

En la antigua Grecia el origen de las Matemáticas se puede situar en el siglo VI antes de Cristo con Tales (escuela jónica) y Pitágoras (escuela pitagórica), aunque no tenemos documentos escritos anteriores a la época de Platón en siglo IV a. C.

Para los pitagóricos la palabra número sólo designaba a los naturales, una fracción era únicamente una relación o razón entre dos magnitudes del mismo tipo. Un grave problema en la Escuela fue conocer la existencia de segmentos inconmensurables ya que contradecía su filosofía basada en que el número y sus relaciones eran la esencia del universo, pero esto más que un problema fue el descubrimiento de los números irracionales.

Los tres problemas clásicos de la Matemática griega: *la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo* y *la trisección de un ángulo* han persistido durante siglos hasta demostrar que no tienen solución.

El problema de *la cuadratura del círculo* consiste en construir con regla y compás un cuadrado de la misma área de un círculo dado, propuesto por Anaxágoras (siglo V a.C.), cuando estaba en prisión, no fue resuelto hasta 1882 por Lindemann que demostró que el problema no tiene solución ya que π es trascendente.

El segundo problema *la duplicación del cubo* está asociado a una leyenda: En el siglo V a. C. se hace una consulta al oráculo de Delfos para combatir una horrible peste en Atenas, la respuesta del oráculo fue que había que duplicar el altar cúbico de Apolo. Los atenienses duplicaron la arista del altar, la peste no cesó y se comprobó que el volumen había aumentado ocho veces y no dos. Menecmo (siglo IV a. C.) observó que el problema consiste en encontrar el punto de corte de dos cónicas, pero no se puede resolver con regla y compás, esta demostración junto con la imposibilidad de dividir en tres partes un ángulo cualquiera, *la trisección de un ángulo*, se deben a Wantzel[1] (1837).

No resulta fácil fechar con precisión el nacimiento del razonamiento deductivo pero es evidente que surgió entre los siglos VI y IV a. C y se consolidó en la gran obra de la Matemática griega, *Los elementos*, escrita por Euclides (300 a. C.), era una especie de libro de texto que contenía los fundamentos de lo que en la época se consideraba, matemática elemental.

Esta obra, la más famosa de las matemáticas, escrita con mucho rigor y desarrollada en un perfecto orden lógico, no sólo ha sido el libro de texto para muchos estudiantes, sino que también ha sido el modelo para escribir y difundir una teoría matemática y para determinar el modo de comunicar y enseñar conocimientos del profesorado de matemáticas a lo largo de la historia.

En las clases de matemáticas, durante muchos siglos, nos hemos olvidado de los problemas cuya solución fue un elemento clave para construir y desarrollar una teoría matemática, y hemos enseñado como habíamos aprendido, desarrollando conocimientos con mucho rigor y en un perfecto orden lógico, priorizando el razonamiento deductivo, es decir, con la metodología de *Los elementos*, relegando la resolución de problemas a una tarea personal en la que el estudiante bucea de forma intuitiva la mejor forma de resolver un problema.

2.1.2. ¿Qué es un problema?

Un **problema matemático** es una situación en la que hay un objetivo que conseguir superando una serie de obstáculos, siempre que el sujeto que

[1] Wantzel (1837): *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*.

afronta la situación no conozca procedimientos o algoritmos que le permitan alcanzar el objetivo.

Un problema tiene distinta calificación en función de la persona que se lo plantee, y es evidente que lo que son problemas para unos no lo son para otros. Así cuando una persona sabe los rudimentos del lenguaje algebraico, un problema que pueda resolverse planteando una ecuación de primer o segundo grado o un sistema de ecuaciones no es un problema, sino un **ejercicio** al que se le aplica una regla fija que es la notación algebraica y los algoritmos para resolver las ecuaciones que resultan. También es distinto un problema de una **investigación**, que al ser un proceso más abierto, es la persona quien se plantea el objetivo que quiere conseguir. Así, cuando un estudiante al resolver un problema se hace preguntas, intentando generalizar el resultado o modificar las condiciones iniciales, está realizando una investigación. Podemos pues distinguir entre ejercicio, problema, e investigación.

Las características de un buen problema, el que consigue involucrarnos en el proceso de su resolución, dependen de los conocimientos y las habilidades de la persona que se lo plantea, y desde esta perspectiva, existen rasgos que caracterizan los buenos problemas:

- Es una tarea abordable que creemos poder resolver.
- Parece un reto interesante, sin trampas.
- Supone un desafío a las capacidades matemáticas de un buen resolutor de problemas.
- Su resolución proporciona el tipo de placer asociado a un desafío intelectual.

2.1.3. La heurística

El término fue introducido por Polya (1945) en su primer libro sobre resolución de problemas *How to solve it* en el capítulo *Breve diccionario de heurística* en el que matiza el concepto, que hasta entonces tenía, *ars inveniendi*, como la rama del saber que estudia los métodos de la invención y del descubrimiento y con el nombre de "heurística moderna" le atribuye un contenido más preciso que consiste en comprender el conjunto de procesos mentales que intervienen en la resolución de problemas y es éste el significado que ha prevalecido desde entonces.

La **heurística** como "arte de resolver problemas" trata de desvelar el conjunto de actitudes, procesos generales, estrategias y pautas que favorecen la resolución de problemas en general y en particular de los problemas matemáticos.

El método heurístico favorece la adquisición de conceptos, que se van formando paulatinamente mediante pruebas y refutaciones, frente al método deductivo en el que se pretende dotar de significado a una palabra mediante una definición formal.

En cierta forma la heurística, respecto a su método y no necesariamente a contenidos explícitos, asume la ley biogenética según la cual, la ontogénesis (desarrollo del ser) repite la filogénesis (desarrollo de la especie). Es decir, el proceso de desarrollo del pensamiento matemático en cada persona debe ser similar a su desarrollo histórico. Esto no implica que cada concepto matemático haya que introducirlo necesariamente mediante su génesis histórica (aunque muchas veces estas referencias pueden ser muy beneficiosas e instructivas para la formación y consolidación de conceptos), sino que se refiere esencialmente a repetir el método y los procesos generales de razonamiento que han hecho surgir históricamente el pensamiento matemático.

2.1.4. Historia de la resolución de problemas

En la historia de la resolución de problemas hay un antes y un después, determinados por los trabajos de G. Polya desde 1945 hasta los años sesenta[2].

Como antecedentes históricos podemos remontarnos al primer gran estudioso de heurística conocido, Pappus de Alejandría (320. Libro VI) con reflexiones propias sobre procesos de razonamiento, utilizando un método de análisis – síntesis. Leibniz (1646 – 1716), en su publicación *Arte de la invención* de la que sólo se conservan anotaciones y B. Bolzano (1781 – 1848) que dedica especial atención a la heurística en sus trabajos de lógica.

Como precursor para establecer fases en el proceso de resolución de problemas se puede citar a Wallas que en *The Art of Thought* (1929) describe el proceso de invención dividido en cuatro fases:

1. Preparación: Recogida de información y primer intento de solución,

2. Incubación: Dejar el problema de lado,

3. Iluminación: Aparición de una idea clave y

4. Verificación: Se comprueba la solución

[2] *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954) *y Mathematical Discovery* (1962 -1965)

El verdadero impulsor del proceso de resolución de problemas, como antes hemos comentado, fue G. Polya, el modelo teórico que desarrolla, incluye un diccionario de heurística que agrupa, las estrategias, las pautas, los procesos generales, los métodos de demostración, las emociones, ... que intervienen en la resolución de problemas. Considera que el razonamiento heurístico aunque poco riguroso resulta un método muy plausible para resolver un problema y compara la intuición y la demostración formal con la percepción de un objeto por dos sentidos diferentes.

Considera la resolución de problemas como un proceso lineal en el que establece cuatro fases:

1. Comprender el problema,

2. Concebir un plan,

3. Ejecutar un plan, y

4. Examinar la solución obtenida.

En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución.

A finales de los sesenta el trabajo de Kilpatrick introduce el concepto de protocolo que es el acta en que queda constancia de los fenómenos interesantes que han ocurrido a lo largo de nuestra ocupación en el problema y el trabajo de I. Lakatos[3] que es una crítica al pensamiento formalista de la época.

[3] *Profs and Refutations. The Logics of Mathematical Discovery* (1976)

Después de Polya los trabajos más importantes son los de A. Schoenfeld (1979), en *Mathematical problem solving* (1985) introduce una nueva perspectiva en el proceso, mientras Polya estudia y describe al resolutor ideal Schoenfeld basa su estudio en resolutores reales e intenta categorizar sus conductas y describir el proceso como un conjunto de episodios.

También en la década de los ochenta se desarrolla el trabajo de L. Burton (1984) que aparece en *Thinking, things, through* (1989) y *Thinking Matemathecaly* (1882) de J. Mason, L. Burton y K. Stacey. Lo más relevante de este modelo es diferenciar el proceso de pensamiento de la propia conciencia del proceso, y la importancia que tienen las emociones del resolutor, que consideran elementos indispensables en el proceso de razonar matemáticamente. A pesar de que se considera que la resolución de problemas es una tarea compleja, que no se lleva a cabo de forma lineal, se presenta dividida en tres fases:

1. Abordaje,
2. Ataque
3. Revisión.

Entre los modelos de resolución de problemas de esta década está el que propone Goldin (1983), que no es un modelo de fases sino de los lenguajes implicados en el proceso, formulado como un modelo de competencia o el de J. D. Bransford, B. S. Stein *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear* (1986), en el que los problemas matemáticos son un caso particular de los cotidianos, el proceso queda divido en cinco fases utilizando las letras de la palabra IDEAL:

I = Identificación,

D = Definición,

E = Exploración,

A = Actuación,

L = Logros alcanzados.

En España en 1991 se publica *Para pensar mejor* de Miguel de Guzmán en el que se destaca la identificación de los distintos tipos de bloqueos, la importancia de la actividad subconsciente en el proceso de resolución de problemas, el desarrollo de la creatividad, y la importancia de realizar un protocolo en el proceso de resolución. En *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (2003) reflexiona sobre la organización de una clase de problemas y las técnicas que la facilitan como el torbellino de ideas o el trabajo en grupo.

2.1.5. Mujeres y resolución de problemas

Desde nuestra preocupación por la Coeducación y las Matemáticas, teníamos la vaga impresión de que la participación femenina en los diversos concursos de resolución de problemas y en las Olimpiadas Matemáticas era inferior a la masculina, sensación basada en ciertos hechos y en apreciaciones aisladas que no nos atrevíamos a confirmar estadísticamente. Pero cuando en 1992 recopilamos datos referidos a los últimos años de la Olimpíada Iberoamericana, la Olimpiada Matemática y diversos Concursos de Resolución de Problemas en un informe para el Seminario: "*Differential performance in assessment of Mathematics at the end of Compulsory schooling*" que se celebró en la Universidad de

Birminghan, dirigido por Leone Burton, al analizar los resultados observamos una diferencia estadísticamente significativa a favor de los varones. A partir de entonces tuvimos la firme decisión de estudiar las causas, elementos determinantes o consideraciones de algún tipo que pudieran conducir a una explicación de este hecho.

Los datos, desde entonces, cuando han pasado 20 años, no han cambiado de forma significativa. En las Olimpiadas Matemáticas españolas de los tres últimos años (2010, 2011 y 2012) ninguna alumna ha obtenido la medalla de oro[4], la medalla de plata la han recibido el 5,5 % y la de bronce un 9,25%. En estos datos hay que tener en cuenta que la participación de las alumnas en esta fase nacional es menor ya que, por ejemplo, en la fase local de la Comunidad de Madrid en los últimos seis años (2006 – 2011) el porcentaje de alumnas que ha pasado a la fase nacional ha sido el 3,7 %, aunque el porcentaje de alumnas premiadas en esta fase local aumenta ligeramente al 10%. También aumenta el porcentaje de alumnas premiadas en los concursos de resolución de problemas, por ejemplo en el Concurso de Primavera[5] que se realiza en la Comunidad de Madrid el porcentaje de alumnas premiadas en los tres últimos años ha sido el 14,5 %.

Excluimos desde un principio aquellas teorías ancladas en el determinismo biológico, que de una manera simplista consideran al varón superior a la mujer en la tarea de resolución de problemas matemáticos. Tampoco concedimos validez alguna a aquellas otras que se disfrazan de una falsa neutralidad y que, de este modo no permiten apreciar la superioridad que conceden al varón. Nos referimos, por ejemplo, a la teoría

[4] La medalla de oro la reciben 6 personas, la de plata 12 y la de bronce 18.

[5] En este concurso cada año se dan 150 premios con alumnado desde 5º y 6º de Primaria hasta Bachillerato.

que considera la capacidad de resolución de problemas como una variable X que está igualmente repartida en la humanidad, de forma que su media en los colectivos masculino y femenino coincide, o al menos es muy similar, pero cuya desviación típica es mucho mayor entre los varones que entre las mujeres. Esta teoría, que podría parecer en un principio igualitaria, es profundamente machista, pues aunque considera que no hay mujeres esencialmente torpes, sí conduce a la idea de que hay varones especialmente hábiles debido a determinismos biológicos, lo que en cualquier momento podría servir para justificar lo injustificable: mayor presencia masculina en los puestos sociales de más responsabilidad, en los cargos directivos de las empresas, etc. utilizando como argumento la relación intrínseca que existe entre la resolución de problemas matemáticos y la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Vamos a centramos en elementos clave, cuya importancia en la resolución de problemas puede ser determinante:

- La decisiva influencia que ciertos estereotipos sociales considerados como “femeninos” ejercen sobre el comportamiento de las mujeres. Estas conductas diferenciadas, transmitidas culturalmente, están reforzadas por los distintos núcleos de socialización, para perpetuar dichos estereotipos con los cuales salen beneficiados generalmente los varones.

- Las emociones, que de alguna forma impregnan el proceso de resolución de problemas matemáticos, ya que surgen en una situación en la que se entremezclan sentimientos de contradicción, tensión y sorpresa en una situación de preguntas y reflexiones.

- Los bloqueos emocionales que surgen por cierta falta de motivación debido a la pereza que puede suponer comenzar una tarea nueva, son comunes indistintamente en varones y mujeres, sin embargo también están los que se producen por miedo al fracaso, a la equivocación, al ridículo o a la ansiedad para obtener la solución, y hay que tener en cuenta que estas emociones son en general más comunes entre las mujeres. Otros bloqueos que intervienen de forma decisiva en el proceso son los de tipo cultural, y es que en general, pero sobre todo a las mujeres y debido esencialmente a la educación recibida, influye decisivamente el hecho de que en la sociedad actual haya que ser muy prácticas, lo que lleva a pensar que resolver problemas matemáticos es algo parecido a un juego y que por otro lado el hecho de ser creativas es algo tan excepcional, tan poco frecuente, que no vale la pena perder el tiempo en desarrollar los elementos que conduzcan a ello.

- La autoestima es por lo general mucho menor en las mujeres que en los varones. Lo que se pone fácilmente de manifiesto, como ya hemos comentado, cuando después de un examen se pregunta a los alumnos/as por las razones de sus resultados. Mientras los chicos basan el éxito en su capacidad y el fracaso en su falta de trabajo, las chicas en general piensan que son mejores debido a su trabajo personal y que fracasan por su falta de capacidad.

- El enunciado del problema actúa de forma determinante sobre la motivación. Debemos conseguir que las características externas que especifican, y que no forman parte de la esencia del problema, al menos no sean sexistas, no refuercen estereotipos y que resulten atractivas a las mujeres.

En definitiva, la situación específica de la resolución de un problema matemático es compleja por influir en ella de forma determinante las consideraciones anteriores, y por tanto creemos necesario antes de realizar cualquier tipo de comparación, realizar un estudio detallado de los procesos que intervienen en su resolución y de los métodos que permiten mejorar las capacidades que favorecen el desarrollo de la inteligencia y la creatividad, estableciendo una serie de pautas o recomendaciones que sitúen a las alumnas en una posición de igualdad respecto a los alumnos, de modo que nos permitan mejorar su rendimiento y establecer elementos más objetivos.

2.2. Procesos generales del pensamiento matemático

En el modelo de resolución de problemas que presentamos, consideramos en primer lugar los **procesos generales** del pensamiento matemático como son la generalización, la particularización, la inferencia, la deducción, la creatividad, el trabajo subconsciente y las técnicas de demostración matemática. Son los ejes que articulan la resolución de problemas. Las **estrategias heurísticas** son herramientas que nos permiten transformar el problema en otra situación y nos acercan hacia la solución. Las **pautas heurísticas** son sugerencias que nos prestan una gran ayuda en aspectos muy concretos del problema y en momentos de bloqueo.

Por último hay **actitudes** que facilitan positivamente el proceso como son la flexibilidad, la perseverancia, el gusto por el riesgo y por afrontar situaciones que supongan un reto, y la práctica de reflexionar sobre la experiencia acumulada.

Al investigar a los buenos resolutores de problemas se han obtenido dos conclusiones: La primera es que la capacidad para resolver problemas mejora con la práctica, la segunda es que el análisis de los métodos matemáticos, así como el de las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas también mejora dicha capacidad.

2.2.1. Particularizar y generalizar

Los procesos de generalización y particularización son especialmente importantes en la resolución de problemas. Si particularizar es una de las bases cuando empezamos a enfrentarnos al problema, generalizar es imprescindible en el momento de hacer conjeturas y cuando después de encontrar la solución, intentamos establecerla en contextos más amplios.

Particularizar

Particularizar consiste en concentrar la atención en ejemplos concretos, para entender mejor el significado del problema. Es además una sugerencia muy útil para salir de una situación en la que nos encontramos atascados, porque proporciona seguridad en momentos clave en los que hay peligro de abandonar la tarea, también se utiliza para verificar una solución. En este caso es conveniente, que aunque pensemos que una hipótesis es cierta, tengamos la habilidad suficiente de encontrar, si existen, las excepciones para refutar la regla.

Cuando elegimos ejemplos, podemos hacerlo de forma aleatoria, para hacernos una idea del significado del problema. Si lo hacemos de forma sistemática, con la vista puesta más en el porqué que en el qué, preparamos el camino a la generalización y cuando los elegimos hábilmente estamos comprobando si el esquema descubierto es o no el correcto.

Al particularizar es importante analizar los casos extremos, porque normalmente proporcionan información relevante. También es esencial que los objetos físicos o matemáticos que utilizamos como las figuras, se puedan manejar con la confianza de no cometer errores.

No hay que olvidar, que en los momentos de máximo bloqueo, en los que no sabes que hacer, particularizar extremadamente, puede ser una manera conveniente de abordar el problema, intentando alterar el problema hasta hacerlo más concreto, o incluso cambiando las condiciones hasta conseguir realizar algún progreso.

Particularizar un problema en casos concretos permite progresar en su resolución y es una ayuda en momentos de bloqueo. Particularizar sistemáticamente conduce a descubrir un esquema general que da una idea de por qué el resultado es verdadero. Comprobar si el esquema descubierto es o no correcto exige nuevas particularizaciones.

Generalizar

Generalizar significa pasar de un conjunto de objetos a otro conjunto más amplio que contenga al primero. Es también descubrir una ley general que permita justificar una conjetura, así como buscar un planteamiento más amplio del problema, cambiando el contexto, los datos o la solución.

La generalización permite hacer conjeturas a partir de unos pocos ejemplos. Ser sistemático y ordenado a la hora de particularizar ayuda mucho para generalizar, aunque es fácil engañarse y es preciso conseguir el equilibrio entre el crédulo, que acepta toda generalización, y el demasiado escéptico, que no es capaz de dar un salto en el vacío.

A veces generalizar un problema puede ser útil para resolverlo si éste es un caso particular de uno más general que conocemos, como ocurre en el siguiente problema de geometría del espacio que propone G. Polya:

> *Dada una recta y un octaedro regular en el espacio determina un plano que contenga a la recta y divida al octaedro en dos partes de igual volumen.*

Este problema puede sugerirnos otro más general:

Dada una recta y un sólido en el espacio con centro de simetría, determinar el plano que contiene a la recta y divide al sólido en dos partes iguales.

El plano que tenemos que hallar pasa por el centro de simetría del sólido. Luego el problema inicial se reduce a calcular un plano que contenga a la recta y al centro de simetría del octaedro.

Esto sugiere lo que denomina G. Polya "*La paradoja del inventor: El plan más ambicioso puede ser también el mejor*". Y aunque resulte paradójico ocurre a veces, que un problema más general, se resuelve más fácilmente que uno particular.

Otra idea importante sobre el proceso de generalización, es que muchas veces es conveniente transformar un problema numérico en uno literal, ya que tiene una dificultad similar y tener una solución general en función de unos parámetros nos permite variar los datos y verificar los resultados.

Cuando se modifica el problema original y se buscan analogías con otros resueltos anteriormente, estamos utilizando una mezcla de generalización y particularización. Por una parte estamos considerando características particulares y por otra buscamos en la experiencia personal un caso más amplio que las pueda abarcar.

Esta es una de las razones por la que la práctica influye tanto en la resolución de problemas. Cada problema resuelto añade información que nos ayuda a resolver otros problemas, además el hecho de resolverlo satisfactoriamente aumenta la confianza en nosotros mismos y nos genera el deseo de resolver otros problemas.

2.2.2. Inferencia y deducción

Inferencia

La inferencia es una forma de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares. Lo hemos llamado inferencia, aunque podríamos llamarlo inducción o acción de conjeturar.

La inferencia trata de descubrir, a partir de la observación, la regularidad y la coherencia, basándose en la particularización, la generalización y la analogía.

Para que surja una conjetura ante un problema se necesita confianza en sí mismo y valentía, que se consigue con el poso que dejan los éxitos anteriores al resolver otros problemas, y relajando las tensiones que produce el hecho de querer encontrar una solución y haber agotado las posibles sugerencias.

Conjeturar supone generalizar, pero no basta con acumular una serie de casos y esperar que a surja la regla general, es necesario organizar la información de forma sistemática, y no hay que olvidar, que formular una conjetura no es resolver el problema, es necesario justificar que es cierta.

Deducción

Justificar una conjetura es descubrir una estructura subyacente o una relación que une los datos con la solución mediante una serie de razonamientos. Es responder ¿por qué? mediante una serie de razonamientos lógicos o teoremas matemáticos.

Cuando los alumnos y alumnas proponen conjeturas como resultado de considerar una serie de particularizaciones y en ningún momento se preguntan por el por qué de esa conjetura, puede ocurrir, y sucede con mucha frecuencia, que determinan como verdadera una conjetura que es falsa.

Conseguir que alumnos y alumnas de Secundaria justifiquen las inferencias que realizan es bastante difícil. Una vez que han hecho una conjetura y la han comprobado para cuatro o cinco casos, ya es cierta para ellos. Por lo que, al menos, si no conseguimos que la justifiquen, si podemos enseñarles a ser críticos en la comprobación, intentando refutar las conjeturas, eligiendo hábilmente casos particulares para adquirir cierto grado de escepticismo con respecto a nuestros razonamientos y los de los demás.

2.2.3. Creatividad.

La creatividad es un fenómeno raro y muy escaso. Cuando se presenta se encuentra tan impregnado de azar, casualidad y trabajo que nos resulta muy difícil determinar las conductas y procedimientos que la facilitan. Lo que sí podemos asegurar es que cuando se produce un descubrimiento el inventor o la inventora posee las habilidades necesarias para lograr dar el salto en el vacío que separan un conjunto de conocimientos conocidos de uno nuevo y desconocido.

Probablemente valoramos tanto la creatividad por las ventajas que todo descubrimiento tiene para la sociedad, y porque conocemos poco los mecanismos que hacen surgir el pensamiento creativo. Sin embargo lo que sí parece posible es aprender a desarrollar nuestra creatividad de forma parecida a como aprendemos a leer o hablar.

También hay rasgos característicos de la personalidad creativa como son la originalidad, la flexibilidad, la autoconfianza, la curiosidad intelectual y la capacidad de analizar, sintetizar e imaginar. Muchas veces cuando establecemos relaciones a partir de distintas ideas tenemos la sensación de estar construyendo algo nuevo, la pregunta es: ¿Es esto pensamiento creativo o son simplemente modificaciones de razonamientos o pensamientos preexistentes? Sin embargo al formular hipótesis, o visualizar ideas que nos conducen hacia la solución de un problema, y cuando generalizamos el resultado, o modificamos los datos para obtener un nuevo problema, tenemos la sensación de haber realizado un descubrimiento.

En el análisis del proceso de la creatividad (Maslow; 1983, 85) podemos distinguir entre creatividad primaria y secundaria. La **creatividad primaria** es la fase de inspiración en la que se vive sólo el momento del problema que se trata de resolver y en la que la persona creativa queda inmersa en el presente y fascinada por la situación, incluso a veces se la describe como una pérdida o transcendencia de sí mismo que está en los límites de lo sobrehumano o sobrenatural. Sin embargo la versión más simplificada de esta experiencia sería la fascinación o concentración lo suficientemente fuerte para retener completamente nuestra atención en la cuestión que estamos considerando.

Por otra parte está la **creatividad secundaria** que es el proceso de elaboración de esa primera inspiración donde interviene la disciplina, el trabajo, la preparación, la autocrítica, el análisis de los datos, la síntesis de los resultados, etc., que son elementos indispensables para transformar una idea brillante en un producto creativo. No hay que olvidar que muchas veces el tiempo necesario para aprender a utilizar los recursos, medios y materiales que necesita una persona creativa para transformar una inspiración en una obra de arte puede ser media vida.

Quizás puede parecer excesivo relacionar la creatividad con la resolución de problemas matemáticos, sobre todo si estamos considerando problemas cuya solución esta preestablecida, en el sentido de que la conoce el profesor o la profesora, la sabe el amigo o la amiga que nos está planteando el problema o simplemente podemos buscarla en las últimas páginas del libro donde estamos leyendo el problema. Sin embargo la existencia predeterminada de la solución no influye en el desarrollo del proceso. Podemos compararlo con el proceso de un descubrimiento científico en el mundo actual que debe apoyarse en los múltiples elementos técnicos realizados anteriormente y llega a ser un producto de la sociedad. En un proceso creativo, más importante que la existencia o no de solución, es el hecho de encontrarla a partir de los procesos mentales que permiten relacionar dos situaciones claramente diferenciadas y que conllevan al descubrimiento.

En el proceso de resolución de problemas hay momentos que los hemos experimentado muchas veces y que aunque no se presentan necesariamente en cada uno de los problemas que resolvemos, están muy relacionados con la creatividad primaria. Nos estamos refiriendo al "*trabajo subconsciente*" y a la técnica del "*brainstorning*" o "*torbellino de ideas*".

Trabajo subconsciente.

¿Quién no ha tenido alguna experiencia en la que, después de una noche de descanso o de varios días sin pensar conscientemente en un problema, como por arte de prestidigitación se nos ocurre la solución? La sensación que tenemos está muy cerca del mundo mágico y sorprendente de la mente, del que sólo conocemos una mínima parte de su capacidad y posibilidades, aunque normalmente lo explicamos racionalmente con argumentos relacionados con el hecho de seguir trabajando en el problema de forma inconsciente. Pero para que surja una idea durante el sueño, es necesario que previamente hayamos realizado un trabajo consciente, y que éste nos haya provocado una tensión mental producida por el ardiente deseo de resolverlo.

Torbellino de ideas o "*brainstorning*"

Es una fase de producción de ideas en la que, a partir de las sugerencias individuales y espontáneas de los componentes de un grupo, se pretende buscar los caminos más adecuados que nos llevan hacia la solución de un problema. Algunas ideas son muy dispares entre sí, pero la mayoría de ellas surgen encadenadas, modificando o perfeccionando una idea anterior, de esta forma la mayor parte de las que al final se seleccionan se han configurado combinando diversas aportaciones individuales.

No se permite la crítica, ni siquiera enjuiciar las ideas de los otros, con objeto de crear un ambiente de cooperación en el que nadie se encuentre inhibido. Es importante que surjan muchas ideas ya que cada una de ellas además del valor que tiene en sí misma, puede servir para inducir una idea en los y las demás. Hay que tener en cuenta la atmósfera de interacción positiva que se crea en el grupo, haciendo desaparecer los temores personales provocados por el miedo al fracaso, a equivocarse o a hacer el ridículo. También es importante resaltar una característica muy particular de esta técnica cuando se utiliza en grupo, y es que adquiere una dimensión distinta, que supera ampliamente la suma de los resultados que individualmente podrían obtener cada uno y cada una de sus componentes.

2.2.4. Técnicas de demostración en Matemáticas

Reducción al absurdo

El método matemático de **reducción al absurdo** consiste en partir de una hipótesis falsa, deducir consecuencias correctamente derivadas pero igualmente falsas, hasta llegar a una consecuencia evidentemente falsa. Para G. Polya:

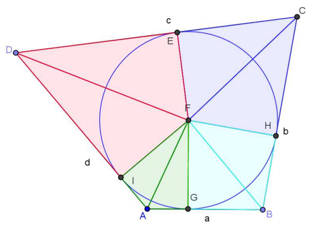
> *"La demostración indirecta establece la verdad de una afirmación demostrando la falsedad de la contraria".*

Una demostración indirecta es más fácil de realizar y en muchas ocasiones, no es difícil convertir una demostración indirecta en una demostración directa.

Existen ejemplos clásicos de demostraciones indirectas en la historia de las Matemáticas, que ya es utilizada por Euclides en *Los Elementos*. Un ejemplo que utiliza este método es el siguiente:

"Los lados de un cuadrilátero":

En un cuadrilátero convexo se puede inscribir una circunferencia si y sólo sí la suma de las longitudes de los lados opuestos coincide.

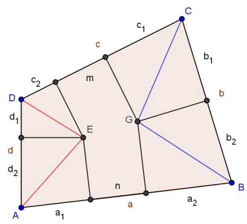


Si en un cuadrilátero se puede inscribir una circunferencia a partir de la figura adjunta es evidente que la suma de las longitudes de los lados opuestos coincide, es decir, $a + c = b + d$

Además el centro de la circunferencia inscrita es el punto en el que se cortan las cuatro bisectrices por lo tanto podemos inscribir una circunferencia si y sólo sí las bisectrices concurren en un punto.

Para demostrar que si la suma de las longitudes de los lados opuestos coincide entonces se puede inscribir una circunferencia utilizamos el método de reducción al absurdo.

Suponemos que no se puede inscribir, entonces las bisectrices no concurren en un mismo punto y a partir de la figura adjunta es evidente que la suma de las longitudes de los lados opuestos no coincide.



Inducción matemática

La **inducción matemática** es el método que se utiliza para demostrar conjeturas sobre números naturales. Como ejemplo se propone el siguiente problema que se resuelve fácilmente con este método:

> ***"Los dos colores":*** *Una partición del plano con n rectas puede ser coloreada con dos colores distintos de modo que dos regiones que tienen una frontera común tengan colores diferentes.*

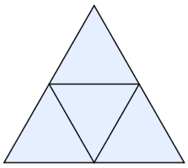
Principio del palomar o principio de Dirichlet

Un método de demostración matemática que Dirichlet utilizó en teoría de números y con el que logró resultados asombrosos es el **principio del palomar o principio de Dirichlet** que podemos formular del siguiente modo:

"Si m palomas ocupan n nidos y m > n, entonces hay al menos un nido con dos palomas".

Un ejemplo concreto en el que podemos aplicar esta técnica es el siguiente:

En un triángulo equilátero de lado 1, se eligen cinco puntos en su interior, prueba que hay como mínimo dos cuya distancia es menor que 1/2.



La solución es evidente al dividir el triángulo en cuatro triángulos equiláteros de lado 1/2 y aplicar el principio del palomar.

2.3. Fases de los modelos de resolución de problemas

Algunos modelos de resolución de problemas consideran el proceso dividido en fases, que el resolutor recorre de forma más o menos lineal, ya que es conveniente concluir cada fase para pasar a la siguiente. Estas fases no siempre se presentan explícitamente, depende en parte del tipo de problema y de su dificultad. Además tampoco se presentan aisladas, sino que cada fase interfiere con la anterior y con la siguiente.

En este apartado vamos a proponer la solución de algunos problemas que consideramos interesantes para resolver en clase. Vamos a reflexionar sobre fases de resolución. Pero lo que nos parece interesante es que son problemas geométricos, o problemas en los que se manipula algún tipo de material, o problemas que suscitan la discusión y el trabajo cooperativo en grupo.

2.3.1. Modelo de Polya

En el modelo de resolución de problemas que propone Polya establece cuatro fases: Comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución. En cada una de estas fases hay una serie de pautas o sugerencias heurísticas que pretenden fijar la atención sobre aspectos concretos del problema, para sugerir ideas que permitan avanzar en su resolución. No todas las pautas sirven para todos los problemas, sino que forman un conjunto de posibilidades entre las que debemos elegir aquellas que se adaptan a cada problema determinado. Lo que se pretende no es enfrentarnos a un problema con una lista de sugerencias heurísticas, sino interiorizarlas para que posteriormente surjan de forma espontánea, vamos a establecer a continuación algunas de las pautas más características de cada una de las fases de este modelo.

1. Comprender el problema.

Es una fase de preparación donde se examina la situación, se manipula para entender mejor, y se relaciona con situaciones semejantes. En esta fase se pretende que después de leer el enunciado del problema y aceptar el reto de resolverlo seamos capaces de contestar las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuál es la condición?
- ¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?

2. Concebir un plan.

Consiste en determinar las estrategias que transforman el problema para facilitar la solución y averiguar las conexiones entre los datos y las incógnitas. Si nos encontramos atascados las preguntas que nos pueden ayudar a superar el bloqueo son las siguientes:

- ¿Conozco algún problema parecido a este?
- ¿En qué se parece?

- ¿En qué se diferencia?
- ¿Qué relación tienen los datos entre sí?
- ¿Qué puedo deducir a partir de los datos?
- ¿Puedo dividir el problema en partes?
- ¿Puedo enunciar el problema de forma diferente?
- ¿Y si el problema no tiene solución?
- ¿Hay algún dato contradictorio en el problema?
- ¿He utilizado todos los datos?
- ¿Hay alguno redundante o irrelevante?

Al final de esta fase se debe tener un plan de resolución.

3. Ejecutar un plan.

En esta fase se realizan los cálculos y operaciones necesarios para aplicar los procedimientos y estrategias elegidos en la fase anterior. Es importante tener en cuenta las siguientes sugerencias:

- ¿He comprobado cada uno de los pasos?
- ¿Puedo justificar que cada paso es correcto?
- ¿Puedo demostrarlos?

Ante las dificultades no hay que desistir hasta ver claramente que el plan no es válido y en ese caso hay que ser flexible, abandonarlo y volver a la fase anterior de búsqueda.

4. Examinar la solución.

Consiste en examinar a fondo el camino seguido, comprobar cálculos, razonamientos, que la solución corresponde al problema propuesto, localizar rutinas útiles, resolverlo de una forma más sencilla o más elegante, así como intentar generalizarlo a un contexto más amplio, buscar nuevos problemas relacionados y la posible transferencia de resultados, métodos y procesos.

Las pautas heurísticas asociadas a esta fase son:

- ¿Puedes verificar el resultado?
- ¿Puedes verificar el razonamiento?
- ¿Te parece lógica la solución?
- ¿Puede haber otra solución?
- ¿Puedes resolverlo de otra forma?
- ¿Puedes generalizar el resultado?
- ¿Eres capaz de transformar el problema resuelto en otro similar?
- ¿Puedes plantearlo con datos más generales?

Ejemplos

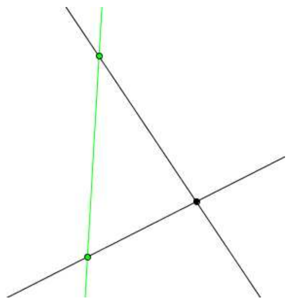
Vamos a analizar dos problemas, poniendo de manifiesto las fases de resolución de este modelo describiendo la situación que tiene lugar cuando se proponen en una clase con alumnos de Secundaria.

"Regiones":

Si n rectas de un mismo plano se cortan dos a dos en puntos distintos, se parte así el plano en regiones distintas. ¿Cuál es el número de esas regiones?

1. Comprender el problema.

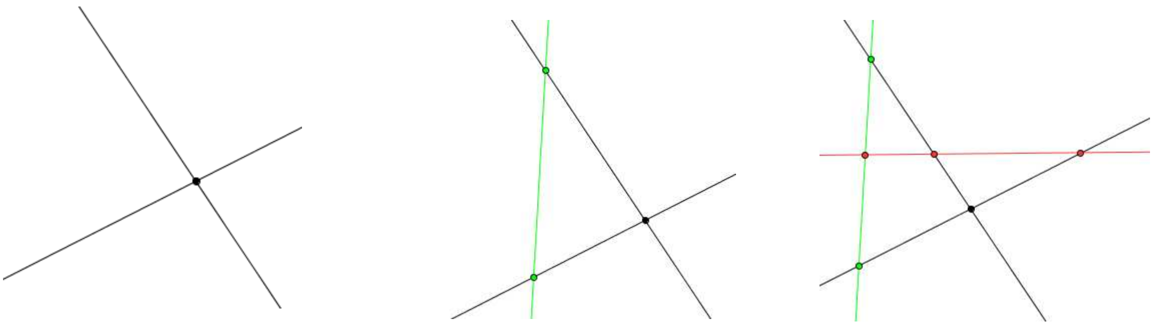
El primer paso es comprender bien el enunciado. Lo normal cuando se plantea este problema en clase, es que comiencen a dibujar casos particulares.



Cuando se dibujan tres rectas se observan: tres puntos, tres segmentos finitos, seis semirrectas y siete regiones, una finita y 6 infinitas.

2. Concebir un plan.

Lo primero que intenta el alumnado es relacionar los puntos, las semirrectas y los segmentos con las regiones para lo que tiene que analizar casos particulares de forma sistemática.



Suelen llegar a diferentes conclusiones como que el número de semirrectas es el doble que el número de rectas y que además este valor coincide con el número de regiones infinitas. A veces también observan que el número de segmentos finitos e infinitos que hay en cada recta coincide con el número de rectas, por lo que el número total de segmentos es el cuadrado del número de rectas.

Sin embargo no parece fácil relacionar el número de puntos y segmentos con el de regiones por lo que parece adecuado realizar una tabla para buscar regularidades en función de los resultados.

Rectas	**Puntos**	**Regiones**	**Segmentos**	**Semirrectas**
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

3. Ejecutar un plan.

Cuando tenemos n rectas: Sea P_n el número de puntos, R_n el número de regiones, S_n el número de segmentos (los finitos y las semirrectas)

Número de puntos con n rectas, P_n:

- Ley de recurrencia: $P_n = P_{n-1} + n - 1$ Hipótesis: $P_n = C_{n,2}$

Número de regiones con n rectas: R_n:

- Ley de recurrencia: $R_n = R_{n-1} + n$ Hipótesis: $R_n = 1 + C_{n+1,2}$

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n$

$R_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$ => $R_n = 1 + C_{n+1,2}$

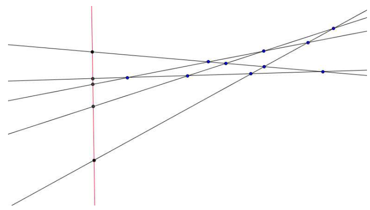
El número de segmentos (incluyendo las semirrectas) con n rectas es $S_n = n^2$

El número de semirrectas coincide con el número de regiones infinitas, y es $2n$

4. Examinar la solución.

- Cada punto es la intersección de dos rectas por lo tanto $P_n = C_{n,2}$
- El número de segmentos es el cuadrado del número de rectas: En cada una de las rectas hay n -1 puntos y n segmentos (finitos y semirrectas) y como hay n rectas se tiene que $S_n = n^2$.
- El número de semirrectas es el doble que el número de rectas, $2n$, y, es evidente, que este valor coincide con el número de regiones infinitas.
- La hipótesis respecto al número de regiones es cierta demostrada por inducción:

Para $n = 2$ el número de regiones es 4



Supuesta cierta para n rectas, añadimos una nueva recta.

Se observa que con la nueva recta se añaden n nuevos puntos y $n + 1$ nuevos segmentos (2 son semirrectas) que dividen en dos n +1 regiones por lo tanto hay $n + 1$ regiones más y $R_{n+1} = R_n + n + 1$

$$R_{n+1} = 1 + (n+1)\cdot\frac{n}{2} + n + 1 = 1 + (n+1)\cdot(\frac{n}{2}+1) = 1 + \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} \; R_{n+1}$$

$$= 1 + C_{n+2,\,2}$$

Y queda demostrada la hipótesis de inducción.

Generalización el resultado: ¿Qué ocurriría si p de las n rectas fueran paralelas? ¿Y si q rectas de las n convergen en un mismo punto?

Otro problema es el siguiente:

"La tira de papel":

Con una tira de papel, pliégala por la mitad y luego por la mitad otra vez, doblando siempre en el mismo sentido. Si la desdoblas, observas que hay tres marcas una "hacia arriba" y dos "hacia abajo". Si la doblas n veces y luego la desdoblas completamente. ¿Cuántas marcas tendrás en total? ¿Cuántas de ellas son "hacia arriba" y cuántas "hacia abajo"?

1. Comprender el problema.

Después de leer detenidamente el problema, la primera acción es coger una tira de papel para doblarla y desdoblarla sucesivamente, señalando una de las caras para doblarla siempre en el mismo sentido.

Normalmente hay que coger varias tiras de papel doblarlas varias veces y una buena idea es nombrar cada doblez para indicar si es hacia arriba o hacia abajo.

A partir del quinto doblez es difícil determinar las marcas en una tira de papel de medida A4 por lo que conviene hacer una tabla que agrupe de modo sistemático los resultados obtenidos.

2. Concebir un plan.

La tabla se puede realizar de diferentes formas, contando sólo el número de marcas, determinando las marcas hacia arriba y hacia abajo, o mucho mejor estableciendo el orden en el que aparecen, para lo que es necesario elegir una notación adecuada para diferenciar las marcas, por ejemplo, *a* para las marcas hacia arriba y *b* para las que están hacia abajo.

Dobleces	Nº de marcas hacia arriba	Nº de marcas hacia abajo	Nº de marcas totales	Marcas
1	*0*	*1*	*1*	*b*
2	1	2	3	*bba*
3	3	4	7	*bbabbaa*
4	7	8	15	*bbabbaabbbaabaa*
5	15	16	31	

3. Ejecutar un plan.

La tabla anterior permite formular hipótesis a partir de los resultados, es decir, encontrar una regla para determinar el número de marcas sin necesidad de plegar la tira

Con respecto al número total de marcas 1, 3, 7, 15, 31, …, una buena hipótesis es que si n es el número de dobleces el número total de marcas es: $2^n - 1$.

Se observa también que el número de marcas hacia arriba es una menos que el número de marcas hacia abajo.

Además si para n dobleces el número de marcas hacia abajo es 2^{n-1} y el número de marcas hacia arriba es $2^{n-1} - 1$, su suma, el número total de marcas, es: $2^n - 1$.

4. Examinar la solución.

Se trata de demostrar que la hipótesis sugerida es cierta, en el primer doblez la tira queda dividida en dos partes, en los sucesivos cada parte sin marcas del doblez anterior queda dividida en 2, por lo tanto después de n dobleces la tira queda dividida en 2^n partes separadas por 2^{n-1} marcas.

Una posible generalización sería explicitar el tipo de marca que ocupa un lugar para un número de dobleces dado, por ejemplo, cómo es la marca, hacia arriba o hacia abajo, que ocupa el lugar 25 cuando se realizan 7 dobleces.

La respuesta es el resultado de una buena experimentación que permita determinar el orden en el que aparecen las diferentes marcas, que ya estaba en nuestra tabla. Una regla recurrente consiste en intercalar las marcas del doblez anterior simbolizadas por (*) en la serie:

$$b*a*b*a*b*a \ldots b*a$$

2.3.2. Modelo de Mason-Burton-Stacey

Este modelo analiza el pensamiento y la experiencia matemática en general, que engloba como un caso particular la resolución de problemas. Además muestra la influencia que tiene el desarrollo del razonamiento matemático en el conocimiento de nosotros mismos y del mundo que nos rodea.

Las **emociones** de quien resuelve el problema, son elementos indispensables en el proceso de razonar matemáticamente, que considera motivado por una situación en la que se mezclan contradicción, tensión y sorpresa en una atmósfera de preguntas, retos y reflexiones.

Otra característica es el enfoque positivo que se concede al hecho de estar atascado o atascada, que considera una situación muy digna y constituye una parte esencial del proceso de mejora del razonamiento, valorando más un intento de resolución fallido que una cuestión resuelta rápidamente y sin dificultades. Ya que lo que importa no son las respuestas sino los procesos.

Una sugerencia importante es dejar por escrito todo el proceso de resolución con objeto de poder recordar y reconstruir un momento determinado del problema y como un método para superar el bloqueo, cuando el resolutor/a se encuentra sin saber que hacer. Además de las notas, también son importantes los rótulos que son símbolos que indican los estados de ánimo por los que se pasa, las ideas felices, los bloqueos, las situaciones delicadas en las que hay peligro de equivocarse.

La actividad de razonar se describe, como si hubiera un agente externo dentro de nosotros mismos, que nos aconseja lo que tenemos que hacer, lo denominan monitor interior y actúa como un tutor que vigila los cálculos y los planes a ejecutar, identifica los estados emocionales sugiriendo alternativas, examina críticamente los razonamientos y el proceso, y nos recuerda que hay que revisar y generalizar resultados, en definitiva controla el proceso de resolución desde fuera.

A pesar de que la resolución de problemas es una tarea compleja, que no se lleva a cabo de una forma lineal, los autores consideran tres fases: **Abordaje, Ataque y Revisión.**

Abordaje

Esta fase está encaminada a comprender, interiorizar y familiarizarnos con el problema.

Después de leer cuidadosamente el problema es necesario contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué es lo que sé?

- ¿Qué es lo que quiero?
- ¿Qué es lo que puedo usar?

La fase puede darse por concluida cuando somos capaces de representar y organizar la información mediante símbolos, diagramas, tablas, o gráficos.

Ataque

Es la fase más compleja ya que en ella se trata de asociar y combinar toda la información de la fase anterior. Es en esta fase donde intervienen las distintas estrategias heurísticas que nos permiten acercarnos a la solución del problema.

Los estados de ánimo más característicos son el de estar ¡Atascado! y el de las ideas ¡Aja! Los procesos matemáticos fundamentales, que aparecen en esta fase, son la inducción, que se materializa en el hecho de hacer conjeturas orientadas a conseguir la solución del problema, y la deducción que pretende justificar dichas conjeturas mediante las leyes lógicas a través de los teoremas matemáticos.

Revisión

Cuando se consigue una solución es conveniente revisarla e intentar generalizarla a un contexto más amplio, para esto es necesario:

- Comprobar la solución, los cálculos, el razonamiento y que la solución corresponde al problema.
- Reflexionar en las ideas, en los momentos clave, en las conjeturas y en la resolución.

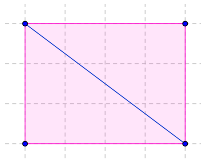
- Generalizar a un contexto más amplio, buscar otra forma de resolverlo o modificar los datos iniciales.

- También es importante redactar la solución dejando claro qué es lo que se ha hecho y porqué.

Ejemplos

Como ejemplo del método consideramos los siguientes problemas, intentando plasmar, la situación que tiene lugar cuando se proponen en una clase con alumnos.

¡Vaya corte!:



En un papel cuadriculado trazamos rectángulos que tengan un número entero de cuadraditos en cada lado ¿Cuál es el número de cuadrados a los que corta la diagonal de un rectángulo?

Fase de "Abordaje"

El primer paso es comprender bien el enunciado. La diagonal del rectángulo puede cortar o no a los cuadrados que atraviesa, se considera que no corta si sólo contiene un vértice.

Lo normal cuando se plantea este problema en clase, es que comiencen a dibujar casos particulares. Trazan distintos rectángulos y cuentan el número de cortes, a veces hay que aconsejarles que realicen una tabla con los datos obtenidos. También es importante que elijan una buena notación para los datos y la incógnita llamando, por ejemplo, *a* y *b* al número de cuadrados de los lados del rectángulo y *c* al número de cortes.

Otra forma de particularizar más sistemática, que aparece usualmente cuando se propone este problema en clase, es confeccionar una tabla considerando el caso de un cuadrado y a continuación dejando un lado fijo ir aumentando el otro.

a	b	c
3	1	3
3	2	4
3	3	3
3	4	6
3	5	7

En esta tabla la primera regularidad que observan es que al aumentar una unidad uno de los lados, el corte va también aumentando en una unidad. Y después de esta observación lo normal es lanzarse a formular hipótesis.

Fase de "Ataque":

La primera conjetura que establecen es que el número de cortes c es igual a: $a + b - 1$ (ya que al añadir una unidad a un lado, tenemos un corte más) salvo en el caso específico de un cuadrado que entonces no se verifica.

Aunque parece correcta la solución encontrada, no resulta satisfactorio que no se verifique para un cuadrado, es decir, que no se cumpla para "un caso límite".

Una vez que han formulado esta conjetura se les aconseja volver a leer el enunciado y a particularizar más con otros datos por ejemplo cambiando $a = 3$ por $a = 4$. Después de considerar $a = 4$ con $b = 5$, $b = 6$, $b = 7$, $b = 8$, llegan a la conclusión de que si $a + b$ es impar c es igual a: $a + b - 1$, si es par c vale $a + b - 2$ y si uno es múltiplo del otro c es igual al mayor.

Cuando se pregunta ¿qué pasa cuando dos números verifican dos de las condiciones? o ¿cuál de ellas hay que aplicar primero?, se observa que el objetivo que tienen es encontrar rápidamente una fórmula general, sin la menor intención de justificarla, haciendo gala del principio de que si una fórmula se verifica para cinco casos se verifica para todos.

Ante este bloqueo y con la suerte de tener quien les dirija, cosa que a todos nos gustaría tener cuando nos enfrentamos a un problema, se les propone que consideren $a = 12$, $b = 9$ y $c = 18$. Aún así les cuesta mucho aceptar que cualquier hipótesis ha de estar justificada. En este caso lo importante es considerar los casos en los que la diagonal pase exactamente por el punto que es vértice común de dos de los cuadraditos y esto ocurre precisamente cuando los lados tienen divisores comunes.

Por ejemplo en el caso $a = 4$ y $b = 8$ el número de cortes es 8, y cada dos cuadrados consecutivos, el corte es el mismo que los dos cuadrados siguientes. Luego la solución es cuatro veces lo que ocurre en el rectángulo $a = 2$ y $b = 1$, luego $c = 4\cdot (2 + 1 - 1)$.

Por tanto la hipótesis $c = a + b - 1$ es válida cuando a y b son primos entre sí. En caso contrario como a / mcd (a, b) y b / mcd (a, b) son primos entre sí, tenemos que el valor de c es igual a:

$$\text{mcd}(a, b)\cdot(a / \text{mcd}(a, b) + b / \text{mcd}(a, b) - 1),$$

luego el valor de c es:

$$a + b - \text{mcd}(a, b).$$

De esta manera, al intentar justificar la conjetura, obtenemos la solución.

Fase de "Revisión":

Es muy difícil conseguir que los alumnos y alumnas, una vez que han resuelto el problema, comprueben cálculos, razonamientos, soluciones y revisen el proceso. Sin embargo les gusta especialmente inventarse nuevos problemas que lo generalicen.

En este caso un problema más general, en el que además podemos utilizar los logros conseguidos en éste, es considerar una cuadrícula formada por rectángulos.

Otro problema es el siguiente:

"Los vigilantes":

Las calles de una ciudad forman una malla de horizontales y verticales en cuadrados de 100 m de lado. En cada cuadrado hay una manzana de casas. Se pretende montar un servicio de vigilancia. Cada guardia colocado en una esquina puede vigilar como máximo una distancia de 100 m en cada una de las cuatro direcciones. Busca el menor número de vigilantes necesarios para vigilar una ciudad con forma de cuadrado y n calles en cada lado.

Fase de "Abordaje"

Después de leer detenidamente el problema, lo primero que hace el alumnado es realizar un gráfico que represente la información. Contar calles, esquinas y vigilantes.

A continuación consideran casos particulares, y cuando no se les ocurre, es necesario indicarles la necesidad de hacer una tabla que agrupe de modo sistemático los resultados obtenidos al particularizar.

La forma de realizar la tabla es muy variada, hay quien relaciona el número de vigilantes con el número de manzanas en cada lado de la ciudad, otros con el número de esquinas y otros con el número de calles en cada lado, no sabemos si estos últimos lo hacen por casualidad, aunque posiblemente se han leído mejor el problema y saben que es el dato que tienen que utilizar. En la siguiente tabla recogemos todos estos datos.

Manzanas	**calles**	**esquinas**	**vigilantes**
1	2	4	2
2	3	8	5
3	4	16	8
4	5	25	13
5	6	36	18
6	7	49	25
7	8	64	32

Una vez elaborada la tabla entramos en la fase de Ataque y a partir de los resultados, buscamos una regla que nos permita relacionar el número de calles en cada lado de la ciudad con el número mínimo de vigilantes necesarios.

Fase de "Ataque"

Lo normal es que observen que necesitan un regla diferente para las ciudades que tienen un número par de calles por lado y las que tienen un número impar, y los que han considerado el número de esquinas enseguida concluyen que para "los pares la mitad de las esquinas y para los impares la mitad del numero de esquinas más uno".

En este momento es necesario hacerles ver que el dato del problema es el número de calles en cada lado de la ciudad por lo que es necesario expresar la solución en función de *n*.

Con más o menos ayuda son capaces de plantear la siguiente hipótesis:

Si v es el número de vigilantes $v = n^2 / 2$ si n es par y $v = (n^2 + 1) / 2$ y si n es impar.

Lo difícil es conseguir que justifiquen las conjeturas incluso en el caso de un número par de calles. Esta falta de justificación les impide darse cuenta de que si el número de calles es impar la conjetura no es válida por que hemos comenzado suponiendo un vigilante en la esquina superior izquierda y observamos que si lo suprimimos de tal forma que esta esquina quede vigilada por los de las esquinas contiguas necesitamos menos vigilantes, así en la primera calle horizontal se necesitan $(n - 1) / 2$ vigilantes y en la siguiente $(n + 1) / 2$ vigilantes, como hay $(n + 1) / 2$ calles de $(n - 1) / 2$ vigilantes y $(n - 1) / 2$ calles de $(n + 1) / 2$ vigilantes la hipótesis correcta es $v = (n^2 - 1) / 2$ cuando n es impar.

Pasamos a la fase de Revisión donde después de comprobar que la solución encontrada es efectivamente la que nos pide el problema intentamos generalizarlo.

Fase de "Revisión"

Entre las ideas que suelen surgir en clase, esta la de considerar una ciudad rectangular con n y m calles respectivamente en cada uno de los lados. Aunque también podemos olvidarnos de la ciudad y los vigilante e intentar trasladar nuestro problema a una malla de puntos triangular, exagonal, o pentagonal. A partir de ahora vuelve a comenzar el problema.

2.4. Estrategias de resolución de problemas

Vamos a examinar algunas de las estrategias de resolución de problemas:

- **Codificar**
- **Organizar**
- **Experimentar**
- **Explorar**
- **Analogía**
- **Introducir elementos auxiliares**
- **Dividir el problema en partes y**
- **Suponer el problema resuelto**.

Las estrategias de resolución de problemas son, más que reglas, técnicas generales que nos ayudan a comprender el problema y favorecen el éxito en encontrar la solución. Encontrar un tipo de problema en el que sólo intervenga una de ellas es como mínimo artificioso, ya que lo normal es que en la resolución de un problema intervengan varias estrategias.

Para cada una, elegimos un problema que se resuelva, casi exclusivamente, mediante esa estrategia. Aunque hay que tener en cuenta que la relación entre un problema y la estrategia utilizada para resolverlo no es unívoca y lo normal es que distintas estrategias resuelvan un mismo problema. El orden de enumerarlas no está relacionado con su importancia sino vagamente, con el momento de surgir dentro del proceso.

Simultáneamente relacionamos cada estrategia con las actitudes del alumnado en una clase de resolución de problemas, y con aquellos rasgos considerados socialmente propios de la personalidad femenina o de la masculina que favorecen o limitan el desarrollo de sus capacidades.

Cuando hablamos de rasgos "*socialmente femeninos o masculinos*" nos referimos a una serie de conductas, de estereotipos o de capacidades que usualmente la sociedad establece como adecuados y que consideramos decisivos a la hora de valorar el desarrollo de los chicos y las chicas. Estos estereotipos sociales tienen tanta o más influencia que el determinismo genético, ya que se transmiten desde que el niño o la niña comienza a imitar conductas y sobre todo cuando al superar el Complejo de Edipo se identifica con el padre si es niño o con la madre si se trata de una niña. Más adelante cuando la persona ya se siente capaz de modificar elementos de su personalidad, la adaptación al medio tiene una influencia tan poderosa que de alguna forma su saber hacer está condicionado a la aceptación de los modelos masculinos o femeninos que la sociedad tiene establecidos como aceptables.

2.4.1. Codificar. Usar una buena notación.

Muy a menudo la resolución de un problema depende de la utilización de un lenguaje o una notación adecuados.

La importancia de una buena de notación se pone de manifiesto si tratamos de operar con un sistema de numeración que no sea posicional. Existe una interconexión muy estrecha entre las palabras y el pensamiento. Hay estudios psicológicos que afirman que el uso de las palabras es indispensable para razonar:

> *"El pensamiento nace a través de las palabras. Una palabra sin pensamiento es una cosa muerta, y un pensamiento desprovisto de palabra permanece en la sombra"*

[Vigotsky; 1977, 196]

Y aunque esta afirmación puede resultar exagerada ya que podemos razonar sin palabras, como es el caso de una persona sorda, o manipulando figuras geométricas y combinando símbolos matemáticos, incluso en estos casos, hay una relación de interdependencia entre el pensamiento y los símbolos lingüísticos.

Para resolver la mayoría de los problemas de geometría euclídea es necesario nombrar los datos o los elementos que construimos de un modo adecuado. Hay reglas implícitas, que todos tenemos asumidas, y que nos ayudan a entender y a resolver un problema geométrico como que los puntos se nombran con letras mayúsculas y las rectas con minúsculas, los segmentos mediante sus extremos, los ángulos y los planos con letras griegas, los lados de un triángulo con la misma letra en minúscula que el vértice opuesto,…

Plantear una ecuación es traducir el lenguaje común al de los símbolos matemáticos. Elegir una buena notación es un paso decisivo en el camino hacia la solución de un problema, teniendo en cuenta que los símbolos que utilizamos deben recordarnos el objeto que representan. Una buena notación debe ser clara, concisa y que no plantee ambigüedades.

Muchas veces los varones afirman que las mujeres generalmente somos poco concisas, que cuando se nos hace una pregunta en vez de responder de forma escueta contamos una larga historia para justificar deductivamente nuestra respuesta, de la que ellos desconectan, perdiendo el interés por la pregunta que nos habían realizado. Sin embargo estas mujeres pueden ser extremadamente claras cuando están realizando un trabajo científico. Creemos que esta característica, propia o no de la condición femenina, es una capacidad que, si está implícita, debe favorecerse en la educación de nuestras/os alumnas/os, aunque paralelamente también debemos incidir en aquellas otras situaciones, como son las derivadas del trabajo científico, susceptibles de ser mejoradas por la claridad y la exactitud para exponer los resultados obtenidos, determinar el método elegido, elegir la notación más adecuada etc.

En el siguiente ejemplo sacado del libro "El hombre que calculaba ..." (M. Tahan; 1980, 164) se pone de manifiesto la eficacia de la notación algebraica:

"Las perlas del raja":

Un rajá dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que se hiciera del siguiente modo: la hija mayor *tomaría una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda hija recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante, la tercera joven recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara. Y así sucesivamente. Hecha la división cada una de las hermanas recibió el mismo número de perlas. ¿Cuántas perlas había? ¿Cuántas hijas tenía el rajá?*

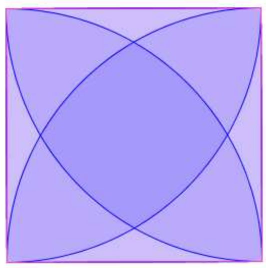
El número de perlas se obtiene fácilmente resolviendo la ecuación de primer grado que resulta de igualar el número de perlas de la hija mayor con las que recibió la segunda hija.

2.4.2. Organizar: hacer una figura, un esquema o una tabla.

Organizar: Hacer una figura

Una figura nos presta una gran ayuda para resolver un problema, ya que facilita la comprensión del mismo y hace surgir ideas que nos acercan a la solución.

El siguiente problema es un ejemplo de la importancia de una figura en la resolución de un problema:

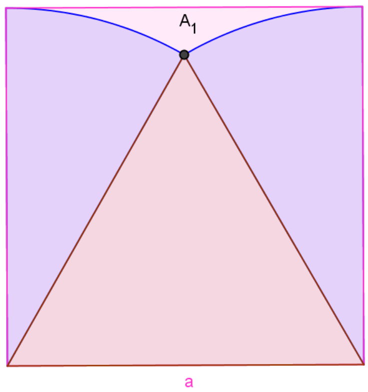


"La flor":

Calcula el área de la flor de cuatro pétalos de la figura inscrita en un cuadrado de lado a.

La figura adjunta resuelve el problema: Se trata de calcular el área A_1 restando al área del cuadrado, la del triángulo y la de los dos sectores.

Área del cuadrado: a^2;



Área del triángulo: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$;

Área de un sector: $\frac{\pi a^2}{12}$

Área de la flor $= a^2(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}-3)$

La importancia que tiene una figura en los problemas geométricos es evidente, sin embargo también hay muchos problemas algebraicos, en los que una figura nos permite llegar a la solución de forma más rápida y elegante. El siguiente problema es un ejemplo de lo que acabamos de indicar:

"La piscina":

La piscina del polideportivo municipal se ha tenido que vaciar por un problema de contaminación. Este proceso se ha realizado en tres fases para poder utilizar el agua en la limpieza de las instalaciones, primero se ha sacado la tercera parte, después la mitad del resto y aún quedan 150 m^3 de agua ¿Que capacidad tiene la piscina?

Aunque este problema se resuelve fácilmente planteando una ecuación resulta asombrosamente más fácil haciendo una figura que al dividirla en partes nos permite obtener la solución con una simple operación mental.

Otro problema, esta vez de probabilidad, en el que hacer una figura facilita su resolución es el siguiente:

"El encuentro":

Dos personas que no se conocen conciertan por "Internet" una cita en un lugar determinado entre las 11 horas y las 12 horas con la siguiente condición, la primera que llega espera a la otra quince minutos y después se marcha. Si cada una llega al azar entre las 11 horas y las 12 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?

La solución se reduce a representar gráficamente la situación en unos ejes de coordenadas y calcular un área.

En general las alumnas son mucho más cuidadosas que los alumnos cuando representan los datos de un problema en una figura, están más predispuestas a tomar medidas más o menos exactas o a evaluarlas de forma precisa, con objeto de acercar lo más posible su representación a la realidad del problema. En este caso tendríamos que incidir en la postura de los alumnos varones, haciéndoles ver la importancia que tiene una representación bien hecha en la solución del problema.

Al utilizar figuras para resolver problemas tenemos el peligro de llegar a una solución falsa al razonar sobre ellas, por lo que es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:

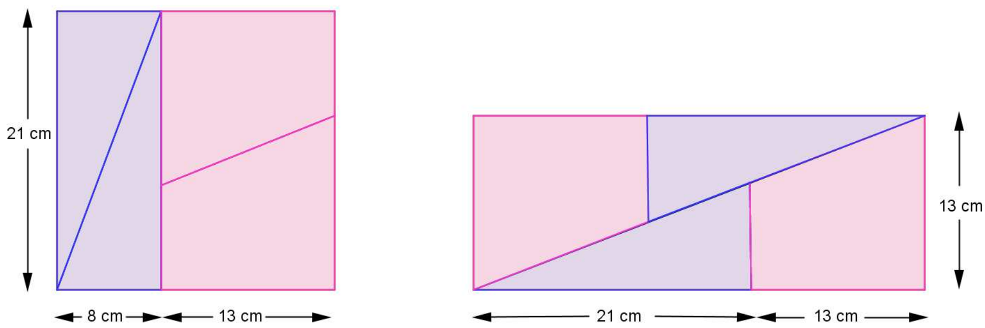
a) Una figura inexacta puede sugerir una solución errónea.

b) Una figura debe actuar como una representación de relaciones lógicas.

c) Las figuras no deben incluir ninguna relación que no esté indicada en el enunciado del problema.

En el libro "Errores en las demostraciones geométricas", citado en la bibliografía, se encuentran muchos ejemplos. El primero de ellos dice:

Un cuadrado de lado 21 cm tiene la misma área que un rectángulo de lados 34 cm y 13 cm.



El cuadrado se descompone en dos trapecios y en dos triángulos de las dimensiones indicadas. Con los cuatro trozos componemos el rectángulo. Y sin embargo $21^2 = 441$ cm^2 y $34 \times 13 = 442$ cm^2. ¿Cómo es que el área del rectángulo tiene un centímetro más?

Un método para asegurarnos de no cometer errores al realizar una figura es utilizar un programa informático de geometría dinámica. Estos programas nos permiten construir todas las figuras que realizamos con regla y compás de una forma rápida y precisa. La construcción se lleva a cabo a partir de objetos iniciales entre los que se establecen relaciones de dependencia de tipo geométrico de manera que al mover los objetos iniciales se desplazan también los que dependen de estos pero permanece la construcción realizada, esta propiedad lo diferencia esencialmente de los clásicos programas de dibujo. Pero quizás lo más importante es que acercan la Geometría a la realidad, transformando un teorema matemático en una realidad observable.

Organizar: Hacer un esquema o una tabla

En los problemas en los que es necesario contar, es preciso disponer de métodos que nos aseguren que hemos considerado todas las posibilidades y que no hemos repetido ninguna. Un esquema permite memorizar la información, que en muchos casos no sería posible realizar sin su ayuda.

Una tabla esquematiza los datos del problema además de los resultados que obtenemos al considerar casos particulares. En el problema que hemos llamado *Regiones* la solución se obtenía a partir de las regularidades que observábamos al analizar casos particulares que se resumían de forma sistemática en una tabla. También en el problema *¡Vaya corte!* el análisis exhaustivo de los casos particulares resumidos en una tabla era un paso decisivo para obtener la solución.

En los problemas de Probabilidad y de Combinatoria es muy útil utilizar esta estrategia, de forma que aprender a resolver problemas de Probabilidad en la Enseñanza Secundaria Obligatoria se reduce en muchas ocasiones a saber utilizar una técnica muy útil, los diagramas en árbol.

Un ejemplo es el siguiente, propuesto por la famosa matemática Emma Castelnuovo:

“Las tres ruletas”:

Disponemos de tres ruletas A, B y C cada una de ellas dividida en 32 sectores iguales con distintos puntos:

A: 7 sectores con la cifra 6 y 25 sectores con la cifra 3.

B: 16 sectores con la cifra 5 y 16 sectores con la cifra 2.

C: 25 sectores con la cifra 4 y 7 sectores con la cifra 1.

Dos jugadoras seleccionan una ruleta cada uno. Gana quien obtenga mayor puntuación con su ruleta. ¿Quién tiene ventaja al elegir ruleta, la primera o la segunda?

Este problema resulta muy difícil si no hacemos un esquema, un diagrama en árbol, para calcular probabilidades.

Sin embargo esta estrategia no sólo se utiliza en problemas de Probabilidad y Combinatoria. Como ejemplo planteamos el siguiente problema:

"Color del pelo":

Tres amigas Adela, Nieves y Lourdes, una rubia, otra morena y otra pelirroja, están sentadas en una mesa circular haciendo un trabajo en cadena, cada una pasa su informe a la que está a su derecha. Nieves ha pasado su informe a la rubia. Adela ha pasado su informe a aquella que ha pasado un informe a la pelirroja. ¿Cuál es el color del pelo de Adela, Nieves y Lourdes?

Al hacer un esquema y analizar las dos configuraciones posibles se observa que una de ellas es inconsistente, ya que una de las amigas es a la vez rubia y pelirroja. La solución es por tanto la otra configuración que es consistente con el enunciado.

Los esquemas que sólo con saber cuándo se utilizan y saber realizarlos de forma exacta y rigurosa resuelven un problema son realmente mágicos, ya que son contenidos procedimentales que además de resolver una situación determinada favorecen la adquisición de contenidos conceptuales, por ejemplo, en el caso de los diagramas de árbol, un/a alumno/a puede resolver con cierta soltura problemas de conteo utilizando con destreza estos diagramas consiguiendo, de forma casi inconsciente, perfilar en su mente el concepto de probabilidad. Por otra parte creemos que los chicos y las chicas adquieren este tipo de estrategias de forma muy similar.

Es más seguro tener éxito al resolver un problema si adoptamos un método sistemático que analice toda la información del enunciado del problema de forma esquemática así como aquella que generamos a partir de los datos.

2.4.3. Experimentar. Ensayo y error.

Consiste en llevar a cabo una operación sobre los datos, y probar si se ha conseguido el objetivo. Si no, repetir hasta conseguirlo o probar que es imposible. Hay varios tipos de ensayo y error:

Fortuito: Es muy fácil de utilizar pero no resulta eficaz porque se van eligiendo casos de forma aleatoria.

Sistemático: Es más eficiente que el anterior porque se va realizando la operación de forma ordenada.

Dirigido: Consiste en elegir casos que estén cada vez más cerca del objetivo. Sin embargo aunque éste es el mejor método, hay que tener en cuenta casos particulares en los que para llegar a la solución hay que dar un pequeño rodeo, como en el siguiente problema:

“El lobo, la cabra y el repollo”:

Una persona tiene que cruzar un río en una barca con un lobo, una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir ella y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está ella *delante, el lobo se come la cabra y la cabra se come el repollo ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?*

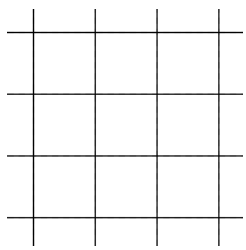
En la solución de este problema hay elementos que después de estar en la orilla final tienen que volver a la inicial para conseguir la solución, luego es un ejemplo en el que hay que dar un rodeo para solucionar el problema.

Como ejemplo de problema en el que se puede utilizar el método de ensayo y error para obtener la solución se ha elegido el siguiente:

"Cien cuadrados":

¿Cuál es el menor número de líneas rectas que tenemos que dibujar para tener exactamente 100 cuadrados?

Si se empieza de forma sistemática a contar los cuadrados que hay en una malla cuadrada $n \times n$, o por ejemplo recuerdas que en un tablero de ajedrez hay 204 cuadrados puedes adoptar el mismo método sistemático de contar cuadrados.



La solución se obtiene por ensayo y error ya que está entre un cuadrado 6×6 en el que hay 91 cuadrados y uno 7×7 en el que hay 140.

La estrategia de ensayo y error se considera a veces ineficaz para la resolución de problemas, sin embargo existen casos en los que el ensayo y error dirigido es especialmente útil al limitar los elementos entre los que está la solución. Por otra parte cuando el número de casos es finito, si analizamos sistemáticamente todos los casos, podemos estar seguros de conseguir la solución.

2.4.4. Explorar: Buscar simetrías regularidades y casos límite

Explorar: Buscar simetrías

Son muchos los problemas geométricos que se resuelven mediante la simetría expresada explícita o implícitamente.

La simetría puede entenderse en su sentido geométrico, que es el más usual, y en su sentido lógico más amplio, así la expresión $x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$ es simétrica respecto a las letras x, y, z.

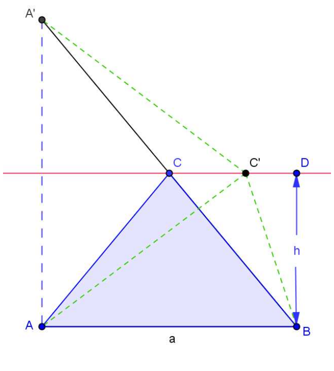
Como ejemplo de problema que se resuelve, utilizando la simetría se ha elegido el siguiente:

"Perímetro mínimo":

De todos los triángulos que tienen la misma base y la misma área, determina el que tiene perímetro mínimo.

Este problema, que se puede resolver utilizando el cálculo diferencial, es sorprendente lo elegante y sencilla que resulta la demostración utilizando la simetría.

Si los triángulos tienen la misma base, AB, y la misma área también tienen la misma altura.



La solución resulta al calcular el simétrico de uno de los extremos de la base, por ejemplo, A respecto a la recta d, paralela a la base, a una distancia h, el tercer vértice del triángulo C es la intersección de la recta d con el segmento que une el simétrico del punto A y el otro extremo de la base, el punto *B*.

La simetría en el más amplio sentido de la palabra nos permite simplificar problemas y casi siempre está asociada con la búsqueda de la solución óptima.

Una forma de interesar a algunas alumnas por las matemáticas es resaltar el sentido estético que éstas poseen y por supuesto, siempre hay que considerar que la elegancia en la solución de un problema basada en cualquier tipo de simetría es un elemento motivador para cualquier persona, hombre o mujer, sensible a la belleza. Las personas no matemáticas se sorprenden cuando oyen hablar de "la elegancia de una demostración" o de la "belleza de las matemáticas". Pero qué duda cabe que las matemáticas son bellas y que debemos resaltar en el alumnado el sentido estético que estas poseen para convertirlo en elemento motivador. Nadie puede negar la sorprendente armonía de los mosaicos de la Alhambra o de los dibujos de Escher en los que la simetría y la regularidad contribuyen a crear esa sensación. Si observamos más detenidamente, algún elemento de color puede romper la perfecta simetría del mosaico, o el ingenio de Escher juega en ocasiones con la regularidad del dibujo lo que contribuye también a aumentar la belleza.

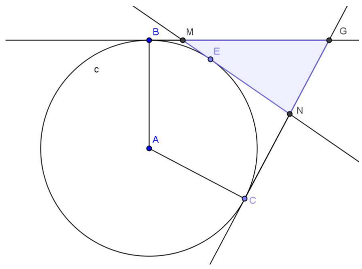
Explorar: Analizar casos límite.

El análisis de los casos límite es muy efectivo cuando intentamos refutar una conjetura y antes de intentar justificarla. Si recordamos el problema "*Vaya corte*" la razón por la que desechamos la primera hipótesis que planteamos era que no se verificaba para un caso límite, el cuadrado.

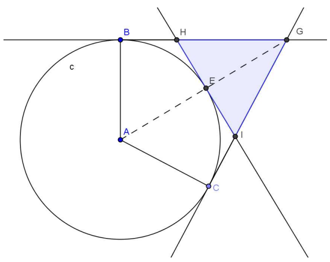
Cuando tenemos que demostrar una hipótesis y dudamos su certeza, antes de embarcarnos en intentar demostrar una falsedad, resulta muy útil refutarla analizando los casos límite.

Como ejemplo se propone el siguiente problema:

Calcula el perímetro del triángulo determinado por dos tangentes a una circunferencia en dos puntos B y C que se cortan en un punto G y una tercera tangente en un punto del arco CB, tal como muestra la figura, conociendo la longitud del segmento BG.



A partir del dibujo y trazando la tercera tangente en el punto medio del arco *CB* la solución es evidente, el perímetro del triángulo *IGH* es el doble de la longitud del segmento *BG*.



Este resultado sigue siendo válido para cualquier punto del arco *CB* por un razonamiento similar al que hemos utilizado en el caso límite. Ahora nos podemos plantear que ocurre cuando elegimos un punto del arco *BC*.

Explorar: Buscar regularidades.

Formular hipótesis es el resultado de observar regularidades en una serie de casos particulares. Buscar regularidades es encontrar leyes generales que constituyen la organización y estructura profunda de un problema.

Cuando formulamos hipótesis debemos tener cuidado con el sentimiento de certidumbre que tenemos habitualmente ante una hipótesis, que surge como generalización de una serie de casos particulares, ya que la belleza de una conclusión general siempre nos parece verdadera, y hay que tener en cuenta que estas hipótesis son simples conjeturas, que tendremos que refutarlas o confirmarlas mediante el razonamiento.

Recordemos el problema *¡Vaya corte!* Era difícil convencer al alumnado de que la hipótesis $a + b - 1$ si a o b son impares y $a + b - 2$ si a y b son pares no era correcta y era necesario buscar un ejemplo especialmente elegido que refutara su conjetura.

Después de formular una hipótesis, debemos intentar refutarla considerando casos límites, o casos estratégicamente buscados para que no se verifique. Sin embargo si nuestra conjetura supera todas estas pruebas, para tener la certeza de que es verdadera tenemos que encontrar una razón por la que es así y no de otra manera. En definitiva, hay que encontrar la relación lógica entre el enunciado del problema y la conjetura formulada.

En el problema *"Regiones"* las regularidades observadas en el estudio sistemático de una serie de casos particulares sugería la hipótesis que permitía encontrar la solución.

De una serie de casos concretos se puede conjeturar una hipótesis a partir de las regularidades de las observaciones realizadas, y aunque al aumentar el número de casos analizados aumenta nuestra confianza en ella, sólo la demostración garantiza su certeza.

2.4.5. Buscar problemas análogos.

La analogía ocupa todo nuestro pensamiento, desde los diálogos de la vida cotidiana, hasta las actividades artísticas y científicas. Consiste en una concordancia de relaciones entre los elementos de objetos semejantes.

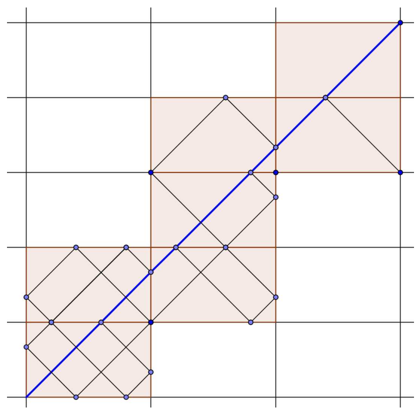
La analogía entra en juego, cuando te ves sorprendido por un parecido con algún problema estudiado anteriormente, por lo que es plausible sugerir conjeturas parecidas.

Aunque a veces no nos damos cuenta, en la mayoría de los problemas que resolvemos utilizamos la analogía. Así, cuando nos encontramos con un problema de Álgebra lo primero que consideramos es plantear una ecuación; en un problema de Probabilidad o de Combinatoria realizar un diagrama en árbol o una tabla de contingencia; y ante un problema de Geometría dibujamos la figura intentando encontrar las relaciones lógicas que se establecen entre sus elementos.

Un problema similar al que hemos llamado "*Vaya corte*", es el siguiente:

"Una mesa de billar":

Se tiene una mesa rectangular en la que las dimensiones son números enteros a y b, por lo que se puede suponer dividida en cuadrados. Se lanza una bola desde uno de los vértices siguiendo las diagonales de los cuadrados y que rebota siguiendo una reflexión perfectamente elástica. ¿A qué esquina llegará? ¿Cuantos rebotes habrá hecho?



La solución surge al representar gráficamente los rebotes de la bola en una cuadrícula de rectángulos de longitudes *a* y *b* utilizando la simetría hasta que la poligonal de los rebotes se transforma en una recta, el problema se reduce a determinar cuando esta recta encuentra por primera vez un vértice de la cuadrícula. La conjetura que surge al analizar este planteamiento es **análoga** a la utilizada en el problema *"Vaya corte"*.

Buscar problemas análogos es una estrategia muy útil cuando se tiene cierta experiencia en la resolución de problemas. Consiste en recordar otros problemas semejantes, en los que las relaciones entre sus elementos sean concordantes con las de nuestro problema.

2.4.6. Introducir elementos auxiliares.

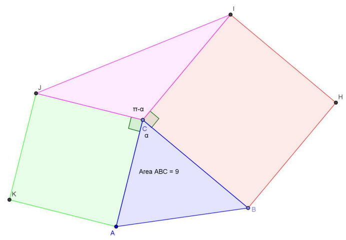
Los elementos auxiliares son un conjunto muy diverso, formado por incógnitas, teoremas, rectas, ángulos, planos..., que nos permiten establecer lazos lógicos, entre los datos del enunciado y las incógnitas del problema.

Un ejemplo en el que introducir elementos auxiliares nos descubre un plan de resolución es el que acabamos de citar "*Una mesa de billar*". La cuadrícula de rectángulos y la recta que cortaba a los distintos rectángulos son elementos auxiliares, que nos ayudan a encontrar la solución

En un problema de geometría plana son casi siempre rectas, segmentos y circunferencias, los elementos auxiliares que nos permiten acercarnos a la solución. Además no hay que olvidar que un teorema matemático que nos ayuda a resolver un problema, estableciendo lazos lógicos entre los datos y la incógnita, es también un elemento auxiliar.

Un ejemplo en el que son los resultados matemáticos los elementos auxiliares es el siguiente:

La figura adjunta está formada por dos triángulos y dos cuadrados. Calcula el área del triángulo JCI sabiendo que el valor del área del triángulo ABC es 9 cm^2.



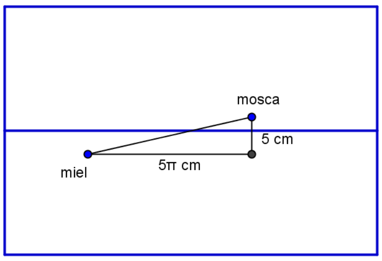
Los triángulos *ABC* y *JCI* tienen dos lados iguales y los ángulos comprendidos son suplementarios por lo tanto tienen la mismo área.

Otro problema que se resuelve introduciendo elementos auxiliares y utilizando la simetría es el siguiente:

"¿Qué camino debe seguir la mosca?":

En el interior de un vaso cilíndrico de cristal de 20 cm de alto y 10 cm de diámetro hay una gota de miel situada a tres centímetros del borde superior. En la pared exterior, en la generatriz opuesta a 2 cm del borde superior se ha parado una mosca. ¿Cuál es el camino más corto que debe seguir la mosca para llegar hasta la gota de miel?

La solución surge al desarrollar el cilindro, la parte interior y la exterior y utilizar la simetría. Con los datos del cilindro podemos calcular la distancia minima que recorre la mosca.



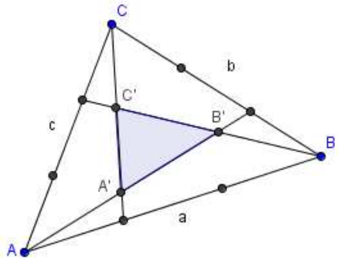
2.4.7. Subobjetivos. Dividir el problema en partes.

Aunque no sepamos resolver un problema, puede ocurrir que podamos hallar la solución de partes aisladas, y que luego seamos capaces de engarzarlas para construir con ellas la solución. También podemos sustituirlo por otro análogo pero más fácil, con menos variables o con números más pequeños.

Un problema clásico que se puede utilizar como ejemplo es el siguiente:

“Triángulo dentro de un triángulo”:

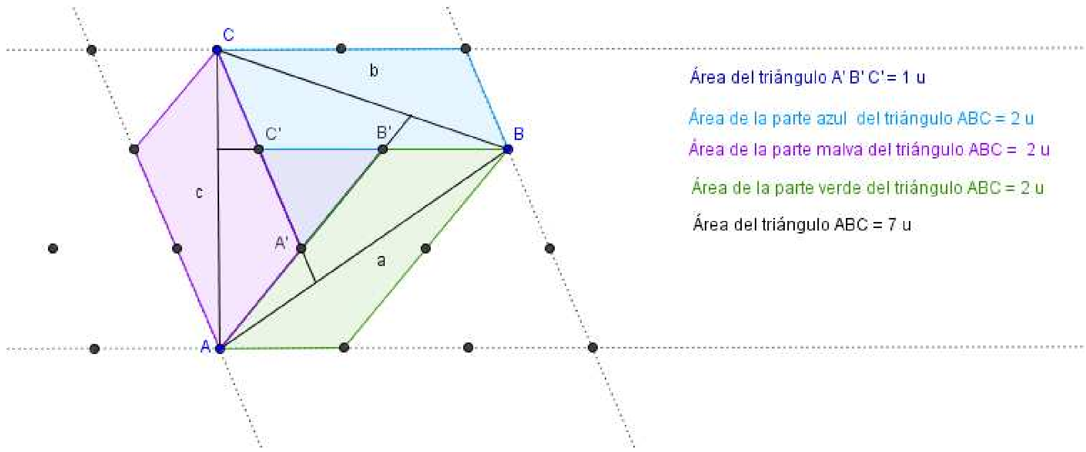
En un triángulo cualquiera ABC, determina los 6 puntos que dividen cada lado en tres partes iguales y dibuja los tres segmentos que unen cada vértice con el punto del lado opuesto, determinado anteriormente, más próximo al vértice contiguo. ¿Cuál es el área del triángulo A’B’C’ cuyos vértices son los puntos de intersección de estos tres segmentos?[1]



Aparentemente los segmentos *A’C*’ y *C’C* son iguales, lo mismo que los segmentos *AA’* y *A’B*’ y los segmentos *C’B*’ y *B’B*, hecho que podemos confirmar con un programa de geometría dinámica.

El problema se puede dividir en dos partes, la primera es demostrar esta conjetura que parece que se verifica y la segunda consiste en resolver el problema suponiendo que la primera es cierta, la solución de esta segunda parte resulta evidente en la siguiente figura:

[1] Este problema es un caso particular del conocido como teorema de *Routh* que establece la razón entre el área de un triángulo *ABC* y el formado por las intersecciones de tres de sus cevianas conocidas las razones entre los segmentos en los que cada ceviana divide a cada uno de los lados *a*, *b* y *c*. Cuando estas razones son iguales a un valor λ la razón entre las áreas es $(\lambda - 1)^3 / (\lambda^3 - 1)$. Como corolarios de este teorema se pueden obtener los teoremas de Menelao y Ceva.



La primera parte tampoco es difícil de demostrar con métodos de geometría elemental pero dividir el problema en partes nos ha permitido avanzar en la resolución del problema.

La estrategia de los subobjetivos es especialmente aplicable a problemas que presenten relaciones recurrentes. Como ejemplo está el clásico problema de:

***“Las torres de Hanoi”*:**

Cuenta la leyenda que en tres agujas de oro hay sesenta y cuatro discos todos de distinto tamaño, colocados de mayor a menor. Unos monjes cambian continuamente de sitio estos discos, uno cada segundo con las siguientes reglas: En cada movimiento sólo se puede mover un disco. Y no podemos colocar nunca un disco encima de otro de menor tamaño. Cuando hayan pasado todos los discos de una de las agujas a otra se acabará el mundo. ¿Cuanto falta para que termine el mundo?

Si se intenta resolver este problema por el método de ensayo y error, hay tantas combinaciones posibles que resulta muy difícil. Sin embargo utilizando el método de los subobjetivos, comenzando primero por un sólo disco, luego con dos, etc., vimos que se simplifica mucho la tarea. También es conveniente manipular objetos o hacer un esquema o figura de todas las operaciones que vamos realizando.

Dividir un problema en partes es una de las posibles estrategias para resolver un problema, no es un método en sí mismo por que necesita de otros para llegar a la solución y es especialmente eficaz para resolver problemas con relaciones recurrentes.

2.4.8. Suponer el problema resuelto o trabajar marcha atrás.

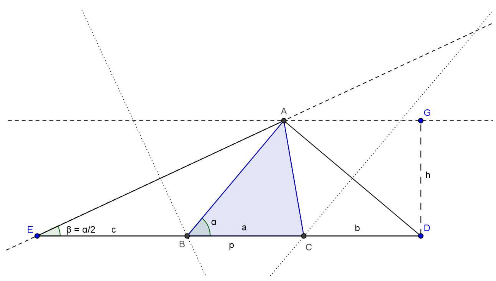
Es muy útil para resolver problemas en los que conocemos la incógnita, pero no conocemos las operaciones o condiciones que producen el objetivo o a veces el estado inicial.

Un ejemplo muy llamativo de lo útil que puede ser esta estrategia es el que propone Polya en su libro "*Cómo plantear y resolver problemas*":

> *Construir un triángulo, dados un ángulo, la altura correspondiente al ángulo dado y el perímetro del triángulo.*

Sea α al ángulo conocido y a, b, c los lados del triángulo con $a + b + c = p$ siendo p el perímetro.

Supongamos el problema resuelto. Añadimos a la base a dos segmentos de longitudes b y c en la misma dirección del lado a, uno a la derecha y otro a la izquierda.



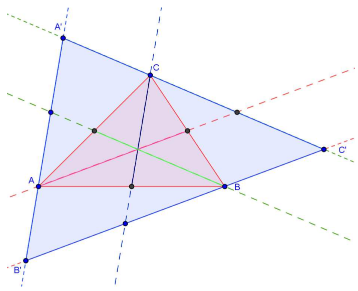
Con esta base *a* + *b* + *c*, que es conocida, construimos un triángulo de la misma altura que el de la solución, de esta forma el triángulo inicial se encuentra orlado por dos triángulos isósceles, cuyos lados iguales son respectivamente *b* y *c* y los tres forman el triángulo de base *p*, altura *h*, y el ángulo correspondiente α/2. La construcción de este triángulo es mucho más fácil y a partir de él está determinado el problema inicial.

Otro problema que utiliza esta estrategia es el siguiente:

"Las medianas":

Construir un triángulo conociendo las longitudes de sus tres medianas.

Supuesto construido el triángulo *ABC* dibujamos sus medianas y las rectas paralelas a estas que pasan por un punto diferente por el que pasa la mediana hasta obtener el triángulo *A'B'C'*, cada uno de sus lados mide el doble que el de su mediana paralela. A partir de este triángulo la construcción de *ABC* es evidente.



Otros problemas que se resuelve exclusivamente con esta estrategia son los siguientes:

"La invitación":

Juan invita a Marta y a Elena a merendar. Prepara una limonada y se dispone a servirla. Marta la quiere con poco limón y Elena con mucho. Juan ha puesto el limón y el agua en dos jarras iguales y con la misma cantidad. Para complacer los deseos de sus invitadas coge un vaso de la jarra con limón y lo echa en la del agua, a continuación coge *un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echa en la del limón. ¿Habrá más limón en la jarra del agua o agua en la jarra del limón?*

La solución es evidente suponiendo el problema resuelto o bien transformando el enunciado cambiando las jarras por dos urnas llenas respectivamente con bolas negras y blancas.

"Los cachorros":

La perra de mi vecino Antonio ha tenido cachorros. Quiero quedarme con uno pero Antonio me ha puesto como condición para regalármelo que resuelva este problema: Si le doy a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que me queda le doy a un amigo la mitad más medio, a mi prima la mitad del resto más medio, y a mi primo la mitad de lo que me queda más medio, aún me queda un cachorro para ti. ¿Cuántas cachorros ha tenido la perra?"

Partiendo del resultado final, un cachorro, sumándole un medio y multiplicándolo por dos de forma recursiva, se obtiene fácilmente el resultado.

"Cocoteros":

Cinco personas y un mono naufragan en una isla desierta. Pasan todo el primer día recogiendo cocos. Por la noche una de ellas se despierta y decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones iguales y como sobra un coco se lo da al mono después oculta su parte. Poco más *tarde, una segunda se despierta y hace lo mismo, al dividir los cocos en cinco montones, también sobra un coco que se lo da al mono y oculta su parte. Cada una de ellas se levanta y hace lo mismo que las primeras. Por la mañana agrupan los cocos en cinco montones iguales y esta vez no sobra ningún coco. ¿Cuántos cocos habían recogido inicialmente?*

En este problema, además de empezar por el final, hay que dominar congruencias y tener cierta perseverancia en seguir con el método elegido, ya que el mínimo número de cocos que puede haber inicialmente es 3.124. Otra estrategia para resolver este problema es modificarlo y hacerlo más sencillo considerando por ejemplo que en vez de cinco personas haya tres (M. Tahan; 1980, 133). El problema así se simplifica bastante.

Muchas veces si suponemos el problema resuelto aparecen los datos más manejables y es más fácil llegar desde donde estamos a donde queremos llegar. Sin embargo aunque es una estrategia muy poderosa, trabajar marcha atrás, tiene ciertos problemas y sólo se debe utilizar cuando no tenemos disponible otra posible estrategia.

Hemos comentado diferentes estrategias de resolución de problemas que se usan en la resolución de problemas y estas mismas estrategias son las que se utilizarían en una investigación.

2.5. Emociones y bloqueos en la resolución de problemas

2.5.1. Las emociones

La primera recomendación para resolver un problema es comprenderlo lo mejor posible. Pero esto no es suficiente, hay que concentrarse por completo en el problema y desear intensamente resolverlo. Si no lo conseguimos, más vale abandonarlo.

No podemos considerar un problema como algo meramente intelectual, ya que las emociones juegan un papel muy importante y cuando surgen desilusiones y fracasos sólo un intenso deseo de llegar a la solución permite superarlos.

Por otra parte alcanzar el resultado de un problema, favorece la autoestima y con la práctica se van acumulando una serie de éxitos que actuarán como refuezo en momentos de desaliento, cuando no se tenga ninguna idea para resolver el problema.

Entre los estados emocionales más ligados a la resolución de problemas está el producido por una idea feliz, que nos permite hacer una conjetura y aunque posteriormente comprobemos que no es válida, momentáneamente, es un estado difícil de describir ligado a la ilusión. La excitación que produce este estado, se convierte en una confianza ciega en la solución, por lo que es necesario mostrar escepticismo, comprobarlo todo y ser muy crítico, ya que si posteriormente observamos que la idea ha sido total o parcialmente falsa, la desilusión será mayor y es más fácil abandonar por no tener suficientes fuerzas para superar el fracaso.

Otro estado muy característico es el de estar bloqueado/a, o atascado/a, que va acompañado de desilusión, ganas de abandonar, tensión, frustración, etc. Sin embargo puede llegar a ser un estado positivo, del que se puede aprender mucho, por lo que la mejor recomendación es reconocerlo y reflexionar sobre todo aquello que estimule a hacer algo dirigido a encontrar la solución, es decir, actuar, y en este momento es cuando influyen el cúmulo de éxitos adquiridos en la experiencia pasada, recordando que este estado lo hemos tenido muchas veces y lo hemos superado, y eso nos anima a continuar. También es en este momento donde entran en juego las distintas estrategias de resolución de problemas y junto con la experiencia acumulada ayudan a que surja la idea genial.

2.5.2. Tipos de bloqueos:

Para conseguir superar los bloqueos que surgen al resolver problemas es importante conocer los distintos tipos y los diferentes métodos que nos ayudan a superarlos. Un estudio exhaustivo sobre ellos podemos encontrarlo en el libro de Miguel de Guzmán "*Para pensar mejor*". Vamos a analizar, sobre todo, aquellos que afectan de forma diferencial a las mujeres y a los varones.

***Bloqueos emocionales o afectivos**:*

Pueden ser debidos a cierta apatía o pereza para comenzar la tarea, en definitiva falta de motivación, suelen ser bastante similares en las chicas y en los chicos. Sin embargo los que se producen por miedo al fracaso a equivocarse o al ridículo son mucho más importantes y frecuentes en las mujeres, debido en general a su más bajo nivel de autoestima que les lleva a no valorar suficientemente su capacidad intelectual. En este caso pueden también encontrarse algunos alumnos, para quienes también son válidas estas reflexiones.

Entre las distintas vivencias que pueden justificar esta característica de la personalidad femenina está la costumbre de resaltar en las niñas, sobre todo en el ámbito familiar, las maravillas de su aspecto físico, su docilidad, su sentido del orden, etc., frente al valor de su capacidad intelectual.

También hay situaciones en la Escuela, en particular en la Enseñanza Secundaria, que pueden influir decisivamente. Son aquellas en las que casi siempre como una broma, algunos chicos o chicas intentan ridiculizar a una compañera o a un compañero y cuando no pueden hacer referencias más o menos humillantes a su aspecto físico menosprecian su inteligencia. Los matices que rodean la escena son múltiples, y nacen de la obsesión de gran parte del profesorado de matemáticas por estandarizar formas de pensamiento, razonamiento, ritmos de trabajo etc. de forma que cualquier compañero o compañera que se desvía de la norma suscita en los y las demás actitudes injustas y arbitrarias, que exigen la intervención del profesor/a. La repetición de estas situaciones no controladas genera bloqueos difíciles de superar.

No sabemos hasta que punto este refuerzo negativo que preferentemente las chicas y algunos chicos están recibiendo en la escuela mina su autoestima e influye sobre el miedo al ridículo que tiene tanta importancia en los bloqueos emocionales ligados a la resolución de problemas. Lo cierto es que porcentualmente las mujeres temen más equivocarse que los varones en situaciones tan simples como salir a la pizarra a realizar un ejercicio de clase: un chico puede arriesgarse a pensarlo sobre la marcha, la chica sólo se atreve cuando tiene la seguridad de que lo tiene bien hecho. En definitiva ella se arriesga menos porque tiene miedo a fracasar o simplemente a los comentarios que se hagan en clase sobre ella ante la más mínima equivocación.

Otros elementos que bloquean el camino hacia la solución del problema son la ansiedad por destacar o por acabar la tarea y la hiperactividad, que a pesar de su importancia en el proceso, están más relacionados con rasgos de la personalidad de cada individuo o con factores socio-culturales que con características socialmente consideradas tanto femeninas como masculinas.

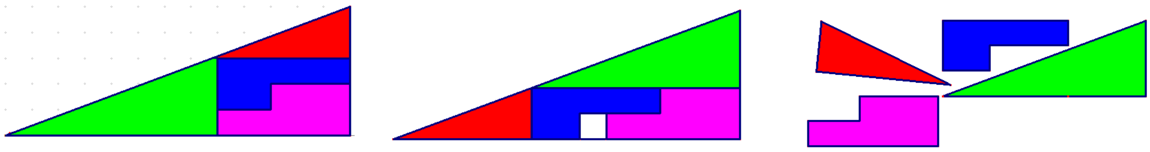
Bloqueos culturales y ambientales:

Los bloqueos de tipo ambiental se deben a la falta de cooperación, las prisas y los agobios que son tan comunes en la sociedad actual y los de tipo cultural se derivan, por ejemplo, de pensar que hay que ser muy prácticos, que resolver problemas matemáticos es un juego de niños o que ser creativo es tan raro que no vale perder el tiempo con los procesos que lo facilitan. Un ejemplo en el que se manifiesta un bloqueo de este tipo es el siguiente:

"El triángulo mágico":

¿Por qué en la segunda figura sobra un cuadrado blanco?

Piezas:



En este problema el bloqueo está en la percepción del enunciado. Hay dos triángulos que parecen iguales y son distintos o son iguales y parecen diferentes.

Un consejo para superar el bloqueo es realizar las construcciones con un programa informático de geometría dinámica o bien utilizar el teorema de Tales o la trigonometría para descubrir el gazapo.

También suele haber diferencias entre chicos y chicas ante bloqueos de tipo ambiental, aún más acentuado en el caso de las mujeres adultas que, además del trabajo fuera de casa, llevan siempre el peso de las faenas domésticas y del cuidado de los hijos y las hijas. Lo normal es que se encuentren siempre agobiadas y estresadas por el doble turno de trabajo que realizan y al quedarles poco tiempo para pensar y reflexionar pausadamente aumenta su dificultad para llevar a cabo una tarea creativa. En la sociedad actual y en el caso de nuestros alumnos y nuestras alumnas las diferencias son menos acusadas porque habitualmente es la madre la que asume todas las responsabilidades, aunque a pesar de ello siempre sean las chicas las que dedican más tiempo que los chicos al trabajo de la casa.

También dentro de los bloqueos de tipo sociocultural y al plantear el trabajo en equipo, podemos encontrarnos con bloqueos debidos a la falta de cooperación de algunos o algunas de sus componentes que están siguiendo unas normas de comportamiento individualista. Éste es un modelo que no sólo está aceptado sino que incluso está revalorizado por la sociedad actual.

Otros bloqueos de este tipo son los que, como comentamos anteriormente, se derivan de pensar que hay que ser muy prácticos, y que no vale la pena perder tiempo con procesos que favorecen la creatividad. Aunque parece que este tipo de pensamientos no están relacionados con rasgos de la personalidad femenina o masculina, no son tan neutrales, ya que cualquier característica de tipo cultural incide con más intensidad en la emotividad de las mujeres.

Bloqueos cognoscitivos:

Se pueden producir por carecer de las herramientas matemáticas necesarias para resolverlo, o bien por falta de práctica en resolver problemas debido a desconocer o no saber utilizar las estrategias heurísticas. Resolver muchos problemas y conocer las estrategias heurísticas son los consejos más efectivos que nos permiten controlarlos.

Se van a analizar algunos bloqueos que se plantean en la percepción y en el ataque al problema.

Bloqueos en la percepción del problema:

Son los que se plantean en la comprensión del problema. Pueden ser debidos a cierta incapacidad para considerar el problema desde distintos puntos de vista o a una visión estereotipada del problema, de modo que sólo vemos lo que esperamos ver.

Entre los bloqueos de este tipo más comunes están los que se denominan “suposiciones ocultas”.

Suposiciones ocultas:

Es muy fácil quedar atascado en un problema por lo que llamamos suposiciones ocultas que son limitaciones innecesarias que nos inventamos y nos impiden considerar otras posibilidades entre las que se encuentra el camino que hay que seguir para avanzar hacia la solución de nuestro problema.

Las suposiciones ocultas son la base de muchos acertijos, pero lo cierto es que no se limitan a estos, sino que están en la base de nuestra percepción y pueden llegar a modificar el rumbo de una investigación matemática. Citaremos unos ejemplos conocidos.

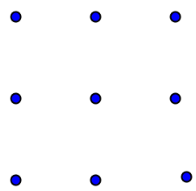
"Palillos":

¿Cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros iguales con seis palillos con la condición de que el lado de cada triángulo sea la longitud del palillo?

La suposición oculta de este problema es que nos limitamos a soluciones planas y no consideramos el paso al espacio. El problema se resuelve al construir un tetraedro regular

"Nueve puntos":

¿Cómo unir nueve puntos, distribuidos en los vértices de una cuadrícula 2x2, por medio de cuatro segmentos rectilíneos, sin levantar el lápiz del papel ni recorrer dos veces parte del mismo camino.



La suposición oculta consiste en dar por hecho que no se puede salir del cuadrado determinado por los puntos, cuando se observa que en ningún momento se impone esta condición, la solución es evidente.

Bloqueos en el ataque al problema

Se pueden producir por carecer de las herramientas matemáticas necesarias para resolverlo, o bien por falta de práctica en resolver problemas debido a desconocer o no saber utilizar las estrategias heurísticas. Resolver muchos problemas y conocer las estrategias heurísticas son los consejos más efectivos que nos permiten controlarlos.

Un ejemplo de este tipo de bloqueo es el llamado efecto túnel, que también está afectado por la situación emocional que se produce.

Efecto túnel:

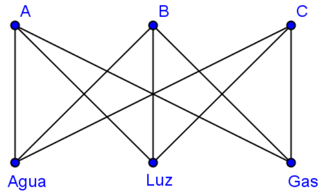
Aparece cuando nos encontramos tan absorbidos por la ejecución de una acción que nos impide considerar otras alternativas del problema entre las que está el camino hacia la solución. Como ejemplo de una situación de este tipo, citaremos la que se produce, muchas veces que intentamos resolver un problema que no tiene solución, normalmente pasa mucho tiempo hasta que consideramos esta posibilidad. La forma de evitar estos bloqueos es considerar todas las alternativas, probarlas sistemáticamente y evaluarlas críticamente para determinar si el contexto del problema nos ofrece otras posibilidades.

Cuando al resolver un problema se formula una conjetura hay que ser muy escépticos, analizando críticamente sus posibles fallos. Si nos encontramos bloqueados es recomendable saber por qué, lo que supone detectar los distintos tipos de bloqueo y plantear las acciones necesarias para superarlos.

Como ejemplo de una situación de este tipo, citamos la que se produce, muchas veces que intentamos resolver un problema que no tiene solución, normalmente pasa mucho tiempo hasta que consideramos esta posibilidad, como en el siguiente acertijo:

“Agua, luz y gas”:

En un vecindario hay tres casas y tres fuentes una de agua, una de luz y una de gas. Se trata de conectar cada casa con cada fuente de suministro mediante líneas que no se crucen entre sí.



Este acertijo puede bloquearnos hasta que consideramos que no tiene solución. Es un resultado conocido de teoría de grafos. Se puede demostrar con el teorema de Euler.

Para superar estos bloqueos se recomienda plantear en clase actividades que resulten motivadoras, y graduar su dificultad. Como método de trabajo en el aula es muy aconsejable el trabajo en grupo, ya que permite que el miedo al fracaso o al ridículo desaparezca, porque ahora es el grupo el que opina y no cada individuo. Aunque para ello hay que conseguir crear un clima adecuado, donde se respeten todas las opiniones y los resultados sean compartidos por todos y todas.

La forma más idónea de evitar los bloqueos cognoscitivos consiste en considerar todas las alternativas, probarlas sistemáticamente y evaluarlas críticamente para determinar si el contexto del problema nos ofrece otras posibilidades diferentes.

Además el profesor o profesora no debe olvidar nunca, resaltar en público los buenos trabajos, logros ideas o sugerencias que tengan las alumnas o los alumnos, cuidando especialmente a quienes no valoran suficientemente sus propias ideas o los razonamientos que elaboran.

2.5.3. El enunciado del problema

La importancia que tiene el enunciado en un problema se debe sobre todo a que permite motivar al alumnado e introducirlo en esa apasionante tarea que es su resolución. Para conseguirlo muchas veces es necesario modificar los enunciados de forma que resulten más atractivos y no podemos olvidar tener en cuenta a las chicas y los distintos factores que influyen en su motivación. Hemos observado que muchas veces se atribuyen gustos, inclinaciones o características generales a los alumnos y a las alumnas, pero cuando las analizamos detenidamente, muchas de ellas, como por ejemplo el fútbol, las ligas deportivas, etc., están muy alejadas del pensamiento y la forma de actuar de una gran parte de las alumnas.

La mayoría de los "ejercicios", porque no se pueden considerar problemas, de los libros de texto no están contextualizados, (resuelve la ecuación o el sistema, calcula, dibuja la recta, etc.) y por lo tanto están ignorando la realidad y los intereses del alumnado. Además cuando el autor/a pretende darles significado lo que suele representar es un mundo de marcado protagonismo masculino.

Uno de los primeros libros (Gardner; 1981) que representaron una paradoja lógica o un problema matemático con un enunciado entretenido que fuera atractivo para gran parte del alumnado fue "*Inspiración ¡Aja!*". En él, Martín Gardner, lo mismo que en su libro *"¡Ajá! Paradojas"*, utiliza el cómic como una manera informal y lúdica de plantear contenidos matemáticos, y de forma inevitable algunos de sus personajes al representar estereotipos sociales, resultan sexistas.

Un ejemplo es la falacia del jugador (Gardner; 1983, 87) que se plantea como el problema de unos señores con cinco niñas que desean ansiosamente un hijo. Con un enunciado adecuado es un problema interesante que incide en el difícil concepto de probabilidad. Hemos cambiado intencionadamente el papel de los chicos por el de las chicas, invirtiendo los deseos de la familia de tener hijas en lugar de hijos.

"La falacia del jugador":

Los señores Buenafé tienen cinco niños y ninguna niña.

Señora Buenafé: ¡Espero que nuestro próximo bebé no sea otro niño!

Señor Buenafé: Querida después de cinco niños forzosamente tiene que ser niña.

¿Tiene razón el buen señor?

Hay personas amantes del juego convencidas de que pueden ganar a la ruleta esperando que se produzca una larga racha de rojos y apostando entonces al negro.

¿Sirve de algo este sistema?

Edgar Allan Poe en el epílogo de "El misterio de Marie Roget" argumentaba que si al lanzar un dado se sacan cinco doses seguidos, la probabilidad de sacar otro dos en la siguiente tirada es menor que un sexto.

¿Tenía razón Poe?

Si has contestado afirmativamente a cualquiera de estas preguntas has caído en la trampa conocida como "falacia del jugador" ya que en estos casos el resultado de un acontecimiento no depende de los que le preceden....

Para convencer a los alumnos/as sugerimos que se realice la siguiente experiencia: Se anota, en el aula, una secuencia de ceros y unos procedentes de un experimento aleatorio, por ejemplo cada persona puede tirar 50 veces una moneda anotando cero o uno según obtenga cara o cruz respectivamente, también se puede generar esta secuencia aleatoria con el ordenador, generando una sucesión aleatoria de 1000 dígitos (ceros o unos). En esta secuencia se elige una subsecuencia formada por los elementos precedidos de tres ceros. Si el número de estos elementos es *n*, se divide la primera secuencia en grupos de *n* dígitos consecutivos. Los resultados confirmarán que las veces que aparece el uno después de tres ceros, no es estadísticamente mayor que las veces que aparece en una secuencia cualquiera.

Veamos otro ejemplo (Gardner; 1981, 102):

"El premio Ach":

Al término de cada curso sobre reflexión Ach, el profesor Ach galardonaba con una medalla especial a su mejor alumna o alumno. Pero un año quedaron empatados tres estudiantes. Para resolver el empate el profesor les propuso una prueba más. Sentó a sus tres estudiantes en un banco y les mandó cerrar los ojos.

Prof. Ach: Os voy a poner un sombrero a cada uno. El sombrero puede ser rojo o azul. No abráis los ojos hasta que yo lo diga.

El profesor Ach les puso a todos sombreros rojos.

Prof. Ach: Abrid ahora los ojos. Si veis que alguno de vosotros lleva un sombrero rojo alzad la mano. El primero o primera que consiga deducir el color de su sombrero ganará la medalla.

Evidentemente, los tres alzaron la mano. Al cabo de algunos minutos, Eva se levantó y exclamó:

Eva: ¡Ajá! ¡Ya sé el color de mi sombrero! ¡Es rojo!

Eva: Si mi sombrero fuese azul, Solvi se hubiera dado cuenta en seguida de que su sombrero es rojo, pues sino, ¿cómo explicar la mano alzada de Hans?

Eva: Naturalmente, Hans razonaría de igual manera y sabría que su sombrero es rojo, pues sería la única forma de explicar la mano alzada de Solvi.

Eva: Ahora bien, ninguno de mis compañeros ha podido decir todavía el color de su sombrero. Por tanto también en mí tienen que estar viendo un sombrero rojo.

En el texto anterior hemos cambiado el nombre de alguno de los personajes, en el de Martin Gardner los estudiantes son dos chicas y un chico y el que llega a la solución es el chico, a nosotras esto no nos ha parecido adecuado.

Este mismo problema tiene versiones más machistas como la que comentamos a continuación:

En un pueblo árabe hay mujeres que engañan a sus maridos. El Cadí alarmado, emite un edicto en el que se ordena que el marido que tenga la seguridad de que su mujer *le engaña, la mate. Al cabo de cuarenta días amanecen ejecutadas las cuarenta mujeres que engañaban a sus maridos. ¿Qué razonamiento llevó a estos a la seguridad de que la suya era una de ellas?*

Lo que desde luego no podemos perder de vista es la influencia que los estereotipos ejercen sobre nuestro comportamiento. Consideremos, por ejemplo, una conducta estereotipada como femenina y que podemos explicitar como que “las mujeres siempre hacen esperar a los hombres”. Este comportamiento es lo suficientemente neutral que pensamos que no tiene ninguna influencia sobre caracteres relevantes de la inteligencia o de la personalidad, y si en un momento determinado de la Historia tuvo alguna razón de ser, en la sociedad actual carece de importancia, aunque a veces esté justificada su existencia (mientras la madre prepara a sus hijos y sus maletas el marido “espera”). Sin embargo algo aparentemente tan inocuo es una conducta estereotipada para algunas mujeres que por muy puntuales que sean hay momentos, como por ejemplo el día de su boda, en los que procuran llegar más tarde que el novio, con el único objeto de mantener el estereotipo establecido socialmente. Y si ante este hecho que no deja de ser una anécdota sin importancia, muchas mujeres adoptan una postura predeterminada que no es otra que “lo que la sociedad ha rotulado sobre ellas”, cuánto más se sentirán obligadas a no infringir normas sobre ciertas características de su personalidad que la sociedad ha establecido como “lo femenino” a lo largo de la Historia.

2.6. Metodología y Evaluación

2.6.1. Metodología

Cuando pretendemos educar matemáticamente a nuestros alumnos y alumnas les explicamos conceptos y conseguimos que realicen con soltura procedimientos, pero muchas veces nos olvidamos de enseñarles los procesos mentales que utilizamos, porque al no ser conscientes de que los estamos aplicando, no se nos ocurre formularlos explícitamente.

Tenemos la obligación de preparar personas que en el futuro se van a enfrentar a situaciones desconocidas. Los contenidos matemáticos que hoy nos parecen fundamentales, mañana pueden quedar obsoletos. Sin embargo los procesos del pensamiento matemático que intervienen en la resolución de problemas, siempre serán provechosos ya que tienen un valor universal más amplio que el propio mundo de las matemáticas.

Es difícil conseguir interesar a la mayor parte del alumnado de un grupo en una misma actividad, ya que presenta diferencias muy acusadas en cuanto a sus conocimientos e intereses. En este sentido la resolución de problemas presenta indudables ventajas ya que, una cuidadosa selección de los mismos, permite plantear situaciones muy abiertas, que admitan distintos niveles de resolución (más o menos general, más o menos formalizada), diferentes estrategias para abordarlos, diversos niveles de ayuda por nuestra parte, etc. Así puede conseguirse que todo el grupo esté trabajando sobre un mismo propósito básico, pero adecuado en todo caso a su nivel de partida y con suficientes posibilidades de exploración para que suponga un reto atractivo. En otras palabras permite el tratamiento de la diversidad.

Sin embargo muchas veces tendremos que realizar acciones compensatorias con el alumnado que por alguna razón tenga deficiencias para asimilar los procesos que permiten analizar la realidad matemáticamente. En ocasiones se ha observado que en general las alumnas tienen rendimientos más bajos en contenidos de tipo geométrico que en otro tipo de contenidos matemáticos y esto puede ser debido a que durante su infancia han tenido ciertas carencias de juegos al aire libre y de actividades deportivas que posteriormente dificultan el desarrollo de los procesos que estructuran matemáticamente el espacio. Por esta razón no podemos olvidar en la clase de matemáticas, plantear problemas de tipo geométrico encaminados a compensarlas.

Trabajo en grupo.

Un ambiente muy propicio para el aprendizaje y especialmente para el de las matemáticas, es el del trabajo en grupo. La interacción entre los alumnos y las alumnas, la mayor proximidad que existe entre su lenguaje y sus esquemas conceptuales que con los del profesor o la profesora, hace que en muchas ocasiones, lo que se dicen unos a otras les sea más significativo que lo que escuchan al profesor/a.

El trabajo en grupo favorece el aprendizaje ya que establece un tiempo de reflexión y concentración sobre contenidos matemáticos, donde se intercambian las ideas y opiniones personales de sus componentes, este trabajo cooperativo resulta atractivo para todo el alumnado, pero tiene indudables ventajas para las chicas que cuando están en pequeños grupos pierden el miedo al ridículo o a equivocarse y al desaparecer inhibiciones son mucho más espontáneas y creativas, también es bueno para los alumnos porque en el grupo se reducen los comportamientos competitivos

Entre otras muchas ventajas que tiene el trabajo en grupo, podemos citar las siguientes:

Motivación: Sólo por el hecho de cambiar la estructura de la clase y cambiar de contexto, el trabajo en grupo es ya un elemento motivador, pero lo es sobre todo porque establece un proyecto común en el que se sienten implicados/as los alumnos y alumnas que pertenecen a un mismo grupo.

Permite el tratamiento de la diversidad: El trabajo en grupo permite enfocar la distribución de tareas, según los intereses, capacidades y afectividades de cada cual, por lo que favorece el desarrollo individual de cada uno de los alumnos y de las alumnas dentro del grupo.

Favorece la cooperación frente a la competitividad: Aunque al establecer el trabajo en grupo puede haber cierta competitividad entre los distintos equipos, lo normal es que el ambiente interno de cada grupo sea de absoluta cooperación ya que las ideas se consideran de todos y todas.

Es más eficiente: El trabajo en grupo desarrolla una actitud crítica respecto a las opiniones propias, además favorece que ideas muy intuitivas y poco definidas sean elaboradas y deducidas por otros elementos del grupo lo que permite llegar más fácilmente a la solución de un problema. Un grupo como tal puede tener ciertas características que no posee en particular ninguno de sus componentes.

Se desarrollan **actitudes sociales** ya que cada persona aprende a respetar y valorar las opiniones de las demás, y a tener en cuenta sus sugerencias a la hora de modificar las ideas propias.

Sin embargo el aprendizaje es una actividad personal e individual, por eso el trabajo en equipo debe ir seguido de una reflexión personal para interiorizar los contenidos y los procesos matemáticos, asumiéndolos como algo propio.

Formación de grupos:

Es difícil establecer en el aula grupos de acuerdo a unos determinados criterios sin tomar en cuenta las preferencias de los alumnos y las alumnas. El profesor o la profesora debe actuar para corregir disfunciones claras en algunos de los grupos. Un criterio para su formación puede ser que el grupo sea homogéneo, en cuanto a nivel de destrezas, motivación y grado de sociabilidad, ya que si en un mismo grupo hay personas muy trabajadoras y otras menos motivadas, estas últimas pueden acabar por no hacer nada, las que razonan de forma muy rápida pueden anular a otras que lo hacen de forma más lenta, o por ejemplo, una persona que asume el liderazgo con otras más tímidas puede conseguir que las ideas del grupo queden reducidas a su opinión personal; sin embargo lo que sí parece conveniente es que en un mismo grupo haya personas más intuitivas junto a otras más deductivas. Debemos de cuidar que no se forme un grupo sólo de chicas o únicamente de chicos, sino que todos los equipos sean mixtos.

Los equipos pueden ser fijos durante todo el curso, pero es aconsejable que sean flexibles y cambien con las distintas actividades para aumentar los múltiples refuerzos que pueden establecerse y el nivel de sociabilidad de toda la clase.

Es evidente que no todos los grupos tienen el mismo ritmo de trabajo y es posible que un grupo esté en la primera fase cuando otro está en la última.

Estructura del grupo:

Existen muchas formas de organizar el trabajo en grupo, por lo que antes de proponer cualquier actividad grupal debemos asegurarnos que el alumnado conoce algunas técnicas básicas. Si no es así gran parte de la rentabilidad esperada se pierde ante un mal reparto de responsabilidades, una deficiente organización, una incorrecta administración del tiempo, etc.

La psicología describe muchos modelos grupales, que presentan distintas ventajas e inconvenientes si se aplican de manera inconsciente sin tener en cuenta las características de alumnado y sus hábitos de trabajo. Un grupo ideal podría estar formado por:

- Una **persona dinamizadora** que mantiene el interés del grupo y cuida que nadie se quede sin participar.
- Una **persona organizadora** que se preocupa de planificar los tiempos y las tareas asignadas a cada fase del trabajo.
- Una **persona secretaria** que se ocupa de anotar todas las ideas que vayan surgiendo en el grupo y sistematizar las tareas que se vayan desarrollando.
- Una **persona portavoz** encargada de exponer las conclusiones de su equipo a toda la clase.

Cada una de las funciones descritas no deben asociarse siempre a una misma persona sino que es recomendable un sistema de alternancia.

Papel del profesorado.

En una clase de resolución de problemas, nuestra labor es dinamizar a los distintos equipos, supliendo las deficiencias y ayudando en los primeros momentos a las organizadoras en sus funciones.

Cuando un profesor o una profesora plantea un trabajo en grupo para resolver un problema debe:

- Elegir problemas con un enunciado atractivo, coeducativo y que resulte motivador.
- Graduar de manera conveniente la dificultad del problema.
- Analizar detenidamente los bloqueos que puedan surgir en la resolución del problema y utilizar los métodos adecuados para superarlos.
- Percibir las dificultades que el trabajo en grupo plantea como tal y contar con recursos para actuar frente a los obstáculos que perturban su buen funcionamiento.
- Procurar establecer un ambiente adecuado dentro del aula que favorezca actitudes positivas hacia el aprendizaje.
- Utilizar un lenguaje no sexista ni discriminatorio y mantener interacciones igualitarias con todo el alumnado, además de cuidar las actitudes y valores que se les transmiten.

2.6.2. Evaluación

Después de muchas sesiones de resolución de problemas todos nos hemos preguntado alguna vez cómo evaluar el progreso conseguido por los alumnos y las alumnas en cuanto a razonamiento matemático, capacidad de trabajo en grupo, etc. Sin embargo es necesario garantizar que la resolución de problemas y los trabajos de investigación queden reflejados en la evaluación, de forma que se reconozca su importancia como parte esencial del curriculum de Matemáticas.

Entre las capacidades y destrezas que deben ser tenidas en cuenta para evaluar en la resolución de problemas presentamos las siguientes:

- Capacidad para comprender información y expresarla mediante gráficas, diagramas y tablas.
- Capacidad para seleccionar y aplicar convenientemente las distintas estrategias heurísticas.
- Capacidad para realizar deducciones lógicas.
- Capacidad para interpretar y generalizar resultados.
- Capacidad para discernir sobre la bondad de una determinada solución.
- Capacidad de utilizar los errores de forma favorable.

Sin embargo estas capacidades resultan difíciles de evaluar. Una manera de obtener información sobre su grado de desarrollo es conseguir que los alumnos y alumnas escriban y expliquen con claridad, los resultados que obtienen ya que parte de nuestra valoración estará basada en las explicaciones sobre lo que han intentado hacer en cada momento, y lo que han conseguido.

En el libro "*Problemas con pautas y números*" (Shell Center; 1984, 169) hay ejemplos concretos de evaluación de resolución de problemas.

Para conseguir una evaluación procesual es interesante sistematizar las observaciones comparando los resultados obtenidos en distintos momentos del trabajo y adaptar los instrumentos de control al grado de avance logrado. Por supuesto la evaluación debe valorar el trabajo realizado en grupo, pero también es necesario reflejar de forma objetiva el progreso individual de los alumnos y las alumnas, desvelando ciertas apreciaciones que pueden permanecer ocultas dentro del grupo, y que además es necesario conocer para la evaluación general del proceso.

En la siguiente plantilla se presenta una forma sencilla de registrar el progreso realizado de forma individual:

	Siempre	**A veces**	**Nunca**
Comprende el problema			
Organiza de forma sistemática la información			
Elige entre varias estrategias la más adecuada			
Explica los métodos que ha utilizado para resolverlo			
Interpreta y generaliza los resultados			

A la vista de los resultados de las primeras observaciones hay que tomar decisiones sobre el tipo de problemas que pueden proponerse para conseguir superar aquellos aspectos sobre los que se detectan mayores dificultades.

En las primeras etapas se debe dar mayor importancia a los apartados más fáciles como elemento de motivación, pues no hay que olvidar que el éxito es una parte importante del aprendizaje.

También es necesario evaluar los objetivos que se han conseguido a través del trabajo en grupo. Para la evaluación del trabajo en grupo pueden aplicarse los siguientes criterios:

- Participar activamente en el desarrollo y resolución de los problemas.
- Defender las propias ideas y aceptar las del resto del grupo.
- Cumplir las tareas asumidas
- Compartir de forma positiva tanto los éxitos como los fracasos

Proponemos este instrumento que recoge de forma general alguno de los aspectos más importantes:

	Siempre	**A veces**	**Nunca**
Mantienen un buen clima de trabajo			
Se organizan bien			
Todos y todas asumen alguna tarea			
Trabajan de forma cooperativa			
Manifiestan interés por llegar a la solución			

Tanto en su aspecto individual como grupal la resolución de problemas es un método de trabajo fundamentalmente coeducativo y a lo largo de este capítulo se han hecho numerosas referencias a las ventajas que supone para las chicas respecto a la toma de decisiones, refuerzo de la autoestima, etc. Una forma de constatar los valores coeducativos que se han puesto en juego puede quedar reflejada en la siguiente plantilla:

	% Chicos	% Chicas	Indistintamente
Muestran inseguridad al expresar sus ideas			
Ante un bloqueo abandonan			
Cuidan la presentación de la tarea			
Muestran mayor actividad dentro del grupo			
Verbalizan con mayor precisión			
Sienten dificultad ante problemas geométricos			
Son más tolerantes			

Los resultados obtenidos nos ayudarán a componer un mapa que nos sirva para detectar situaciones en las que es preciso ejercer acciones compensatorias.

Nuestra última reflexión pretende reconocer la riqueza que aporta la resolución de problemas al aprendizaje de las matemáticas y su papel fundamental en el curriculum. Si eliminamos cualquier tentación de que sea considerada un nuevo elemento que genere frustraciones en el alumnado, habremos conseguido que se convierta en un auténtico valor para su formación como personas: la capacidad para resolver sus problemas.

3. El juego cooperativo en la clase de Matemáticas

Es importante potenciar la reflexión de los alumnos y las alumnas sobre la actividad manipulativa que desarrollan, pues esta reflexión es la base para la construcción de sus propias ideas matemáticas. Por esta razón, el papel de los recursos en el aula de matemáticas cobra una importancia cada vez mayor, considerándose incluso el interés de tener un "taller de matemáticas" o "laboratorio de matemáticas".

Teorías matemáticas muy importantes han surgido teniendo como origen algún juego o pasatiempo lo que nos lleva a pensar que el juego ayuda en el desarrollo intelectual fomentando la creatividad y el ingenio.

El juego constituye una forma de relación y comunicación entre el alumnado y un instrumento de asimilación e integración en el mundo de los adultos. Tiene un claro valor educativo y resulta ser un valioso elemento metodológico. Sin embargo, nuestro sistema educativo lo considera una actividad poco "seria", no adecuada para los procesos de aprendizaje que tienen lugar en el aula.

El juego es un instrumento didáctico que puede ayudarnos en una pedagogía activa, a "*hacer matemáticas en la clase de matemáticas*", frente un aprendizaje pasivo y verbalista; a tener en cuenta los procesos intelectuales y los afectivos, al intercambio de actitudes y puntos de vista, a la participación activa, al trabajo colectivo, a propiciar la creatividad y la imaginación. Es también un elemento de motivación, de estimulación y exploración. Mediante el juego se pueden crear situaciones de máximo valor educativo y cognitivo que permitan experimentar, investigar, resolver problemas, descubrir y reflexionar. Todo esto puede ser conducido a la construcción del conocimiento, al aprendizaje significativo. Las implicaciones de tipo emocional, el carácter lúdico, el desbloqueo emocional, la desinhibición, son fuente de motivación, es una forma distinta de acercarse al conocimiento muy diferente de la que tiene lugar en las situaciones de aprendizaje tradicionales.

Es importante destacar el papel del profesorado durante el juego como agente orientador de los procesos de aprendizaje de matemáticas por los alumnos y alumnas. Se puede jugar sin aprender nada. Lo importante es saber sacar partido de las ventajas del juego para el aprendizaje.

No pretendemos en este capítulo tratar en profundidad las posibilidades didácticas del juego sino que nuestro objetivo es dar sólo algunas pinceladas de la relación entre juego y aprendizaje de las matemáticas mediante la exploración de algunos juegos.

3.1. El juego en matemáticas

Podemos ver que en la actualidad muchos títulos de libros sobre matemáticas se llaman: "Matemáticas recreativas", "Juegos y pasatiempos matemáticos" o tratan sobre el carácter lúdico de las matemáticas. Dice Miguel de Guzmán en Cuentos con cuentas que:

> *"El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y la belleza?"*

[GUZMÁN, M. (1989): Juegos y matemáticas Revista SUMA, nº4, 61-64]

y que

> *"La matemática ha sido y es arte y juego y esta componente artística y lúdica es tan consubstancial a la actividad matemática misma que cualquier campo del desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable"*

[GUZMÁN, M. (1989): Juegos y matemáticas Revista SUMA, nº4, 61-64]

En los juegos puede encontrarse una gran riqueza matemática y, por otra parte muchos profundos teoremas matemáticos tienen una formulación o la apariencia de un juego (teorema de los cuatro colores, problema del billar triangular, problema de la aguja). Al analizar los juegos podemos encontrar en ellos gran riqueza en temas matemáticos y muchas posibilidades para promover el aprendizaje de las Matemáticas.

Las Matemáticas son arte y juego, y en los juegos hay Matemáticas.

3.1.1. Características del juego y de la matemática

El niño y la niña juegan y con el juego se preparan para la vida. La persona adulta también juega. El juego es una actividad diferenciada de la vida cotidiana que produce placer y debe tomarse en serio. Es una actividad libre, pero con una cierta función. Tiene sus reglas.

Un juego comienza estableciendo unas reglas que definen la función de unos objetos, de igual forma que comienza una teoría matemática. Al jugar se adquiere práctica con esas reglas y se adquieren técnicas que dan buen resultado. Son los ejercicios elementales y la adquisición de automatismos. Podemos continuar estableciendo paralelismos entre las características del juego y de las Matemáticas.

3.2. Los juegos en la enseñanza de las matemáticas

De la misma forma que el investigador matemático se plantea los problemas en forma de juego, la mejor manera de despertar el interés y el deseo de descubrir a los alumnos y alumnas es presentando un juego, una paradoja, un truco de magia o una experiencia. Un juego bien elegido desde el punto de vista metodológico puede servir para introducir un tema, ayudar a comprender mejor los conceptos o los procesos, afianzar los ya adquiridos, adquirir destreza en un algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad, reforzar automatismos o consolidar un contenido. Es una fuente de ideas con la que interesar a los alumnos y alumnas por las matemáticas. Las ventajas de este recurso didáctico son innumerables: entusiasmo, diversión, interés, desbloqueo, motivación. Las matemáticas se verán como algo útil y lleno de interés.

Los procesos de pensamiento útiles en el desarrollo de la matemática son, por la semejanza entre matemática y juego, los mismos que se desarrollan en el juego. Las fases de la **resolución de problemas**, las estrategias heurísticas, los métodos y herramientas son similares a los que pueden utilizarse en la exploración de un juego. En un juego se encuentran las siguientes fases:

1ª fase de juego de libre desarrollo,

2ª fase de creación de relaciones de comunicación con los demás,

3ª fase de situación de juego simbólico y

4ª fase de expresión de la creatividad.

El juego cuidadosamente presentado y dirigido puede incidir en las distintas etapas de aprendizaje desde una simple observación o manipulación, hasta llegar al razonamiento lógico, pasando por la intuición, experimentación, capacidad de reflexión...

Para seleccionar adecuadamente los juegos es necesario conocer las necesidades e interés de aquellos a los que vayan dirigidas las actividades.

Es inherente al juego la utilización de una pedagogía activa, un trabajo en grupo donde se fomentará el desarrollo de la expresión oral, la reflexión acerca del razonamiento seguido para llegar a una solución, ya que al jugar los alumnos y las alumnas deben hablar, discutir, compartir, para después comprobar y explicar.

3.3. Análisis de juegos:

3.3.1. El salto de la rana

Hemos seleccionado este juego porque ha sido tratado por muchos autores. Es un juego muy sencillo. Es un solitario. Esto es una desventaja pues siempre son preferibles juegos en grupo no competitivos.

Se necesitan un cierto número de fichas de dos colores, blancas y negras por ejemplo. Se colocan las fichas blancas a la izquierda de un espacio libre y a la derecha las fichas negras.

...BBB NNN...

El objetivo del juego es, con el menor número posible de movimientos, intercambiar las posiciones de las fichas blancas con las negras.

Las reglas son las siguientes:

1.- Las fichas blancas sólo pueden moverse hacia la derecha y las negras sólo hacia la izquierda.

2.- Una ficha puede moverse a una casilla adyacente si está vacía.

3.- Una ficha también puede saltar, sobre otra de distinto color, a una casilla vacía, en el sentido permitido.

Cada movimiento consiste en mover una sola ficha

Antes de seguir leyendo juega un poco para comprender las reglas del juego y su dificultad.

Al proponer el juego a un grupo de alumnos y alumnas comienzan jugando. Esta fase se corresponde con la fase introductoria o "de abordaje" de la resolución de problemas. Es comprender las reglas del juego. El profesor/a deja un tiempo de juego libre sin intervenir más que para aclarar, si es preciso, las normas.

En la fase exploratoria se seleccionan posibles estrategias. Por ejemplo podemos seleccionar particularizar. Propone el profesor/a que primero se juegue con sólo dos fichas una de cada color y rápidamente todos ven que con tres movimientos se consigue el objetivo. Después propone jugar con dos, tres, cuatro, cinco fichas y confeccionar una tabla.

Comienzan las complicaciones. Deben buscarse estrategias ganadoras. Estamos en la fase de ejecutar el plan. A la vista de las tablas, ¿estamos seguros que son los mínimos movimientos? Los alumnos y alumnas van jugando y discutiendo en el grupo sus estrategias de juego y sus tablas. Llegan a un acuerdo respecto de la tabla: "El número de movimientos son: 3, 8, 15, 24, 35, ..."

En la siguiente fase deben buscar una fórmula que generalice el resultado e intentar probarla. Hacen la conjetura de que la fórmula buscada es $a_n = n^2 + 2n$.

Hasta ahora el juego lo hemos podido utilizar para consolidar el concepto de sucesión, el término ene-ésimo de una sucesión o incluso utilizar diferencias finitas para calcularlo. Veamos ahora como un juego tan sencillo puede utilizarse como elemento motivador de otros muchos contenidos del currículo.

Otras estrategias que pueden emplear para recordar cuales han sido los movimientos que van haciendo es buscar una buena notación. Una buena notación propuesta por Merchan es llamar 0 al hueco inicial, y numerar con números positivos las posiciones de la derecha y con negativos a los de la izquierda. Podemos indicar el primer movimiento de la ficha blanca como (-1, 0) si va de la casilla -1 a la casilla 0, y el primer movimiento de la ficha negra como (1, -1) si salta de la casilla 1 a la casilla -1.

Se pueden representar gráficamente estos pares ordenados y buscar pautas y regularidades. Buscar una recursión. Es conveniente que analizar las estrategias heurísticas que cada uno ha empleado.

Al representar los pares ordenados estaremos aplicando conceptos como par ordenado, abscisa, ordenada, ejes de coordenadas. Si ahora el profesor/a pide que se unan mediante una poligonal los pares ordenados que representan cada movimiento, por orden, desde el primero hasta completar el juego, se obtendrán distintas figuras según el número de fichas. Al observar estas figuras y compararlas entre si, se pueden trabajar conceptos geométricos. Por ejemplo, las figuras obtenidas son simétricas respecto a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante. Cada figura contiene a las figuras obtenidas con un número menor de fichas. Los puntos correspondientes a fichas de un mismo color están a un mismo lado de la recta $y = x$, en un mismo semiplano. Si comienzan jugando las otras fichas, las figuras ahora obtenidas son simétricas a las anteriores, de eje de simetría la recta $y = x$.

También se puede calcular el área encerrada por estas figuras. Todas las figuras son cerradas excepto para el caso de una sola ficha de cada color. Se revisa el cálculo de áreas de cuadrados, rectángulos, triángulos, trapecios, paralelogramos... Al preguntarnos cuánto vale el área total según el número de fichas, tenemos un nuevo ejemplo de sucesión, que ahora es una progresión aritmética de término general $8n - 7$.

Por último, en F. Hernán se comenta que es posible plantear este mismo juego de forma mucho más abierta, permitiendo que alumnos y alumnas elaboren las reglas del juego. De este modo la riqueza de posibilidades aumenta.

En resumen, este juego puede servirnos para aplicar técnicas de resolución de problemas analizando fases, métodos, estrategias heurísticas y la búsqueda de un modelo matemático. Puede utilizarse como elemento motivador para introducir o para aplicar conceptos en sucesiones o en geometría.

3.3.2. Juegos de estrategia ganadora: Llegar a cien

Vamos a analizar un juego, fácil de jugar, que ilustra bien las técnicas de resolución de problemas en el aula, y que tiene una estrategia ganadora sencilla, pero no obvia. Es un juego de dos jugadores.

Cada jugador/a elige por turnos un número entre 1 y 10 y lo suma a los números elegidos anteriormente. Gana el primer jugador/a que consigue sumar exactamente cien. ¿Puedes hallar alguna estrategia ganadora?

Antes de seguir leyendo, juega.

Para proponer este juego en el aula sugerimos las siguientes pautas:

Jugar en la pizarra, en voz alta, algunas partidas, para aclarar las reglas del juego.

Dejar jugar a los alumnos y alumnas libremente, durante un corto espacio de tiempo. Es la fase de libre desarrollo del juego. Podemos animar a que anoten las partidas para luego poder reflexionar sobre ellas.

En la segunda fase, de creación de relaciones, el profesor/a invita a comenzar el análisis del juego. Posibles sugerencias heurísticas son:

a) Particularizar, simplificando el juego: llegar sólo hasta 20, elegir números entre 5 y 10, partir de un valor próximo a cien y desde ese punto terminar la partida.

b) Analizar si hay elecciones buenas o malas.

c) Suponer el problema resuelto: buscar posiciones desde las que siempre se pueda ganar, o buscar posiciones desde las que se pueda llegar a una posición ganadora.

El profesor/a anota, en la pizarra, una lista de los descubrimientos del alumnado.

La tercera fase de situación de juego simbólico comienza solicitando a los alumnos y alumnas que hagan una conjetura, que escriban una descripción de una regla que permita ganar siempre la partida y comprueben la regla. ¿Es posible ganar a alguien que aplica esa regla? ¿Se puede convencer al resto que esa estrategia es ganadora? Cada alumno o alumna debe confeccionar y entregar un informe donde explique sus hallazgos y sus métodos.

La cuarta fase de expresión de la creatividad consiste en modificar el juego, en generalizarlo. Posibles sugerencias son:

i) Suponer que el primero que llega a cien pierde.

ii) Acotar de otra forma los números que se pueden sumar.

iii) Ganar el primero que llega a 127.

iv) Sólo poder sumar 5, 10 o 25 y ganar el primero que llega a cien.

Permitir que elaboren un **trabajo de investigación** y escriban sobre su propio juego es una forma de expresión de la creatividad.

3.3.3. Juegos de azar: Llegar al cielo

En muchos juegos interviene el azar. Bastantes de estos juegos son modelos de procesos físicos o biológicos, como los juegos de la vida, o el estudio de procesos de nacimiento y muerte. Analizaremos el siguiente juego, "*llegar al cielo*", no como modelo, sino únicamente como instrumento para aumentar la comprensión sobre el comportamiento del azar.

Es un juego de dos jugadores y se juega sobre un tablero formado por líneas horizontales.

El jugador A intenta que su árbol crezca hasta el "cielo" y el jugador B trata de impedírselo.

El jugador A lanza una moneda. Si sale cara, se alarga una rama del árbol, y si sale cruz, se alargan dos ramas. El jugador B lanza una moneda una vez por cada rama que haya dibujado A. Si sale cara detiene el crecimiento de esa rama colocando una ficha en su extremo. Si sale cruz, la rama permanece viva y puede seguir reproduciéndose.

A continuación el jugador A lanza de nuevo una moneda por cada rama que esté viva. Y así sucesivamente. El jugador A gana si consigue llegar al cielo. En caso contrario gana B.

¿Tiene ventaja alguno de los jugadores?

Lo conveniente es comenzar jugando y anotando los resultados para tener la seguridad de que se comprenden las reglas del juego. Se observa que el juego es ventajoso para B. Se pueden plantear entonces otras cuestiones como:

¿En qué proporción tendrían que ir las apuestas para que el juego fuese justo?

¿Cuánto tarda A, por término medio, en llegar al cielo?

¿Cuánto tarda B, por término medio, en ganar a A?

Calcular la probabilidad de que gane uno de los jugadores de forma teórica es complicado, incluso utilizando un diagrama de árbol o una cadena de Markov. Al llevar este juego a una clase y jugar y anotar los resultados se puede confeccionar una tabla con los resultados de todos. Analizando la tabla podemos dar respuesta a las cuestiones.

El profesor/a debe seguir planteando preguntas para conseguir mejorar la comprensión de las reglas del azar. Una de las estrategias de resolución de problemas es la de particularizar. Se puede sugerir a los alumnos y alumnas que trabajen con una única capa, luego con dos, y así con sucesivos casos particulares. Confeccionamos tablas para cada caso.

Utilizar el ordenador, o la calculadora, para simular el juego un número grande de veces proveerá de gran número de resultados.

La siguiente fase consiste en buscar una fórmula recursiva y comprobar el ajuste entre los resultados experimentales y los teóricos. Si llamamos p_n a la probabilidad de que gane B al jugar con n capas obtenemos la expresión: $8p_n + 1 = 3 + 4p_n + p_n^2$

En la fase de generalización se puede estudiar la manera de modificar el juego para que sea más equilibrado. El enunciado queda abierto. Por ejemplo, podemos estudiar que ocurre si el jugador A, cuando sale cara, añade cuatro ramas y, cuando sale cruz, añade sólo una. Ahora el juego ha dejado de ser un "problema" para convertirse en una "investigación". Tenemos muchas nuevas posibilidades para continuar.

La experimentación en el aula de matemáticas, de forma cotidiana, mejora la comprensión de conceptos, utiliza técnicas útiles y hace las matemáticas accesibles a la mayoría del alumnado. Por tanto mejora el aprendizaje.

El juego nos ayuda a experimentar con un modelo. La utilización del ordenador como herramienta de simulación nos permite confirmar o rechazar conjeturas, haciendo posible encontrar la solución teórica.

3.3.4. Dominós, barajas, juegos de tablero

Otra forma de utilizar el valor motivador del juego en la clase de matemáticas es usarlo para reforzar automatismos o en recuperación. Se pueden adquirir barajas, dominós y juegos de tablero adecuados para trabajar con números decimales, fracciones, ecuaciones, etc.

También es posible fabricarlos en el "*taller de matemáticas*". Vamos a suponer que queremos fabricar un dominó que sirva para trabajar con las funciones trigonométricas. El material necesario es una simple cartulina de donde recortar las fichas o fichas de madera y pegatinas. Se juega con las mismas reglas del juego clásico del dominó.

Tendremos que seleccionar 7 valores, por ejemplo:

$$0, 1, 1/2, \sqrt{3}/2, -1, -1/2, \sqrt{2}/2$$

Para cada uno de los valores buscaremos siete formas de expresarlos. Por ejemplo:

$$1/2 = \cos 60^\circ = \text{sen}30^\circ = \cos 300^\circ = \text{sen}150^\circ = \cos\pi/3 = \text{sen}\pi/6.$$

El proceso de diseño de estos juegos clásicos es ya de por si interesante.

3.4. El juego cooperativo

El juego cooperativo se caracteriza, por eliminar la competencia, no hay nadie que pierda o gane. La meta que se persigue no es ganar sino obtener un determinado objetivo de equipo, esto constituye un contenido transversal de la educación.

Los juegos cooperativos favorecen el desarrollo de capacidades nuevas a quienes por sus limitaciones se ven excluidos o se autoexcluyen en el aula. Es una primera reflexión para hablar de educación para la paz si nos proponemos actividades sin competición y sin necesidad de que trabaje uno en contra de otro. Porque la competición produce sentimiento de frustración y hace sentir a las personas como torpes.

A nadie nos gustan las situaciones opresivas, en las que en lugar de preocuparnos por nuestro trabajo, tengamos que intranquilizarnos por los fallos, la crítica o el rechazo. Eliminar que se den este tipo de situaciones hará que todo el trabajo sea mucho más relajado, mucho más creativo y mucho más humanizado.

No se trata en absoluto de obligar a cooperar a los alumnos y alumnas porque “haya que ser solidarios”, sino de ofrecer situaciones, cada vez más, que fomenten la amistad, la colaboración y el trabajo en grupo como algo necesario y divertido, sin necesidad de que alguien gane o pierda.

Investigaciones recientes muestran que la interacción y la cooperación entre al alumnado cuando se enfrentan a las metas de grupo y la búsqueda común de estrategias para la resolución de un determinado problema suelen ofrecer mejores resultados.

Terry Orlick, en su libro “*Libres para cooperar, libres para crear*” afirma:

> *“Lo mágico de los juegos cooperativos gira en torno a varias libertades que ayudan el desarrollo de la cooperación, de los buenos sentimientos y del apoyo mutuo.”*

[Terry Orlick. Libres para cooperar, libres para crear]

Libres para competir

La estructura interna de los juegos cooperativos rechaza la competición.

Las personas que aceptan el éxito competitivo, no sólo son capaces de destruir a otros sino también destruirse a sí mismas y a sus familiares, manifestando altos niveles de angustia, depresión, agresividad destructiva y abandono.

Libres para crear

Construir cooperativamente es crear, es sinónimo de echar cimientos para una sociedad pacífica. Los juegos cooperativos han desarrollado el pensamiento creativo de diversos pueblos y continuarán haciéndolo evitando que los participantes se involucren en tareas estáticas y rígidas.

Libres de exclusión

Los juegos competitivos expulsan a las personas brutalmente, alimentando sentimientos de rechazo y desconfianza eliminado mejorar destrezas. En este sentido los juegos verdaderamente cooperativos rechazan dividir a los jugadores en ganadores y perdedores.

Libres para elegir

Cuando tratamos al alumnado como seres autónomos responsables, comienza a comportarse como persona capaz de sentirse importante y se mejora el control personal resolviendo muchos problemas, logrando tomar decisiones por sí mismas. Una experiencia temprana de cooperación, creatividad y elección permitirá a más personas ser más felices en la cooperación y más sanos en la competición

Libres de agresión

En las sociedades pacíficas los alumnos son libres de agresión y ésta se consigue cuando los juegos son cooperativos.

> *"Una vez que los niños y niñas están familiarizados con diversos tipos de actividades y diferentes maneras de jugar juntos de forma constructiva, se encuentran en una mejor posición para elegir entre opciones cooperativas, competitivas e individuales. Una experiencia temprana de cooperación, creatividad y elección permitirá a más personas ser más felices en la cooperación y más sanos en la competición.*

[Orlick; 1995]

> *"La característica distintiva de los juegos cooperativos frente a todos los otros juegos, viejos o nuevos, es su estructura interna. Los juegos cooperativos han desarrollado el pensamiento creativo de diversos pueblos y continúan haciéndolo, nunca deberían ser tan rígidos y estáticos que impidieran la entrada a la creatividad y a la sensibilidad de los y las participantes. Ninguna regla debería verse como algo inflexible"*

[Orlick; 1995]

Una actividad interesante desde el punto de vista del análisis de juegos cooperativos consiste en modificar juegos tradicionalmente competitivos en otros en los cuales la colaboración entre los y las participantes es necesaria para concluir el juego. Resulta un ejercicio de imaginación, que no siempre es fácil, y en el que hay reflexionar hasta llegar a algo que sea realmente bueno, pero cuando se consigue los resultados son más que gratificantes.

4. Biografías de algunas mujeres matemáticas

¿Sabías que más de cien cráteres de la luna tienen nombres de matemáticos famosos? ¿Y sabes cuántos de ellos tienen nombres de mujeres matemáticas? En este capítulo vamos a reflexionar sobre la forma de utilizar la historia de las matemáticas como un recurso metodológico.

La historia de las matemáticas puede proporcionar contextos apropiados para introducir o para afianzar determinados conceptos. Sabemos que los juegos de azar dieron lugar al estudio de la probabilidad o que, por poner sólo dos ejemplos, el legendario problema de la duplicación del cubo ayudó a comprender los números reales. Se pueden utilizar estos, y otros muchos ejemplos, como elementos motivadores.

Opinamos que, la forma de utilizar la historia en la clase debe ser para plantear problemas, para que el alumnado conozca que los conceptos y las ideas matemáticas no han surgido de la forma elaborada en la que se aprenden, sino que han aparecido al querer resolver determinados problemas. La manera de trabajar del matemático profesional es similar a las técnicas que hemos comentado de resolución de problemas, y sólo, cuando el problema ya está resuelto, lo escribe de la forma en la que luego se nos presenta. El ejemplo más conocido es el libro de los *Elementos* de Euclides, libro básico que recoge el conocimiento de la Geometría y que ha sido utilizado durante siglos como libro de texto, donde se demuestra cada paso, cada propiedad y cada proposición, partiendo de un sistema de axiomas, pero que recoge ese conocimiento ya acabado y pulido, y no la forma de llegar hasta él.

Aquí recogemos la contribución de algunas mujeres matemáticas. Podemos mencionar a Teano al trabajar proporciones, en particular al estudiar la proporción áurea en la estrella pitagórica; a Hipatia al estudiar las cónicas; a María Gaetana Agnesi en las curvas; podemos comentar que quizás conozcamos los *Principia* de Newton gracias a las explicaciones de Mme. de Châtelet que lo tradujo y lo divulgó; hubo muchas mujeres que recopilaron datos astronómicos como Carolina Herschel. Ada Lovelace es la primera mujer informática; al estudiar ecuaciones se deben tener en cuenta las aportaciones de Emmy Noether al Álgebra…

4.1. Teano

Mujeres matemáticas en la antigüedad. Portada de Eychenne, Eliane (1993): "Mathématiciennes, ... des inconnues parmi d'autres". Brochure de l'IREM de Besançon.

Teano se casó con Pitágoras cuando éste ya era viejo. Todo el mundo conoce a Pitágoras, mientras que Teano es poco conocida. Sin embargo dirigió la Escuela Pitagórica después de la muerte violenta de éste. Se ha conservado poco de la obra de Pitágoras así como de la de Teano, aunque se conoce por las referencias de otros autores.

4.1.1. Las mujeres en la antigüedad

Muchas personas opinan que quizás no sea muy adecuado comenzar a hablar de las mujeres matemáticas de la antigüedad, míticas, que no sabemos si realmente han existido o con certeza cuál ha sido su obra, cuando tenemos seguridad histórica y obra escrita de gran número de matemáticas más actuales[1]. Sin embargo algo parecido les ocurre a sus contemporáneos varones, Pitágoras, Tales…, y no por eso son olvidados.

Cuando Platón escribió La República presentó un estado gobernado por la razón, pero una razón que aspira a la sabiduría, y aunque su modelo en la actualidad podíamos considerarlo como un estado totalitario es interesante tener en cuenta la opinión que tenía sobre las mujeres, pensaba que podían gobernar igual que los hombres porque tenían la misma capacidad de razonar, cuando habían recibido una misma educación y podían liberarse del cuidado de los niños y de las tareas domésticas. Además suponía que la educación de los niños era responsabilidad del Estado y en cierta forma suprimía la familia y la propiedad privada.

Después de vivir algunas desilusiones políticas Platón escribe el diálogo *Las Leyes* en el que se muestra más partidario de la familia y de la propiedad privada, esto reduce la libertad de la mujer pero sigue preocupado por su educación y dice que si un Estado no educa a sus mujeres es como un ser humano que sólo hace ejercicio con su brazo derecho.

Sin embargo la idea que tenía Aristóteles de la mujer era muy distinta de la de Platón, pensaba que era un hombre incompleto, la mujer

[1] Salvador, Adela (199): “Mujeres matemáticas en la antigüedad” Boletín OECOM “Ada Byron” nº 3.

era pasiva y receptora frente al hombre que era activo y el que da, y de alguna manera identificaba al hombre con la forma y a la mujer con la materia y por supuesto en la filosofía aristotélica lo importante era la forma.

Posiblemente fue el responsable de la idea que se tuvo de la mujer en toda la Edad Media, debido a la predominancia que en esta época tuvieron las teorías de Aristóteles sobre las de Platón, y que fueron propagadas por la iglesia católica.

Aglaonice de Tesalia era una mujer griega del s. V a C., que se hizo famosa por su capacidad de predecir eclipses, y aunque seguramente usó métodos descubiertos por astrónomos caldeos, fue considerada hechicera.

Sucesores de los pitagóricos podemos considerar a los "sofistas" que pretendían enseñar el conocimiento, y utilizando la lógica matemática triunfaban en las discusiones. ***Aspasia***, nacida en Mileto, hija de Axioca, recibió una buena educación, hetaira y sofista, aparece en los "Diálogos" de Platón como maestra de Sócrates.

Pero las mujeres que estudiaban en la Academia de Platón eran extranjeras, debido a las leyes que excluían a las mujeres de las reuniones públicas, o debían asistir a las clases disfrazadas de hombre como ***Lastenia*** y ***Leontio***. Para poder instruirse y cultivar sus intereses científicos en muchas ocasiones no se casaban, por lo que historiadores de la Antigüedad o medievales se han preocupado más por su honestidad que por sus logros intelectuales.

> *"La historia sexual de Teano, Aspasia, Lastenia y Leontio se consideraba más importante que sus conocimientos".*

[Alic, Margaret (1991): "El legado de Hipatia". Siglo veintiuno editores. México. Página 42]

"O tal vez los ataques a su honra no eran más que intentos apenas disfrazados de desacreditarlas y desalentar a otras. A pesar de eso, las mujeres de las escuelas atenienses formaron parte de la tradición platónica que influyó en la ciencia hasta la era cristiana".

[Alic, Margaret (1991): "El legado de Hipatia". Siglo veintiuno editores]

4.1.2. La Escuela Pitagórica

La Escuela Pitagórica estaba formada por los seguidores de Pitágoras (572-497 a.C.). En la influyente escuela pitagórica, las Matemáticas se estudiaban con pasión. Se afirmaba "*todo es número*" ya que se creía que en la naturaleza todo podía explicarse mediante los números.

Veamos un fragmento de una reflexión:

"He oído decir que los griegos pensaban que Pitágoras había dicho que todo había sido engendrado por el Número. Pero esta afirmación nos perturba: ¿cómo nos podemos imaginar cosas que no existen y qué pueden engendrar? Él dijo no que todas las cosas nacían del número, sino que todo estaba formado de acuerdo con el Número, ya que en el número reside el orden esencial, y las mismas cosas pueden

ser nombradas primeras, segundas, y así sucesivamente, sólo cuando participan de este orden"

[Solsona; 1997; 20]

Daban mucha importancia a la educación tanto de hombres como de mujeres, que no se limitaba a las artes útiles sino que también se ocupaba del lenguaje y del rigor en el razonamiento. Consideraban importante que una mujer fuera inteligente y culta.

4.1.3. Teano

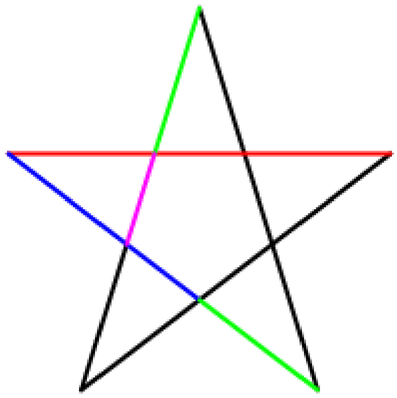
Teano[2], natural de Crotona, Grecia, s. VI a.C., fue discípula de Pitágoras, más tarde enseñó en la Escuela Pitagórica y se casó con él cuando éste ya era viejo. Según los historiadores Teano escribió mucho. Se le atribuye haber escrito tratados de Matemáticas, Física y Medicina, y también el precepto matemático de la proporción áurea. Se conservan fragmentos de cartas. La mayor parte de los textos que nos han llegado de mujeres de esta época, quizás por ser los que resultaban más interesantes a los religiosos que los han conservado, hablan de problemas morales o prácticos. A Teano se le atribuye un tratado *Sobre la Piedad* del que se conserva un fragmento con una disquisición sobre el número.

Se supone que a Pitágoras lo mataron durante una rebelión contra el gobierno de Crotona por la comunidad pitagórica en la que la escuela fue destruida y sus miembros muertos o exiliados. Teano sucedió a Pitágoras a la cabeza de la comunidad, que se dispersó cuando éste murió. Con la

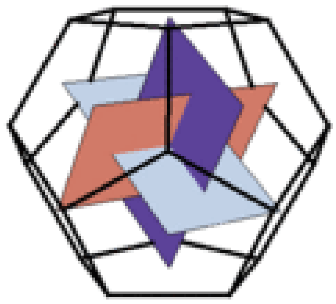
[2] Alic, Margaret (1991): "El legado de Hipatia". Siglo ventiuno editores. México. Página 37.

ayuda de dos de sus hijas difundió los conocimientos matemáticos y filosóficos en Grecia y Egipto.

Siguió habiendo muchas mujeres en ramas de la Escuela Pitagórica. Han sobrevivido algunos nombres como *Damo*, *Myia*, *Fintis*, *Melisa*, *Tymicha*.



En la estrella pitagórica, la estrella de cinco puntas, aparece la proporción aurea entre cada dos longitudes consecutivas. Por eso recibe también el nombre de estrella pitagórica. Porque los pitagóricos, y recordemos que Teano quedó como responsable de la escuela pitagórica a la muerte de Pitágoras, asombrados al descubrir las propiedades tan asombrosas del número de oro, tomaron la estrella como emblema, solo conocida por los iniciados.



Podemos recordarla si se trabaja en el aula con el número de oro, la proporción áurea, los rectángulos áureos o la propia estrella pitagórica. Incluso los poliedros regulares tienen una fuerte relación con la proporción áurea. En la ilustración pueden verse como con tres rectángulos áureos colocados según los planos coordenados, se puede construir un icosaedro regular uniendo los vértices, siendo dual del dodecaedro.

4.2. Hipatia

(¿? - 415)

El nombre de Hipatia significa la más grande. La leyenda de Hipatia de Alejandría nos muestra a una joven, virgen y bella, matemática y filósofa, cuya muerte violenta marca un punto de inflexión entre la cultura del razonamiento griego y el oscurantismo del mundo medieval. Como ocurre con todas las biografías de los matemáticos (y matemáticas) de la antigüedad, se sabe muy poco de su vida, y de su obra se conoce sólo una pequeña parte. Fue recordada como una gran maestra y admirada por la magnitud de sus conocimientos. Era considerada como el mejor matemático vivo del mundo greco-romano. En la época de la Ilustración, Toland y Voltaire, utilizaron su figura como símbolo en contra de la irracionalidad del fanatismo religioso, y en el Romanticismo la recrearon como la encarnación del espíritu de Platón y el cuerpo de Afrodita. Pero toda esta notoriedad ha hecho que se pierdan de vista sus logros intelectuales y su auténtica biografía. Enseñó Matemáticas, Astronomía y Filosofía, escribió un trabajo titulado "El Canón Astronómico", comentó las grandes obras de la matemática griega como la "Aritmética" de Diofanto, "Las Cónicas" de Apolonio, el libro III del "Almagesto" de Tolomeo, probablemente comentara junto a su padre, los "Elementos" de Euclides y el resto del "Almagesto". Construyó instrumentos científicos como el astrolabio y el hidroscopio.

4.2.1. Su época

Vivió en Alejandría durante el Imperio Romano, aunque por su formación podemos considerar que era griega, por la ubicación de Alejandría, egipcia, y por la época, romana.

Recordemos que **Alejandría** era un centro intelectual y comercial en el delta del Nilo y el lugar donde se conservó la cultura griega. Era una ciudad cosmopolita habitada por una población de origen griego, el grupo más importante, y por egipcios, romanos, judíos y, en menor cantidad, etnias árabes, sirias y persas. Fue durante siglos la metrópoli intelectual y cultural del mundo. La creó Alejandro Magno, que planeó que fuese la ciudad mejor del mundo, y muchos opinan que lo consiguió. Después de la muerte de Alejandro, hacia el año 306 a. C. su imperio se dividió. Tolomeo I heredó Egipto y Alejandría fue la capital de su reino. En Alejandría, Tolomeo fundó una escuela, o instituto, la primera universidad en el sentido que hoy le damos, conocida como el Museo. Como profesores de esta escuela hizo llamar a sabios de primera línea. En el año 30 a. C el suicidio de Cleopatra permitió que el Imperio Romano ocupara Egipto, aunque Alejandría mantuvo su tradición intelectual de herencia griega. Como los romanos tenían voluntad de expansión, adoptaron las técnicas convenientes para dicha difusión, y las matemáticas griegas no eran útiles desde ese punto de vista, por lo que no fueron apreciadas.

Durante el **Imperio Romano** se puede considerar que había tres niveles distintos de instrucción: el superior, con conocimientos de matemáticas, literatura y oratoria, propio de la elite de las ciudades, donde tanto hombres como mujeres tenían un alto grado de formación, lo que contribuía a la cohesión en tan basto imperio; el segundo, con conocimientos aritméticos y alfabetización que permitían trabajar en asuntos administrativos y el tercero formado por la población rural y urbana. La **mujer** estaba sometida a la autoridad paterna o del marido. Adquiría derechos por herencia o por divorcio, pero bajo la tutela del estado que restringía sus derechos públicos. Sin educación y sin independencia económica era difícil materializar sus eventuales aspiraciones intelectuales. En este contexto, Hipatia es una excepción, favorecida por la rara liberalidad de su padre.

El padre de Hipatia, Teón, fue también un ilustre matemático y astrónomo cuya vida está asociada al Museo, del que puede haber sido el último director. Se sabe de él por dos eclipses, uno de Sol y otro de Luna que tuvieron lugar durante el reinado de Teodosio I.

El **Museo** era una institución dedicada a la investigación y la enseñanza, fundada por Tolomeo, general de Alejandro Magno, con más de cien profesores, dos bibliotecas: una interna con 400.000 volúmenes “compuestos”, es decir, con obras de diferentes autores, y 90.000 volúmenes “simples”, con textos de un solo autor; y otra externa o de Serapeo, con unos 43.000 volúmenes, un zoológico, jardines botánicos, observatorio y salas de disección. El Museo de Alejandría tenía siete siglos cuando nació Hipatia. En el Museo trabajaron importantes matemáticos: ***Euclides*** (330? - 270? a. C.) fue probablemente el primer gran matemático de esta institución. De su vida se sabe tan poco que no se conoce su lugar de nacimiento, aunque se le llama Euclides de Alejandría, pues trabajó allí enseñando matemáticas. ***Arquímedes*** de Siracusa (287 - 212 a. C.) pudo haber estudiado algún tiempo en Alejandría con los discípulos de Euclides. ***Apolonio*** (262? - 180? a. C.). ***Eratóstenes*** de Cirene (284? - 192? a. C.) que desempeñó en Alejandría el cargo de bibliotecario, y a esa época se debe su estimación del diámetro de la Tierra. ***Diofanto*** de Alejandría (325 - 409), vivió y trabajó en Alejandría, escribió su Aritmética hacia el año 250 por la que se le ha llamado “padre del álgebra”, y ***Pappus*** de Alejandría (300 - 350) que también trabajó allí.

De ella se ha dicho:

"Hipatia es la primera mujer de ciencia cuya vida está bien documentada".

“Aunque la mayoría de sus escritos se han perdido existen numerosas referencias a ellos”. "Fue la última científica pagana del mundo antiguo, y su muerte coincidió con los últimos años del Imperio romano". "Ha llegado a simbolizar el fin de la ciencia antigua" [1].

[ALIC, M. (1991): El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX. Siglo veintiuno editores. Madrid. pp. 58 - 63.]

4.2.2. Su vida

No se conoce cuando nació Hipatia pero se sabe que murió en marzo del 415. Sobre su año de nacimiento se barajan tres posibles fechas, todas ellas aproximadas, según se estime que en el momento de su muerte fuese una mujer mayor, madura o joven. Así, Dzielska, encuentra razonables los argumentos de Malalas, autor bizantino del siglo VI, que considera que Hipatia era en la época de su muerte una mujer mayor, una palará, lo que situaría su nacimiento hacia el 350 o 355. Un argumento a favor de esa fecha es que su discípulo Sinesio, que recibió lecciones hacia el 393 con unos veinte años, escribió cartas mostrando gran admiración hacia su maestra, difícil de imaginar si hubieran tenido una edad parecida. Por otro lado, Waithe recoge de Hoche, autor del siglo XIX, como fecha probable el año 375 (o 370) pues en la época de su muerte se habla de ella como de una mujer bella, y considera que ese calificativo no tendría lugar si hubiera tenido más de 40 años. Considera que Hipatia fue directora de la Escuela Neoplatónica con 25 o 30 años, y que Sinesio tendría sólo cinco años menos que ella. Kingsley considera la fecha del 390 pues estima que murió joven.

Teón supervisó la **educación** de su hija y, con un espíritu especialmente abierto para su época, permitió que desarrollara sus dotes excepcionales y se convirtiera en una astrónoma, filósofa y matemática. Quiso que fuese un ser humano perfecto por lo que vigiló la educación de su mente y de su cuerpo. Este entrenamiento consiguió su objetivo ya que la belleza de Hipatia y su talento fueron legendarios. Se dice que fue superior a su padre, especialmente en la observación de los astros.

El historiador Damascio de Damasco, 100 años después de la muerte de Hipatia, considerado el último filósofo de la Escuela de Atenas, escribió:

> *"... de naturaleza más noble que su padre, no se conformó con el saber que viene de las matemáticas, en las que había sido instruida por él, sino que se dedicó a las otras ciencias filosóficas con mucha entrega" [16].*

[WAITHE, M. E. (1987): Hypatia of Alexandria. A History of Women Philosophers. 1/600 BC-500 AD. 169 - 195.]

La calificación de "*noble*" de Damascio se explica por el sentido que da Platón a la condición de nobleza, como propia de "*una persona de buena memoria, tenaz y amante de toda clase de trabajo*".

Dice también:

> *"... el resto de la ciudad la amaba y la obsequiaba grandemente y era normal que fueran a buscarla los jefes cada vez que se hacían cargo de las cuestiones públicas".*

Después de haber recibido enseñanza en filosofía y matemáticas de los profesores del Museo, Hipatia viajó por Italia y Atenas. Parece ser que en Atenas siguió los cursos de la Escuela Filosófica dirigida por Temistius, Plutarco el Joven y por su hija Asclepigenia. Se dedicó, al volver a Alejandría, a enseñar Matemáticas, Astronomía, Filosofía y Mecánica a personas de todas las religiones. Estaba bien considerada tanto en la comunidad cristiana como en la suya propia. Ocupó la cátedra de Filosofía de Plotino. Su casa se convirtió en un centro intelectual. Adquirió el sobrenombre de la Filósofa. Venían estudiantes de Europa, Asia y África a escuchar sus enseñanzas sobre la Aritmética de Diofanto. Era amiga y consejera de Orestes, el prefecto del Imperio Romano de Oriente.

Fue respetada como una eminente profesora, carismática incluso. Las enseñanzas de Hipatia corresponderían a explicar las doctrinas de Plotino y de Iamblichus, un platonismo con estrecha relación con el neopitagorismo. En esta tradición las matemáticas formaban parte de la formación filosófica.

Algunos autores relacionan esta conexión entre la Filosofía y la Matemática considerando que la naturaleza de la Matemática es abstracta, y de ella derivan las ideas de las cosas materiales. Así, la Geometría, que tiene su origen en la medida de la Tierra, transciende este inicio, y en *Los Elementos*, se entra de lleno en el mundo de las ideas.

Entonces la Matemática puede ser vista como el paradigma de la trascendencia de lo material de lo que trata el platonismo.

Muchas personas eminentes iban a sus clases y seguían sus doctrinas. Se conocen varios de sus discípulos, siendo el más importante Sinesio de Cirene, filósofo y cristiano, de familia ilustre, que llegó a ser nombrado Obispo de Temópolis. Algunos autores establecen un paralelismo entre la figura de Sócrates y su discípulo Platón, y de la de Hipatia y su discípulo Sinesio. Pero Sinesio murió dos años antes que ella, lo que impidió que pudiera, como homenaje póstumo, divulgar su obra y su pensamiento. Se conocen siete cartas de Sinesio dirigidas a Hipatia. También, en otras cartas, Sinesio la menciona y la evoca en estos términos:

> *"Hemos visto, hemos oído a aquella que preside los misterios sagrados de la filosofía. Es santa y querida por la divinidad",*
>
> *"... madre, hermana, maestra, benefactora mía en todo, y todo lo que para mí tienen valor en dichos y hechos". "He perdido ... lo que es lo más importante, tu alma divinísima, lo único que yo esperé que se mantuviera firme para superar los sinsabores de la fortuna y los embates del destino".*
>
> *"Saluda cariñosamente a la muy venerable filósofa, la predilecta de la divinidad, y a ese feliz grupo que disfruta de su divina voz y más que a nadie, al santísimo padre Teotecno, y a mi compañero...".*

[KINGSLEY, CH. (1857): Hypatia or new foes with an old face. Leipzip.]

Otros discípulos fueron: Herculino, Olimpo, Teotecno, Gayo...

En Historia Eclesiástica, 7.13, de Sócrates Escolástico, escrita 120 años después de la muerte de Hipatia, puede leerse:

> *"Había una mujer en Alejandría llamada Hipatia, hija del filósofo Teón que tuvo tales logros en literatura y en ciencia como para sobrepasar a todos los filósofos de su tiempo. Siguiendo la escuela de Platón y de Plotino, explicaba los principios de la filosofía a sus oyentes, algunos de los cuales venían de muy lejos para oír sus lecciones. Debido a su autocontrol y distinción que había adquirido en el cultivo de su mente, ella aparecía en público en presencia de magistrados"*.

[TEE, G. J. (1983): The Pioneering Women Mathematicians. The Mathematical Intelligencer. 5, nº 4. 27-36.]

Entre Hipatia y los iniciados habría una relación de afecto, familiaridad y compromiso que no existiría con los otros alumnos. El miedo de sus discípulos debido a los acontecimientos violentos de la época no ayudó a que éstos rescataran su figura y su obra después de su muerte.

El dato mejor conocido en la vida de Hipatia es su muerte. Según la polémica planteada sobre la fecha de su nacimiento podría tener, entonces, 25, 45 o 60 años.

Pagana, científica y personaje político influyente, su situación fue cada vez más peligrosa en Alejandría. En el 412 el patriarca Cirilo, cristiano fanático, persiguió a los judíos.

En esta época el cristianismo se instituyó como la religión oficial del Imperio Romano. Recordemos que en el 380 Teodosio abrazó la fe cristiana y redactó el edicto de Tesalónica en el que instaba a todo el pueblo a hacer lo mismo. En el año 390, Teófilo, obispo de Alejandría, hizo destruir o convertir los templos helénicos paganos. En el 395 se separó el Imperio de Occidente, con capital en Roma, del de Oriente, con capital en Constantinopla. El emperador Justiniano, el 529, cerró la Escuela Neoplatónica.

El gobierno de Alejandría era disputado entre el Prefecto de Roma, Orestes, y el Patriarca de Alejandría, Cirilo. Dos campos se oponían violentamente con distintos intereses: el orden antiguo, simbolizado por el gobernador Orestes, defensor del imperio greco-romano y de la emergente comunidad judía; y el poder cristiano en expansión conducido por Cirilo, que se apoyaba en el nacionalismo egipcio, en el malestar social y en las masas oprimidas de esclavos y de no ciudadanos. Todos ellos se dejaban convertir a la nueva religión. Hipatia no quiso convertirse al cristianismo. En la cuaresma, en marzo del 415, acusada de ejercer sobre Orestes una influencia contraria a Cirilo, fue asesinada. Un grupo de cristianos, exaltados, la encontraron en el centro de Alejandría y:

> *"la arrancaron de su carruaje; la dejaron totalmente desnuda; le tasajearon la piel y las carnes, hasta que el aliento dejó su cuerpo; descuartizaron su cuerpo ..." [1].*

[ALIC, M. (1991): El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX. Siglo veintiuno editores. Madrid. pp. 58 - 63.]

Para algunos autores fue víctima del conflicto entre el poder civil de Orestes y el eclesiástico de Cirilo, más que una confrontación entre paganismo y cristianismo, idea que surgió posteriormente entre los pensadores ilustrados, como Voltaire y Toland.

Los asesinos de Hipatia no fueron castigados. Orestes, prefecto romano de Egipto, antiguo alumno y viejo amigo de Hipatia, informó a Roma para que se iniciara una investigación, que fue pospuesta repetidas veces. Con Hipatia desapareció el pensamiento matemático griego que emergerá de nuevo un milenio más tarde durante el Renacimiento.

4.2.3. Su obra

Según el Suda, Hipatia es autora de tres trabajos: un comentario a la Aritmética de Diofanto de Alejandría, el Canón Astronómico y un comentario a las Secciones Cónicas de Apolonio de Perga.

“Comentario” viene a significar una edición, una copia de la obra, en ocasiones comentada y corregida, más extensa que el original. Recordemos que la famosa anotación de Fermat, que da lugar a la Conjetura de Fermat, fue hecha en el margen de la Aritmética de Diofanto. En muchas ocasiones sólo han llegado a nosotros traducciones y copias de traducciones de estos comentarios, que permitieron la transmisión de obras y de autores que de no haber sido así hoy estarían completamente desaparecidos.

En el ***Comentario sobre la Aritmética*** **de Diofanto** mostraba que la aritmética es más que cálculo, lo que según Sócrates Escolástico, contribuyó a que tal trabajo fuera conservado. La Aritmética de Diofanto constaba de 13 libros en el original, de los que sobreviven sólo 6, y algunas partes de los otros, y trata de ecuaciones con múltiples soluciones enteras (ecuaciones diofánticas).

Los comentarios de Hipatia incluían, según Alic, nuevos problemas y distintas soluciones que fueron incorporadas a los manuscritos diofánticos. Otra aportación fue demostrar la generalidad e indeterminación del problema por sustitución de valores numéricos desconocidos que no están relacionados y que no son múltiplos, potencias, raíces cuadradas o fracciones de los originales. El historiador P. Tannery sugiere que todos los manuscritos existentes conocidos derivan de una fuente común, y que esa fuente es el Comentario de Hipatia. Considera que el comentario y la copia de Hipatia es la más antigua de las conservadas de la Aritmética de Diofanto, (este comentario se refiere a los seis primeros libros). Supone que sobrevivió un ejemplar, al que denomina α, copiado por Miguel Psellus, filósofo bizantino del siglo XI, copia que se pierde después de la caída de Constantinopla. Supone que una segunda copia fue hecha entre los siglos VIII y IX, que también se pierde, pero antes fue copiada en el siglo XIII, y que a través de sus sucesivas copias, ha llegado a nosotros una del siglo XVI que se conserva en el Parisinus 2379.

Escribió un tratado ***Sobre la geometría de las Cónicas*** de **Apolonio**. Apolonio (260 - 200 a. C.) fue un geómetra alejandrino del siglo III a. C. a quien se deben los epiciclos y deferentes que explican las irregularidades en las órbitas de los planetas. El texto de Hipatia es una vulgarización del texto de Apolonio sobre las secciones cónicas. Con su muerte las secciones cónicas cayeron en el olvido hasta el siglo XVII.

Su padre, Teón, fue un prolífico escritor de “Comentarios”. Han sobrevivido varios de sus trabajos matemáticos, como la revisión de los ***Elementos*** de **Euclides**, y la revisión de El Data y La Óptica también de Euclides. Esta edición de los Elementos es la base de casi todas las siguientes ediciones de ese libro, es la versión de referencia hasta finales del siglo XIX. Es probable que Hipatia colaborara con él en dicha mejora y revisión, pues Hipatia es mencionada por su padre como su discípula y asociada, y juntos escribieron un tratado sobre la obra matemática de Euclides.

Otras de las obras de Teón son los trece libros de comentarios del ***Almagesto*** de **Tolomeo**, y dos al Manual de Tablas de Talauma: El Gran Comentario y El pequeño comentario. Tolomeo (90-168) sistematizó los conocimientos matemáticos y astronómicos en el Tratado matemático, que los árabes llamaron "Almagesto" (Gran libro).

El comentario de Teón del *Almagesto* ha sido impreso en varias ediciones. Teón se refiere a Hipatia en el libro tercero del *Almagesto* de Tolomeo como que ella hizo una edición revisada: *paravagoostheísees*. Dice así:

> *“Comentario de Teón de Alejandría al tercer libro del Sistema Matemático de Tolomeo. Edición controlada por la filósofa Hipatia, mi hija”.*

[TEE, G. J. (1983): The Pioneering Women Mathematicians. The Mathematical Intelligencer. 5, nº 4. 27-36.]

Las palabras de Teón admiten diferentes interpretaciones, desde que sólo revisó el comentario a este libro III, a que, mientras el padre elaboró el comentario, ella realizó la edición corregida del libro. Se han buscado diferencias lingüísticas entre ese libro III y el resto de los libros, lo que lleva a concluir que Hipatia hizo, con toda probabilidad, nuevas aportaciones tales como el pasaje de la división por sexagesimales al final de dicho libro III. Otros autores sugieren que al no poder distinguir entre el trabajo de Teón y el de Hipatia, quizás, revisaron conjuntamente todo, o que Hipatia completó el de Teón una vez finalizado, incluso cuando éste ya había muerto. No se descarta que el trabajo de Hipatia no se reduzca a ese libro III sino que fuese una colaboración continuada.

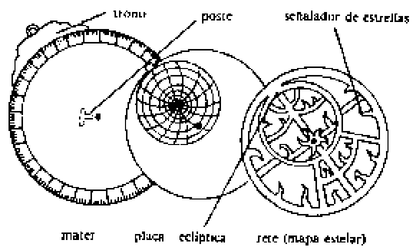
Es posible que Hipatia mantuviera la tesis del heliocentrismo contra el geocentrismo. Los comentarios al libro III del Almagesto se consideran de gran importancia pues es posible que Copérnico tuviera conocimiento de ellos y este conocimiento pudiera haber influido en la "Revolución Copernicana", pues el único ejemplar del libro III se conservaba en Florencia en la biblioteca Laurenziana[1] de los Médicis, en el Medici 28.18, y Copérnico estuvo en Italia estudiando textos astronómicos griegos, y especialmente la obra de Tolomeo.

La importancia de estos comentarios radica en que, cuando Teón comentó el Almagesto, Hipatia observó que la obra de Tolomeo daba lugar a numerosas conclusiones matemáticas, de las que su padre no se había dado cuenta. Hipatia calculó los valores matemáticos de los acontecimientos celestes descritos por Tolomeo. Las Tablas o Canón Astronómico serían el resultado de ello. El ***Canon Astronómico***, tablas que elaboró Hipatia para el estudio de los movimientos de los astros, puede

[1] La Biblioteca Laurenziana no fue abierta al público hasta 1571, Copérnico falleció en 1543, pero es posible que en Italia se conociera dicha versión del Almagesto,

que formase parte de esa obra, pero también puede haber constituido una obra original independiente.

Gracias a su correspondencia con Sinesio de Cirene tenemos noticias de otras de sus contribuciones científicas, por ejemplo la invención de un buen número de aparatos. En la Carta 160 dirigida por Sinesio a Peonio, un militar que gustaba de la ciencia, dice que le envía como regalo un **astrolabio** de plata. Dice:



Los componentes de un astrolabio plano.

> *"Procede para estas demostraciones de un modo seguro, porque usa como auxiliares a la geometría y a la aritmética a las que no sería impropio considerar como un modelo fijo de verdad. Te daré un regalo que es más agradable para mi dártelo que para ti recibirlo. Es un trabajo concebido por mi mismo, añadiendo todo lo que ella, mi más reverenciada maestra colaboró conmigo, y fue ejecutado por las manos más habilidosas que hay en nuestro país en la artesanía de la plata".*

[KINGSLEY, CH. (1857): Hypatia or new foes with an old face. Leipzip.]

Se puede inferir que la teoría del astrolabio y los detalles de su construcción pasaran de Tolomeo, vía Teón a Hipatia, y de ésta a su discípulo Sinesio.

En la Carta 15, Sinesio le pide a Hipatia un **hidroscopio**. La verdadera naturaleza de ese hidroscopio nos es desconocida, pero en dicha carta Sinesio lo describe con todo detalle, y justifica su petición por su mala salud, luego pretendía utilizarlo para pesar o medir la fluidez de los líquidos, lo que tendría aplicaciones médicas.

> *"Me encuentro tan sumamente mal de salud que necesito un hidroscopio. ... será posible contar las incisiones que son las que dan a conocer el peso" [8].*

[KINGSLEY, CH. (1857): Hypatia or new foes with an old face. Leipzip.]

Hay autores que suponen que es una clepsidra o reloj de agua, otros como Fermat que es un hidrómetro o un densímetro, según se piense que medía volúmenes o pesos del agua. Otros instrumentos atribuidos por algunos autores a Hipatia son un **planisferio** [Tee] y un **aparato para destilar agua** [Eychenne].

4.3. Émilie de Breteuil, Marquesa de Châtelet

(1706-1749)

¿Podéis imaginar una marquesa estudiando matemáticas? ¿Podéis imaginar unos salones dorados y cubiertos de tapices en cuyas tertulias, en lugar de hablar de cotilleos y frivolidades, se discutiera con ardor sobre ciencia? ¿Se deliberara acaloradamente sobre el concepto de fuerza, de masa, de derivada o de función? Madame de Châtelet era marquesa y se dedicaba con pasión al estudio y en sus salones se discutía sobre problemas científicos.

Un cráter del planeta Venus lleva el nombre de Châtelet en su honor. Fue una extraordinaria mujer francesa que vivió durante el siglo de las luces, y que en sus salones, además de discutir de literatura, música, filosofía... Tradujo los Principia de Newton del latín al francés, y divulgó la obra de Leibniz, Descartes y de Newton.

4.3.1. Introducción

Rasgos biográficos sobre la vida de esta mujer se encuentran en muchos libros que tratan sobre historia de mujeres científicas y sobre historia de mujeres en general. En todos ellos se coincide en señalarla como amante de Voltaire, y traductora de los *Principia* de Newton y autora de *Las instituciones de la física*. Desgraciadamente, en muchos otros textos se la menciona como dama de la época, amante de Voltaire, sin hacer ninguna mención sobre su calidad como mujer y como científica. Aún hoy quedan secuelas de estas tradiciones culturales a las que se tienen que enfrentar muchas mujeres. A Émilie se la ha tratado en ocasiones de mujer frívola y de vida "ligera" haciendo mención a sus relaciones personales que tienen la fuerza de empañar toda su obra, manteniendo aún determinados discursos morales de aquella época.

En el siglo XVII Isaac Newton (1643-1727), en Gran Bretaña, sintetizó las ideas de Galileo y Kepler en los *Principia* y llegó a la conclusión de que la fuerza medida por Galileo que hace caer los cuerpos es la misma fuerza que la estudiada por Kepler que hace que los planetas se muevan en su órbita. Esta conclusión revolucionó el estudio de la física del momento y durante muchos años constituyó el modelo de la teoría de la gravitación universal de Newton.

El método científico de Newton ha fascinado a los intelectuales desde su tiempo hasta nuestros días. En su época se pensó, incluso, que quizás aplicando este nuevo método científico se podían descubrir unas leyes generales que ayudaran a entender las fuerzas sociales de la misma forma que se podía predecir la órbita de un planeta. La humanidad sería capaz de conocerlo todo y tendría el control de su futuro. Por esto, el método utilizado por Newton recibió el nombre de *determinismo científico*. Los científicos creían que si eran capaces de describir completamente, con alguna fórmula, un acontecimiento, entonces al conocer un estado del sistema en un instante dado, se podría reconocer en cualquier otro instante, incluso del futuro.

> *La noble dama de la corte francesa Madame de Châtelet logró ser admitida en los debates científicos más importantes de París, consiguió renombre como física y como intérprete de las teorías de Leibniz y Newton. Perteneció a la alta aristocracia y fácilmente podía haber vivido una vida inmersa en los placeres superficiales de los salones franceses, pero sin embargo fue una activa participante en los acontecimientos científicos que hicieron de su época uno de los periodos más excitantes de la historia.*

Madame de Châtelet tradujo del latín al francés los *Principia* de Newton con lo que permitió que fueran estudiados y comprendidos por sus contemporáneos y propagó de este modo las ideas del determinismo científico desde Inglaterra a la Europa continental, permaneciendo como ideas filosóficas hasta mediados del siglo XIX, y como parte fundamental de la Ciencia incluso en nuestros días. Esto nos permite pensar que le debemos el conocimiento que tenemos actualmente, pues si ella, con su carácter apasionado, no lo hubiera discutido, puede que unos conceptos tan nuevos y tan difíciles de comprender en su época hubieran quedado olvidados. No pensamos que sea muy aventurado suponer que sin personas como Mme. de Châtelet que estudiaron con ahínco a los dos grandes matemáticos de su época, Descartes, Newton y Leibniz, (descubridores estos últimos del cálculo infinitesimal, Newton en Gran Bretaña y Leibniz en Alemania), que discutieron sus teorías y polemizaron sobre ellas, siendo la primera en comprender que no eran totalmente incompatibles, quizás, como con tantas obras, éstas podrían haber quedado en el olvido sin ser comprendidas. Eran obras difíciles. Aún no se tenían claros los conceptos de límite, función, continuidad... que se fueron definiendo más tarde. Sólo tras largas discusiones algunos de esos difíciles conceptos comenzaron a aclararse.

4.3.2. Los primeros años de Mme. de Châtelet

El 17 de diciembre de 1706 nació Madame de Châtelet, en Saint-Jean-en-Greve, en Francia, durante el reinado de Luis XIV, y le pusieron el nombre de Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil.

Los Breteuil ya eran importantes en el siglo XV e hicieron fortuna en la magistratura y las finanzas. Su abuelo paterno, Louis de Breteuil, ocupó el cargo de Consejero del Estado llegando a controlar las finanzas del reino.

Su padre, Louis-Nicolas Le Tonnelier de Breteuil, barón de Preuilly a los cuarenta y nueve años, en 1697, se casó con Gabrielle Anne de Froulay. El rey le otorgó entonces el cargo de introductor de embajadores en el que brilló por su perspicacia y su sentido de la diplomacia.

Émilie heredó de su padre el ser apasionada, capaz de cometer las peores locuras, seductora e imaginativa, y de su madre la sensatez, la tenacidad, el gusto por el esfuerzo, el rigor, la disciplina y el buen uso de la razón. Émilie amó durante toda la vida la libertad y el inconformismo, pero, al igual que su padre era sensible al que dirán.

Sus padres tuvieron seis hijos, de los que sobrevivieron tres. Émilie fue la quinta, y la única hija. Y para su única hija van a ser todos los mimos y cariños de padre pues la quería con pasión y le impresionaba por su inteligencia. Era casi un abuelo para ella.

La familia vivió en una casa familiar en Saint-Roch, barrio elegante de París. En el cuarto piso vivían los niños. Y allí subía el padre para ver a sus hijos. Contrariamente a las costumbres de la época, Émilie pasó su juventud bajo el techo paterno, sin apenas estar internada en un convento (sólo algunos meses en Lorrena), teniendo el inmenso privilegio de ser educada por los suyos, y además de una forma notable, digna de una princesa. Podemos pensar que esa educación y ese cariño paterno hicieron que ella tuviera una imagen magnífica de sí misma, lo que le dio esa seguridad y potencia de las que gozó toda la vida. A sus ojos nada era nunca imposible. Fue una mujer que nunca sintió los límites que la época imponía a su sexo.

Émilie desde su más tierna infancia tuvo el deseo de saber e hizo todos los esfuerzos para conseguirlo. Sentía curiosidad por todo y todo lo quería comprender. Estuvo rodeada de un entorno excepcional y recibió una educación atípica para su época. Sus padres tenían un gran respeto por el conocimiento y rodearon a sus hijos de una atmósfera que hoy llamaríamos intelectual. Una muestra son las tres habitaciones dedicadas en el piso de los padres a la biblioteca, a la que los hijos podían acceder sin ninguna restricción.

¿Cómo era físicamente Émilie? Probablemente no fue ni una belleza ni fea. Según que fuese amada o detestada se la retrataba de una forma o de otra. Podemos observar que fue una mujer aborrecida, vituperada y calumniada, sobre todo por algunas mujeres:

> *Era un coloso en todas proporciones. [...] Tenía los pies terribles y las manos formidables; tenía la piel como una nuez moscada...*

[Descripción poco amable de su prima, Mme. de Créqui, en *Souvenirs de la marquise de Créqui*]

Madame Du Deffand la describía como "fea, soberbia y lasciva". Esta descripción, y otras semejantes, no eran en absoluto veraces:

> *Imaginad una mujer grande y seca, sin culo, sin caderas, estrecha de pecho, dos pequeñas tetas, de brazos gruesos, piernas gruesas, pies enormes, una cabeza muy pequeña, cara afilada, nariz puntiaguda, dos pequeños ojos verde mar, tez negra, roja, acalorada, boca aplastada, dientes ralos y extremadamente echados a perder. He aquí la imagen de la bella Émilie, figura de la que ella está tan contenta que no escatima nada por hacerla valer: rizos, adornos, pedrerías todo en gran profusión.*

[Descripción grosera de su prima, Mme. du Deffand, en Correspondence littéraire, tomo 2, pp. 436. Es tan mal intencionada que no merece crédito]

Era sumamente atractiva, y en sus cartas se nos muestra como cálida y cariñosa con sus amistades.

> *Mme de Châtelet es gruesa, de figura amable [...]. Es una mujer de gran carácter y gran alegría que emplea todo el arte imaginable para seducirle (a Voltaire)*

[Descripción de Mme. Denis, sobrina de Voltaire, en Cirey, en mayo de 1738, en *Correspondence littéraire*, carta 1498]

Aunque tuvo varios amantes, su comportamiento responde a las costumbres de una época, y mantuvo siempre el decoro que imponía la sociedad. Tenía un buen carácter, ardiente y temperamental, tierno y sensible, aunque, como es natural, reaccionaba bruscamente si se la hería en su amor propio. Demostró ser una excelente y leal amiga para sus amigos, que podían confiar plenamente en ella.

Muchos filósofos y personas ilustres la han descrito como elegante, hermosa y seductora. Voltaire, locamente enamorado, la llamaba la "*Divina*" Émilie, o su bella filósofa. Se conserva el retrato al óleo de Madame de Châtelet pintado por Maurice Quentin la Tour, y comentado por un viajero con estas palabras "*adornada, cargada de diamantes que parecía una Venus de la Ópera..., a diferencia de aquella, ésta estaba en la mesa de trabajo, con sus instrumento y sus libros de matemáticas...*". En ese retrato podemos verla vestida con su traje de época, pues disfrutaba maquillándose y vistiéndose para la corte, pero con un libro delante, estudiando, y con un compás en la mano.

Debemos reconocer que Émilie no respondía al prototipo de belleza de su época. Ya de niña era muy alta, con las manos y los pies grandes. Observamos como en muchas de las descripciones se trata sobre el hecho de que fuese grande y con pies grandes. Quizás por esto, su padre, pensando que no iba a casarse, se preocupó de que recibiese una excelente educación, exactamente igual a la de sus hermanos varones, sin diferencias por razón de género. Por la formación recibida consideramos que fue una mujer privilegiada.

Sus padres tenían un “salón” donde recibían a una veintena de personas de las más ilustres de la época: escritores como Fontenelle, jóvenes poetas y futuros genios. A Jean Baptiste Rousseau le asignó el padre de Émilie una pensión de seiscientas libras. El barón de Breteuil conoció al joven Voltaire en 1714 en el castillo de Saint-Ange y le invitó a su casa. En esa época Émilie tenía unos ocho años, y su padre le permitía estar en el salón cuando se recibía, e incluso a intervenir en la conversación. Voltaire recordaba a esa niña estudiosa y a su cariñoso padre. Por las confidencias del barón a Voltaire es por lo que conocemos detalles sobre la educación de Émilie.

Demostró poseer una capacidad intelectual inusual, una inteligencia privilegiada incluso siendo niña. A los diez años ya había leído a Cicerón y estudiado matemáticas y metafísica; a los doce hablaba inglés, italiano, español y alemán y traducía textos en latín y griego como los de Aristóteles y Virgilio.

Impresionados sus padres por el amor al estudio de su hija, su austeridad y su precocidad, la animaron a desarrollar su inteligencia. Ningún conocimiento le fue vedado. En aquella época la educación de las hijas, internas en un convento, era descuidada pues consistía en algo de escritura y lectura, con algo de historia y arte. Sin embargo Émilie pudo profundizar en estudios que no estuvieron al alcance de muchos hombres, y fue educada en su casa bajo la vigilancia de sus padres. Su padre quiso que tuviera una cultura y un conocimiento lo más diversificado posible y se ocupó personalmente de enseñarle matemáticas y metafísica, hecho muy raro en la educación de las niñas.

A los diecisiete años Émilie conocía bastante bien el inglés como para leer las obras originales de Locke, y apasionarse por la filosofía inglesa. Estudió las teorías cartesianas que entonces dominaban el pensamiento. Gracias a Descartes comprendió las relaciones entre metafísica y ciencia y mantuvo durante toda su vida la exigencia de un pensamiento claro y metódico, dominado por la razón. Esto, probablemente, le llevó a adoptar posturas más avanzadas que las de sus amigos newtonianos.

> *Émilie fue una pura intelectual cartesiana. Como forma de pensamiento sólo conocía la deducción. La inducción no le satisfacía. Las analogías no le seducían. Fue rigor y método. Con un estilo analítico desprovisto de florituras mostraba una atracción casi exclusiva por las cosas de la razón. Fue pues una filósofa en el sentido tradicional del término, esencialmente especulativa y metafísica.*

Émilie tenía un temperamento de fuego, y estaba dotada de una energía poco usual y de una tremenda voluntad. No dudaba en disfrutar de todos los placeres. Todo lo hacía con exceso.

Se convirtió en una mujer fascinante. Fue presentada en la corte del rey Luis XV con dieciséis años donde sacó provecho de sus muchos atributos y talentos para triunfar siendo ingeniosa y atractiva.

Su presentación en la corte y su vida como dama de la misma no cambió ninguno de sus intereses científicos y apenas modificó sus hábitos de estudio. Parecía no tener necesidad de sueño, leía con increíble rapidez y se decía que aparecía en público con manchas de tinta en los dedos como consecuencia de sus apuntes y escritura. Cuando comenzó a estudiar a Descartes, su padre se quejaba a su tío: "*Discutí con ella en vano; no quería comprender que ningún gran señor se casaría con una mujer a la que se ve leyendo todo el día*". Su madre perdió la esperanza en un futuro adecuado para semejante hija, que "*alardeaba de sus conocimientos y ahuyentaba a los pretendientes a los que todavía no han ahuyentado sus otros excesos*". Sus padres estaban preocupados pues, después de la muerte de Luis XIV, su fortuna comenzó a disminuir, y con ella las posibilidades de una existencia desahogada.

Sin embargo, Émilie devolvió a su familia la posición perdida tras la muerte de Luis XIV a través de su propio matrimonio. A los diecinueve años, el 20 de junio de 1725, unos meses antes de la boda de Luis XV con María Leszczinska, se casó con Florent Claude, el marqués de Châtelet-Lamon, miembro de una muy antigua familia de Lorena, que tenía entonces treinta años. Al casarse con él la familia de nuevo consiguió acceso a la corte. La familia del marido era una familia de la gran nobleza, aunque con poca fortuna. Émilie hizo un matrimonio de conveniencia conforme a las reglas en uso. Y su marido fue gentil, discreto, cortes y amigable. Ajeno a cualquier placer intelectual, con una cultura sumaria, lo que más le gustaba era el ejército y dedicaba la mayor parte del tiempo a la caza.

Émilie tenía diecinueve años cuando se casó, había estado estudiando y apenas conocía la vida. El marqués descubrió pronto que se había casado con una mujer muy superior desde el punto de vista intelectual, y lejos de sentirse celoso sintió orgullo del lustre que esta mujer pudiera dar a su nombre. Él siempre estuvo a favor de ella, mostrándole su confianza, y siempre la apoyó. Siempre fue su amigo más fiel. En los primeros meses de matrimonio comprendió que ella necesitaba libertad. En otoño de 1725 Mme. de Châtelet encontró a M. de Mézières, un vecino que aceptó a prestarle libros de geometría y a darle lecciones de matemáticas. Quedó embarazada hacia noviembre.

Tuvo tres hijos de los que vivieron dos, una hija, Françoise Gabrielle Pauline, y un hijo, Florent Louis Marie, que nació un año después.

> *Mi hijo ha muerto esta noche, señor, y debo confesar que estoy muy afligida. Si queréis venir a consolarme, me encontrareis sola.*

[Carta de agosto de 1734 a Maupertuis en la que Mme. de Châtelet le cuenta la muerte de su tercer hijo]

> *He probado un infortunio relacionado con el estado de madre; he perdido al menor de mis hijos. He padecido más malestar del que nunca hubiera creído. He advertido que los sentimientos de la naturaleza existen en nosotros sin que lo sospechemos. Su enfermedad me ha tenido muy ocupada...*

[Carta a Aldonce Sade del 6 de septiembre de 1734]

Ya había cumplido con sus deberes de esposa. Su hijo y su hija se educaron internos en colegios de París y sólo pasaban algunas temporadas en la casa de sus padres.

Madame du Châtelet organizó el matrimonio de su hija, cuando ésta tenía dieciséis años, con el duque de Montenero Caraffa, que la llevó a vivir a Italia, de esta forma, elevó a su familia a un rango aún más prestigioso. Velar por su interés material y buscar para sus hijos los mejores lugares en la sociedad son los deberes maternales de los que se ocupó Émilie.

En enero de 1733 el marqués tomó las armas para participar en la guerra de Sucesión de Polonia. Se separaron sin drama. Fueron amigos siempre. Quedó Émilie en París, con veintiocho años, llena de ganas de divertirse. Durante dos años llevó una vida desordenada, pero abandonó esa vida tan agitada como estéril, para vivir en Cirey con Voltaire encontrando en el sosiego una felicidad enriquecedora.

4.3.3. Sus profesores: Maupertuis y Clairaut.

Después del nacimiento de su tercer hijo, cuando Émilie tenía 27 años, volvió a frecuentar la corte. A Émilie siempre le encantó la vida en la fastuosa corte de Versalles, gozando con las fiestas, la ópera, las representaciones teatrales y con las salas de juego que entonces abundaban.

No hubo baile al que no asistiera, ni estreno de ópera o de comedia en los que no estuviera. Se le atribuyeron amantes, reales e imaginarios, que empañaron su crédito y comprometieron su reputación, como, en 1728, el conde de Guébriant, elegante, con el don de la palabra, buen bailarín, que seducía a las mujeres haciéndolas reír. Ella creyó que era el gran amor de su vida, y sin experiencia con los hombres, ignorando las leyes de los libertinos parisinos, mentirosos y egoístas, se creyó sus palabras de amor. Como era tan apasionada, le llenaba de reproches si él no manifestaba la misma pasión que ella, con lo que él la abandonó, dejándola celosa, desesperada y sin ganas de vivir. Su padre acababa de morir, y ni su madre, ni su marido, ni sus hijos eran razones suficientes para vivir. Tuvo un intento frustrado de suicidio, lo que constituyó un motivo de escándalo. Esta anécdota permaneció en la memoria de sus contemporáneos, aunque aprendió la lección y pensó que una mujer de su calidad debía ser más exigente en la elección de sus amantes. Se encerró en su casa y reemprendió sus estudios.

Cuando el aislamiento le pesaba demasiado visitaba a Catherine de Richelieu. En ocasiones encontraba a su hermano, el duque de Richelieu, seductor, valiente, con treinta y cinco años en 1729, que ya había sido encerrado dos veces en la Bastilla por cortejar a una princesa de la casa real, pero sus pecados de juventud habían sido perdonados, y había sido admitido en la Academia Francesa y el Parlamento. El duque no fue insensible a los encantos de Mme. de Châtelet. Y ella se dio cuenta de que él era menos superficial de lo que parecía, y que tenía un corazón fiel a la amistad. Él siempre admiró a esta mujer que juzgaba excepcional, y mantuvieron la amistad, y una nutrida correspondencia durante toda su vida. Hay una interesante carta escrita por Émilie, en la que le hablaba de amistad y le decía que toda su vida estaba en Luneville, donde estaba Voltaire, y en Estrasburgo donde estaba él.

¿Quién hubiera creído que entre la señora de Richelieu, Voltaire y usted la amistad me hubiera podido traer pesares? Apenas si lo esperaba del amor. Sólo nos dan la felicidad estos dos sentimientos. Confieso que son la bendición de mi

vida y que sólo pediría a los dioses (si existen) pasar lo que me quede de ella en esta partida de cuatro en la que sería igualmente venturoso ser el tercero o el cuarto. ¡Pero qué hago hablando de felicidad! Toda mi vida está en Luneville y en Estrasburgo. Pierdo mi vida lejos de todo lo que amo en esta gran ciudad que, en veinticuatro horas, se ha convertido en un desierto... Para ser feliz en Cirey sólo me faltará verle a usted.

La amistad no es para mí un sentimiento insípido y tranquilo, y la felicidad infinita de pasar mi vida con alguien a quien adoro no me impedirá temblar por usted. Es un sentimiento que nunca le ocultaré, y que con seguridad comparte conmigo.

Estoy aquí desde hace ocho días, y me aburro considerablemente. Por suerte me marcho mañana, pero el aburrimiento sólo me dejará al llegar a Champaña

Cuando se ha probado la felicidad de vivir en el campo con su amante, la vida de la ciudad es insoportable, a menos de estar con la señora Richelieu y con usted. La vida de la ciudad es insoportable.

[Carta dirigida al duque de Richelieu el 21 mayo 1735. Ella está en Cirey. Voltaire en Luneville. Richelieu en Estrasburgo. Trata sobre amor, felicidad y amistad.]

Las damas de la aristocracia por aquella época escribían muchas cartas a familiares y amigos. Mme. de Châtelet escribía a algunos cartas cada semana de ¡veinte páginas! Los siguientes fragmentos nos indican claramente rasgos de su personalidad o aspectos de su biografía. Veamos algunas de estas otras cartas

> *A pesar de las princesas y los perifollos me ocupo seriamente de la fortuna de mis amigos... Me entrego a la sociedad sin que me agrade demasiado. Encadenamientos imperceptibles hacen que los días vayan pasando, y no nos demos cuenta que hemos vivido...*

[Mme. de Châtelet, Correspondencia, diciembre 1733]

> *...Voltaire ha llegado por fin, y me parece que lo suyo ha terminado. Aunque su salud no es buena, creo que el placer de ver de nuevo a sus amigos le hará mucho bien. Los dos le echamos de menos. Le tiene a usted en gran estima. Si supiera que le escribo, sumaría la expresión de su afecto a la reiteración de la tierna amistad que me une a usted para toda la vida.*

[Carta sobre Voltaire dirigida a Sade el 3 abril 1735]

> *Encuentro muchos atractivos en su ingenio, y en su compañía los encantos que todo el mundo sabe, pero estoy segura de que nadie conoce más que yo el precio de su amistad. Su corazón ha cautivado el mío. Creía que sólo yo conocía la amistad de una forma tan viva, y siempre me exasperaba no podérselo manifestar, unas veces por escrúpulo, otras por temor, siempre por desconfianza de mí*

misma. No podía creer que alguien tan encantador, tan solicitado, tan estimado, pudiera preocuparse por desentrañar los sentimientos de mi corazón con todos mis defectos. Creía haberle conocido demasiado tarde para obtener un lugar en su corazón. [...] Tratad de insinuarle (al Marques de Châtelet) que hace falta estar loco para estar celoso de una mujer de la que él está contento, que lo estima y que se comporta bien. [...] Sois la única persona del universo a quien oso decir tanto.

[Carta dirigida al duque de Richelieu el 22 mayo 1735. Es continuación de la anterior]

Cuanto más reflexiono sobre la situación de Voltaire y la mía, más considero que la partida es necesaria. En primer lugar yo creo que todas las gentes que se aman apasionadamente vivirían juntas en la campiña [...] y creo además, que sólo allí puedo tener sujeta su imaginación, en París lo perdería antes o después. [...] Le amo demasiado para sacrificar la dicha de vivir con él sin alarmas [...] y todo lo que podría encontrar de placentero y agradable en París. [...] La única cosa que me inquieta es la presencia de M. de Châtelet [...]. Pero el amor cambia todas las espinas en flores y hará de las montañas de Cirey el paraíso terrestre.

[Correspondencia, 30 de mayo de 1735]

Existe un heroísmo, y quizás una locura en mí, para encerrarme en Cirey.

Mi pensamiento está abrumado, pero mi corazón rebosa alegría. La esperanza de que esta decisión le persuadirá de que lo amo me oculta todas las otras ideas [...]. Os comunico que sus inquietudes y sus desconfianzas me afligen sensiblemente; conozco que eso constituye el tormento de su vida; eso envenena la mía; pero podemos ambos tener razón.

[Carta dirigida al duque de Richelieu, 15 junio 1735]

Vuestra ausencia me hace sentir que yo podría pedir todavía algo a Dios, y que para ser perfectamente dichosa, es preciso que yo viviese entre vos y mi amigo (Voltaire). Mi corazón osa desearlo, y no se reprocha un sentimiento como la tierna amistad que siento por vos y que conservaré toda la vida [...] Deseo abandonar el mundo, pero no quiero perder vuestra amistad.

[Carta al duque de Richelieu del 22 septiembre 1735]

La mayor venganza que podemos realizar a las gentes que nos odian, es ser dichosos

[Carta a Argental del 28 de diciembre de 1736]

Juzgadme por mis propios méritos, o por la falta de ellos, pero no me consideréis como un mero apéndice de este gran general o de aquel renombrado estudioso, de tal estrella que relumbra en la corte de Francia o de tal autor famoso. Soy yo misma una persona completa, responsable sólo ante mí por todo cuanto soy, todo cuanto digo, todo cuanto hago. Puede ser que haya metafísicos y filósofos cuyo saber sea *mayor que el mío, aunque no los he conocido. Sin embargo, ellos también no son más que débiles seres humanos, y tienen sus defectos; así que, cuando sumo el total de mis gracias, confieso que no soy inferior a nadie.*

[Carta a Federico II de Prusia, citada en: Alic, M. El legado de Hipatia, pp.170]

Tengo tan poca ambición, soy tan filósofa sobre todo lo que no toca directamente a mi corazón, que habría abandonado todo si el deseo de vivir con vos no me hubiera dado el ardor...

[Carta a Saint Lambert del 23 de mayo de 1748]

De aquella época se cuentan muchas anécdotas sobre Émilie. Fue en 1733 cuando protagonizó una de ellas, haciendo una entrada estrepitosa en el café Gradot de París, donde se reunían regularmente científicos, matemáticos y filósofos. Se le prohibió la entrada por ser mujer, y ella mandó que le confeccionaran unas ropas de hombre, y con sus piernas enfundadas en calzas y calzones volvió a aparecer, siendo vitoreada por sus colegas y admitida por los sorprendidos gerentes del café.

Se precisó gran cantidad de audacia para que Émilie se dedicara a la Ciencia. Gracias a su educación diferente pudo transgredir las costumbres y menospreciar los prejuicios sexistas. Aunque estaba dotada de prodigiosas capacidades intelectuales, tuvo las dificultades de los autodidactas. El trabajo solitario, las lecturas complicadas, las dificultades de comprensión... Quería abarcar todos los libros de álgebra y geometría, y no lograba progresar. Tenía necesidad de profesores.

Debido a su posición Émilie pudo obtener los servicios de algunos buenos matemáticos como profesores, como Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), que posteriormente alcanzó la fama por su expedición al Polo Norte para hacer mediciones de la Tierra y demostrar que se achataba por los polos, como Newton había supuesto, y no era alargada como defendían los seguidores de Descartes.

Maupertuis encabezó la expedición a Laponia, junto al golfo de Botnie (de abril de 1736 a agosto de 1737) junto con brillantes y jóvenes científicos como Clairaut, Lemonnier, Outhier y Camus. Ya había partido de España la expedición de La Condamine a Perú con Jorge Juan y Antonio Ulloa. El objeto de ambas expediciones era confirmar cual de las teorías tenía razón: la de Descartes y Cassini que afirmaba que la Tierra era alargada, o la de Newton y Huygens que demostraba que era achatada.

> *En fin, caballero, ya ha vuelto del otro mundo (porque no creo que Laponia forme parte de éste), me dijeron que había encontrado la tierra aplastada y no alargada.*

[Correspondencia de Mme. de Châtelet con Maupertuis]

La idea era medir un arco de meridiano junto al círculo polar y comparar su valor con el de un arco de meridiano medido junto al ecuador. Estas expediciones probaron de forma irrefutable la veracidad de la teoría de la gravitación universal de Newton. Mme. de Châtelet intervino en esa controversia. Fue la única mujer con conocimientos científicos y una excepción en su época.

Otro supuesto amante fue Maupertuis, genio precoz y buen matemático, adulado por mujeres intelectuales a las que él convertía al "*newtonianismo*", que aceptó dirigir sus estudios. Pero también era un seductor, y no le gustaba sentirse prisionero de una mujer. Podemos ver en las cartas escritas por Mme. de Châtelet como le dirige palabras tiernas, de admiración pero también con demandas no satisfechas, como se interesaba por sus estudios, y como mostraba esa humildad que siente el alumno y la alumna hacia el gran hombre:

> *He llevado este tiempo atrás una vida desordenada. Mi alma necesita veros tanto como necesita reposo mi corazón. [...] Pasé ayer toda la tarde aprovechando vuestras lecciones, quiero que me consideréis digna, temo perder la buena opinión que tenéis de mi. [...] Siento que no debo abusar de vuestra complacencia. He estudiado mucho y espero que estaréis un poco menos descontento de mí que la última vez. [...] No debéis desear estimular a vuestra alumna, porque ignoro todavía si habéis encontrado correcta mi lección. [...] Me quedo en casa. Mirad si podéis venir a elevar un número infinito a una potencia dada. [...] Hoy me he dedicado a los binomios y a los trinomios. No puedo seguir estudiando si no me dais tarea, y tengo enormes deseos de hacerlo.*

[Correspondencia a Maupertuis; enero de 1734].

> *Si quiero llegar a ser geómetra, no es tanto por mí como por ser digna de usted. Sé que teniéndole como maestro no es posible hacer progresos tan mediocres, y no puedo decirle hasta que punto me siento avergonzada. [...] Reconozco que siempre le deberé el privilegio de haber estudiado con el más amable y además el más profundo de los matemáticos del mundo pues me habéis dado un deseo*

enorme de dedicarme a la geometría y al cálculo, ya que amo el estudio con más furor que he amado el mundo, pero me he dado cuenta demasiado tarde. [...] Señor, me hacéis sentir las penas y las inquietudes de la ausencia, creo siempre ver a Mme. Lauraguais haceros mil coqueterías, y temo que no seáis tan filósofo como para resistirlo.

[Correspondencia a Maupertuis; 28 de abril de 1734]

Estos días me he vuelto a consagrar a la geometría. Me hallará precisamente como me dejó, sin haber olvidado ni aprendido nada, y con el mismo deseo de hacer progresos dignos de mi maestro. Le confieso que yo sola no entiendo nada del señor Guisnée y creo que sólo con usted puedo aprender con placer un a menos cuatro a. Siembra usted de flores un camino en el que otros sólo hallarían espinas, su imaginación sabe embellecer las materias más arduas sin quitarles su rigor y su precisión. Sé lo que perdería si no disfrutara de su bondad al rebajarse hasta mi debilidad y enseñarme verdades tan sublimes casi como un juego. Reconozco que siempre le deberé el privilegio de haber estudiado con el más amable y, además, el más profundo de los matemáticos del mundo.

[Correspondencia a Maupertuis; 7 de junio de 1734]

Émilie siempre estuvo deseando aprender. En 1734 fue regularmente a casa de él y hacía sus tareas. Cuando viajaba llevaba sus libros y sus deberes. Nunca era demasiado para su gusto. Por otro lado observamos como todo París murmuraba sobre ella:

> *En ausencia de M. de Voltaire ella se relaciona con un geómetra de la Academia. Hace unos días, este señor había hecho una partida con varios amigos para ir a una mansión que está ..., la curiosidad o los celos determinó a Mme. de Châtelet ir a sorprenderlo. Su carruaje y su séquito la condujeron hasta el paseo donde ella se vistió de hombre y montó a caballo. Llegó galopando hasta la mansión, siempre galopando, donde fue reconocida e invitada a compartir la diversión. Esto es lo que ella mejor podía hacer.*

[Carta del comisario Simon Henri Dubuisson a Joseph de Seitres, marqués de Caumont, del 25 de junio de 1735]

Al cabo de algunos meses Maupertuis abandonó a su alumna para ir junto a M. Bernoulli a Bâle. Durante los dos años siguientes aprovechó al máximo las lecciones, cada vez que él aceptó, volvió a encontrarlo, y continuó siempre manteniendo correspondencia con él. Cuando en 1 736 Maupertuis partió con la expedición Émilie le dice:

> *"No se contenta con abandonarme por el polo... así que ¡se va a congelar en aras de la gloria!"*

Ya había adquirido una buena base, era capaz de comprender las teorías de Newton y de aconsejar a Voltaire y a Algarotti sobre sus trabajos. En febrero de 1738 se interesó por las fuerzas vivas de Leibniz. El día 10 de dicho mes envió una importante carta a Maupertuis para conocer su opinión sobre esas teorías de Leibniz:

> *Siempre he pensado que la fuerza de un cuerpo debía estimarse por los obstáculos que la alteraban y no por el tiempo que empleaba, y esto por dos razones...*
>
> *Si se toman como fuerzas las fuerzas vivas, la misma cantidad se conservará siempre en el universo. Esto sería digno del geómetra eterno [...] pero contradice la libertad de las criaturas.*
>
> *El Dr. Clarke, del cual M. de Mairan ha mencionado todas las razones en su memoria, trata a M. Leibniz con bastante desprecio, sobre las fuerzas de un cuerpo y sobre el éter y las mónadas, pero existe un gran error desde mi punto de vista [...]. M. Leibniz no tiene razón más que sobre las fuerzas vivas, pero en fin, él las ha descubierto, y con ello ha adivinado uno de los secretos del creador.*

[Correspondencia con Maupertuis; 10 febrero 1738]

Esta carta nos revela su evolución intelectual. Ya no era una alumna en demanda de consejos sino una mujer matemática que quiere confrontar sus opiniones con las de un colega.

> *Me he aventurado a leer vuestra memoria (Memoria de la Academia de las Ciencias) de 1734 sobre las diferentes leyes de la atracción [...] pero no sé suficiente álgebra para poder entenderlo todo.*

> *Encuentro que está escrita en un francés bastante oscuro, porque en primer lugar no decís nada de por qué una atracción está en razón directa de la simple distancia, que teniendo tantas ventajas, no sigan la misma ley las partes que el todo; no decís nada de por qué de la razón inversa del cuadrado de las distancias tiene esta ventaja...*

[Carta a Maupertuis; 9 de mayo de 1738]

Muestra su conocimiento sobre todos los escritos científicos de entonces: Mairan, Louville, Fontenelle, Bernoulli... que habían tomado partido por las fuerzas vivas. Pero quiere salvaguardar la libertad humana dentro de ese sistema...

Mme. de Châtelet, aconsejada por Maupertuis, recibió clases de Clairaut, al que llamó "*su maestro en geometría y su iniciador en astronomía*", pues tuvo tanta influencia como Maupertuis en el pensamiento de Émilie, ya que Clairaut estaba dotado como profesor. Había recibido con dieciocho años la entrada en la Academia por su trabajo *Investigaciones sobre las curvas de doble curvatura*, entonces Maupertuis reconoció su genio y le invitó a trabajar con él.

> *Los Elementos de Álgebra de M. Clairaut van a aparecer. Son a mi gusto uno de los libros más útiles, donde se nota al genio superior en la materia. [...]*

[Carta del 12 de noviembre de 1745 a P. Jacquier en la que habla bien de Clairaut.]

Estuvo en Cirey aconsejándola sobre su comentario a Newton porque le reconocía una indiscutible competencia científica, e incluso en los últimos años de su vida trabajó con Clairaut. A los ojos de Clairaut, Émilie tenía una inteligencia excepcional: *Tenía dos alumnos de valor muy desigual, una muy notable, mientras que no pude hacer entender al otro (Voltaire) lo que son las matemáticas.*

Émilie tuvo otro profesor. En 1739 pidió a Koenig, alumno del leibniziano Wolff, que fuese a vivir a su casa para que le diera lecciones de geometría. Fue con ella a Bélgica para acompañarla durante un engorroso proceso. En sus primeras cartas se mostraba encantada con su nuevo profesor, aunque pronto descubrió que no tenía las buenas cualidades como profesor de Maupertuis y Clairaut, pues en lugar de ayudarla la descorazonaba ya que se saltaba etapas en la enseñanza, con lo que conseguía que ella no le comprendiera. Podemos ver como se quejaba a Maupertuis, y como estaba más preocupada por lo que desconocía que satisfecha con lo mucho que sabía:

> *Estoy trabajando mucho y no adelanto nada... me levanto todos los días a las 6, como muy tarde para estudiar, y, sin embargo, no he podido terminar todavía el Algoritmo (álgebra). La memoria me falta a cada instante, y tengo miedo de que sea muy tarde para mí, para aprender tantas cosas tan difíciles. Busco consuelo en sus consejos, porque le confieso que uno de los mayores pesares que he tenido en mi vida es la desesperación en la que estoy a punto de caer sobre mi capacidad para la matemática, ciencia que es la única que*

amo y que es la única ciencia, sin abusar de las palabras. [...] M. Koenig lleva un ritmo que apenas puedo seguir. [...] Estoy a veces dispuesta a abandonarlo todo [...] No sé si Koenig tiene deseos de conseguir algo de mí, pero creo que mi incapacidad le disgusta

[Correspondencia con Maupertuis; 20 de junio 1739]

La desavenencia entre ambos estaba próxima. Pidió al famoso matemático J. Bernoulli que aceptara remplazar a Koenig.

Mantuvo regularmente correspondencia con J. Bernoulli:

Mi ausencia de París ha sido el motivo de que mis órdenes hayan sido mal ejecutadas respecto a las Instituciones de Física. Usted era uno de los primeros a quienes las tenía destinadas, y resulta que se las acaban de enviar.

Espero que inspire el amor por las matemáticas y por el estudio a mi hijo.

[Correspondencia con Bernoulli, 28 abril 1739]

Sin duda es una gloria para mí combatir con el secretario de la Academia, pero sobre todo lo es defender una verdad que su señor padre parecía haber puesto a salvo de cualquier ataque. Su memoria es como un escudo impenetrable que hace que no tema embate alguno. Es la égida de Minerva

[Carta a Johann Bernoulli, del 28 de abril de 1741]

> *Tengo curiosidad por saber si le gustarán las Instituciones de Física. Sé que no aprecia el leibnizianismo, pero espero que en recompensa le agrade la forma moderada en que hablo de la atracción. Se prepara una nueva edición de esta obra en Holanda, y quisiera que me ayudase a hacerla menos mala con sus críticas.*

[Carta a Bernoulli, 21 de agosto de 1741]

Mientras Koenig le enseñaba la metafísica de Leibniz ella escribía en secreto su obra de las *Instituciones de la física*, obra de cuatrocientas cincuenta páginas en la que trató gran cantidad de materias. Koenig la abandonó en enero de 1740, el año de la publicación de este libro. Sólo comentar que es cierto que Koenig logró convencerla de los argumentos leibnizianos, y que proporcionó argumentos metafísicos para varios capítulos, pero la obra fue original de ella.

> *Estoy dichosa de que las indiscreciones de Koenig no me hayan privado del mérito de su confianza [...] Había compuesto en Cirey los Elementos de la física que destinaba a mi hijo y que una mujer de un amigo (Mme. de Champbonin) me persuadió de publicar, pretendiendo [...] que no había nada igual en francés, y que estaba asegurado el incógnito. [...] Hizo un viaje expreso a París para llevarlo y fue aprobado por M. Pitot en 1738, es decir [...] un año antes de que conociera a M. Koenig. Este libro se imprimió muy lentamente porque mi librero que no me conocía, me dejaba*

por todas las novelas. [...] Viviendo con Koenig [...] me habló de la metafísica de Leibniz. Yo había obtenido la de Wolff que había leído con atención, y encontrado muy bellas ideas, muy nuevas, y que no se conocían en absoluto en Francia.

Había comenzado mi obra con algunos capítulos de metafísica, y quise dar una idea de la de Leibniz, que os confieso, me gusta infinitamente. [...] Segura de la probidad de Koenig le confié mi secreto. [...]

Partimos para París. El libro estaba más de la mitad impreso. Comprometí al librero a recomenzar las hojas donde quería meter la nueva metafísica, y me puse a trabajar. Para hacerlo bien era preciso leer muchos capítulos de obras de Wolff [...] además de la metafísica que ya había leído. Koenig me hacía resúmenes de capítulos que me eran necesarios. [...] Velaba por el incógnito [...] pero Koenig se lo dijo a todo el mundo añadiendo que había hecho un libro que no valía nada, que él me había hecho otro y que yo no le había pagado suficiente. Imaginad el rumor, venía de todas partes, os confieso que fui otra. Consideré durante un tiempo si retiraba mi libro. En fin decidí dejarlo pues el rumor ya corría, había más inconvenientes en retirarlo, y era casi imposible, pues ya estaba casi terminado de imprimir.

[Carta a Bernoulli del 30 de junio de 1740]

Gracias a sus maestros Mme. de Châtelet ha pasado del nivel de alumna aventajada al de experta, tomando parte en los debates científicos de la época. Pero, ¿hubiera podido mostrar su inteligencia y su voluntad si no hubiese encontrado una relación afectiva que le ayudara a ello?

4.3.4. Los años de Cirey

Émilie conoció todas las etapas de la experiencia femenina del siglo XVIII. Participó en los grandes movimientos del pensamiento. Quiso ser la mujer más sabia de su tiempo, la única que había ido a Inglaterra a instruirse, la que mejor conocía a Newton. Distribuyó su vida entre el estudio y el amor. Era una epicúrea impenitente, pues, para ella, era importante la salud, la virtud, los gustos, las pasiones, las ilusiones y la ausencia de prejuicios.

Cuando en abril del año 1733 Émilie se reencontró con Voltaire, tenía veintiocho años, trece menos que Voltaire. Éste tenía entonces treinta y seis años y ya era rico y muy famoso. Ya no era la niña seria que él conoció en el salón de su padre. Iba acompañada de la duquesa de Saint-Pierre y del conde de Forcalquier con los que llevaba una alegre vida que duró hasta que decidió ir a vivir con Voltaire en 1735. Formó con él una pareja indisoluble, unida por sentimientos e intereses comunes, que le proporcionó estabilidad afectiva y el respeto de un hombre admirado. El amor fue fuente de emancipación y de autonomía. Entonces pudo ser ella misma. En él encontró al compañero de discusiones, al filósofo, al hombre de espíritu que ella necesitaba. Y ella fue la "*divina Emilia*" como él la llamó.

La relación entre ellos duró durante todo el resto de su vida, durante dieciséis años, en los que hubo pasión, riñas y paces, distanciamientos, infidelidades por parte de ambos, aunque siempre subsistió una sincera amistad y un profundo afecto, aún cuando declinó el entusiasmo amoroso. Fue él, el hombre de su vida. Y para Voltaire fue ella la mujer a la que verdaderamente amó, la que se adueñó de su corazón, la que después de muerta siempre recordó.

Probablemente se encontraron en el palco de la duquesa en la ópera de Moncrif a la que él había prometido asistir. Quedó seducido por su inteligencia y su temperamento:

> *La adoro como los Dioses... Es bella y sabe ser amiga, tiene imaginación siempre justa y siempre florida, su viva y sublime razón a veces demasiado ocurrente... Ella tiene, lo juro, un genio digno de Horacio y de Newton...*

[Carta de Voltaire a Cideville, 14 de agosto de 1733]

> *Esta bella alma es un tapiz que ella borda de mil maneras. Su intelecto es muy filósofo, y su corazón ama los adornos, pero los adornos y el mundo son propios de su edad, y su mérito está por encima de su edad, de su sexo y del nuestro. Confesaré que es tiránica. Para hacerle la corte es necesario hablarle de Metafísica, cuando uno querría hablar de amor.*

[Carta de Voltaire a Sade del 29 de agosto de 1733]

Se hicieron reír mutuamente y no se aburrieron jamás. Aunque durante los primeros años de esta relación ella no lo consideraba el elegido de su corazón. Durante dos años podemos comprobar que ella lo amó con ternura y amistad, pero sin pasión. Voltaire si tuvo un flechazo. Dos meses después del encuentro en la ópera no ocultaba que él era dichoso. A pesar de que en este tiempo fueron muy discretos, Voltaire mencionaba a Émilie en las cartas a los amigos:

En verdad Mme. de Châtelet es un prodigio.

[Carta de Voltaire a Sade, 3 de noviembre de 1733]

Podemos observar que la amaba con locura, la defendía contra las calumnias y estaba entusiasmado:

> *Ayer, en la campiña, no teniendo ni una tragedia ni una ópera en la cabeza, mientras que la buena compañía jugaba a las cartas, comencé una epístola en verso sobre la calumnia dedicado a una mujer muy amable y muy calumniada*

[Carta de Voltaire a Cideville del 3 de julio de 1733]

> *Escuchadme, respetable Émilie: sois bella, así que la mitad del género humano será vuestro enemigo. Poseéis un genio sublime; os temerán. Vuestra tierna amistad es confiada, y seréis traicionada. Vuestra virtud, en su andadura llana, sencilla y sin lastres, no ha sido sacrificada por nuestros devotos; debéis temer la calumnia...*

[Epístola de Voltaire a *la Calumnia* de 1733]

Por primera vez estaba tan enamorado. Mientras ella, en este tiempo, no era capaz todavía de abandonar las diversiones y le asustaba la pasión total que él sentía. Se visitaban y hablaban en inglés delante de los criados por temor a que una indiscreción hiciera enfadar al marqués de Châtelet. Fue una tarde de septiembre de 1733 cuando fueron a la ópera junto con la duquesa de Saint-Pierre y el conde de Forcalquier para asistir a *Hippolyte y Aricie* cuando Voltaire le pidió a Maupertuis que dirigiera los estudios de

Émilie, provocando una aventura de la que él fue la víctima. Voltaire se tomó con humor esta relación, multiplicando sus declaraciones de amor:

> *Renunciáis a las centellas,*
> *a los fuegos fatuos de mis escritos,*
> *por las luces inmortales;*
> *y el sublime Maupertuis*
> *eclipsa mis bagatelas.*
> *No estoy enfadado, mi sorprendido...*
> *Pero sin el secreto de ser dichoso,*
> *¿Qué, entonces, habéis aprendido?*

[Voltaire; Epístola a Mme. de Châtelet]

En cuanto pudo Voltaire aprovechó la ocasión para estar junto a ella y conquistarla. El duque de Richelieu iba a casarse el 7 de abril de 1734 cerca de Montjeu. Viajó con Émilie. Richelieu partió luego para encontrarse con el marqués de Châtelet y así Voltaire y Émilie tuvieron la oportunidad de estar juntos cerca de un mes. Fue entonces cuando ella comprendió la profundidad de su amor:

> *Acabo de perder a Voltaire. Su partida me ha colmado de dolor.*

[Carta del 6 de mayo de 1734 a Maupertuis]

> *Sabe de mi amistad por usted, y la suya es mi mayor consuelo en la desgracia...*

> *Me acaba de ocurrir la más horrorosa de las desgracias. Mi amigo Voltaire, de quien conocéis mis*

sentimientos [...] nos ha abandonado [...]. No conozco más que a usted a quien pueda llorar esta desdicha de mi amigo. Me parece que estoy todavía más unida a él. He pasado diez días aquí entre él y Mme. de Richelieu; no creo haber pasado nunca otros más agradables. Lo he perdido cuando sentía la mayor dicha de poseerlo. [...] Su compañía hacía la felicidad de mi vida; su seguridad proporciona mi tranquilidad.

[Carta a Jacques F. de Sade del 12 de mayo de 1734]

En esa época Voltaire estaba revisando sus notas sobre Inglaterra, origen de sus *Cartas sobre los ingleses*, y posteriormente de *Cartas filosóficas*. En ellas alababa la vida británica, en claro contraste con las instituciones francesas, que trataba con burla y sarcasmo. Comprendía el peligro que esto significaba, por lo que hizo algunas lecturas privadas, para observar la reacción. Imprimió el libro en Rouen, de donde no tardaron en llegar ejemplares a París, y donde, en efecto, se recogió la edición, el verdugo quemó el libro y el editor fue enviado a la Bastilla. Voltaire prevenido por Argental, no fue encontrado, y aunque se le buscó, resultaron fallidas todas las pesquisas.

Hace mucho que no le escribo, señor, y tampoco he recibido noticias suyas. Me ha llegado al corazón la perfidia de mandarme dos cartas en el mismo envío, robándome así una carta. Le he enviado la carta al pobre Voltaire. Si llega hasta él, sé que le causará un inmenso placer, pues conozco su estima y amistad por usted. Ignoro absolutamente su suerte, no he tenido noticias suyas desde su marcha. Pienso *que habrá optado por dirigirse a Basilea o a Ginebra. Espero noticias con impaciencia, pues estoy muy inquieta por su salud. Sus asuntos, por las noticias que me llegan, están tomando muy mal cariz. Creo que ahora su libro (Las cartas inglesas) ha sido denunciado por el Parlamento. Existe una voluntad formal de perderlo. Sus amigos son más dignos de lástima, pues preveo con enorme dolor que esta circunstancia nos privará de él para siempre. Él tendrá su patria allá donde se encuentre y, por muy triste que sea, le confieso que prefiero cien veces verle en Suiza que en el castillo de Auxonne (la prisión). Si pudiéramos esperar algo de la justicia de los hombres, no temería que su libro le causase perjuicios jurídicos serios, pero es fácil ver que estaba juzgado antes de la denuncia y que lo que se quiere condenar no es el libro, sino al autor. Ignoro cómo se tomará esta nueva injusticia. No creo que tenga intención de hacer ninguna gestión para volver a un país donde ha sufrido tanto, y no se me ocurre qué podría hacer en su defensa. Es espantoso que hayan incluido su nombre, circunstancia que bastaría para demostrar que no ha tenido nada que ver con la edición. He enviado su dirección a Condamine (Charles Marie de la Condamine (1701-1774) viajó a Perú a medir el meridiano) y le he pedido que se la comunique a usted. Le ruego que le escriba lo que vaya sabiendo. Me han garantizado que era una dirección segura y que sus cartas le llegarán, esté donde esté. Le ruego que no se la comunique a nadie. Estoy convencida de que aprovechará sus sabios consejos, si está en condiciones de hacerlo, pero veo que su suerte se decide de forma triste para* *sus amigos e ignominiosa para sus enemigos; se avergonzarán demasiado tarde. Adiós, señor, envíeme noticias suyas, se lo suplico. Espero poder contar con sus lecciones a partir de los primeros días de junio y expresarle yo misma en cuánto aprecio su amistad y cuánto la deseo.*

[Carta sobre Voltaire escrita a Maupertuis el 22 de mayo de 1734 donde muestra una gran preocupación]

Para huir de la justicia se alejó de París, al amanecer del 6 de mayo de 1734 Voltaire yendo hacia Cirey. Se refugió en el castillo de Cirey-Blaise, propiedad del marqués de Châtelet, cerca de la frontera de Lorena, situado en una región montañosa, a cuatro leguas de la ciudad más próxima. Todavía no eran conocidas las relaciones amorosas entre Voltaire y la marquesa de Châtelet por lo que el castillo era un lugar ideal para esconderse. Ella no lo acompañó. Se quedó en París, diciendo que lo hacía para conseguir la libertad de su amigo, mientras estudiaba geometría con Maupertuis, aunque en ocasiones lo iba a visitar.

Como los marqueses siempre tenían problemas económicos, fue Voltaire quien pagó la remodelación del castillo de Cirey, con lo que el marqués se mostraba encantado por la mejora de la propiedad. Hizo obras, construyó un ala nueva, transformó estancias y jardines, decoró al gusto de la época, el rococó, compró tapices y cuadros, entre ellos un Watteaux, un Teniers y un Tiziano.

Se ha convertido en arquitecto y jardinero. Ha hecho poner ventanas donde yo había puesto puertas. Cambia las escaleras por chimeneas y las chimeneas por escaleras. Hace *plantar tilos donde yo había puesto olmos... encuentra el secreto de amueblar Cirey con nada.*

[Voltaire, diciembre de 1734.]

Incluso montó laboratorios, una biblioteca y en uno de los salones de la planta principal, un teatro.

Me complazco tener un gabinete de física bastante completo. Mme. de Châtelet es en todo esto mi guía y mi oráculo.

[Carta de Voltaire a Cideville, 23 diciembre de 1737]

Émilie fue a Cirey el 20 de octubre de 1734. Todo el castillo estaba en obras. Hubo una nueva luna de miel que duró dos meses. Maupertuis se había ido, sin avisar, a Bâle con los Bernoulli. Pero volvió a París con el pretexto de que Mme. de Richelieu estaba a punto de dar a luz, y que debía llevar la última tragedia de Voltaire, *Alzira*, para intentar conseguir que se representase. De ésta época es la *Epístola a Mme. de Châtelet* en la que Voltaire, que observaba que ella no era feliz, intentaba abrirle los ojos.

Podemos comprobar como Émilie dudaba si irse a Cirey. Por fin se decidió a abandonar París y su vida de placeres, para estar con Voltaire, y vivir dedicada al estudio.

¿Quién hubiera creído que entre la señora de Richelieu, Voltaire y usted la amistad me hubiera podido traer pesares? Apenas si lo esperaba del amor. Sólo nos dan la felicidad

estos dos sentimientos. Confieso que son la bendición de mi vida y que sólo pediría a los dioses (si existen) pasar lo que me quede de ella en esta partida de cuatro en la que sería igualmente venturoso ser el tercero o el cuarto. ¡Pero qué hago hablando de felicidad! Toda mi vida está en Luneville y en Estrasburgo. Pierdo mi vida lejos de todo lo que amo en esta gran ciudad que, en veinticuatro horas, se ha convertido en un desierto... Para ser feliz en Cirey sólo me falta verlo a usted.

La amistad no es para mí un sentimiento insípido y tranquilo, y la felicidad infinita de pasar mi vida con alguien a quien adoro no me impedirá temblar por usted. Es un sentimiento que nunca le ocultaré, y que con seguridad comparte conmigo.

Estoy aquí desde hace ocho días, y me aburro considerablemente. Por suerte me marcho mañana, pero el aburrimiento sólo me dejará al llegar a Champaña

Cuando se ha probado la felicidad de vivir en el campo con su amante, la vida de la ciudad es insoportable, a menos de estar con la señora Richelieu y con usted. La vida de la ciudad es insoportable.

[Carta dirigida al duque de Richelieu el 21 mayo 1735. Ella está en Cirey. Voltaire en Luneville. Richelieu en Estrasburgo. Trata sobre amor, felicidad y amistad.]

Cuanto más reflexiono sobre la situación de Voltaire y la mía, más considero que la partida es necesaria. En primer lugar yo creo que todas las gentes que se aman apasionadamente vivirían juntas en la campiña [...] y creo además, que sólo allí puedo tener sujeta su imaginación, en París lo perdería antes o después. [...] Lo amo demasiado para sacrificar la dicha de vivir con él sin alarmas [...] y todo lo que podría encontrar de placentero y agradable en París. [...] La única cosa que me inquieta es la presencia de M. de Châtelet [...]. Pero el amor cambia todas las espinas en flores y hará de las montañas de Cirey el paraíso terrestre.

[Correspondencia, 30 de mayo de 1735]

En junio partió hacia Cirey. No sabía que iba a vivir varios años de enorme felicidad.

Existe un heroísmo, y quizás una locura en mí, para encerrarme en Cirey.

Mi pensamiento está abrumado, pero mi corazón rebosa alegría. La esperanza de que esta decisión le persuadirá de que lo amo me oculta todas las otras ideas [...]. Os comunico que sus inquietudes y sus desconfianzas me afligen sensiblemente; conozco que eso constituye el tormento de su vida; eso envenena la mía; pero podemos ambos tener razón.

[Carta dirigida al duque de Richelieu, 15 junio 1735]

Vuestra ausencia me hace sentir que yo podría pedir todavía algo a Dios, y que para ser perfectamente dichosa, es preciso que yo viviese entre vos y mi amigo (Voltaire). Mi corazón osa desearlo, y no se reprocha un sentimiento como la tierna amistad que siento por vos y que conservaré toda la vida [...] Deseo abandonar el mundo, pero no quiero perder vuestra amistad.

[Carta al duque de Richelieu del 22 septiembre 1735]

Émilie se vio obligada a alternar la retirada vida de Cirey con la de París, ya que iba a allí y a Versalles cada vez que era necesario, lo que ocurría con frecuencia, para defender a Voltaire de persecuciones y amenazas, visitando amistades, ministros, personajes de palacio, e incluso, hasta la misma reina.

En Cirey trabajaron y estudiaron siendo sus salones centro de intelectuales de toda Europa que iban allí a aprender con esta excepcional mujer. Formaron una biblioteca de más de diez mil volúmenes, mayor que las de la mayoría de las universidades.

En 1738 estuvo en el castillo durante una gran temporada Mme de Graffigny, antigua amiga de Émilie, que nos ha dejado por escrito sus impresiones sobre la vida en Cirey. En sus escritos describió las dependencias del castillo, la forma de vida, escenas de celos, querellas y reconciliaciones cariñosas.

Me enseñó (Voltaire) sus habitaciones, sus porcelanas, sus cuadros, sus relojes, su vajilla de plata, todo ello de un *gusto exquisito y refinado. En su biblioteca hay muchos libros, y, al lado, en una galería, varios aparatos de física. Las habitaciones de la marquesa son también magníficas. Se hallan en la planta principal, debajo de la de su amigo, quien ha hecho construir una escalera privada que comunica los departamentos de ambos. Las cenas son espléndidas y delicadas. Varios pajes van pasando los platos, y las conversaciones entre los comensales son encantadoras. A veces, la sobremesa dura hasta la media noche. Cuando en las cenas se habla de filosofía, o la pareja se muestra demasiado efusiva, el discreto marqués tiene la amabilidad de dormirse. [...]*

Nadie respira. [...] Hoy representamos El Infante prodigioso y otra pieza de tres actos, luego es preciso hacer los ensayos. Hemos repetido Zaïre durante tres horas esta mañana; la representamos mañana con La Sérénade. Es necesario peinarse, calzarse, ajustarse, escuchar cantar ópera; ¡Oh! ¡qué suplicio! [...] Hemos contado ayer tarde que en las últimas veinticuatro horas hemos repetido y actuado treinta y tres actos, entre tragedias, óperas y comedias. [...]

Pasa todas las noches, casi sin excepción, hasta las cinco o las siete de la mañana, trabajando. [...] Pensaréis que ella dormirá hasta las tres de la tarde, nada de eso, se levanta a las nueve o las diez de la mañana; y a las seis cuando se ha acostado a las cuatro. No duerme más que dos horas al día, y no abandona su mesa de trabajo en todo el día más que el *tiempo del café, que dura una hora, y el tiempo de cenar, más una hora.*

[Mme de Graffigny; en Lettres de Mme. de Graffigny; 1820, 1957]

Se levantaba al amanecer, escribía cartas, planificaba los asuntos domésticos, veía a sus hijos, y luego estudiaba hasta las doce, hora del almuerzo. Después de comer se prolongaba la sobremesa en interesante charla con los invitados durante dos horas. Si el tiempo era bueno daba a veces un paseo por el campo. Volvía al trabajo hasta las nueve, hora de la cena donde de nuevo se conversaba. Estaba al tanto de las últimas novedades en física, matemáticas, ciencias naturales y filosofía. Compraba aparatos de física que sabía utilizar a la perfección. Contemplaba las estrellas durante largas horas de la noche con un magnífico telescopio inglés. Hacía experimentos en el castillo para repetir las experiencias de Newton con varas, tubos y bolas de madera. Traducía los *Principia* de Newton. Cuando le resultaba difícil mantenerse despierta metía las manos en agua helada, hasta que se despejaba.

En el teatro casero, pequeño, pero decorado con lujo y completo en todos sus detalles, reunidos los habitantes de la casa, los invitados y vecinos, se representaban comedias y tragedias. Los actores eran ellos mismos. Las condiciones de actriz de Mme. de Châtelet eran estupendas, no así las de Voltaire, que solía interpretar papeles secundarios con soltura, pero con mala memoria.

Dormía poco, y como imaginaba que todo el mundo era como ella, imponía un ritmo de vida excesivo a sus invitados. Podemos ver los comentarios al respecto de Mme. de Graffigny. Después de una jornada agotadora Mme. de Châtelet cantaba una ópera entera, para desesperación de sus invitados obligados a escucharla. Ponía el mismo ímpetu en su trabajo intelectual que en las diversiones.

> *La vida que llevamos es bien singular y sólo puede ser deseable a un verdadero filósofo. El señor Voltaire y yo no salimos para cenar en compañía, cada uno permanece en su habitación hasta las nueve, si acaso una pequeña visita antes o después de cenar. Hay días en que nadie me ve, depende de mis horarios, del correo, de los paseos o de mis lecturas.*
>
> [Correspondencia, 23 octubre de 1737]

Si se la interrumpía en su quehacer mostraba un pésimo humor, pero cuando terminaba de trabajar se convertía en la mujer más alegre del mundo. No puede extrañarnos que con ese temperamento volcánico, que canalizaba en un trabajo inhumano, en ocasiones tuviera arranques de cólera terribles. Encontramos en la correspondencia alguno de esos enfados, como el que tuvo con Mme. de Graffigny por copiar y difundir trozos de la *Doncella de Orleans* que Émilie pensaba que podían perjudicar a Voltaire, por lo que en una escena de gran violencia la trató de ladrona, falsa, infame y monstruo. A pesar de ello Mme. de Graffigny, enferma y humillada, permaneció todavía un mes en Cirey.

> *Llegó como una furia, dando grandes gritos y diciéndome una vez tras otra las mismas cosas. [...] Sin Voltaire me hubiera abofeteado. [...] Cuando fue alejada de*

mí, iba y venía por la habitación, gritando y profiriendo exclamaciones sobre mi infamia.

[Mme de Graffigny; en Lettres de Mme. de Graffigny; 1820. Mme de Graffigny había copiado y difundido pasajes de la Doncella de Orleans y Mme. de Châtelet opinaba que esto podía perjudicar a Voltaire]

Durante los primeros cinco años de estancia en Cirey ambos vivieron una época muy productiva. El amor de Voltaire por Émilie se basaba en su admiración.

Una de las razones que nos debe hacer estimar a las mujeres que utilizan su intelecto, es que únicamente las determina el gusto [...] Para nosotros los hombres, es a menudo la vanidad, algunas veces por interés [...]. Es el instrumento de nuestra fortuna.

[Voltaire, 1734.]

Su inteligencia le fascinaba y le maravillaba.

En imaginación y en razón está por delante de las gentes que presumen de una y otra cosa. Entiende a Locke mejor que yo, además lee álgebra como quien lee una novela, después de escribiros voy a ir a su encuentro y a aprovechar más de su conversación que aprendería en los libros ya que estudio a Newton bajo la mirada de Émilie.

[Voltaire, septiembre de 1735]

La llamó "*sublime*", "*divina*", un "*astro*" del que él era su "*satélite*"... Era una mujer capaz de aconsejarle en sus trabajos, de discutir con él, a la que él pedía que le corrigiera sus trabajos y ella se los devolvía llenos de correcciones. Voltaire nunca ejerció presiones sobre ella. Incluso cuando adoptaron posturas científicas diferentes, defendió públicamente el derecho de Émilie de pensar por su cuenta y respetó sus opciones leibnizianas.

> *No hablo de su disertación. Es preciso que mi pequeño planeta desaparezca completo delante de su sol [...] sin la opinión demasiado atrevida de que el fuego no es materia, esta dama merecía el premio. Pero el premio verdadero, que es la estima de la Europa sabia, es bien debido a una persona de su sexo, de su edad y de su rango...*

[Carta de Voltaire a Argens del 21 de junio de 1739]

Cuando Voltaire estaba enfermo, Émilie lo cuidaba personalmente, y le leía obras de Virgilio y Ovidio en latín, y de Newton y Pope en inglés, compartiendo ambos el placer en esas lecturas. Voltaire simulaba estar más enfermo para tener la alegría de ser cuidado por Émilie, que vigilaba su régimen alimenticio y le evitaba todo lo que pudiese serle desagradable.

A pesar de todas las precauciones de Émilie, Voltaire era incapaz de guardar un secreto o de no publicar alguna obra que fuera peligrosa para su seguridad. Después de *Las cartas inglesas* fueron copias del *Mundano* las que circularon por París entre noviembre y diciembre de 1736, por las que Voltaire, una vez más, tuvo que alejarse, y Émilie tuvo que intervenir para resolver el asunto.

Voltaire se fue a Holanda dejando a Émilie preocupada por su salud y por sus imprudencias. En efecto Voltaire quiso publicar un capítulo de metafísica de los *Elementos de Newton* extremadamente peligroso.

> *Conozco ese manuscrito [...] es un libro mil veces más peligroso y punible que La doncella. [...] Es preciso en todo momento salvarle de él mismo y emplear para conducirle más política que todo el Vaticano emplea para retener a un cristiano en sus cadenas. [...] Pasaría mi vida combatiendo contra él, por él mismo, sin salvarlo, temblando por él, gimiendo sus faltas [...] es preciso que me ayudéis a parar este golpe si es que es parable, porque opináis que esta imprudencia le perderá antes o después sin remedio. [...]*
>
> *Confiar a un príncipe de veinticuatro años al que no conoce el secreto de su vida, su tranquilidad y la de las personas que lo aman. [...] Para qué hacer depender su tranquilidad de otro y sin necesidad, por la única vanidad de mostrar a alguien una obra. ¿No verá la imprudencia? Que confíe con tanta ligereza su secreto merece que le traicionen. [...] Soy otra...*

[Carta a Argental del 2 de enero de 1737]

En otras ocasiones también debió salvarlo. No escasearon las oportunidades para que Émilie tuviera que hacer gala de toda su fuerza y toda su energía para protegerlo, pues a Voltaire no le faltaban enemigos.

En 1739 viajaron juntos a Bruselas y La Haya a causa de un pleito que Mme. de Châtelet sostenía por problemas de herencia con unos parientes.

Comenzó el 8 de agosto de 1736 la relación epistolar entre Voltaire y el entonces príncipe Federico, heredero de Prusia. En 1743 Voltaire viajó por Prusia, a Berlín y a Postdam, donde conversó largamente con el ya rey Federico II. Parece que intentó algunas labores de espionaje, pero Federico se dio cuenta, y se produjo el primer enfriamiento en la relación. Volvió de nuevo a Cirey, junto a Émilie, que no podía evitar los celos y el enfado que le producían estas ausencias.

La corte de Versalles estaba cerrada para ellos. A Luis XV, que no se distinguía por su cultura, no le agradaba el talento burlesco de Voltaire. Pero tenían abiertas otras cortes principescas, donde se les recibía con agrado.

4.3.5. Sus obras. Instituciones de la Física

Hemos visto como la pareja se dedicó en Cirey al estudio. Mientras ella aprendía geometría e inglés, él escribió obras importantes. Comentaban con rigor las obras de Locke, Pope y Newton, y hablaban de ciencia, de metafísica y de religión, estableciendo una simbiosis intelectual.

> *El libro estaba escrito en latín y ella lo leía en francés. Dudaba un momento en cada periodo. Yo creía que era para comprender los cálculos que eran largos, pero no; es que ella traducía fácilmente los términos matemáticos y los números; nada la detenía.*

[Descripción de Mme. de Graffigny, en Correspondence littéraire]

No se mostraba erudita más que en su gabinete o con los sabios; pero en todas ocasiones sencilla, con ingenio, agradable en la conversación...

[Cita de Sainte-Beuve en Causeries de Lundi, tomo IX, pp. 379]

Ha vivido mucho tiempo en sociedades donde se ignoraba lo que hacía, y ella no se protegía de esa ignorancia.

[Voltaire, Prefacio histórico]

Tenía cuidado en los círculos frívolos entre los que vivía rodeada de no mostrar nunca más conocimiento que los otros.

[Saint-Laurent Memorias del Mariscal de Beauveau]

Muchos historiadores han tenido tendencia a considerar la influencia de Voltaire en Émilie y no al contrario. A pesar de las afirmaciones en las que Voltaire agradecía las aportaciones de Émilie, siempre se pensó que se debían más a la galantería que a la realidad.

He adquirido con facilidad los principios de la filosofía de Newton. Mme. de Châtelet tiene su parte en esto; Minerva dictaba y yo escribía.

[Carta de Voltaire a Federico II de Prusia, 15 de enero de 1737]

Se consideraba que la publicación de las obras de Voltaire había precedido siempre a las de Émilie. Pero esta forma de pensar ya no es posible después del descubrimiento de los papeles inéditos de Mme. de Châtelet en la biblioteca de Leningrado. Ahora sabemos que muchas obras fueron escritas prácticamente al mismo tiempo. Ira O. Wade, investigando esos papeles, ha desvelado las aportaciones de Émilie a los trabajos de física y metafísica de Voltaire.

> *En un muy cierto sentido, ellos trabajaron juntos. Pero existe una diferencia. Mientras Voltaire está produciendo un tratado elemental adecuado para todo el mundo, el trabajo de Mme. de Châtelet es más avanzado, adecuado para Voltaire.*

[Descripción de Ira O. Wade sobre el Ensayo de Óptica de Mme. de Châtelet]

Los *Elementos de la filosofía de Newton* de Voltaire trataban sobre óptica y sobre la teoría de la atracción, y hasta el descubrimiento de dichos papeles no se conocía ningún trabajo de Émilie sobre la óptica de Newton, pues en septiembre de 1738 ella escribió un artículo en "*Journal des savants*" sobre los *Elementos* en el que no trataba ninguno de estos dos temas. Ira O. Wade ha mostrado que Mme. de Châtelet escribió un tratado sobre óptica entre 1736 y 1738, pues ha encontrado treinta y cuatro páginas dedicadas a la formación de los colores que constituirían el capítulo cuarto de dicho tratado, con un primer capítulo dedicado a la luz, el segundo a la refracción y el tercero a la reflexión. Y ha hecho notar que este trabajo de Émilie no se parece ni a la complicada *Óptica* de Newton, ni a los *Elementos* de Voltaire que es muy simplificada, sino que ocupa un lugar de dificultad intermedia. Es seguro que ambos estudiaron juntos verificando las experiencias de Newton, y mientras Voltaire escribió un tratado elemental y simplificado, Émilie escribió otro más riguroso.

La formación hedonista y en la duda razonable de Mme. de Châtelet era, sin duda, cartesiana, aunque sin embargo consideraba que la visión cartesiana del mundo era un obstáculo epistemológico para sus conciudadanos, por lo que intentaba convencerlos de que la teoría de los remolinos y del éter era errónea.

Émilie había leído, estudiado y anotado las obras de los científicos de su época. Leía en latín, inglés, francés... y pedía a su librero las novedades de Inglaterra y Holanda.

> *Os pido que me mandéis las obras de la Academia de Ciencias que encontréis para venderme encuadernadas. [...] Quiero todavía las transacciones filosóficas (de la Real Sociedad de Londres), la república de las letras (revista) hasta la muerte de Bayle, y todos los libros de física que encontréis en vuestro camino [...] Tengo la óptica de Newton, Rohault comentado por Clark (Tratado de física de 1671), Whiston (The work of Josephus, 1737), la forma de la tierra, la forma de los astros (de Maupertuis), la física de Musschenbroek (Physicae experimentales et geometricae naturales, 1729), la física de Gravesande (Physicae elementa mathematica experimentii confirmata, 1720), la correspondencia de Leibniz y de Clark, la obra de Renaut (Les Entretiens physiques d´Ariste et d´Eudoxe, 1729), Euclides, Pardies (Éléments de géométrie, 1671), Malezieu (Éléments de géométrie de M. le Duc de Bourgogne, 1705), la*

aplicación del álgebra a la geometría de Guisnée, las secciones cónicas de M. de l´Hôpital, las matemáticas universales, y las obras de Descartes. [...] Os pido que me busquéis los Principia Mathematica de Newton de una bella edición [...] De Keill lo que tengáis....

[Correspondencia con su librero Prault del 16 de febrero de 1739]

El periodo entre 1737 y 1739 fue de acumulación de conocimientos. Estudió las publicaciones de los académicos para poderlas evaluar, y se dio cuenta de que estaban llenas de prejuicios.

Durante los años 1735 y 1736 estaban ambos interesados por problemas religiosos. Leían juntos un pasaje de la *Biblia*, hacían reflexiones, consultaban obras sobre el tema. Émilie escribió *Examen de la Biblia*, obra de cinco volúmenes. René Pomeau ha comparado este trabajo con los de Voltaire y ha encontrado que hay partes de cada uno en el trabajo del otro. Voltaire escribía notas en cuadernos y en los márgenes de los libros, con lo que pudo reencontrarlas y utilizarlas cuando escribió el *Diccionario filosófico*, obra en que se han recogido parte de esas consideraciones.

Se puede concluir que Émilie y Voltaire estuvieron en perfecta armonía intelectual y muchas de las observaciones de las obras de ciencia, filosofía y religión eran comunes a ambos. Nunca fue Émilie la segunda. Incluso, llegó a oponerse a él cuando escribió las *Instituciones* defendiendo la obra de Leibniz, frente a Voltaire que era tan ferviente defensor de Newton.

En 1737 la Academia de Ciencias anunció un concurso para el mejor ensayo científico sobre la naturaleza del fuego y su propagación, y ambos, Émilie y Voltaire, comenzaron a trabajar y a hacer múltiples experimentos. Ponían el hierro al rojo, lo enfriaban, medían temperaturas y pesaban. Voltaire estaba preparando un ensayo para presentarlo al concurso. Pero a las conclusiones a las que llegaban eran diferentes, así que, un mes antes de que finalizara el plazo para el concurso Émilie decidió participar también de manera independiente, trabajando en secreto, y sin poder hacer por ello apenas experimentos. Curiosamente sólo el marqués de Châtelet estaba en el secreto.

> *Creo que le ha sorprendido mi osadía de preparar una memoria para la Academia. He querido probar mis fuerzas, protegida por el anonimato, porque tengo a gala no haberme dado a conocer. El señor de Châtelet era el único que estaba en el secreto, y lo ha guardado tan bien que no le dijo nada en París. No he podido hacer ningún experimento, porque trabajaba sin el conocimiento del señor de Voltaire y no se lo habría podido ocultar. No me puse a ello hasta un mes antes del momento en el que habría que entregar las obras, sólo podía trabajar de noche y era totalmente neófita en estas cuestiones. La obra del señor Voltaire, que estaba casi terminada antes de que yo comenzara la mía, me inspiró algunas ideas, me embargaron deseos de participar en la misma carrera, me puse a trabajar sin saber si enviaría mi memoria y no se lo dije al señor de V. porque no quería ruborizarme ante sus ojos por una empresa que quizá no le complaciese. Además, combatía casi todas sus ideas en mi*

obra, y no se lo confesé hasta que vi en la gaceta que ni él ni yo habíamos logrado el premio. Me pareció que un rechazo compartido con él pasaba a ser honroso. Después supe que su obra y la mía habían tenido oportunidades y seguramente usted debió leerla, lo que me ha devuelto el valor. [...] El fuego no pesa, y podría ser que fuera un ser especial que no sea ni espíritu ni materia, lo mismo que el espacio, cuya existencia está demostrada, no es ni materia ni espíritu. No creo que esta idea sea insostenible, a pesar de lo singular que pueda parecer a primera vista

[Correspondencia con Maupertuis; 21 de junio 1738]

Tanto Mme. de Châtelet como Voltaire estaban convencidos de que el otro ganaría el concurso, pero el fallo del jurado no fue para ninguno de los dos sino que ganó el premio Leonarhd Euler, conjuntamente con Fiesc y Crèqui, de trabajos estos últimos muy inferiores a los de la pareja, pero que seguían el cartesianismo vigente. Mme. de Châtelet obtuvo el número 6 y Voltaire el 7. Como premio de consolación consiguieron la posibilidad de publicar sus trabajos.

El juicio de la Academia nos ha consternado, es duro que el premio haya sido compartido y que el señor de V. no haya podido tener su parte. Seguramente este señor Euler, que ha sido premiado, es un leibniziano, y, por consiguiente, cartesiano.

[Correspondencia con Maupertuis; 22 de mayo de 1738]

Esta memoria sobre el fuego (*Dissertation sur la nature et propagation du feu,* 1744) constaba de ciento cuarenta páginas, donde mostraba sus conocimientos sobre los físicos anteriores. Utilizó en ella sus conocimientos sobre Leibniz especialmente la distinción entre fenómenos y propiedades inseparables de la sustancia. Examinó las propiedades distintivas del fuego: tender hacia lo alto, antagonismo de la pesadez, igualmente repartido por todas partes, incapaz de un reposo absoluto... decidió que era un ser especial, ni espíritu, ni materia, pero no pudo explicar el origen del fuego. En la segunda parte trató las leyes de la propagación del fuego para lo que tuvo en cuenta los principios leibnizianos de las fuerzas vivas. Mostraba ya una voluntad de síntesis entre Leibniz y Newton. En esta obra había dos ideas profundas, obtenidas sólo por la reflexión, sin experimentos: tenía razón al atribuir a la luz y al calor una causa común, y que los rayos de distintos colores no proporcionan el mismo grado de calor. Por primera vez ella estuvo en contradicción total con Voltaire. Fue su primera publicación, el primer paso al reconocimiento público de su valía.

> *Mientras Voltaire estaba más en consonancia con su siglo y con su época, Châtelet, siguiendo a Leibniz, apuntó hacia un camino que la situaba más bien en el siglo XIX lo cual era una segura garantía para haber sido totalmente incomprendida.*

[Descripción de C. Mataix sobre Dissertation sur la nature du feu de Mme. de Châtelet]

El joven sabio italiano Algarotti escribió *Newtonianismo para las damas*, obrita de divulgación en la que pretendía acercar el pensamiento de Newton al público femenino. Terminó el libro en Cirey con la ayuda de Émilie. Ella, que tan bien conocerá posteriormente las obras de Newton, al traducir los *Principia*, le ayudó entonces a corregirlo. Puede observarse la evolución de su opinión sobre esta obra, pues en un primer momento le parecía admirable y le hubiera agradado que le hubiese sido dedicada, para confesar al cabo de un par de años que había cosas que no le gustaban.

> *A puesto los descubrimientos sublimes de Newton bajo la luz en diálogos que pueden hacer pareja con los de Fontenelle.*

[Carta de Mme. de Châtelet del 3 de enero de 1736 en la que habla de Algarotti]

> *Deberé contentarme con mi retrato, aunque me gustaría estar en la obra y que me fuera dedicada.*

[Carta a Algarotti del 20 de abril de 1736]

> *Los diálogos de Algarotti están llenos de ingenio [...] Confieso sin embargo que no me gusta ese estilo en materia de filosofía, y el amor de un amante que decrece en razón del cuadrado del tiempo y el cubo de la distancia me parece difícil de digerir.*

[Carta de Mme. de Châtelet al duque de Richelieu del 17 de febrero de 1738 en la que habla de Algarotti]

> *Os confieso que no me gusta demasiado esa mezcolanza de arlequinadas y de verdades sublimes.*

[Carta de Mme. de Châtelet a Maupertuis en la que habla de Algarotti]

La marquesa de Châtelet estudió a Descartes, luego a Leibniz y por fin a Newton. Escribió *Las instituciones de la física*, obra en tres volúmenes publicada en 1740 que contiene uno de los capítulos más interesantes sobre cálculo infinitesimal, y que fue escrita para que su hijo pudiese comprender la física. No existía ningún libro en francés de física que pudiera servir para instruir a su hijo, y consideraba que era una disciplina indispensable para comprender el mundo.

> *Tengo el proyecto de realizar en francés una filosofía completa del estilo de la del señor Wolff, pero condimentada con una salsa francesa. Trataré de que sea una salsa corta, me parece que es una obra necesaria; ... mis compatriotas disfrutarán con este razonamiento preciso y severo, si tenemos cuidado de no asustarles con las palabras de lemas, de teoremas, de demostraciones, que nos parecen fuera de su esfera cuando se utilizan al margen de la geometría...*

[Carta a Federico II, rey de Prusia; 11 agosto 1740]

En el prólogo, dirigiéndose a su hijo, comentaba las razones que la habían llevado a escribir el libro, y donde mostraba su pasión por el conocimiento y el estudio, que intentaba transmitir al hijo, a la vez que criticaba la ignorancia, tan común entre las gentes de rango.

> *Siempre he pensado que el deber más sagrado de los hombres era el dar a sus hijos una educación que les impidiera, en una edad más avanzada, lamentar su juventud, que es el único momento en que uno puede verdaderamente instruirse; vos estáis, mi querido hijo, en esa edad dichosa en la que la inteligencia comienza a pensar y el corazón no tiene aún las pasiones tan vivas como para estorbarla... [...] pronto las pasiones y los placeres de la juventud llenarán toda vuestra vida y cuando el fuego de la juventud haya pasado y*

hayáis pagado a la locura del mundo el tributo de vuestra edad y vuestro estado, la ambición dominará vuestra alma; y cuando incluso en una edad avanzada queráis aplicaros al estudio de las verdaderas ciencias, la inteligencia no tendrá la flexibilidad que es propia de los años jóvenes, será necesario adquirir por un estudio penoso lo que podéis aprender hoy con extrema facilidad. Quiero que podáis sacar provecho de la aurora de vuestra razón y tratéis de superar vuestra ignorancia, que es muy común entre las gentes de vuestro rango, y no es sino un demérito. [...] ...no me he propuesto en esta obra más que reunir para vuestros ojos los descubrimientos dispersos en tantos buenos libros latinos, italianos e ingleses. [...]

Como la obra que he emprendido demanda tanto tiempo y tanto trabajo, no lamentaré lo que pueda costarme, y la consideraría bien empleada si puedo inspiraros el amor a las ciencias. [...]

Qué esfuerzos y que cuidados no tomaría todos los días en la esperanza incierta de procurar los honores y aumentar la fortuna de los hijos. [...]

Cuando se estudia un libro de física, es preciso preguntarse si es bueno, y no si el autor es inglés, alemán o francés.

[Prólogo de Las Instituciones de la Física]

En general era un libro fiel a la física newtoniana, pero la filosofía puramente científica y materialista de Newton no terminaba de convencerla y reescribió los primeros capítulos acercándose a la metafísica de Leibniz, explicándola con profundidad y claridad, ya que consideraba, con una visión impropia de su época, que ésta podía conjugarse con la física newtoniana.

Convencida Mme. de Châtelet de muchas de las ideas de Descartes, Leibniz y Newton escribió su libro intentando explicarlo todo mediante el razonamiento cartesiano. Era de Descartes la idea de que la Ciencia debía basarse en la Metafísica, pero Mme. de Châtelet se mostraba en contra de los remolinos y del éter de los cartesianos. Admiraba las fuerzas vivas de Leibniz, y sin embargo no comulgaba con las mónadas de las teorías de éste. Defendía la atracción de Newton, y sin embargo no creía como él que Dios, como relojero, tuviera de vez en cuando que necesitar actuar en el universo, dar cuerda a los relojes. Así supo aunar en lo principal las teorías de los tres grandes sabios, y sin embargo estaba en contra de todas las corrientes, porque siempre encontraba algo en sus teorías con lo que Mme. de Châtelet estaba en contra.

Queremos hacer notar que mientras que sus contemporáneos varones estaban a favor de uno de estos sabios y en contra de los otros dos, ella fue la primera en ver lo positivo de cada uno de ellos e intentar construir una teoría unificada. Discutió, escribió, polemizó, estuvo en el ojo del huracán y, sin embargo, la Historia ha tenido tendencia a olvidar sus aportaciones.

> *En ese clima de indiferencia y de hostilidad las Instituciones de la Física son una excepción notable. Sin duda Mme. de Châtelet había ya visto que Leibniz era el único adversario de Newton verdaderamente digno de medirse con él.*

[Jean Ehrard, La idea de la naturaleza en Francia en la primera mitad del siglo XVIII]

Disentía con Voltaire, que no aceptaba la metafísica de Leibniz, confrontaba los argumentos adversos al principio de razón suficiente, y concluía, en contra de su amigo, con la necesaria existencia de Dios. Disentía de la Academia Francesa que defendía las ideas de Descartes aunque llena de prejuicios. Consiguió pues polemizar con todos y tener a todo el mundo en contra.

Podemos imaginar el enfado y la irritación de Voltaire cuando su amiga adoptó la teoría de un Dios necesario que habría elegido el mejor de los mundos posibles, y cuando Émilie salvaba parcialmente la física de Descartes. No creía en los remolinos, pero opinaba que no se podía rechazar la teoría completa por algunos errores. Esto era una herejía para los seguidores de Newton. Sin embargo en el capítulo VIII de las *Instituciones* defendía la teoría de la atracción como una cualidad física, que debía ser el efecto de la esencia de las cosas y del movimiento. En el capítulo XVI trataba de la atracción, mostrando su fundamento y sus límites. Pensaba que como la atracción era un fenómeno, era preciso buscar su causa. Por último se adhirió por entero a la teoría de las fuerzas vivas, pues el cálculo de mv^2 había sido confirmado por la experiencia. Newton no admitía las fuerzas vivas, pensaba que el movimiento va disminuyendo y precisa de la acción de su autor. Ella opinaba que la fuerza viva era siempre la misma, aunque la cantidad de movimiento podía variar.

Voltaire, a pesar de su desacuerdo, hizo gala de respeto y tolerancia, elogiándola ante sus amigos ya que él nunca dejó de ser hostil a la filosofía religiosa de Leibniz.

Sobre el libro de Mme. de Châtelet del que me habláis, creo que es el mejor que nunca se ha escrito sobre la filosofía de Leibniz. Si los corazones de los filósofos alemanes se enganchan con la lectura, los Volfius, los Hanschius y los Tumingius se enamorarán de ella por su libro, y veremos desde Alemania los lemas y los teoremas más galantes.

[Correspondencia de Voltaire con el presidente Hénault del 20 de agosto de 1740]

Si Leibniz viviera todavía se moriría de alegría de verse así explicado, o de vergüenza de verse sobrepasado en claridad, en método, y en elegancia. Conozco poco sobre Leibniz. Incluso abandonado las fuerzas vivas, pero después de haber leído casi todo lo que se ha hecho en Alemania sobre su filosofía, no he leído nada que se aproxime al libro de Mme. de Châtelet. Es algo muy honroso para su sexo y para Francia.

[Carta de Voltaire a Helvétius; 7 de enero de 1741]

Ya había sido aprobada y elogiada la primera versión de las *Instituciones* cuando comentó a Samuel Koenig que ella era la autora de la obra, y le pidió que la ayudara con las revisiones de los primeros capítulos. Como un ejemplo más de todos los que han surgido a lo largo de la historia de intento de apropiación de obras escritas por mujeres, Koenig tuvo la poca vergüenza de decir que él había dictado la obra a Émilie.

El proceder de M. Koenig me haría odiar a todos los matemáticos y a todos los suizos si no os conociera.

[Correspondencia con Bernoulli, 28 diciembre 1739]

Indignada, ella finalizó rápidamente la revisión de los primeros capítulos y acudió a Maupertuis y a la Academia para reivindicar su trabajo, lo que no fue reconocido de forma generalizada hasta que se publicó su siguiente obra, mucho después de su muerte. Las personas sabias que la conocían no pusieron en duda que el libro era de ella, pero en la corte se entretenían comentando, por lo que la maniobra tuvo éxito en los salones de París.

> *Sus amigos deberían aconsejarle caritativamente instruir a su hijo, sin pretender por ello instruir al universo. No hablar de álgebra en un libro de metafísica, y no dibujar figuras cuando se puede explicar claramente sin su ayuda.*
>
> [Carta de Federico II de Prusia a Jordan, 20 de septiembre 1740]

El enfado entre Koenig y ella tuvo consecuencias muy desagradables. El pretexto fue un asunto de dinero, pero el motivo era una clara incompatibilidad de caracteres.

La edición del libro con esos primeros capítulos siguiendo la línea de trabajo de Leibniz suscitó muchas polémicas y fuertes críticas.

Maupertuis, el gran sabio, leyó el libro muy seriamente, y escribió un largo artículo de treinta y seis páginas, en las que lo resumió e hizo una crítica en la que manifestaba gran admiración. Naturalmente no estaba de acuerdo, él tan newtoniano, con la metafísica de Leibniz, pero reconocía su mérito, mientras que otros capítulos, como el capítulo sobre la atracción, le parecieron magníficos.

> *Ha aparecido al comienzo del año una obra que será el honor de nuestro siglo, si fuera de uno de los principales miembros de las Academias de Europa. Esta obra es, no obstante de una dama que habiendo sido educada en las disipaciones, propias de un alto nacimiento, ha tenido el mérito de su genio y su aplicación para instruirse. [...] La cuestión del espacio no ha sido nunca tratada con tanta profundidad.*

[Artículo de Maupertuis]

Otra encendida polémica se suscitó entre Émilie y Dortous de Mairan, importante académico. Ella lo había elogiado en la memoria sobre el fuego, alabando sus tesis contra las fuerzas vivas, pero posteriormente, el 2 de febrero de 1738 contaba a Maupertuis que había leído todo lo que había encontrado sobre las fuerzas vivas y que estaba convencida de la expresión mv^2, diferente de la mv de Mairan. Escribió a éste intentando convencerlo con sus razonamientos. Y quiso que se corrigiera en la *Memoria*, que aún no se había publicado. Pero se distribuyeron ejemplares sin corregir. En las *Instituciones* volvió a razonar su convencimiento de la verdad de las fuerzas vivas. Mairan contestó con una carta de treinta y siete páginas repletas de misoginia, donde se mostraba humillado y con excesiva pasión. Émilie no pudo disimular su alegría. Replicó a Mairan, cuyos argumentos le parecían muy débiles, aconsejándole releer su trabajo, y comprobar que tenía un razonamiento erróneo. Lo esencial de esta polémica era que demostró con claridad quién era la autora de las *Instituciones*, ya que en estas respuestas nadie podía estarle ayudando. Las *Instituciones* fueron publicadas y reeditadas en Holanda, Alemania, Italia, etc. en un corto espacio de tiempo.

Escribió también un interesante *Discurso sobre la felicidad,* en el que opinaba que la felicidad se conseguía con buena salud, los privilegios de riqueza y posición y también con el estudio, marcándose metas y luchando por ellas. Escribió que el amor al estudio era más necesario para la felicidad de las mujeres, ya que era una pasión que hace que la felicidad dependa únicamente de cada persona, "¡*quien dice sabio, dice feliz*!".

> *Para ser felices, debemos deshacernos de nuestros prejuicios, ser virtuosos, gozar de buena salud, tener inclinaciones y pasiones, ser propensos a la ilusión, pues debemos la mayor parte de nuestros placeres a la ilusión, y ¡ay de los que la pierdan! En lugar de hacerla desaparecer merced a la antorcha de la razón, tratemos de engrosar el barniz que deposita sobre la mayor parte de los objetos; les es todavía más necesario de lo que son para nuestros cuerpos los cuidados y el ornato. [...]*
>
> *Estas son las grandes maquinarias de la felicidad. La primera de todas es estar muy decidido sobre lo que se quiere ser y lo que se quiere hacer... [...] No se es feliz más que con los gustos y las pasiones satisfechas. [...]*
>
> *La sabiduría siempre debe hacer bien sus cálculos: porque quien dice sabio dice feliz, al menos en mi diccionario... cuanto menos depende nuestra felicidad de los demás, más fácil nos resulta ser felices. No temamos cortar demasiado en esto, pues siempre dependemos demasiado. Por esta razón de independencia, el amor al estudio es de todas las pasiones la que más contribuye a nuestra felicidad. En el amor al estudio se encuentra encerrada una pasión a la que*

nunca son totalmente ajenas las almas elevadas, la de la gloria; diríase incluso que ésta es la forma adquirida para la mitad del mundo, y es a esta mitad precisamente a la que la educación deja sin medios, haciendo imposible su goce.

Es seguro que el amor al estudio es bastante menos necesario para la felicidad de los hombres que para la de las mujeres. Los hombres tienen infinitud de recursos para ser felices de los que carecen totalmente las mujeres. Tienen otros medios de alcanzar la gloria y está claro que la ambición de hacer que sus talentos sean útiles para su país y sirvan a sus conciudadanos, bien por su habilidad en el arte de la guerra o por sus talentos para gobernar, o para negociar, está muy por encima de la que puede aportar el estudio, pero las mujeres quedan excluidas, por su estado, de todo tipo de gloria, y cuando, por azar, se encuentra alguna que haya nacido con un alma lo bastante elevada, sólo le queda el estudio para consolarla de todas las exclusiones y de todas las dependencias a las que se encuentra condenada por su estado. [...]

He dicho que el amor al estudio era la pasión más necesaria para nuestra felicidad; es un recurso seguro contra la adversidad, es una fuente de placer inagotable. [...]

Podemos amar el estudio, y pasar años enteros, toda la vida quizá, sin estudiar; felices aquéllos para quiénes transcurre de esta forma; porque sólo a placeres más vivos pueden sacrificar un placer que siempre están seguros de *encontrar, y que se hará tan fuerte que podría compensar la pérdida de los otros. [...]*

El amor a la gloria, que es la fuente de tantos placeres y tantos esfuerzos... está enteramente fundado en la ilusión; nada es tan sencillo para hacer desaparecer la aparición tras la cual corren todas las almas elevadas. [...]

Amar lo que poseemos, saber disfrutar de ello, saborear las ventajas de nuestro estado, no poner demasiado los ojos en los que nos parecen más felices, aplicarnos a perfeccionar lo nuestro y sacarle el mayor partido posible: esto es lo que se debe llamar felicidad. [...]

Estoy convencida de que hay más placer en una fortuna mediocre que en una abundancia completa. [...] Es claro que quiero hablar del amor. [...]

Si esta inclinación mutua, que es un sexto sentido, y el más fino, el más delicado, el más precioso de todos, une a dos almas igualmente sensibles a la felicidad, al placer, todo está dicho, no hace falta nada más para ser felices, el resto es indiferente, sólo es necesaria la salud. [...]

Es justo que tal felicidad sea rara; si fuera corriente, más valdría ser hombre que dios... [...]

He sido feliz durante diez años con el amor de aquel que había subyugado mi alma, y estos diez años los he pasado a solas con él sin ningún momento de hastío ni de languidez. [...]

Es cierto que he perdido este feliz estado y que me ha costado abundantes lágrimas. [...]

Una persona razonable debería ruborizarse tanto de no tener la felicidad en sus manos como de dejarla enteramente en las de otro. [...]

Los prejuicios no encierran ninguna verdad y no pueden ser útiles más que para personas poco formadas. El decoro es una convención y es bastante para que toda persona de bien no se permita nunca descartarlo. [...] Aquel que busque la felicidad no debe nunca descartarlo; pues la escrupulosa observación del decoro es una virtud. Entiendo por virtud todo aquello que contribuye a la dicha de la sociedad, y por consecuencia a la nuestra. [...]

No hay que avergonzarse de haberse equivocado, hay que curarse cueste lo que cueste. [...]

Cada edad tiene unos placeres que le son propios; los de la vejez son los más difíciles de obtener; el juego y el estudio, si somos todavía capaces de ello, la gula, la consideración, son patrimonio de la vejez. [...]

En fin, pensemos en cultivar la inclinación hacia el estudio, una inclinación que hace que nuestra felicidad dependa únicamente de nosotros mismos. [...]

Estar decidido a lo que se quiere ser y a lo que se quiere hacer, es algo que falta a casi todos los hombres; es una condición por lo que falta la felicidad. Sin ella se navega

> *en un mar de incertidumbres; se deshace por la mañana lo que se hizo por la tarde; se pasa la vida haciendo tonterías, reparándolas y arrepintiéndose.*

[Discurso sobre la felicidad. Mme. de Châtelet.]

Cuando en 1744 escribió su *Discurso sobre la felicidad,* incluso ella estaba de acuerdo en que en la vida las mujeres tenían mayores restricciones que los hombres, aunque en el mundo de la corte no suponían un impedimento importante.

Parece que el manuscrito del *Discurso sobre la felicidad* estaba, a la muerte de Émilie, en poder de Saint-Lambert, y estuvo en manos de un editor en 1762 que pretendió incluirlo en una colección de tratados sobre la felicidad que se editó con el título de *Le temple du bonheur ou recueil des plus excellents traités sur le bonheur* pero que al fin se imprimió sin el discurso de Émilie. Se supone que Saint-Lambert había entregado el texto para su publicación, pero que después lo recogió a instancias del hijo de la marquesa que no encontraba razonable que aparecieran publicados los amores de su madre con Voltaire. "*El decoro exigía el silencio*". Existe una edición francesa del discurso de 1961 de Robert Mauzi, una traducción italiana de 1993 de María Cristina Leuzzi y una española de Isabel Morant Deusa. El texto fue escrito en la época en la que la relación con Voltaire era ya una buena amistad y todavía no se había enamorado de Saint-Lambert.

4.3.6. Los Principia de Newton

Durante los años de 1742 a 1745 Émilie estuvo absorbida por otros asuntos: el proceso de Brabant, el matrimonio de su hija y los problemas de pareja con Voltaire. Hacia 1745 comenzó a traducir los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton del latín al francés, con extensos y válidos comentarios y suplementos que facilitaban mucho la comprensión. Durante 1747 estuvo corrigiendo las pruebas de la traducción, y redactando los *Comentarios*. Gracias a este trabajo se pudo leer en Francia esa obra durante dos siglos, lo que hizo avanzar a la Ciencia.

Los *Principia* de Newton era un libro difícil, lleno de figuras y demostraciones geométricas, por lo que, para traducirlo, era preciso haber estudiado geometría. Newton descubrió las famosas leyes de la gravitación universal con lo que dotó de un nuevo paradigma a la Ciencia.

En la corte de Luneville Émilie conoció a Saint Lambert, un joven capitán de la Guardia Real, guapo, inteligente, poeta, y se enamoró perdidamente de él. No era célebre, ni millonario, ni gran escritor, pero tenía una espléndida figura, lucía apuestamente el uniforme y era famoso por sus galanteos amorosos. Émilie era ya una cuarentona, pero tuvo como amante al gallardo treintañero. Voltaire los descubrió casualmente y sufrió un tremendo ataque de celos, a pesar de que por entonces ya mantenía relaciones amorosas con su sobrina Luisa, Mme. Denis, la hija de su hermana Mme. de Mignot. La marquesa le explicó que su cariño por él no había disminuido, su devoción y amistad serían siempre inquebrantables, con lo que Voltaire se conformó con ser únicamente su amigo.

Enamorada de Saint Lambert Émilie pasaba temporadas en Luneville y en Cirey con él, con fiestas y cacerías, a las que asistían Voltaire y el marqués. Después de unos días de carnaval, en París, en 1748, Émilie descubrió, con vergüenza y estupor, que estaba embarazada, haciendo participe de la situación tanto a Voltaire como a Saint Lambert.

> *¡Pues sí!, tengo que informarle de mi infortunado secreto sin esperar respuesta sobre las garantías de guardarlo que le pedía... Estoy preñada, y ya se imaginará la aflicción que me consume, lo que temo por mi salud y hasta por mi vida. Lo ridículo que me parece parir a los cuarenta años, después de pasar diecisiete sin tener hijos.*
>
> [Carta a Saint-Lambert del 3 de abril de 1749]

Pensemos en ella, en París, trabajando al alba en su obra principal, acostumbrada como estaba a dormir sólo tres o cuatro horas cada noche. Pensemos que reflexionaba sobre su vida. Sobre como su pasión amorosa por Voltaire, que supuso una decena de años únicos, ha dado paso a una tierna amistad. Sobre sus sentimientos por Saint-Lambert. Ella, con sus cuarenta y tres años, estaba loca de amor por ese joven oficial. Y además embarazada. Y él llevaba varios días sin contestar a sus cartas, cada vez más apasionadas, cada vez más exasperantes. Sentía vergüenza de ensuciar el nombre de sus hijos legítimos, y de que tuvieran que repartir parte de su herencia con ese hijo bastardo que llevaba en su seno. Sentía una sensación de ridículo de estar embarazada a su edad y que por ello pudieran burlarse sus enemigos. Incluso sentía angustia por el peligro de muerte que suponía el parto y el postparto. Su trabajo la distraía de estas preocupaciones. Llevaba tres años traduciendo y comentando los *Principia* de Newton. Este trabajo era para ella precioso y esencial. De él iba a depender su fama futura. Quería tenerlo terminado antes del parto, y quería hacerlo bien. No tenía tiempo que perder.

...mi libro es un quehacer esencial [...] del que depende mi reputación

[Carta a Saint Lambert del 16 de junio de 1748]

No me reprochéis mi Newton, ya estoy bastante castigada; no he hecho nunca tan gran sacrificio a la razón como el de quedarme aquí para terminarlo

[Carta a Saint Lambert del 16 de mayo de 1749]

Savater el *El jardín de las dudas* nos narra con maestría como hicieron creer al marqués que él era el padre, mostrándose muy satisfecho. Todos se trasladaron a Luneville para que el parto tuviera lugar allí. Émilie continuó dedicándose a completar la edición de Newton hasta el último momento. Dio a luz, con toda facilidad, a una niña. Su hija nació el 2 de septiembre de 1749, cuando ella estaba sentada en su despacho y escribiendo sobre la teoría de Newton. Todo parecía ir bien, pero una fiebre puerperal, hizo que el día 10 de septiembre, pocos días después, muriera Émilie. Estas muertes repentinas por el nacimiento de un hijo no eran entonces inusuales. El dolor trastornó al marido, al capitán y a Voltaire. Éste, desesperado, se abrazó al cadáver y al separarlo se desvaneció en las escaleras, hiriéndose en la cabeza.

Su traducción sobre los *Principia* de Newton se publicó finalmente en 1759, con un elogioso prefacio de Voltaire. Dicho libro ha continuado reimprimiéndose hasta la actualidad siendo la única traducción al francés de los *Principia*.

Las teorías de Newton deslumbraron al mundo científico de aquella época. El newtonianismo hizo furor. Entre las obras de Newton está la introducción al Cálculo Diferencial, de la que una parte se encuentra en el libro II de los *Principia*. Ninguna rama de las Matemáticas, ni de la Ciencia, tiene su origen en el trabajo de una sola persona, y sin embargo, se suele afirmar que la invención del Cálculo es obra independiente de dos autores: Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz.

Los trabajos de Newton y Leibniz resultaron enormemente difíciles de entender para sus contemporáneos, más de uno les acusó de ser más misteriosos que esclarecedores, hasta el punto de que en ocasiones se entendieran erróneamente sus conceptos. Por eso, es necesario resaltar la importancia de aquellas personas, que como Émilie de Breteuil, marquesa de Châtelet, se ocuparon de estudiarlos y de entenderlos, para divulgarlos entre sus coetáneos. Émilie estudió primeramente a Leibniz, tradujo después los *Principia* de Newton del latín al francés, y en sus salones los intelectuales de la época discutían sobre las obras de estos autores. En su obra *Instituciones analíticas* aunó por primera vez los trabajos de ambos autores. Tengamos en cuenta que muchas de las grandes obras han sido, en ocasiones, más conocidas a través de sus recopilaciones y traducciones que por las obras originales de los propios autores.

Los *Principia* constan de tres libros. Están escritos en latín, quizás para que sólo estuvieran al alcance de personas con buena formación. En el libro primero se enuncian las tres leyes fundamentales de la dinámica, siguiendo a Kepler y a Galileo, y se define fuerza centrífuga y masa. El libro segundo, además del trabajo sobre cálculo ya comentado, trata del movimiento de los fluidos, contradiciendo las ideas de Descartes con estas palabras:

La hipótesis de los *torbellinos* es irreconciliable con los fenómenos astronómicos y sirve más bien para confundir que para explicar los movimientos celestes.

En el libro tercero se enuncia la ley de Gravitación Universal. Parece que en 1666 Newton ya estudió las órbitas de los planetas y la atracción que sobre ellos ejercía el Sol. Estudió también la atracción que la Tierra ejerce sobre la Luna. Pero los cálculos no salían, pues entonces se creía que el radio de la Tierra era una octava parte menor de lo que es. En 1670 J. Picard realizó una mejor medida de las dimensiones de la Tierra, que fueron publicadas en 1675, lo que impulsó a Newton a rehacer sus cálculos. Explicó la causa de las mareas, afirmó que la Tierra está achatada por los polos y demostró que la órbita de los cometas era elíptica.

Comentemos el escándalo que supuso llevar a Francia entre 1730 y 1740 las teorías de Newton por Mme. de Châtelet y sus amigos. La teoría de la gravitación se oponía a la teoría del gran sabio francés: Descartes. Implicaba una visión de la naturaleza y una concepción de la ciencia radicalmente contrarias. Los cartesianos: Cassini, Mairan, Réaumur rehusaban reconocer que la Tierra era achatada por los polos a pesar de las pruebas aportadas.

> *Las fatigas por las que ha pasado son dignas de Carlos XII. La recompensa ha sido la persecución. La vieja escuela se ha sublevado contra él, M. Cassini y los jesuitas están persuadidos, los necios, que M. de Maupertuis no sabe lo que dice.*

[Carta de Mme. de Châtelet a Algarotti del 10 de enero de 1738 en la que habla de Maupertuis y su lucha por sus teorías]

No se quiere en Francia que Newton tenga razón. No me extrañaría un arresto del Parlamento contra la filosofía de Newton y contra vos. Somos los herejes de la filosofía.

[Carta de Mme. de Châtelet a Maupertuis del 10 de enero de 1738]

Recordad que se han sostenido tesis contra la circulación de la sangre. Pensad en Galileo y consolaros.

[Carta de Voltaire a Maupertuis, 10 de enero 1738]

Traduciendo a Newton, y vulgarizando a Leibniz, Mme. de Châtelet consiguió su profundo deseo de dotar de una explicación metafísica al mundo. Pensemos que los *Principia* estaban escritos en latín, y al traducir a Newton al francés rindió un magnífico servicio a la comunidad científica.

4.4. Sophie Germain

(1776 - 1831)

Sophie Germain fue una gran matemática autodidacta que, desde muy joven, luchó contra las instituciones y la mentalidad de la época para poder estudiar y ser reconocida como matemática. Sus primeras investigaciones se centraron en Teoría de Números orientadas a demostrar el último teorema de Fermat. El teorema y los números primos que llevan su nombre fueron resultados importantes en la historia de este problema que ha estado sin resolver durante más de tres siglos. En 1816 consiguió el Premio Extraordinario de las Ciencias Matemáticas de la Academia de Ciencias de París por sus trabajos sobre la teoría de la elasticidad. En los últimos años de su vida escribió un ensayo sobre filosofía de la ciencia, y dos trabajos matemáticos, uno sobre la curvatura de superficies y otro sobre teoría de números.

4.4.1. Introducción

Nació en París en las últimas décadas del Siglo de las Luces. La historia de Sophie Germain es la de una matemática brillante que tuvo dificultades para desarrollarse plenamente en sus años de formación ya que le fue vedado el acceso a una educación matemática formal; aún en su madurez, cuando ya era conocida, tuvo que trabajar en solitario porque una jerarquía científica, totalmente masculina, la excluía.

Durante su niñez los cambios políticos y sociales que se producían en Francia y que no acababa de comprender, determinaron que desde muy pequeña considerara la Ciencia, y especialmente las Matemáticas, como el estímulo intelectual que daba sentido y tranquilidad a su existencia.

Sus primeros trabajos en Teoría de Números, los conocemos a través de su correspondencia con C. F. Gauss, con el que mantenía oculta su identidad bajo el pseudónimo de Monsieur Le Blanc. El teorema que lleva su nombre fue, durante casi cien años, el resultado más importante, para demostrar el último teorema de Fermat.

Posteriormente sus investigaciones se orientaron a la teoría de la elasticidad, y en 1816 consiguió el Premio Extraordinario de las Ciencias Matemáticas que la Academia de Ciencias de París otorgaba al mejor estudio que explicara mediante una teoría matemática el comportamiento de las superficies elásticas. En los últimos años de su corta vida, además de sus investigaciones matemáticas escribió sobre historia y filosofía de la ciencia, trabajo que Augusto Comte citó y elogió en su obra.

El Siglo de las Luces no estaba preparado para reconocer el brillo de una mujer que dedicó gran parte de su vida a la Ciencia. Se vio relegada a permanecer al margen de la comunidad científica, que recibía sus trabajos con envidia o escepticismo. Su aislamiento no fue tan evidente cuando investigaba en teoría de números, pero cuando comenzó a trabajar en física matemática no tuvo los medios de percibir la modificación de las formas y del estatus del trabajo científico en esa época, un trabajo cada vez menos solitario y ligado a la comunidad científica. Tuvo que servirse del correo, a veces bajo un pseudónimo, como única forma de comunicarse con otros investigadores cuando le era negado el espacio entre ellos. Sophie Germain quiso entrar en ese "universo masculino" con su trabajo, consciente de que la causa de su exclusión se debía a ser mujer y no a su capacidad que sólo posteriormente fue reconocida.

> *Su obra es de aquellas de las que la Ciencia y la Filosofía ha sacado provecho y honor y su nombre pertenece a la historia del progreso de la humanidad"*

[Germain, 1879, 2]

Aunque su obra merecía el reconocimiento académico, nunca recibió título alguno. Una calle de París y un Liceo llevan su nombre, una placa, en la casa donde murió, el número 13 de la *rue de Savoie*, la recuerda como matemática y filósofa. Recientemente el Instituto de Francia, a propuesta de la Academia de Ciencias, concede anualmente "*Le prix Sophie Germain*". Pero todo este reconocimiento es póstumo, ya que incluso en su certificado de defunción figura "rentista" como su profesión en lugar de matemática.

> *Ella es probablemente la mujer con más hondura intelectual que Francia haya producido nunca. Y todavía resulta más extraño que cuando el funcionario del estado fue a extender su certificado de defunción la designara como "rentista", como si fuera una mujer sin*

ninguna profesión y no como una matemática. Y no sólo esto. Cuando la Torre de Eiffel fue erigida, se inscribieron en esta estructura los nombres de setenta y dos científicos. Pero en esta lista no aparece el nombre de esa hija de genio, Sophie Germain, cuyas investigaciones contribuyeron a establecer la teoría de la elasticidad. ¿Se la excluyó de esta lista por la misma razón por la que no fue elegida como miembro de la Academia Francesa, por ser una mujer? Si esto fuese así, mayor sería la vergüenza para aquellos que fueron responsables de tal ingratitud hacia una persona merecedora del reconocimiento de la Ciencia, y que por sus logros se había ganado allí un lugar envidiable.

[Mozans, 1913]

4.4.2. Su infancia

El Siglo de las Luces se considera una época de esplendor para el progreso de las ciencias y la filosofía, sin embargo sus principales pensadores tienen el firme convencimiento de la inferioridad intelectual de la mujer. Esto no deja de ser paradójico cuando los salones organizados por las mujeres de alta condición social son uno de los lugares claves para la propagación de las ideas de la Ilustración.

La búsqueda de modelos educativos en un momento en el que el discurso revolucionario hablaba de igualdad, puso de manifiesto la necesidad de crear redes públicas de instrucción. Sin embargo se siguió relegando a la mujer al aprendizaje de las "pequeñas ciencias" con las que podrían conseguir un modesto empleo y responder a las necesidades de mano de obra de las urbes en expansión. Los rudimentos de lectura y escritura, pocos y mal aprendidos, no seguían practicándolos, con lo que su contacto con la cultura cesaba a corta edad.

Las jóvenes burguesas se educaban en los conventos o en sus casas, en donde se las preparaba para el futuro papel de esposas y madres. En los conventos se mantenía la idea de evitar los “conocimientos inútiles” que sirven para el “engreimiento del espíritu”. La instrucción en sus casas les posibilitaba el acceso a las bibliotecas de sus padres, así como la posibilidad de encontrarse, en algunos casos, con profesores con talento para enseñar y para descubrirles campos del saber acordes a sus intereses. Sin embargo el acceso de las mujeres al conocimiento científico seguía quedando obstruido.

Sophie Germain nació el día 1 de Abril de 1776, en la calle de San Denis de París, en una familia acomodada de comerciantes. Fue la segunda hija de las tres del matrimonio entre Marie-Madelaine Gruguelin y Ambroise-François Germain.

Su padre era un burgués cultivado y liberal dedicado al comercio de la seda, que participó activamente en la Revolución Francesa y fue elegido diputado del Tiers-État en la primera Asamblea Constituyente de 1789. Era partidario de las reformas sociales, económicas y financieras del ministro Turgot, que siendo progresista no era partidario de la violencia, y además era amigo de Condorcet. Llegó a ser director de la Banca Nacional durante un corto periodo de tiempo. Sin embargo la tendencia que tomó la política en los años siguientes, cada vez más radical, y los sucesos violentos que se produjeron, le apartaron de la vida pública. Murió en 1821 a los 95 años.

Cuando estalló la Revolución, Sophie Germain tenía 13 años. Era una niña tímida, desconfiada y encerrada en sí misma. Es natural que en aquella época los debates políticos fueran el tema usual de las reuniones que tenían lugar en su casa, pero su reacción fue revelarse a estas discusiones, pues no comprendía que fueran tan importantes, y trató de encontrar un estímulo intelectual que le permitiera abstraerse de ellas. Convencida de que su familia sólo pensaba en el dinero y la política, se refugió en la lectura, comenzando con las obras de la biblioteca de su padre.

Su interés por las matemáticas surgió después de leer la *Historia de las Matemáticas* de Jean-Baptiste Montucla. En particular le impresionó la leyenda de la muerte de Arquímedes en Siracusa, por los soldados romanos, mientras estaba absorto en un problema de geometría. Quedó tan conmovida por el fuerte efecto de la Matemática, que era capaz de hacer olvidar la guerra, incluso una amenaza de la muerte, que decidió dedicarse a su estudio.

Leía todo lo que caía en sus manos con un ardor que preocupaba a su familia. El matemático italiano Libri, que más tarde fue su amigo, cuenta como superó los obstáculos que sus padres habían ideado para frenar su pasión hacia las matemáticas. Para que no pudiera estudiar a escondidas de noche, y tuviera el descanso necesario, decidieron dejarla sin luz, sin calefacción y sin sus ropas. Sophie Germain parecía dócil, pero sólo en las apariencias, de noche, mientras su familia dormía, se envolvía en mantas y estudiaba a la luz de una vela que previamente había ocultado. Un día la encontraron dormida sobre su escritorio, con la tinta congelada, delante de una hoja llena de cálculos.

Su tenacidad venció la resistencia de sus padres que aunque no comprendían su dedicación a las matemáticas, conmovidos, sin duda, por la férrea voluntad de su hija, terminaron por dejarla libre para estudiar. Comenzó por el tratado de aritmética de Étienne Bezout para seguir con el de cálculo diferencial de A. J. Cousin.

Durante los años del terror 1793 y 1794 Sophie Germain vivió abstraída de los conflictos sociales y políticos estudiando, por su cuenta, cálculo diferencial. Personas que la conocieron comentaron que Sophie, al final de su vida, todavía recordaba con felicidad el momento en el que por fin comprendió el lenguaje del análisis. Pero se le presentó una nueva dificultad para poder profundizar en los textos científicos, necesitaba saber latín y comenzó a estudiarlo, sin ninguna ayuda, para poder así descifrar las obras de Isaac Newton y Leonhard Euler.

4.4.3. La Escuela Politécnica de París.

En 1794 la joven República Francesa, que había olvidado el entusiasmo de 1789 con la conmoción que supuso la caída de la monarquía y los excesos del terror, se encontraba en una situación política y científica desesperada. Tenía enemigos fuera y dentro de Francia y carecía de científicos y técnicos. Para resolver esta situación el Comité de Salud, aconsejado por científicos, como el matemático Monge y el químico Fourcroy, publicó un decreto el 11 de marzo de 1794 para la creación de L'École Centrale de Travaux Publics, que desde septiembre de 1795, se llamó École Polytechnique (Escuela Politécnica). En nueve meses estuvo creada, los alumnos fueron elegidos por concurso en todo el territorio francés, los profesores eran los más importantes científicos del momento: Lagrange, Prony, Monge, Fourcroy, Vauquelin, Berthollete, Chaptal, Guyton de Morveau, etc. y se utilizaron como locales las dependencias del Palais Bourbon en París.

Para que la falta de medios materiales no fuera un impedimento para estudiar en la Escuela, todos aquellos jóvenes franceses que merecían entrar, por sus conocimientos y por su inteligencia, recibían un salario anual y se alojaban en domicilios de familias cercanas al Palais Bourbon, que debían tratarlos como a sus propios hijos. Para supervisar esta acogida el Director de los Estudios y el médico de la Escuela visitaban regularmente a las familias.

El objetivo de esta Escuela era dotar a los alumnos de una sólida formación científica, en matemáticas, física y química para poder acceder a las escuelas especiales del Estado, como la Escuela de Ingeniería Militar, la Escuela de Minas o la Escuela de Caminos. El 21 de diciembre ya estaba creada y comenzó a funcionar con 400 alumnos que realizaron un curso de tres meses que fue denominado "el curso revolucionario" y que permitió clasificar a los alumnos en tres niveles, los que se incorporaban directamente a las escuelas especiales, los que necesitaban un curso de enseñanza y los que necesitaban dos.

Durante casi diez años los alumnos de la Escuela Politécnica fueron un modelo, por su vida dedicada al estudio, y de ella surgieron los científicos franceses más importantes. Su relevancia en esta época fue tan grande que dos profesores, Monge y Berthollet, y cuarenta y dos alumnos, acompañaron a Napoleón, como expedición científica, en su campaña a Egipto.

Sin embargo en el París del Imperio, los alumnos de la Escuela se mostraban indisciplinados con un régimen político que no les convencía y en 1804 Napoleón decidió convertirla en una escuela con régimen militar y trasladar su ubicación a la montaña de Santa Genoveva en la que permaneció hasta 1976. También se debe a Napoleón la consigna que figuraba en su bandera “Para la patria, las ciencias y la gloria”.

A partir de entonces los alumnos de la Escuela Politécnica tuvieron una participación activa y decisiva en todos los acontecimientos sociales y políticos de Francia, con un comportamiento, en general, opuesto al régimen y siempre revolucionario, lo que contribuyó a que fuera cerrada varias veces, trasladada fuera de París y admirada por los ciudadanos que reconocían el valor de esos jóvenes que arriesgaban su vida por sus ideales, pero sólo los alumnos, en masculino, porque las mujeres no fueron admitidas en la Escuela hasta 1972.

Sophie Germain tenía 18 años en 1794, cuando se fundó la Escuela Politécnica. Como las mujeres no eran admitidas, consiguió hacerse con apuntes de algunos cursos, entre ellos, el de química de Fourcroy y, sobre todo, el de Análisis de Lagrange.

Al final del período lectivo los estudiantes tenían la costumbre de presentar sus eventuales investigaciones y observaciones a sus profesores. También Sophie Germain envió un trabajo a Joseph Louis Lagrange (1736-1813) firmándolo como Antoine-Auguste Le Blanc, un antiguo alumno de la Escuela, un año mayor que ella, que iba a estudiar en la Escuela de Caminos.

No se sabe si había entre ellos una relación de amistad. El conocimiento de las costumbres sociales de la época no permite apreciar el margen de maniobra de una joven de su clase social, con sus intereses y sus capacidades intelectuales. Si Sophie Germain llevaba una vida austera, encerrada en sí misma, evitando reuniones sociales y frivolidades, no manifestaba ninguna timidez cuando estaban en juego cuestiones relacionadas con su formación intelectual o con el saber científico.

El trabajo de Sophie Germain impresionó a Lagrange por su originalidad y se interesó por conocer al autor. Al saber su verdadera identidad, la felicitó personalmente y le predijo éxito como analista, animándola de esta forma a seguir estudiando.

El encuentro con Lagrange la hizo famosa en la comunidad científica, pronto comenzó a relacionarse, por carta o personalmente, con científicos conocidos de la época, que le comunicaban sus trabajos, le enviaban sus obras o le solicitaban una entrevista para conocerla.

A. J. Cousin matemático y autor de *Leçon sur le Calcul Différentiel et Intégral*, obra que Sophie Germain había estudiado, la visitó en su casa. Otros le enviaban paradojas y problemas insignificantes, al estilo del siglo XVIII, que ella resolvía sin ninguna dificultad. Esto favoreció a que su formación científica fuera desordenada y aleatoria: libros, problemas, notas de lectura, al capricho de encuentros y discusiones, sin ningún plan. Ciertas lagunas en su formación le perjudicaron toda su vida.

Tantas muestras de simpatía, y tantas amistades ilustres no fueron para ella objeto de vanidad ni una ocasión para la distracción sino un estímulo para su trabajo. Se puso al corriente de los cursos, los libros y los nuevos descubrimientos, leía a los poetas y cultivaba las artes y, sobre todo, se dedicó a perfeccionar su formación matemática.

En 1802 el humanista J. B. Gaspard d'Ansse de Villoison le dedicó unos versos en latín en el *Magasin encyclopédique*. El poema que rendía homenaje a su talento estaba destinado a celebrar el nacimiento del astrónomo Lalande. Cuando Sophie Germain recibió la carta del poeta, comentándole la publicación, lo tomó como una ofensa a pesar de que el helenista quemó otros versos en griego, que también le había dedicado, y le dio su palabra de honor de no volver a hablar de ella en ningún escrito y mantener su musa "callada y encadenada". Unos días más tarde, y ante la impotencia del autor para impedirlo, se volvió a publicar el poema en la revista *Bibliothèque française*.

> *Me tomo la libertad de enviaros un ejemplar de la nueva edición de mi desafortunada obra, con las correcciones y complementos que os había anunciado. M. Pougens lo había insertado en el tercer número del tercer año de su Bibliothèque française, antes de que yo pudiera suponer que el homenaje a la verdad chocaría con vuestra modestia, tan especial como vuestro talento. Os reitero con mis excusas y la expresión de mis vivos y eternos sentimientos, mi palabra de honor de que no volveré a hablar de usted en ningún escrito y que mi admiración estará siempre muda y encadenada por el deseo de obtener perdón por un error o una falta involuntaria, y por el profundo respeto que debo a Madame, vuestra madre, y a Mademoiselle, vuestra hermana, y con el que tengo el honor de ser, Mademoiselle, vuestro muy humilde y muy obediente servidor.*

[Carta de D'Ansse de Villoison a Sophie Germain, presentándole sus excusas, 14 de julio de 1802]

Aunque se habla de la excesiva modestia de Sophie Germain, posiblemente su enfado radicaba en que no era ser musa de un poeta el reconocimiento que esperaba por su trabajo. Estaba siendo considerada como un “fenómeno” cuando ella lo que pretendía era un trato de igualdad que prescindiera de su condición femenina.

Pero lo que más indignó a la joven matemática de entonces 21 años, fue una visita de Lalande, autor de *L'Astronomie des Dames* (1785), que tenía fama de intrigante, pues de él comentó D'Alembert "se mezcla en todo y no hace nada". A partir de la carta que le escribió Lalande para excusarse, al día siguiente de la entrevista, nos podemos hacer una idea de lo que fue aquel encuentro.

> *Au Collège de France, 4 de noviembre 1797*
>
> *Es difícil, Mademoiselle, sentirme peor que usted se sintió ayer por la indiscreción de mi visita y la desaprobación de mis homenajes, pero era difícil de prever. No puedo todavía comprenderlo y relacionarlo con su gran talento del que mi amigo Cousin me ha informado. Sólo me queda presentarle las excusas de mi imprudencia; se aprende a todas las edades, y las lecciones de una persona tan amable y tan inteligente como usted se retienen más que otras. Usted me dijo que había leído Le Système du monde de Laplace, pero que no quería leer mi Abregé d'astronomie, como creo que usted no habría entendido el uno sin el otro, no veo en ello otra explicación que el formulado proyecto de manifestarle mi más profunda indignación que es el objeto de mis excusas y de mis sentimientos.*

[Carta de Lalande a Sophie Germain, presentando sus excusas]

Para entender la reacción de Sophie Germain tenemos que comentar el éxito que tenía en el siglo XVIII una literatura, que pretendía ser de divulgación científica orientada, especialmente, al público femenino. En estas obras la formación científica era prácticamente nula y además presentaban una imagen de la mujer como un ser frívolo, un poco atolondrado, incapaz de realizar ninguna abstracción. El objetivo de estas obras era casi más reprochable. Se pretendía que las mujeres, excluidas totalmente de una formación científica, tuvieran un baño de culturilla que les permitiera participar, sin entender seriamente nada, en las conversaciones de los salones en los que se hablaba de Ciencia. De esta manera se fomentaba la admiración de las mujeres hacia los hombres de ciencia que se lucían, respondiendo brillantemente a las ingenuas preguntas que ellas formulaban.

Muchos de estos libros son un diálogo entre una dama, casi siempre marquesa, que aprende física de su interlocutor. Algunos de los más conocidos son: *Entretiens sur la pluralité des mondes* de Fontanelle y el más famoso: *Newtonianisme pour les Dames* de Algorotti. Para Algorotti las mujeres sólo se interesan por la galantería y el amor, por lo que elige ese recurso para enseñarles Física. Por ejemplo, una de las preguntas del libro es la siguiente: "¿Por qué razón las señoras utilizan un rojo de labios más intenso para ir a un palco de la ópera que para dar un paseo por las Tullerias?"

A lo que Newton, que está presente en el libro, nos da la respuesta:

> "*La luz de la ópera no es tan blanca como la luz del día, es un poco amarilla y cuando la hacemos pasar a través de un prisma se observa que los rayos amarillos son los más brillante. Así las mujeres tendrán que intensificar su rojo de labios porque estará debilitado por este tipo de luz. (...) Esta razón hace que se aumente la dosis de rojo para ir a la ópera sin que el rojo de las*

> *Bellas y los ojos de sus Adoradores encuentren diferencia entre las bombillas y la claridad del día”.*

En otro párrafo la virtual marquesa acaba por comprender la ley del cuadrado de las distancias porque está familiarizada con la siguiente analogía:

> *“Yo creo que el amor se rige por esta ley de los cuadrados respecto a los lugares e incluso respecto a los tiempos; así después de ocho días de ausencia la ternura llega a ser 64 veces mayor”.*

Consideraciones de este tipo son tan numerosas que ocultan los pocos párrafos en los que de verdad se habla de física.

Hay que reconocer que el libro de Lalande no es tan grotesco, en él las mujeres formulan preguntas sobre Astronomía que él intenta resolver sin utilizar ningún tipo de cálculo. Pero Sophie Germain que leía *Les Principia Mathematica* de Newton o *Le Système du monde* de Laplace no soportaba que se le recomendara un libro relacionado con esta literatura pseudocientífica y le hizo saber a Lalande que no estaba interesada en su amistad. Posiblemente lo que más le molestaba de este tipo de literatura es que estuviera dedicada a las mujeres a las que, precisamente, se les vetaba el acceso a una formación científica seria.

Sophie Germain vivía apartada de la comunidad científica masculina, tampoco pertenecía a la de las mujeres que, a través de los hombres de su familia, se introducían en la vida científica. Algunos contemporáneos comentaban que Sophie Germain era una persona modesta y reservada, pero no sabemos exactamente si su timidez era una forma de evitar las reuniones sociales y la vida mundana o una convicción íntima de su superioridad que le hacía considerar su trabajo, apartado de la escena social, pero dirigido hacia el progreso de la verdad, en el sentido de los Enciclopedistas.

4.4.4. Investigaciones en teoría de números

En 1798, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) había publicado *Essai sur la théorie des nombers* y en 1801, apareció el libro de Karl Friedrich Gauss (1777-1855) *Disquisitiones Arithmeticae*. Sophie, Germain impresionada por estas obras, se dedicó a su estudio animada por Legendre y Lagrange. Tardó varios años en asimilar los nuevos y difíciles métodos de la obra de Gauss, pero el dominio de este tema le permitió realizar importantes investigaciones a la vez que contactos profesionales con verdaderos científicos.

Alrededor de 1630 Pierre Fermat escribió en el margen de un libro de *La Aritmética* de Diofanto lo que ha sido durante mucho tiempo la conjetura de Fermat, también llamado, el último teorema de Fermat. Esencialmente dice que:

> *"La ecuación $x^n + y^n = z^n$ no admite solución entera cuando n es un número natural mayor que 2"*

y escribió a continuación:

> *"He descubierto una demostración maravillosa de esta afirmación pero no tengo suficiente espacio en este margen para explicarla"*.

Cuando *n* es igual a 2 se trata de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ que es la relación que establece el teorema de Pitágoras entre los lados de un triángulo rectángulo. Se conoce, desde la Antigüedad, que existen infinitas ternas de números naturales que verifican esta ecuación como, por ejemplo (3, 4, 5) y (5, 12, 13). Sin embargo nunca se había encontrado una terna de números que verificara la ecuación cuando *n* es mayor que dos.

Fermat era abogado y sólo un matemático aficionado que se negó a publicar sus resultados. Después de su muerte en 1665, su hijo Samuel publicó los trabajos de su padre. Desde la publicación en 1670 de los trabajos de Fermat hasta 1995 los matemáticos y matemáticas más importantes de todo el mundo han dedicado su tiempo y su esfuerzo a resolver este teorema y entre ellos Sophie Germain. Por la variedad de los métodos imaginados y las técnicas matemáticas inventadas, intentar resolver esta conjetura ha contribuido de una manera muy significativa al desarrollo de las matemáticas.

La última demostración, por la que se ha considerado que este teorema ya está demostrado, no estuvo exenta de problemas. El 23 de junio de 1993 Andrew Wiles, un matemático británico que trabaja en Princenton, anunció en el transcurso de un coloquio en Cambridge que había conseguido demostrar la conjetura de Fermat, sin embargo la prueba se consideró incompleta y hubo que esperar a 1995 para obtener una demostración válida.

Tampoco creemos que Fermat tuviera una demostración del teorema que ha estado más de 300 años sin resolverse, posiblemente él mismo detectó un error en su supuesta prueba y por esa razón no la escribió.

Entre 1804 y 1809 Sophie Germain escribió a Gauss una decena de cartas mostrándole sus investigaciones en teoría de números orientadas a resolver el último teorema de Fermat. Temerosa del ridículo que en aquella época suponía una mujer erudita, las primeras cartas estaban firmadas con el seudónimo “Monsieur Le Blanc”, de nuevo utilizó el seudónimo de su supuesto amigo politécnico.

Pero esta correspondencia fue irregular, Gauss estaba tan ocupado en su propia investigación que sólo contestaba las cartas cuando el trabajo de Sophie Germain estaba relacionado con sus propios teoremas.

Su primera carta está fechada en noviembre de 1804. Al final de sus demostraciones le expresaba su preocupación por importunar a un hombre al que tanto admiraba. Gauss, ante la elegancia de sus demostraciones y a pesar de su carácter exigente y poco complaciente, le enviaba respuestas más que elogiosas. Se pueden observar en el texto sus alabanzas, y como se dirige a Sophie Germain como “Señor” (Monsieur).

> *Desgraciadamente la profundidad de mi espíritu no responde a la vivacidad de mis gustos, y me parece que es una temeridad importunar a un hombre de genio cuando la única razón para llamar su atención es una admiración necesariamente compartida por todos sus trabajos.*

[Primera carta de Sophie Germain a Gauss. 21 de noviembre de 1804]

> *“Monsieur”, os pido mil veces perdón por haber dejado sin respuesta durante seis meses la amable carta con la que usted me ha honrado. Sin ninguna duda, estoy encantado de expresaros a continuación cuánto aprecio el interés que usted tiene por las investigaciones a las que yo he dedicado los mejores años de mi juventud, que han sido siempre la fuente de mis más deliciosas alegrías y que siempre serán para mí más*

queridas que ninguna otra ciencia. Cada vez más me gustaría poder tener bastante tiempo de ocio para poner en orden y comunicaros por escrito, alguna de mis otras investigaciones aritméticas, para que de alguna manera usted tenga el placer que yo he tenido con sus investigaciones. Mi esperanza ha sido en vano. Sobre todo son mis ocupaciones astronómicas las que en el presente absorben casi todo mi tiempo. Me reservo sin embargo escribirme con usted sobre los misterios de mi querida aritmética. Pronto, cuando pueda volver a ella, seré bastante feliz.

He leído con placer las cosas que usted me ha querido comunicar. Me complace comprobar su habilidad para la aritmética. Sobre todo su nueva demostración para números primos, cuando 2 es o no es residuo cuadrático, me ha gustado mucho, es una demostración muy aguda, es una pena que no se pueda aplicar a otros números. He considerado a menudo con admiración el encadenamiento singular de las verdades matemáticas. Por ejemplo, el teorema que yo llamo fundamental y los teoremas particulares referidos a los residuos –1 o –2 se entrelazan con una multitud de verdades matemáticas, que nunca habríamos imaginado.

[Respuesta de Gauss a la primera carta de Sophie Germain el 16 de junio de 1805]

En 1806 con motivo de la conquista de Prusia por Napoleón, en la campaña de Iéna, Sophie Germain temió por la vida de Gauss al recordar lo que le había ocurrido a Arquímedes y se puso en contacto con un militar amigo de su familia, el general Pernetti, Jefe del Estado Mayor de artillería de la Armada, para pedirle que vigilara su seguridad. La carta de Sophie Germain llegó cuando el general estaba precisamente en Breslau, cerca de Brunswick, la ciudad de Gauss. El militar se interesó por la petición de Sophie Germain y envió a un jefe de batallón a buscarlo. El oficial encontró a Gauss y lo invitó a cenar con él en casa del Gobernador. En la carta que este oficial dirige al general le comenta que había hablado con Gauss y que éste agradecía su mediación pero que afirmaba no conocer ni al general ni a Sophie Germain, de hecho la única mujer que conocía de París era Mme Lalande. (Le Français de Lalande había calculado para su tío el astrónomo Lalande las tablas horarias que aparecieron en su *Abrégé de Navegation*, aunque éste no la citó). El general escribió a Sophie Germain y a la vez le reenvió esta carta. Sophie no tuvo elección tuvo que escribir a Gauss y revelarle la verdad: ella era Monsieur Le Blanc.

> *He optado anteriormente por el nombre de Monsieur Le Blanc para comunicarle esas notas que, sin duda, no merecen la indulgencia con la que usted me ha respondido... Espero que la información que le he revelado no me prive del honor que se ha dignado concederme con un nombre prestado y que me dedique unos pocos minutos para darme noticias sobre usted.*

[Carta de Sophie Germain a Gauss en la que le revela su identidad]

Gauss sorprendido al conocer su identidad, en la carta fechada el 30 de abril de 1807, escribió alabando su talento, su valor y su genio, comentando cómo una mujer encuentra mas obstáculos que un hombre para trabajar en Matemáticas debido a los prejuicios.

Como describir mi admiración y mi asombro al ver a mi estimado Monsieur Le Blanc transformarse en este ilustre personaje que supone un ejemplo tan brillante que no habría podido creerlo. El gusto por las ciencias abstractas en general, y sobre todo por los misterios de los números, es muy raro, esto no es sorprendente, puesto que los encantos de esta sublime ciencia en toda su belleza sólo se revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella. Pero una mujer, debido a su sexo, a nuestras costumbres y prejuicios, encuentra infinitamente más obstáculos que un hombre para familiarizarse con esos complejos problemas y si a pesar de ello consigue superar estas trabas y penetrar en lo que está más oculto, indudablemente posee una valentía notable, un talento extraordinario y un genio superior. En efecto nada podría probar, de una manera más halagadora y menos equívoca, que los atractivos de esta ciencia, que han embellecido mi vida de tantas alegrías, no son quimeras, como la predilección con la que usted la ha honrado.

Las sabias observaciones de las que vuestras cartas están tan ricamente repletas, me han proporcionado mil placeres. Las he estudiado con atención y admiro la facilidad con la que usted penetra en todas las ramas de la Aritmética y la sagacidad con la que obtiene su generalización y su perfección.

[Respuesta de Gauss a la carta de Sophie Germain en la que le revela su identidad. 30 de abril de 1807]

En 1808 comunicó a Gauss su más brillante descubrimiento en Teoría de Números. Es el teorema que lleva su nombre. Demostraba que si x, y, z son números enteros, tales que $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ entonces, al menos uno de los números x, y o z debe ser divisible por 5. Pero Gauss nunca contestó a esta carta.

Parece que no existe ninguna razón para dudar de la sinceridad de Gauss en la carta de 1807, ni que sus elogios fueran un modo de agradecimiento. Varias razones sustentan esta hipótesis. En principio, y por lo que conocemos de la personalidad de Gauss, las falsas alabanzas no encajaban con su difícil carácter, además en su correspondencia con Olbers habla de Sophie Germain en estos mismos términos, por otra parte si tanto era su agradecimiento no se comprende que no respondiera a esta última carta.

> *No hay ninguna razón para pensar que, en esta época, el juicio tan halagador de Gauss no sea sincero. Se constata en sus cartas a Olbers que su correspondencia con Le Blanc-Germain le interesaba y estimulaba. Sin embargo Gauss tenía problemas personales, en su carrera profesional, libros por editar ... problemas que además mencionaba en sus cartas. Se ocupaba de mecánica celeste y astronomía y había descuidado la teoría de números. Sus contribuciones en este campo no aparecerán hasta 1828 y 1832.*

[Comentario sobre los elogios de Gauss en la carta anterior. A. Dahan Dalmedico. 2000]

Todo nos induce a pensar que si Gauss no contestó fue porque estaba inmerso en otros trabajos y otras investigaciones muy diferentes.

Hay que tener en cuenta que en 1807 había sido nombrado director del observatorio astronómico de Göttingen y en esta época comenzó a interesarse por la Astronomía y la Mecánica Celeste, dejando de momento la Teoría de números, que no volvió a interesarle hasta 20 años más tarde. Además la muerte de su esposa Johanna en 1809 fue un duro golpe en su vida personal.

El Teorema de Germain constituyó un paso importante para demostrar el último teorema de Fermat, en general y en particular para *n* igual a cinco

> *Si x, y, z son números enteros, tales que* $x^5+y^5+z^5=0$ *entonces, al menos uno de los números x, y o z debe ser divisible entre 5.*

[Primera versión del teorema de Sophie Germain]

> *Sean x, y, z números enteros. Si n es un número primo impar y 2n + 1 es primo, entonces la igualdad* $x^n + y^n = z^n$ *implica que uno de los tres números x, y o z es divisible entre n.*

[Generalización del teorema. Publicado por Legendre en 1823, como un resultado de Sophie Germain.]

En 1825 Legendre y Dirichlet completaron la demostración para el caso $n = 5$. Durante casi cien años el teorema de Germain fue el resultado más significativo relacionado con la conjetura de Fermat.

> *Desde 1753 (fecha de la carta de Euler a Goldbach diciendo que había conseguido demostrar el teorema de Fermat para n igual a 3) y los trabajos de*

Kummer en 1840, el teorema de Germain es el resultado más importante relacionado con el teorema de Fermat.

[A. Dahan Dalmedico, 2000]

En la actualidad, además de su importancia, resalta la elegancia y simplicidad de la demostración.

En la actualidad, la demostración del teorema de Germain resulta tan simple y elegante que lo convierte en un resultado muy interesante.

[C. Radoux, 1996]

Aunque de momento Sophie Germain abandonó sus investigaciones en teoría de números, posteriormente volvió a retomarlas, reanudará su correspondencia con Gauss y realizó trabajos con Legendre.

Aunque he trabajado durante algún tiempo en la teoría de superficies elásticas (a lo que tengo mucho que agregar si tuviera la satisfacción de realizar algunos experimentos en superficies cilíndricas que tengo en mente), nunca he dejado de pensar en la teoría de números... Mucho tiempo antes de que nuestra Academia propusiera como materia para un premio la demostración de la imposibilidad de la ecuación de Fermat, este desafío me había atormentado a menudo.

[Carta de Sophie Germain a Gauss en mayo de 1819. Sophie Germain había vuelto al estudio de Teoría de Números.]

De esta segunda época es otro de los resultados de Sophie Germain que supone una generalización de su teorema para todo número menor que 100, es decir, demostró que en la ecuación de Fermat: $x^n + y^n = z^n$, si ninguno de los números x, y, z son divisibles por n, entonces no existe solución entera. Legendre, que en esta época trabajaba con ella, continuará la demostración para números menores que 197.

En la Biblioteca Moreniana de Florencia, en los fondos de Libri, se han preservado muchos manuscritos de Sophie Germain. Entre estos documentos hay uno de 24 páginas titulado *Observaciones sobre la imposibilidad de satisfacer la ecuación:* $x^n + y^n = z^n$, que es probablemente la versión más completa de su trabajo sobre la conjetura de Fermat, que nunca fue publicado, aunque fue comentado por Legendre. En efecto, Legendre mencionó estos descubrimientos de Sophie Germain en un artículo de 1823 que apareció en 1827 en las *Memoires de l'Academy des Sciences*, y en su libro *Théorie des Nombres* publicado en 1830. Este manuscrito es una importante contribución de Sophie Germain en *Teoría de Números*.

> *Es en su gran memoria de 1823 sobre el teorema de Fermat cuando Legendre da a conocer el siguiente teorema muy importante que le había sido comunicado por una matemática de gran talento, Sophie Germain:*
> *Si n es primo y 2n + 1 es primo o de forma general 2kn + 1 es primo, para el que no existen dos restos de potencias enésimas que sean consecutivos, la ecuación de Fermat no es posible si ninguno de los números x, y, z es divisible por n.*

[T. Got, 1948]

Gauss a quien después de su muerte se le llamó Príncipe de las Matemáticas comentaba: "*La Matemática es la reina de las Ciencias, pero la Teoría de Números es la reina de las Ciencias Matemáticas*".

4.4.5. El Premio Extraordinario

A comienzos del siglo XIX las Matemáticas se orientaron al estudio de ciertos fenómenos físicos como la luz, el calor, el sonido, la electricidad, el magnetismo, etc. Eran campos todavía sin explorar para las Matemáticas, los únicos estudios sobre estas materias eran descripciones cualitativas o metafísicas que estaban muy lejos de determinar las ecuaciones que explicaran la propagación de estos fenómenos. Estas disciplinas, cuyo estudio estaba ligado a la composición de la materia, constituían lo que entonces se llamaba “física particular”, por oposición a la astronomía, la mecánica y la óptica que se prestaban fácilmente a una descripción matemática y formaban parte de la “física general”. En este aspecto la teoría de la elasticidad tiene la particularidad de romper esta división ya que en su estudio hay que considerar los conceptos y métodos matemáticos de la mecánica y la estructura interna de la materia, pero esto no se determinó hasta el siglo XX.

Durante los años del imperio de Napoleón, París era el centro europeo de la ciencia y en particular de las matemáticas que, en esos años, estaban en pleno apogeo. Fue quizás esta importancia como centro científico la que impulsó, en 1808, al ingeniero alemán Ernst Chladni a presentar en París, sus investigaciones sobre la vibración de las superficies elásticas.

El interés de sus descubrimientos consistía en observar las figuras que se formaban cuando se esparcía arena sobre una placa y se la hacía vibrar al puntear el borde con el arco de un violín. La arena se concentraba donde las vibraciones eran más débiles, formando figuras geométricas muy interesantes. Estas experiencias se realizaron delante de un grupo de élite de las 66 personas que constituían La Primera Clase de matemáticos y físicos del Instituto, después se repitieron delante de Napoleón que tenía una plaza en el Instituto desde 1800.

La Academia de las Ciencias había sido fundada por Colbert, ministro de Luis XIV, en París el 22 de diciembre de 1666, funcionó de manera informal, durante más de 30 años hasta que, el 20 de enero de 1699, Luis XIV estableció el primer reglamento, le dio el título de Academia Real y su sede fue instalada en el Louvre.

El 8 de agosto de 1793 la Convención suprimió todas las Academias, y dos años más tarde, el 25 de octubre de 1795, creó el Instituto Nacional de las Ciencias y de las Artes que agrupaba en secciones a las antiguas academias científica, literaria y artística. Estaba compuesto por 144 miembros de los que La Primera Clase, formada por 66 científicos, era la de las Ciencias Matemáticas y Físicas siendo el grupo más numeroso, La Segunda Clase era la de las Ciencias Morales y Políticas y La Tercera Clase, la de Literatura y Bellas Artes.

La Primera Clase del Instituto, fiel a su misión de favorecer la investigación científica, tenía la costumbre de ofrecer anualmente un premio al mejor trabajo en ciencias físicas y matemáticas. En esta época se elegía una comisión de entre tres y cinco académicos que planteaba un tema, establecía un programa y actuaba como jurado. Los candidatos tenían dos años para realizar el trabajo que presentaban de forma anónima. Las memorias se presentaban en octubre y el fallo del jurado tenía lugar en diciembre y se hacía público en enero del siguiente año.

El interés por encontrar una teoría matemática que explicara las experiencias de Ernst Chladni propició que en 1809 la Primera Clase propusiera como tema de concurso para obtener el Premio Extraordinario: *Donner la théorie mathématique des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience* (*Obtener la teoría matemática de las superficies elásticas y compararla con la experiencia*). Pierre Simon Laplace (1749-1827) que organizó este concurso esperaba poder establecer la reputación de su protegido Siméon Denis Poisson (1781-1840), pero Poisson no participó.

Sophie Germain tuvo que presentar tres memorias sucesivas en 1811, 1813 y 1815 hasta conseguir, el 8 de enero de 1816, el “Prix Extraordinaire”, decisión tomada en la sesión semanal del 26 de diciembre de la Academia. La primera determinó una contribución de Lagrange. Poisson redactó su propia memoria en 1814. Los miembros más importantes de la Primera Clase formaron parte de los sucesivos jurados (Laplace, Lagrange, Legendre, Lacroix, Malus, Poisson, Carnot ...) y todos ellos, de algún modo, estuvieron implicados en estas investigaciones.

El trabajo de Sophie para elaborar su primera memoria no comenzó a raíz de la convocatoria del concurso, sino que lo realizó en los ocho primeros meses de 1811. Es posible que fuera el hecho de que Gauss ya no contestaba a sus cartas, lo que la impulsó a abandonar la Teoría de Números y a comenzar sus investigaciones en física-matemática.

Descubrir las ecuaciones diferenciales de las superficies vibrantes parecía demasiado difícil a los ojos de la mayor parte de los matemáticos, sobre todo después de que Lagrange afirmara públicamente que los modelos matemáticos disponibles eran inadecuados para resolver el problema. Sophie Germain no estaba preparada para realizar este trabajo. Su formación en los métodos matemáticos que explican los fenómenos físicos se reducía a la *Mécanique Analytique* de Lagrange y las memorias en latín de Euler sobre la vibración de una cuerda. A pesar de las lagunas de su formación, o quizás por ello, Sophie fue la única concursante. Lo tomó como un reto y quiso proceder para las superficies por analogía con el razonamiento del caso unidimensional descrito por Euler.

El 21 de septiembre de 1811 presentó una memoria en el Instituto pero su trabajo fue considerado incompleto e incorrecto, y el jurado decidió posponer dos años más el premio. De los tres jueces que formaban el jurado, Laplace, Lagrange y Legendre, sólo Legendre conocía su identidad. Sabemos a través de su correspondencia con Sophie Germain que además le permitió añadir un suplemento posterior a la presentación, lo que parece una irregularidad con respecto al anonimato, pero posiblemente era lo normal. La diferencia estaba en que un científico masculino lo solucionaba con una entrevista personal y Sophie tuvo que defender su trabajo por escrito.

> *La fuente de vuestro error parece estar en la manera por la que habéis creído poder deducir la ecuación de la superficie vibrante de la ecuación de una simple lama; es en el cálculo de las integrales dobles donde os habéis equivocado. En ellas no se pueden hacer las substituciones que usted ha realizado. Para la ecuación de una superficie es necesario seguir el método indicado por Lagrange en la nueva edición de su libro página 148, añadiéndole el término conveniente para representar las fuerzas de la elasticidad. El resto de las cosas están sujetas a dificultades particulares, que aún no se ha sabido aclararlas bien e incluso habría objeciones que hacer al análisis del artículo de Lagrange que le he citado.*

[Carta de Legendre a Sophie Germain el 4 de diciembre de 1811]

Lagrange corrigió el análisis matemático y obtuvo, a partir de la hipótesis de Sophie Germain, la base para describir el comportamiento estático y dinámico de las placas en puntos del interior. De este trabajo sólo se conoce la ecuación final en una nota de ocho líneas.

La ecuación fundamental para el movimiento de la superficie vibrante no me parece exacta, así como la manera de encontrarla al deducirla de la de una lama elástica, el paso de una línea a una superficie me parece poco justificado. Cuando los z son muy pequeños la ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + gEbc\left(\frac{d^6z}{dx^4dy^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right) = 0$$

Pero adoptando como el autor (1/r + 1/r') como medida de la curvatura de la superficie, que la elasticidad tiende a disminuir y a la que se supone proporcional, la ecuación que he encontrado para el caso de z muy pequeño sería la siguiente, que es bien diferente.

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\,\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0$$

[Nota de Lagrange sobre la ecuación de la placa a partir de la primera memoria de S. Germain. *Annales de Chimie et de Physique*, 39, 149]

Aunque, en efecto, varios puntos de su trabajo son discutibles, tenía ideas originales y válidas. Sophie Germain no se desalentó sino que, animada por el hecho de que Lagrange hubiera utilizado con éxito su idea, siguió trabajando con el objetivo de justificar su hipótesis con consideraciones geométricas sobre la deformación de un plano y comparando sus cálculos con las experiencias de Chladni y con otras muchas que realizó ella misma.

El 23 de septiembre 1813 presentó esta segunda memoria, por la que obtuvo una mención de honor. En el informe del jurado es evidente que su ecuación se consideraba exacta y que además parecía muy satisfactoria la parte de su trabajo en la que comparaba los resultados teóricos con las experiencias de M. Chladni y con otras realizadas por ella, pero se juzgaba inexacto el análisis que realizaba para obtener la ecuación fundamental. Había logrado una comparación escrupulosa entre la parte teórica y la experimental.

> *... El análisis que el autor de este texto ha empleado para deducir su ecuación fundamental ha sido juzgado enteramente inexacto, y esta ecuación no parece resultar de ese análisis; pero la parte de esta memoria que contiene la comparación de la teoría con las experiencias de M. Chladni, está hecha con mucho cuidado y conduce a resultados satisfactorios en general. La Clase ha pensado que esta memoria merecía una mención de honor.*

[Proceso verbal de la sesión pública del 3 de enero de 1814. Instituto de Francia. Primera Clase. *Travaux Divers*, II, (1811-1816), nº 27]

> *Sophie Germain recibe una mención de honor por la confrontación razonable y satisfactoria de sus resultados teóricos con la experiencia. De manera similar a Euler para la cuerda vibrante, obtuvo las integrales particulares de la ecuación fundamental*

mediante series exponenciales, de senos y de cosenos. Cada una de esas integrales corresponde a una forma particular de la placa que presenta, en el estado de vibración regular, una cierta configuración y un cierto número de líneas nodales. El sonido que la placa emite depende, en general, del número de esas líneas y la integral establece una relación entre ese número y el sonido correspondiente.

En la importante segunda parte de su memoria, Sophie Germain había calculado, después de esa relación, el tono relativo a cada forma, y compara el tono calculado con el que proporciona la experiencia para una figura semejante. Esta comparación escrupulosa la realizó sobre un gran número de experiencias de Chladni y sobre otras muchas más que diseñó ella misma.

[Sobre la memoria de 1813. A. Dahan Dalmedico, 2000]

En 1814 Poisson redactó un trabajo sobre el mismo tema que leyó, el día 1 de agosto de ese mismo año, ante los componentes de la Primera Clase del Instituto, de la que formaba parte desde 1812

M. Poisson pide leer una memoria sobre la teoría matemática de las superficies elásticas.

M. Legendre pone la objeción de que la Clase no puede oír una memoria sobre un tema convocado a concurso, antes de que el premio de ese concurso se haya concedido.

M. Poisson declara que la memoria que va a leer no tiene el objetivo de impedir que sea concedido el *premio convocado a concurso, y por tanto continua su lectura. Sin embargo la propuesta de Legendre, que parece digna de un examen en un informe general, es enviada a una comisión que será elegida por votación la próxima semana.*

[Sesión de la Academia del 1 de agosto de 1814. *Procès-Verbaux de l' Académie*, V]

Poisson era discípulo de Laplace y había realizado una carrera muy rápida gracias al apoyo de éste. Su lectura comenzó con un análisis crítico de todos los trabajos anteriores desde el de Jacques Bernoulli en 1705 hasta el último de Sophie Germain. En su memoria intentaba explicar el comportamiento de las superficies elásticas desde el paradigma de la teoría molecular que pretendía interpretar todos los fenómenos físicos con el modelo de la física newtoniana, es decir, por un conjunto de fuerzas atractivas o repulsivas.

La cualidad de la materia de la que se trata en ese texto, parecía ser más de expansibilidad que de elasticidad. En efecto la acción de fuerzas repulsivas tiende a alejar cada molécula de las moléculas vecinas, y nunca a restablecer la situación que se había perdido por efecto de una causa exterior....

[A propósito de las hipótesis de Poisson, Sophie Germain escribió en *Recherches sur la théorie de surfaces élastiques*, París, 1821]

Desde este punto de vista, considerando el equilibrio de una sola molécula de la superficie elástica, obtuvo una ecuación, horrible, no lineal y además falsa, que por simplificaciones “milagrosas” se convertía en la ecuación de Sophie Germain, que había ganado credibilidad debido a que en su segunda memoria había demostrado que explicaba los resultados experimentales.

> *Parece un milagro que esta ecuación conduzca por simplificaciones adecuadas de linealización a la ecuación del movimiento de la placa vibrante encontrada por Lagrange y por Sophie Germain en su segunda memoria.*

[Bucciarelli y Dworsky, 1980]

Este trabajo tenía muchas incoherencias que posteriormente le fueron reprochadas en la controversia que se estableció entre la regresiva teoría molecular y la nueva física-matemática, pero en ese momento convenció a muchos de los miembros de la Primera Clase especialmente a los partidarios de las ideas de Laplace. Sólo Lagrange habría podido criticar este trabajo o interrogarle públicamente sobre su método, pero había muerto en abril de 1813. No la publicó, supuestamente, para no influir en el concurso que había sido convocado de nuevo, pero apareció un resumen de la misma en el *Bulletin de la Société Philomathique* y en la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*.

Después de esta lectura el Premio, que había salido a concurso por tercera vez, habría debido retirarse, y si no se hizo fue, posiblemente, porque cuando Legendre se había opuesto a que Poisson leyera esa memoria, éste había argumentado que su lectura no tenía el objetivo de impedir el Premio convocado y terminó de leerla. Como la propuesta de Legendre, de impedir la lectura, parecía digna de estudiarse, el 8 de agosto se creó un comité para arbitrar este tema, formado por Laplace, Legendre, Cuvier, Carnot y Delambre, pero no existe ningún informe de la decisión tomada en los archivos del Instituto. Posiblemente lo que determinaron fue mantener el Concurso.

Aunque Sophie Germain no tuvo acceso a la memoria de Poisson, conoció su existencia y sus conclusiones por las publicaciones citadas. Su primera reacción fue dejar de trabajar en el problema pues, como comentan Bucciarelli y Dworsky en el siguiente texto, se encontró como una escritora de novelas de misterio cuyo argumento, que nadie conoce, es publicado por un escritor famoso, y auque ella sospeche un plagio, no tiene pruebas para demostrarlo.

> *Sophie Germain se encontró en una posición que era algo así como la de una escritora de novelas de misterio que ha estado trabajando en el aislamiento en un argumento fascinante y complicado que hará que su nombre sea conocido. De pronto aparece un nuevo libro de un escritor ya famoso que tiene virtualmente el mismo esquema, pero motivado de manera mucho más brillante y discutido más coherentemente. La autora novel puede sospechar un plagio, pero no hay remedio. No tiene más alternativa que abandonar el proyecto*

[Bucciarelli y Dworsky, 1980]

Después cambió de opinión. Posiblemente, saber que Poisson había llegado a la misma ecuación que ella, le animó a continuar sus investigaciones y presentó otro estudio en 1815.

Este tercer trabajo: *Mémoire sur les Vibrations des Surfaces Élastiques* (*Memoria sobre las vibraciones de las superficies elásticas*), por el que se le concedió, al fin, el Premio Extraordinario suponía una defensa de la legitimidad de su hipótesis a la vez que un ataque al modelo laplaciano y a la teoría molecular.

> *.... Siento vivamente no conocer la memoria de M. Poisson, he perdido un tiempo precioso esperando su publicación. ... Habría renunciado incluso a las investigaciones que tengo el honor de someter al juicio de la Clase, si no me hubiera dado cuenta (...) de que la ecuación obtenida, bajo una hipótesis diferente, resultará igualmente de esta última hipótesis. En efecto, cada día encontraba nuevas razones para considerar mi hipótesis como indiscutible; y sin embargo el respeto debido a M. Poisson me quitaba el valor de someter a cálculo un principio que no preveía entonces que estuviera relacionado con la ecuación publicada por este hábil geómetra.*

[Parte de la introducción de esta tercera memoria. Poisson formaba parte del jurado. Archivos de la Academia de Ciencias de París, 1815]

> *La Clase ha recibido una sola memoria que es continuación de la que mereció una mención de honor en 1814, que el autor ha presentado esta vez con nuevos desarrollos. La ecuación diferencial dada por el autor es exacta aunque no haya tenido éxito al demostrarla; pero la manera de tratar las integrales particulares que la satisfacen, las comparaciones que hace con los resultados de M. Chladni, y además las nuevas experiencias que ha elaborado sobre superficies planas y curvas para realizar las indicaciones del cálculo, han merecido que se le conceda el premio propuesto.*

[Premio concedido a Sophie Germain en la sesión pública del 8 de enero de 1816. Instituto de Francia. Primera Clase. *Travaux Divers*, II]

También, en ella, matematizó el concepto de forma de una superficie y el de deformación. Establecía que, en un punto dado, la suma infinita de todas las curvaturas, relativas a todas las curvas producidas por las diferentes secciones que pasan por la normal, se podía reducir a las dos curvaturas principales, es decir, las curvaturas máxima y mínima.

> *Sophie Germain postula que considerando la suma de las curvaturas relativas a todas las curvas producidas por las diferentes secciones de la superficie se obtendrá una expresión que matematiza la forma de la superficie en un punto. Por lo tanto estaba proponiendo, implícitamente, un procedimiento integral para definir la curvatura en el espacio.*

[A. Dahan Dalmedico, 1988]

Se creó una gran expectación ante el hecho de que fuera una mujer la persona premiada, pero Sophie Germain no asistió a la ceremonia de entrega, desanimada sin duda por las actitudes anteriores de algunos de sus colegas.

> *La clase de ciencias matemáticas y físicas del Instituto ha tenido hoy, día 8, su sesión pública delante de una asamblea muy numerosa que había sido atraída, sin duda, por el deseo de ver a una virtuosa de un tema tan nuevo, Mlle Sophie Germain, a quién debía ser dado el premio de las superficies elásticas. La espera del público ha sido en vano; esta última no ha venido a*

recibir una palma que su sexo no había podido nunca obtener en Francia.

[Sesión pública del 8 de enero de 1816, *Journal des Débats*]

Aunque recibió el premio, el jurado había admitido ciertas reservas sobre sus demostraciones, por lo que Sophie Germain escribió a Poisson resumiendo en nueve enunciados las hipótesis físicas en las que se basaba su memoria.

No creo haberme equivocado en la forma de deducir la ecuación general de mi hipótesis, por lo tanto debe ser mi hipótesis la que no está justificada de manera satisfactoria. Para evitaros recibir toda la demostración he reproducido en la nota adjunta los razonamientos sobre los que está fundamentada. Están escritos de forma separada para que os sea fácil determinar el lugar en el que usted juzga que la cadena de razonamientos está interrumpida.

(Cadena de razonamientos:)

Todas las fuerzas que podamos considerar son proporcionales al efecto que producen o tienden a producir.

Las fuerzas de la elasticidad tienden a eliminar la diferencia entre la forma natural de los cuerpos debidas a ellos mismos y la forma que los mismos cuerpos se ven forzados a tomar por el efecto de una causa exterior

Las fuerzas de la elasticidad que actúan sobre cualquier cuerpo elástico se pueden medir con la *diferencia entre la forma natural de ese cuerpo y la forma que toman bajo el efecto de una causa exterior.*

El efecto producido por una fuerza es explícitamente o implícitamente el conjunto de los efectos producidos por la misma fuerza.

Explícitamente si se considera sucesivamente todos los efectos sin expresar que unos dependen de los otros; implícitamente si la relación que existe entre los mismos efectos permite considerarlos como un efecto único.

El efecto de las fuerzas de elasticidad que actúan sobre una superficie es eliminar la diferencia entre la curvatura natural de la superficie y la curvatura que ha sido forzada a tomar por el efecto de una fuerza exterior.

Pero la pregunta sobre la curvatura de una superficie no es susceptible de una respuesta simple; está compuesta de un conjunto de preguntas relativas a la curvatura de las curvas resultantes de las secciones de la misma superficie hechas en todas las direcciones y según todas las inclinaciones posibles.

El conjunto de las diferencias entre las curvaturas de las distintas secciones de la superficie, consideradas antes y después de la acción de la causa exterior, es explícitamente la medida de las fuerzas de elasticidad que actúan sobre esa superficie,

Existe entre las curvaturas de las curvas formadas por las distintas secciones de la superficie una relación *tal que podemos expresar sus sumas por las de las secciones principales.*

El efecto de las fuerzas de elasticidad está pues implícitamente expresado por la suma de las únicas diferencias entre las curvaturas principales de la superficie, consideradas antes y después de la fuerza exterior.

[Carta de Sophie Germain a Poisson a propósito de las críticas del jurado que considera como un ataque a su hipótesis]

La respuesta de Poisson fue lacónica y formalmente cortés. Se limitó a enviarle su propia memoria, y evitó toda discusión seria con ella sobre cuestiones de fondo, mientras que públicamente fingía ignorarla.

Jean-Baptiste Joseph Fourier, que más tarde llegó a ser amigo de Sophie Germain, también tuvo que realizar dos memorias sobre la teoría del calor en 1807 y 1810 para obtener el premio del Instituto. Estos trabajos que habían sido leídos por Lagrange, Laplace y Poisson fueron criticadas por su falta de hipótesis física sobre la naturaleza del calor, pero mientras que Fourier pudo defender personalmente sus planteamientos, Sophie Germain nunca tuvo un interlocutor intelectual y científico para sus teorías sobre la elasticidad. A pesar de que sus desarrollos matemáticos no convencían a algunos miembros de la Academia, no se dignaron discutirlos con ella, especialmente Poisson que trabajaba en el mismo tema.

La situación de rivalidad que surgió entre Germain y Poisson no era en absoluto equilibrada, ella sólo podía ser una aficionada y él un profesional del medio científico.

Poisson fue profesor titular de la Escuela Politécnica desde 1806, después de haber sido alumno, repetidor, y profesor suplente desde 1802, profesor de Mecánica en la Facultad de Ciencias desde 1809. También había sido nombrado para el "Bureau des longitudes" en 1808 y miembro de la Primera Clase del Instituto en 1812. Además formaba parte del jurado que valoró la tercera memoria.

Mientras tanto Sophie Germain era una extraña para la comunidad científica, mantenida a distancia de la vida profesional, cada contacto, cada reunión era un acontecimiento social formal que exigía una carta de invitación y algunas veces un permiso. De modo que no tenía la posibilidad de discutir con sus colegas temas de interés común. Esta situación no le había perjudicado mientras trabajaba en Teoría de Números, en la que las técnicas eran muy recientes, se concentraban en una o dos obras importantes, y por la que estaban interesadas cinco o seis personas de la comunidad científica. Sin embargo esta circunstancia sí le perjudicó en sus investigaciones en física matemática.

Aunque Sophie Germain había recibido el Premio Extraordinario, no consiguió formar parte de la Academia de Ciencias y algunos miembros de la comunidad científica como Poisson, no le prestaban el respeto que se merecía y eludían una seria discusión con ella. La comparación de las situaciones tan diferentes entre Germain y Poisson nos revela el cambio que, por diversas razones, había experimentado la investigación científica en esta época.

En 1820 Navier presentó una memoria a la Academia que no difiere fundamentalmente de la que presentó Germain en 1813, partía de la misma hipótesis y obtuvo la misma ecuación, pero la deducción la hizo con más habilidad en las técnicas matemáticas.

Entre 1827 y 1829 una serie de artículos publicados en los "Annales de Chimie et Physique" permiten seguir la controversia que se estableció entre Poisson Navier y Arago, respecto a sus distintos enfoques para explicar la elasticidad, es decir, la teoría molecular o laplaciana y la nueva física matemática que utilizaba técnicas geométricas como Euler o analíticas como Lagrange. Sin embargo, Germain no pudo intervenir explícitamente en esta polémica. En 1828 publicó un artículo en esta misma revista científica, pero ninguno de sus colegas escribió una simple nota criticando o al menos nombrando sus planteamientos. Simplemente la ignoraban.

Sophie Germain fue la primera que comenzó el estudio de la teoría de la elasticidad y sus trabajos suscitaron un interés general en la comunidad científica del siglo XIX. Pero, cuando este tema se consideró importante, los matemáticos de la Academia, implicados en estas investigaciones, no tenían en cuenta ni las memorias que presentaba en el Instituto ni sus publicaciones. Pero Sophie, que unos años antes se había considerado una novata entre gigantes, en ese momento había adquirido una gran confianza en sí misma y no sentía ninguna admiración por muchos de sus colegas.

> *Originalmente Germain había sido la única que trabajaba sobre la elasticidad, y el factor limitante era su conocimiento de las técnicas matemáticas. Ahora había un interés generalizado: un interés que había sido estimulado por los trabajos de Germain. Pero el trabajo se hacía dentro de una comunidad que la excluía tan totalmente que ni siquiera se daba cuenta de lo que sucedía. El factor determinante era su sexo, no su capacidad matemática.*

[Sobre su trabajo en teoría de la elasticidad. M. Alic, 1991]

En 1889 el ingeniero francés Eiffel construyó su famosa torre como una demostración de los triunfos de ingeniería moderna en la que la teoría matemática de la elasticidad jugó un papel esencial. Los nombres de setenta y dos científicos se inscribieron en esa estructura para celebrar sus contribuciones a la ingeniería científica. Esa amplia lista no incluye el nombre de Sophie Germain.

4.4.6. Publicaciones de su obra.

En 1816, después de obtener el Premio Extraordinario y de los seis años que había pasado concentrada en los problemas de la teoría de la elasticidad, Sophie Germain había adquirido una gran seguridad en sí misma y el reconocimiento de su competencia. Además la situación cambió y consiguió el respeto de gran parte de la comunidad científica debido, sobre todo, a su amistad con Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), con el que compartía la rivalidad con Poisson, y a su trabajo con Legendre.

Conseguir el premio no fue una meta en su vida sino el impulso necesario para seguir trabajando, pero a pesar de esta dedicación plena a la investigación, siempre encontraba el tiempo necesario para ayudar a sus amigos. Se sabe, por medio de la correspondencia entre Sophie y Fourier, que ella le ayudó a conseguir los votos necesarios para ser elegido Secretario Permanente de la Academia de Ciencias.

Fourier consiguió este nombramiento y en una carta dirigida a Sophie Germain el 30 de mayo de 1823, y en función del cargo que ocupaba, permitió que ella asistiera a las sesiones públicas de las cuatro Academias que formaban entonces el Instituto Real de Francia, en las que tendría siempre un sitio reservado en la parte central de la sala. Fue la primera mujer, no esposa de académico, que consiguió este honor.

> *Mademoiselle,*
>
> *Tengo el honor de comunicaros que todas las veces que quiera asistir a las sesiones públicas del Instituto, será admitida en uno de los sitios reservados en el centro de la sala. La Academia de Ciencias desea testimoniar con esta distinción todo el interés que le inspiran vuestras obras matemáticas y, especialmente, las sabias investigaciones que han sido coronadas concediéndoos uno de sus grandes premios anuales.*
>
> *Reciba, Mademoiselle, mis respetuosos saludos.*

[Carta de Fourier, Secretario Permanente de la Academia a Sophie Germain, el 30 de mayo de 1823]

También continuó sus investigaciones con Legendre sobre Teoría de Números con el que trabajaba en un plano de igualdad, obteniendo algunos resultados importantes. Desde que presentó la primera memoria para obtener el Premio Extraordinario, Sophie Germain mantuvo con Legendre una correspondencia regular y en general con contenidos matemáticos. En el tema de las superficies elásticas corregía sus textos y opinaba sobre ellos pero reconocía que no era un experto en esa materia, sin embargo en Teoría de Números, que era uno de sus campos de investigación, fue un verdadero interlocutor y colaborador.

En 1821 publicó Sophie Germain, por cuenta propia, la memoria por la que había obtenido el premio de la Academia con el título *Recherches* *sur la théorie des surfaces élastiques* (*Investigaciones sobre la teoría de las superficies elásticas*). Una de las diferencias entre estos dos trabajos es una nueva demostración de su hipótesis con razonamientos geométricos y que adjunta a la anterior. Le había sido sugerida por Fourier que había leído el trabajo antes de editarlo.

> *Me había propuesto publicar esta memoria cuando M. Fourier quiso conocer mi demostración. Este juez ilustrado me manifestó que prefería que los razonamientos en los que me apoyaba tuvieran una base geométrica, y me propuso como modelo la demostración que había dado J. Bernoulli para el caso de la cuerda.*

[Respecto a la sugerencia de Fourier. Sophie Germain, 1921]

El objetivo de realizar esta publicación fue, posiblemente, pasar a la posteridad, que ningún colega se apropiara de sus investigaciones, o a causa de su rivalidad con Poisson, que en su trabajo de 1814 había utilizado los resultados de su segunda memoria. También pudo ser una sugerencia de Legendre ya que cuando recibió esta obra le escribió una carta de agradecimiento en la que comentaba lo importante que era para ella hacer públicas las investigaciones que le habían costado tanto trabajo.

Por su correspondencia conocemos que también envió esta memoria a la Academia, presidida entonces por Delambre, a Fourier, y a científicos como Navier y Cauchy que trabajaban, también, en la teoría de la elasticidad y compartían con ella los principios de la física matemática opuestos, en esta época, a los laplacianos.

En 1826 publicó *Remarques sur la nature, les bornes et l´étendue de la question des surfaces élastiques et Équation Générale de ces Surfaces*

(*Observaciones sobre la naturaleza, los límites y la extensión del asunto de las superficies elásticas y ecuación general de estas superficies*). En esta memoria se propuso dar una versión más lúcida de su análisis introduciendo hipótesis que lo simplificaban, además de replantear su trabajo y, sobre todo, su enfoque, que era radicalmente opuesto al paradigma molecular.

> *Es una especie de forma mixta entre la de una superficie geométrica y la de un sólido. En efecto, por una parte la superficie geométrica no teniendo una existencia real carece de sentido toda idea de movimiento, y por otra parte las moléculas que componen el interior de un sólido no pueden confundirse con las que pertenecen a una de las caras del mismo sólido, que en virtud de condiciones particulares...*

[A propósito de la noción de superficie elástica. Sophie Germain, 1826]

> *Supuesto esto, se puede decir que un sólido dotado de elasticidad y con un espesor muy pequeño en relación con las otras dimensiones, recibe el nombre de superficie elástica cuando verifica esta condición que, sin tener en cuenta el tiempo, cada uno de los lados en los cuales se puede concebir su espesor dividido, se comporta durante el movimiento de ese sólido de la misma manera que si estuviera aislado.*

[Definición de superficie elástica. Sophie Germain, 1826]

En 1828 publicó en los “Annales de Chimie et de Physique” el artículo*: Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l´équilibre et du mouvement des solides élastiques* (*Examen de los* *principios que pueden conducir al conocimiento de las leyes del equilibrio y de los movimientos de los sólidos elásticos*). Fue una forma de intervenir en la polémica suscitada entre Poisson, Navier y Arago sobre la teoría de la elasticidad. En él comenta que "... las hipótesis sobre la constitución íntima de la materia son inútiles e incluso perjudiciales en el tema de la elasticidad", lo que constituía un claro ataque al modelo laplaciano.

> *Quiero recordar, en principio, que el objeto de las matemáticas no es la búsqueda de las causas que se pueden asignar a los fenómenos naturales. Esta ciencia perdería su carácter y su crédito si renunciando al apoyo que le ofrecen los hechos generales bien constatados buscara en el mundo de las conjeturas los medios de satisfacer la necesidad de explicación que ha sido en todos los tiempos una fuente fecunda de errores. En el caso de las fuerzas de la elasticidad, el hecho general, especial y característico es la tendencia que tienen los cuerpos con esta propiedad a restablecer la forma que una causa exterior les había hecho perder. Esta tendencia exige que todas las moléculas del cuerpo elástico tiendan a recuperar el lugar que ellas ocupaban antes de la acción de la causa exterior que las había desplazado.*
>
> *Este es el hecho, el único hecho incuestionable de la elasticidad; y si, para hacerse una idea de la manera por la que este hecho se realiza, se quiere profundizar más, se debe temer haber introducido en el tema consideraciones que le son inútiles e incluso totalmente extrañas.*

[Sophie Germain, 1828]

> *Este genero de declaraciones pseudo-racionalistas, van a entrar, por supuesto, en el florilegio de los puntos de vista, a veces caricaturizados, defendidos por los positivistas. Aunque sin exagerar nada: Las tesis de sus adversarios religiosos o "espiritualistas" eran a menudo más ridículas.*

[Comentario al texto anterior. C. Radoux, 1996]

Además de trabajar en matemáticas y física, Sophie Germain se interesaba por la filosofía, la química, la historia y la geografía. Poco a poco su trabajo se fue orientando hacia la Filosofía de la Ciencia donde también aportó su talento y genio analítico.

Su ensayo filosófico, *Considérations générales sur les Sciences y les Lettres aux différentes époques de leur culture* (*Consideraciones generales sobre las Ciencias y las Letras en las diferentes épocas de su cultura*) fue publicado en 1833, de manera póstuma, por A. J. Lherbette, su sobrino, a partir de los manuscritos de Sophie Germain.

Este ensayo es revelador del medio social en el que había vivido Sophie Germain. Se detecta, especialmente, la influencia de los Enciclopedistas, sobre todo de Diderot y Condorcet. Su escepticismo, claramente positivista, está matizado por una profunda creencia en la Ciencia, especialmente en las matemáticas, donde, para ella, existen verdades absolutas y utilizan un lenguaje perfecto.

Durante los sucesos revolucionarios que tuvieron lugar en París en julio de 1830, Sophie Germain había vuelto a refugiarse en el estudio. Redactó dos trabajos, uno sobre teoría de números *Notes sur la manière* *dont se composent les valeurs de y et z dans la équation...* (*Notas sobre la forma en la que se comportan los valores de y y de z en la ecuación...*) y otro sobre elasticidad en el que buscaba definir una teoría dinámica de la curvatura: *Mémoire sur la courbure des surfaces* (*Memoria sobre la curvatura de las superficies*). Estas dos memorias fueron publicadas en 1831, después de su muerte, en el Crelle's Journal. Una vez más su camino se cruzó con el de Gauss que acababa de publicar una teoría matemática de la curvatura en la que definía lo que hoy se conoce por curvatura gaussiana como el producto de las curvaturas principales.

En estos años de su vida, interesada por el desarrollo de la Ciencia en general, y por el progreso en todos sus aspectos, Sophie Germain frecuentaba los círculos intelectuales. Era mucho más sociable y apacible que en su juventud y además su curiosidad, su encanto, y su humor hicieron que fuera apreciada por todos.

4.4.7. La amistad entre Germain y Libri

Guglielmo Libri, Conde de Bagnano, nació en Florencia en 1802. Tuvo una educación excelente, inspirada por las nuevas ideas ilustradas y cultivadas de su familia. Comenzó sus estudios en la Universidad de Pisa a la edad de catorce años y en 1823 fue profesor de física y matemáticas en Pisa. Aunque Libri es mejor conocido como historiador de matemática, bibliófilo, gran coleccionista y comerciante de libros, demostró algunos teoremas, sobre todo en Teoría de Números que todavía se citan. Desde el primer encuentro, entre Germain y Libri surgió una gran amistad a pesar de la diferencia de edad, ella tenía cuarenta y nueve años y Libri veintitrés.

La Academia de Ciencias, después de otorgar el premio a Sophie Germain, propuso un nuevo concurso para encontrar una prueba del Último Teorema de Fermat. Posiblemente estas convocatorias influyeron en reorientar de nuevo el trabajo de Sophie Germain hacia la teoría de números, y reanudar su correspondencia con Gauss, después de casi diez años de silencio.

> *Aunque he trabajado durante algún tiempo en la teoría de superficies elásticas (a lo que tengo mucho que agregar si tuviera la satisfacción de realizar algunos experimentos en superficies cilíndricas que tengo en mente), nunca he dejado de pensar en la teoría de números... Mucho tiempo antes de que nuestra Academia propusiera como materia para un premio la demostración de la imposibilidad de la ecuación de Fermat, este desafío me había atormentado a menudo.*

[Carta de Sophie Germain a Gauss en mayo de 1819, había vuelto al estudio de Teoría de Números.]

En 1819 Guglielmo Libri, a la edad de diecisiete años, oyó hablar del premio por la demostración del Último Teorema de Fermat, y comenzó su investigación en este tema, estudiando ávidamente los trabajos de Euler, Legendre y Gauss. Su primer trabajo en teoría de números fue su *Memoria sopra la teoria dei numeri*, que publicó en Florence en 1820. Libri tradujo su trabajo al francés y se lo envió a Cauchy para que lo presentara en la Academia de Ciencias de París. La memoria de Libri se recibió el 22 de enero de 1821 y Cauchy realizó una presentación verbal. Sophie Germain estudió esta memoria de Libri, de hecho en la Biblioteca de Moreniana se conserva un manuscrito de tres páginas con el título *Notes sur Memoria sopra la teoria dei numeri*, datado el 22 de junio de1822

Libri estuvo en París dos veces mientras vivía Sophie Germain, la primera estancia duró desde finales de diciembre de 1824 hasta mitad de agosto de 1825, la segunda de primeros de junio a finales de julio de 1830. En la Biblioteca Nacional Francesa hay una carta de Libri de 1824 dirigida a Sophie Germain, por lo que hay que suponer que antes de conocerse ya existía correspondencia entre ellos.

Sophie Germain y Libri se encontraron por primera vez el 13 de mayo de 1825, en una de las reuniones que organizaba F. Arago los jueves por la tarde en el Observatorio. Al día siguiente, Libri en una carta le comentaba a su madre: "Finalmente anoche me encontré con Mademoiselle Germain, que ganó el Premio Extraordinario matemático en el Instituto hace algunos años, hablé con ella dos horas, tiene una personalidad impresionante".

Parece que disfrutaron inmediatamente de su mutua compañía y en la biblioteca Moreriana de Florencia se conservan varias cartas en las que Sophie Germain invitaba a Libri a comer en su casa. En una de ellas invitó también a L. Crelle, (fundador del Crelle's Journal) que en el verano de 1830 estaba en París en visita oficial, por encargo del Ministerio de Educación de Prusia, para estudiar los métodos de enseñanza de las Matemáticas en Francia.

En julio de 1826 Sophie Germain le escribió una carta en la que le comentaba la poca influencia que tenía en la comunidad científica, ante la ayuda que Libri le había pedido para obtener un puesto de corresponsal en la Academia de Ciencias.

No me sorprende que tengáis prisa por reanudar
las conversaciones que sólo se pueden tener en París,

usted tiene todas las puertas abiertas, pero yo que no puedo asistir a las sesiones, (está claro que Sophie Germain se refiere a las sesiones no públicas), me encuentro tan extraña al movimiento científico como si viviera en otro país, sin embargo prefiero estar aquí que en otro lugar porque al fin ocurre y alguna vez encuentro por azar una ocasión para instruirme. Sólo he visto a M. Cauchy por casualidad en alguna de esas ocasiones que comento, no dudo de su buena voluntad respecto a usted y os animo a escribirle, si aún no lo habéis hecho, yo no estoy en condiciones de presentarle vuestra petición.

[Carta de Sophie Germain a G. Libri el 15 de julio de 1826]

Durante más de tres años su correspondencia se suspendió o está perdida. No se conoce ninguna carta entre ellos hasta febrero de 1830 cuando Sophie Germain ya estaba muy enferma.

Durante el invierno de 1831 una correspondencia regular entre ellos era casi imposible. Libri había tenido que abandonar Italia ante el fracaso de la conspiración contra el Gran Duque en la que había participado. El 14 junio de 1831 Libri escribió a su madre desde Carpentras: "Estoy dedicado al estudio, en particular a la historia de las ciencias. Es verdad que los libros de matemáticas son muy escasos aquí, pero Mademoiselle Germain (quién, a mi pesar extremo, está enferma de cáncer en París) se ha ofrecido a enviarme todo lo que yo quiera, en caso de que yo no lo encuentre aquí, aceptaré su oferta".

El 23 de julio Libri anunció a su madre: "Mademoiselle Germain, murió hace quince días víctima de gangrena [cáncer], había sufrido terribles dolores, ¡Éste es el destino reservado para las más grandes almas!”

Después de la muerte de Sophie Germain, Libri recibió de sus herederos muchos de los manuscritos que tenía. Algunos de ellos, entre los que estaban varias cartas de Gauss se vendieron al Príncipe B. Boncompagni. Otro material se ha dispersado y probablemente perdido para siempre. En la Biblioteca Moreriana de Florencia, en los fondos de Libri, se conservan más de doscientas hojas escritas por Sophie Germain sobre trabajos científicos, informes de experimentos, proyectos de cartas a Gauss, Legendre y Lagrange, comentarios a los trabajos de Cauchy y Navier, etc. Actualmente muchos de sus manuscritos se encuentran en la Biblioteca Nacional de París.

En 1832 Libri publicó en el Journal de Débats, una revista del Instituto de Francia, una corta pero apasionada biografía de Sophie Germain en la que aparece el siguiente texto:

> *Tenía siempre ese carácter noble en sus acciones siempre marcadas por la verdad que, como ella misma decía, amaba como una verdad geométrica. Ya que no concebía que se puedan amar las ideas de orden de un tipo sin amar las de otro y las ideas de justicia y de virtud eran, según sus expresiones, las ideas de orden que el espíritu debe adoptar incluso cuando el corazón no las desee.*

4.4.8. Reconocimiento Póstumo

Sophie Germain murió en París, a los 55 años, el 27 de junio de 1831 a consecuencia de un cáncer de pecho, después de dos años de horribles sufrimientos que soportó con un coraje y un estoicismo admirables. Su valor moral estaba a la altura de su inteligencia.

Durante muchos años Madame Dutrochet, su hermana, se reunía con una sociedad de élite en la misma casa donde había vivido, e incluso donde había estudiado su hermana, recordando sus éxitos y confirmando su admiración. Incluso cuando ya era octogenaria seguía elogiando el pensamiento de su ilustre hermana que había consagrado a la Ciencia toda su vida y todo su corazón.

En 1879 H. Stupuy publicó *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain suivies de Pensées et de Lettres inédites et précédées d'une Étude sur sa vie et ses œuvres*. Esta publicación surgió de los elogios que la obra filosófica de Sophie Germain había recibido por parte de A. Comte en su *Cours de philosophie positive* y de M. Ravaison en su *Rapport sur la philosophie en France au XIX siècle*. Ella en esa época era muy estimada como matemática, pero no era conocida como filósofa. Estas recomendaciones de origen tan distinto, pero igualmente favorables, despertaron el interés por el pensamiento filosófico de la autora de *Considérations générales sur les Sciences y les Lettres*. Como el libro, publicado en 1833, no se encontraba, se volvió a editar, seguido de pensamientos y citas sobre sus lecturas, que Sophie Germain había dejado manuscritas, y de numerosas cartas, unas escritas por Sophie Germain y otras dirigidas a ella. En esta amplia correspondencia destaca la relacionada con Gauss, Legendre y Fourier. La primera parte del libro es una importante reseña de H. Stupuy sobre la biografía y la obra de Sophie Germain.

En las revistas filosóficas más importantes de la época aparecieron artículos elogiando esta obra, algunos figuran como anexos en la segunda edición que fue publicada en 1896. Entre estos artículos están los que aparecieron en las revistas La Philosophie positive, Journal de savants, Revue Philosophique y Revue occidentale, en esta última se comentaba un artículo escrito en *La neue freie presse* de Viena en el que se decía que Sophie Germain había sido precursora del pensamiento positivista y de Augusto Comte. La objeción principal a este tipo de consideraciones es que no sabemos en qué momento de su vida Sophie Germain escribió su obra. El primer volumen del *Cours de philosophie positive*se publicó en 1830 y el segundo en 1835, Sophie Germain murió en 1831 por lo que es muy probable que su obra fuera anterior, sin embargo en 1820 y 1822 habían aparecido dos publicaciones de A. Comte en las que ya sentaba las bases del pensamiento positivista.

> *Bajo el título general Œuvres Philosophiques de Sophie Germain se ha reunido un discurso general sobre las ciencias y las letras, algunos pensamientos escritos por ella y motivados por sus lecturas, ciertamente, sin intención de publicarlos. Confirmando la opinión, formada ya desde hace tiempo, sobre la inteligencia elevada y audaz del autor.*

[Sobre *Œuvres Philosophiques de Sophie Germain*. J. Bertrand, mayo de 1879]

Se apreciaría imperfectamente el alto alcance de Mme Germain si nos limitáramos a considerarla como geómetra; cualquiera que sea su eminente mérito matemático, del que ha dado prueba su excelente discurso póstumo sobre el estado de las ciencias y las letras, en las diferentes épocas de la cultura, indica en efecto una filosofía muy elevada, enérgica y sagaz a la vez, de la que bien pocas mentes superiores tienen hoy un sentimiento tan neto y tan profundo. Atribuiría siempre el mayor premio a la conformidad general que he percibido en este escrito con mi propia manera de concebir el conjunto del desarrollo intelectual de la humanidad.

[Sobre *Considérations générales sur l'état des Sciences et des Lettres*. A Comte, 1835, 2, 415)]

El libro de Sophie Germain, prescindiendo del momento en que fuera escrito, tiene una fecha marcada por la sucesión de sistemas filosóficos; para quien lo comprenda, es un análisis ampliamente tratado de las doctrinas que iban pronto a disputarse la preeminencia. Por una parte prepara la filosofía positiva y por otra se relaciona con esa filosofía racional que sin renovar el escepticismo de Protágoras o el idealismo de Parménides, pretende encontrar en el hombre la medida de la verdad.

De forma general, el objeto de Sophie Germain es mostrar que en todas las obras de ciencia, literatura, bellas artes, el espíritu humano sigue ciertas reglas *comunes, de las que la acción se manifiesta por todas partes, aunque la huella no se acuse de igual forma en todas ellas. Nada parece más distinto que la construcción de un problema de geometría y la composición de un poema. Pero esta diversidad recubre procedimientos generales y semejantes: la unidad del sujeto, el orden y la proporción de las partes, todas las cosas sin las que la obra científica o literaria está desprovista de esa verdad que la hace duradera. La razón y el gusto están pues menos distanciados de lo que parece. El sabio y el artista comienzan por hacerse una pregunta o concebir un tema: imaginan enseguida los medios más adecuados para resolverlo en un caso o realizarlo en el otro; después los colocan en un orden determinado por una idea genial, observando entre ellos esa justa proporción que resulta de sus relaciones con el pensamiento principal y de este modo se manifiesta, entre la ciencia y las artes, una afinidad de origen y de naturaleza que todavía no se desvelaba de la sabiduría humana, donde la imaginación era todo, pero que un progreso continuado en las distintas ramas del saber ha sido mal conocido acentuando las diferencias que en un principio apenas se vislumbraban.*

[Sobre *Considérations générales sur l'état des Sciences et des Lettres.*
L. Liard, 1879]

El opúsculo del que acabamos de tener una nueva edición había sido, desde su primera publicación en 1833, mucho menos importante que los trabajos *matemáticos de su eminente autor. Sin embargo en él Sophie Germain muestra un pensamiento firme y elevado, en el que las aspiraciones hacia un inflexible rigor lógico no excluyen ni el entusiasmo, ni la elegancia del buen gusto. La precisión de su estilo atestigua, en más de una página, su inteligencia y estar habituada a las demostraciones matemáticas.*

[Sobre *Considérations générales sur l'état des Sciences et des Lettres*. J. Bertrand, 1879]

El hombre, tanto en el universo como en él mismo, ha podido reconocer la verdad, lo bueno y lo bello, en ciertos caracteres de orden, de proporción y de simplicidad que resultan de su manera de pensar; ese sentimiento profundo de unidad lo ha guiado en todos sus juicios y en todas sus concepciones; si el poeta imagina una acción, si el sabio busca descubrir las leyes de los fenómenos, es siempre por aplicación de los mismos procedimientos a creaciones tan diferentes en apariencia.

[Sobre *Considérations générales sur l'état des Sciences et des Lettres*, Dr. Segond, 1879]

Sophie Germain busca precisar sus propias consideraciones sobre las diferentes épocas de la cultura. Piensa que un estado metafísico ha precedido al estado científico, lo que recuerda la ley de los tres estados, enunciada en la misma época por Augusto Comte: en su evolución intelectual, la humanidad ha pasado del estado teológico y militar (caracterizado por *una explicación imaginativa y sobrenatural de los fenómenos) a un estado metafísico y legista. Este es una simple modificación del estado precedente, en el que los agentes sobrenaturales son reemplazados por fuerzas abstractas, de las entidades, para alcanzar por fin el estado positivo e industrial, donde el Hombre, renunciando a buscar las causas profundas de los fenómenos, busca solamente descubrir por la observación y el razonamiento, las leyes efectivas que rigen los hechos. El planteamiento de Sophie Germain explica las alabanzas de las que fue objeto en el "Cours de philosophie positive" de Comte.*

[Sobre Considérations générales sur l'état des Sciences et des Lettres, A. Dahan Dalmedico, 2000]

También desarrolla en él las tesis positivistas, con la idea de un enfoque común tanto en los principios como en los métodos para los progresos científicos, artísticos y literarios.

[Sobre *Considérations générales sur l'état des Sciences et des Lettres*. C. Radoux, 1996]

En 1888 se dio su nombre a un Liceo de París, situado en la calle Jouy, y en 1890 una estatua con su efigie se colocó en el patio. Los diversos trámites para construir este busto, que fue realizado a partir del moldeado frenológico de su cabeza que se conserva en el Muséum d'Histoire Naturelle, así como los discursos pronunciados en dicho Liceo con motivo de la entrega de premios, en 1888 y 1890 se encuentran como anexos en la segunda edición de "*Oeuvres philosophiques de Sophie Germain*".

A pesar de su extensa correspondencia, Gauss y Germain nunca se conocieron personalmente. Gauss la propuso para el Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Göttingen, en la que tenía gran influencia, pero su propuesta fue rechazada.

Desde 2003 el Instituto de Francia concede anualmente Le prix Sophie Germain a un joven investigador que haya realizado el trabajo matemático más importante.

Títulos póstumos, publicaciones después de su muerte, alabanzas postreras, placas conmemorativas en los lugares donde vivió y murió, un premio con su nombre para fomentar la investigación matemática, son algunos de los reconocimientos de una sociedad que mientras vivió no supo apreciar su talento natural y sus brillantes investigaciones.

Sophie Germain había sido capaz de estudiar, comprender y obtener importantes resultados en teoría de números y en física matemática, materias nuevas en su época y muy importantes. Además lo hizo sola, sin el apoyo de un maestro que le diera seguridad, en un entorno que no estimulaba sus aspiraciones. Sin embargo no pudo conseguir que muchos de sus colegas olvidaran su condición de mujer y la respetaran como persona en una relación de igualdad.

4.4.9. ANEXO: Textos del ensayo filosófico:

Consideraciones generales sobre el estado de las Ciencias y de las Letras

Una de las ideas originales de este ensayo fue identificar los procesos intelectuales de las "Ciencias" y las "Letras" e incluso de todas las actividades humanas. Pero esta semejanza, no es la parte más importante de su obra, que pasa a un segundo plano frente a consideraciones mucho más profundas sobre el recorrido histórico, el carácter y la naturaleza de la Ciencia. El concepto clave que unifica el texto es "la analogía" que permite ordenar y encontrar las leyes del universo. Sus planteamientos son claramente positivistas y en su pensamiento está siempre presente su formación científica y su pasión por las matemáticas.

Capítulo 1: Textos sobre las letras y las ciencias

> *Cuando observamos desde un punto de vista general las distintas obras de la humanidad nos sorprende su similitud. ...*
>
> *Si pudiéramos penetrar en la naturaleza de las cosas; si las observaciones, las reflexiones y las teorías que integran nuestra riqueza intelectual no fueran del ser humano, elegiríamos con certeza entre esas dos proposiciones; o el tipo que encontramos en nosotros*

mismos y en los objetos exteriores nos revela las condiciones del ser; o ese tipo, que nos pertenece como propio, atestigua la manera por la que podemos comprender lo posible.

Este conocimiento profundo nos está siempre prohibido. Pero en nosotros intentamos buscar como un sentimiento profundo de orden y de proporción que llegará a ser para nosotros el carácter de lo verdadero en todas las cosas, podemos llegar a reconocer que, en los diversos géneros, nuestros estudios, nuestras investigaciones, dirigidas a un mismo objetivo emplean métodos que también son los mismos.

... Los oráculos del buen gusto se parecen a las decisiones de la razón; el orden, la proporción y la simplicidad no dejan de ser necesidades intelectuales. Los temas son diferentes, pero el juicio es el mismo basado en ese tipo universal que pertenece igualmente a lo bello y a lo verdadero.

... Sin ninguna duda las ciencias, las letras y las bellas artes han nacido de un sentimiento común. Han reproducido sin cesar, con los medios que constituyen la esencia de cada uno de ellos, copias renovadas de ese modelo inédito, tipo universal de la verdad que siempre está presente en los seres humanos superiores.

Capítulo 2

En este capítulo expone los caminos que, hasta entonces, había seguido la humanidad para progresar y sugiere su proceso en el porvenir. Su escepticismo, tan alabado por los positivistas, tiene un límite en su pensamiento que es su firme creencia en el progreso de la Ciencia. Su convicción en la eficacia de los métodos matemáticos conduce su razonamiento a explicar los acontecimientos sociales y políticos estableciendo ingeniosas analogías entre la mecánica y los hechos históricos

Sobre la historia del hombre y de la Ciencia

Buscando sobre todo su propia imagen, el ser humano ha personificado a los seres inanimados, seres intelectuales, creaciones de su imaginación, que han presidido todos los actos y todos los fenómenos naturales. Así se manifestaba ya, en esta primera época de la cultura intelectual, el sentimiento profundo de un lugar común entre todos los seres, y el de un tipo universal grabado en la inteligencia humana para servirle de modelo.

Las ciencias no existían aún; pero la necesidad de explicar se hacía sentir. La primera literatura fue poética. Lo que tenía lugar en las ciencias físicas no era menos poético que la literatura misma; estas ramas del saber, tan separadas hoy, que se necesita sagacidad para notar lo que tienen en común, antes, en los primeros tiempos, estaban enteramente confundidas.

... En los primeros tratados del pensamiento percibimos el gusto por las ideas generales y el sentimiento de analogía que a continuación se reproducirán bajo las formas más variadas. La individualidad y la inteligencia del ser humano, en virtud de las cuales sus acciones están dirigidas hacia el objetivo que quiere obtener, son conocidas por él al mismo tiempo que su propia existencia.

... Fiel a su pensamiento constante, el ser humano no ha cesado jamás de mirar su propia existencia como tipo de todas las otras existencias. Los espíritus existen, conocen, quieren, actúan, y sus acciones se manifiestan en los cambios materiales que realizan, debían buscar en sí mismos alguna similitud, nuestros conocimientos, nuestras voluntades, y el principio de nuestras acciones han sido pues atribuidos a una sustancia inmaterial que, siguiendo la diversidad de esas operaciones, ha recibido diferentes nombres...

... Sin atenernos a ningún orden histórico, sigamos la evolución de la humanidad. Las observaciones son múltiples. La regularidad de los movimientos celestes, la constancia de los fenómenos sublunares, han revelado leyes inmutables. Las voluntades de una multitud de personas no han tenido ese carácter. Un sólo ser humano puede tener voluntades relativas a los objetos diferentes; y si tuviera que dirigir a la vez varias acciones establecería un orden constante para conseguir una atención detallada. La persona ha dicho entonces:

"Un solo ser ha querido el universo y lo gobierna, su voluntad es inmutable".

... La humanidad ha llegado al límite de la analogía. Antes no había idea del ser pues faltaba el modelo. Esta negación de la idea, este límite del pensamiento se ha expresado; su nombre es infinito: Si se trata de la duración es la eternidad. El creador del universo no ha comenzado; no debe terminar; es eterno.

... Hemos llegado a decir que el Creador del universo no ha comenzado; la idea de que no debe terminar es, por así decirlo, simétrica de la primera. Y bien, apropiándose del genero de límites que su espíritu había alcanzado, no lo adopta más para su origen, y hace de ello el término de su existencia inmaterial. Esta especie de paradoja encontrará su explicación cuando nos ocupemos de la relación establecida entre la moral y las creencias. ....

Textos con tesis positivistas

Aunque hemos renunciado a nuestros antiguos errores, todavía conservamos, en nuestros argumentos, el hábito invariable de juzgar la naturaleza de las cosas por la posibilidad de formarnos una idea de ellas. Así decimos fríamente que la materia es divisible hasta el infinito porque nos resulta fácil continuar hasta el infinito la operación aritmética de la división. Decimos que no puede pensar porque es divisible hasta el infinito *y, porque la unidad de nuestras operaciones intelectuales rechaza la idea de divisibilidad. Sin embargo no sabemos todas las cosas, ni a posteriori, ya que la experiencia no las sabría determinar, ni a priori, ya que sólo conocemos la materia por percepciones e ignoramos completamente su esencia.*

... Existe en nosotros un sentimiento profundo de unidad, de orden y de proporción, que sirve de guía a todos nuestros juicios. En los asuntos morales usamos la regla del bien, en los asuntos intelectuales, sacamos la del conocimiento de la verdad, en los asuntos de puro divertimento encontramos la del carácter de lo bello; pero esas leyes de nuestro ser ¿contienen una verdad absoluta?, y el tipo interior que nos sirve de modelo y convence a nuestra manera de sentir, ¿tiene una realidad fuera de nosotros de la que podamos mostrar su certeza?

... Mil suposiciones gratuitas habían sido incorporadas a un pequeño número de verdades; y a pesar de las formas absolutas de la enseñanza de la filosofía, el ser humano con un espíritu justo, siente en el fondo de su conciencia que el estudio no puede llevarle a ninguna certeza verdadera.

... Concluimos pues que la distinción entre lo contingente y lo necesario es, en el fondo, la misma que se encuentra entre los hechos de los que se ignora su causa y aquellos de los que se conoce su naturaleza.

... ¿Nuestra lógica es la de la razón absoluta o es la que le conviene a la razón humana?

... Si nuestra lógica no es otra cosa que el conjunto de los principios de la razón absoluta, ¿cómo, a pesar de una guía tan segura, hemos podido errar tan largo tiempo en la región nebulosa de las suposiciones gratuitas?

Textos sobre las Matemáticas

Las ciencias matemáticas han integrado desde hace mucho tiempo todo el dominio de las ciencias exactas; en cualquier otra parte encontramos los esfuerzos en vano del genio para llegar al conocimiento de la verdad, y los numerosos errores que arrastraban las doctrinas insuficientes de los primeros inventores. El lenguaje misterioso empleado por los filósofos formaba, con la expresión precisa y clara de las ciencias exactas, un singular contraste que inspiraba a los geómetras el más profundo desprecio por las otras ciencias. Pero cuando los fenómenos celestes se explicaron con las leyes del cálculo, el estudio de las matemáticas se hizo más general, y las mentes inteligentes se quedaron sorprendidas por una manera de argumentar tan diferente.

... En nuestros días el espíritu matemático ha hecho tales progresos que la física, llamada particular, es decir la ciencia de los fenómenos naturales que no

pertenecen a la historia natural, por así decirlo, ha desaparecido y se ha transformado en una de las ramas más importantes de las ciencias exactas.

Con respecto a las nuevas técnicas, el lenguaje del cálculo se ha enriquecido con nuevos métodos; y esos métodos han proporcionado el medio para tratar cuestiones que, hace poco tiempo, parecía que debían permanecer extrañas a las ciencias exactas.

... Por una sucesión de esfuerzos, concentrados sin embargo en un pequeño número de personas, un lenguaje preciso y exacto, en el que el menor error se hace sensible, se ha formado y enriquecido. Este lenguaje es el de la razón en toda su pureza; prohíbe la divagación, muestra el error involuntario y es necesario no conocerlo para utilizarlo para la impostura. Reproduce en todas sus consecuencias el principio que le ha sido confiado. Puede servir para probar la unidad de la esencia, el orden y las proporciones de la causa que el espíritu humano busca obstinadamente en todos los objetos de su atención; no solamente expresa las condiciones para nuestra satisfacción intelectual, sino que pertenecen al ser o a la verdad.

Textos sobre Matemáticas, Física y Sociedad

La analogía que se hace notar entre los diferentes objetos que conocemos no se limita a un solo punto. Se podría afirmar, por ejemplo, que toda la mecánica racional presenta con las ciencias políticas tales *semejanzas que los teoremas de los que se compone la primera se convierten, en relación con las segundas, en proposiciones en las que la verdad es indiscutible.*

Así el equilibrio entre varias fuerzas se produce porque la acción de una de ellas se supone de sentido contrario y de la misma potencia que las otras. Se componen y se descomponen; producen resistencias en una dirección que no es la de la acción directa.

Lo mismo tiene lugar con respecto a las fuerzas que nacen del estado de la sociedad. Si tienen la misma dirección, sentidos opuestos y la misma potencia, el estado de reposo se mantiene. Hay un arte de cambiar las direcciones en las que ellas actúan oponiéndoles obstáculos. El paralelogramo de las fuerzas podría servir de representación para ese tipo de dirección.

Cuando un sistema está en reposo, este estado puede ser debido a condiciones esencialmente diferentes: Si una causa exterior actúa sobre el sistema, o éste tiende a volver a su posición inicial, y el equilibrio se restablecerá por medio de oscilaciones cuya amplitud disminuye en cada instante; o bien el movimiento comunicado alejará cada vez más el sistema de su posición inicial y este sistema sólo volverá al estado de reposo después de llegar a una situación totalmente diferente. Los dos casos de equilibrio estable y equilibrio no estable se observan de igual manera en el estado social. Las causas propias de una agitación, *producen a veces ligeros movimiento que cesan ellos mismos y otras veces revoluciones completas, que sólo permiten que renazca el estado de paz después de grandes cambios en el orden social.*

Si queremos llevar la comparación más lejos, la analogía no se desmiente. El equilibrio estable tiene lugar cuando todos los puntos del sistema han alcanzado la situación que conviene a su tendencia natural. El estado de tranquilidad es duradero cuando todos los individuos que componen la sociedad están en la situación que conviene a su tendencia natural.

El equilibrio no es estable cuando está establecido sobre un punto que sólo puede subsistir el tiempo en el que esté protegido de todo choque. El menor desbloqueo devolverá a los puntos que lo componen la libertad de movimiento en la dirección de su tendencia natural, el estado inicial debe terminar por ser cambiado por un estado opuesto al primero; de manera que el movimiento no pueda terminar antes de que el nuevo estado, que no es otro que el que constituye el equilibrio estable, haya reemplazado al estado inicial.

Los estados gobernados sin consideración hacia las tendencias sociales conservan la tranquilidad interior durante el largo tiempo en el que ningún suceso venga a agitar las conciencias; pero la menor circunstancia es suficiente para poner en movimiento la sociedad hasta en sus fundamentos. Vemos entonces que *cada voluntad individual recibe un nuevo impulso, y los movimientos continúan hasta que el Estado, reestablecido sobre bases más sólidas, ofrece a cada uno las garantías de las que había sentido necesidad.*

... Hemos tratado la revolución que se ha producido en la manera de enfocar las ciencias físicas. Hemos comentado como los métodos geométricos han extendido su imperio llevando la certeza a regiones que fueron durante mucho tiempo el dominio de las ideas sistemáticas. Las ciencias morales y políticas no tardarán en sufrir la misma transformación. La opinión pública ya espera ese cambio y en adelante se cumplirá incluso para las doctrinas que hacen, de su realización por un entusiasmo irreflexivo, nuestra esperanza, pero los peligros de este entusiasmo erróneo no serán duraderos y, dentro de poco, el placer del que proviene este síntoma estará plenamente satisfecho. Los métodos existen; su empleo puede retrasarse por una dificultad nacida del amor propio; los hombres capaces de abordar estas cuestiones tienen miedo de no ser estimados por sus semejantes y de no tener jueces ilustrados dentro de las personas no iniciadas en las ciencias. Un obstáculo de este tipo no puede subsistir mucho tiempo y por eso podemos, desde el presente, considerar las ciencias morales y políticas dentro del dominio de las ciencias exactas.

4.5. Caroline Herschel. Mujeres astrónomas

1750 - 1848

Carolina Herschel es la astrónoma más famosa de todos los tiempos, pues además del trabajo que realizó a la sombra de su hermano, descubrió diez cometas y tres nebulosas, una de ellas la compañera de Andrómeda y realizó un catálogo con dos mil quinientas nebulosas por el que recibió la Medalla de Oro de la Real Sociedad de Astronomía. Compartió con Mary

Somerville el ser nombrada miembro honorario de La Academia Real de Astronomía.

Era una persona reservada, tímida y con un bajo nivel de autoestima que nunca le permitió valorar los logros que consiguió, porque fue más fuerte en ella la presión social que había en su época de menosprecio hacia las mujeres científicas. Subestimó tanto sus propias capacidades que destruyó gran parte de sus diarios y correspondencia, e incluso, es de suponer que si hubiera sabido que se iban a publicar, los que quedaron también los habría destruido. (Alic; 1991, 150)

4.5.1. Vida y obra de Carolina Herschel

Caroline Lucretia Herschel nació en Hanover, Alemania en 1750 aunque vivió una gran parte de su vida en Inglaterra (Lafortune; 1992, 57). Ha sido citada en círculos científicos más por su trabajo en astronomía que por el de matemática aunque tenía conocimientos en ambos dominios. Nació en una familia numerosa de músicos.

Su padre, Isaac Herschel, era un músico reputado de Hannover, interesado en la astronomía animaba a Carolina a adquirir conocimientos; pero su madre nunca le permitió perfeccionar su educación pues opinaba que sólo debía recibir la formación suficiente para ser una buena ama de casa y cuidar a sus hermanos. Vivió en una familia numerosa y tuvo una educación tradicional lo que probablemente contribuyó a que al darse cuenta de sus limitaciones y su baja formación formal tuviera poco aprecio por sus dotes personales. Nunca pudo vencer su poca inclinación por las tareas domésticas. Sin embargo cuidó a sus hermanos hasta extremos exagerados.

Carolina nos ha dejado muchos datos sobre su vida a pesar de que nunca tuvo intención de publicar ningún escrito personal ya que era extraordinariamente reservada. Destruyó gran parte de sus escritos y seguramente hubiera destruido toda su correspondencia y diarios si hubiese sospechado que iban a alcanzar la posteridad.

Dos de sus hermanos, William y Alexander, eran músicos en Inglaterra y cuando Carolina tenía veintidós años se fue con ellos para estudiar canto. Aunque tuvo éxito como soprano, la educación que había recibido la había hecho tan dependiente que sólo cantaba cuando la dirigía su hermano William (1738 - 1822). Cuando éste dejó la música para dedicarse a la astronomía, (fue nombrado astrónomo del rey) ella también dejó de cantar y de poderse ganar la vida de manera independiente para formarse en astronomía, y así comenzó su carrera científica en 1772 como ayudante de su hermano, a partir de las lecciones que éste que le daba, hasta que poco a poco se fue formando a sí misma, siendo una gran ayuda para él en sus trabajos sobre astronomía. Escribió:

> *"Sólo hice para mi hermano lo que hubiera hecho un cachorro bien adiestrado: es decir, hice lo que me mandaba. Yo era un simple instrumento que él tuvo que tomarse el trabajo de afilar"*

[Herschel; 1876, 142]

Esta colaboración permitió, por otra parte, que Carolina completara su educación. Estudió geometría, aprendió logaritmos, y conoció la relación entre el tiempo sideral y el solar. Era capaz de calcular fluxiones. Aprendió matemáticas ella sola.

Carolina llevaba una vida de muchos esfuerzos. Por la noche observaba el cielo con los telescopios; de día hacía cálculos y escribía trabajos científicos. Se ha comentado que desde 1775 a 1783 incluso daba de comer en la boca a su hermano y le leía novelas, mientras él pulía los espejos de sus telescopios.

Construyó con él telescopios más potentes y más grandes que permitieron estudiar astros más lejanos que la luna y los planetas, comenzando el estudio de los sistemas siderales. Construyeron un gran telescopio en el que cada uno de los espejos pesaba una tonelada y medía aproximadamente un metro de diámetro que aunque no cubrió las expectativas desde el punto de vista científico les dio fama y fue considerado como una de las maravillas del mundo. Su hermano descubrió el planeta Urano en 1781 y fue nombrado Astrónomo Real de Inglaterra. (Smith; 1996, 193).

En 1782, Cuando Carolina tenía treinta y dos años, William le dio un pequeño telescopio adecuado para seguir cometas en el cielo, el *barredor de cometas*, y así comenzó ella con sus propias observaciones, lo que le

permitió realizar un trabajo independiente cuando él no estaba. En 1783 Carolina descubrió las nebulosas Andrómeda y Cetus. De 1784 a 1787 construyeron un telescopio aún mayor, con espejos que pesaban una tonelada y medían aproximadamente un metro de diámetro. Carolina debía moler estiércol de caballo en un mortero y pasarlo por un colador para hacer los moldes. En el verano de 1783 medía estrellas dobles y determinaba sus posiciones. Al final de ese año descubrió varios grupos de estrellas y catorce nuevas nebulosas, pero no había descubierto ningún cometa.

En el verano de 1786, cuando Carolina tenía ya un pequeño observatorio propio, sabemos por su diario que el día 1 de agosto de 1786 descubrió su primer cometa y como William no estaba mandó un informe de su descubrimiento al secretario de la Real Sociedad y a un amigo indicándoles la descripción de la posición del cometa. Hasta este momento había descubierto nebulosas y grupos de estrellas pero nunca un cometa, que sin embargo seguirían siendo su especialidad, pues William nunca descubrió ninguno. Dijo en su diario:

> "*Hoy calculé 150 nebulosas. El objeto de anoche es un cometa*".

Y al estar ausente su hermano mandó un informe al doctor Charles Blagden, secretario de la Real Sociedad, dando cuenta de su descubrimiento:

> "*Encontré un objeto de color y brillantez muy semejantes a la nebulosa 27, con la diferencia, sin embargo, de que es redondo. Sospeché que era un cometa ...*"

En cartas e informes cuenta datos, ilustraciones y descripciones precisas de la forma y posición del cometa.

Una de sus grandes aportaciones fue un catálogo que contenía cálculos sobre dos mil quinientas nebulosas y estrellas. En 1787 el propio rey Jorge III le asignó un salario anual de 50 libras a Carolina como asistente del astrónomo de la cort. lo que le proporcionó cierta independencia económica..

> *"El primer dinero que recibí en toda mi vida me sentí con libertad de gastar a mi antojo"*

Un año más tarde su hermano se casó y dejó de vivir en la misma casa que él. Para ella por una parte fue muy duro, ya que sólo tenía acceso al observatorio de William cuando éste estaba de vacaciones, pero sin embargo fueron sus años más productivos porque, liberada de las tareas domesticas, pudo dedicarse plenamente a la astronomía y se convirtió en una celebridad científica, cuya compañía buscaban las princesas reales que se interesaban por esta ciencia, como su amiga la princesa Sophia Matilda.

Entre los años 1788 y 1798, observó y dibujó los planetas de Saturno y Urano. Antes del 1797 había descubierto siete cometas más. Era apreciada en toda Europa como astrónoma. Sus informes, con sus descubrimientos eran publicados. Colaboró con su hermano en el descubrimiento de mil estrellas dobles, demostrando que muchas eran sistemas binarios, lo que suponía la primera prueba de la existencia de la gravedad fuera del sistema solar.

En 1808, a los cincuenta y ocho años tuvo que cuidar de su hermano Dietrich durante cuatro años, por primera vez empezó a tener conflicto entre su educación, que le imponía un cuidado abnegado hacia sus hermanos, y sus estudios de astronomía que ocupaban parte del tiempo que tenía que dedicar a dormir. Como dejó ella escrito en sus notas, le robaba tiempo al sueño y a las comidas para poder atenderle.

A la muerte de William en 1822 Carolina continuó sola su trabajo. Aumentó su catálogo añadiendo sus descubrimientos y anotaciones en un segundo volumen. La última década de su vida la pasó en Hannover, en Alemania, donde a nadie le importaba la astronomía. En 1828 puso a punto el catálogo de nebulosas y estrellas descubiertas por su hermano, con las posiciones de más de 2.500 nebulosas, por el que recibió el la Medalla de Oro de la Real Sociedad de Astronomía. Fue su sobrino John Herschel, hijo de William y presidente de la Sociedad el que recibió la medalla en su nombre, ya que a pesar de todos los descubrimientos realizados, seguía pensando que era peligroso para las mujeres atraer demasiado la atención sobre ellas. También la nombraron miembro honorario de la Sociedad junto a Mary Fairfax Somerville (1780 - 1872), siendo las primeras mujeres en recibir ese honor. En 1838 la nombraron miembro de la Real Academia Irlandesa y en 1846, con 96 años, el rey de Prusia le concedió también la Medalla de Oro de las Ciencias. Esta lluvia de premios al final de su vida, de alguna forma, la enojaba. Era el reconocimiento a toda una vida de trabajo y descubrimientos, aunque según ella no le servían para nada, porque estaba medio ciega y no podía utilizarlos para proseguir sus investigaciones. Sin embargo y a pesar de su ceguera continuaba leyendo los trabajos científicos y siempre estuvo interesada por los últimos desarrollos de la astronomía. Escribió:

> *Pues sé demasiado bien lo peligroso que es para las mujeres*
> *el atraer en exceso la atención sobre ellas.*

[Herschel; 1876, 232]

Murió con 98 años. Hemos recogido su vida en esta historia de mujeres matemáticas, aunque no haya hecho ninguna contribución a las matemáticas puras, por haber hecho, sin embargo, grandes contribuciones en Astronomía, ciencia muy ligada al desarrollo de las matemáticas aplicadas. A pesar de que durante una gran parte de su vida fue la ayudante de su hermano, y que por su falta de autoestima y los prejuicios que en esta época había hacia las mujeres, sólo al final de su vida fue reconocido su trabajo, ha sido sin duda la mujer que más ha contribuido al avance de la astronomía de todos los tiempos.

Jamás nadie ha subestimado tanto sus capacidades. Vivió atrapada en la contradicción de su éxito y reconocimiento público y su baja autoestima y automenosprecio.

En 1982 el grupo dramático *Terre Ouwehand* escribió "*Voices from the Well*", una obra presentada al estilo de los coros griegos en la que aparecen caracterizadas mujeres famosas de la historia, la literatura y las artes. Una de ellas es Carolina y en uno de sus monólogos refleja su frustración:

> [como si respondiera una voz en off]
>
> *Sí ... sí, William, lo tengo todo listo. Sí, los dos telescopios están colocados exactamente en la dirección que determinamos después de cenar ... como siempre. Sí, querido hermano, a setenta grados está ya Sirio.*
>
> [para sí misma anotando en su diario]
>
> *Nota: para mañana, enviar a reparar el reloj de William.*
>
> [de nuevo, hacia la voz en off]
>
> *Sí el asiento adicional está ya aquí, junto a tu puesto, con el libro de registros encima.*
>
> [hacia el público]

De modo que yo puedo, a una orden tuya -en el tiempo de un segundo sideral- abandonar mis propias observaciones y volver a tu lado para anotar las tuyas ... como siempre.

[para sí misma, anotando en su diario]

Nota: para mañana; enviar el asiento adicional a tapizar. Decir al tapicero que no es urgente.

[hacia la voz en off]

No William, no sé donde está tu nueva lente de cincuenta. Efectivamente estaba ayer en su caja, pues allí la puse yo misma después de que tú te retiraste.

[hacia el público]

... después de haberla limpiado y bruñido, y haber vuelto a limpiarla y pulirla, como hago con todas tus lentes y todos tus cristales, y con todos tus espejos, reflectores, refractores, y detectores.

Esto, naturalmente, tras haber copiado a mano tus observaciones de la tarde, verificando minuciosamente todos los cálculos matemáticos, y escribir todo pulcra y cuidadosamente en tu voluminoso diario que seguramente será publicado ... que seguramente será considerado como el texto definitivo de la astronomía moderna.

[Smith; 1996, 193]

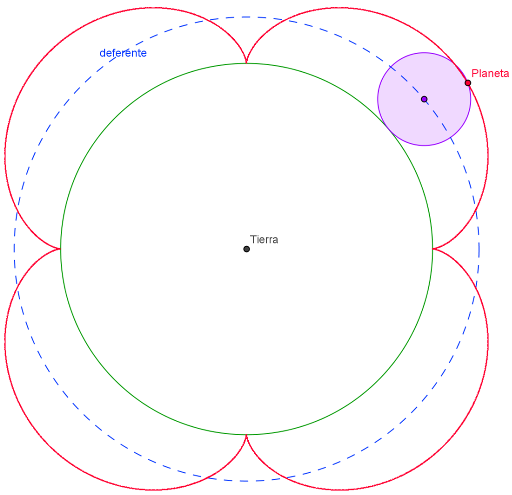
4.5.2. La astronomía y otras mujeres astrónomas

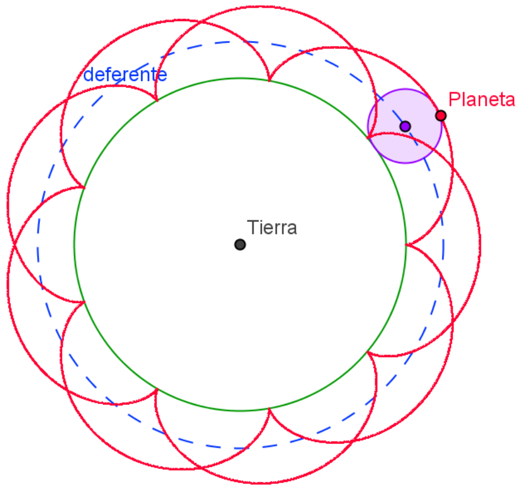
La astronomía es la más antigua de las ciencias, conocida desde la época de los babilonios. Los movimientos cíclicos del sol o de la luna y la contemplación del cielo estrellado, han impresionado a los hombres y mujeres de todos los tiempos que han buscado regularidades para explicar la armonía del universo.

Posiblemente fue Eudoxo, discípulo de Platón, quien propuso la primera representación científica para explicar los movimientos del sol, de la luna y de los cinco planetas conocidos Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, en la que los astros, regidos por la armonía de las leyes naturales, giraban alrededor de la Tierra con velocidad constante, en esferas concéntricas de distinto radio. Este modelo se denominó sistema de las esferas homocéntricas y estuvo vigente durante casi 2000 años ya que es el mismo que, más tarde, describió Aristóteles en su cosmología.

Sin embargo, dos observaciones que pueden realizarse a simple vista complicaban el modelo. Una era el cambio de brillo de los planetas, que es pequeño pero perceptible y la otra el comportamiento de Marte, Júpiter y Saturno que parece que al avanzar van trazando una especie de bucle respecto a las estrellas fijas. También presentaba problemas la explicación de las órbitas de Mercurio y Venus, ya que sólo se ven en el este cuando sale el sol y en el oeste cuando se pone.

Parece ser que fue Apolonio quien diseñó el modelo que intentaba solucionar estos problemas. Una alternativa a las esferas concéntricas era la teoría de los epiciclos que consiste en que el planeta a la vez que describe un círculo alrededor de la Tierra denominado deferente, gira alrededor de un círculo más pequeño denominado epiciclo, cuyo centro es un punto del deferente. De esta forma el movimiento del planeta es el resultado de dos movimientos el suyo propio en el epiciclo y el del centro del epiciclo en el círculo deferente. Por otra parte, este modelo es equivalente, y posiblemente Apolonio lo sabía, a lo que se denomina modelo excéntrico que consiste en considerar que el planeta se mueve alrededor de un círculo cuyo centro gira en torno a la Tierra en un círculo cuyo radio coincide con el del epiciclo. Este modelo, difundido en las obras de Tolomeo, explicaba la variación del brillo de los planetas y era capaz de predecir con más precisión la situación de éstos.





Estas teorías son geocéntricas, es decir suponen que la tierra es el centro del universo y causaron un grave impedimento al desarrollo de la astronomía, que encontraba muchas dificultades cuando se intentaba predecir la situación de los planetas. Sin embargo esta idea que fue admitida por la mayoría de los astrónomos y las astrónomas hasta el siglo XVI, cuando el clérigo polaco, doctor y astrónomo aficionado Nicolás Copérnico encontró que algunos filósofos griegos, entre ellos Hipatia, habían sugerido que los planetas se movían en órbitas alrededor del sol y adoptó esta idea que publicó en *De Revolutionibus Orbium Celestium* en 1543. Copérnico todavía utilizaba el epiciclo y el deferente para explicar el movimiento de los planetas, y también propuso la rotación diaria de la Tierra para explicar que el movimiento de las estrellas era solo aparente y éstas estaban fijas en una gran esfera celeste. Esta teoría en la que la Tierra, la Luna y los planetas giraban alrededor del sol se denominó heliocéntrica (con centro en el sol) y supuso una revolución social, ya que el pensamiento religioso de la época se sentía amenazado con esta idea.

A finales del siglo XVI el astrónomo danés Tycho Brahe y su hermana **Sophia Brahe** perfeccionaron los instrumentos y realizaron medidas más precisas de las posiciones de los planetas, que fueron determinantes para que el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, que había trabajado con ellos, al observar que estos datos no se ajustaban a la teoría geocéntrica, y tampoco se explicaban con la teoría de Copérnico, estableció que la Luna, la Tierra y los planetas se movían alrededor del sol, pero no en órbitas circulares sino en órbitas elípticas en las que el sol estaba en un foco. Además no se movían a una velocidad constante, sino variable, dependiendo de su distancia al sol, de forma que las áreas barridas por el radio vector radio-sol para dos puntos de la órbita en una unidad de tiempo era constante. De este modo cuando el planeta estaba más cerca del sol su velocidad era menor y cuando estaba más lejos esta velocidad aumentaba.

En los siglos XVII y VXIII, debido a la utilización del telescopio, la astronomía experimentó un importante desarrollo, en el que fue decisiva la aportación que realizaron las mujeres.

En el siglo XIX se incorpora la fotografía y la espectroscopia a la investigación astronómica que, en el siglo XX se convirtió en astrofísica por la utilización de los rayos X y γ. En la actualidad nuevos avances tecnológicos como el radar, los sistemas informáticos, los vuelos espaciales, las ondas planetarias, y los observatorios que orbitan la tierra, han revolucionado esta ciencia.

La mayoría de las astrónomas de los siglos XVII y XVIII accedieron a esta ciencia como ayudantes de sus hermanos, padres o maridos, y como el trabajo lo realizaban en casa, les resultó más fácil triunfar en esta profesión que no les impedía realizar las tareas domésticas, cuidar de niños y enfermos y demás funciones que la sociedad les tenía asignadas. Sin embargo, las observaciones astronómicas eran un trabajo muy duro que exigía mucha paciencia y estar largos espacios de tiempo a la intemperie, repitiendo meticulosamente medidas, para paliar la poca precisión de los instrumentos de la época, así como realizar muchos cálculos antes de poder confirmar un descubrimiento.

Pero muchas veces sus importantes aportaciones quedaron enmascaradas por las del hombre con el que trabajaron, y sólo en casos muy concretos o cuando al morir éstos, ellas siguieron trabajando solas, se les reconoció la autoría del trabajo realizado. Entre las astrónomas más importantes de esta época tenemos a **Sophia Brahe** (1556-1643), mencionada anteriormente, que trabajó con su hermano Tycho Brahe y a la que se le atribuye la observación del eclipse lunar de diciembre de 1573; **María Cunitz** (1610-1664) que encontró algunos errores en las tablas astronómicas de Kepler; **Elisabetha Hevelius** (1647-1693) que trabajó con su marido Johannes Hevelius, treinta y seis años mayor que ella y después de la muerte de éste publicó muchos trabajos, entre ellos un catálogo con mil quinientas sesenta y cuatro estrellas con su posición y magnitudes; **María Winkelman** (1670-1720) que se casó con Gottfried Kirch, treinta y un años mayor que ella, realizó los cálculos necesarios para confeccionar el calendario, descubrió un cometa, y se han podido identificar dos publicaciones suyas, pero a la muerte de su marido le fue denegada la plaza que él tenía en la Academia de Ciencias de Berlín y como nadie ponía en duda su capacidad profesional para ocupar este puesto, el argumento que soportó esta decisión de los miembros de la Academia es que no era un ejemplo para otras mujeres; **Nicole Lepaute** (1723-1788) trabajó con su esposo y calculó la tabla de las oscilaciones de los péndulos, que fue publicada en el *Traité d´horlogerie* como obra de su marido.

4.6. María Gaetana Agnesi

(1718 - 1799)

María Gaetana Agnesi es una matemática italiana cuya obra más importante, *Instituciones Analíticas*, fue traducida a varios idiomas y utilizada para aprender Matemáticas durante más de cincuenta años en muchos países de Europa. En ella trataba con sencillez y claridad temas, tan novedosos entonces, como el Cálculo Diferencial e Integral. Al final de su vida era famosa en toda Europa como una de las mujeres de ciencia más capaces del siglo XVIII. Un cráter de Venus lleva su nombre en su honor. En la Biblioteca Ambrosiana de Milán se guardan sus obras inéditas que ocupan veinticinco volúmenes.

Durante el siglo XVIII la Ilustración impulsó el *sapere aude* (atreverse a saber) entre las clases acomodadas, aunque con limitaciones entre las mujeres. La Ilustración no fue un movimiento homogéneo en toda Europa y en lo que hoy es Italia tuvo manifestaciones diversas según cada ciudad estado. No obstante, en los siglos XVII y XVIII, hubo en ese país un resurgimiento de las mujeres de ciencia: Elena Cornaro Piscopia fue profesora de Matemáticas en 1678 en la universidad de Padua; Diamente Medaglia escribió una disertación sobre la importancia del estudio de las Matemáticas para las mujeres; María Angela Ardinghelli estudió Matemáticas y Física en Nápoles; y Laura María Catarina Bassi se doctoró en filosofía en la universidad de Bolonia en 1733, donde ocupó una cátedra de física y publicó trabajos sobre física cartesiana y newtoniana. Pero la que alcanzó mayor fama fue María Gaetana Agnesi.

4.6.1. Su vida

María Gaetana Agnesi nació en Milán el 16 de mayo de 1718, hija de Don Pietro Agnesi Mariami y de Anna Brivio. En su país, al contrario que en otros países europeos, sí se aceptaba que las mujeres recibieran educación, y ella tuvo una esmerada formación. Fue una niña precoz y dotada, que con cinco años hablaba francés, y con nueve, conocía siete lenguas: italiano, latín, francés, griego, hebreo, alemán y español, por lo que recibió el apelativo de "*Oráculo de siete idiomas*".

Su padre, un hombre de talento, rico y cultivado era, según unos libros, profesor en la Universidad de Bolonia, aunque según otras fuentes, esto no es correcto ya que se dedicaba al comercio de la seda con lo que había conseguido una gran fortuna. Tuvo 21 hijos e hijas, siendo María, la mayor. D. Pietro se propuso dar a sus hijos e hijas la mejor educación, incluyendo una formación científica. Pudo proporcionarles tutores de la más alta cualificación. María fue afortunada pues dirigieron sus estudios: Carlo Belloni, Francesco Manara, Michele Casati y el padre benedictino Ramiro Rampinelli, profesor de Universidad, que cuando llegó a Milán frecuentó la casa de los Agnesi. Con la ayuda de Rampinelli estudió el texto de Reyneau “Analyse demontrée” (1708). Estudió las matemáticas de Fermat, Descartes, Newton, Leibniz, Euler y de los Bernoulli.

A Don Pietro le gustaba mostrar el talento de sus hijos en las reuniones que organizaba en sus salones. Muy pronto los sabios y eruditos y los intelectuales locales, empezaron a asistir al salón de los Agnesi para oír las disertaciones de María sobre temas filosóficos, científicos y matemáticos. A la edad de nueve años María estuvo durante una hora, ante una asamblea culta hablando en latín sobre el derecho de la mujer a estudiar ciencias y sobre cómo las artes liberales no eran contrarias al sexo femenino. María podía disertar y discutir sobre muchos temas y en diferentes lenguas. En los intermedios, una de sus hermanas pequeñas, María Teresa, que componía música, (compuso dos óperas), interpretaba con el arpa. Un viajero francés, De Bosses, describió así una de esas sesiones que se celebró el 16 de julio de 1739:

"En la habitación había unas treinta personas de todos los países de Europa, colocados en círculo, y María Agnesi, sola, con su hermana pequeña, sentada en un sofá. Es una joven de unos veinte años, ni fea ni bonita, con maneras sencillas, dulces y afables... El conde Belloni ... hizo una hermosa arenga en latín a la dama, con la formalidad de una declamación universitaria. Ella contestó con presteza y habilidad en el mismo idioma; luego discutieron, todavía en el mismo idioma, sobre los orígenes de las fuentes y sobre las causas del flujo y reflujo que en algunas de ellas se observa, similar a las mareas del mar. Habló como un ángel sobre este tema; yo nunca lo había oído tratar de una manera que me produjera mayor satisfacción. Luego el conde Belloni quiso que yo discutiera con ella sobre cualquier otro tema elegido por mi, con tal que estuviera relacionado con la Matemática o la Filosofía Natural ... y discutimos sobre la propagación de la luz y los colores del prisma. Habló sobre la filosofía de Newton y es maravilloso ver a una persona de su edad conversando sobre temas tan abstractos. Pero todavía estoy más asombrado de sus conocimientos, y quizás más sorprendido de oírla hablar en latín con tanto rigor, naturalidad y precisión. Loppin conversó luego con ella sobre los cuerpos transparentes, y sobre las curvas geométricas tema, este último, del que no entendí una palabra... Después la conversación se hizo general, hablándole cada uno en su propio idioma, y contestando ella en ese mismo idioma: pues su conocimiento de las lenguas es prodigioso. Luego me dijo que lamentaba que la

conversación en esa visita hubiera adoptado la forma de la defensa de una tesis, y que a ella no le agradaba hablar en público sobre esos temas, en los que, por cada persona que se divertía, veinte se aburrían".

[O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (2003): María Gaetana Agnesi. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Agnesi.html]

A los 17 años criticó, de forma pertinente, el tratado sobre las cónicas (*Traite analytique des section coniques*) de Guillaume François de l'Hôpital, trabajo que nunca fue publicado pero que circuló ampliamente en forma privada.

Se comentaba de ella que tenía una concentración extraordinaria, así como diversas anécdotas como ésta: Parece ser que María era sonámbula, y en ocasiones, después de trabajar intensamente, exhausta, se iba a dormir dejando un problema sin resolver sobre el escritorio. A la mañana siguiente, al despertar, veía que lo había resuelto mientras dormía. Había escrito la solución completa y había vuelto a la cama.

María nunca se casó. En 1739, a los 21 años, quiso entrar en un convento. Ante la oposición de su padre, no lo hizo, pero rechazó toda vida pública, llevando una existencia retirada y piadosa. A instancias de su padre decidió quedarse en casa y consagrarse a las Matemáticas. El álgebra y la geometría, declaraba, son las únicas partes del pensamiento donde reina la paz. Concentró sus esfuerzos en estudiar libros religiosos y de Matemáticas.

Se considera a María la primera profesora de universidad ya que en 1748 se encargó de los cursos de su padre en la universidad y dos años más tarde, en otoño de 1750, después de publicar su obra de las *Instituciones analíticas*, el Papa le dio el nombramiento para ocupar la cátedra de matemáticas superiores y filosofía natural de la Universidad de Bolonia. (Bolonia pertenecía en esa época a los Estados Pontificios). El Papa escribió a Agnesi el 2 de septiembre de 1750:

> *"En tiempos pasados Bolonia ha tenido en puestos públicos a personas de vuestro sexo. Nos parece adecuado continuar con esa honorable tradición". "Hemos decidido que se le adjudique la bien conocida cátedra de matemáticas...".*

Otros autores disienten, diciendo que su padre no era profesor de Universidad sino comerciante de sedas, y que, aunque ella obtuvo dicho nombramiento honorífico, nunca enseñó en la universidad. Dicen que es posible que Agnesi ni aceptara, ni rechazara este ofrecimiento pues cuando:

> *"en octubre recibió el decreto papal confirmando su nombramiento, ya llevaba una vida muy devota y retirada. Aunque su nombre permaneció en el registro de la universidad durante cuarenta y cinco años, nunca fue a Bolonia"*

[O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (2003): María Gaetana Agnesi. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Agnesi.html]

De esta forma se explica la confusión que aparece en muchos informes sobre la vida de Agnesi y la cátedra de matemática.

Agnesi fue presentada al director de la Academia de Bolonia y a otros tres profesores, siendo ella nombrada miembro de la Academia de Ciencias de Bolonia.

A la muerte de su padre, cuando tenía 34 años, renunció a las Matemáticas, y consagró sus esfuerzos a la Teología, a socorrer a pobres e indigentes y a educar a sus hermanos y hermanas. Dedicó por completo su vida a hacer obras de caridad viviendo en total pobreza, ya que dejó toda su fortuna a los pobres. Dirigió durante los últimos 28 años de su vida el hospicio de Trivulzio. Cuando en 1762 le pidieron que reseñara un interesante nuevo trabajo del entonces joven matemático francés Lagrange sobre el cálculo de variaciones, contestó que tales asuntos ya no ocupaban su atención. Murió el 9 de enero de 1799.

4.6.2. Su obra

Su carrera como matemática ocupó 20 de los 81 años de su vida. En 1738 publicó un libro, escrito en latín, con una colección completa de **190** trabajos sobre ciencias naturales y filosofía titulada ***Proposiciones Filosóficas*** donde se recogen exposiciones sobre lógica, mecánica, hidráulica, elasticidad, química, botánica, zoología, mineralogía, astronomía, filosofía, la mecánica celeste y la teoría newtoniana sobre la gravitación universal.

Rampinelli animó a María a trabajar en un libro sobre cálculo diferencial. Escribió la obra en italiano como un libro de texto. En 1748 aparecieron sus ***Instituzioni Analitiche***, fruto de diez años de trabajo, que había comenzado con 20 años y terminó antes de cumplir los 30. Fue su principal obra. Era una recopilación sistemática, en dos volúmenes y un total de unas mil páginas. El primer tomo trataba del conocimiento contemporáneo en álgebra y geometría analítica, y el segundo tomo de los nuevos conocimientos en cálculo diferencial e integral, la materia que estaba estudiándose en aquella época. Fue el primer texto para estudiar el cálculo diferencial e integral, en el que se trataban además las series infinitas y las ecuaciones diferenciales. Incluía muchos ejemplos y problemas cuidadosamente seleccionados para ilustrar las ideas, métodos originales y generalizaciones. Lo había comenzado como distracción, continuado como libro de estudio para sus hermanos más jóvenes y había terminado convirtiéndose en una publicación importante.

Portada de las Instituzioni Analitiche de María Gaetana Agnesi.

Agnesi, con el dinero de su padre, dirigió la impresión del libro en su propia casa, para poder supervisar íntegramente la operación. Rampinelli le sugirió que Riccati le podría ofrecer consejo y contactó con él. El 20 de julio de 1745 María escribió a Riccati, que accedió a leer el borrador final del libro y hacer sugerencias. Riccati contestó rápidamente a esa primera carta de Agnesi y prometió pasar el texto a sus dos hijos, Vincenzo Riccati y Giordano Riccati, que también podían comentar el trabajo. Una vez que Agnesi recibió los comentarios de Riccati de la primera parte del texto, comenzó a organizar la impresión, mientras las otras partes eran enviadas. En 1747 le envió la última parte del libro. El primer volumen del *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana* fue publicado en 1748, mientras Agnesi continuaba escribiendo a Riccati sobre el material del segundo volumen que fue publicado al año siguiente. La acogida fue espectacular:

El informe de una comisión de la Academia de Ciencias de París comentaba:

> *"Esta obra se caracteriza por una cuidadosa organización, su claridad y su precisión. No existe ningún libro, en ninguna otra lengua, que permita al lector penetrar tan profundamente, o tan rápidamente en los conceptos fundamentales del Análisis. Consideramos este Tratado como la obra más completa y la mejor escrita en su género"*.

[TEE, G. J. (1983): The Pioneering Women Mathematicians. The Mathematical Intelligencer, Vol. 5, nº 4, pp. 27 – 36.]

Dicha comisión, que decidió la traducción y la publicación de esa obra al francés, estaba formada por D'Alembert, Condorcet y Vandermonde [3]. Fue traducida a varios idiomas, y utilizada como manual en las universidades de distintos países, siendo, incluso cincuenta años más tarde, el texto matemático más completo.

El secretario del comité de la Academia Francesa, aunque le negó el ingreso, escribió:

"Permítame, señorita, sumar mi homenaje personal a los aplausos de la Academia entera... No conozco ningún trabajo de este tipo que sea más claro, más metódico o más completo que sus Instituciones analíticas. No hay ninguno en ningún idioma que pueda guiar de manera más segura, conducir con mayor rapidez y llevar más adelante a quienes desean avanzar en las ciencias matemáticas. Admiro en particular el arte con el que reúne usted bajo métodos uniformes las distintas conclusiones dispersas en las obras de los geómetras, y a las que han llegado por métodos diferentes".

[ALIC, M. (1991): El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX. Siglo veintiuno editores. Madrid. pp. 162 - 165.]

Dedicó el libro a la emperatriz María Teresa de Austria, bajo cuyo reinado estaba Milán, por lo que la emperatriz la recompensó. En la dedicatoria María decía:

"Si en algún momento puede excusarse la temeridad de una mujer, que se atreve a aspirar a las sublimidades de una ciencia que no conoce límites, ni siquiera los de la infinitud misma, ciertamente debería ser en este período, en el que reina una mujer, ... En esta época ... toda mujer debería esforzarse, y empeñarse en promover la gloria de su sexo".

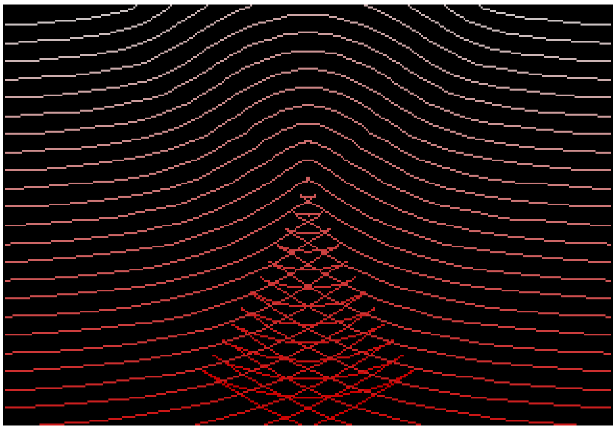
El papa Benedito XIV escribió a Agnesi diciéndole que él había estudiado matemáticas en su juventud por lo que podía apreciar que esta obra otorgaría crédito al país y a la Academia de Bolonia. Concedió a Agnesi una medalla de oro y una corona de piedras preciosas.

María, como hemos visto, fue reconocida como matemática en su época, y sin embargo su reputación histórica fue distorsionada por el hecho de que, en sus Instituzioni Analitiche, trabajara con la "***curva de Agnesi***" o curva sinusoidal versa, "*versiera*" en italiano, que significa "virar", "girar", que se tradujo al inglés, por un error del traductor, John Colson, como la "bruja de Agnesi". Colson, profesor de Cambridge, tan excelente juzgaba la obra.

> *"encontró este trabajo tan excelente que, a una edad avanzada, decidió aprender italiano con el único fin de traducir ese libro y que la juventud inglesa pudiera beneficiarse de él, como lo hacen los jóvenes de Italia"*

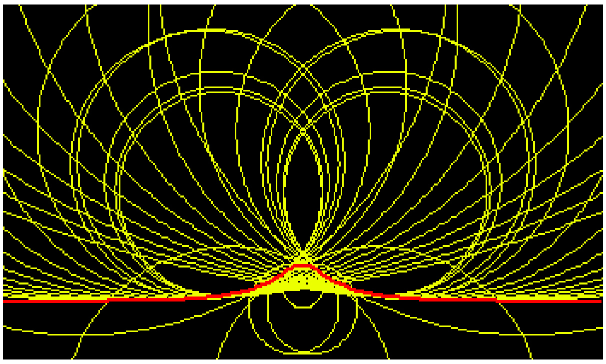
[O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (2003): María Gaetana Agnesi. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Agnesi.html]

Colson tradujo las Instituciones al inglés hacia 1760, el año de su muerte. Confundió el término "*versiera*" por "*avversiera*" que significa bruja, hechicera, ("*witch*"). Posteriores traducciones y ediciones han mantenido el término. Quizás con mala intención o pretendiendo hacer un chiste sin gracia, ha quedado así inmortalizada en los libros de historia de la matemática.



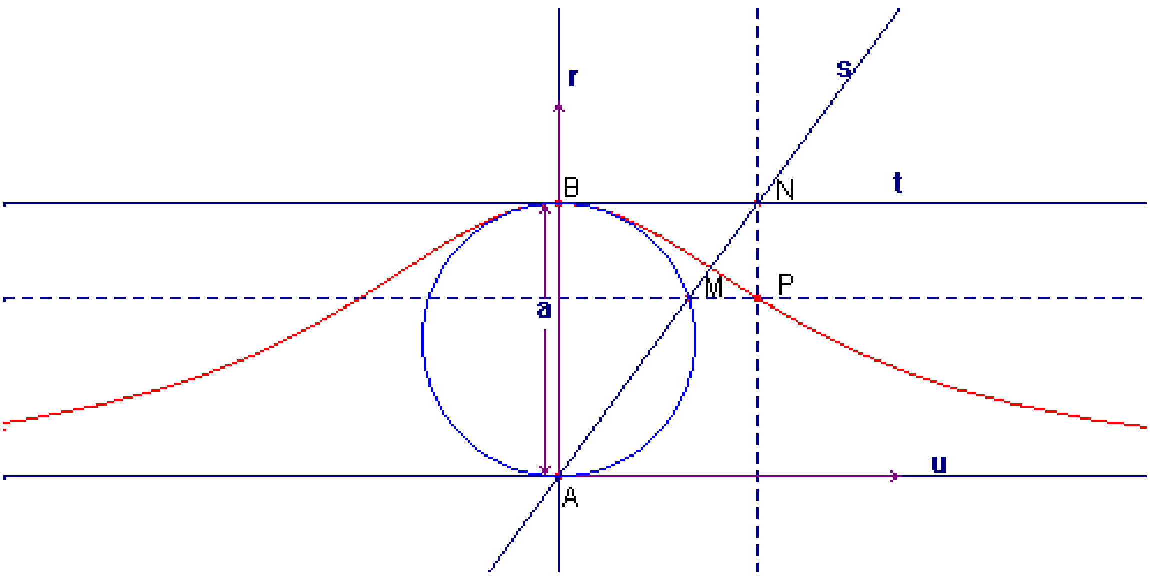
Esta curva, fue discutida por Fermat en 1703 y se ha establecido recientemente que es una aproximación de la distribución del espectro de la energía de los rayos X y de los rayos ópticos, así como de la potencia disipada en los circuitos de alta frecuencia de resonancia.

4.6.3. La curva de Agnesi



Para definir la curva se considera la circunferencia de centro (0, *a*/2) y radio *a*/2. Sea *AB* = *a* un diámetro de dicha circunferencia, *r* la recta que contiene al diámetro *AB*, u la recta perpendicular a *r* que pasa por *A*, *t* la recta perpendicular a *r* que pasa por *B*, *M* un punto que recorre la circunferencia y *s* la recta que *M*. Sea *N* el punto de intersección de las rectas *s* y *t*. Entonces:

La curva de Agnesi es el lugar geométrico de los puntos P que están a igual distancia de la recta u que el punto M, y a la misma distancia de la recta r que el punto N, cuando M recorre la circunferencia.



Por tanto, si P tiene como coordenadas $P(x, y)$, su abscisa x coincide con la del punto N (x, a) y su ordenada con la del punto M. Teniendo esto en cuenta es sencillo deducir que la ecuación cartesiana de la curva es:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

Es una función par, creciente para $x<0$ y decreciente para $x>0$, por lo que tiene un máximo en el punto $(0, a)$. Tiene a $y = 0$ como asíntota horizontal. Es una curva de longitud infinita, pero cuya área bajo la curva es finita y vale $a2\pi$.

Ecuaciones paramétricas:

Si α es el ángulo MAB, entonces $x = a \cdot tg\alpha$ e $y = AM \cdot cos\alpha$, luego $y^2 = AM^2 \cdot cos2\alpha$. Aplicando el teorema del cateto al triángulo rectángulo AMB

se tiene que $AM^2 = ay$, por tanto $y^2 = ay \cdot cos2\alpha$, y si y es distinto de cero: $y = a \cdot cos2\alpha$. (Para $y = 0$, como $cos\alpha = 0$, también se verifica la ecuación). Luego las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = a \cdot tg\alpha \\ y = a \cdot \cos^2 \alpha \end{cases}$$

Llamando $t = tg\alpha$ se obtiene:

$$x = at;\ y = a/(1+t^2).$$

4.7. Ada Lovelace. Las mujeres y la informática (1815-1852)

Ada Lovelace, hija de Lord Byron, murió muy joven y a pesar de ello es considerada la primera mujer informática, pues trabajó en la máquina analítica o primer ordenador general, traduciendo y explicando la obra de Babbage, añadiendo comentarios y anotaciones más extensos que el propio texto.

4.7.1. Su época

Interesantes acontecimientos se sucedieron en el siglo XIX, tanto en el campo de la ciencia como en el de las ideas. Al repasar esta etapa de continuos cambios y avances, existe una marcada diferencia entre los primeros y los últimos cincuenta años de este siglo.

La corta vida de Ada Lovelace transcurrió en la primera mitad de este siglo, bajo el influjo de las ideas clásicas de la sociedad victoriana muy arraigada en la alta clase social a la que ella pertenecía, pero impregnadas al tiempo del ideal romántico que hombres como su padre llevaron hasta las últimas consecuencias. Esto privó a Ada, tal vez, del disfrute de los momentos más apasionantes del siglo.

La ciencia se abría paso cada vez con más fuerza en los ambientes cultos de las principales ciudades europeas y norteamericanas. La presentación de un experimento científico se convertía en un acontecimiento social, con la participación de miembros de la nobleza y de la alta burguesía no ya como espectadores o simples mecenas sino como observadores interesados en conocer y controlar los avances que se iban realizando.

El saber científico ya no era una referencia de prestigio social sino la manera de no quedarse al margen del progreso, auténtica fuente de riqueza y por tanto de poder.

Esta actitud tan abierta hacia la formación científica hizo posible que mujeres de elevada posición social pudieran dedicarse al estudio, consiguiendo gran notoriedad y siendo reconocidas por sus contemporáneos.

No obstante, se trata de casos excepcionales en los que, como en el de Ada, debían darse circunstancias añadidas que favorecieran sus posibilidades de desarrollar y demostrar su valía. Las mujeres seguían siendo para los pensadores de la época personas cuyos derechos les eran concedidos a partir de la actitud favorable de los hombres. Los románticos no mejoraron la imagen tan sexista que habían manifestado los ilustrados. Hegel, por ejemplo, afirmaba que la diferencia entre hombre y mujer era similar a la de un animal y una planta. A esta desafortunada metáfora acompañaba toda una disertación sobre las capacidades que consideraba propias de las mujeres, vinculadas a la idea del predominio del sentimiento sobre la razón. Esta tesis, que en un principio provocaba cierta hilaridad, ha sido mantenida por célebres pensadores, sociólogos y psicólogos hasta hoy mismo y se percibe de forma subliminal en multitud de discursos científicos. La medicina y sus aspectos psicosomáticos son un campo abonado para caer en este tipo de análisis con el fin de explicar lo que la analítica convencional no resuelve. Hegel, cuyas ideas filosóficas inspiraron a multitud de artistas y pensadores de su época, se atrevían incluso a afirmar que si las mujeres estuvieran al frente del gobierno el Estado estaría en peligro, ya que no tomarían decisiones en función de la demanda del público sino siguiendo inclinaciones y opiniones casuales.

Las mujeres estaban aún lejos de conseguir un trato igualitario. Sin derecho al voto, sin autonomía económica, y con unas pautas sociales marcadas de acuerdo a los principios morales de los que se les hacía depositarias.

Sin embargo, comenzaban a convivir con el progreso desde un nuevo protagonismo. Las obreras de las fábricas percibían a diario la desigualdad salarial, las agotadoras jornadas de trabajo, la imposibilidad de criar a sus hijos e hijas en unas condiciones dignas que les garantizaran su salud y su alimentación. Y este sentimiento profundo de injusticia lo percibían de forma colectiva, rompiendo así el tradicional aislamiento al que siempre se las había sometido.

Es justo reconocer que las ideas socialistas emergentes colaboraron en la lucha por conseguir el reconocimiento de los derechos fundamentales de las mujeres. En Inglaterra, el filósofo John Stuart Mill defendió en el Parlamento la necesidad de un cambio en la situación de inferioridad política y civil de las mujeres. Algunas de las cuestiones que entonces empezaban a debatirse han tardado casi cien años en hacerse realidad, y muchas mujeres han debido dedicarse por entero a que se consiguiera lo que hoy nos parece evidente.

Los crecientes beneficios industriales potenciaron el auge de las ciencias físicas, matemáticas, químicas, médicas etc. a fin de mejorar su incipiente y rudimentaria tecnología. Al mismo tiempo los/as matemáticos/as se sentían cada vez más interesados por desarrollar trabajos matemáticos abstractos vinculados a fenómenos físicos de notable complejidad. Aún no se tenía una idea de diversificación disciplinar como la actual pero se tendía cada vez más a la especialización que la industria demandaba.

En este clima todavía incipiente de cambio, mezcla de confusión y esperanza, nace Ada Lovelace.

4.7.2. Vida y obra de Ada Lovelace

Augusta Ada King, Countess of Lovelace, nacida Augusta Ada Byron, 10 de diciembre de 1815 en Londres, hija del prestigioso poeta Lord Byron, conocida habitualmente como Ada Lovelace, fue una matemática británica. Describió la máquina analítica de Charles Babbage, y es considerada como la primera programadora, desde que escribió la manipulación de los símbolos, de acuerdo a las normas para una máquina de Charles Babbage que aún no había sido construida. Su contribución más notable consistió en elaborar un método para calcular los números de Bernoulli en la máquina analítica de Charles Babbage, matemático con el que colaboraba en 1842. En homenaje a ella fue puesto el nombre al lenguaje de programación Ada.

Su vida está marcada, sobre todo por dos factores: la personalidad estricta y extremadamente puritana de su madre y el ambiente culto y refinado del que formó parte.

El día dos de enero de 1815 el poeta Lord Byron se casó con Ana Isabel Milbanke, una mujer tremendamente piadosa y virtuosa, con una buena formación en matemáticas y en astronomía, llamada por Byron "*su princesa del paralelogramo*". (Tee; 1983, 27). Esto posibilitó que Ada fuera educada en estas disciplinas por los mejores tutores conocidos de Londres.

Ada vivió prácticamente toda su vida condicionada por los dictados de su madre, Ana Isabel Milbanke, Baronesa de Wentworth también conocida como Lady Byron cuyo matrimonio con Lord Byron apenas duró un año. Su separación, El 15 de enero de 1816, al mes del nacimiento de Ada, supuso un gran escándalo motivando la salida de su padre de Gran Bretaña a la que nunca regresó. Prácticamente no conoció a su hija pero le dedicó bellos poemas. Cuando Ada tenía un año su padre Lord Byron publicó *Canto the Third de su Childe Harold's Pilgrimage*, que comienza con las impactantes líneas:

¡Es vuestro rostro el de vuestra madre, hija mía

ADA! Única hija de mi hogar y mi corazón?

La última vez que vi vuestros jóvenes ojos azules, sonreían

entonces nos despedimos, no como lo hacemos ahora,

sino con una esperanza.

(Is thy face thy mother's, my fair child!
ADA! sole daugther of my house and heart?
When last saw thy young blue eyes they smiled,
And then we parted, - not as now we part,
But with a hope.)

A lo largo de los ocho años de exilio, Lord Byron mostró gran interés por Ada, escribiendo frecuentemente a su esposa y preguntando por ella, y cuando murió en Grecia, al parecer, sus últimas palabras antes de morir fueron para ella.

De hecho nunca tuvo relación alguna con su padre que abandonó Inglaterra para siempre en 1816 con la finalidad de escapar de la censura de la sociedad Británica que le acusaba de sodomía e incesto debido a sus continuos escándalos de carácter sexual. Lord Byron murió en Grecia en 1823 sin conocer a Ada.

Lady Byron estaba obsesionada con que su hija no heredara nada de su padre y educó a Ada profundamente en las matemáticas y la música intentando de esa manera alimentar su parte racional y objetiva para alejarla de la parte emocional y subjetiva que supuestamente, alimentan la poesía. Aún así, su vida fue una constante lucha entre el raciocinio y la emoción, el objetivismo y el subjetivismo, la poesía y la matemática.

Desde la infancia manifestó una salud precaria. A la edad de 14 años, sus piernas se quedaron paralizadas y durante algunos años, alternó el uso de muletas con el de un bastón de paseo, pero con su fuerza de voluntad consiguió vencer la enfermedad hasta el punto de convertirse en una espléndida amazona.

Con diecisiete años conoció a Charles Babbage y tanto ella como su madre quedaron impresionadas por su *Máquina de diferencias finitas*, que deseaba generalizar en una *máquina analítica* o computadora general.

Ada conocía a Mary Somerville y la admiraba profundamente, manteniendo una animada correspondencia en la que le hace consultas sobre dudas acerca de demostraciones matemáticas. Mary animó a la joven Ada a continuar sus estudios de matemáticas y, siguiendo sus consejos, decidió convertirse en una científica famosa. Posteriormente Mary fue su mentora.

Dos años más tarde, de acuerdo con lo que las costumbres aconsejaban, Ada se casó con el Honorable William King, octavo Lord King y primer Earl de Lovelace. Era un hombre amable pero débil, de menor nivel intelectual que ella y orgulloso del saber científico de su mujer, pero dominado completamente por su madre. El sucesivo nacimiento de sus tres hijos impidió a Ada proseguir sus estudios hasta que, a los pocos meses de tener a su tercer hijo se decidió a restablecer el contacto con Babbage, rogándole que le proporcionara un profesor con quien aprender matemáticas. Estaba decidida a no abandonar su verdadera pasión: el estudio de las matemáticas. Finalmente él la aceptó como discípula y se convirtió en un amigo de la familia.

Cuando tuvo en sus manos el reportaje, publicado en Francia, del ingeniero militar italiano L. F. Menabrea, sobre la máquina analítica de Babbage, se decidió a traducirlo.

Babbage habla con admiración de este trabajo, sugiriendo a Ada que, ya que el reportaje gira en torno a un tema que ella domina, debería añadir las notas sobre las investigaciones que ella misma ha realizado. A este respecto, Babbage escribe en sus memorias:

> *"La Condesa de Lovelace me ha informado que ha traducido la memoria de Menabrea. Al preguntarle la razón por la cual no ha escrito ella un artículo original sobre un tema que conoce profundamente me ha contestado que porque la idea no es original de ella. Entonces he sugerido que añada algunas notas a la memoria de Menabrea; una idea que fue inmediatamente adoptada.*

Hemos discutido conjuntamente varias ilustraciones que podrían ser introducidas. He sugerido algunas, pero la selección ha sido enteramente de ella. También el trabajo algebraico sobre diferentes problemas, excepto, los relativos a los números de Bernouilli, que yo había ofrecido hacer para librar de este trabajo a Lady Lovelace. Me los envió corregidos, habiendo detectado una falta grave que yo había hecho en el proceso.

Las notas de la Condesa de Lovelace amplían unas tres veces la longitud de la memoria original ya que su autora conoce a la perfección casi todas las cuestiones difíciles y abstractas relativas a este tema. Estas dos memorias conjuntamente proporcionan, a aquellos que son capaces de comprender el razonamiento, una demostración completa de que todos los desarrollos y operaciones del análisis son ahora posibles de ser ejecutados por la máquina".

[Tee; 1983]

Sugirió el uso de tarjetas perforadas como método de entrada de información e instrucciones a la máquina analítica. Además introdujo una notación para escribir programas, principalmente basada en el dominio que Ada tenía sobre el texto de Luigi Menabrea de 1842 (que comentó personalmente completándolo con anotaciones que son más extensas que el texto mismo) sobre el funcionamiento del telar de Jacquard así como de la máquina analítica de Babbage. Una idea interesante, que demuestra la capacidad de Ada para conectar el mundo cotidiano con el trabajo científico, surge de la observación de los brocados en los tejidos diseñados por Jackard con el fin de regular su fabricación. Advierte la posibilidad de utilizar estos diseños hechos en tarjetas perforadas, logrando para la máquina la combinación entre sí de símbolos generales en sucesiones de variedad y extensión ilimitados.

Es reseñable además su mención sobre la existencia de ceros o estado neutro en las tarjetas perforadas siendo que las tarjetas representaban para la máquina de Babbage números decimales y no binarios (8 perforaciones equivaldrían entonces a 8 unidades).

Se establece un eslabón entre las operaciones materiales y los procesos mentales abstractos matemáticos. Ada escribe al respecto:

> *"Se desarrolla un lenguaje nuevo, amplio y poderoso, para su empleo futuro en el análisis, cuyas verdades se podrán manejar de modo que su aplicación sea más práctica y precisa para la humanidad de lo que hasta ahora han hecho las medidas a nuestro alcance"*

Veamos lo que escribió Ada a propósito de la máquina analítica:

> *"La característica que distingue a la máquina analítica, es la inclusión en ella del principio que Jacquard concibió para regular la fabricación, mediante tarjetas perforadas, de los más complicados modelos de brocados. Al capacitar a los mecanismos para combinar entre sí símbolos generales en sucesiones de variedad y extensión ilimitadas, se establece un eslabón entre las operaciones materiales y los procesos mentales abstractos de la rama más teórica de la ciencia matemática. Se desarrolla un lenguaje nuevo, amplio y poderoso, para su empleo futuro en el análisis, cuyas verdades se podrán manejar de modo que su aplicación sea*

más práctica y precisa para la humanidad de lo que hasta ahora han hecho las medidas a nuestro alcance".

[Silván; 1994, 6]

La publicación de su artículo sobre la Máquina Analítica en "*Taylors Scientific Memoirs*" fue un gran triunfo científico para ella, aunque sólo lo firmó con sus iniciales.

Después de este triunfo científico de Ada, a los 27 años, enfermó. De acuerdo con la práctica médica usual de ese período, le sacaron sangre con frecuencia y fue tratada alternativamente con opio y morfina. En 1851 los doctores descubrieron que tenía un cáncer en estado avanzado, y en enero de 1852 fue tratada con opiáceos para reducir el dolor. Su madre, sin embargo, consideraba el dolor como una expresión de la voluntad de Dios, e insistió en reemplazar los opiáceos por la administración de mesmerismos que resultaron ser ineficaces. La calma y tranquilidad de Ada en estos duros acontecimientos y el mantener un activo interés en las materias científicas provocaron la admiración de sus amigos. El 23 de agosto de 1852 estaba sufriendo de tal manera que el doctor escribió a su madre que lo mejor para ella era la eutanasia. A pesar de esto Lady Byron prolongó la vida de Ada con asiduos cuidados médicos dilatando durante varios meses una terrible agonía.

Lady Byron escribió que:

"la mayor de todas las gracias que le han sido concedidas a su hija Ada, ha sido su sufrimiento, que la ha alejado de la tentación, volviendo su pensamiento a las más altas y mejores cosas".

Con esta declaración estaba afeando la costumbre de Ada y su marido de apostar en las carreras de caballos, y de estar por ese motivo endeudados. Un compañero que ayudó a Lady Byron en su labor como enfermera de Ada escribió la satisfacción que ella sentía de:

> *"que Dios, en su gracia, no haya permitido que abandone este mundo en la oscuridad, pues con la agonía del cuerpo El, y su poderosa Providencia, ha permitido después de todo trabajar por el bien".*

Después de la muerte de Ada, los corredores de apuestas fueron comprados, muchas de sus cartas fueron quemadas y Lady Byron suprimió firmemente toda evidencia de la vida *escandalosa* de su hija. Babbage quiso publicar una memoria sobre Ada, pero incluso él fue rechazado por el celo de los abogados de Lady Byron.

Los amigos visitaban a Ada y le animaban a continuar sus trabajos de matemáticas. Ella había decidido enfrentarse con calma a su enfermedad y esa actitud llenaba de admiración a quienes la conocían. Ada murió el 23 de noviembre de 1852, a la edad de 36 años. Como Ada había siempre insistido, su cuerpo fue enterrado junto al de su padre, al que nunca conoció, en la Iglesia de Santa María Magdalena en Hucknall, Nottingham. Como él había escrito:

> *¡Hija mía! con vuestro nombre comenzó esta ruina*
>
> *¡Hija mía! Así, con vuestro nombre muchas cosas llegarán a su fin*
>
> *No puedo veros, ni escucharos, pero no haya*
>
> *quien esté tan absorto en vos; vos sois la amiga*

hacia quien se extienden las sombras de años ya lejanos;

pese a que nunca llegaréis a vislumbrar mi rostro,

mi voz se mezclará con vuestras futuras visiones,

y alcanzará el interior de vuestro corazón cuando el mío ya esté frío

un recuerdo y una melodía, desde la tumba de vuestro padre.

(My daugter! with thy name this song begun;
My daugter! with thy name thus much shall end;
I see thee not, I hear thee not, but none
Can be so wrapt in thee; thou art the friend
To whom the shadows of far years extend;
Albeit my brow thou never shouldst behold,
My voice shall with thy future visions blend,
And reach into thy heart, when mine is cold,
A token and a tone, even from thy father's mould.)

[Childe Harold's Pilgrimage, Canto the third, verso 115}

Babbage continuó intentando la construcción de su máquina analítica pero desistió del proyecto tras numerosos fallos. Babbage murió en 1871, amargado por los fallos al construir su máquina analítica. La memoria de Ada fue reimpresa en un libro sobre las máquinas de Babbage en 1889. Ambos fueron olvidados casi completamente hasta que los ordenadores alcanzaron su auge durante la segunda guerra mundial.

El Dr. B. V. Bowden, un pionero inglés en ordenadores, redescubrió el artículo de Ada y cuenta de forma reveladora la forma en que la nieta de Ada permitió reexaminar sus papeles. Cien años después de la muerte de Ada, reimprimió su artículo, con una biografía y un retrato memorable de ella (en el que parece una heroína de Jane Austen). El artículo de Ada de 1843 ha sido también reimpreso en un libro de Dover sobre Babbage. Esta publicación hizo que sea considerada en el momento actual como precursora de la programación de ordenadores, pero una biografía completa no fue publicada hasta 1977.

Hoy en día está considerada como la precursora de la programación de ordenadores y en honor a su trabajo como informática, el lenguaje de programación ADA lleva su nombre.

4.7.3. La máquina diferencial y la máquina analítica

Una **máquina diferencial** es una calculadora mecánica de propósito especial, diseñada para tabular funciones polinómicas. Puesto que las funciones logarítmicas y trigonométricas pueden ser aproximadas por polinomios, esta máquina es más general de lo que parece al principio.

Es un dispositivo de naturaleza mecánica para calcular e imprimir tablas de funciones. Más concretamente, calcula el valor numérico de una función polinómica sobre una progresión aritmética obteniendo una tabla de valores que se aproxima a la función real (basado en que cualquier función puede ser aproximada por polinomios).

La máquina analítica de Babbage, como se puede apreciar en el Science Museum de Londres.

Esta máquina fue ideada por J. H. Mueller y redescubierta por Charles Babbage, quien no llegó a construirla. Las máquinas diferenciales fueron olvidadas y luego redescubiertas en 1822 por Charles Babbage, quien la propuso a la Royal Astronomical Society el 14 de junio en un documento intitulado "Nota sobre el uso de maquinaria para el cómputo de tablas matemáticas muy grandes". Esta máquina usaba el sistema de numeración decimal y fue accionada por una manivela. El gobierno británico financió inicialmente el proyecto, pero retiró el financiamiento cuando Babbage repetidamente solicitó más dinero mientras que no hacía ningún progreso aparente en la construcción de la máquina. Entre 1847 y 1849, Babbage se encaminó a diseñar su mucho más general máquina analítica pero posteriormente produjo un diseño mejorado de la máquina diferencial (su "máquina diferencial No. 2"). Inspirado por los planes de la máquina diferencial de Babbage, desde 1855 en adelante, Per Georg Scheutz construyó varias máquinas diferenciales; una fue vendida al gobierno británico en 1859. Martin Wiberg mejoró la construcción de Scheutz pero usó su dispositivo solamente para producir, publicar e imprimir tablas logarítmicas.

Basado en los planes originales de Babbage, el Museo de Ciencias de Londres construyó, entre 1989 y 1991, una máquina diferencial No. 2 funcional, bajo la dirección de Doron Swade, el entonces Curador de Computación. Esto debía celebrar el 200 aniversario del nacimiento de Babbage. En 2000, la impresora que Babbage diseñó originalmente para la máquina diferencial también fue terminada. La conversión de los dibujos de diseño originales en dibujos convenientes para el uso de los fabricantes de ingeniería reveló algunos errores de menor importancia en el diseño de Babbage, que tuvieron que ser corregidos. Una vez que estuvo terminado, tanto la máquina y su impresora funcionan sin fallas, y todavía lo hacen hoy en día. La máquina diferencial y la impresora fueron construidas con las tolerancias realizables con la tecnología del siglo XIX, resolviendo un debate de muchos años sobre si el diseño de Babbage hubiera trabajado realmente. (Una de las razones al principio mencionadas para la no terminación de las máquinas de Babbage había sido que los métodos de ingeniería no estaban lo suficientemente desarrollados en la era Victoriana). Trabaja como Babbage la diseñó y demuestra que éste estaba acertado en su teoría, además de que era capaz de fabricar partes con la precisión requerida. Babbage falló quizá a causa de que sus diseños fueron demasiado ambiciosos.

La **máquina analítica** es el diseño de un computador moderno de uso general realizado por el profesor británico de matemáticas Charles Babbage, que representó un paso importante en la historia de la computación. Fue inicialmente descrita en 1816, aunque Babbage continuó refinando el diseño hasta su muerte en 1872. La máquina no pudo construirse debido a razones de índole política, hubo detractores por un posible uso de la máquina para fines bélicos. Computadores que fueran lógicamente comparables a la máquina analítica sólo pudieron construirse 100 años más tarde.

Algunos piensan que las limitaciones tecnológicas de la época eran un obstáculo que hubiera impedido su construcción; otros piensan que la tecnología de la época alcanzaba para construir la máquina de haberse obtenido financiamiento y apoyo político al proyecto.

El primer intento de Charles Babbage para diseñar una máquina fue la máquina diferencial, que fue un computador diseñado específicamente para construir tablas de logaritmos y de funciones trigonométricas evaluando polinomios por aproximación. Si bien este proyecto no vio la luz por razones económicas y personales, Babbage comprendió que parte de su trabajo podía ser aprovechado en el diseño de un computador de propósito general, de manera que inició el diseño de la máquina analítica.

La máquina analítica debía funcionar con un motor a vapor y hubiera tenido 30 metros de largo por 10 de ancho. Para la entrada de datos y programas había pensado utilizar tarjetas perforadas, que era un mecanismo ya utilizado en la época para dirigir diversos equipos mecánicos. La salida debía producirse por una impresora, un equipo de dibujo y una campana. La máquina debía también perforar tarjetas que podrían ser leídas posteriormente. La máquina analítica trabajaba con una aritmética de coma fija en base 10, poseía una memoria capaz de almacenar 1.000 números de 50 dígitos cada uno. Una unidad aritmética estaría encargada de realizar las operaciones aritméticas.

El lenguaje de programación que sería utilizado era similar a los actuales lenguajes ensambladores. Era posible realizar bucles y condicionales de manera que el lenguaje propuesto hubiera sido Turing-completo. Se utilizaban tres tipos diferentes de tarjetas perforadas: una para operaciones aritméticas, una para constantes numéricas y otra para operaciones de almacenamiento y recuperación de datos de la memoria, y la transferencia de datos entre la unidad aritmética y la memoria. Se disponía de tres lectores diferentes para los tres tipos de tarjetas.

En 1842, el matemático italiano Luigi Menabrea, quien se había encontrado con Babbage durante un viaje de éste por Italia, escribió una descripción de la máquina en francés. En 1843, esa descripción fue traducida al inglés y anotada de forma extensa por Ada King, Condesa de Lovelace, quien ya se había interesado en la máquina unos años antes. Como reconocimiento a su trabajo, ella ha sido descrita en muchas ocasiones como la primera programadora. El Lenguaje de programación Ada actualmente utilizado lleva su nombre.

4.7.4. Otras mujeres informáticas: Grace Murray Hopper

Hemos visto que podemos considerar a Ada Lovelace como una pionera de la informática. Podemos considerarla, junto con Charles Babbage, la primera persona programadora.

También es sorprendente que fuese, durante los años cuarenta, un grupo de cien mujeres las que programaron el ENIAC, el primer ordenador, fabricado para el ejército por IBM.

Grace Murray Hopper, también fue una pionera en informática, por ser la persona que creó el lenguaje COBOL, (*COmmon Business Oriented Language*), lenguaje de programación todavía no superado como lenguaje idóneo para gestión.

Esta mujer matemática nació en USA, estudió en el Vassar College donde obtuvo las licenciaturas en matemáticas y física. (Smith, 1996, 179). Se doctoró en matemáticas en la universidad de Yale y regresó a Vassar donde dio clases durante diez años.

En 1943 comenzó a trabajar en la Naval Reserve. Como consecuencia de su gran habilidad matemática fue asignada a las operaciones de inteligencia, donde empezó a trabajar con ordenadores y programación. Recordemos que los primeros ordenadores fueron diseñados por la Armada de los Estados Unidos para poder calcular las trayectorias de los proyectiles. Uno de los primeros ordenadores en los que trabajó fue el Mark I, el primer ordenador del mundo digital secuenciado automáticamente a gran escala. Era un enorme ordenador de más de diez metros, con válvulas mecánicas que se abrían y cerraban ruidosamente. Pronto supo computar en él las operaciones de entrada y salida de datos que, recordemos, por entonces se realizaban mediante tarjetas perforadas.

Sus colegas estaban admirados por su eficacia como programadora. Ella, que también confiaba en su propia habilidad, dijo:

> *"Puedo construir un ordenador que haga cualquier cosa que yo sea capaz de definir completamente"*.

En los años cincuenta trabajó para el departamento UNIVAC de Sperry Rand en conseguir que el lenguaje de programación fuese más amigable, más cómodo de manejar, para lo que desarrolló un lenguaje compilador que permitía comunicarse más fácilmente en inglés con el ordenador, en lugar de tener que utilizar el lenguaje máquina tan alejado de la forma de razonar de una persona. Era un lenguaje que traducía a código máquina las instrucciones dadas en inglés. Este trabajo condujo a crear, también en esta época, el lenguaje COBOL que todavía hoy se utiliza.

Durante los quince años que trabajó en la Naval Reserve recibió la admiración que merecía el trabajo que desarrolló, llegando a tener el rango de "*almirante*". Obtuvo otros muchos honores por sus servicios y por su labor en informática, siendo nombrada por *Data Processing Management Association* el *Hombre del Año* en Ciencias de la Computación, y por la Sociedad de Computación Británica como Miembro distinguido. Cuando se retiró con 79 años ella era el oficial comisionado de más edad y la única mujer almirante de la "*Navy*".

Escribió más de 200 artículos, en los cuales probó la gran velocidad a la que se transmite la información en los ordenadores, utilizando cables de unos 25cm. para comprobar lo lejos que llegaba la información en un ordenador en una billonésima de segundo.

No vamos ahora a comentar el progreso que ha experimentado las ciencias de la computación y las aplicaciones que en este momento existen en todos los campos. Hoy se usan millones de ordenadores en las casas, las escuelas, los negocios, etc. y se utilizan tanto para jugar como para resolver complejos problemas científicos y matemáticos. Los ordenadores han avanzado espectacularmente al sustituir las válvulas por los microchips lo que ha permitido reducir su tamaño y aumentar su memoria. Pero la forma de programarlos sigue siendo similar a la que diseñó Grace Murray Hopper.

4.8. Mary Fairfax Somerville

(1780-1872)

Mary Somerville fue una matemática y científica escocesa que se dedicó con pasión al estudio de las matemáticas y a la divulgación de los conocimientos científicos de su tiempo. Ser mujer no le facilitó nada esta tarea, pues no se le estaba permitido el acceso a la Universidad ni la participación en Asociaciones Científicas. No se pueden por tanto comparar sus aportaciones con las de otros científicos de su tiempo que tenían plena libertad para acceder a los avances del conocimiento científico.

Su primer libro *Mechanism of the Heavens* fue una versión traducida de la obra de Laplace *Mécanique Céleste* en la que interpreta y contextualiza la obra original, su prólogo *Disertación Preliminar* se reeditó varias veces de manera independiente. *The Connection of the Physichal Sciences* es un ensayo filosófico sobre las fuerzas que mueven el universo. Su obra *Physical Geography* se ha utilizado durante años en las aulas inglesas. En su última obra científica *Molecular and Microscopic Science* busca explicaciones para la composición de la materia, el calor y los movimientos vibratorios. Al final de su vida escribió *Theory of Differences* y una autobiografía.

Se puede considerar que Mary Somerville fue la última gran mujer "científica". En su época, ciencias como la biología, la geología, la astronomía, la física y las matemáticas no estaban separadas como lo están hoy, pronto aparecerán desconectados microbiólogos, ingenieros en computación, físicos nucleares, ... y ya nunca aparecerán importantes descubrimientos científicos estudiados por aficionados.

4.8.1. Su vida

Mary Fairfax nació en Escocia el 26 de diciembre de 1780, hija de un vicealmirante de la armada inglesa, fue la quinta de una familia de siete hermanos. Pasó su infancia en el campo, en Burntisland cerca de Edimburgo, en contacto con la naturaleza lo que estimuló su carácter observador.

> *Me entretenía en el jardín, frecuentado por los pájaros. Conocía muchos de ellos, sus vuelos, sus costumbres…*

[SOMERVILLE (1874) Personal Recollections, 19]

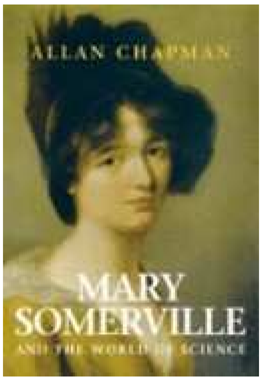
No tuvo una formación básica sistematizada y a los diez años apenas sabía leer y escribir, su madre le hacía practicar con la Biblia, pero su padre al percatarse de que era una "joven salvaje", la envió a un internado en Musselburgh, que fue para ella un auténtico suplicio ya que su profesora la señorita Primrose, le hacía aprender páginas enteras de diccionarios de memoria. No solamente deletrear las palabras o su significado sino recordarlas incluso en orden y sin errores, pero después de un año volvió a su casa donde le reprocharon lo poco que había aprendido. A pesar de esta experiencia traumática, Mary había desarrollado el gusto por la lectura y tenía pequeñas nociones de aritmética.

Un primer encuentro interesante en su vida sucedió en Jedburgh cuando tenía trece años. Descubrió un amigo y un cómplice por su deseo de conocimiento, en uno de sus tíos el Dr. Somerville, que posteriormente se convertiría en su suegro, quien al percibir los deseos de Mary por aprender le mostraría las historias de las mujeres sabias de la antigüedad, y le ayudaría a estudiar latín para leer a Virgilio. Ella escribió:

> *"El me aseguró que en la antigüedad habían existido muchas mujeres elegantes instruidas, y que él podría leerme a Virgilio si yo estudiaba una hora o dos cada mañana, lo que le agradecí. Nunca fui más feliz en mi vida que durante los meses que estuve en Jedburgh"*.

[SOMERVILLE (1874) Personal Recollections, 37]

En un curso de pintura y danza que realizó descubrió cuestiones de perspectiva y de geometría a partir de las discusiones con un compañero que leía los Elementos de Euclides.



Sus primeras experiencias de resolución de problemas consistían en solucionar los pasatiempos matemáticos de las revistas femeninas pero no tenía nociones de álgebra. La primera vez que encontró un pasatiempo en una de estas revistas fue en casa de Miss Ogilvie en Burntisland, donde había ido con su madre a tomar el té. Ella decía:

> *"…al volver una página quedé sorprendida al ver unas líneas extrañas mezcladas con letras, como x o y, y pregunté: ¿Qué es esto? Oh, dijo Miss Ogilvie, es una clase de aritmética, se llama álgebra; pero no puedo contarte nada más sobre ello".*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 47]

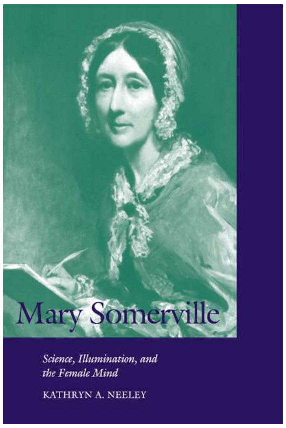
Cuando el tutor de su hermano le daba clase, Mary se las arreglaba para estar presente y resolvía con gran rapidez las cuestiones que éste planteaba a su hermano. Viendo el enorme interés que ella tenía por las Matemáticas, accedió a comprarle libros científicos, y le ayudó a leerlos y a resolver los problemas del primer libro de Euclides. Al poco tiempo se vio sobrepasado por el nivel que su alumna había alcanzado, leía los Elementos de Euclides y el Álgebra de Bonnycastle.

Vivió las contradicciones de la educación de las chicas de su época. Primero sabía demasiado poco y luego sabía demasiado. Advirtió entonces que las personas de su entorno no podían ayudarla, sabía demasiado y sus padres comenzaron a inquietarse pensando que este afán de su hija por el estudio podía acarrearle problemas de salud mental. Su padre dijo:

> *"Tendremos que poner fin a esto o uno de estos días veremos a Mary con camisa de fuerza. ¡Acuérdense de X, que se volvió loca de atar con la longitud!"*.

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 54]

Sus padres intentaron disuadirla por todos los medios, pero ella supo compaginar de forma inteligente sus clases de piano, actividades como la pintura, el teatro, los conciertos y las labores del hogar con el estudio del álgebra y las lecturas de los clásicos. Así terminó el estudio de los seis primeros libros de los Elementos de Euclides.



A los 24 años se casó con Samuel Greig, capitán de la marina rusa, un hombre sin ningún conocimiento científico al que no le gustan las mujeres sabias, pero Mary, aprovechó la libertad que le supuso este matrimonio para continuar sus estudios matemáticos, dedicando parte de su tiempo a mejorar su formación.

Tres años después, muere su marido y ella se encuentra viuda, con dos hijos, uno de ellos enfermo, viviendo en Londres lejos de su familia, y vuelve a la casa de sus padres en Burntisland. En esta época su principal ocupación eran sus hijos, sobre todo el pequeño que murió poco tiempo después, pero como no acudía a actividades sociales tenía suficiente tiempo para reanudar sus estudios matemáticos, comenzó estudiando trigonometría plana y esférica, secciones cónicas, astronomía y comenzó a leer los *Principia* de Newton

> *Creo que fue inmediatamente después de mi regreso a Escocia que intenté leer los "Principia" de Newton. Me resultó extremadamente difícil y ciertamente no entendía casi nada, hasta que algún tiempo después volví a estudiar esta maravillosa obra con más asiduidad, escribiendo numerosas notas y observaciones sobre el mismo.*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 78]

En Edimburgo, tomó contacto con importantes científicos, entre ellos, John Playfair, entonces profesor de filosofía natural que la puso en contacto con William Wallace, quien orientó sus lecturas matemáticas haciéndole llegar los trabajos de los más importantes matemáticos franceses de la época.

Su segundo matrimonio, en 1812, con su primo William Somerville, inspector médico de la Royal Navy, supuso para ella una convivencia larga y feliz y un respaldo fundamental en su dedicación a la ciencia. Su marido estaba orgulloso de los conocimientos de Mary y se convirtió en su principal ayudante a la hora de facilitarle contactos con la comunidad científica.

> *Sólo en su matrimonio con mi padre, mi madre por fin se reunió con quien simpatizó totalmente con ella*

y disfrutaba con todas sus ideas, fomentando su entusiasmo por el estudio y ofreciéndole todas las facilidades que tenía a su alcance. Su amor y admiración por ella fueron ilimitados; reconocía abiertamente su superioridad, y muchos de sus amigos pueden dar testimonio del honesto orgullo y satisfacción que siempre le produjo la fama y los honores que ella alcanzó.

[SOMERVILLE Martha (1874), Prólogo de Personal Recollections]

Los primeros años vivieron en Edimburgo donde Mary estudió botánica, geología y mejoró sus conocimientos de griego, y además establecieron estrechas relaciones con escritores como Walter Scott y científicos como el físico David Brewster.

En 1816 William fue nombrado miembro de la Army Medical Board y se instalaron en Londres, donde se hizo socio de la Royal Society, ya que en dicha Institución no se admitían mujeres ni les estaba permitido el acceso a las instalaciones. En su biblioteca él copiaba a mano los artículos que a su mujer le resultaban interesantes para sus investigaciones.

Tuvieron tres hijas, la mayor murió en 1823, causando uno de los mayores disgustos de la vida de Mary. En su rutina diaria también se incluía la educación de sus otras dos hijas, Marta y Mary. William era un hombre inteligente y el hecho de que no fuera matemático es valorado por Ch. Lyell como un hecho positivo:

> *"Si nuestra amiga la señora Somerville se hubiera casado con Laplace, o con un matemático, nunca habríamos oído hablar de su trabajo. Lo habría fundido con el de su marido, presentándolo como si fuera de él".*

En 1817 cuando visitaron París, y a través de Arago y Biot, con los que habían coincidido en Londres cuando estos fueron a medir el arco del meridiano, conocieron a los más importantes matemáticos y científicos de la época como Laplace, Cuvier, Poisson, Gay-Lussac, Larrey y muchos otros, quienes les mostraron el avance de sus trabajos. Para una científica como ella, el estudio de estos materiales fue fundamental dado que en Inglaterra le resultaba muy difícil conseguir tratados matemáticos tan importantes. El viaje continuó por toda Italia pasando por Suiza.

El salón de los Somerville era un centro de divulgación científica al que acudían sus amigos científicos como George Airy, John, William y Carolina Herschel, George Peacock, W. Hyde Wollaston y Charles Babbage, también frecuentaban la casa Lady Byron, y su hija Ada a la que Mary ayudó y estimuló en su estudio de las matemáticas.

> *Ada estaba muy unida a mí y venía a visitarme con frecuencia. Estudió matemáticas aconsejada por mí. Cuando tenía alguna dificultad se reunía conmigo o me pedía por escrito una explicación. Últimamente, entre mis papeles, encontré muchas de sus notas, en las que me hacía preguntas matemáticas.*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 154]

La amistad de Mary con John Hershel, hijo de William, se mantuvo durante toda su vida y fue quizás esta relación y las frecuentes visitas al observatorio astronómico familiar lo que dirigió su investigación hacia el estudio de las leyes del Universo desde una perspectiva teórica que comenzó con la lectura de la Mecánica Celeste de Laplace.

El 5 de junio de 1833 Charles Babbage presentó el diseño de su máquina analítica bajo la mirada fascinada de Ada Byron, que había conocido a su creador unas semanas antes en el salón de los Somerville y que deseaba estudiar los fundamentos de un proyecto tan importante e innovador.

> *Fuimos con frecuencia a ver al Sr. Babbage mientras hacía sus máquinas de calcular. Tenía una eminente inteligencia, una firme perseverancia y amplios conocimientos sobre muchos temas, además de ser un matemático de primer orden. Siempre lo encontré amable y paciente al explicar la estructura y el uso de los motores. La primera máquina que hizo sólo podía realizar operaciones aritméticas. No contento con eso, el Sr. Babbage diseñó una máquina analítica, que podría realizar todo tipo de cálculos matemáticos.*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 140]

Mary Somerville pasó alrededor de un año en el extranjero en 1832-33. La mayor parte del tiempo lo pasó en París donde renovó viejas amistades con los matemáticos y científicos franceses. En 1834 pasó una temporada en Italia por problemas de salud de su marido y a partir de 1838 establecieron su residencia en este país.

A pesar de la pasión que siempre mostró Mary durante toda su vida hacia las matemáticas, sus intereses eran mucho más generales orientados a la ciencia en general, a la literatura y a las artes como escribe su hija Martha en el prólogo de su autobiografía:

> *Aunque su afición favorita eran las matemáticas para las que tenía excelentes aptitudes. Había pocos temas por los que no tuviera interés, ya fueran de ciencia, literatura, filosofía o política. Se apasionaba con la poesía, sus autores favoritos eran Shakespeare y Dante. Leía con fluidez las tragedias originales de los grandes dramaturgos griegos, era una gran erudita de los clásicos. También era muy aficionada a la música a la que había dedicado mucho tiempo en su juventud, y a la pintura sobre todo pintaba la naturaleza. Esta última fue, quizás, la afición que más le gustaba porque le permitía contemplar la maravillosa belleza del mundo.”*

[SOMERVILLE Martha (1874), Prólogo de Personal Recollections]

4.8.2. Su obra

Su primer éxito fue ganar una medalla de plata en 1811 por la solución de un problema sobre ecuaciones diofánticas en el *Mathematical Repository* de W. Wallace. Sus amigos le enviaban libros y trabajos científicos, la invitaban a conferencias y acudían a la casa de los Somerville para compartir sus experimentos.

En 1826 Mary Somerville escribió su primer artículo *The Magnetic Properties of the Violet Rays of the Solar Spectrum*. Le siguieron *Experiments on the Transmission of the Chemical rays of the solar spectrum across different media*, y *On the action of the Rays of the Spectrum on Vegetable juices.* Trabajaba en lo que podría considerarse un antecedente de la fotografía, observando los efectos de decoloración que se producen sobre papel bañado en cloruro de plata expuesto al sol.

El 27 de marzo de 1827, Lord Henry Brougham, presidente de la Cámara de los Lores, gran admirador de Mary, escribe a su marido instándole a que convenza a su mujer para que traduzca *la Mecánica Celeste* de Laplace para su "*Biblioteca de Conocimientos Útiles*". Ella accede, no sin muchas vacilaciones, rogando que si su manuscrito no se considera aceptable sea destruido. Este trabajo le supone cuatro años durante los cuales demuestra una organización admirable al compaginar su vida familiar y social con su trabajo científico. En sus escritos afirma:

> *"Un hombre siempre puede controlar su tiempo alegando que tiene negocios, a una mujer no se le permite tal excusa"*.
>
> *"Frecuentemente escondía mis papeles tan pronto como me anunciaban una visita, para que nadie pudiera descubrir mi secreto"*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 164]

En su obra, Laplace estudiaba el sistema solar y observaba los cometas, satélites y planetas, utilizando la teoría de la gravitación de Newton. En 1808 John Playfair comentaba que en Gran Bretaña apenas había una docena de matemáticos capaces de leerla. Era una obra larga y compleja. Se comentaba que, un día, cuando Laplace estaba cenando con los Somerville en 1817 afirmó ingenuamente:

> *"He escrito libros que nadie puede leer. Sólo dos mujeres han leído la "Mecánica Celeste"; ambas son escocesas: la señora Greig y usted"*,

quedando sorprendido al comprobar que se trataba de la misma persona.

Su traducción de Laplace resultó algo más que un trabajo mecánico ya que añadió comentarios simples y claros que permitían una mejor comprensión de la obra, incorporando así mismo opiniones independientes que interesaron a personas expertas.

En su amplia *Disertación Preliminar* incluyó todas las matemáticas necesarias, una historia del tema con explicaciones mediante dibujos, diagramas y comprobaciones matemáticas que ella misma realizó. Este trabajo fue reimpreso posteriormente y dado su interés, se reeditó varias veces de manera independiente.

La obra de Mary Somerville se publicó en 1831 con el nombre *Mechanism of the Heavens*. Pero no en la colección "Biblioteca de Conocimientos Útiles", ya que Brougham la juzgó demasiado larga y complicada, sino por J. Murray, que imprimió sólo 750 ejemplares pues no esperaba que se vendiera demasiado. Sin embargo fue muy alabada, tuvo gran éxito y fue, durante el resto del siglo, un texto clave en matemáticas avanzadas y astronomía.

Se la ha considerado a menudo como una traducción de la obra de Laplace. Sin embargo es más que una traducción porque aporta una contextualización. y una interpretación del trabajo de Laplace. Por otra parte supuso un acercamiento selectivo a la obra original, más comprensible que una estricta traducción.

> *Yo estaba asombrada por el éxito de mi libro; todos los comentarios eran altamente favorables; he recibido cartas de felicitación de muchos hombres de ciencia.*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 173]

Su libro *The Connection of the Physical Sciences*, publicado en 1834 fue también un éxito y conoció nueve ediciones sucesivas, siempre mejoradas. Uno de los mayores logros fue contar con la colaboración de científicos tan importantes como Faraday, Wollaston, Herschel, Maxwell y Whewell. La segunda edición se la dedicó a su amigo J. Herschel y fue traducida al alemán y al italiano, fue más el honor que las ganancias lo que obtuvo con esta obra, aunque como ella dijo *nunca fue el beneficio económico el objetivo por el que escribo*[1].

Para poder realizarlo tuvo que estudiar, consultar e investigar a muy distintos autores. *The Athenaeum* opinaba que el libro era "*delicioso*" y, "*con excepción de los tratados de sir J. Herschel, la obra de ciencia más valiosa y más agradable que se ha publicado en el transcurso del siglo*".

En este libro Mary Somerville presentaba una visión del mundo físico que contenía una explicación matemática compleja, pero evitando, en la medida de lo posible, el uso excesivo de fórmulas o símbolos

[1] Personal Recollections, 202

matemáticos. Esta idea de traducir los fundamentos matemáticos al lenguaje ordinario fue una de las mayores dificultades que tuvo que superar para mantener el rigor de su trabajo.

Su dedicación a la astronomía le llevó a realizar cálculos relativos a un posible planeta que perturbaba la órbita de Urano. Estos datos posibilitaron la localización de Neptuno por John Adams.

> *El Sr. Adams dijo a Somerville que fue la lectura de la sexta edición de su obra "The Connection of the Physical Sciences" publicada en 1842, lo que le llevo a calcular la órbita de Neptuno.*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 290]

En 1834 se instaló por un tiempo en Italia. Allí continuó sus contactos con la astronomía realizando interesantes trabajos en los que introdujo principios filosóficos que, poco a poco, fueron impregnando sus obras posteriores.

Por su interés en astronomía, el 13 de febrero de 1835 fue nombrada junto con Carolina Herschel miembro honorario de la Real Sociedad de Astronomía siendo las primeras mujeres que obtuvieron tal honor y durante muchos años fueron las únicas. A pesar del nombramiento Mary creía no tener derecho a visitar la Sociedad si no recibía una invitación especial.

Obtiene, además, muchas otras distinciones, de la Real Academia de Dublín, de la British Philosophical Institution, de la Societé de Physique et d´Histoire Naturelle de Ginebra y de otras muchas sociedades y universidades italianas de las que había sido nombrada miembro honorario, pero de la que ella se sentía más orgullosa fue de la medalla de oro que le otorgó la Geographical Society de Florence.

> *En los eventos de mi vida puede verse cuánto se me ha honrado por las sociedades científicas y universidades de Italia, muchas de los cuales me han nombrado miembro honorario o asociado; pero el mayor honor que he recibido en Italia ha sido recibir la primera medalla de oro otorgada hasta ahora por la Geographical Society de Florence, y que fue acuñada a propósito, con mi nombre en el reverso. Lo recibí el otro día, acompañada de la siguiente carta del General Menabrea, Presidente del Consejo y un distinguido matemático y filósofo:*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 350-351]

La reina Victoria le concedió una pensión anual de 200 libras esterlinas. Era por tanto una persona de alto prestigio en la comunidad científica, totalmente reconocida en diferentes países y se sentía feliz por poder disfrutar de una independencia económica que le permitía comprar los libros que necesitaba para seguir estudiando.

La precaria salud de su marido hizo que sus estancias en Italia fueran cada vez más dilatadas. El primer ministro inglés, conocedor de sus problemas económicos, decidió que su pensión vitalicia se aumentara a 300 libras.

El 19 de septiembre de 1838 tuvo de nuevo que abandonar Inglaterra para viajar a Italia por motivos de salud de su esposo. Sin embargo continuó estudiando y trabajando. Revisó y reeditó sus libros anteriores y escribió su tercera obra, la de mayor éxito, que se publicó en 1848: *Physical Geography*. Poco faltó para que quemara el manuscrito, al aparecer en imprenta *Cosmos* de A. Humboldt sobre el mismo tema, pero su marido y J. Herschel la convencieron para que no lo hiciera. Posteriormente recibió una carta del autor de *Cosmos* elogiando sus obras.

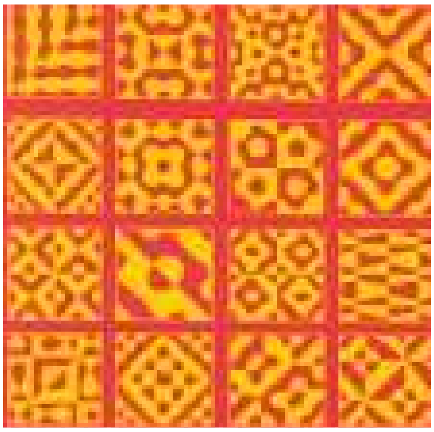
> *Después de su "Mechanism of the Heavens," la obra filosófica "Connexion of the Physical Sciences" ha sido objeto de mi constante admiración. La leí íntegramente y luego la releí en la séptima edición que pareció en 1846 …*
>
> *El imprudente autor del "Cosmos" debe destacar más que cualquier otra, la obra "Physical Geography" de Mary Somerville. La obtuve unas semanas después de su publicación por nuestro común amigo Chev. Bunsen. No conozco en ninguna lengua una obra de Geografía física que se pueda que comparar a la suya.*
>
> [SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 287]

En esta obra reflexionaba sobre cómo los descubrimientos son más bien obra de un lento proceso:

> *"Cuando la sociedad ha llegado a cierto punto de adelanto, algunos descubrimientos se hacen naturalmente; la mentalidad general va en esa dirección, y si un individuo no da con el descubrimiento, otro lo hará".*

Algunos parlamentarios y miembros del clero, en la misma catedral de York, criticaron duramente este libro por su enfoque evolucionista. Al parecer este hecho contribuyó aún más a su éxito y ha sido un texto que se ha utilizado durante décadas. Se editó siete veces.

Sufre una fuerte depresión tras la muerte sucesiva de su marido en 1860, uno de sus hijos Woronzow Grieg en 1865 y en 1871 su gran amigo Sir John Herschel, doce años más joven que ella. Sus hijas le animaron a que iniciara un nuevo proyecto, vive entonces en Nápoles y con 85 años comienza a escribir su cuarto libro *On Molecular and Mycroscopic Science* una aproximación a la composición de la materia, el concepto de calor y las partículas microscópicas en el que incluía diagramas de los experimentos de Ernst Chladni con placas vibratorias.



Con 89 años comenzó su autobiografía., titulada *Personal Recollections*. Además de detalles biográficos, en el libro explica su visión filosófica del mundo, su actitud ante la ciencia, ante la investigación, y el papel de las mujeres ante el trabajo científico. Fue publicado, después de su muerte en 1874 junto con una selección de su correspondencia, notas de introducción en varios capítulos, un prólogo y un epílogo, que realizó su hija Martha.

Sus últimos escritos muestran gran maestría en la investigación matemática. Poco antes de morir escribió:

> *"Tengo 92 años, ... , mi memoria para los acontecimientos ordinarios y especialmente para los nombres de las personas es débil, pero no para los*

temas matemáticos o científicos. Soy todavía capaz de leer libros de álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas". A veces encuentro dificultades, pero sigo siendo obstinada, si no lo logro un día, lo retomo nuevamente a la mañana siguiente. También me gusta leer los nuevos descubrimientos y las teorías del mundo científico y de todas las ramas de la ciencia.

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 364]

Sus últimas ocupaciones, continuadas hasta el día de su muerte, fueron la revisión y terminación de un tratado, que había escrito unos años antes, la "*Theory of Differences*" (con diagramas exquisitamente elaborados) y el estudio de un libro sobre cuaterniones de Hamilton.

En todos los periódicos ingleses se escribieron artículos de reconocimiento a su vida y obra. Muchos de sus amigos y admiradores hicieron una petición para que fuera enterrada en la abadía de Westminster pero se denegó por las polémicas que algunas de sus obras habían ocasionado.

4.8.3. Su posición frente a los derechos de la mujer

Los estudios y escritos de Mary Somerville no tuvieron el aval de ninguna universidad, institución sociedad científica o departamento de investigación, tuvo que trabajar bajo circunstancias familiares y sociales adversas, tratándosela en ocasiones de loca y de excéntrica, pidiéndole que fuese "una mujer respetable", a pesar de que nunca se desvió de la conducta socialmente aceptada para una mujer. Fue una divulgadora de la ciencia en esta época en la que el interés científico era muy grande por lo que su contribución fue de gran importancia.

En su autobiografía recuerda que desde muy niña no entendía que el derecho a la educación y al conocimiento científico estuviera vetado a las mujeres.

> *Desde mis primeros años mi mente se rebeló contra la opresión y la tiranía, y estaba resentida por la injusticia del mundo que niega a las mujeres todos los derechos a la educación para ser entregados a los hombres.*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 45]

Aunque era considerada una heroína en los círculos científicos y feministas, sus contemporáneos insistían en su feminidad. J. G, Children escribe:

> *"... dejando al propio tiempo un registro imperecedero de la perfecta compatibilidad entre el cumplimiento ejemplar de las tareas más suaves de la vida doméstica y las más profundas investigaciones en filosofía matemática".*

[Alic; 1991, 213]

> *Mi madre, …,, solía comentar que una mujer habitualmente bien informada sobre la actualidad habría sido vista como un prodigio de aprendizaje en su juventud e incluso últimamente muchos consideran que si las mujeres iban a recibir la sólida formación de los*

hombres, se perdería mucho su gracia femenina y serían incapaces de realizar las tareas domésticas. Mi madre, fue uno de los ejemplos más brillantes de la falacia de esta teoría del viejo mundo, nadie tuvo más gracia femenina que ella, tanto en su forma de actuar como en su aspecto, y como ya he mencionado, ningún trabajo científico le hizo descuidar sus deberes caseros.

[Marta SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 346]

No obstante en sus memorias escribió:

"La edad no ha menguado mi celo por la emancipación de mi sexo frente al prejuicio irracional que prevalece demasiado en Gran Bretaña en contra de una educación literaria y científica para las mujeres. Los franceses son más civilizados en este sentido, han tomado la iniciativa, y han dado el primer ejemplo en los tiempos modernos de aliento a la alta cultura intelectual del sexo femenino. Madame Emma Chenu, que había recibido el grado de Master de Artes de la Facultad de Ciencias de la Universidad de París, más recientemente recibió el diploma de Licenciado en Ciencias Matemáticas de la misma ilustre Universidad, después de un examen exitoso en álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial e integral y astronomía. Una dama rusa también ha tenido un grado; y una señora ha recibido una medalla de oro de la misma institución.

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 345-346]

A pesar de que su vida no se apartó nunca de los convencionalismos que la sociedad de su tiempo imponía a las mujeres, era abiertamente feminista, su firma estuvo la primera en la petición del sufragio femenino de J. Stuart Mill. Mary lo admiraba por su noble carácter y su inteligencia y en su correspondencia, le agradece la iniciativa de la petición al Parlamento del sufragio femenino y por su libro *Subjection of Women*. J. Stuart escribió:

> *"quizás sea la única mujer entre todas, que sabe de matemáticas todo lo que hace falta hoy en día para hacer cualquier descubrimiento matemático de consideración".*

[Alic; 1991, 214]

> *Le agradezco de todo corazón que se tomara la molestia de expresar, en términos tan amables, su valoración de mi libro, la aprobación de quien ha prestado un servicio inestimable a la causa de la mujer en su propia persona dando ejemplo con sus altas capacidades intelectuales y, por último, dando a la protesta de la gran petición del año pasado, el peso y la importancia que se deriva de la firma que lo dirigió.*

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 345]

Mary escribe sobre el sufragio femenino y la iniciativa de J. Stuart Mill:

> *Las leyes británicas son adversas a las mujeres; y estamos profundamente agradecidos al Sr. Stuart Mill por atreverse a mostrar su iniquidad y la injusticia. La ley en los Estados Unidos es en algunos aspectos aún*

peor, insultando al sexo femenino, al otorgar el sufragio a los esclavos recién emancipados y rechazar la extensión del sufragio a las mujeres del más alto nivel de educación.

[SOMERVILLE (1874), Personal Recollections, 344]

Mary escribió su autobiografía para mostrar a las mujeres de su tiempo que era posible conseguir de forma autodidacta una formación científica. El primer párrafo es el siguiente:

"Mi vida ha sido tranquila y familiar. No hay ningún evento significativo que pueda interesar al público. El único objetivo de este escrito, es mostrar a las mujeres de mi país que la educación de sí mismas es posible bajo circunstancias muy desfavorables e incluso desalentadoras".

Después de la publicación de *Mechanism of the Heavens* se colocó un busto suyo realizado por el famoso escultor Chantrey en el hall principal de La Royal Society; en su honor y por su fuerte apoyo a la educación de las mujeres el Somerville College de Oxford lleva su nombre desde 1879, también fueron nombrados en su honor un asteroide y un cráter lunar y fue llamada por el London Post "La Reina de las Ciencias del siglo XIX".

4.9. Sonia Kovalévskaya

(1850-1891)

Sonia Kovalévskaya fue una matemática rusa del siglo XIX, que para poder estudiar en la universidad tuvo que salir fuera de Rusia, pedir permisos especiales para asistir a clase y solicitar clases particulares a ilustres matemáticos. Después de obtener el doctorado en Matemáticas, a pesar de que ninguna universidad en Europa admitía a una mujer como profesora, consiguió serlo en la entonces recién creada Universidad de Estocolmo.

Sus investigaciones se centran en el Análisis Matemático. Su nombre ha pasado a la historia por el Teorema de Cauchy-Kovaleskaya. Su especialización, por lo que en su época fue conocida en toda Europa, era la teoría de funciones abelianas. Su trabajo sobre los anillos de Saturno representa su aportación a la matemática aplicada. Su mayor éxito matemático fue su investigación sobre la rotación de un sólido alrededor de un punto fijo por el que obtuvo el Premio Bordin de la Academia de Ciencias de París. Su trabajo póstumo, una simplificación de un Teorema de Bruns.

Sonja, Sofja, Sonya, Sophie, Sophia, Sonia, Sofya, son algunos de los nombres que hacen referencia a esta mujer excepcional como escritora, como matemática y como persona. No sólo fue la primera mujer que se doctoró en Matemáticas y consiguió ser profesora de Universidad, sino que también escribió obras literarias.

El relato de su corta vida es fascinante. Comenzó en un pueblecito de Rusia, donde vivió su adolescencia y desde allí, en una época en la que las mujeres carecían totalmente de autonomía y les estaba totalmente prohibido asistir a la universidad, su genio matemático, su espíritu libre y su especial personalidad para superar las barreras que se interponían a sus aspiraciones, le permitieron alcanzar las más altas cotas del pensamiento científico. Su talento literario, plasmado en su obra autobiográfica Recuerdos de la infancia, nos conmueve. Llegó a ser amiga y colega de los más grandes matemáticos de la época como Weierstrass, Poincaré, Chevichev, Hermite, Picard, Mittag-Leffler, etc., y de científicos y literatos como Darwin, Elliot, Ibsen, Mendeleyev, Dostoyesky, etc. Todo esto podía ser suficiente para interesarnos por su vida, pero, ante todo fue "una gran matemática" creativa, original e innovadora.

4.9.1. Su infancia en el campo

El 15 de enero de 1850 nació en Moscú, Sofía Vassilíevna Korvin-Krukovskaya, a la que familiarmente llamaron Sonia. Su padre Vasili Korvin-Krukovski era general de artillería y su madre Elizaveta Shubert, veinte años más joven que su marido, era de origen alemán. Ambos pertenecían a la nobleza rusa, y frecuentaban los ambientes intelectuales. Además el abuelo materno de Sonia había sido un famoso astrónomo, miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

Fue la segunda hija del matrimonio. Su hermana Anna, llamada familiarmente Aniuta, era seis años mayor que ella. Durante su infancia Sonia estaba convencida de que su nacimiento había sido una decepción para sus padres que deseaban tener un hijo varón. El niño, Fédia, llegaría al mundo tres años después. Lo cuenta Sonia en su libro autobiográfico *Recuerdos de la infancia*.

> *La verdad es que mi palomita no nació en el momento oportuno, dice la Niania en voz muy baja. La noche anterior a su nacimiento, el señor perdió en el Club Inglés mucho dinero en el juego, tanto que tuvo que empeñar los diamantes de la señora. En esa situación, ¿puede uno alegrarse por el nacimiento de su hija? Además, tanto el señor como la señora hubieran*

querido tener un hijo. El señor me decía sin cesar: "Ya verás Niania como será un niño". Además todo estaba preparado para un varón: un crucifijo para el bautismo y un gorrito con los lazos azules [...] Pero nació otra niña. La señora quedó tan decepcionada que no quiso ni mirarla, pero Fédia más tarde los consoló a los dos. [...]

[Recuerdos de la infancia Capítulo 1: Primeros recuerdos. Sonia Kovalévskaya]

Cuando Sonia tenía seis años su padre se retiró del ejército y se estableció en la hacienda patrimonial de Palibino por miedo a perder estas tierras si no se ocupaba personalmente de ellas. Durante los años que vivió en el campo, su educación y sus relaciones personales y familiares perfilaron los rasgos de su personalidad. En su obra autobiográfica Recuerdos de la infancia nos ha dejado un magnífico relato de lo que fueron esos primeros años de su vida.

Su educación estuvo confiada a varias institutrices. La que dejó más huella en su vida fue una inglesa, Marguerite Fránzovna, con la que estuvo entre los siete y los doce años. Al principio también estaba encargada de la educación de Aniuta pero después de más de un año de discusiones y continuas luchas sin conseguir dominarla, desistió de ocuparse de ella y concentró todos sus esfuerzos en Sonia y en convertirla en una perfecta señorita.

Los castigos corporales estaban prohibidos, pero la institutriz utilizaba métodos psicológicos de humillación que para Sonia fueron auténticas pesadillas. Estas torturas emocionales dejaron en su carácter ciertos rasgos de sumisión que le costó mucho superar. Uno de los castigos consistía en pasearse por toda la casa y sentarse a la mesa con un letrero colgado a la espalda en el que aparecía escrita su falta. Otro de ellos, cuando la falta era muy grave, consistía en ir a contarle a su padre lo que había hecho. Esto para Sonia era mucho peor y llorando le pedía a la institutriz que se lo cambiara, pero ésta casi nunca cedía ya que el efecto emocional que le producía era la prueba de su eficacia.

> *Entro, pero me quedo parada en el umbral, en la penumbra. Mi padre está sentado en su escritorio de espaldas a la puerta y no me ve.*
>
> *¿Pero quién está ahí? - repite impaciente.*
>
> *Soy yo papá; Margarita Fránzovna me ha enviado. Mi respuesta está acompañada de un sollozo.*
>
> *Mi padre comienza a comprender de qué se trata.*
>
> *¡Aja! ¿Seguro que has vuelto a hacer alguna fechoría? - dice esforzándose en otorgar a su voz el tono más severo posible.*
>
> *¡Y bien! Cuéntame, ¿qué ha ocurrido? [...]*
>
> *Mi padre escucha distraído mi confesión. Sus conceptos sobre la educación son muy sencillos y toda la pedagogía es, en su opinión, cosa de la mujer y no del hombre. Naturalmente, no sospecha en absoluto el complicado mundo interior que se ha desarrollado ya en la cabeza de la niña que se encuentra ahora delante de él, esperando veredicto. [..]*
>
> *En el fondo está enojado con la institutriz que no ha sabido resolver ella misma una cosa tan sencilla. [..] ¡Eres una niña mala! ¡Estoy enfadado contigo!- y se calla sin saber que decir...*

¡Ve y ponte en el rincón! -decide finalmente.

Y ahí estaba yo, una muchacha mayor, de doce años, que pocos minutos antes había experimentado los más grandes conflictos psicológicos con la heroína de la novela leída a escondidas; tenía que ponerme en un rincón como una niña pequeña.[...]

Me mantengo tan en silencio que mi padre se olvida de mí y soy demasiado orgullosa para pedirle perdón. Por fin se acuerda de mí y me libera con estas palabras:

- ¡Ahora vete y procura no hacer más tonterías! [...]

Silenciosa y abatida vuelvo al cuarto de estudio. La institutriz está satisfecha con el resultado de sus medidas pedagógicas, ya que durante muchos días estoy tan callada y resignada, que toda alabanza por mi comportamiento es poca; estaría menos satisfecha de haber sabido las huellas que esta sumisión dejó en mi alma.

[Recuerdos de la infancia Capítulo 4: La vida en el campo. Sonia Kovalévskaya]

Sonia amaba la lectura, pero los pocos libros que la institutriz le permitía leer, los tenía que haber leído ella previamente, por eso a veces trasgredía sus ordenes y se introducía a escondidas en la enorme biblioteca que había en la casa. Adoraba la poesía, pero tenía completamente prohibido no sólo leer sino también escribir versos por lo que tenía que aprender sus poemas de memoria y recitarlos en silencio.

Me está absolutamente prohibido incluso tocarlos, pues mi institutriz es muy estricta con respecto a mis lecturas. Tengo pocos libros infantiles y ya me los sé todos de memoria. La institutriz no me permite leer un libro, aunque sea infantil, sin haberlo leído ella previamente; pero lee muy lentamente, nunca tiene tiempo, de forma que me encuentro en un estado de hambre crónica por la lectura. Y aquí, al alcance de la mano, ¡tanta riqueza! ... ¡cómo no dejarse tentar!

[Recuerdos de la infancia Capítulo 4: La vida en el campo. Sonia Kovalévskaya]

Durante su niñez dos de sus tíos influyeron decisivamente en su vida. Uno de ellos, el hermano mayor de su padre, Piotr Vassilievitch, era un auténtico amante de la lectura. Leía todo lo que caía en sus manos. Le apasionaba la poesía y la novela; era un gran crítico de artículos científicos y técnicos y siempre estaba dispuesto a debatir sobre cualquier tema. No era matemático pero le apasionaba esta ciencia y cuando se enfrascaba en la lectura de algún artículo o libro de matemáticas se emocionaba tanto que discurría en voz alta. Fue escuchando sus relatos cuando surgió en Sonia una pasión hacia las Matemáticas que no abandonará en toda su vida.

Así, a través de él oí hablar sobre la cuadratura del círculo, asíntotas y muchas cosas semejantes cuyo sentido desde luego no comprendía, pero que influían en mi fantasía y me inspiraron una especie de pasión por las Matemáticas, para mí era una ciencia superior y enigmática que revela a quienes la dominan un mundo *nuevo y maravilloso al que la mayoría de los mortales no tienen acceso.*

[Recuerdos de la infancia. Capítulo 5: Mi tío Piotr Wassiliewitch. Sonia Kovalévskaya]

El otro tío que influyó notablemente en Sonia fue el hermano menor de su madre, su tío Teodor Shubert. Vivía en San Petersburgo y cuando visitaba a la familia en Palibino, después de la cena, se quedaba con Sonia y le hablaba de ciencias y de biología.

Mi tío me pregunta por mis estudios y mis lecturas. Los niños conocen sus propios defectos y cualidades mucho mejor que las personas mayores. De modo que yo sabía perfectamente que trabajaba mucho y que se decía que en los estudios iba adelantada a mi edad. Estoy encantada de que mi tío haya tenido la idea de interrogarme y contesto con gusto y sin timidez a todas sus preguntas. Me doy cuenta de que también él está contento. ¡Tenemos una niña instruida! repite continuamente, ¡ella ya lo sabe todo! [...]

Y mi tío me habla de infusorios, vegetaciones marinas y arrecifes de coral; aunque esa Ciencia es muy nueva, no ha pasado mucho tiempo desde que dejó la universidad: lo relata muy bien y se divierte al verme escuchar extasiada, con los ojos muy abiertos fijos en él.

[Recuerdos de la infancia. Capítulo 6: Mi tío Teodor Shubert: Sonia Kovalévskaya]

Pero, sin duda, la influencia más importante en su desarrollo personal fue la de su hermana Aniuta. Había crecido como una adolescente rebelde e independiente y poco a poco se fue convirtiendo en una joven exaltada, apasionada por el teatro y la literatura y que como gran parte de la juventud intelectual rusa era nihilista[1],

> *Pero de todas las personas que tuvieron influencia en mi juventud, sin duda, la más importante de todas fue mi hermana Aniuta.*
>
> *El sentimiento que me inspiró desde la infancia fue muy complejo: mi admiración por ella no tenía límites, siempre aceptaba su autoridad sin replicar; me halagaba cuando me permitía participar en sus ocupaciones, me habría tirado al agua o al fuego por ella; y sin embargo, a pesar de este gran afecto, ocultaba en lo más recóndito de mi alma como un poco de envidia, esa envidia particular que sentimos tan a menudo y casi inconscientemente por las personas queridas, que están muy cerca de nosotros, que admiramos, y a las que nos gustaría parecernos. [...]*

[Recuerdos de la infancia. Capítulo 7: Mi hermana: Sonia Kovalévskaya]

El mayor escándalo que se produjo en la familia tuvo lugar cuando su padre interceptó una carta de Dostoyevsky en la que le enviaba dinero por un artículo que Aniuta le había mandado y él lo había publicado en su periódico.

[1] El nihilismo debe su nombre a la novela *Padres e hijos* de Turgenev, fue un movimiento político de la juventud rusa progresista de esta época que era considerado radical por el gobierno zarista

Sin embargo con este segundo artículo las cosas no fueron tan fáciles como con el primero. Ocurrió una catástrofe: una carta de Dostoyevsky cayó en las manos de mi padre y eso fue un escándalo. [...]

Mi padre hizo llamar a Aniuta y le dijo de todo. Una de las frases que más le dolieron era esta: "Una hija que se escribe con un desconocido insulta a su padre y a su madre, y si además recibe dinero de él, es capaz de todo. Hoy vendes tu prosa el día de mañana te venderás a ti misma". [...]

En el primer acceso de cólera había exigido a su hija que no escribiera más; sólo con esta condición la perdonaría. Aniuta no consintió hacer tal promesa; padre e hija dejaron de hablarse, mi hermana no aparecía ni en la cena y mi madre iba de uno a otro persuadiéndolos y razonando. Al fin mi padre cedió. Su primer paso en la vía de las concesiones fue permitir la realización de una lectura de la pequeña novela de Aniuta. [...] El segundo acto de bondad fue más llamativo aún: mi padre permitió a Aniuta escribir a Dostoyevsky, con la única condición de enseñarle la carta, y le prometió que en el próximo viaje a San Petersburgo podría conocerle. [...]

¡Oh! ¡Sí, ese viaje fue tan bello! Es posiblemente el recuerdo más luminoso que me queda de mi infancia.

[Recuerdos de la infancia. Capítulo 9: Primeros ensayos literarios de Aniuta. Sonia Kovalévskaya]

Al final el padre cedió y permitió que las dos jóvenes, en compañía de su madre, fueran a San Petersburgo para conocer a Fiodor Mijáilovitch. Durante el tiempo que estuvieron en esta ciudad Dostoyevski las visitaba con frecuencia, incluso pidió la mano de Aniuta y fue rechazado. Mientras tanto Sonia creía estar profundamente enamorada de él.

> *A medida que las relaciones de Dostoyevsky con mi hermana se degradaban, al menos en apariencia, mi afecto por él iba creciendo. Día a día mi admiración aumentaba y yo sufría completamente su influencia; sin duda, él notaba esta absoluta admiración y le gustaba. Si Dostoyevsky expresaba algún pensamiento profundo, cualquier paradoja genial, en manifiesta contradicción con una moral rutinaria, mi hermana se hacía la ignorante como si no comprendiera nada. Mis ojos brillaban de entusiasmo; mientras que ella, para exasperarlo, respondía con cualquier banalidad.*
>
> *Usted tiene un alma miserable, penosa, decía entonces Fiodor Mijáilovtich con arrebato. ¡Mirad qué diferencia vuestra hermanita! Es una niña pero me comprende porque tiene un alma delicada. [...]*

[Recuerdos de la infancia. Capítulo 10: Nuestra relación con Dostoyesvsky. Sonia Kovalévskaya]

A los trece años empezó a mostrar unas muy buenas cualidades para el álgebra, pero su padre, a quien le horrorizaban las mujeres sabias decidió frenar los estudios de su hija. Ella consiguió hacerse con una copia de El Álgebra de Bourdon y la mantenía escondida para leerla cuando toda la casa dormía.

Un año más tarde recibieron en la casa la visita de Nikolai Nikanorovich Tyrtov, un vecino profesor de física, que dejó a la familia una copia de su nuevo libro escrito para el estudio de esta materia. Sonia comenzó a estudiarlo y se quedó atascada al llegar a la sección de óptica en la que se utilizaban razones trigonométricas que no había visto nunca. Entonces fue directamente a Tyrtov a preguntarle qué era exactamente un seno, pero él, sin hacerle demasiado caso, le contestó que no lo sabía.

De modo que Sonia comenzó a analizar y a explicar lo que era un seno partiendo de las cosas que ya conocía llegando a sustituirlo por el arco, que, dado que las fórmulas que trataba el libro se aplicaban en ángulos muy pequeños, lo aproximaban bastante bien. La siguiente vez que Tyrtov fue de visita a la casa, Sonia le pidió que discutieran sobre su libro y él, tras intentar cambiar de tema, concluyó que lo encontraba demasiado difícil para ella. Aquello fue demasiado para el orgullo de Sonia, y le comentó que el texto no había tenido ninguna dificultad para ella, e incluso le explicó cómo había ido deduciendo todo aquello que no conocía y que se utilizaba en el libro. Tyrtov quedó estupefacto y se dirigió al padre de Sonia para recomendarle que facilitara a su hija el estudio de las Matemáticas, explicando que su desarrollo sobre el concepto de seno había sido exactamente el mismo con el que históricamente se había introducido tal concepto en la Matemática.

Después de varios años accedió y le permitió tomar clases particulares de geometría diferencial, geometría analítica y cálculo infinitesimal con el profesor Alexandre Nikoláyevitch Strannoliubski. Este quedó asombrado por la rapidez con la que comprendía complejos conceptos matemáticos como asíntota o límite pues "parecía que los hubiera sabido de antemano". Y Sonia recordó que cuando fueron a vivir al campo no había suficiente papel pintado para todas las habitaciones y el cuarto de los niños fue empapelado con un libro litografiado de Ostrogradski sobre cálculo diferencial e integral. De esta manera se había familiarizado con muchas fórmulas matemáticas, y a pesar de que para ella, en aquella época, carecían de sentido, cuando comenzó a estudiar esos conceptos tuvo la sensación de que ya los conocía.

Strannoliubski también impulsó en Sonia su compromiso con el tema de la educación de las mujeres. Años más tarde trabajaron juntos para recaudar fondos destinados a crear universidades femeninas.

4.9.2. Un matrimonio ficticio

Durante la década de 1860 surgió en Rusia, entre la juventud, un movimiento denominado nihilismo que preconizaba la emancipación de la mujer, la liberación de los esclavos, la importancia de la Educación y de la Ciencia, además de revelarse contra todo tipo de autoridad. Primero Aniuta y después Sonia conocieron este movimiento a través del hijo del sacerdote del lugar y compartían sus principios.

> *[...] En el periodo de 1860 a 1870, se puede decir que, casi únicamente, se vivió un problema en las capas intelectuales de la sociedad rusa: La escisión en las familias entre padres e hijos. Si en esa época se preguntaba por una familia noble se recibía siempre la misma respuesta: "los padres se han enfadado con los hijos". Y estas riñas no tenían por causa ninguna dificultad material; se trataba de discusiones teóricas de carácter abstracto. Sus convicciones eran diferentes; eso*

era todo: pero lo suficiente para separar a los hijos de los padres y hacer que los padres fueran hostiles o indiferentes con sus hijos.[...]

[...]Cambia incluso exteriormente, se viste con ropa negra, sencilla, con el cuello a caja, y el pelo recogido en una red. Solo habla de bailes y de placeres con desprecio. Pasa la mañana dando clases de lectura a los niños de los criados o hablando tranquilamente con los campesinos que encuentra en sus paseos. [...]

[Recuerdos de la infancia. Capítulo 9: Aniuta nihilista. Sonia Kovalévskaya]

En 1865, la familia de Sonia se trasladó a San Petersburgo para que ella y su hermano menor pudieran seguir estudiando.

En esta época no estaba permitido asistir a la Universidad a las mujeres. Había estado autorizado en 1861 durante un corto periodo de tiempo, pero a raíz de una revuelta estudiantil, se cerró la Universidad y cuando se volvió a abrir se les volvió a negar el acceso.

Esta prohibición había generado en la juventud femenina un deseo enorme por adquirir el desarrollo intelectual al que no tenía derecho en su país y sólo había una forma de conseguirlo que era estudiar fuera de Rusia. Por supuesto, la mayoría de los padres se oponían a estas aspiraciones. Pero ellas habían encontrado una forma muy curiosa de liberarse de la tutela familiar y que se había puesto de moda entre estas jóvenes intelectuales herederas, la mayoría, de la antigua aristocracia rusa. La estrategia consistía en convencer a un joven, que compartiera estas mismas ideas, a contraer un matrimonio de conveniencia.

En este tipo de relaciones se sacrificaba el amor y la felicidad personal por una causa más noble que era contribuir a cambiar la sociedad y construir un país más libre, desarrollado y culto y esto sólo podía conseguirse cultivando las capacidades intelectuales que conlleva la formación personal de cada individuo.

Sonia acompañaba siempre a su hermana Aniuta y a las amigas de ésta, a pesar de que eran seis años mayores que ella, y como tantas jóvenes rusas, compartía estas ideas. Un día Aniuta y su amiga Zhanna decidieron ponerlas en práctica, consideraban que no era necesario encontrar un marido para cada una, uno sería suficiente y las otras podrían salir de Rusia acompañándolos.

El primer candidato fue un joven profesor de Universidad que apenas conocían, y aunque su respuesta fue un no rotundo, no les importó mucho, ya que la propuesta era un simple contrato muy alejado de los sentimientos personales y sin desanimarse siguieron buscando a la persona adecuada que aceptara enrolarse en sus planes. En este segundo intento el elegido fue un estudiante, Vladimir Kovalevski, que quería continuar sus estudios en Alemania, y como era inteligente y pertenecía a una buena familia, era muy probable que fuera bien aceptado por sus padres. Sin embargo su respuesta las desconcertó, ya que aceptaba el juego pero era con Sonia con quien quería casarse.

Esto suponía un verdadero problema, y las dos hermanas lo sabían de antemano, su padre nunca autorizaría la boda de Sonia con sólo 17 años. Y así fue, el general no aceptó la propuesta de matrimonio y además decidió volver a Palibino. Sonia, que lo que más deseaba era salir al extranjero para poder estudiar Matemáticas, elaboró un plan para obligar a su padre a cambiar su decisión.

Un día, que debido a una fiesta había un cierto revuelo en la casa, salió sola, sin ser vista y fue hasta la casa de Kovalevski. Cuando notaron su falta, Aniuta les dijo que había salido pero que había dejado una nota, en la que ponía simplemente: "Perdóname papá, estoy en casa de Vladimir, te suplico que no te opongas a mi boda".

Al leer su padre estas líneas salió inmediatamente a buscarla, volvió a casa con los dos y presentó a Kovalevski como el novio de su hija. La boda se celebró ese mismo año, 1868, en Palibino.

Después de seis meses en San Petesburgo, donde Sonia fue introducida por su marido en los círculos políticos, en la primavera de 1869 la pareja llegó a Viena que no resultó la ciudad más adecuada para estudiar Matemáticas y decidieron establecerse en Heidelberg. Pero al llegar se dieron cuenta de que allí tampoco estaba permitido el acceso de las mujeres a la universidad y después de muchos esfuerzos, Sonia consiguió un permiso para que la admitieran como oyente. Estudió con los profesores P. du Bois-Raymond y Koenigsberger.

Ese verano lo pasaron en Inglaterra donde conocieron a George Eliot, Darwin, Herbert Spencer y Huxley, entre otros personajes célebres de la época.

George Eliot en su diario cita esa primera visita de M. y Mme. Kovalevsky, sobre ella decía que era "una encantadora y modesta criatura, de conversación y maneras atractivas", de él que era "un hombre simpático e inteligente, especialmente dotado para la geología".

Eliot y Sonia se hicieron amigas y más tarde Sonia escribió sus *Recuerdos de George Eliot,* publicados en Rusia en 1886.

Durante un semestre la pareja vivió en Heidelberg con una amiga Julia Lermontova. Sonia había conseguido que los padres de Julia la dejaran salir de Rusia para vivir con ellos y poder así, continuar sus estudios de Química en la Universidad. También para ella hubo que conseguir un permiso para asistir a las clases, pero esta segunda vez fue mucho más fácil.

A pesar de que el matrimonio era ficticio, Vladimir daba un carácter de intimidad, absolutamente platónico, a sus relaciones con Sonia, lo que se vio perturbado cuando llegaron a vivir con ellos Aniuta y su amiga Zhanna. Para evitar los problemas de relación que surgían entre este pequeño grupo de amigos, Kovalevski decidió seguir sus estudios fuera de Heidelberg, fue a Jena donde terminó su doctorado con un tratado que lo convirtió en uno de los fundadores de la Paleontología Evolutiva. Mientras vivió alejado de Sonia, la visitaba con frecuencia, de la misma forma que ella también hacía muchos viajes para verlo a él.

4.9.3. Al fin Doctora

En otoño de 1870 Sonia decidió ir a Berlín para estudiar con Weierstrass, a quién consideraba "el padre del Análisis Matemático". Como no estaba permitido el acceso de las mujeres a las actividades universitarias y aquí de forma mucho más firme, ya que no podían ni escuchar las conferencias, se dirigió directamente a Weierstrass para pedirle clases particulares

El célebre profesor, un hombre de 55 años, comprensivo y simpático, se mostró perplejo ante la petición de Sonia y para ponerla a prueba, le dio un conjunto de problemas, preparados para sus alumnos más avanzados. Cuando una semana más tarde llegó Sonia con los problemas resueltos, Weierstrass, dudó, pero la invitó a sentarse y al examinar cuidadosamente su trabajo, observó asombrado que no sólo sus soluciones eran exactas, sino que además eran ingeniosas claras y originales. Weierstrass, impresionado por su talento matemático, sintió hacia ella una especial ternura y a partir de este momento se convirtió en su amigo más fiel, que siempre la apoyó y animó en su trabajo.

Durante los cuatro años siguientes la admitió como alumna particular dándole clases gratuitas y acordó que se reuniría con ella dos veces a la semana, un día el profesor iba a su casa y el domingo por la tarde era Sonia la que iba a casa del profesor. De esta forma pudo completar sus estudios.

A pesar de que Vladimir había llevado a Sonia y a Julia hasta Berlín, las había ayudado a instalarse y además, las visitaba con frecuencia, sus relaciones en esta época se volvieron un poco tensas, debido a que él no comprendía la relación de intimidad de su mujer con la familia Weierstrass en la que era tratada como una hija.

La vida triste y gris que las dos amigas llevaron durante esta época, mal alojadas, mal alimentadas, sin ninguna distracción y totalmente sumergidas en el trabajo, tuvo para Sonia un pequeño rayo de luz cuando en enero de 1871, apenas comenzados sus estudios, hizo un viaje a París, acompañada de su marido, para visitar a su hermana.

Aniuta se había instalado en París sin la autorización de sus padres. Pensaba que si había salido de Rusia no era para estar encerrada en una habitación como su hermana, porque lo que anhelaba era introducirse y vivir los movimientos sociales, políticos y literarios de una gran ciudad.

Y así fue, en París conoció a uno de los jefes de la Comuna y durante el estado de sitio, permaneció con él sin poder salir de allí, mientras tanto, y de forma provisional, mandaba las cartas dirigidas a su familia a su hermana, que las reenviaba desde Alemania para no levantar sospechas.

Sonia, que se sentía responsable, quiso disuadirla, pero esto suponía llegar a París burlando el cerco alemán. Todo el viaje fue una gran aventura. De hecho Sonia quería escribir una novela titulada Las hermanas Kajevski durante la Comuna en la que quería contar, sobre todo, la experiencia de una noche en la que las dos hermanas atendían a los heridos en una ambulancia, entre las bombas que estallaban por todas partes, y en vez de miedo les embargaba la euforia y la maravillosa sensación de estar construyendo la historia.

Un mes después, cuando Sonia comprendió que no podía hacer nada por su hermana, ya que estaba viviendo la vida que deseaba al lado del hombre que amaba, los Kovalevski regresaron a Berlín.

Poco después, cuando la Comuna fue vencida, Aniuta recurrió a ella y le pidió que intercediera ante su padre, para que resolviera una terrible situación: Su compañero, Víctor Jaclard, había sido detenido y condenado a muerte. En este momento el general Krukovski tomó conciencia de la realidad de la vida de sus hijas: la mayor estaba viviendo con un hombre con el que no estaba casada, y la pequeña estaba casada con un hombre con el que nunca había convivido. Sin embargo la reacción favorable del general hizo cambiar en sus hijas la relación que tenían con él, y la frialdad, respeto y distanciamiento se convirtió en ternura y agradecimiento.

En 1874 Weierstrass consideró que los trabajos de Sonia eran suficientes para obtener su doctorado. Como en Berlín era imposible, habló con un antiguo alumno suyo, Lazarus Fuchs de la Universidad de Göttingen para que se le concediera el doctorado sin examen oral, sólo con los trabajos entregados. La Universidad puso múltiples objeciones, pero Weierstrass hizo todo lo posible, argumentando la calidad de los trabajos presentados, tenía miedo de que tuviera problemas en un examen oral debido a su timidez y a que no hablaba bien alemán. Después de una enorme cantidad de gestiones, la Universidad aceptó y Sonia presentó tres trabajos de investigación, el primero *Sobre la teoría de ecuaciones en derivadas parciales*, el segundo *Suplementos y observaciones a las investigaciones de Laplace sobre la forma de los anillos de Saturno* y el tercero *Sobre la reducción de una determinada clase de integrales abelianas de tercer orden a integrales elípticas*. Su primer trabajo fue aceptado como tesis doctoral y se le concedió el grado de doctora "Cum laude", y además fue publicado en "Crelle´s Journal für die reine und angewandte Mathematik", la más importante de las publicaciones matemáticas en Alemania a la que contribuían únicamente las mentes más privilegiadas del mundo de las matemáticas.

> *En cuanto a la formación matemática de la Señora Kovalévskaya en general, yo puedo aseguraros que he tenido pocos alumnos con los que pueda comparar su capacidad intelectual, su energía y su entusiasmo para la ciencia.*
>
> *[…] Una de sus memorias trata de la extensión del teorema sobre la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando series de potencias que yo había establecido en mi memoria sobre las funciones analíticas y que ha sido demostrado por*

Briot y Bouquet en el caso de varias variables para un número dado de ecuaciones.

Sin duda, ese problema merece un estudio profundo. Francamente, yo había pensado estudiarlo; por lo tanto estoy muy satisfecho de que la Señora Kovalévskaya se haya interesado a fondo en este trabajo. Ella ha resuelto con talento, de la forma más simple y más completa todas las dificultades que se le han presentado.

[Carta que Weierstrass escribe a Fusch, presentando los resultados de Sonia para obtener su doctorado.]

Su trabajo sobre ecuaciones en derivadas parciales continúa siendo un resultado muy importante en el tratamiento de estas ecuaciones. El teorema principal que contiene se conoce hoy en día como el teorema de Cauchy-Kovalévskaya. En 1842, el matemático francés Cauchy había comenzado una serie de cuatro publicaciones sobre la integración de ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones iniciales. Sonia se enfrentó al problema sin conocer este trabajo, dándole la forma definitiva al teorema y encontrando una demostración simplificada.

Fue la primera mujer en el mundo occidental que obtuvo el doctorado en Matemáticas. También Julia Lermontova se doctoró en Química, después de pasar por el examen oral.

4.9.4. Un paréntesis en su trabajo matemático.

Sonia ya era doctora, sin embargo no podía aspirar a trabajar en ninguna universidad de Europa y volvió a Rusia con su marido donde solicitó un permiso para presentarse a una prueba que le permitiera dar clase en una universidad rusa, pero el ministro de Educación se lo denegó.

Ese invierno toda la familia lo pasó en Palibino. La mayor alegría para Sonia fue observar el cambio que se había producido en el carácter de su padre, en el que no quedaba nada de la dureza y el despotismo de otra época. Era admirable su tolerancia con el discurso subversivo del marido de Aniuta y con los principios materialistas de su marido.

Por esta razón, supuso un golpe terrible para ella la rápida muerte del general de una enfermedad cardiaca. El aislamiento y el dolor en que quedó sumida y la necesidad de afecto y consuelo, la unió cada vez más a Vladimir y poco a poco fueron cambiando sus relaciones de amistad por las de marido y mujer.

El invierno siguiente la familia volvió a San Petersburgo. Los Kovalevski se introdujeron enseguida en el círculo social más distinguido de la ciudad, donde llevaron una vida mundana repleta de fiestas y de lujo.

Sonia había abandonado las Matemáticas hasta tal punto que no contestaba las cartas de Weierstrass, se dedicaba a la Literatura y escribía en un periódico artículos científicos y críticas de teatro. Vladimir tenía una editorial en la que publicaba obras de popularización científica. La vida de lujo y los muchos gastos que tenía la pareja los llevó a realizar ciertas especulaciones con empresas de construcción con las que, al principio, tuvieron mucho éxito.

En 1878 mientras esperaba el nacimiento de su hija Sofia Vladimírovna Kovalévskaya, llamada Fufa, Sonia escribió a Weierstrass y le pidió ayuda e información para volver al estudio de las Matemáticas. Sin embargo no empezó hasta enero de 1880 cuando fue invitada por

Chevichev a dar una conferencia para el Sexto Congreso de Ciencias Naturales. Eligió una disertación no publicada sobre integrales abelianas. En una noche la tradujo al ruso y, cuando la presentó, entusiasmó al público, entre el que estaba Gösta Mittag-Leffler, alumno de Weierstrass, que la había conocido unos años antes en San Petersburgo, y que había ido al congreso para escucharla y convencerla, de parte del maestro, para que reanudara su trabajo matemático.

El profesor sueco quedó tan impresionado por la inteligencia de Sonia y sorprendido por el contraste entre su prodigioso talento y su aspecto juvenil que, más tarde, cuando fue nombrado profesor de la Universidad de Estocolmo, uno de sus primeros objetivos fue obtener una plaza para ella en esa Universidad.

Las especulaciones que habían comenzado tan brillantemente fueron fracasando una tras otra, y Sonia que había conseguido olvidar la catástrofe financiera centrándose en las Matemáticas, intentó que Vladimir hiciera lo mismo. Estudió Geología y Paleontología para ayudarle a preparar sus cursos y poder trabajar con él en la traducción de *Las aves* de Brehm.

Sin embargo, ni los esfuerzos de Sonia, ni el cambio de residencia a Moscú, donde Vladimir fue nombrado profesor de Paleontología de esta Universidad, consiguieron alejarlo de los negocios.

Las relaciones de los Kovalevski se fueron deteriorando paulatinamente. Ella no resistía vivir con él, cuando estaba convencida de que había perdido su amor y su confianza, y además no soportaba la idea de verlo precipitarse en el abismo, sin poder hacer nada para evitarlo. Para huir de esta situación Sonia decidió dejar su país y a su hija, que se quedó con su amiga Julia, para volver a una vida dedicada a las Matemáticas en el extranjero. Primero fue a Berlín, donde Weierstrass le aconsejó que trabajara sobre la refracción de la luz en un medio cristalino. Regresó a Moscú, pero las relaciones con Vladimir seguían tan tensas que volvió a salir de Rusia. Esta vez fue a París y se llevó a su hija. Allí conoció a Hermite, Poincaré y Picard, y fue elegida miembro de la Sociedad Matemática. A partir de ese momento Sonia vivió en el extranjero y sólo fue a Rusia durante cortos periodos de tiempo.

El 15 de abril de 1883, poco después de haber mandado a su hija a Rusia, recibió la noticia de la muerte de su marido. Kovalevski fue acusado de fraude y al darse cuenta de que había sido engañado no pudo soportar la idea de haber arruinado su vida y la de su familia y se suicidó tomándose una botella de cloroformo. El anuncio de esta trágica muerte la hizo caer enferma en un colapso, se quedó inconsciente y despertó al cabo de cinco días. Entonces pidió lápiz y papel, para continuar con sus Matemáticas, la única forma que existía para ella de superar esa situación.

4.9.5. Profesora en Estocolmo.

Sonia conocía los esfuerzos que Gösta Mittag-Leffler estaba realizando para conseguirle un puesto de trabajo en la Universidad de Estocolmo. Ya lo había intentado anteriormente en la Universidad de Helsingfors y aunque no lo consiguió, en Estocolmo era más fácil ya que era una universidad nueva y progresista, sensibilizada con el problema de la emancipación de la mujer.

Antes de su creación, la única universidad de Suecia era la de Upsala, antigua y conservadora, que no cubría las expectativas de la sociedad sueca inmersa en un proceso de liberalización. La Universidad de Estocolmo se concibió como una universidad libre donde las mujeres podían acudir exactamente con las mismas oportunidades que los hombres y aunque fue fundada de forma privada, poco después el Estado se hizo cargo de la mitad de los gastos.

En agosto de 1883 Sonia viajó a Odesa para dar una conferencia sobre la refracción de la luz en un Congreso de Naturalistas y Médicos Rusos, desde allí escribió a Mittag-Leffler y a Weierstrass expresándoles sus dudas sobre su preparación e intentando retrasar unos meses su viaje a Estocolmo. Pensaba que si podía pasar algún tiempo en Berlín junto a su Maestro, resolvería ciertas dudas que ahora tenía sobre sus teorías y ensayaría su profesión docente con algunos jóvenes matemáticos que conocía y a los que les podía explicar su trabajo sobre las transformaciones de funciones abelianas.

Pero la estancia en Berlín no se llevó a cabo porque fue aceptada en la Universidad de Estocolmo y el 11 de noviembre de ese mismo año dejó Rusia para instalarse en Suecia. El puesto docente que se le ofrecía durante ese primer año, en el que se pretendía probar su competencia, no era oficialmente remunerado, la pagaban sus alumnos y a través de una suscripción popular.

Su llegada fue un acontecimiento que salió en la prensa y un periódico la saludaba como "*princesa de la ciencia*" a lo que ella replicó: "*¡Una princesa! Si tan sólo me asignaran un salario*".

Durante estos primeros días Mittag-Leffler quiso hacer una fiesta para presentarla a sus amigos del mundo universitario pero ella le dijo que esperara quince días para que pudiera hablar sueco y efectivamente al cabo de dos semanas hablaba lo suficiente para hacerse comprender. Durante el primer año daba las clases en francés o en alemán, el segundo año ya las daba en sueco.

En Estocolmo conoció a Anne-Charlotte Leffler, escritora y hermana de Mittag-Leffler. Desde el primer momento se hicieron amigas y como compartían ideas sobre la emancipación de la mujer colaboraron en actividades orientadas a conseguir los derechos que hasta entonces les estaban vetados a las mujeres. Posteriormente colaboraron en obras literarias y, cuando Sonia murió, Anne escribió su biografía.

Este primer año estuvo totalmente dedicada al trabajo. Impartía clases tres veces por semana sobre los temas más recientes y avanzados del Análisis, supervisaba el trabajo de sus alumnos y continuaba con sus investigaciones.

A partir de entonces comenzó a colaborar en la redacción del *Acta Matemática*, una revista internacional fundada por Mittag-Leffler en 1882, que después de más de un siglo sigue teniendo vigencia y que le permitió estar en contacto con matemáticos de todo el mundo.

Sonia aprovechó sus vacaciones para ir a Berlín pasando por San Petersburgo, para ver a su hija, y aunque estuvo tentada de llevársela a Estocolmo, al final decidió dejarla un año más en Rusia.

El 1 de julio, cuando ya estaba en la capital alemana, recibió la noticia de que había sido nombrada oficialmente profesora en Estocolmo para un periodo de cinco años. Sin embargo, siendo profesora de una Universidad europea, y a pesar de los esfuerzos de Weierstrass, ni siquiera se le permitió asistir a un curso en la Universidad de Berlín porque era una mujer.

En septiembre terminó un trabajo sobre la refracción de la luz en los medios cristalinos que publicó en el *Acta Matemática*. Ya había publicado otro el año anterior sobre este mismo tema, sin embargo la obra tenía un error, que consistía en considerar una función de varias variables como si sólo tuviera una.

Aunque en general tuvo una buena acogida en la sociedad sueca, también recibió críticas, como la que se recoge en un artículo, del dramaturgo August Strindberg, que decía:

> *"Una mujer profesora de matemáticas es un fenómeno pernicioso y desagradable incluso se podría decir que una monstruosidad; y su invitación a un país donde hay tantos matemáticos del sexo masculinos cuyos conocimientos son muy superiores a los de ella sólo se puede explicar por la galantería de los suecos hacia el sexo femenino".*

Ella lo comentó en una carta que escribió desde Berlín a Mittag-Leffler. Podía admitir que era una monstruosidad el que una mujer fuera profesora de Matemáticas, pero nunca que en Suecia había tantos hombres matemáticos y la hubieran nombrado por galantería.

> *He recibido de vuestra hermana como regalo de Navidad un artículo de Strindberg en el que prueba que del mismo modo que dos y dos son cuatro, una monstruosidad, como es que una mujer sea profesora de matemáticas, es pernicioso, inútil y desagradable. Encuentro que tiene razón en el fondo. El único punto con el que no estoy de acuerdo es que haya en Suecia tantos hombres matemáticos y que me hayan nombrado por pura galantería*

[Carta que escribe desde Berlín a Mittag-Leffler en diciembre de 1884; Leffler (1895)]

Durante el otoño había hecho una pequeña incursión en la vida mundana de la ciudad, había aprendido a patinar y simultaneaba su trabajo matemático con los deportes y otros divertimentos. Conoció a los hermanos Novel que quedaron impresionados por su talento, su atractivo y sobre todo por su discurso interesante e ingenioso que hizo que sus amigos suecos la llamaran "Miguel Ángel de la conversación". En sus cartas a Mittag-Leffler le cuenta lo impresionada que estaba por las atenciones de los hermanos, pero que los consideraba demasiado mayores para ella y muy serios para su gusto.

Sin embargo la felicidad de esos días se vio truncada en Navidad cuando recibió la mala noticia de que la enfermedad de corazón de su hermana había empeorado, la mala circulación la estaba paralizando poco a poco, y ya no podía leer ni escribir.

4.9.6. Prólogo a su actividad literaria y a su mayor éxito matemático

Durante los primeros meses de 1885 Sonia estaba absorbida por su trabajo matemático y literario, impartía tres cursos por semana, en sueco, sobre la introducción algebraica a la teoría abeliana, cursos que en Alemania eran considerados como los más difíciles, escribió un artículo que Weierstrass publicó en el *Brochardt's Journal*, y colaboraba con Mittag-Leffler en la edición del *Acta Matemática*, además escribió artículos para uno de los periódicos más importantes de Estocolmo.

En la primavera de ese año fue nombrada profesora de Mecánica, para sustituir al profesor Holmgren que estaba gravemente enfermo. El verano lo pasó en Rusia, entre San Petersburgo, cuidando a su hermana, y Moscú con Julia y su hija.

Mittag-Leffler la propuso para formar parte de la Academia de Ciencias de Suecia, lo que suponía que en los estatutos se debía cambiar la palabra "hombre" por "persona". Desgraciadamente en aquella época Kronecker estaba ofendido con Gösta y con ella por que su 60 cumpleaños no había sido tan celebrado como el 70 aniversario de Weierstrass y escribió una carta a la Academia desestimando la nominación. Esto supuso un verdadero apoyo a todos aquellos que estaban en contra de la presencia de las mujeres en la Academia y finalmente no fue elegida.

Sonia era una persona con tendencia a la melancolía y cuyas emociones influían decisivamente en su trabajo y en ese invierno de 1886 empezaba a cansarse del ambiente provinciano de la ciudad, echaba de menos el estímulo intelectual de otras ciudades como París o Berlín y consideraba Estocolmo como un exilio, se sentía indiferente con sus cursos y este estado de ánimo le impedía realizar cualquier trabajo creativo literario o matemático.

Hasta que en junio, cuando acabó el semestre, viajó a París donde se sintió feliz, rodeada de grandes matemáticos que la cuidaban y se preocupaban por ella. Fue durante esta estancia cuando decidió ocuparse seriamente de un problema matemático con el que podía obtener el "Prix Bordin" (Premio Bordín) que la Academia de Ciencias de París otorgaba a la mejor investigación que resolviera el problema de la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo bajo la influencia de la fuerza de la gravedad, con la condición de que el trabajo debería, al menos, mejorar las investigaciones que se habían hecho ya previamente en el terreno de la Mecánica.

Este problema siempre había tenido mucho interés para Sonia, había empezado a estudiarlo en su época de estudiante, pero todos sus esfuerzos, durante muchos años, para solucionarlo no habían cristalizado en un resultado satisfactorio. Sin embargo fue una chispa que cambió sus emociones trasformando la depresión por la que había pasado en los últimos meses en ganas de vivir y felicidad. Para ella "la cosa más bella del mundo" era encontrar la solución de un problema científico y poder discutirla y compartirla con otros matemáticos.

> *Desde entonces la ciencia daba valor a su vida; todo lo demás, la felicidad personal, el amor, la naturaleza y los sueños de la imaginación eran la locura; la solución de un problema científico era el objetivo más elevado que alguien se puede proponer, y poder compartir y discutir estas ideas intelectuales, suponía para ella, la cosa más bella del mundo.*

[Descripción de Anne-Charlotte sobre la importancia del trabajo intelectual para Sonia; A. Leffler (1895)]

Aunque había quedado con su amiga Anne-Charlotte en Copenhague, antes de ir al Congreso de los naturalistas rusos en Cristiana, no fue capaz de dejar París y llegó directamente al congreso, donde se reunió con ella para hacer un viaje por Noruega. La visita que hicieron a la Escuela Superior Popular de Ullmans fue el tema de uno de los artículos que escribió, y que tuvieron mucho éxito, para la revista rusa "*El mensajero del Norte*".

Este viaje fue para Sonia un verdadero reencuentro con la naturaleza, subiendo montañas, descendiendo ríos en barcos de vapor y cautivada por la belleza de los fiordos, se sintió alegre, audaz, viva e infatigable, estaba encantada con todos los compañeros que se encontraban y sin embargo, cuando estaban a mitad de camino de ese recorrido, que había sido tan deseado y cuidadosamente planificado durante tanto tiempo, decidió volver a Estocolmo para recomenzar su trabajo científico.

Antes de terminar el verano tuvo que volver a Rusia, para cuidar a su hermana que continuaba gravemente enferma, y cuando regresó, para comenzar el nuevo curso, trajo por fin con ella a su hija que ya tenía ocho años.

Hasta entonces Sonia había vivido en una pensión lo que le permitía tener tranquilidad y emplear su tiempo con toda libertad, sin tener que acomodarse a la vida en común, pero el hecho de vivir con su hija cambió su vida y sus amigos le buscaron un apartamento y una señora de confianza para que se ocupara de la casa y de la niña.

La personalidad de Sonia, respecto a su forma de actuar en la vida cotidiana y en los problemas prácticos de cada día, era en cierto modo contradictoria. Se sentía incapaz de resolver sus asuntos domésticos y financieros, incluso no sabía cuidar de su hija, ni incluso de sí misma y sin embargo era una persona totalmente independiente.

Todos los problemas prácticos le parecían estúpidos pero siempre encontraba un amigo que se encargaba de sus intereses y que asumía el peso de sus asuntos y era tan placentero para ella, que la ayudaran en estos pequeños detalles, que es posible que, en este aspecto, exagerara sus miedos y debilidades.

> *Nunca aprendió a moverse en Estocolmo [...] No podía cuidar ni de sus asuntos financieros, ni de sí misma, ni de su hija. [...] Junto con una energía y un*

genio totalmente masculinos y, en ciertas cosas, un carácter inflexible, tenía una debilidad muy femenina.

Ella misma decía: Todos los problemas prácticos son tan estúpidos que ineludiblemente ponen seriamente a prueba mi paciencia y empiezo a comprender porque los hombres aprecian tanto a las amas de casa buenas y eficaces. Si yo fuera hombre me buscaría una bonita mujer para que me liberara de todas las tareas domésticas.

[Descripción de Anne-Charlotte; A. Leffler (1895)]

Los muebles del salón se los había traído de Rusia, eran los de la casa de sus padres, viejos muebles aristocráticos pero deteriorados con el uso y el paso del tiempo, sin embargo nunca los mandó restaurar ya que, además de no tener la necesidad de repararlos, para Sonia su estancia en Suecia siempre fue provisional.

Pero una vez más tuvo que viajar a San Petersburgo para cuidar a su hermana que ya estaba entre la vida y la muerte, dejó a su hija con su amiga Anne-Charlotte, y durante los dos meses y las largas noches que pasó a los pies de la cama de la enferma, Sonia reflexionó sobre su vida y soñaba con modificar el presente alterando algunos hechos del pasado y sus deseos se convirtieron en un proyecto de novela.

Cuando volvió a Estocolmo convenció a su amiga Anne-Charlotte para que la escribieran juntas, y así decidieron formar una maravillosa sociedad en la que ambas se sentían entusiasmadas tanto por el proyecto como por la idea de la colaboración. Lo que en principio era una novela, pronto pasó a ser una obra de teatro en dos partes y diez actos, la primera parte contaría "lo que fue" y la segunda "lo que hubiera podido ser".

Cuando Sonia se refería a esta obra de teatro la llamaba "son enfant", ella era el padre, ya que sólo participaba con las ideas, y Anne-Charlotte la madre ya que tenía que componer la obra y escribir los diálogos, les apasionaba el hecho de colaborar y compartir una obra literaria y se vanagloriaban de ser el primer ejemplo de dos mujeres que colaboran en Literatura. Más tarde llamó así a toda su obra literaria.

> *Sonia desborda alegría con el giro que este proyecto ha dado a nuestras vidas; ahora comprende como un hombre puede estar siempre prendado de la madre de su hijo. Pues naturalmente yo soy la madre, ya que soy la que debo traer al niño al mundo; y ella está tan apasionada que, con sólo contemplar su brillante mirada, me siento feliz. No creo que existan dos mujeres que se hayan divertido tanto juntas, y creo que somos el primer ejemplo, en la Literatura, de dos colaboradoras. Nunca había experimentado tanto entusiasmo por una idea.*

[Carta de Anne-Charlotte del 10 de febrero de 1887; A. Leffler (1895)]

Sin embargo la ilusión con la que habían trabajado juntas les había impedido detectar los defectos de la obra, que la veían "como debería ser" y no "como era". No se dieron cuenta hasta que hicieron una primera lectura ante unos amigos. Pero remodelar la obra fue mucho más pesado que lo que les había costado escribirla y este pequeño fracaso debilitó tanto su estado de ánimo que fue incapaz de retomar su trabajo matemático, a pesar de que el concurso sobre el "Prix Bordín" ya era público, y de que Mittag-Leffler intentaba alentarla haciéndole ver lo importante que era, para su futuro como matemática, conseguir ese premio.

Habían decidido hacer en verano un viaje juntas a París y Berlín para promocionar su obra que al final la llamaron *La lucha por la felicidad* y que firmaban con el seudónimo Korvin-Leffler, pero Sonia tuvo que volver a Rusia, para cuidar a su hermana, ya que su marido tenía que hacer un viaje a París. Todas las cartas, que durante este tiempo Sonia escribió a su amiga, ponen de manifiesto el desánimo en el que estaba sumida, no soportaba ver sufrir tanto a Aniuta y además temía que no pudiera curarse. Lo único que la entretenía un poco era pensar en los nuevos proyectos literarios que tenía previsto realizar con su amiga.

Cuando volvió en otoño y mientras terminaban la versión definitiva de "*La lucha por la felicidad*" recibió la noticia de la muerte de su hermana. En Navidad la obra estaba ya impresa, pero debido a la mala crítica de un periódico, los teatros no quisieron representarla. Este fracaso fue el fin de la sociedad literaria Korvin-Leffler.

En enero de 1888 Anne-Charlotte viajó a Italia y no volvió a encontrarse con Sonia hasta septiembre de 1889, y para entonces habían pasado tantas cosas en sus vidas que ya no eran las mismas.

4.9.7. El premio Bordín

Aquel invierno Sonia encontró casualmente a Máxime Kovalevski, jurista ruso y pariente lejano de su marido. Desde su primer encuentro siente por él una gran simpatía y admiración y poco a poco sus sentimientos se van transformando en un amor apasionado. A partir de ese momento la relación con él iba a influir decisivamente en el resto de su vida.

Durante todo el año, la vida de Sonia fue una continua lucha entre su amor a Máxime y su trabajo matemático para conseguir el Prix Bordin.

Sentía como su deseo de fama y celebridad se interponía peligrosamente en su relación con el hombre que amaba. Lamentaba que la gloria que podía adquirir como matemática, obteniendo el premio más importante de la Academia de Ciencias de París, no le servía para hacerse deseada. Y envidiaba a las actrices o las cantantes de ópera porque la fama y los triunfos que alcanzaban en su trabajo les facilitaban la conquista del corazón de un hombre.

> *Una cantante de ópera o una actriz que tiene éxito, conquista a menudo el corazón de un hombre, gracias a sus triunfos, decía Sonia; una mujer guapa admirada por su belleza en el salón, también triunfa por ello. Pero una mujer con los ojos rojos de tanto estudiar y con la frente surcada de arrugas para ganar un premio de la Academia de Ciencias. ¡Cómo puede cautivar la imaginación de un hombre!*

[Palabras de Sonia; A. Leffler (1895)]

Estuvo a punto de dejarlo todo, su ambición y su vanidad, por el amor de Máxime. Pero abandonar en el último momento era una clara prueba de incompetencia y ese sentimiento, en ella, era más fuerte que su amor.

Antes del verano logró resolver el problema, pero estuvo a punto de no poder presentarlo pues no tenía tiempo de revisar el manuscrito. Además quería tener la opinión de Weierstrass sobre la redacción definitiva. Escribió a su amigo Charles Hermite, preguntando si podía enviar el borrador y cambiarlo después por la versión definitiva, lo que fue aceptado.

La víspera de Navidad de 1888, la Academia Francesa de Ciencias, en una sesión solemne, le concedió, el Premio Bordín por su trabajo*: Sobre el problema de la rotación de un cuerpo alrededor de un punto fijo*. Se anunció que el trabajo ganador, escogido entre quince presentaciones anónimas era tan elegante que se habían añadido al premio un suplemento de dos mil francos. Además esta distinción científica no era solamente una de las más grandes que una mujer había recibido nunca, sino también una de las más altas que cualquier hombre hubiera querido alcanzar.

Durante toda la ceremonia Sonia estuvo acompañada de Máxime que se ofendió un poco de que en todo momento se le tratara como "señor de".

Cuando Sonia volvió a Estocolmo, el enorme esfuerzo que había realizado y la separación de Máxime, la dejaron sumida en un lamentable estado de depresión, comía poco, dormía mal, estaba muy nerviosa y no tomaba interés por nada de lo que hacía.

En una carta dirigida a Mittag-Leffler el 12 de enero de 1889, le comentó lo infeliz que se sentía a pesar de las cartas de felicitación que estaba recibiendo de todo el mundo.

> *Estoy recibiendo cartas de felicitación de todo el mundo, pero por una extraña jugada del destino no me he sentido en toda mi vida tan infeliz como ahora. Tan infeliz como un perro; pero a favor de los perros espero que ellos no puedan sentirse tan infelices como los hombres y sobre todo como las mujeres.[...].*

[Carta que escribe Sonia desde Berlín a Mittag-Leffler el 12 de enero de 1889; R. Cooke (1984)]

Este estado depresivo fue la razón, más importante, por la que decidió pedir a Mittag-Leffler, que era entonces el rector, un permiso para el semestre de primavera por problemas de salud. Pero había otras razones, ya que si vivía en París podría ver a Máxime más frecuentemente, además podía intentar establecerse allí como profesora universitaria, para lo que necesitaba residir durante seis meses en Francia y tener el grado de doctora de una universidad francesa y para conseguir esto podía utilizar la memoria que acababa de ser premiada.

Cuando Weierstrass conoció sus planes se quedó horrorizado, le escribió una carta en términos muy duros para que desistiera, ya que no había ninguna posibilidad de que la Academia Francesa admitiera a un extranjero, y menos a una mujer. Además solicitar un segundo grado de doctora en el mismo campo en el que ya tenía otro, era un desprecio a la Universidad de Göttingen que le había otorgado el primero.

Sonia renunció al proyecto de buscarse una posición en París, pero no al permiso que le permitía pasar la primavera en esta ciudad. Mittag-Leffler se lo concedió a pesar de que podía peligrar su renovación, ya que su contrato de cinco años terminaba durante su ausencia. Sin embargo en mayo de 1889 fue nombrada profesora vitalicia en Estocolmo, con la valoración positiva de Bjerknes y Hermite.

Por la correspondencia de Hermite se sabe que cuando tuvo que evaluar los trabajos matemáticos de Sonia, a petición de su Universidad, sólo se ocupó del último, por el que había recibido el premio de la Academia Francesa, y pidió a Stieltges que valorara el resto, éste se comprometió a analizar solamente los relativos a ecuaciones en derivadas parciales y el estudio sobre los anillos de Saturno. Para su trabajo sobre la reducción de integrales abelianas pensó que la persona más adecuada, porque sabía más sobre ese tema, era Picard.

En otoño de 1889 amplió y pulió la memoria por la que había recibido el premio Bordín en dos trabajos, a uno de ellos la Academia Sueca le otorgó un premio de 1.500 coronas y se publicó en el Acta Matemática.

Con un planteamiento original interpretaba el tiempo como una variable compleja, generalizaba el problema y conseguía determinar todos los casos posibles obteniendo como casos particulares los resultados que habían dado a este problema Euler y Lagrange. Su solución resolvió analíticamente el problema ya que no existe ningún otro caso del movimiento rotatorio de un sólido alrededor de un punto fijo.

4.9.8. Su actividad literaria.

Aquella primavera la ciudad de París estaba especialmente llena de vida, ya que era el año de la Exposición Universal y de la torre Eiffel, lo que le permitió relacionarse con familiares y amigos que visitaban la ciudad. Así encontró a un primo que no veía desde su juventud y que cuando volvió a Rusia intentó buscarle allí un puesto universitario. Todavía esto era imposible para una mujer, pero gracias al esfuerzo de Chevichev y otros matemáticos se la nombró miembro honorífico de la Academia de Ciencias de San Petersburgo, aunque para lograr este nombramiento se había tenido que hacer una enmienda a la carta constitutiva.

Otros de los visitantes fueron Mittag-Leffler y su esposa que le llevaron a Fufa, su hija, para que pasara una temporada con ella.

A pesar de todo su estado de ánimo no mejoró sensiblemente y decidió refugiarse en la Literatura. Comenzó a escribir un libro autobiográfico sobre su infancia, en el que quería relatar, sobre todo, la juventud de su hermana, cuando ésta comenzó a escribir, y la relación que tuvieron con Dostoyevski. También tenía otros muchos proyectos de novela, algunos desde hacía tiempo como *Vae Victis* y *Si la muerte no existiera*, que habían surgido en la época de su colaboración literaria con su amiga Anne-Charlotte, y otros nuevos como *Los aparecidos*.

El verano lo pasó en Sèvres, con su hija, y cuando en septiembre volvió a Estocolmo, había terminado *Recuerdos de la infancia* y la introducción de *Vae Victis*, los demás proyectos sólo los tenía esbozados.

Un nuevo encuentro con su amiga, que no veía desde hacía casi dos años, marca el principio de una nueva colaboración literaria, que consistió en revisar las novelas de Anne y las traducciones de los trabajos de Sonia. La introducción de *Vae Victis* fue traducida del ruso y publicada en sueco. Era una descripción de la naturaleza en primavera después del largo sueño del invierno, pero no era la gloria de la primavera lo que relataba, sino que elogiaba la paz y la tranquilidad del invierno frente a la explosión de la primavera en la que surgen grandes esperanzas que después se convierten en decepciones. En esta novela, que nunca terminó, en parte también autobiográfica, quería ensalzar la suerte de los vencidos, frente a los vencedores pues, a pesar de sus éxitos, siempre consideró que estaba en el bando de los vencidos en su lucha por la felicidad.

Su libro autobiográfico *“Recuerdos de la infancia”*, un relato que nos narra las vivencias y los sentimientos de su niñez, además de describir los problemas y los ideales de la sociedad rusa en la segunda mitad del siglo XIX, fue traducido al sueco y publicado con el título *Las hermanas Rajevsky*.. En esta versión decidieron cambiar el "yo" del estilo autobiográfico por Tania, pues pensaban que podía resultar extraño que una escritora tan joven aún, plasmara en una novela los detalles íntimos de su vida familiar. Cuando Sonia murió, Anne escribió su biografía. Su novela póstuma "*Vera Barantsova*", que contaba la historia de una joven mártir revolucionaria, fue publicada en Suecia (1892) por sus amigos a partir de sus manuscritos no revisados y en Rusia (1906) con el título "*Una nihilista*".

Su dedicación simultánea a las investigaciones matemáticas y a la literatura causó un cierto desconcierto en muchas de las personas de su alrededor. En una carta escrita por Sonia comentaba que no era nada extraño, ya que tanto el poeta como el matemático deben ser capaces de profundizar en la realidad y de esta forma ver lo que los demás no ven. Además la Matemática, para ella, era la Ciencia que exigía más imaginación.

> *Le sorprende que yo esté trabajando simultáneamente en literatura y matemáticas. Muchas personas que no han tenido nunca la oportunidad de aprender que son las matemáticas, las confunden con la aritmética y la consideran una ciencia árida y fría. El hecho es que es la ciencia que más imaginación necesita. Uno de los más grandes matemáticos de*

nuestro siglo dice muy acertadamente que es imposible ser matemático sin ser un poeta de espíritu. No hace falta decir que para comprender la verdad de esta afirmación uno debe dejar de lado los viejos prejuicios de que los poetas se dedican a "fabricar" lo que no existe, y que la imaginación es algo así como "maquillar las cosas". A mí me parece que el poeta debe ser capaz de ver lo que los demás no ven, debe ver más profundamente que otras personas. Y el matemático debe hacer lo mismo.

[Carta escrita por Sonia poco antes de su muerte; J. Detráz (1993)]

Desde la muerte de su hermana, Sonia había tenido la intención de publicar alguna de sus obras para, de esta forma, contribuir a hacerla famosa después de su muerte, y lo intentó con una obra de teatro que había encontrado entre sus manuscritos, tuvo que rehacerla pues no era adecuada para llevarla al teatro, mientras Sonia la escribía en ruso, Anne-Charlotte la traducía al sueco, decidiendo entre ambas la estructura general de la obra. Sin embargo cuando realizaron la primera lectura, ante un grupo de amigos, éstos la encontraron demasiado uniforme y sombría y pensaron que no podía tener éxito en el teatro.

En las fiestas de Navidad, ninguna de las dos amigas estaba dispuesta a quedarse en Estocolmo y decidieron viajar juntas a París. Tanto en el viaje, como la llegada a París fue especialmente triste, en especial, por el estado de ánimo de Sonia que sentía cómo sus éxitos científicos no habían conseguido sustituir la necesidad de ternura y amor que necesitaba. Ella decía con amargura que, por una paradoja de la vida, incluso sus amigos la consideraban más ambiciosa de honores que de ternura, cuando, en realidad, ella pretendía lo contrario.

Esta situación de melancolía se mantuvo, hasta que un día al llegar al hotel tenía una carta de Máxime en la que le explicaba el malentendido por el que no le había escrito durante los últimos meses. Al día siguiente Sonia dejó París para reunirse con él. Pero su felicidad fue efímera y volvió a Estocolmo con la impresión de que no se comprendían totalmente y de que su único refugio era el trabajo.

En mayo de 1890 viajó a Rusia con la idea de ser nombrada miembro ordinario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo de la que Sonia ya era miembro honorífico. Para ella ese puesto significaba mucho, ya que le permitiría tener un salario permaneciendo en Rusia sólo unos meses al año, el resto del tiempo podría estar en París y sobre todo no tendría que volver a Estocolmo, que cada vez pesaba más sobre ella y lo consideraba como el exilio. Pero se encontró con la oposición de Markov y sus críticas a la memoria con la que había conseguido el premio Bordín, que consideraba incompleta. Esto supuso un estudio exhaustivo por parte de distintos matemáticos rusos: P. A. Nekrasov que se encargó de sus publicaciones sobre matemática pura y N. E. Zhukovsky que analizó las de matemática aplicada, ambos consideraron infundadas las objeciones de Markov.

> *No es meramente un hallazgo accidental, afortunado. Al contrario, este descubrimiento es el resultado de un trabajo tenaz y persistente y de un conocimiento profundo en el campo de la matemática pura y del análisis. [...] El capítulo de la introducción que provocó objeciones de uno de los matemáticos de*

San Petersburgo, no tiene ningún papel esencial en la memoria, es algo añadido, no obstante es muy interesante porque describe el camino original seguido por la mente de Kovalévskaya para llegar a su descubrimiento.

[Nekrasov en On the works of S.V. Kovalevskaya in pure mathematics]

Más tarde en 1894 Lyapunov demostró concluyentemente que los tres casos que Sonia había considerado eran los únicos en los que existía solución Se dice que entonces Markov comentó que su objetivo, levantando dudas públicamente sobre ese trabajo, era poner en evidencia a Chevichev, que había recomendado a Sonia para formar parte de la Academia de Ciencias y que sin embargo no había leído su memoria.

Paralelamente, en una carta, el ministro de interior ruso le dejaba muy claro que lo único a lo que podría acceder en su país, por ser una mujer, era ser "Maestra de Conferencias en cursos para mujeres", por una simple razón: En Rusia no se permitía que las mujeres ocuparan puestos universitarios, cualesquiera que fueran sus capacidades y conocimientos. También le recomendaba que siguiera en Estocolmo.

Sofía Kovalévskaya que ha adquirido una gran reputación en el extranjero por su trabajo científico, no es la menos conocida de nuestros matemáticos rusos. El brillante éxito de nuestra compatriota en el exterior es cada vez más notable, sin ser esto una expresión del orgullo nacional, sino debido a sus grandes cualidades. Nos vanagloriamos de que haya conseguido ser profesora de la Universidad de Estocolmo. Una mujer *no puede ser elegida para una cátedra universitaria sin reunir las opiniones elogiosas y unánimes sobre sus capacidades y conocimientos. Las maravillosas conferencias de la señora Kovalévskaya lo han confirmado. Pero como en nuestras universidades no se permite que impartan clase las mujeres cualesquiera que sean sus capacidades y conocimientos, no hay en Rusia para la Señora Kovalévskaya ningún puesto tan gratificante y remunerador como el que ella ocupa en Estocolmo. Ser Maestra de Conferencias en nuestros Cursos Superiores para mujeres es muy inferior a un puesto universitario. [...]*

[Carta del ministro del interior ruso; J. Détraz (1993)]

Desde San Petesburgo fue a Berlín, allí se encontró por casualidad con Anne-Charlotte y su marido y pasaron unos días juntos. Las dos amigas se escribían con frecuencia, pero aquel año había sido una excepción. Sonia estaba pasando un mal momento y no quería que su amiga, que acababa de casarse y era muy feliz, se preocupara por ella, pero ese silencio era un claro síntoma de su sufrimiento.

Máxime, que había estado aquel año en Oxford, se reunió con ella durante el verano para viajar juntos. En aquel momento para Sonia él era "el mejor de los camaradas y el más agradable de los amigos", pero no estaba dispuesta a renunciar por él a su vida profesional. En Berlín le había comentado a Anne-Charlotte que no se casaría nunca porque: "No quería ser tan banal, ni imitar a las mujeres que renuncian a su carrera personal cuando encuentran un marido. Nunca dejaría Estocolmo sin haberse asegurado antes una posición mejor, o sin haber conseguido como escritora suficiente prestigio para poder vivir de ello".

El comienzo de curso fue aún más duro que los años anteriores. Estaba sumida en una terrible depresión y ya no disfrutaba ni con la compañía de sus amigos. Estaba nerviosa, casi siempre de mal humor y bastante indiferente a todo lo que le rodeaba. No podía vivir con Máxime pero tampoco sin él. Y como siempre, en situaciones similares, la única distracción que le quedaba era concentrarse en su trabajo matemático. En una carta que escribió a Poincaré le comentaba que sus últimos resultados se los había enviado a Hermite, pero este trabajo no lo conocemos porque las cartas de Hermite se destruyeron, después de su muerte, en un incendio.

En Navidad volvió a encontrarse con Máxime para hacer montañismo cerca de Niza. El viaje de vuelta fue el más incómodo de todos los que había hecho. En vez de elegir la ruta más directa por Copenhague, donde había una epidemia de gripe, se fue por las islas danesas. Los continuos cambios de trenes, el mal tiempo y no tener cambiado dinero danés, que le obligó a caminar cargando con su equipaje en medio de una tempestad, le provocaron una terrible enfermedad.

Cuando llegó a Estocolmo se encontraba muy mal, pero dio clase durante dos días, hasta que llegó el fin de semana en el que cayó exhausta. El martes por la mañana la enfermedad tuvo más fuerza que ella.

La noticia de su muerte conmovió a todo el mundo. Matemáticos, artistas e intelectuales de toda Europa enviaron telegramas y flores. En todos los periódicos y revistas aparecieron artículos alabando a esta mujer excepcional, que había conseguido abrir tantas puertas a las mujeres en el ámbito científico. Lo que no impidió que un ministro ruso declarara: "*Se* *ha oído mucho hablar de esta mujer, que en última instancia no era más que una nihilista*".

Muchas mujeres en todo el mundo siguieron su ejemplo, pero hay que esperar a 1908 para que otra mujer, Marie Curie, sea nombrada profesora de Universidad, y hasta 1933 para que Emmy Noether sea nombrada profesora de Matemáticas en Estados Unidos.

Las palabras de Mittag-Leffler después de su muerte son una perfecta sinopsis para perfilar esta inolvidable vida.

> *Sonia Kovalévskaya tendrá un lugar eminente en la historia de las Matemáticas, [...] Pero no es sólo como matemática o como escritora por lo que se debe apreciar verdaderamente a esta mujer de tanto valor y originalidad. Como persona era aún más extraordinaria de lo que se puede pensar de su obra. Todos aquellos que la conocieron y estuvieron cerca de ella, recordarán siempre la impresión viva y poderosa que su personalidad les produjo.*

4.9.9. Sus investigaciones matemáticas

El mayor éxito matemático de Sonia Kovalévskaya fue su trabajo sobre la rotación de un sólido alrededor de un punto fijo por el que obtuvo el Premio Bordín de la Academia Francesa de las Ciencias. Su nombre ha pasado a los libros de matemáticas por el Teorema de Cauchy-

Kovalévskaya por el que obtuvo su doctorado. En su época era conocida en toda Europa, por su especialización en la teoría de funciones abelianas que inició su estudio para realizar su tesis doctoral junto con junto su trabajo sobre los anillos de Saturno. Al estudiar las ecuaciones de Lamé cometió un pequeño error que fue detectado después de su muerte. Su trabajo póstumo fue una simplificación de un Teorema de Bruns.

> *El conjunto total de su trabajo nos presenta el retrato de una matemática competente y creativa que produjo valiosos trabajos, otros de menor importancia y que en uno de ellos cometió un error ocasional en el desarrollo.*

[Roger Cooke en The mathematics of Sonya Kovalevskaya]

> *En conclusión, yo diría que si Sonia Kovalévskaya no ha sido una revolucionaria en la investigación matemática, sus resultados tienen tanta calidad que la colocan entre los mejores matemáticos de su siglo y le aseguran un lugar permanente en la historia de las matemáticas.*

[Jacqueline Detráz en Kovalevskïa. L'aventure d'une mathématicienne]

> *No deseo exagerar las dimensiones de sus facultades mentales. Simplemente digo que Kovalévskaya no era uno de esos pocos genios de las matemáticas que por la introducción de nuevos métodos fructíferos han provocado grandes cambios y reformas en varias áreas de la matemática. Pero debo decir que Kovalévskaya es indiscutiblemente igual que los matemáticos varones más importantes de nuestro*

tiempo, ya que penetró profundamente en los métodos disponibles de la ciencia, los usó de una manera muy elegante, los extendió y los desarrolló, hizo nuevos e inteligentes descubrimientos y resolvió fácilmente las dificultades más formidables.

[Nekrasov en On the works of S.V. Kovalevskaya in pure mathematics]

El **teorema de Cauchy-Kovalévskaya** formaba parte del trabajo por el que obtuvo el doctorado. Fue publicado en *Crelle´s Journal*. Es un teorema de existencia y unicidad de soluciones de una ecuación en derivadas parciales de orden k con condiciones iniciales para funciones analíticas. En 1842 Cauchy había demostrado la existencia de solución de una ecuación en derivadas parciales lineales de primer orden. En la misma época, Weierstrass, que no conocía los trabajos de Cauchy, demostró la existencia y "unicidad" de la solución para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y propone a Sonia extender estos resultados a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Este teorema, elaborado independientemente del de Cauchy, generaliza sus resultados y establece unas demostraciones tan simples, completas y elegantes que son las que se exponen en la actualidad en los libros de Análisis.

En la primera parte de su memoria estudia un sistema lineal analítico de ecuaciones en derivadas parciales con *n* incógnitas. Lo resolvió encontrando una función mayorante que reduce el sistema a una ecuación de la que obtiene explícitamente la solución. En la segunda parte resuelve el problema cuando la función que relaciona las variables con la función y sus derivadas es polinómica, y las funciones que establecen las condiciones iniciales son analíticas en un entorno de cero. Demuestra que existe una única solución analítica en cero si el plano de las condiciones iniciales no es característico.

> *Kovalévskaya simplificó significativamente la demostración y le dio la forma definitiva.*

[Comentario de Henri Poincaré sobre este teorema]

> *La formulación del teorema en el lenguaje actual y la notación moderna hace que parezca un teorema de existencia y unicidad. Sin embargo en 1874 estas nociones de existencia y unicidad estaban desarrollándose. Ella misma dijo que en aquella época lo que pensó que estaba demostrando es que las soluciones de una ecuación diferencial se podían utilizar como definición de una función analítica.*

[Roger Cooke en The mathematics of Sonya Kovalevskaya]

> *En el análisis final, Kovalévskaya dio una forma definitiva a los teoremas sobre la integración de ecuaciones en derivadas parciales que se caracterizó por la precisión de expresión y el rigor, así como por la simplicidad de la demostración.*

[Nekrasov en On the works of S.V. Kovalevskaya in pure mathematics]

> *El trabajo de S. Kovalévskaya, sobre ecuaciones en derivadas parciales, elaborado independientemente del de Cauchy, generaliza sus resultados y establece unas demostraciones tan simples, completas y elegantes que son las que se exponen en la actualidad en los libros de Análisis.*

[Jacqueline Detráz en Kovalevskïa. L'aventure d'une mathématicienne]

En el análisis final, Kovalévskaya dio una forma definitiva a los teoremas sobre la integración de ecuaciones en derivadas parciales que se caracterizó por la precisión de expresión y el rigor, así como por la simplicidad de la demostración.

[Nekrasov en On the works of S.V. Kovalevskaya in pure mathematics]

Su trabajo sobre **funciones abelianas** fue otro de los que presentó para su tesis. Su investigación en este campo trataba del estudio de los casos en los que las funciones abelianas2 pueden reducirse a integrales elípticas3 y fue publicado en el Acta Mathematica. Las funciones abelianas eran uno de los temas de investigación más importantes del siglo XIX, Legendre las clasificó, Abel y Jacobi de manera independiente obtuvieron los principales resultados respecto a estas funciones. Riemann y Weierstrass resolvieron simultáneamente el problema general de la inversión de estas integrales. Sonia estudió los casos en los que las integrales abelianas de tercer orden pueden reducirse a integrales elípticas, aunque no era un problema de la parte central de la teoría, su logro más importante fue el hecho de reemplazar un criterio trascendente por uno algebraico. Además su especialización en este campo contribuyó favorablemente al reconocimiento que tuvo Sonia entre los matemáticos de la época.

Su conocimiento sobre funciones abelianas suponía una prueba de su alto nivel de competencia

[2] Una función abeliana es una integral de la forma $\int_a^x R(t,u)dt$, siendo R(t,u) una función racional y las variables t y u están relacionadas por una ecuación polinómica P(t,u) = 0; es decir la integral de una función racional sobre una curva algebraica.

[3] http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/anx3/int_elli.html

matemática, que necesitaba demostrar por ser la primera mujer que aspiraba a un doctorado en Matemáticas. Este hecho la predestinaba a demostrar la calidad de su trabajo más que cualquier hombre.

[Roger Cooke en The mathematics of Sonya Kovalevskaya]

Es el trabajo de Kovalévskaya el que ha despertado mi interés por los temas que me he planteado.

[Henri Poincaré en el análisis de sus propios trabajos sobre integrales abelianas]

Aunque los resultados encontrados por Kovalévskaya son casos especiales y no tiene el interés de los más generales que ella logró en la teoría de ecuaciones diferenciales, no obstante, el talento de su autora y su habilidad para penetrar las relaciones más complicadas de análisis son inigualables.

[Nekrasov en On the works of S.V. Kovalevskaya in pure mathematics]

Otra de las memorias presentadas para obtener el doctorado trataba de la forma y estabilidad de los **anillos de Saturno**, publicada en la revista de Astronomía *Astronomische Nachrichten* en 1885. Laplace (1799), en su tratado de Mecánica Celeste, había formulado las condiciones de equilibrio de fuerzas, suponiendo que los anillos eran fluidos, de sección elíptica y hacía varias aproximaciones en el cálculo del potencial del anillo. Sin embargo Maxwell (1859) había mostrado que era muy improbable que el anillo pudiera tener cualquier estructura continua, como el trabajo de Laplace había postulado. Sonia abandonó la hipótesis de elipticidad y, utilizando un desarrollo en serie de Fourier, resolvió un sistema con infinitas variables por el método de aproximaciones sucesivas. En un artículo que publicó comentaba que los últimos trabajos de Maxwell hacían poco aceptable la hipótesis de la estructura líquida de los anillos y que éstos estaban formados por partículas de hielo y rocas, como posteriormente se demostró. Muchos autores han comentado que el resultado más importante de Kovalévskaya sobre los anillos de Saturno fue determinar su forma oval. Otros [2] opinan que lo más significativo de su trabajo fue plantear dos problemas importantes en matemática aplicada como son el análisis de errores y la estabilidad, además de proponer, de manera heurística, técnicas para resolver ecuaciones integrales, que fueron desarrolladas de forma rigurosa por Hammerstein en 1930.

> *Muchos autores han comentado que el resultado más importante de Kovalévskaya sobre los anillos de Saturno ha sido determinar su forma oval. [...] Sin embargo en este trabajo ella planteó dos problemas importantes en matemática aplicada como son el análisis de errores y la estabilidad y también propuso, de manera heurística, técnicas para resolver ecuaciones integrales, que fueron desarrolladas de forma rigurosa por Hammerstein en 1930.*

[Roger Cooke en The mathematics of Sonya Kovalévskaya]

> *Las técnicas que he utilizado en este tratado son las mismas que había usado Kovalévskaya en su investigación sobre la forma de los anillos de Saturno.*

[Comentario de Poincaré en su Hidrodinámica]

Sus investigaciones sobre la propagación de **la luz en un medio cristalino**, fueron una propuesta de Weierstrass que la orientó a determinar las soluciones de las ecuaciones de Lamé. Éste era un problema de Física en la época de Fressnel; Gabriel Lamé, en 1866, lo había convertido en matemático, pero para determinar la solución tuvo que recurrir a la hipótesis de la existencia de éter rodeando la materia que vibra. Sonia en su trabajo prescinde de esta hipótesis.

Este trabajo, el primero que realizó después de seis años sin dedicarse a las matemáticas, fue publicado posteriormente en el Acta Matemática de 1885. Pero unos meses después de su muerte Volterra descubre un error en la solución de una integral al hacer un cambio de variable y siguiendo su método encuentra las soluciones correctas.

> *Como muestra su trabajo, Kovalévskaya estaba en la dirección correcta, pero tuvo un pequeño error en el último momento. De hecho Volterra dio las soluciones generales correctas de las ecuaciones diferenciales de una forma muy similar a la que había utilizado Kovalévskaya. Quizás porque la teoría física de la que las ecuaciones de Lamé se habían obtenido había sido reemplazada por teorías mejores (electromagnetismo), el trabajo de Kovalévskaya había tenido al parecer muy pocos lectores cuidadosos. Así, aunque fue publicado en el Acta Matemática, no se descubrió el error durante su vida.*

[Roger Cooke en The mathematics of Sonia Kovalévskaya]

Otro resultado sobre ecuaciones en derivadas parciales fue una demostración simplificada del teorema de Burns publicada después de su muerte en el Acta Mathematica. En esta demostración utilizaba una parametrización de una superficie para obtener una ecuación a la que podía aplicar el teorema de Cauchy-Kovalévskaya y obtener fácilmente la solución.

> *El artículo póstumo de Kovalévskaya el teorema de Bruns (1891) era posiblemente una parte previa de su tesis doctoral no publicada, o al menos de un primer proyecto de tesis.*
>
> [Roger Cooke en The mathematics of Sonya Kovalévskaya]

Posiblemente la investigación más importante fue la que realizó sobre la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo por la que recibió el Premio Bordin de la Academia de Ciencias de París y más tarde el premio de la Academia de Ciencias de Suecia. Ambos trabajos fueron publicados en el Acta Mathematica.

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE.

TOME XXXI. — N° 1.

MÉMOIRE

SUR

UN CAS PARTICULIER DU PROBLÈME

DE LA ROTATION D'UN CORPS PESANT

AUTOUR D'UN POINT FIXE,

OÙ L'INTÉGRATION S'EFFECTUE À L'AIDE DE FONCTIONS

ULTRAELLIPTIQUES DU TEMPS,

PAR

Mme SOPHIE DE KOWALEVSKY.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps grave autour d'un point fixe peut être ramené, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant :

$$(1)\begin{cases} A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), & \frac{d\gamma}{dt} = \gamma' r - \gamma'' q, \\ B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), & \frac{d\gamma'}{dt} = \gamma'' p - \gamma r, \\ C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), & \frac{d\gamma''}{dt} = \gamma q - \gamma' p. \end{cases}$$

A, B, C désignent les moments d'inertie principaux du mobile;

Sav. étrang. t. XXXI. — N° 1.

Una de las aplicaciones más importantes de la mecánica newtoniana es el estudio del movimiento de un cuerpo. Leonhard Euler (1758) había resuelto el problema cuando el punto respecto al que gira es el centro de gravedad. J. L. Lagrange (1811-1815), el de un cuerpo de revolución que gira alrededor de un eje. Pero estaba sin resolver el caso general. La Academia de Ciencias de Prusia había propuesto este problema para un concurso los años 1855 y 1858, pero nadie se había presentado. Sonia resolvió de forma analítica las ecuaciones del movimiento. Planteó un sistema de seis ecuaciones diferenciales, consideró el tiempo como una variable compleja y analizó los casos en los que las seis funciones implicadas, las tres componentes del vector velocidad angular y las tres del vector unitario vertical (aceleración de la gravedad), eran funciones meromorfas[4] del tiempo, con este planteamiento los movimientos estudiados por Euler y Lagrange eran casos particulares, además encontró un tercer caso y lo estudió. Con ello este problema quedaba analíticamente resuelto.

> *El autor no solamente ha agregado un resultado muy importante a los que ya habían establecido Euler y Lagrange; también ha hecho un estudio profundo del resultado utilizando los recursos de la moderna teoría de funciones theta que le permiten dar una solución completa del problema de la forma más precisa y elegante. Además nos presenta un nuevo y memorable ejemplo de un problema de mecánica en el que intervienen estas funciones transcendentes cuyas aplicaciones se habían limitado, hasta ahora, al puro análisis y a la geometría.*

[Palabras del jurado que le otorgó el Premio Bordín]

> *La complejidad de las matemáticas de Kovalévskaya son un reflejo de la complejidad de la*

[4] http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/an2/node7.html

naturaleza de este caso: El caso de Kovalévskaya sigue siendo un movimiento misterioso hasta el momento, pero no mucho más simple que el de la rotación de un cuerpo rígido completamente arbitrario. [...]

Nosotros conocemos ahora la influencia de las ideas de Kovalévskaya en la Matemática del siglo veinte. En el caso del problema de la rotación, esta influencia se expresa en 1) estudiar las singularidades de las soluciones para determinar si una ecuación puede ser integrable, y 2) el uso de funciones zeta para resolver ecuaciones diferenciales.

[Roger Cooke en S. V. Kovalevskaya's Mathematical Legacy]

Este trabajo completó de forma magistral los de Euler y Lagrange para resolver por integración de forma analítica las ecuaciones del movimiento. Más tarde Liouville (1897) demostró que no existe otro caso que sea posible resolver por integrales algebraicas.

[Jacqueline Detráz en Kovalevskïa. L'aventure d'une mathématicienne]

El valor del trabajo de Kovalevskaya no sólo está en los resultados que consiguió y en la originalidad de su método, también despertó el interés por el problema de la rotación de un sólido por parte de investigadores de muchos países, en particular de Rusia.

[P. Y. Polubarina-Kochina en A Russian Childrood]

Sonia Kovalévskaya encuentra un nuevo caso de integrabilidad, es decir un nuevo caso en el que es posible obtener, para las ecuaciones del movimiento de *un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo, una tercera integral algebraica, para condiciones iniciales arbitrarias. [...]*

Su maestro Weierstrass, le expresa su alegría en estos términos: "No necesito deciros cuanto me alegro de vuestro éxito, así como mis hermanas y todos vuestros amigos de aquí. Para mí es una verdadera satisfacción; ahora los jueces competentes han dado su veredicto: mi fiel alumna no es una frívola marioneta".

[Marie-Luise Dubreil-Jacotin en Les grands courants de la penseé Mathématique]

La importancia real de Kovalévskaya está en su trabajo por el que ganó el Premio Bordín, sobre la rotación de un sólido, en el que aplicó un método matemático a un problema físico. Me gustaría agregar que también sirve como un buen ejemplo del método analítico de la escuela matemática de Berlín en contraste con el geométrico de la escuela de Göttingen ejemplificado por el trabajo de Klein en los mismos temas.

[Roger Cooke en The mathematics of Sonya Kovalevskaya]

4.9.10. Su lucha por los derechos de la mujer.

La vida de Sonia Kovalévskaya fue una constante lucha por conseguir derechos para la mujer, desde su adolescencia era nihilista, tuvo que realizar un matrimonio de conveniencia para salir de Rusia y poder estudiar, fue la primera mujer doctora en Matemáticas y profesora de Universidad en una época en la que en la mayor parte de las universidades europeas las mujeres no podían ni asistir a clase, pero no son sólo sus logros personales lo que abrió puertas cerradas a las mujeres, Sonia era una feminista convencida y lucho para defender sus convicciones.

> *Pero debe recordarse que Kovalévskaya fue la primera mujer que obtuvo el grado de doctor en Matemáticas, y una de las primeras en tener semejante grado en cualquier materia. Es más, Kovalévskaya era una nihilista rusa, y nunca fue reservada con sus opiniones políticas. Por último, Kovalévskaya no sólo era una mujer, sino que también era portavoz de los derechos de la mujer. Todas estas facetas hacían que ella representara una amenaza a la Comunidad Educativa Europea.*

[Ann Hibner Koblitz en Sofia Kovalevskaia and the Mathematical Community]

> *Ella escribió, entre otras cosas, novelas, su vida misma era una leyenda; finalmente se mantenía en el centro de la lucha por la emancipación de la mujer.*

[Felix Klein. Apéndice del artículo de M. R. Chowdhury Koblitz, Klein y Kovalevskaia]

> *Sonia se había familiarizado desde muy joven con las ideas nihilistas y fue fiel a ellas durante toda su vida: participa en la Comuna de París; frecuenta los ambientes revolucionarios de Polonia. Sin tener una actividad política permanente, ayuda en numerosas*

ocasiones. Y sobre todo, siempre fue consciente de la importancia de su éxito de mujer científica como ejemplo para otras mujeres.

[Jacqueline Detráz en Kovalevskïa. L'aventure d'une mathématicienne]

El movimiento feminista del que Kovalévskaya formaba parte y al que sus logros dio un fuerte apoyo, estaba dirigido, por los años 1890, a abrir algunas puertas a las mujeres, o por lo menos a debatir la conveniencia de la apertura de dichas puertas.

[Roger Cooke en The mathematics of Sonya Kovalevskaya]

Kovalévskaya era una mujer notable, una matemática creativa, y líder en el movimiento por conseguir que las mujeres fueran aceptadas como estudiantes y profesoras en la universidad.[...]

Si Kovalévskaya hubiera vivido unas décadas antes, casi seguro que su gran talento no hubiera sido suficiente para conseguir un doctorado ni una posición universitaria. Si hubiera vivido unas décadas después, es posible que, al tener menos batallas personales, su contribución a las Matemáticas podía haber sido mayor. Kovalévskaya es la primera gran mujer matemática porque su genio coincidió con un clima académico que le permitió su entrada. Nos sabemos cuántas otras científicas y matemáticas se habrán perdido a través de la historia porque debido a ser mujeres se les negó el permiso para hacer ciencia.

[V. C. Rubin y L. L. Stryker; Reseña del libro de A. H. Koblitz A Convergence of lives. Sofia Kovalevskaia: Scientist, Writer, Revolutionary]

ANEXO:

Textos del libro autobiográfico "Recuerdos de la infancia"

Capítulo 1: Primeros recuerdos.

¡Cuánto me gustaría saber si alguien puede precisar exactamente el momento de la existencia en el que se forma la idea definitiva del propio yo, el primer recuerdo de la vida consciente! Yo no soy capaz. Cuando comienzo a clasificar y ordenar los primeros recuerdos en mi mente, siempre ocurre lo mismo: huyen de mí. Si me parece haber encontrado esa primera impresión que dejó una huella nítida en mi memoria, cuando me concentro en ella comienzan a aparecer otras impresiones de épocas anteriores. Además no puedo precisar las impresiones que recuerdo realmente, y que son verdaderamente mías, de los relatos que posteriormente me contaron sobre mi niñez, y que me imagino que los he vivido aunque en realidad de lo que me acuerdo es de la versión que me dieron sobre los hechos. Y lo que es peor, cuando mi pensamiento se concentra en esos recuerdos, nunca consigo evocar

ninguna de estas primeras impresiones nítidamente, sin mezclarlas de forma involuntaria con detalles extraños.

Sea como fuere, cada vez que intento recordar los primeros años de mi existencia aparece sobre todo una imagen: Las campanas sonando, el aire perfumado de incienso. La gente saliendo de la iglesia. La Niania que me lleva de la mano y me protege con cuidado de los empujones. [...]

Los recuerdos más o menos coherentes comienzan a partir de los cinco años cuando nos fuimos a vivir a Kaluga. Éramos tres: mi hermana Aniuta, seis años mayor que yo, mi hermano Fédia, que era tres años más joven y yo. [...]

También yo deseo acariciar a mi madre, sentarme en sus rodillas; pero la mayoría de las veces que lo intento le hago daño o le rasgo el vestido y avergonzada corro a esconderme en una esquina. De ahí que fuera surgiendo en mí un cierto recelo con relación a mi madre que iba aumentando cuando oía comentar que Aniuta y Fédia eran los preferidos de mamá y que a mí no me quería.

Si era cierto o no lo ignoro, pero la Niania lo decía frecuentemente sin importarle mi presencia. Quizás se lo imaginaba debido a la predilección que sentía por mí. Aunque nos educase a los tres de la misma manera me consideraba su favorita y se ofendía de todo lo que le parecía un insulto hacia mí. [...]

Cuando creen que estamos profundamente dormidos comentan en voz baja los acontecimientos *domésticos. Pero yo no duermo, al contrario, escucho atentamente lo que dicen. Algunas cosas no las entiendo, otras no me interesan, e incluso a veces me duermo en mitad de una historia sin llegar al final. Pero trazos de sus conversaciones penetran en mi mente y se gravan como imágenes fantásticas que dejan huellas imborrables para toda la vida.*

¡Cómo no la voy a querer más que a los otros! dice la Niania -y me doy cuenta de que hablan de mí-. Si casi la he criado yo sola. Nadie más se ha ocupado de ella. Cuando nació Aniuta el padre, la madre, el abuelo y las tías sólo tenían ojos para ella, porque era la primera. Casi no podía ocuparme de ella porque me la quitaban de los brazos. Sin embargo con Sonia ¡Qué diferencia!

En esta parte del relato tantas veces repetido, la Niania bajaba misteriosamente la voz, lo que me obligaba a aguzar más el oído.

Capítulo 4: La vida en el campo.

El reloj de pared del cuarto de estudio daba las siete. A pesar del sueño oigo los siete toques que suscitan en mí la triste evidencia de que la criada Duniasha vendrá pronto a despertarme; sin embargo es tan dulce el sueño que intento convencerme de que estos horribles toques son un efecto de mi imaginación. Me doy la vuelta y me envuelvo con las mantas para *aprovechar el placer de estos últimos minutos de sueño que pronto se acabarán.*

El día empieza a clarear y los primeros rayos de sol de una fría mañana de invierno se entremezclan con la opaca luz de la vela dando a todo lo que nos rodea un aspecto tenue e inanimado. ¿Existe algo más desagradable que tener que levantarse a la luz de una vela? [...]

Los castigos corporales no estaban permitidos en nuestra educación, pero la institutriz los remplazaba por otros medios de intimidación. Cuando había cometido alguna falta, me colgaba en la espalda un letrero en el que estaba escrita mi falta con grandes letras y tenía que aparecer en la mesa con ese adorno. Odiaba tanto este castigo que cuando la institutriz me amenazaba con él se disipaba inmediatamente mi sueño. [...]

Mi jornada empieza con la lección de música. En el gran salón del piso superior donde se encuentra el piano de cola, hace bastante frío, de modo que mis dedos se entumecen y se hinchan y en mis uñas aparecen manchas. [...]

Como la mayoría de los niños que crecen en soledad, yo me había creado un mundo imaginario lleno de sueños y fantasías, cuya existencia nadie sospechaba. Amaba la poesía con pasión; sólo la forma, la medida del verso, me causaba un gran placer y devoraba ávidamente los fragmentos de poesías rusas que caían en mis manos y, tengo que reconocer que, cuanto más pomposo era el poema más me gustaba. Durante mucho *tiempo las únicas poesías rusas que conocía eran las baladas de Jukovsky. En nuestra casa nadie se interesaba por este tipo de literatura, y aunque teníamos una gran biblioteca se componía sobre todo de libros extranjeros; no estaban ni Puschkin, ni Lérmotov, ni Nekrásov. La Crestomathie de Filánov comprada por la iniciativa de nuestro profesor particular fue para mí una revelación. Pasé unos días como loca recitando a media voz las estrofas del Prisionero del Cáucaso o de Misiri hasta que la institutriz amenazó con confiscarme el adorado libro.*

El ritmo de los poemas ejercía sobre mí un efecto tan maravilloso, que desde la edad de cinco años ya componía versos. Sin embargo mi institutriz no aprobaba estas ocupaciones; tenía muy claras sus ideas sobre el modelo de una niña sana y normal que más tarde se convertiría en una señorita ejemplar y los versos rusos no entraban en su concepto de educación. Perseguía con ardor mis gustos poéticos: si por desgracia caía en sus manos un trozo de papel con mis poemas, me colgaba el letrero en la espalda, y recitaba mis pobres ensayos literarios en presencia de mi hermano o de mi hermana, tergiversándolos y mutilándolos sin compasión. Pero esta persecución no tenía efecto. A los doce años estaba convencida de que había nacido para ser poetisa. [...]

Junto al salón está la biblioteca, y allí sobre los sofás y las mesas se encuentran desperdigadas novelas extranjeras y revistas rusas. [...]

Durante unos minutos lucho conmigo misma. Me aproximo a un libro y primero sólo lo abro... lo hojeo un poco, leo algunas frases; y rápido vuelvo a jugar con la pelota como si no hubiera ocurrido nada... Pero poco a poco la lectura me cautiva: como mis primeros intentos han tenido éxito, termino por olvidar el peligro y devoro una página tras otra sin importarme lo que cae en mis manos. Si no es el primer tomo de una novela, leo el segundo o el tercero con el mismo interés y lo que falta me lo imagino. De vez en cuando, tengo la precaución de botar la pelota, para que si llega la institutriz oiga que juego, tal como ella me había mandado.

Normalmente mi estrategia tiene éxito. Oigo los pasos de la institutriz en la escalera, y antes de que entre tengo tiempo de dejar el libro; ella se queda convencida de que he estado todo el tiempo jugando con la pelota, como una niña bien educada. Sin embargo dos o tres veces me sorprendió en flagrante delito, tan absorbida estaba con mi lectura que sin advertir su proximidad, me pareció que la institutriz salía de la nada.

En estos casos, como en general después de cada falta grave, la institutriz recurría al castigo más duro: me enviaba a ver a mi padre con la orden de contarle yo misma lo que había pasado. Este castigo era para mí el peor de todos. [...]

Capítulo 5: Mi tío Piotr Wassiliewitch

[...] Durante mis años de infancia sentía un cariño especial hacia dos de mis tíos, uno era el hermano mayor de mi padre Piotr Wassilievitch Korvin-Krukovski. Era un señor mayor muy interesante, de estatura elevada, con una cabeza grande completamente cubierta de rizos blancos y espesos. De perfil regular y severo, con cejas grises y muy pobladas, y una arruga profunda surcando la frente de lado a lado, su rostro hubiera tenido una expresión áspera, casi dura, de no estar iluminado por una mirada tan buena y candorosa que tan sólo se encuentra en los perros de Terranova o en los niños. [...]

Ya que estoy hablando de estos primeros encuentros míos con las Matemáticas, no puedo dejar de recordar una circunstancia muy curiosa que contribuyó a despertar en mí un gran interés por esta Ciencia.

Cuando nos fuimos a vivir al campo, hubo que arreglar toda la casa y empapelar las paredes de todas las habitaciones. A causa del gran número de cuartos, el papel pintado no alcanzó para el cuarto de los niños; pedir papel pintado a San Petersburgo hubiese costado muchas molestias y realmente no merecía la pena encargarlo para una sola habitación. Se esperó a otra ocasión, y durante muchos años la habitación estuvo empapelada con escritos antiguos. Por casualidad se habían empleado para este empapelado provisional las *conferencias litografiadas de los cursos de Ostrogradski sobre Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, que mi padre había comprado en su juventud. Estos pliegos abigarrados de antiguas e incomprensibles fórmulas reclamaron pronto mi atención. Me acuerdo cómo de niña me quedaba parada horas enteras delante de esta pared enigmática, intentando descifrar al menos frases sueltas y descubrir el orden consecutivo que debían seguir las hojas. Esta contemplación prolongada y cotidiana acabó por grabar en mi memoria la imagen externa de muchas fórmulas, incluso el texto, que en ese momento me resultaba incomprensible, dejó una huella profunda en mi mente.*

Cuando, muchos años después, tomé la primera lección de Cálculo Diferencial en San Petersburgo con el conocido profesor de matemáticas Alexander Nikoláyevich Strannoliubsky. Éste se asombró al ver lo rápido que comprendía todas sus explicaciones "como si yo las hubiera sabido de antemano", fue la expresión que utilizó. Y así era, en el mismo instante en que me explicaba estos conceptos, me acordé de pronto de las paredes de mi habitación; y me parecía que desde hacía mucho tiempo el sentido de los términos, que utilizaba el profesor, me resultaba familiar.

Capítulo 6: Mi tío Teodor Shubert

Mi relación con mi tío Teodor Shubert, el hermano de mi madre, era diferente.

Este tío, hijo único de mi difunto abuelo, y mucho más joven que mi madre, vivía en San Petersburgo, y como era el único representante masculino de la familia Shubert, era idolatrado por hermanas, tías y primas solteras. [...]

El tío tenía una agradable voz de tenor y hablaba un poco guturalmente. Parecía tan joven. Sus cabellos satinados cortados a cepillo, cubrían su cabeza como una piel de nutria espesa y aterciopelada. El frío hacía brillar sus mejillas enrojecidas; sus ojos castaños tenían una mirada viva y animada, y sus labios rojos rodeados de un bonito bigote dejaban ver en cada momento unos dientes fuertes y blancos.

Después de cenar mi tío se sienta en un sofá en un rincón del salón y me pone en sus rodillas.

- Y bien, conozcamos a mi sobrina, dice él. [...]

En la cena, el tío ocupaba naturalmente el lugar de honor, al lado de mamá. Comía con buen apetito lo que no impedía que hablara sin parar. Nos contaba las noticias y los cotilleos de San Petersburgo, nos hacía reír a todos y también se reía él, con una risa sonora de niño bueno. Todos lo escuchábamos con atención; incluso mi padre lo trataba con mucha consideración y como a un igual, sin ese tono irónicamente protector con el que trataba tan a menudo a los jóvenes que vienen a vernos que no eran de su agrado.

Cuánto más miraba a mi tío, más me gustaba. Se había cambiado de ropa y nadie diría al ver su cara que *acababa de hacer un largo viaje. No se vestía como todo el mundo, sino a la inglesa y muy elegante. Pero lo que me gustaba de él, por encima de todo, eran sus manos: grandes, blancas, cuidadas, con uñas brillantes que me hacían pensar en grandes almendras rosas. Durante la cena no le quito los ojos de encima y absorbida por esta contemplación me olvido hasta de comer.*

Desde ese primer día, cada tarde se repite la misma escena. Después de comer papá y mamá se echan la siesta durante una media hora. Mi tío, que no tiene nada que hacer, se sienta en su sillón favorito, me pone en sus rodillas y me cuenta un montón de cosas. También propone a mis hermanos que oigan los relatos, pero mi hermana, que acaba de terminar el colegio, cree que escuchando historias instructivas dedicadas a los niños compromete su dignidad de señorita. Mi hermano se quedó una vez con nosotros pero lo encontró poco divertido y se fue a jugar con los caballos. [...]

Capítulo 7: Mi hermana

En su primera juventud, mi hermana era muy bonita: alta, bien formada, con una tez deslumbrante y una gran melena rubia, podía pasar por una belleza consumada; y a todos esos dones se añadía un encanto muy particular. Estaba hecha para ser la protagonista en cualquier ambiente. Y ahora se veía condenada a vivir en el campo, en el aislamiento y el aburrimiento.

A menudo, tenía lágrimas en los ojos, acababa de hablar con mi padre, y le reprochaba estar encerrada. Mi padre primero lo toma como una broma, después le da explicaciones razonables, sobre la necesidad que tienen de vivir en esas tierras debido a que están pasando por una época muy agitada. Abandonar sus propiedades en ese momento sería la ruina de la familia. Aniuta no sabía qué responder a esas verdades, pero no por eso su situación era más agradable y su juventud no iba a volver de nuevo. Después de conversaciones parecidas a ésta, se encerraba en su habitación y lloraba amargamente.

Sin embargo, cada invierno, mi padre enviaba a mi madre y a mi hermana a pasar un mes o seis semanas a San Petersburgo en casa de nuestras tías. Pero estos viajes eran caros y no curaban el mal. Excitaban el gusto de Aniuta por los placeres y no la apaciguaban, un mes en San Petersburgo pasaba tan rápido que apenas tenía tiempo de encontrarse a sí misma. [...]

Cuando Aniuta tenía quince años, su primer acto de independencia fue adueñarse de todas las novelas que había en nuestra biblioteca del campo. Nosotros no teníamos libros "malos", pero las obras mediocres y sin valor abundaban. La principal riqueza de nuestra biblioteca eran viejas novelas inglesas, la mayor parte históricas, cuya acción se desarrollaba en la Edad Media, en la época de la caballería. Estas novelas fueron una revelación para mi hermana. Le *descubrieron un mundo maravilloso, desconocido para ella, y abrieron un campo nuevo a su imaginación. Comienza la historia del pobre Don Quijote, cree como él en la caballería y se imagina ser una dama de aquellos tiempos.*

Capítulo 8: Aniuta nihilista

El sacerdote de nuestra parroquia tenía un hijo que por su sumisión y su conducta ejemplar había sido, en otro tiempo, la alegría de sus padres. Pero apenas terminó brillantemente sus cursos en el seminario -creo que fue el mejor de su curso- se trasformó, sin razón aparente, en un hijo rebelde, y declaró netamente que renunciaba al sacerdocio aunque sólo tuviera que extender la mano para obtener una rica parroquia. Su Eminencia el arzobispo se entrevistó con él, le intentó convencer para que no dejara la Iglesia, dándole claramente a entender que una de las mejores parroquias le sería confiada, si tenía ese deseo, con la condición de casarse con una de las hijas de su predecesor, ya que por tradición la parroquia era la dote de una de las hijas del pope. Esta perspectiva tan atractiva no le produjo ningún efecto; el joven prefirió ir a San Petersburgo, costearse sus estudios en la Universidad y durante cuatro años alimentarse exclusivamente con té y pan seco. [...]

Cuando el joven venía a pasar las vacaciones a casa de su padre, no faltaba a ninguna de las fiestas de *nuestra familia, y se presentaba regularmente para saludarnos y comer con gran apetito el pastel, al pie de la mesa, sin intervenir en la conversación, como correspondía a su posición.*

Ese año faltó a la primera fiesta. Sin embargo se presentó un día que no había recepción y cuando la criada le preguntó lo que quería, él respondió que venía simplemente a hacer una visita al general.

Mi padre que había oído hablar mucho del "nihilista", y había notado su ausencia el día de la fiesta, aunque no prestó ninguna atención a ese detalle sin importancia, quedó contrariado de la audacia de este muchacho que se atrevía a tratarle de igual a igual, [...]

Una tarde, en la cena de los criados, el cochero Stepán contó que había visto con sus propios ojos a la hija mayor de los señores paseando por el bosque con el popóvitch.

Resultaba extraño mirarlos. La señorita caminaba sin decir nada, la cabeza baja, jugando con su sombrilla. Y él a su lado daba grandes pasos con sus largas piernas. Y hablaba sin parar agitando sus grandes brazos. Después, por momentos, sacaba un libro todo roto de su bolsillo y leía en alta voz como si diera una lección. [...]

El hijo del sacerdote consigue enemistarse tanto con su padre que en el otoño éste le pide que no vuelva en las siguientes vacaciones. Pero los gérmenes *lanzados en el espíritu de Aniuta continuarán creciendo y desarrollándose. [...]*

Mi sentimiento de subordinación se debilitó y las discusiones con mi institutriz se repetían casi diariamente. Después de una escena más acalorada que otras, Margarita Fránzovna declara que no puede quedarse más en nuestra casa. Esta amenaza era tan reiterada que, en principio, no se le prestó mucha atención, pero esta vez la cosa fue en serio. Por una parte la institutriz era demasiado orgullosa para volverse atrás, por otra parte mis padres estaban cansados de las continuas escenas que hacía y no la retuvieron; esperaban que después de que la inglesa se marchara, la casa estaría más tranquila.

Capítulo 9: Primeros ensayos literarios de Aniuta

[...] Pero también yo sollozo con desesperación, colgada de su cuello. Una angustia cruel, el sentimiento de una pérdida irreparable se apodera de mí, me parece que nada puede tener sentido en la familia cuando ella se vaya. Al ser consciente de mis fallos personales se agrava mi pena. Recuerdo avergonzada los últimos días, incluso esa mañana cuando secretamente me alegraba con la idea de su partida y con la perspectiva de ser libre.

¡Y ahora ella se va realmente! He conseguido lo que pretendía; nos quedamos sin ella. En ese momento experimento un sentimiento tan intenso que daría todo

por retenerla. Me abrazo a mi institutriz y me parece imposible separarme de ella. [...]

Aniuta, me aburro: déjame uno de tus libros.

Hago esta petición a mi hermana con voz suplicante. Pero Aniuta sigue caminando sin prestar atención a lo que digo. Después de unos minutos en silencio me decido a hablarle: ¿Aniuta en qué piensas?

- Déjame tranquila, te lo ruego, eres demasiado pequeña para contártelo.

Me siento completamente ofendida.

- ¿Es eso? ¿No quieres ni siquiera hablarme? Ahora que se ha ido Margarita, yo creía que seríamos amigas y tu no me haces caso. [...]

¡Escúchame!, dice ella, si me prometes que nunca se lo vas a decir a nadie bajo ningún pretexto te contaré un gran secreto. [...]

¿Lo entiendes, pero lo entiendes? dice ella, con una voz entrecortada por la emoción. He escrito un artículo y sin decir nada a nadie se lo he mandado a Dostoyevsky. A él le ha parecido bueno y va a publicarlo en su periódico. ¡Se realiza pues, mi gran sueño! ... ¡Ahora soy una autora rusa! grita ella, con un entusiasmo que no puede contener. [...]

Se comprende que mi hermana no tuviera prisa por vanagloriarse de su éxito; pero el misterio que rodeaba su debut literario le daba un encanto especial. Me acuerdo de nuestro entusiasmo cuando al cabo de unas semanas recibimos un número de "La época" y *vimos en la primera página, El sueño, artículo de J. O. (Juri Ovrelov era el seudónimo elegido por Aniuta que, evidentemente, no podía firmarlo con su nombre). [...]*

Animada por este primer éxito, pronto Aniuta comenzó un segundo artículo que terminó en algunas semanas. Esta vez su héroe era un joven, Miguel, educado lejos de su familia por un tío monje. A Dostoyevsky le gustó más este segundo artículo pues le pareció más maduro que el primero. La descripción de Miguel se parecía un poco a Alejandro en Los Hermanos Karamázov. Cuando más tarde yo leí esta novela, poco después de su publicación, el parecido me saltó a la vista y se lo comenté a Dostoyevsky, al que por entonces veía con frecuencia. [...]

Capítulo 10: Nuestra relación con Dostoyesvsky.

[...] Mi padre había exigido a mi madre rigurosamente que asistiera a la entrevista de Aniuta con Dostoyevsky, y que no los dejara solos ni un instante. A mí también me permitieron estar en el salón durante esta visita. Dos viejas tías alemanas, a cada instante, con cualquier pretexto, entraban en la habitación para ver al escritor con la curiosidad que inspira un animal extraño, y terminaron por sentarse en un sofá y quedarse allí hasta el final de la visita. [...]

Mamá se esfuerza por establecer una conversación interesante. Con su más amable sonrisa de mujer de mundo, pero visiblemente intimidada y *confusa, busca decir cosas agradables y halagadoras y proponer preguntas inteligentes. Dostoyevsky responde con monosílabos, con la evidente intención de ser grosero. Mamá se queda sin recursos y decide callarse. Después de una visita que dura una media hora, Fiodor Mijáilovitch cogió su sombrero, saludó desairado y precipitadamente salió sin dar la mano a nadie.*

[...]Yo estaba allí, no me mezclaba en la entrevista, pero no quitaba los ojos de Dostoyevsky y absorbía ávidamente cada una de sus frases. Me pareció un hombre más joven y ¡tan normal, tan amable, tan espiritual! "Es posible que tenga cuarenta y tres años, es decir el doble de la edad de mi hermana, y tres veces y media la mía; que sea además un gran escritor y que sin embargo uno se sienta a su lado tan cómodo como con un camarada" pensaba yo; y sentía que me atraía y me resultaba querido. [...]

¡Qué amable vuestra hermanita! Dijo de pronto, de una forma inesperada, ya que un minuto antes hablaba de otra cosa con Aniuta y no parecía fijarse en mí.

Me ruboricé de alegría, y mi corazón rebosó de agradecimiento a mi hermana, cuando, en respuesta al comentario de Fiodor Mijáilovtich ella le contó que yo era una niña inteligente y buena, la única de la familia que la había ayudado y estaba de su parte. Se animó elogiándome, asignándome méritos imaginarios, y terminó por confiar a Dostoyevsky que escribía versos *que "no eran nada malos para mi edad", y, a pesar de mis débiles protestas, sacó un cuaderno lleno de mis poesías, del cual Fiodor Mijáilovtich leyó algún fragmento. Y me hizo un cumplido con una sonrisa. [...]*

El tema central y más constante de sus discusiones, que a veces se prolongaban hasta el anochecer, era el nihilismo [...] Dostoyevsky entonces, fuera de sí, cogía su sombrero, declaraba solemnemente que le parecía inútil discutir con una nihilista y que no volvería a poner los pies en nuestra casa; pero al día siguiente volvía como si nada hubiera ocurrido.

"Mi palomita, Anna Vassilíevna, comprended que os he amado desde el momento en que os vi, incluso antes de conoceros, tuve la intuición por vuestras cartas, y no es amistad lo que siento, sino que os amo apasionadamente con todo mi ser".

Mis ojos se obscurecieron y un sentimiento de amor abandonado, de cruel ofensa, se apoderó de mí, la sangre retrocedía a mi corazón para salpicar después mi cabeza como un oleaje abrasador. [...]

El día fijado para la vuelta, Dostoyevsky vino a vernos, una vez más, para decirnos adiós. No se quedó mucho tiempo pero su actitud con Aniuta fue sencilla y amistosa, prometieron escribirse. Conmigo el adiós fue más tierno. [...]

Seis meses más tarde mi hermana recibió una carta de Dostoyevsky, anunciándole su matrimonio. Había encontrado a una admirable joven, él la amaba y ella quería casarse con él. [...]

Una indefinible alegría, sin causa aparente, la alegría de vivir se apoderó de nosotras. ¡Dios mío qué bella era esta vida que surgía y nos atraía tanto! ¡Nos parecía semejante a una noche misteriosa e infinita!

4.10. Emmy Noether

(1882-1935)

Emmy Noether fue una matemática alemana de origen judío que realizó sus investigaciones en las primeras décadas del siglo XX. Mediante su primera especialización sobre invariantes algebraicos consiguió demostrar dos teoremas esenciales para la teoría de la relatividad que permitieron resolver el problema de la conservación de la energía. Su aportación más importante a la investigación matemática fueron sus resultados sobre la axiomatización y el desarrollo de la teoría algebraica de anillos, módulos, ideales, grupos con operadores, etc. En este contexto, que se llamó álgebra moderna, aplicó sus conocimientos sobre invariantes dando rigor y generalidad a la geometría algebraica. Sus investigaciones en álgebra no conmutativa destacan, sobre todo, por el carácter unificado y general que dio a los conocimientos acumulados durante décadas. Sus publicaciones serían suficientes para valorar su decisiva contribución a las matemáticas, pero hay que considerar, además, que nunca le interesó mucho publicar y siempre permitió a sus colegas y a sus estudiantes desarrollar resultados interesantes a partir de las sugerencias que ella les hacía.

El calificativo noetheriano se utiliza para designar muchos conceptos en álgebra. Los anillos noetherianos[1] recibieron este nombre en su honor, ya que fue ella la que introdujo la condición de cadena ascendente[2], pero también se habla de grupos noetherianos, módulos noetherianos, espacios topológicos noetherianos, etc.

4.10.1. Su vida

El 23 de marzo de 1882 nació en Erlangen, Baviera, Emmy Amalie Noether. Su padre, Max Noether (1844-1921), era profesor de matemáticas en la universidad de Erlangen, conocido por sus investigaciones sobre

1 Un *anillo* conmutativo y unitario es *noetheriano* si toda sucesión creciente de ideales es estacionaria, lo que equivale a decir que todo ideal está finitamente generado.

2 Un conjunto ordenado verifica la condición de *cadena ascendente* si toda sucesión creciente de elementos es finita.

funciones algebraicas, su madre Ida Kaufmann, procedía de una familia de Colonia. Ambos eran de origen judío. Tuvieron tres hijos pero uno murió en la infancia, Emmy era la mayor y Frizt que tenía dos años menos que ella, también fue matemático y se especializó en matemática aplicada.

Hasta los 15 años asistió al Höhere Töchter Schule en Erlangen donde estudió alemán, inglés, francés, aritmética, piano y danza. Después de esta formación básica estudió francés e inglés, para ser profesora de idiomas y en 1900 superó los Exámenes de Estado que la calificaban para enseñar idiomas en cualquier institución educativa femenina. Después de obtener este título, el medio matemático en el que se desarrollaba su vida, entre su padre y los amigos de éste, orientó sus estudios hacia las matemáticas.

El Senado de la Universidad de Erlangen había declarado en 1898 que la admisión de mujeres estudiantes "*destrozaría todo orden académico*"[3], sin embargo se les autorizaba a asistir a clase con un permiso especial, que no les daba derecho a examinarse. Fue la única alumna entre 984 estudiantes.

Después de pasar los exámenes en Nuremberg en 1903, fue a Göttingen donde asistió a cursos impartidos por Hilbert, Klein y Minkowski y en 1904 regresó a Erlangen donde habían cambiado los estatutos de la Universidad y pudo proseguir sus estudios de doctorado, que realizó bajo la influencia de Paul Gordan sobre la teoría de invariantes. En 1907 obtuvo el grado de doctora “cum laude” con la memoria titulada: *Sobre los sistemas completos de invariantes para las formas bicuadráticas ternarias*, que fue publicada en 1908.

[3] Smith, S. (1996): *Agnesi to Zeno: Over 100 Vignettes from the History of Math.*

La fama de Emmy creció rápidamente, así como sus publicaciones. En 1908 fue elegida miembro del Circolo Matematico de Palermo, y desde 1909 perteneció al Mathematiker Vereinigung Alemán. Ese mismo año fue invitada para dar una conferencia en Salzburgo y en 1913 en Viena. A pesar de este reconocimiento público su trabajo en la Universidad de Erlangen consistía únicamente en ayudar a su padre, lo sustituía cuando estaba enfermo y continuaba con sus investigaciones, pero sin percibir salario alguno. Durante estos años tuvo dos tutores algebristas: Ernst Fischer (1840-1927) y Bernhard Schmidt (1879-1935). Ella declaró que Fischer le había despertado el interés por el álgebra abstracta y que fue precisamente esta influencia la que determinó su trabajo futuro[4]. Abandonó la corriente constructivista que había utilizado en su memoria de doctorado y desarrolló un pensamiento axiomático conceptual.

En 1915 fue invitada por David Hilbert (1862-1943) y Félix Klein (1849-1925) a trabajar con ellos en la universidad de Göttingen, que en aquella época era el principal centro matemático de Alemania y probablemente de Europa. En una carta fechada en 1919 decía que había tomado esa decisión respondiendo a una invitación de matemáticos que trabajaban en esa ciudad[5]. Este periodo de la vida de Emmy (1915-1933) estuvo marcado por una intensa producción científica que determinó su aportación a las matemáticas y a la física. En esta época también colaboró en la edición de la revista *Mathematische Annalen.*

El reglamento vigente de la Universidad de Göttingen indicaba explícitamente que los candidatos debían ser hombres por lo que Noether no pudo presentarse a oposiciones como docente universitario. Hilbert quiso corregir esa injusticia, pero sus esfuerzos no tuvieron éxito, pues

[4] Noether, E. (1983): *Collected Papers*.

ciertos miembros de la facultad, no matemáticos, se opusieron. Se cuenta, como anécdota, que Hilbert dijo en un Consejo de la Universidad de Göttingen.

> *No veo por qué el sexo de la candidata es un argumento contra su nombramiento como docente. Después de todo no somos un establecimiento de baños.*

[Figueiras, L.; Molero, M.; Salvador, A. Y Zuasti, N. (1998): *Género y Matemáticas*.]

Hilbert y Noether encontraron un sistema para que ella pudiera impartir como docente: las clases se anunciaban bajo el nombre de Hilbert y ella figuraba como ayudante. Así pudo probar su competencia y ser mejor conocida.

Finalizada la Primera Guerra Mundial Alemania pasó a ser una república. Por primera vez las mujeres tuvieron derecho a voto y fue derogado el anterior reglamento de oposiciones. En 1919, Emmy presentó como “tesis de habilitación” su trabajo "*Invariante Variationsprobleme*" junto con doce artículos ya publicados y dos manuscritos adicionales, en uno de los cuales había varias ideas importantes que tuvieron un impacto significante en el reciente desarrollo del álgebra abstracta. En 1922 fue nombrada “profesor extraordinario y no oficial”. No tenía derecho a sueldo pero pudo obtener pequeñas retribuciones, por su grado de experta en álgebra, que en ese momento le eran imprescindibles, ya que la inflación de la posguerra estaba acabando con su pequeña herencia.

> *Cuando, en 1930, obtuve un puesto de profesor en Göttingen, intenté conseguir para Emmy un puesto mejor, ya que me avergonzaba ocupar una posición por*

[5] Noether, E. (1983): *Collected Papers*.

> *encima de ella, sabiendo que como matemática era superior a mí en muchos aspectos. No tuve éxito. Tradición, prejuicios, consideraciones externas pesaron en contra de sus méritos y grandeza científica, que por entonces nadie ponía en duda. En mis años en Göttingen (1930 - 1933), ella fue sin duda el centro de actividad matemática más poderoso, tanto por la importancia de sus investigaciones como por su influencia sobre un amplio número de discípulos.*

[Herman Weyl (1935), *Emmy Noether*, "Scripta Mathematica III", 3, 201-220]

Durante el curso 1928-29 pasó un semestre como profesora visitante en la Universidad de Moscú y fue invitada al Congreso Matemático Internacional en Bolonia. En septiembre de 1932 fue invitada al Congreso Internacional de Matemáticas de Zurich. Emmy presentó una importante comunicación titulada: "*Los sistemas hipergeométricos en su relación con las álgebras no conmutativas*". Este mismo año recibió con Artin, el Alfred Ackermann-Teubner Memorial, premio para el Avance del Conocimiento Matemático.

A pesar del reconocimiento obtenido por este éxito, los cambios políticos y la llegada de Hitler al poder le obligaron a reorientar su carrera. Ser una intelectual, pacifista, judía y liberal le obligó a abandonar Alemania. Primero pensó marchar a Rusia y se puso en contacto con su amigo Alexandroff, pero pasó demasiado tiempo antes de que le contestaran ofreciéndole un puesto. En abril de 1933 se le retiró su derecho a ejercer como docente por ser judía y las leyes raciales empujaron a Emmy al exilio. A finales de ese año se marchó a los Estados Unidos como profesora invitada durante un año a una universidad femenina, el Bryn Mawr College (Pennsylvania). En febrero de 1934 comenzó a trabajar en Princeton, New Jersey, en el Instituto de Estudios Avanzados, donde también se encontraba Albert Einstein. En verano volvió por última vez a Alemania para ver a su hermano Fritz, visitar viejos amigos y cerrar su casa.

La noticia de su repentina muerte, el 14 de abril de 1935, como consecuencia de una operación, en principio no demasiado seria, sorprendió a todos. Tenía 53 años y estaba en el apogeo de su fuerza creadora.

Sin duda Emmy Noether figurará siempre como una de las personalidades matemáticas más importantes del siglo XX. Muchas personas por todo el mundo continúan su trabajo en álgebra. Sobre ella dijo Jean Dieudonné:

Fue la mejor matemática de su tiempo, y uno de
los mejores matemáticos (hombre o mujer) del siglo XX.

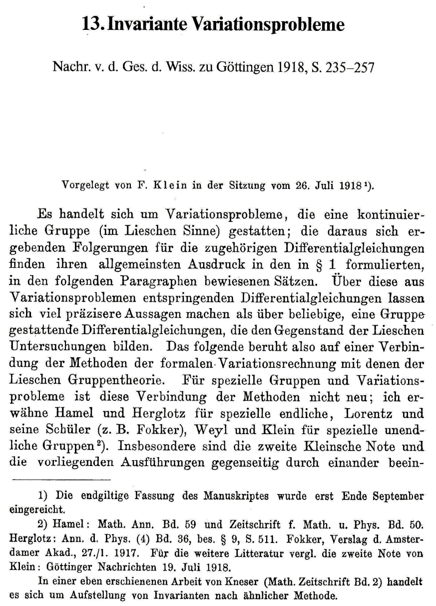
[Eychenne, E. (1993): *Mathématiciennes, ... des inconnues parmi d'autres.*]

4.10.2. Su obra

Emmy Noether ha pasado a los libros de historia de las matemáticas por sus contribuciones al álgebra y por sus trabajos en topología. Su tendencia hacia el pensamiento abstracto, le permitió afrontar problemas matemáticos de forma muy original. Los físicos le deben el famoso teorema que lleva su nombre, que se aplica al estudio de las partículas subatómicas y la dinámica de sistemas.

En la obra de Emmy Noether se distinguen tres periodos distintos: de 1882 a 1915 en Erlangen, de 1915 a 1933, el periodo más productivo, en Göttingen, y de 1933 a 1935, en Estados Unidos.

También se pueden distinguir tres tipos de contenidos diferentes en sus investigaciones, el primero es la teoría de invariantes que fue el tema de su tesis doctoral en Erlangen y de sus aportaciones a la Física Teórica como resultados de sus primeros trabajos en Göttingen, el segundo es el trabajo de axiomatización del Álgebra en el que destaca la teoría general de anillos e ideales noetherianos, por último sus investigaciones sobre álgebras no conmutativas que realizó durante sus últimos años en Göttingen y su estancia en Estados Unidos.



13. Invariante Variationsprobleme

Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1918, S. 235–257

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

En Erlangen, después de realizar su tesis doctoral bajo la influencia de Paul Gordan, comenzó su interés por el álgebra abstracta. Las investigaciones más importantes de Emmy, tanto en Matemáticas como en Física Teórica, fueron las que realizó en Göttingen. En su trabajo *Invariante Variationsprobleme* (1918) incluía dos resultados importantes, esenciales en la teoría de la relatividad general y en el estudio de las partículas elementales ya que relacionaban las simetrías con las leyes de conservación de la energía[6]. Por sus investigaciones en matemáticas se

6 Dick, A. (1981): *Emmy Noether*, 1882-1935.

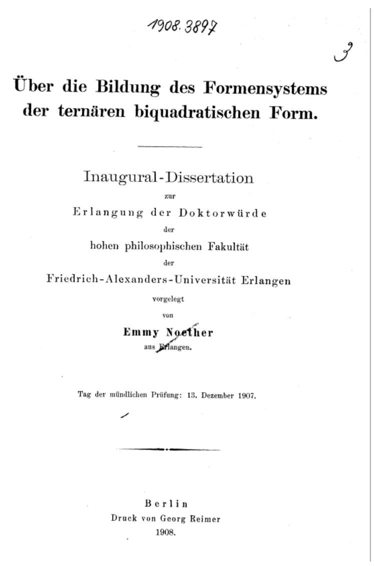
convirtió en una especialista en la teoría de invariantes[7] que había sido el tema de sus primeras investigaciones en su tesis doctoral.

Desarrolló la teoría general de anillos e ideales bajo una base axiomática, contribuyendo a que el método axiomático fuese un potente instrumento en la investigación.

Sus trabajos en álgebra no conmutativa unificaron conceptualmente todos los resultados sobre intuiciones geniales pero bastante confusos introducidos en las décadas anteriores por Kronecker, Dedekind y Kumer. En el corto espacio de tiempo que vivió en Estados Unidos continuó sus investigaciones en este campo.

4.10.3. Emmy y la teoría de la relatividad

La tesis doctoral de Emmy siguió el planteamiento constructivista de Gordan. El estilo de este matemático consistía en hojas y hojas de símbolos sin casi una palabra de texto. Emmy calculó los 331 invariantes de las formas ternarias bicuadráticas[8]. Ella misma calificaba su tesis de "*una jungla de fórmulas*"[9] siendo el estilo de sus trabajos posteriores muy diferente, más conceptual y orientado a reflexionar sobre la naturaleza intrínseca de los problemas para profundizar en ellos y generalizarlos.


1908.3897

3

Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form.

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
hohen philosophischen Fakultät
der
Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen
vorgelegt
von
Emmy Noether
aus Erlangen.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Dezember 1907.

Berlin
Druck von Georg Reimer
1908.

7 Se considera que son *invariantes* de las leyes matemáticas de un sistema aquellas transformaciones, como por ejemplo las isometrías, que conservan las propiedades propias del sistema.

8 Noether, E. (1908): *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*.

9 Lafortune, L. (1986): *Femmes et mathématiques*.

Después de su traslado a Göttingen en 1915, a medida que fue conociendo el trabajo de David Hilbert, y a sus colaboraciones con el sucesor de Gordan, Ernst Sigismund Fischer, su investigación comenzó a hacerse más general y abstracta y elaboró el trabajo que posteriormente se mostró de capital importancia para la física y la teoría de la relatividad.

El artículo de Emmy *Invariante Variationsprobleme*[10] fue presentado el 16 de julio de 1918 en la reunión del *Könighche el der de Gesellschaft el zu de Wissenschaften Göttingen* por Felix Klein probablemente porque Noether no era un miembro de los *Gesellschaft*. El trabajo demostró dos teoremas básicos para la teoría general de la relatividad y la física de partículas elementales, que revelaron la conexión general entre las simetrías y las leyes de conservación de la energía[11] y son conocidos por los físicos como "*Teorema de Noether*"[12] .

En aquella época David Hilbert, Felix Klein y otros en Göttingen estaban muy interesados en esta nueva teoría. El trabajo de Emmy fue una continuación al descubrimiento de David Hilbert del principio del variacional del que derivaron las ecuaciones de la teoría general de la relatividad. Sin embargo, en este campo, había problemas no resueltos con respecto a la conservación de energía. Emmy los resolvió y su trabajo fue alabado por Einstein (1918), en una carta a Hilbert, donde se refirió a ella como "*pensamiento matemático penetrante*".

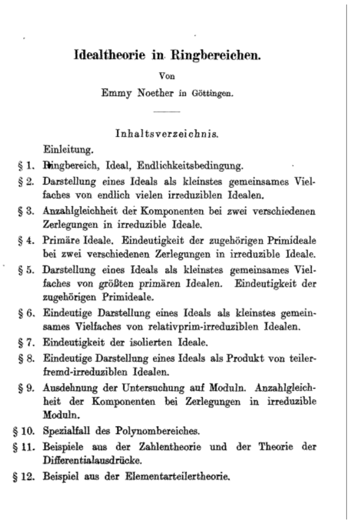
[10] Noether, E. (1918): *Invariante Variationsprobleme*.
[11] Hill, C. T. Y Lederman L. M.: *Symmetries of the Laws of Physics and Noether's Theorem*.
[12] Hill, C. T. Y Lederman L. M.: *Symmetry in Physics: Proving Noether's Theorem.*

4.10.4. La teoría de ideales en anillos noetherianos

En la década de los años veinte inició una serie de investigaciones que modificaron el Álgebra desde sus fundamentos.

Publicó una docena de artículos. Los más importantes fueron dos memorias sobre la teoría de ideales: *Teoría de ideales en anillos* (1921)[13] y *Construcción abstracta de la teoría de ideales en el dominio del cuerpo de los números algebraicos* (1924).

El primer artículo de E. Noether, *Teoría de ideales en anillos* (1921), es el fundamento de la teoría general de anillos conmutativos. Antes de este artículo, los resultados de álgebra conmutativa se restringían al estudio de casos especiales de lo que se denominan anillos conmutativos, como los anillos de polinomios o el anillo de los números enteros. Dedekind había introducido los ideales como un conjunto de números enteros en un cuerpo numérico. Emmy Noether determinó las propiedades que tenían que verificar las dos operaciones de un conjunto para poder determinar que tenían estructura de anillo, anillo conmutativo y anillo unitario. También demostró que la condición de cadena ascendente para los ideales de un anillo es equivalente a decir que todos los ideales del anillo están finitamente generados. En 1943 el matemático francés Claude Chevalley acuñó el término, *anillo noetheriano*, para describir esta propiedad en un anillo.



Idealtheorie in Ringbereichen.

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.
§ 1. Ringbereich, Ideal, Endlichkeitsbedingung.
§ 2. Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduziblen Idealen.
§ 3. Anzahlgleichheit der Komponenten bei zwei verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Ideale.
§ 4. Primäre Ideale. Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale bei zwei verschiedenen Zerlegungen in irreduzible Ideale.
§ 5. Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von größten primären Idealen. Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale.
§ 6. Eindeutige Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches von relativprim-irreduziblen Idealen.
§ 7. Eindeutigkeit der isolierten Ideale.
§ 8. Eindeutige Darstellung eines Ideals als Produkt von teilerfremd-irreduziblen Idealen.
§ 9. Ausdehnung der Untersuchung auf Moduln. Anzahlgleichheit der Komponenten bei Zerlegungen in irreduzible Moduln.
§ 10. Spezialfall des Polynombereiches.
§ 11. Beispiele aus der Zahlentheorie und der Theorie der Differentialausdrücke.
§ 12. Beispiel aus der Elementarteilertheorie.

En el segundo trabajo generalizó el teorema fundamental de la aritmética que determina que cualquier entero positivo se puede expresar como un producto de potencias de números primos y que dicha descomposición es única. Dedekind había demostrado la descomposición de los ideales de un conjunto de números enteros como producto de ideales primos. Lasker había ampliado este teorema al anillo de los polinomios en el denominado *teorema de la descomposición primaria de ideales en anillos polinómicos*. E. Noether generalizó este teorema a un conjunto con estructura de anillo conmutativo que satisface la condición de cadena ascendente, es decir, en anillos noetherianos. El teorema de descomposición primaria en anillos noetherianos se conoce como el teorema de Lasker–Noether.

> *Emmy, en su primera memoria, convirtió los ideales de números enteros en ideales, es decir, subconjuntos definidos axiomáticamente en cualquier conjunto con estructura de anillo y estableció que en un anillo conmutativo que verifique el celebre axioma de la cadena ascendente de ideales, (ahora llamado anillo noetheriano), todo ideal tiene una descomposición minimal finita como intersección de ideales primarios. En la segunda determinó los axiomas para poder establecer, en un anillo, la descomposición de un ideal como producto de ideales primos.*
>
> *En esta época no estaba aplicando las ideas y métodos de matemáticos anteriores. En lugar de ello estaba elaborando nuevos sistemas de definiciones matemáticas que serían usados por futuros matemáticos. […]*

[13] Noether, E (1921): *Idealtheories in Ringbereichen*, "Mathematische Annalen".

Las condiciones de cadena ascendente y la teoría de los ideales permitieron a Noether generalizar muchos resultados antiguos y tratar viejos problemas desde una nueva perspectivas.

[Van der Waerden (1935): *Nachruf auf Emmy Noether*, "Mathematische Annalen" 111, 469-476]

La potencia de los teoremas del álgebra abstracta se basa en su generalidad, la primera impresión es que poco se puede determinar sobre los conjuntos definidos con tan pocas propiedades, pero precisamente en esto radica la importancia del trabajo de E. Noether que consiste en descubrir lo máximo que se pueda concluir a partir de un conjunto de propiedades, o lo que es lo mismo, identificar el mínimo de propiedades básicas de los elementos de un conjunto para que se verifique un teorema.

A diferencia de la mayor parte de los matemáticos, no realizó abstracciones generalizando a partir de ejemplos concretos sino que trabajó directamente con abstracciones.

La máxima por la que se guiaba Emmy Noether a lo largo de su obra podría ser formulada como sigue:

Para Emmy Noether las relaciones entre los números, las funciones y las operaciones se vuelven transparentes, generalizables y productivas únicamente después de que hayan sido aisladas a partir de objetos particulares y formuladas con conceptos universalmente válidos.

[Van der Waerden (1935): *Nachruf auf Emmy Noether*, "Mathematische Annalen" 111, 469-476]

Así surgió la denominada matemática conceptual que caracterizó los trabajos de E. Noether. Este estilo de investigación en matemáticas fue adoptado por otros matemáticos, y generó nuevas teorías matemáticas como la teoría de categorías.

A Emmy Noether se le atribuyen las ideas fundamentales que condujeron al desarrollo de la topología algebraica a partir de la topología combinatoria, en particular la idea de grupos de homología. De acuerdo con lo que dice Alexandrov, Noether asistía a clases impartidas por Heinz Hopf y él mismo en los veranos de 1926 y 1927, donde "*estaba continuamente haciendo observaciones, que frecuentemente eran profundas y sutiles*", y continúa:

> *Cuando ... en principio quedó satisfecha con una construcción sistemática de la topología combinatoria, observó inmediatamente que merecería la pena estudiar directamente el grupo de complejos algebraicos y ciclos de un poliedro dado y el subgrupo del grupo cíclico que consta de ciclos homólogos a cero. En lugar de la definición habitual de los números de Betti, sugirió inmediatamente definir el grupo de Betti como el cociente del grupo de todos los ciclos por el subgrupo de ciclos homólogos a cero. Esta observación ahora parece obvia. Pero en aquellos años (1925–1928) fue un punto de vista completamente nuevo.*

La sugerencia de Noether de que la topología debía estudiarse algebraicamente fue adoptada inmediatamente por Hopf, Alexandrov, y otros, y se convirtió en un tema de discusión frecuente entre los matemáticos de Göttingen. Noether observó que su idea de grupo de Betti hace que la fórmula Euler–Poincaré sea fácil de comprender, y el propio trabajo de Hopf sobre esta materia "*lleva la impronta de estas observaciones de Emmy Noether*". Noether menciona sus propias ideas sobre la topología sólo marginalmente en una publicación de 1926, donde las cita como una aplicación de la teoría de grupos.

La aproximación algebraica a la topología se desarrolló independientemente en Austria. En un curso impartido en 1926–27 en Viena, Leopold Vietoris define "*grupo de homología*" y Walther Mayer dio una definición axiomática del mismo en 1928.

4.10.5. Sus trabajos en álgebras no conmutativas

En 1920 había publicado con W. Schmeidler un trabajo sobre operadores diferenciales en álgebras no conmutativas que suponen, según H. Weyl, el comienzo en su obra matemática

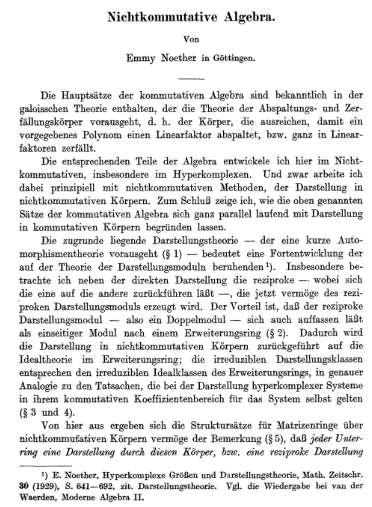
> *Fue el comienzo de su poder creador tan original e incluso genial.*

[Dubreil-Jacotin, M. L. *Les grands courants de la pensée mathématique*]

En 1927 colaboró con Helmut Hasse (1898-1972) y Richard Brauer (1901-1977) en trabajos sobre álgebra no conmutativa.

A partir de entonces centró su estudio en este campo. Sus investigaciones sobre los sistemas hipercomplejos, la teoría de la representación y, de forma general, el álgebra no conmutativa se caracterizan por la importancia que tienen las nociones de módulo, ideal, automorfismo y por la generalidad de los resultados que son válidos en cualquier cuerpo.

En los primeros años del siglo XX se habían llevado a cabo trabajos aislados sobre los números hipercomplejos y representaciones de grupo. Emmy Noether unificó los resultados y elaboró la primera representación general de la teoría de grupos y álgebras, resumió la teoría estructural del álgebra asociativa y de la representación de grupos en una única teoría aritmética de módulos e ideales que satisfacen las condiciones de cadena ascendentes. Este trabajo de Noether es de fundamental importancia para el desarrollo del álgebra moderna.



Nichtkommutative Algebra.

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Die Hauptsätze der kommutativen Algebra sind bekanntlich in der galoisschen Theorie enthalten, der die Theorie der Abspaltungs- und Zerfällungskörper vorausgeht, d. h. der Körper, die ausreichen, damit ein vorgegebenes Polynom einen Linearfaktor abspaltet, bzw. ganz in Linearfaktoren zerfällt.

Die entsprechenden Teile der Algebra entwickele ich hier im Nichtkommutativen, insbesondere im Hyperkomplexen. Und zwar arbeite ich dabei prinzipiell mit nichtkommutativen Methoden, der Darstellung in nichtkommutativen Körpern. Zum Schluß zeige ich, wie die oben genannten Sätze der kommutativen Algebra sich ganz parallel laufend mit Darstellung in kommutativen Körpern begründen lassen.

Die zugrunde liegende Darstellungstheorie — der eine kurze Automorphismentheorie vorausgeht (§ 1) — bedeutet eine Fortentwicklung der auf der Theorie der Darstellungsmoduln beruhenden[1]). Insbesondere betrachte ich neben der direkten Darstellung die reziproke — wobei sich die eine auf die andere zurückführen läßt —, die jetzt vermöge des reziproken Darstellungsmoduls erzeugt wird. Der Vorteil ist, daß der reziproke Darstellungsmodul — also ein Doppelmodul — sich auch auffassen läßt als einseitiger Modul nach einem Erweiterungsring (§ 2). Dadurch wird die Darstellung in nichtkommutativen Körpern zurückgeführt auf die Idealtheorie im Erweiterungsring; die irreduziblen Darstellungsklassen entsprechen den irreduziblen Idealklassen des Erweiterungsrings, in genauer Analogie zu den Tatsachen, die bei der Darstellung hyperkomplexer Systeme in ihrem kommutativen Koeffizientenbereich für das System selbst gelten (§ 3 und 4).

Von hier aus ergeben sich die Struktursätze für Matrizenringe über nichtkommutativen Körpern vermöge der Bemerkung (§ 5), daß *jeder Unterring eine Darstellung durch diesen Körper, bzw. eine reziproke Darstellung*

[1]) E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 641—692, zit. Darstellungstheorie. Vgl. die Wiedergabe bei van der Waerden, Moderne Algebra II.

Por teorías como la del producto cruzado, desarrolladas por ella o en colaboración con Helmut Hasse y Richard Brauer, Emmy Noether consiguió unos resultados muy importantes aplicando brillantemente los métodos hipercomplejos a difíciles problemas de la teoría de cuerpos cociente. Uno de sus trabajos más importantes, Álgebras no conmutativas[14], publicado en 1933, proporciona una visión global de dicha teoría.

Un artículo muy influyente publicado por Noether, Helmut Hasse y Richard Brauer trató de las álgebras de división, que son aquellos sistemas algebraicos en los que es posible la división. Probaron dos teoremas importantes; un teorema local-global que afirma que si un álgebra de división finita dimensional central sobre un cuerpo numérico algebraico se descompone localmente en cualquier elemento, entonces se descompone también globalmente, y de esto se deduce su teorema principal todo álgebra de división central finito-dimensional sobre un cuerpo numérico algebraico se descompone sobre una extensión cíclica ciclotómica.

Estos teoremas permiten clasificar todas las álgebras de división finito dimensionales y centrales sobre un cuerpo numérico dado. Un artículo posterior mostró, como un caso especial de un teorema más general, que todos los subcuerpos maximales de un álgebra de división son cuerpos de descomposición. Este artículo también contiene el teorema de Skolem–Noether que afirma que dos inclusiones de una extensión de un cuerpo K en un álgebra simple central finito-dimensional sobre K, son conjugados. El teorema de Brauer–Noether ofrece una caracterización de los cuerpos de descomposición de un álgebra de división central sobre un cuerpo.

4.10.6. La profesora Emmy Noether

Una serie de discípulos procedentes de todo el mundo y conocidos como de la "*Escuela Noether*", a través de sus clases y discusiones abiertas hicieron fecundo su trabajo. Entre ellos podemos citar a Krull, Grell, Koethe, Deuring, Fitting, F-K Schmidt, etc.[15]. Formaban una pequeña familia, se mostraba con ellos buena y maternal, interesada por sus asuntos personales, siempre dispuesta a ayudarlos, pero como una juez implacable en lo referente a su trabajo matemático. Uno de ellos, Van Der Waerden,

[14] Noether, E (1933): *Nichtkommutative Algebra*. "Mathematische Zeitschrift".
[15] Dubreil-Jacotin, M. L. : *Les grands courants de la pensée mathématique.*

decía que no sólo estaban entusiasmados por el proyecto de Emmy sino también con el tratamiento que ella hacía:

> *"Era para nosotros una amiga leal y al mismo tiempo un juez severo e incorruptible"*

A través de sus discípulos, la moderna concepción del Álgebra llegó a casi todas las universidades alemanas y a los centros de investigación matemática de Francia, Unión Soviética, Japón y EE.UU. Se le atribuía la capacidad, no usual, de visualizar y aclarar los conceptos más difíciles con la ayuda de ejemplos concretos.

La obra de Emmy no se puede juzgar exclusivamente por sus publicaciones, un poco abandonadas. Se debe considerar que siempre ayudó a sus estudiantes y colegas a desarrollar resultados interesantes a partir de las observaciones, sugerencias, o comentarios que ella les hacía. Un ejemplo es la introducción del concepto de *nilradical*[16] por Koethe en 1931. Otro es el caso de Van der Waerden, que en 1924 fue a Göttingen un año para estudiar con Emmy, y al volver a Ámsterdam escribió su libro Álgebra Moderna en dos volúmenes. La mayor parte del segundo volumen es el trabajo de Emmy, clarificado y ordenado por él.

[16] El *nilradical* de un anillo es la intersección de todos los ideales primos del anillo. Este concepto fue mejorado posteriormente por Jacobson que introdujo el concepto de *radical de Jacobson* que es la intersección de todos los ideales maximales del anillo.

Se debe también a Emmy, en colaboración con el filósofo francés Jean Cavaillès, una edición que apareció en 1937 de la correspondencia entre Georg Cantor y Richard Dedekind, entre abril de 1872 y agosto de 1899. Estas cartas permitieron seguir la génesis de la teoría de conjuntos.

En la Sociedad Matemática de Moscú, su amigo Pavel Sergeevich Alexandrov (1896-1982) la recordaba con este tributo:

> *Emmy Noether fue la más grande de las mujeres matemáticas, una gran científica, magnífica profesora y una inolvidable persona.*

[Dick, A. (1981): *Emmy Noether*, cita de Alexandrov]

4.10.7. Sobre su trabajo matemático

Sus investigaciones crearon un cuerpo de principios que unificaron el Álgebra, la Geometría, la Topología y la Lógica. En su época su genialidad fue ampliamente reconocida por la comunidad matemática. Conocemos textos de Hilbert, H. Weyl, Einstein, Alexandrov, Van der Waerden, Jacobson..., alabando su talento, pero no podemos olvidar que durante los casi treinta años que estuvo dedicada a la enseñanza y a la investigación nunca consiguió un salario digno.

> *Su importancia para el álgebra no puede valorarse leyendo únicamente sus publicaciones, pues ella tenía un gran poder para estimular por lo que muchas de sus sugerencias tomaron forma en los trabajos de sus alumnos y colegas. ...*
>
> *La teoría de álgebras no-conmutativas y sus representaciones fue elaborada por Emmy Noether que*

unificó, de modo puramente conceptual, todos los resultados que se habían acumulado durante décadas por los ingeniosos trabajos de Frobenius, Dickson, Wedderburn y otros.

[Hermann Weyl (1935): *Emmy Noether*, "Scripta Mathematica III", 3, 201-220]

En el reino del álgebra, en el que los mejores matemáticos han trabajado durante siglos, ella descubrió métodos que han probado su enorme importancia... La matemática pura es, a su manera, la poesía de las ideas lógicas. ... En este esfuerzo hacia la belleza lógica se descubren fórmulas espirituales necesarias para conseguir una penetración más profunda en las leyes de naturaleza.

[Albert Einstein, (1935): *Un tributo a Emmy Noether*, "The New York Times" (5 de mayo)]

Fue ella quién nos enseñó a pensar en términos de conceptos algebraicos simples y generales, homomorfismos, aplicaciones, grupos y anillos con operadores, ideales, teoremas tales como los teoremas de homomorfismo e isomorfismo, conceptos como las condiciones de cadena ascendente y descendente para subgrupos e ideales, o la noción de grupos con operadores que fue introducida por Emmy Noether y ha entrado en la práctica diaria de una amplia gama de disciplinas matemáticas ... sólo hay que mirar el trabajo de Pontryagin en grupos continuos, el de Kolmogorov en *topología combinatoria, el de Hopf en aplicaciones continuas, el de.Van der Waerden en geometría algebraica... para darse cuenta de la influencia de las ideas de Emmy Noether. Esta influencia también se siente agudamente en el libro de H. Weyl, Gruppentheories und Quantenmechanik.*

[P. S. Alexandrov en Dick, A. (1981): Emmy Noether. Birkhauser, Boston]

El álgebra abstracta puede fecharse desde la publicación de dos trabajos de Noether, el primero el que publicó junto con Schmeidler y sobre todo un trabajo verdaderamente monumental Idealtheorie in Ringbereichen que pertenece a una de las corrientes principales del álgebra abstracta, la teoría de anillos conmutativos, y puede considerarse como el primer trabajo en este inmenso campo.

[Nathan Jacobson escribió sobre Emmy en Noether, E. (1983): *Collected Papers*. Springer - Verlag, New York]

E. Noether es ... la más grande matemática que jamás haya existido; y la más grande científica contemporánea de cualquier especialidad, y una autoridad como poco al mismo nivel que Madame Curie.

[Norbert Wiener (1935) escribió sobre E. Noether]

4.10.8. Reconocimientos

Una calle de Erlangen, la ciudad en la que nació, lleva el nombre de Emmy Noether y Max Noether (su padre). También la escuela secundaria a la que asistió en Erlangen ha sido rebautizada como *Emmy Noether School*. En la cara oculta de la luna un cráter fue nombrado en su honor y el asteroide *7001 Noether* también debe su nombre a Emmy Noether

La *Association for Women in Mathematics* celebra cada año sus *Conferencias Noether* para honrar a las mujeres matemáticas. En el folleto editado en 2005, la asociación caracteriza a Noether como:

> *"Uno de los matemáticos más importantes de su tiempo, alguien que trabajó y sufrió por aquello en lo que creía y amaba. Su vida y obra serán para nosotras una gran inspiración".*

Por su trabajo de dedicación a sus alumnos, la Universidad de Siegen ha reunido sus facultades de matemáticas y física en el llamado "*Campus Emmy Noether*".

La Sociedad Alemana para la Investigación Científica lleva a cabo el *Emmy Noether Programm*, una beca posdoctoral para apoyar la investigación y la docencia de jóvenes prometedores

En la Exposición Universal de 1964 bajo el lema Matemáticas: *Más allá del mundo de los números*, Emmy Noether fue la única mujer que aparecía entre los matemáticos notables del mundo moderno.

4.11. Grace Chisholm Young

(1868 - 1944)

Grace Chisholm Young (15 de marzo de 1868 – 29 de marzo de 1944) fue una matemática inglesa educada en Cambridge y que obtuvo su doctorado en 1895 en Göttingen. El libro "*Primer libro de Geometría*" que escribió Grace Chisholm Young ha sido recientemente reeditado causando sorpresa por lo modernas que resultan sus propuestas. Su hijo Laurence Chisholm Young y su hija Rosalind Tanner fueron también matemáticos/as. Una de sus nietas Sylvia Wiegand fue presidenta de la *Association for Women in Mathematics* en el período 1997-1999 y es una conocida algebrista.

Para hacernos una idea clara sobre el estado de la educación en esa época recordemos que hacia 1881, el 20 por ciento de la población de Inglaterra todavía no sabía escribir su nombre. (Perl; 1978, 149).

4.11.1. Su vida

Grace Chisholm Young nació el 15 de marzo de 1868, en Haslemere, cerca de Londres, Inglaterra, durante el reinado de la reina Victoria.

Su familia era de clase alta, con elevada educación. El padre, Henry William Chisholm, tuvo un prestigioso cargo (Warden of the Standards) en el Departamento de Pesas y Medidas del Gobierno británico y la madre, Anna Louisa Bell, era una consumada pianista que, junto a su padre, daba recitales de violín y piano en Haslemere Town Hall. Tenían 44 y 59 años, respectivamente, cuando ella nació. Uno de sus hermanos mayores, Hugo Chisholm obtuvo fama por la edición de la Enciclopedia Británica e influencia en la edición de The Times.

Era la más pequeña de cuatro hermanos (tres supervivientes) y también la más consentida. La educación fue muy diferente para su hermano varón. Su hermano se educó primero en una prestigiosa escuela y posteriormente en Oxford. Pero según las costumbres de la época, Grace y su hermana permanecieron en casa con su madre y luego con una institutriz. Sólo le enseñaban lo que específicamente quería aprender y en este sentido su educación fue un tanto informal. Le gustaba el cálculo mental y la música. Y como en ambas materias su madre podía instruirla, se educó en su casa hasta que tuvo diez años. A los diez años su madre le puso una institutriz, que constituyó la única educación formal en su infancia. Sin embargo fue una preparación suficiente para, a los 17 años, pasar los exámenes de Cambridge (Cambridge Senior Examination). Si hubiese sido un varón, al año siguiente hubiese comenzado sus estudios universitarios, pero al ser una mujer, esta posibilidad no fue considerada, y siguiendo los deseos de su familia se ocupó de trabajos sociales con la gente pobre de Londres.

En abril de 1889, cuando Grace tenía 21 años, decidió continuar estudiando. Su madre no deseaba que ella estudiase medicina, su primera elección, y con el apoyo de su padre comenzó a estudiar matemáticas. (Lafortune y Kayler; 1992, 66). Entró en Girton College, que formaba parte de la universidad de Cambridge. Girton, abierto en 1869, fue la primera escuela inglesa dedicada a la educación de mujeres a nivel universitario.

En Cambridge enseñaba Arthur Cayley (1821-1895). Su tutor, William Young, le sugirió que fuese a las clases de Cayley. Pidió a su amiga Isabel Maddison que le ayudase y ambas hicieron la petición que se requería para poder asistir a las clases de un determinado profesor. El permiso no fue autorizado con facilidad, pero al ser por indicación de su tutor, finalmente fue concedido. En 1893 Grace obtuvo su diploma en Cambridge (*Mathematics Tripos*), pero allí todavía una mujer no podía doctorarse.

Para proseguir su carrera como matemática debió abandonar su país e ir a Göttingen (la ciudad universitaria alemana donde se habían doctorado Sonia Kovalevskaya y Emmy Noether. Recordemos que Sonia Kovalevskaya aunque se había doctorado en Göttingen, nunca había sido admitida en esa universidad con los mismos derechos que los varones). Grace había elegido el lugar adecuado en el momento oportuno. Allí estaba *Felix Klein* (1849-1925), que la ayudó con su cordialidad y su apoyo. Pero la conformidad para admitirla tenía que darla el Ministerio de Cultura de Berlín. También fue en esto Grace afortunada pues el oficial encargado de la educación superior en Alemania era en ese momento Friedrich Althoff, liberal e interesado en la educación superior de la mujer.

A las clases de Klein asistían ella y otras dos mujeres. Como anécdota se cuenta que Klein tenía por costumbre comenzar con "¡*Caballeros*!" frase que debió modificar con "¡*Oyentes*!", aunque alguna vez se confundió y rectificó con una sonrisa.

En una carta ella describe así a Klein:

> *"La actitud del profesor Klein es la de no permitir la admisión de una mujer que no haya realizado previamente un*

buen trabajo, y que no haya superado una prueba en forma de grado o su equivalente, y todavía más, no permite el acceso si no se ha asegurado él mismo mediante una entrevista personal de la solidez de sus pretensiones. Reconozco que el profesor Klein es moderado. Hay miembros de esta Facultad que son más vehementes a favor de la admisión de las mujeres y otros que lo desaprueban totalmente".

[J. J. O'Connor; E. F. Robertson]

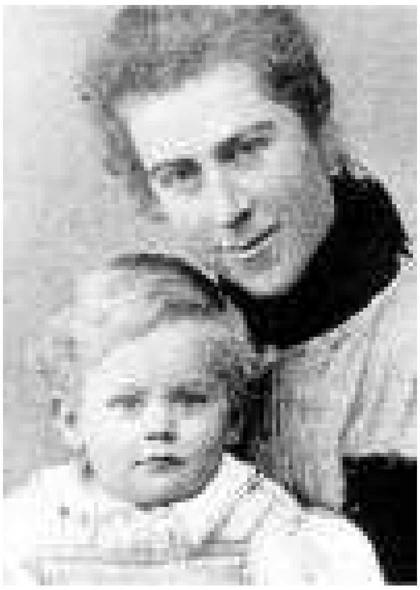
Bajo la supervisión de Klein obtuvo su doctorado en 1895 a la edad de 27 años y volvió a Inglaterra. Por lo tanto se puede considerar a Grace como la primera mujer que consiguió su doctorado en matemáticas de una forma "*normal*". Se examinó de doctorado y volvió a Inglaterra. El título de su memoria de doctorado es "*Los grupos algebraicos de la trigonometría esférica*". Su tesis fue reproducida y enviada a las personas que podían estar interesadas. Klein discutió algunos de sus resultados en uno de sus libros. Una de las personas que recibió la tesis fue William Young, su futuro esposo, que había sido su tutor en Gilton College, le pidió colaboración para un libro de astronomía. Es muy difícil separar la aportación de ella en dicho libro de la de él.

El que William Young se dedicara a las Matemáticas tuvo que ver con el director de la escuela donde estudió, E. A. Abott, el autor de *Flatland. A romance in many dimensions* (Planilandia) donde describe una sociedad utópica a través de las matemáticas y satiriza a la sociedad inglesa de la época. Merece la pena comentar que en esta sociedad utópica-matemática las mujeres son representadas por líneas y son el estrato social más bajo, sin ninguna posibilidad de progresar, además de estar «*totalmente desprovistas de capacidad cerebral*» (en la versión original, «*they are consequently wholly devoid of brainpower*»). Abott animó a William a estudiar Matemáticas como así lo hizo en Cambridge. Después de graduarse, no mostró inclinación hacia la investigación matemática, sino más bien hacia la teología, disciplina en la que ganó un premio, y hacia su enseñanza, pues se dedicó a preparar a estudiantes para los famosos exámenes de Cambridge: los *Mathematical Tripos*. De esta forma conoció a Grace (http://boletinmatematico.ual.es: J. J. Moreno: El matrimonio Young).

La primera vez que la pidió en matrimonio ella rehusó pero la insistencia de William no cesó hasta que se casaron en Londres en Junio de 1896. El primer año de su matrimonio vivieron en Cambridge donde ella pudo continuar investigando y escribiendo, pero al final de ese año, 1897, nació su primer hijo y William Young decidió trasladarse a Göttingen, Alemania desde 1899 a 1908 y después a Ginebra y Lausana (Suiza), aunque debido a los puestos que obtuvo William en diferentes universidades pasaron algunas épocas separados. Entre 1897 y 1908 tuvo seis hijos en un espacio de tiempo de nueve años, y una familia tan numerosa no le permitía desarrollar muchas actividades fuera del hogar.

Su creatividad se dirigió fundamentalmente a la educación de sus hijos a quienes están dirigidas las obras que escribió en aquella época. Escribió por ejemplo un libro para enseñar biología a uno de sus hijos, en el que describe el proceso de la división celular, que se publicó en 1905, con el nombre de *Bimbo*. En ese mismo año escribe *Primer libro de Geometría* en colaboración con su marido. Además, el temperamento de William fue muy bohemio, y debido a esto pasaron gran parte de su vida viajando por Alemania, Inglaterra, Italia....

Ocupó mucho de su tiempo en la educación de sus hijos. Su hijo Frank (Bimbo), que fue piloto y que murió durante la primera guerra mundial, prometía ser un gran científico. Janet, su segunda hija, fue física y la primera mujer miembro del Royal College de Surgeon. Cecily se doctoró en matemáticas en Girton de Cambridge, como hubiese deseado Grace. Pat fue un químico reconocido y trabajó en las finanzas públicas y la diplomacia. Su tercera hija, Helen Marion, se graduó en matemáticas por la Universidad de Lausanne. Su segundo hijo Laurence también fue matemático y profesor en la Universidad de Capetown en Sudáfrica, y en la Universidad de Wisconsin-Madison. Una de las catorce nietas de Grace, Sylvie Wiegand, hija de Laurence, es matemática por la Universidad de Nebraska y ha sido presidenta de la Asociación de Mujeres Matemáticas (*Association for Women in Mathematics*) en el período 1997-1999 y es una conocida algebrista.



Observemos cómo estamos contando en su biografía los nombres de sus hijos, de su marido... y que si leemos una biografía de Euler, Gauss, Weierstrass... no sabremos lo mismo de su familia. En todas las biografías de mujeres científicas se da esta circunstancia. Sabremos si estuvo casada o no lo estuvo, el nombre de su marido, de sus hijos, cuántos tuvo... Por ejemplo sabemos que Hipatia nunca se casó, igual que Sophie Germain, Caroline Herschel, María Gaetana Agnesi o Emmy Noether, y sabemos los nombres de los maridos de la marquesa de Châtelet, de Mary Somerville o de Sonia Kovalevskaya.

Cuando comenzó la segunda guerra mundial, vivían en Suecia. A William le causaba preocupación la reacción que pudiera haber en su país por su simpatía por Alemania y hacia 1940 Grace volvió sin él a Inglaterra acompañando a dos de sus nietos. Aunque intentó volver de nuevo fue imposible atravesar Francia. En el verano de 1942, cuando llevaban dos años separados, William murió repentinamente, pocos días antes de cumplir 79 años. Ella murió dos años después, en 1944, con 76 años.

4.11.2. Su obra

Como ella trabajó a menudo en colaboración con su marido es difícil distinguir su contribución en las obras en las que trabajaron juntos. Escribieron conjuntamente más de 220 artículos matemáticos y algunos libros. Cuando ella estudiaba en Cambridge era considerada como una matemática brillante. Por otro lado, William era considerado un buen profesor pero no hizo ninguna investigación original antes de trabajar con ella. Después de su matrimonio colaboraron en muchas ocasiones y William, de repente, a la edad de 35 años, se convirtió en un matemático creativo. Hoy se reconoce que William Young habría tenido muy pocas contribuciones matemáticas sin la ayuda de su mujer, un hecho que él, a menudo reconoce.

A partir de la boda la actividad matemática «*pública*» de Grace se diluyó mientras que la de William creció de forma notable, ganando en 1928 la medalla *Sylvester* otorgada por *The Royal Society* por su contribución a la teoría de funciones de una variable real, siendo presidente de la *London Mathematical Society* (1922-1924), presidente de la *Unión Matemática Internacional* (1929- 1936), etc. ¿Hasta dónde los trabajos firmados por William eran trabajos conjuntos con Grace? Eso es difícil de saber, pero quizás las siguientes palabras que están a continuación, traducidas y en versión original, puedan aclarar la situación:

En un fragmento de una carta dirigida a Grace por William, éste dice:

> *"El hecho es que nuestros artículos deberían haber sido publicados con los nombres de ambos, pero entonces ninguno habría obtenido beneficios. No. Míos son los laureles y el reconocimiento. Tuyo sólo el conocimiento. Todo con mi nombre ahora, y más tarde cuando nuestro sustento no sea de esta forma, todo o mucho con tu nombre. En la actualidad tu no puedes ejercer tu profesión. Tienes tus hijos. Yo puedo y lo hago".*

[J. J. O'Connor; E. F. Robertson]

La versión original:

> *"The fact is that our papers ought to be published under our joint names, but if this were done neither of us get*

the benefit of it. No. Mine the laurels now and the knowledge. Yours the knowledge only. Everything under my name now, and later when the loaves and fishes are no more procurable in that way, everything or much under your name. At present you cannot undertake a public career. You have your children. I can and do".

Es casi imposible afirmar con exactitud que parte del trabajo de estos artículos se debe a Grace. Como William escribió en la misma carta antes citada:

"Estoy contento de que hayas contribuido con tus ideas. Encuentro, particularmente como si yo te hubiese enseñado y mostrado los problemas que yo no podría abordar por mi mismo".

[J. J. O'Connor; E. F. Robertson]

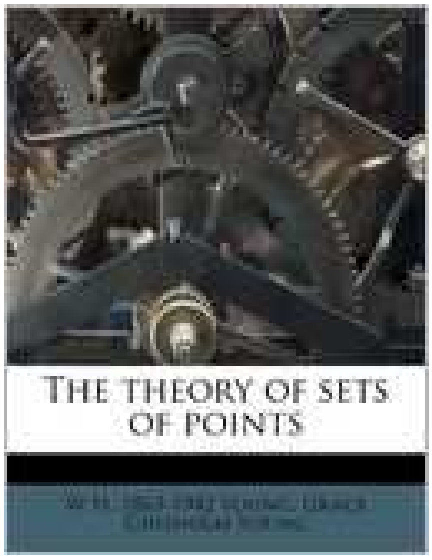
Uno de los libros: *Teoría de conjuntos de puntos*, (1906) fue publicado con el nombre de ambos y cuando Grace envió el libro a Cantor este le contestó:

"Es un placer para mi ver con que diligencia y éxito ha trabajado y le deseo en las investigaciones en este campo resultados tan interesantes, en los cuales, con tanta profundidad y agudeza de mente".

Grace escribió los artículos que publicaron. En las ausencias de su marido, cuando él iba a trabajar fuera, a pesar de sus seis hijos, ella reencontraba su energía productiva y se ponía a trabajar, y fue durante una de esas ausencias, cuando William estuvo en la India en la universidad de Calcuta, entre 1914 y 1916, cuando ella elaboró y publicó una serie de textos sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral que ganaron el Gamble Prize de Girton Cambridge.

No podía producir a su lado:

> *"Cuando William estaba en casa monopolizaba completamente la vida de Grace. Él sabía que sus demandas eran excesivas, pero..."*
>
> [Grattan-Guinness; 1972, 117]



A pesar de sus difíciles condiciones de vida fue capaz de conseguir una considerable cantidad de excelentes trabajos y desgraciadamente las obras y los más de 200 artículos que publicaron juntos llevaron impresa la autoría exclusiva de su marido.

¿Con qué nombre escriben las mujeres? Observemos el problema de la utilización del nombre. Si las mujeres cambian de nombre al casarse, como Mary Somerville, se hace muy difícil conocer su autoría. Además, muchas mujeres no utilizan su nombre, como Sophie Germain que usaba un pseudónimo, o como la propia Ada que firmaba su trabajo sólo con sus iniciales. Grace a pesar de sus difíciles condiciones de vida, fue capaz de conseguir una considerable cantidad de excelentes trabajos y, al ser su marido matemático, desgraciadamente las obras y los más de 200 artículos que publicaron juntos llevaron impresa la autoría exclusiva de su marido.

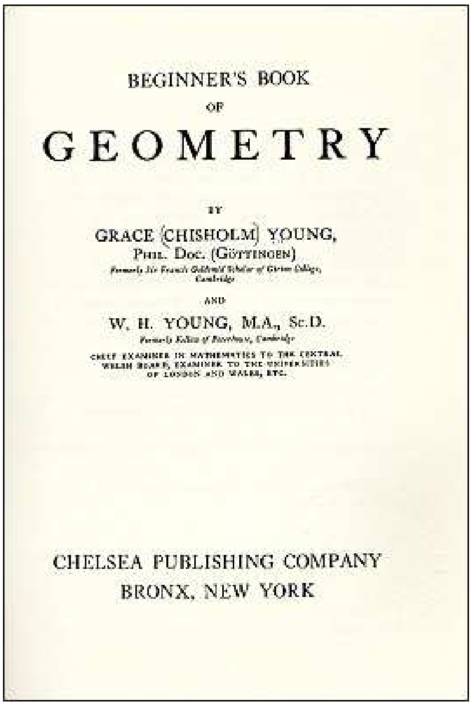
4.11.3. Primer libro de geometría

Publicó con su marido un libro de Geometría y otro de teoría de conjuntos. Su libro, Primer libro de Geometría, ha sido recientemente reeditado. En su introducción, Grace escribía que la geometría en dimensión tres recibía, en primaria y en secundaria, mucha menos atención que la geometría del plano. Opinaba que esto no debía ser así porque:

> *"en cierto sentido la geometría plana es más abstracta que la tridimensional, o también llamada Geometría del Sólido"*

[Young; 1970, Introduction]

Este libro, *Primer libro de Geometría* (*First Book of Geometry*) fue publicado en 1905 en Londres, traducido al alemán se publicó en Leipzip en 1908 bajo el título "*Der Kleine Geometer*", al hebreo en Dreden en 1921 y ha sido recientemente reeditado en 1970 bajo el título "*Beginner's Book of Geometry*" edición prácticamente igual a la original salvo la corrección de erratas, y ha causado sorpresa por lo moderno que aún hoy resulta.



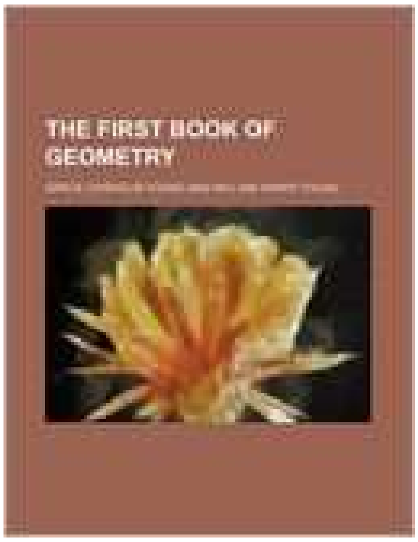
En su introducción, Grace escribía que el estudio de la geometría en primaria y en secundaria padece considerablemente por el hecho de que los escolares no han adquirido previamente el hábito de la observación geométrica, no se les ha animado a la práctica natural del pensamiento en dimensión tres, que recibía mucha menos atención que la geometría del plano. Opinaba que esto no debía ser así porque:

Consideraba que la geometría tridimensional era más cercana a la experiencia, era más natural. Pero admitía, sin embargo, que era muy difícil representar figuras tridimensionales en una superficie bidimensional como es una página de un libro, y consideraba que ésta era la razón por la no se trabajaba (y actualmente tampoco se trabaja) adecuadamente. Grace opinaba que el alumnado debía construir figuras espaciales, por lo que incluyó en su libro muchos diagramas de figuras tridimensionales para ser recortados y construidos. Opinaba que esa era la forma en que el alumnado debía familiarizarse con las propiedades de estas figuras y que utilizándolas, con su ayuda, podía visualizar los teoremas de la geometría tridimensional. Podemos observar como estas teorías didácticas resultan muy actuales.

Una de las razones por las que la geometría plana ha mantenido esta situación privilegiada durante cientos de años y se estudia en los cursos preliminares es probablemente debido al valor didáctico del dibujo de los diagramas planos en papel o en la pizarra o en otros medios equivalentes. Estos métodos tienen las siguientes ventajas:

1. No requieren un equipamiento especial.
2. Es fácil de enseñar y comprender, y sólo requiere cuidado y práctica.
3. Los diagramas pueden reproducirse tan a menudo como sea necesario, incluso por el estudiante, adquiriendo la necesaria destreza.

Pero admitía, sin embargo, muy difícil representar figuras tridimensionales en una superficie bidimensional como es una página de un libro, y consideraba que ésta era la razón por la no se trabajaba (y actualmente tampoco se trabaja) adecuadamente.



> *"El obstáculo en el camino del propio desarrollo de las ideas geométricas ha sido la carencia de un método que ocupe el lugar del dibujo de la geometría plana. El dibujo de los cuerpos sólidos es demasiado difícil. Los modelos, la mayor parte de cartón, tienen el mismo defecto... relativamente caros y requieren constante supervisión".*

[Young; 1970]

Grace opinaba que el alumnado debía construir figuras espaciales, utilizando papel, *lápiz, alfileres, tijeras, cosas que cualquier niño pequeño debe y puede tener*, por lo que incluyó en su libro muchos diagramas de figuras tridimensionales para ser recortados y construidos.

> *"Los métodos adoptados en el presente libro requieren pocos utensilios, sólo papel, ocasionalmente unos pocos alfileres, un lápiz y un par de tijeras".*

[Young; 1970]

Podemos observar como estas teorías didácticas resultan muy actuales.

4.11.4. Enseñanza de la Geometría: Algunas sugerencias

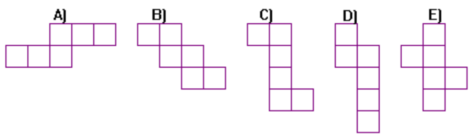
Construcción de muchos cuerpos geométricos mediante sus desarrollos

Tramas de cuadrados

Utilizar una trama de cuadrados en actividades como:

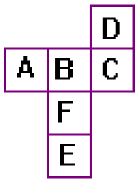
Actividad a):

¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



Actividad b):

Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?

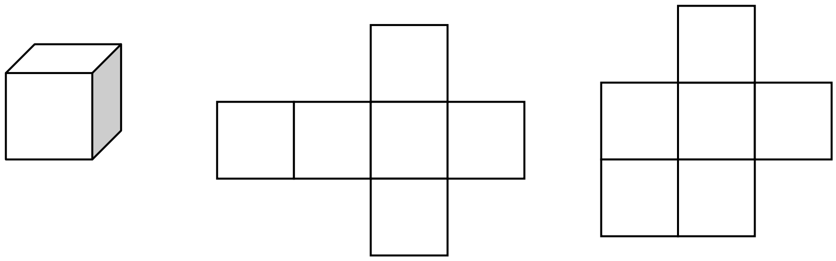


Actividad c):

Obtener todos los hexaminos con los que sea posible construir un cubo.

Actividad d)

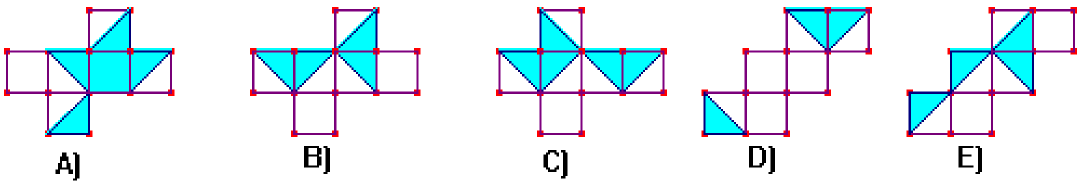
Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos



los diseños de seis cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo.

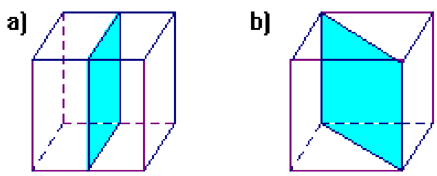
Actividad e)

A partir de uno de estos desarrollos bicolores, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?



Secciones del cubo

Una actividad muy interesante es la de construir distintas secciones de un cubo. Se puede hacer cortando mediante un hilo candente cubos de estiropor, para luego confeccionar su desarrollo plano y construirlos en cartulina:



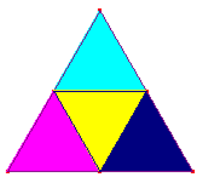
Actividad:

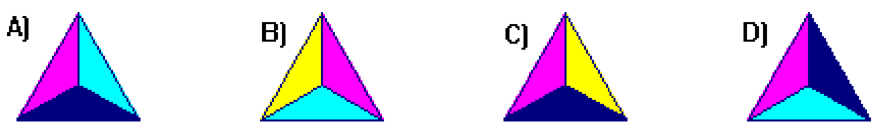
Es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, de muchas formas, como por ejemplo, mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de esa sección del cubo, y construye dos de esos cuerpos. Descríbelos. Piensa otros ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.

Trama de triángulos

Actividad:

El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás. ¿Cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?





Actividad:

Dibuja desarrollos planos que sirvan para construir un tetraedro regular.

Deltaedros

Utilizar una trama de triángulos para investigar los poliedros que se pueden construir con ellos. Construirlos. Contra sus vértices, aristas, lados y comprobar cómo existe el deltaedro de 4, 6, 8..., 20 caras, pero hay uno, el de 18 caras, que no se puede construir.

Actividad:

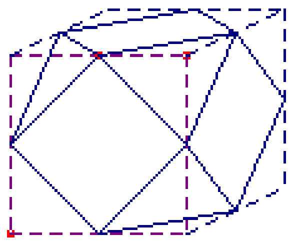
Dibuja en una cartulina una trama de triángulos y utilízala para construir deltaedros. Un deltaedro es un poliedro que tiene todas las caras triángulos. Con cuatro triángulos puedes construir un tetraedro. Con seis, la bipirámide triangular. Con ocho, el octaedro. Con veinte, el icosaedro. Comprueba que no puedes construir ningún poliedro convexo con cinco caras triángulos. Construye los deltaedros de 10, 12, 14, y 16 caras. Completa el cuadro siguiente:

Nº de caras	Nº de vértices	Nº de aristas	Nº de vértices de orden 3	Nº de vértices de orden 4	Nº de vértices de orden 5
4 6 8 10 12 14 16 20					

Otros desarrollos

Actividad:

Haz el desarrollo del cuerpo siguiente:



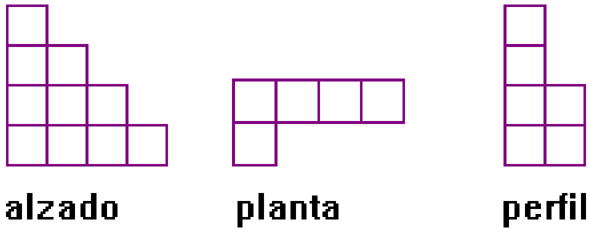
Del plano al espacio y del espacio al plano

En todas estas actividades, siguiendo a Grace, pasamos del desarrollo plano de un cuerpo, a construirlo en el espacio. O bien, de conocer al cuerpo en el espacio y diseñar su desarrollo plano. Es decir, se pasa del plano al espacio y del espacio al plano.

Otros trabajos son, utilizar la planta, perfil y alzado de los cuerpos. Cuando los arquitectos y los ingenieros necesitan representar en papel los edificios o las piezas de las máquinas que diseñan, las dibujan tomando diferentes puntos de vista. De nuevo se trabaja pasando del espacio, con un cuerpo o una pieza, al plano, dibujando sus tres proyecciones. O bien dadas las tres proyecciones, tener que obtener el cuerpo del que provienen:

Actividad:

Aquí tenemos las tres vistas, alzado (de frente), planta (desde arriba) y perfil (lateral) de un mismo "castillo" de cubos. ¿Con cuántos cubos se ha construido el castillo?

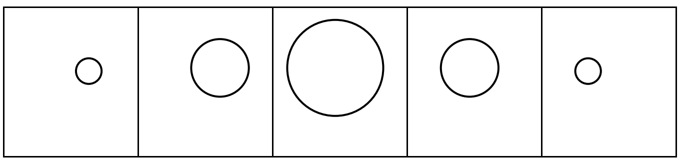


Los médicos y otros profesionales utilizan técnicas distintas. Para conocer la forma de un órgano, o de otro objeto, hacen **tomografías**. Esta técnica consiste en obtener imágenes de distintas secciones paralelas del objeto.

Actividad:

Por ejemplo: ¿de qué objeto es la tomografía siguiente.

Igual que en los casos anteriores se proponen actividades que hagan ir del plano al espacio y del espacio al plano.



Otros poliedros

Actividad:

Es posible construir poliedros utilizando **materiales** muy variados: cartulina, material plástico... si queremos ver sus caras y aristas, o como una armazón de aristas, utilizando palillos, varillas, pajitas de refresco, escobillas de limpiar pipas... Utiliza pajitas de refresco que puedes unir con aguja e hilo, y puedes afianzar con pegamento una vez construido, y construye tres poliedros.

Actividad:

Utiliza el procedimiento anterior para construir **bipirámides**, es decir, poliedros que se obtienen al juntar dos pirámides iguales haciendo coincidir sus bases. Construye una bipirámide triangular y otra cuadrangular. Dibújalas en perspectiva caballera. Haz su desarrollo plano. ¿Puedes construir una bipirámide triangular con todas sus caras triángulos equiláteros e iguales? ¿Y una bipirámide cuadrangular? ¿Alguna bipirámide, es un poliedro regular?

Actividad:

Utiliza el procedimiento anterior para construir **antiprismas**, es decir, poliedros que tienen dos bases iguales, pero cuyas caras laterales no son rectángulos, sino triángulos. Construye un antiprisma de base triangular y otro de base cuadrangular. Dibújalos en perspectiva caballera. Haz su desarrollo plano.

Movimientos en el espacio

Traslaciones, giros, simetrías pueden estudiarse en dimensión tres analizando el entorno que nos rodea. En general, en un edificio se aprecian **traslaciones**, elementos que se repiten.

Una puerta gira, las patillas de las gafas giran, las ruedas de un coche giran... Observa que para determinar un **giro** en el espacio se necesita, además del ángulo (y su sentido), conocer el eje de giro. ¿Qué puntos se transforman en sí mismos? El giro en el espacio deja invariantes a los puntos del eje de giro.

Si P' es el simétrico de P respecto a la **simetría central** de centro O, entonces, O es el punto medio del segmento PP'. La simetría central en el espacio no es un giro. Además solo deja un punto invariante, el centro.

Muchos animales son casi simétricos. Los coches son simétricos. Si nos miramos en un espejo vemos una imagen reflejada que es simétrica a la nuestra. Para determinar una **simetría** en el espacio es necesario conocer un plano, el plano de simetría. Una simetría en el espacio deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría.

Además se tiene la **simetría con deslizamiento**, la **simetría rotativa** y el **movimiento helicoidal**.

Es interesante estudiar el grupo de autosimetría de objetos cotidianos.

Actividad:

¿Cuál es el grupo de autosimetría de estas pirámides?

Actividad: Un juego de dos jugadores:

Se forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Cada jugador retira, alternativamente, o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (Ayuda: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

4.11.5. Conclusiones: Geometría y coeducación

En la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria se proponen algunas estrategias, como hacer Matemáticas en la clase de Matemáticas, promover la investigación en el aula, la colaboración y la cooperación frente a la competitividad, prestar atención a las exposiciones orales y escritas, trabajar la visión espacial en el aula especialmente en la enseñanza de la geometría, proporcionar modelos de mujeres matemáticas en la historia y analizar datos en la clase de estadística que tengan en cuenta la variable de género.

Queremos hacer especial mención a que, en nuestra opinión, se están dando pasos hacia atrás en este sentido. Hubo un momento en que se trabajó al menos por una educación conjunta de chicos y chicas, y sin embargo ahora hay muchos centros subvencionados con separación de géneros. Por esa razón hemos querido comentar lo importante que es para las mujeres el tener acceso a la mejor formación. Cuando todavía no hemos llegado a tener una auténtica coeducación ya se ha comenzado a separar, lo que conduce a tener una formación diferente.

Conviene no descuidar la **enseñanza de la geometría en la clase de matemáticas**. No dejar los trabajos de geometría "para casa" sino dar un tiempo y un lugar para hacerlos en el aula. Es conveniente poder dotar de intuiciones geométricas apoyándonos en materiales de aula adecuados según la edad del alumnado. Si no proporcionamos este trabajo en el aula, desmerecerá el aprendizaje de todos, pero en particular de aquellas chicas que, por el tipo de juegos de su infancia, han desarrollado poco la visión espacial. Tradicionalmente el niño salta, corre, juega con construcciones mientras que la niña juega tranquilamente sentada con una muñeca entre los brazos.

5. Ideas buenas para la clase de Matemáticas

5.1. Conseguir un ambiente propicio en el aula

El aprendizaje es una tarea compleja. Queremos que aprendan cosas muy diversas: hechos, algoritmos y técnicas, estrategias generales y estructuras conceptuales, como dice Bell, pero no existe un único método de enseñanza que sea el mejor. Dependiendo de lo que queramos que aprendan, como aporta el informe Cockcroft, tiene que haber explicaciones a cargo del profesorado; discusiones entre el profesorado y los alumnos y alumnas y entre ellos mismos; trabajo práctico apropiado; consolidación y práctica de rutinas fundamentales; resolución de problemas incluida la aplicación de las Matemáticas a situaciones de la vida diaria y trabajos de investigación.

En varias ocasiones se han explicitado una serie de propuestas para emprender una acción compensatoria en la enseñanza de las Matemáticas ya que *"la discriminación que experimenta la niña fuera del aula de Matemáticas puede ser contrarrestada dentro de ésta".*

[Salvador, 1992, 37]

Como la situación de partida es desigual, se debe evitar el refuerzo de los roles y desarrollar mecanismos equilibradores, se debe potenciar la autoestima de las alumnas en el aprendizaje de las Matemáticas reforzando una mayor confianza en sus capacidades y actitudes y un mayor respeto por sus actuaciones y reducir así la ansiedad que generan las Matemáticas.

En nuestro país se reconoce que persisten situaciones de desigualdad. Continuamente aparecen en los medios de comunicación referencias a situaciones de discriminación en el ámbito laboral, socio-económico, personal y jurídico. El hecho de que estas noticias se comenten no presupone que exista la voluntad de poner los medios necesarios para que se subsanen. No vivimos en una sociedad con sistema de género.

El profesorado cree, en general, que su actuación está exenta de cualquier tipo de discriminación en cuanto al trato con alumnos y alumnas. Pero no olvidemos que al entrar en el aula es imposible dejar fuera todo el bagaje que el medio social nos impone, para garantizar aquellos objetivos coeducativos que quedaron explicitados en el Proyecto Educativo de Centro, cada profesor y profesora debe estar en permanente alerta que evite impregnar su trabajo de actuaciones que contradigan sus propias convicciones. No olvidemos que somos para el alumnado una referencia constante y tanto nuestras palabras como nuestros actos están siendo asimilados (currículum oculto) a veces con la misma intensidad que los contenidos matemáticos que pretendíamos transmitir.

Las Matemáticas se presentan en ocasiones centradas en intereses masculinos, con problemas y ejemplos relacionados con experiencias también masculinas, por lo que las chicas pierden confianza e interés en ese terreno que no les es propio, y si tienen buenos resultados en este área tienen miedo a las consecuencias que pueda tener su éxito en una materia considerada tradicionalmente masculina.

La competitividad y el individualismo son dos valores profundamente arraigados en nuestra sociedad. Podría ser muy fácil asociarlos al éxito que se obtiene al realizar correctamente cualquier tarea propuesta en el aula, pero entraría en contradicción con el modelo de persona que pretendemos conseguir. En lugar de promover la competitividad y el individualismo se debe potenciar la colaboración, el sentido de cooperación, el deseo de superarse y el gusto por el trabajo bien hecho. Haremos un aporte de ideas que faciliten el camino para conseguir crear un ambiente propicio en el aula. Entre ellas comentaremos las ventajas de enseñar a trabajar en equipo, las capacidades que desarrolla la resolución de problemas, la elaboración de trabajos de investigación y la puesta en marcha de proyectos a medio y largo plazo, la participación directa en exposición de materiales y trabajos, etc.

5.1.1 Enseñanza activa

Actualmente se reconoce que la enseñanza tradicional de profesor o profesora que explica y alumnos y alumnas que reciben contenidos de forma pasiva refuerza la tradicional pasividad de las chicas. Pretendemos que el aula se convierta en un lugar donde alumnos y alumnas tengan tiempo para reflexionar, abstraer y desarrollar un trabajo intelectual; ello es conveniente para todos y todas, pero beneficia al proyecto coeducativo sin discriminación de la mujer ya que la alumna tiene en ocasiones en la vida cotidiana menos oportunidades para dedicarse a pensar. Hacemos nuestra la frase de Freudenthal: "*hagamos Matemáticas en la clase de Matemáticas*" ofreciendo de este modo a nuestros alumnos y alumnas ocasiones para desarrollar su razonamiento.

> *"Los valores tradicionalmente femeninos casan mejor con una enseñanza trasmitida que con unas Matemáticas construidas a partir de conjeturas, investigaciones y tomas de decisiones. Muchas niñas que aparentemente son trabajadoras, son en realidad personas mentalmente perezosas. Reproducen, pero no crean. Se someten con facilidad a la monotonía sin protestas. Es tarea del profesorado estimular la curiosidad intelectual, el deseo de saber y de descubrir".*

[Salvador; 1991]

5.1.2 Cooperación

El que alumnos y alumnas aprendan a cooperar en sus tareas desde la infancia permite preparar a hombres y mujeres para que mantengan ese espíritu cooperativo en sus futuras relaciones de convivencia que la sociedad y la familia les van a exigir. La competencia intelectual que se niega a la mujer tiene consecuencias tan nefastas como la imposibilidad de expresar sus sentimientos culturalmente negada al hombre y que les ha empobrecido tanto a unas como a otros. Compartir las adquisiciones intelectuales y los sentimientos hacen más personas a ambos. Para conseguirlo tendríamos que partir de las actitudes sociales de quienes ejercen una influencia directa sobre las alumnas y los alumnos, como padres y madres, profesorado, redactores/as de libros de texto, editores, medios de comunicación, etc.

El elemento clave para garantizar un aprendizaje cooperativo es la metodología de aula. No se debe confundir cooperación con la realización de determinadas actividades grupales cuyo único objetivo es la realización de una tarea, eludiendo cualquier oportunidad de interacción entre sus componentes. Es importante que las actividades en grupo lleven asociados, de manera explícita e implícita, objetivos que potencien la cooperación y el reconocimiento mutuo. Se puede controlar en el aula si participan por igual chicos y chicas, si la enseñanza es cooperativa en lugar de ser competitiva, si las expectativas son imparciales frente a chicas y chicos.

Puede ser muy interesante tratar que chicos y chicas hagan conscientes y compartan sus sentimientos: ¿Por qué les gusta o no les gusta las Matemáticas? ¿Por qué son importantes? ¿Cuáles son sus afectos hacia las Matemáticas?

5.1.3 Trabajo en grupo

Además de todo lo dicho en el apartado anterior, opinamos que el trabajo en equipo favorece el aprendizaje y la construcción social del conocimiento. Trabajar en grupo permite que se asegure dentro del aula un tiempo de trabajo y de reflexión compartida en Matemáticas, ayuda al alumnado a desarrollar un sentido crítico hacia sí y hacia los y las demás, a conocer otras formas de pensamiento matemático que enriquezcan las propias, a tomar decisiones que favorezcan al grupo y no entren en contradicción consigo mismo o consigo misma, a tomar iniciativas o a animar a que se tomen de la mejor manera, etc. Esto beneficia en general a todo el alumnado, pero para algunas alumnas es una oportunidad inmejorable de dar cauce a sus posibilidades de hacer Matemáticas exponiendo su forma de trabajar al resto del grupo, poniendo en común sus ideas, percibiendo, en suma, un clima de igualdad que, posiblemente no encuentren en sus casas al dedicar más tiempo, por ejemplo, que sus hermanos varones a las tareas domésticas.

En resumen, algunas de las ventajas de la enseñanza en grupo desde un punto de vista coeducativo son fomentar la expresión verbal, la cooperación, la autoestima y seguridad, e inducir una metodología activa y participativa y favorecer la tolerancia y el contraste de opiniones.

Todo esto no debe dejar a un lado la importancia del trabajo individual pues para que se produzca el aprendizaje es necesaria una reflexión personal, enriquecida por la tarea grupal que permita a la persona desarrollarse en la medida de sus posibilidades.

5.1.4 Humanizar los problemas

Esta es una tarea que resulta grata y muy estimulante. Se trata de llevar a los enunciados de los problemas y a sus explicaciones las vivencias de hombres y mujeres haciendo explícito el protagonismo de las personas y de las actividades realizadas ¿Quién se lo plantea? ¿Cuándo? ¿Por qué se lo plantea? ¿Qué consigue resolviendo el problema? y de esta forma ofrecer una visión de las Matemáticas mucho más humanizada. En los objetivos que aparecen en los proyectos curriculares de Matemáticas diseñados por distintas editoriales es muy frecuente intentar conectar la actividad matemática con la vida cotidiana mediante ejercicios y problemas de escaso interés para el alumnado al reproducir de forma tediosa situaciones de compra-venta, medida, cálculo, etc.

Humanizar los problemas significa reflejar la realidad, hacer uso de textos literarios, de la historia de las Matemáticas, incidir en su evolución como obra humana que responde a los problemas, necesidades y formas de pensar de cada época, como por ejemplo, el nombrar a Teano al hablar de la Escuela Pitagórica o no olvidar a Hipatia cuando se trate de recopilaciones Matemáticas. Proponemos plantear problemas que ayuden a generar en las chicas actitudes críticas y activas, rompiendo el estereotipo de que las Matemáticas están alejadas de su realidad y de su vida cotidiana

Veamos un ejemplo de un mismo problema sin contextualizar y contextualizado:

a) Resolver un triángulo rectángulo conociendo un cateto y un ángulo agudo.

b) En el patio del centro hay un árbol más alto que los demás. ¿Cómo podemos medir su altura? ¿Qué tipo de árbol es? ¿Tiene muchos años?

Este segundo problema requiere un cambio en la metodología pues habría que salir del aula y plantearse nuevas cuestiones como son la forma de medir el ángulo y el lado, utilizar para ello instrumentos de medida, incluso imaginar nuevos instrumentos o nuevas formas de medir mediante elementos de referencia y hacer una representación gráfica de la situación.

Proponemos para conseguir humanizar los problemas:

Plantear tareas nuevas y llamativas en esta nueva clase de Matemáticas, teniendo cuidado de que las nuevas actividades no sean todas tópicamente "femeninas". Buscar contextos en los que las alumnas se sientan bien "a priori" no significa hacer la compra, calcular lo que valen los utensilios y alimentos que se necesitan en una casa, o hacer el presupuesto mensual. Si utilizamos alguna vez este tipo de situaciones han de ser compartidas y desarrolladas por alumnos y alumnas de cara a su formación como futuras personas adultas.

Siempre son interesantes los problemas que necesitan una toma de decisiones (a partir de datos probabilísticos, o incompletos sobre los que haya que hacer necesariamente hipótesis), estimulando, en especial en las chicas, la asunción de riesgos.

Promover actividades fuera del centro motivará a todos y a todas, pero en especial a las chicas pues tradicionalmente ellas no son "dueñas" de la calle, tienen menos libertad en general para moverse y salir solas, e incluso siguen teniendo que colaborar ayudando en las tareas de la casa.

Buscar actividades libres de estereotipos, por ejemplo, proponerles que realicen diseños de carpintería para aprovechar mejor el espacio en sus habitaciones; en artesanía, buscar las Matemáticas que hay en la fabricación de cinturones, chalecos, bufandas, para los que hay que medir y calcular el coste del material, hacer un patrón por medio del estudio de proporciones y de reflexiones geométricas, preguntarse ¿por qué tienen esa forma y no otra?; analizar las formas y los elementos de decoración en la cerámica (recordemos que las mujeres eran las que la trabajaban ya que ellas sabían las formas y tamaños que eran necesarios); hacer el presupuesto de una instalación eléctrica donde haya que calcular el coste de los materiales a emplear y medir los metros de cable mínimos necesarios.

Reflexionar sobre la importancia de la utilización del espacio por parte de todas y todos en una intencionada tarea encaminada a mejorar el entorno físico. Veamos algunos ejemplos: Observar la distribución del espacio en castillos medievales y en casas romanas, lo que nos permite reflexionar a la vez sobre el distinto papel que en esas sociedades desempeñaba la mujer, desde el matriarcado romano a la esclavitud medieval. Trabajar también con la distribución de los espacios en las casas actuales analizando el lugar para los niños y las niñas, para el padre y para la madre, los lugares destinados a reunión, etc. La decoración de interiores, actividad tradicionalmente femenina, plantea muchos problemas matemáticos de longitudes, áreas, distancias mínimas. Dado el poco espacio de que se dispone actualmente en nuestras viviendas esta tarea aumenta su interés.

Utilizar el arte de manera activa percibiendo el trasfondo matemático de cuadros, esculturas y arquitectura, buscando las relaciones matemáticas entre sus elementos para analizar el concepto de espacio, las dimensiones, la luz, etc. Estudiar el entorno arquitectónico del centro, barrio o ciudad mediante fotografías, estudiando proporciones, relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes.

Utilizar la publicidad aprovechando imágenes y anuncios provocadores en el sentido de la desigualdad.

Estudiar otras relaciones entre Música y Matemáticas: por ejemplo el minimalismo que utiliza sucesiones musicales, componer música aleatoria o construir instrumentos musicales con botellas llenas a diferente nivel o con otros elementos sencillos.

Estudiar el cuerpo humano: Relacionar las aplicaciones de la Matemática con la educación para la salud, los factores socioculturales, modas, y aprender a conocer el propio cuerpo. Se pueden estudiar las dietas de diferentes países, utilizar tablas de la endocrinología para relacionar tallas y pesos, y hacer hincapié en la franja de la normalidad, elegida lo suficientemente ancha como para que todos y todas se den cuenta de que están en el promedio.

Utilización de la Historia y la Mitología: La historia y mitología nos enseñan la génesis de los conceptos y su evolución en el tiempo. Por eso recomendamos buscar referencias históricas, en especial de mujeres, para todos los temas. En cualquier tema que se aborde, llevar adelante una revisión histórica buscando, siempre que sea posible, el nombre de alguna mujer matemática. Reflexionar sobre la construcción social de las Matemáticas y sobre la imposición de culturas hegemónicas para valorar otras culturas que son rechazadas en la actualidad. También nos parece muy adecuado utilizar problemas legendarios en Matemáticas como el de la invención del ajedrez, el de las torres de Hanoi o el de Dido, reina de Cartago, que con astucia resuelve un problema geométrico para conseguir una cantidad máxima de territorio: "*Dido pidió cuanta tierra pudiera contener la piel de un buey. Partió la piel en tiras tan estrechas que obtuvo una longitud suficiente para rodear la superficie sobre la cual fundó la ciudad de Cartago*".

Juegos de estrategia relacionados con la resolución de problemas que sirven de modelo en ocasiones para aplicarlos a situaciones reales. Algunos de estos juegos se han comentado en capítulos anteriores.

5.1.5. Fomentar la expresión verbal

Al hacer uso de la expresión verbal se mejora el aprendizaje, ya que si analizamos cómo se aprende podemos observar que muchas veces para que se realice dicho aprendizaje es necesario contar a otra persona lo que se ha comprendido. En el trabajo en grupo ya va implícita la expresión verbal pues unos y otras se explican, se preguntan y se comunican sus resultados.

En ciertas investigaciones y en la prensa se ha afirmado que las chicas manejan mejor el lenguaje. Si esto fuese cierto, el uso de la expresión verbal en la clase de Matemáticas sería una acción positiva para las chicas, además de una actividad útil para los chicos.

Algunos puntos que no conviene olvidar al respecto son:

- Valorar, motivar e incentivar las intervenciones y explicaciones orales dando facilidades y oportunidades. Conseguir que expliquen las cosas verbalmente y por escrito de forma que el resto pueda comprenderlas. Solicitar breves explicaciones verbales del proceso seguido y de los resultados obtenidos en todo tipo de trabajos.

- Requerir explicaciones del significado vulgar de las palabras matemáticas y reflexionar sobre él. Estimular el aprendizaje de palabras matemáticas en relación con su significado vulgar. Aprovechar el lenguaje de la vida cotidiana, lo que significa introducir la esfera de lo social en la clase de Matemáticas.

- Hablar en un lenguaje que sea fácil de comprender. No utilizar una formalización prematura o innecesaria.

- Plantear actividades abiertas que promuevan la investigación y la discusión.

- Hacer una puesta en común con cada ejercicio o problema para discutir y ampliar con las aportaciones de cada grupo.

- Evaluar el proceso de enseñanza revisando mediante debates y charlas la marcha de la clase.

Una unidad didáctica puede comenzar con un cuento o con una historia, o lectura de un cuento o historia. Pero también en la clase de Matemáticas se puede escribir: ilustrar una gráfica con un cuento, escribir la evolución que en su mente ha tenido un concepto, o dada una expresión matemática o una ecuación intentar averiguar y contar a los demás cuál podría ser su origen.

5.1.6. El error en Matemáticas

La idea de que en las Matemáticas sólo existe la situación de verdadero o falso, acierto o error, provoca el bloqueo ante una circunstancia que no permite la elaboración de la respuesta, una ansiedad ante esas Matemáticas. Hay autores que han afirmado que los exámenes tipo test pueden perjudicar la calificación de las chicas. Proponemos unas Matemáticas abiertas, con trabajos o problemas de *investigación*, que no sean de una *única respuesta*, donde el alumnado pueda hacerse preguntas y pueda elegir diferentes caminos para responderlas, donde el *error* no sea castigado sino que pueda promover nuevas investigaciones y mejorar por tanto el aprendizaje. Esta nueva visión de la enseñanza de las Matemáticas no se puede considerar ni femenina, ni masculina.

5.1.7. Tareas para casa y trabajo en clase

El pensamiento matemático se desarrolla mediante la práctica. Las tareas son necesarias para afianzar los conocimientos por tanto es importante redistribuir lo que tradicionalmente son las tareas que se realizan en casa y las que se llevan a cabo en la clase, dejando para casa las reiterativas, lo que llamamos ejercicios, y trabajando en clase las grupales, los problemas, el comienzo de las investigaciones y las actividades geométricas. Tanto como tarea para casa como para el aula, es interesante proponer trabajo a medio y largo plazo, y no sólo tareas a realizar en tiempo corto.

Es conveniente:

- Cuando se generaliza un problema surgen de él nuevas situaciones, pedir entonces que cada alumno y alumna invente, enuncie y resuelva otro similar dando un plazo medio para ello, una semana por ejemplo.

- Proponer en una clase con alumnado de capacidades diversas que algunos/as trabajen con mayor profundidad las actividades sobre las que muestren especial interés convirtiéndolas en trabajos de investigación sugiriendo para realizar esta tarea un plazo largo, un mes por ejemplo.

- Equilibrar en las tareas grupales la realización de actividades por parte de alumnos y alumnas.

5.1.8. Nuevas tecnologías

El origen de las desventajas en la utilización de la tecnología por parte de las alumnas frente a sus compañeros es social. Podemos explicarlo desde el momento en el que la máquina queda fuera del ámbito privado y desaparece por tanto la presencia femenina. El mantenimiento de las máquinas en la sociedad ha sido tradicionalmente "cosa de hombres" y por eso es importante proporcionar a las alumnas las actuales herramientas tecnológicas. Proponemos el uso en clase de Matemáticas del ordenador, la calculadora y el vídeo. Sería deseable que delante de cada alumna hubiera un teclado de ordenador con el que experimentase sin ayuda. Hemos visto cuando estudiamos la historia de las mujeres matemáticas, cómo podemos considerar a Ada Lovelace, hija de lord Byron, una de las precursoras de la máquina analítica, y cómo las primeras programadoras fueron mujeres. Hemos comentado, así mismo, la biografía de Grace Murray Hopper, la mujer que programó el lenguaje Cobol.

Si en clase de Informática enseñamos a manejar procesadores de textos y bases de datos, conviene enseñar a personalizar cartas con la variable a/o, o dejar que con su creatividad ideen nuevas formas de utilizar un lenguaje mucho más coeducativo.

"Entre las razones a favor de utilizar la informática en clase de Matemáticas podemos citar las siguientes:

***Facilita la adquisición de conceptos**: Utilizar el ordenador como instrumento para adquirir conceptos y profundizar en ellos permite detectar esquemas no suficientemente precisos y transformarlos en otros más adecuados. Además el uso de distintos contextos no sólo constituye un elemento de motivación sino que además proporciona nuevos significados a los contenidos que se están trabajando.*

***Permite el tratamiento de la diversidad**: Ayuda a crear un ambiente de trabajo grato y estimulante que respeta las peculiaridades y el ritmo de aprendizaje de cada alumno o alumna.*

***Fomenta el trabajo en grupo**: El trabajo en el ordenador se puede realizar en grupo, permitiendo a los alumnos y alumnas explicar sus ideas al resto, estableciendo la comunicación y el enriquecimiento de pensamientos.*

***Valora positivamente el error**: El error no ha de equipararse a fracaso. Poner de manifiesto los errores de los alumnos y alumnas adquiere una dimensión positiva, y es una condición necesaria para superarlos. Ya que es el ordenador el que avisa y a la vez incita a superar los errores, corregirlos se convierte en una tarea estimulante que hace ver el error como algo positivo.*

***Motivación**: El interés que tiene actualmente el alumnado hacia la informática la convierte en un elemento motivador muy importante".*

[Brihuega; 1995, 163]

Algunas actividades que se pueden realizar utilizando un ***vídeo*** consisten en filmar el entorno próximo para realizar observaciones más pausadas que la simple apreciación visual, filmar en el aula alguna exposición oral de un trabajo de investigación o, filmar una clase de resolución de problemas en grupo para analizar después las pautas seguidas por cada grupo en cuanto a organización, cooperación e interacción entre chicos y chicas. Existen también interesantes videos con contenidos matemáticos que pueden utilizarse en el aula.

La calculadora es una herramienta que puede utilizarse incluso para afianzar el cálculo mental.

> *"La primera recomendación respecto al uso de las calculadoras en clase de Matemáticas es conocer su funcionamiento. En una calculadora elemental los alumnos y alumnas deben conocer el tipo de notación, la forma de operar, el número de cifras con las que trabaja y manejar el factor constante. Si la calculadora es científica además tienen que saber utilizar las distintas funciones matemáticas y realizar los distintos cálculos estadísticos. Respecto a las calculadoras gráficas es deseable que sepan utilizarlas y conozcan todas sus posibilidades. Hay que tener en cuenta para un futuro próximo la importancia que puede tener el uso generalizado de estas calculadoras en clase de Matemáticas".*

[Brihuega; 1995, 171]

5.2. Selección adecuada de contenidos

5.2.1. Conocer la evolución histórica de las Matemáticas

En la clase de Matemáticas usualmente se proporcionan los conceptos y las propiedades totalmente elaborados y no se estudian las dificultades, las razones o los procedimientos de los que han surgido. Conocer la evolución histórica de las Matemáticas, la forma de trabajar del matemático/a y su contribución a la ciencia, puede mejorar la enseñanza. Proponemos ampliar esta historia añadiendo también la contribución de las mujeres científicas y matemáticas lo que desarrollamos más ampliamente en el capítulo cuarto.

5.2.2. Enseñanza de la Geometría

Dentro de las Matemáticas, la enseñanza de la Geometría está sujeta a múltiples controversias. Durante siglos se enseñaron los “Elementos” de Euclides contribuyendo a una concepción excesivamente abstracta y axiomática. La reacción en contrario provocó que se llegara a confundir la Geometría con el Álgebra Lineal abandonando el contacto directo con las figuras renunciando así a la capacidad de la Geometría para explicar el mundo real. Quizás este sea el motivo por el que la mayoría de los libros de texto se relegue a los últimos capítulos con el riesgo de que no quede tiempo necesario para desarrollarla. En la actualidad continúa la búsqueda de un modelo adecuado para enseñar la Geometría de forma que favorezca una eficaz concepción del espacio y del entorno.

Proponemos no descuidar la enseñanza de la Geometría en la clase de Matemáticas. No se debe nunca dejar los trabajos de Geometría como tareas "para casa" sino adjudicar un tiempo, un lugar y un método para trabajarlos en el aula. Es conveniente proporcionarles intuiciones geométricas apoyándonos en materiales de aula adecuados según la edad del alumnado. Si renunciamos a estas propuestas desvalorizará el aprendizaje de todos, pero en particular de aquellas chicas que, por el tipo de juegos de su infancia, han desarrollado poco la visión espacial. Tradicionalmente el niño salta, corre, juega con construcciones mientras que la niña juega tranquilamente sentada con una muñeca entre los brazos. Es importante que detectemos si realmente existen carencias en este sentido en unos y en otras ya que pueden llegarnos con diferencias en la visión espacial. Pretendemos que en nuestra clase de Matemáticas se adquiera la capacidad para comprender mejor el espacio físico que nos rodea, y el instrumento para conseguirlo es la Geometría. Es pues importante ser consciente que trabajar la Geometría en la clase de Matemáticas puede ser una acción compensatoria.

Una forma de hacerlo puede ser aprovechar cualquier ocasión para introducir aspectos geométricos en la actividad de clase. Por ejemplo, en el estudio de funciones seguir los trabajos de Emma Castelnuovo sobre áreas de rectángulos de longitud constante y de perímetro de triángulos de área constante utilizando lo que ella denomina “*Geometría Dinámica*”; o calcular el volumen de las cajas que podemos construir con un rectángulo al que recortamos las cuatro esquinas; o en trigonometría utilizar instrumentos de medida como teodolitos o un sencillo transportador de ángulos, y calcular alturas, longitudes, ángulos; en números, medir áreas, longitudes y volúmenes estimando magnitudes y cotas de error, cálculo de zonas verdes y presupuesto para mantenerlas; en sucesiones buscar sucesiones geométricas como las que pueden aparecer en los fractales autosemejantes; en probabilidad utilizar los caminos aleatorios.

Y por último trabajar la geometría propiamente dicha siguiendo por ejemplo los trabajos del Grupo Cero "*Del plano al espacio y del espacio al plano*". Buscar, siempre que sea posible, contextos geométricos relacionados con la naturaleza o el arte: análisis de motivos ornamentales, mosaicos, filotaxia y otras formas geométricas que aparecen en la naturaleza, etc. Incorporar elementos geométricos del entorno próximo. El diseño como concepto está de moda. Su conexión con la Geometría es más que evidente. Por ello podemos incorporar multitud de materiales de uso común para descubrir las relaciones entre formas y tamaños.

Proponemos también seguir las ideas geométricas de Grace Crisholm Young de estudiar la geometría en el espacio, y construir, de todas las formas que se nos ocurra, cuerpos geométricos, para analizar sus propiedades. En los apartados 4.11.4 y 4.11.5 podemos ver algunos ejemplos.

Construir y utilizar un libro de espejos, o incluso, ángulos diédricos de espejos, para visualizar figuras geométricas es también una buena idea para la clase. Utilizar todo tipo de materiales, como palillos, stiropor…

Muchas veces opinamos que el alumnado no tiene visión espacial, pero nuestra experiencia en el aula nos indica, que la visión espacial se enseña, y que si la trabajamos en el aula, el alumnado mejora. Pero no es un objetivo a corto plazo, que pueda calificarse como objetivo operativo, sino que es un objetivo a largo plazo. Pero esto ocurre con los objetivos más interesantes en la enseñanza de las Matemáticas, como la comprensión lectora, la resolución de problemas…

5.2.3. Estadísticas con la variable género

La Estadística es un instrumento de primer orden para comprender mejor las informaciones que nos llegan a través de diferentes medios. La recogida de datos en sí misma puede considerarse neutra pero su posterior interpretación no está exenta en muchos casos de matices. En la clase de Estadística se puede exclusivamente calcular parámetros o interpretar datos ya elaborados. Todavía es posible incorporar un aspecto de gran importancia en la actualidad encaminado a favorecer un análisis crítico de las informaciones, en ocasiones tendenciosas, con que nos bombardean los medios de comunicación.

En la clase de Estadística proponemos hacer, entre otras actividades, encuestas, recogidas de datos y estudios ya elaborados que hagan reflexionar sobre la situación en el momento actual de la mujer en la sociedad. Por ejemplo, proponemos confeccionar, observando el cuadro adjunto, una encuesta que permita obtener datos similares en el entorno próximo del alumnado. En ella se muestra el tiempo que las mujeres dedican a "las labores del hogar" y el que dedican los hombres, y revela la desigualdad entre el espacio público y privado. Se desprende que mientras la mujer se va incorporando al trabajo remunerado, el hombre no colabora en la misma medida a la realización de los trabajos domésticos. Cuando la mujer realiza un trabajo remunerado aumenta su jornada en más de cuatro horas diarias. Analicemos la importancia que este hecho tiene en cuanto a la disponibilidad de tiempo para el ocio o la promoción personal.

Imaginamos que la repetición de encuestas similares por el alumnado en ámbitos diferentes puede dar lugar a que las cifras obtenidas sean muy distintas, en ocasiones incluso aún más exageradas, pero esperamos que en las generaciones más jóvenes los hombres se vayan incorporando a este tipo de tareas. En esta encuesta podemos analizar no sólo los tiempos globales, sino la distribución de los tiempos en el control de los ingresos, o en el tiempo dedicado al cuidado de los hijos e hijas por los hombres, las amas de casa y las mujeres que trabajan fuera de casa, o cómo lo relacionado con el automóvil es una “cosa de hombres”. La cifra de mujeres que se dedican en exclusiva a las "labores del hogar" podemos estimar que supera los diez millones.

Pero también proponemos utilizar la estadística para comprender cómo viven y piensan otras personas o su propia percepción de la realidad, buscando datos estadísticos relacionados con la Paz, Derechos Humanos, Ecología, Sanidad, Ayuda Humanitaria y familiarizarse con los parámetros de calidad de vida: número de médicos por cada 1000 habitantes, renta per cápita, consumo diario de proteínas, etc. Introducir la variable "género" en los estudios estadísticos en que proceda, analizando el por qué de las diferencias.

Se pueden obtener un buen número de cifras extraídas de instituciones oficiales sobre los mundos de la enseñanza, del trabajo y de las Matemáticas aportar informaciones útiles para el aula y contribuir a una visión crítica de la realidad.

Los medios de comunicación suministran, así mismo, un buen número de datos estadísticos sobre temas que les interesan y es importante leer los comentarios y opiniones que aparecen interpretando dichas informaciones a fin de que aprecien las diferentes visiones que pueden generarse a partir de los mismos.

> *"Un periódico sería inconcebible hoy sin cuadros estadísticos, sin porcentajes, sin gráficos, sin encuestas, en definitiva, sin la utilización de los números al servicio de la información. El lenguaje matemático se entremezcla cada vez más con el literario y ocupa un creciente espacio en las páginas de los periódicos". "Porcentajes, estadísticas y gráficos pueden convertirse en un galimatías que no sólo nada aclare sino que confunda aún más".*

[“El País”, 8 de diciembre de 1996 (Gor; 1996, 12)]

Datos de la encuesta

Tiempo diario dedicado a trabajos tradicionalmente femeninos en el hogar			
	Ama de casa	Mujer con trabajo remunerado	Hombre con trabajo remunerado
Alimentación	1h. 48'	1h. 06'	18'
Limpieza de la vivienda	2h. 30'	1h. 24'	06'
Limpieza de la ropa y del calzado	54'	30'	6'
Compra de comida	42'	30'	12'
Costura	24'	18'	0'
Cuidado de niños y niñas	54'	1h	24'
Total	6h. 12'	4h. 48'	1h. 06'
Tiempo diario dedicado a trabajos tradicionalmente masculinos en el hogar			
	Ama de casa	Mujer con trabajo remunerado	Hombre con trabajo remunerado
Reparación de la vivienda	0'	6'	12'
Cuidado del vehículo de la casa	0'	0'	12'
Cuidado del vehículo de trabajo	0'	0'	6'
Conducción del vehículo familiar	0'	6'	24'
Conducción del vehículo trabajo	0'	6'	30'
Gestiones	0'	6'	12'
Contabilidad	6'	6'	6'
Total	6'	30'	1h. 42'

5.3 Evaluación

Para ser coherentes con todo lo anterior es imprescindible encontrar cuál es la mejor forma de evaluar. Si no se modifica la evaluación de forma que las buenas prácticas para la clase queden reflejadas en ella, no se producirá ningún cambio real en la enseñanza y el aprendizaje. La forma de evaluar está íntimamente relacionada con el modelo de enseñar Matemáticas y con el modelo integral de persona que tenga el profesorado.

La evaluación, tal y como se concibe en el sistema educativo actual, no puede centrarse en medir exclusivamente los contenidos y destrezas adquiridos sino que debe incorporar toda la riqueza que supone el tener en cuenta las capacidades y actitudes de cada persona, en suma, reconocer la diversidad como un valor fundamental a considerar. Si se ha hecho un diagnóstico previo de la situación de partida en términos coeducativos, la evaluación intentará contrastar el grado de consecución de, entre otros, los siguientes objetivos actitudinales que debe fomentar la actividad matemática:

- Disposición favorable hacia la Matemática
- Confianza en las propias capacidades
- Curiosidad e interés por conocer

- Disposición favorable al orden y a una buena organización.
- Tenacidad en la búsqueda de soluciones
- Rigor en la argumentación
- Sentido crítico
- Disposición favorable para el trabajo en equipo
- Sensibilidad, gusto y apreciación de la belleza de las Matemáticas
- Actitud de interrogación e investigación ante cualquier situación, problema o información contrastable.
- No manifestar actitudes sexistas respeto al resto de los compañeros y compañeras.
- Organización del trabajo en cuanto a planificación y distribución de responsabilidades

Dado que el profesorado tiene la capacidad de decidir en las nuevas programaciones cuales deben ser los objetivos mínimos a conseguir, estos pueden y deben ser también actitudinales. No escatimemos esfuerzos por lograr estos últimos que a la larga demuestran una gran rentabilidad de cara a mejorar el aprendizaje del alumnado.

El sentido crítico, el rigor en las argumentaciones, la tenacidad, etc., trabajadas en sentido coeducativo ayudarán a mejorar su capacidad futura de actuación como personas adultas y, entre otras cosas, a evitar elecciones estereotipadas que condicionen sus opciones profesionales.

La complejidad de esta tarea de evaluación puede reducirse si conseguimos dotarnos de los instrumentos adecuados. Sabemos que no es nada fácil y que la evaluación en secundaria, tal y como se concibe en los Proyectos Curriculares requiere un enorme esfuerzo en tiempo y en imaginación.

Teniendo en cuenta esta situación, intentamos plantear actividades que faciliten la labor de evaluación sin pretender exhaustivas observaciones sistemáticas ni múltiples plantillas de compleja tabulación. Consideramos que con una metodología bien definida las actitudes se evalúan prácticamente por sí mismas.

Por ejemplo, para observar la dinámica del grupo nos fijamos en su capacidad de negociación, de escucha, de defender un argumento, la verbalización o la comunicación. Un simple cuaderno de anotaciones se convierte en un instrumento de gran utilidad. En principio se recogen actuaciones generales del grupo en su conjunto, y estas observaciones se discuten con ellos y ellas, lo que lleva a negociar nuevos objetivos. En otra fase de observación detectaremos aquellos factores que facilitan o entorpecen la consecución de nuestros fines, asociados a la actitud de personas concretas del grupo. En este sentido es fundamental incorporar desde el principio un auténtico lenguaje coeducativo para transmitir al grupo que la evaluación será para todos y todas por igual.

Leone Burton aconseja que la evaluación se realice teniendo en cuenta que la capacidad para realizar trabajos colectivos, el trabajo en el aula, la organización del trabajo, el cuaderno de clase y las habilidades lingüísticas para comunicar, explicar, relacionar, predecir y preguntar son más notables en las chicas. (Leone Burton 1991)

Parece fundamental consensuar, tanto en el departamento como con el alumnado, porcentajes de valoración de los distintos objetivos e informar al alumnado desde un principio de los porcentajes asignados. Por ejemplo, los exámenes tradicionales pueden significar desde un 25 % a un 70 % de la nota ya que únicamente evalúan el conocimiento de hechos, algoritmos y técnicas.

También podemos valorar el cuaderno de clase donde deben estar reflejados por escrito las reflexiones, los aciertos y los errores, los trabajos individuales o colectivos con explicaciones, conclusiones, teniendo en cuenta especialmente la originalidad y la creatividad, así como la participación activa en proyectos a medio y largo plazo como la realización de exposiciones, videos y actividades al aire libre.

Un aspecto muy poco estudiado es la repercusión que puede tener un determinado tipo de pruebas objetivas en las que generalmente las mujeres, pero también algunos hombres, salen claramente perjudicadas y perjudicados. Nos referimos a exámenes en los que sólo cuenta el resultado final, las pruebas tipo test, o aquellas que se realizan con un tiempo corto y ajustado, etc. Si añadimos además una redacción impersonal y alejada de situaciones reales, estamos introduciendo factores que ponen en riesgo las posibilidades de una evaluación de calidad. La IOWME se ha propuesto realizar un estudio sobre esta cuestión donde se recojan datos sobre el tipo de pruebas en las que la mujer sale perjudicada.

En esta tarea compartida entre el profesorado y el alumnado en la que hemos puesto en juego nuestras propias capacidades didácticas para conseguir ese tan deseado buen clima de trabajo en el aula así como la coherencia en contenidos y contextos, encontraremos dificultades y en ocasiones incomprensión, pero todo esto no debe contagiar nuestro quehacer cotidiano y debe traducirse en una visión optimista de cuantos pequeños o grandes logros se consigan en el campo de las actitudes y más explícitamente de las actitudes coeducativas, de manera que este mismo ánimo se refleje en la evaluación.

6. Análisis de libros de texto

6.1. Proyecto curricular y libros de texto

La etapa educativa de la que nos ocupamos en este libro, la Educación Secundaria, intenta afianzar la educación en valores, que comenzó en Primaria, en un momento clave para el desarrollo de los chicos y las chicas.

Es importante recordar que los Proyectos Educativos de Centro reflejan en su marco general aquellas características propias del entorno en el que van a realizarse, dando la oportunidad a los profesores y profesoras de plasmar su visión de la **educación** como propiciatoria de la adquisición de todo aquello que el alumnado precisa, tanto en el campo del conocimiento como en el desarrollo de su propia personalidad. Podemos definir nuestra tarea educativa en documentos propios, elaborados de acuerdo a nuestra cultura pedagógica, con posibilidad de revisión y cuya publicidad nos compromete ante la comunidad educativa.

Cuando pasamos al segundo nivel de concreción, el Proyecto Curricular de las diferentes áreas, en el desglose de objetivos procedimentales, conceptuales y actitudinales, estamos definiendo implícitamente una forma de concebir la docencia que nos compromete a alcanzar unos logros para los que debemos estar bien pertrechados/as.

El seguimiento y evaluación de los objetivos actitudinales es un tema que preocupa a los departamentos. Una visión responsable de la cuestión lleva a aceptar la importancia de las actitudes como base para el aprendizaje significativo. El debate se centra entonces en reconocer su peso en la evaluación final junto a los conceptos y procedimientos, y en encontrar la necesaria coherencia entre los medios con los que contamos para evaluar y los fines que se persiguen.

Cuando un grupo de docentes toma acuerdos respecto a estos temas está generando un estilo de trabajo, diseñando una metodología para la que requerirá un sistema de organización del tiempo y el espacio, así como determinados medios materiales básicos para ponerla en práctica.

Existen muchas dificultades a la hora de obtener el consenso en estos puntos. Siendo realistas, parece funcionar un pacto implícito que deja en manos de la libertad de cátedra, del talante personal, de la experiencia didáctica individual, la interpretación del qué, cómo y para qué aparecen determinados objetivos actitudinales ligados al hecho educativo

Nuestro ámbito de trabajo son las Matemáticas, un área tradicionalmente dura para una buena parte del alumnado. Se nos pide mantener una estrecha vinculación entre aprendizaje y realidad, de forma que los contenidos más abstractos y/o de mayor nivel de dificultad se dejan para los últimos cursos. Nos demandan que enseñemos matemáticas para la vida, no que formemos profesionales de la Matemática.

Debemos readaptar nuestro trabajo, tanto dentro como fuera del aula, revisar y reestructurar los contenidos y, sobre todo, incorporar recursos metodológicos diferentes de acuerdo a las premisas de una enseñanza en la que los valores toman un importante protagonismo. Algunos aparecen destacados de forma explícita en los principios del Proyecto Educativo (la solidaridad, la tolerancia, la igualdad de oportunidades), pero son los demás (la salud, el consumo, la educación vial, la educación medio ambiental) los que suelen llegar a concretarse con mayor o menor fortuna en las distintas áreas.

En nuestro Proyecto Curricular de matemáticas en el que, como es preceptivo, aparecen objetivos actitudinales coeducativos, ¿qué presencia real de los mismos podemos garantizar?, ¿qué actividades nos planteamos realizar?, ¿qué seguimiento haremos para poder evaluarlas?, ¿qué medios pondremos en juego para favorecer su consecución? En este último punto, y en particular en la utilización de los libros de texto, vamos a detenernos con especial detalle.

El libro de texto siempre está presente en la enseñanza de las Matemáticas, aunque su utilidad suele cuestionarse. En general, la propia experiencia nos lleva a una didáctica más personal en la que se muestra cada forma de entender cómo se debe aprender la asignatura por parte de quien la enseña. Esto pocas veces aparece reflejado en un libro de texto y la mayor parte del profesorado es posible que no llegue a identificarse demasiado con el que finalmente recomienda.

Es importante la elección de un determinado texto. Bien es cierto que no como único instrumento de trabajo, pero sí como referente necesario para el alumnado, para sus padres y para la comunidad educativa. Nos guste o no, en el tipo de material que recomendamos estamos informando de manera seguramente más burda pero tal vez más directa de "qué interpretamos que deben aprender sus hijas e hijos".

Uno de los factores que, consultados diferentes grupos de profesores y profesoras, puede haber contribuido a la elección final, gira en torno a la calidad de las guías didácticas que serán un instrumento muy útil a la hora del seguimiento y evaluación del aprendizaje. Se trata de un punto de vista profesional que intenta coordinar el uso del texto como material de apoyo con un conocimiento más exhaustivo de las bases pedagógicas sobre las que se ha concebido y su conexión con el Proyecto Curricular.

De un texto de matemáticas se debería esperar que fuera un instrumento facilitador del aprendizaje, demostrando su capacidad de adaptarse al proceso de maduración del alumnado, y de adquisición de conceptos, exponiendo con fluidez y claridad los procedimientos y ofreciendo diversas opciones tanto para refuerzo como para ampliación. A un texto de matemáticas de Secundaria, desde nuestro punto de vista, se le debe pedir, además, que nos sitúe ante la vida con una imagen realista, no manipulada ni estereotipada, y que conecte el saber matemático con los problemas cotidianos.

¿Es esto lo que le pedirían los alumnos y las alumnas? A lo largo del curso ellos y ellas pasarán muchas horas recorriendo sus páginas y está en nuestras manos conseguir que este tiempo se aproveche para algo más que una mera transcripción de enunciados de ejercicios y problemas. Por ello, antes de recomendar un texto, es necesario realizar un análisis previo del tipo de "diálogo" matemático que pretende establecer con quienes lo utilicen, qué imagen de las matemáticas va construyendo para ellos y ellas y qué valores muestra tanto de forma tácita como expresa.

Es muy importante "mirar" el libro como nuestras alumnas y alumnos lo van a hacer cuando lo estén utilizando, observar qué importancia puede concederse a sus ilustraciones y textos como transmisores de información y qué aspectos de unas y otros llevan implícitos mensajes acordes con los valores que queremos potenciar. Para que el libro que se ha recomendado demuestre su idoneidad debería pasar con más que aprobado el examen al que le haya sometido tanto profesorado como alumnado. Sin embargo no es una práctica habitual, al menos no se conocen experiencias sobre actividades que permitan a este segundo colectivo evaluar los textos que ha utilizado, desde luego no se les pregunta, ni se les pide su visión crítica, ni se les anima a aportar sugerencias. Para saber si el libro ha resultado útil a los/as estudiantes nos basamos en nuestra observación no sistematizada que conforma una opinión al fin y al cabo intuitiva, aunque respaldada por la experiencia.

6.2. Análisis de libros de texto

El análisis de libros de texto tal y como lo planteamos aquí, puede ser para los departamentos de matemáticas una tarea difícil de asumir dado el tiempo de que disponen para sus múltiples actividades. A ello se suman criterios de rentabilidad, diferencias de opinión, diferencias metodológicas que necesitan consenso y complican la toma de decisiones. Tanto en esta cuestión, como en todas las demás, sería importante establecer mecanismos que allanen el terreno, instrumentos facilitadores para ello, así como una adecuación entre el tiempo disponible y la gestión de las tareas y responsabilidades, pues al fin será necesario tomar decisiones que todo el mundo desearía fueran acertadas.

En este apartado queremos proporcionar unas herramientas con el fin de estudiar el tratamiento del género en los textos de matemáticas. Hace años ya trabajamos en realizar un análisis de los libros de texto que entonces se estaban utilizando desde este punto de vista.

El método de trabajo de entonces consistió inicialmente en una puesta en común a partir de una tormenta de ideas, de nuestras impresiones respecto a los aspectos favorables o desfavorables que percibíamos en cuanto a coeducación en los textos en uso. Esto nos permitió formular una serie de afirmaciones a partir de las que generar la necesidad de contraste mediante la recogida de datos. La elaboración de protocolos iniciales se hizo basándonos en los criterios coeducativos que habíamos predeterminado tanto por su carácter formal como en su rigor metodológico.

Los pasos que nos pareció necesario recorrer para pronunciarnos acerca del valor coeducativo de un libro de texto quedaron así definidos:

1. Analizar la presencia de mujeres autoras, ilustradoras o responsables de edición.

2. Analizar la presencia de mujeres adultas, niñas y adolescentes en las ilustraciones, distinguiendo si tienen o no carácter protagonista, su importancia en relación con el texto y el carácter de las actividades que realizan.

3. Analizar, en textos, ejercicios y problemas, la presencia de mujeres adultas, niñas y adolescentes, resaltando la existencia o no de mensaje o intención coeducativa.

4. Analizar el tipo de lenguaje utilizado: genérico masculino, impersonal, coeducativo, y aquellas expresiones que puedan

considerarse discriminación positiva o por el contrario que contengan cierto contenido sexista.

5. Analizar el contexto en el que aparecen las referencias a mujeres y niñas: casa, colegio, aire libre, mercado o tiendas, ámbito laboral, etc.

6. Encontrar la presencia de mujeres matemáticas de relevancia histórica, resaltando si se mencionan sus datos biográficos y detalles sobre sus trabajos.

7. Analizar el tratamiento metodológico de la geometría dirigida o no a trabajar de forma activa la visión espacial, estrategias de medida, movimientos en el plano y en el espacio, etc. y el tipo de actividades que propone así como el lugar y la forma de realizarlas.

8. Analizar la visión que se proporciona de las matemáticas, también en relación con otras ciencias y con la tecnología, así como su integración en la vida cotidiana.

9. Analizar el planteamiento metodológico general de las actividades grupales como favorecedoras de la interacción entre chicas y chicos.

A tal fin confeccionamos diferentes tipos de plantillas que desglosan estos apartados. Presentamos a continuación una muestra de las plantillas que pensábamos podían utilizarse con facilidad para poder elegir un buen libro de texto, desde el punto de vista coeducativo.

6.2.1 Plantillas de análisis de libros de texto

Cada una de estas plantillas intenta aunar datos cuantitativos y cualitativos. Van acompañadas de indicaciones sobre la forma de completarlas y de los aspectos sobre los que resulta más interesante detenerse. Las plantillas nº 2, nº 3 y nº 4 pueden aplicarse igualmente para analizar el texto.

Plantilla nº 1: Datos generales

Curso: Editorial:

Datos generales de edición

Nº de autoras: Nº de autores:

Responsable de edición y/o coordinación: hombre mujer

Nº de páginas totales:

Nº de páginas de Geometría:

Nº de páginas de Aritmética:

Nº de páginas de Álgebra:

Nº de páginas de Estadística y Probabilidad:

Otras observaciones:

En esta plantilla, además de datos concretos con los que ya observamos la presencia de mujeres en la responsabilidad del libro, así como la cantidad de páginas que se destinan a cada uno de los bloques, se pueden reflejar las impresiones positivas o negativas que sugieren aspectos de la obra como el uso del color para distinguir o resaltar tanto contenidos, como datos e ilustraciones, la forma habitual de representación de la figura humana o de animales como fotografías, dibujos animados, o la aparición de “seres” de difícil tipificación de manera constante, la forma en la que se varía el tipo de letra, el diseño de página, cómo está estructurado cada tema, etc.

Se trata de tomar un primer contacto general que prepare los sucesivos pasos a partir de una imagen global.

Plantilla nº 2: Actividades que realizan los personajes que aparecen en ilustraciones

Personajes femeninos					
Niñas / adolescentes	**Actividad**	**Protagonismo**	**Mujeres adultas**	**Actividad**	**Prota-gonismo**
Total:					
Personajes masculinos					
Niños / adolescentes	**Actividad**	**Protagonismo**	**Hombres adultos**	**Actividad**	**Prota-gonismo**
Total:					

Puede ser interesante valorar el tipo de protagonismo, si es protagonismo principal, secundario o compartido. Muchas veces no es posible hacer una distinción clara entre un tipo u otro de protagonismo, pero puede servir lo que se aprecia en una primera impresión. En la primera casilla se reflejará la actividad de forma breve, como por ejemplo: comen, ven cine, compran, juegan.

Esta plantilla nos permiten comparar la diferencia entre la presencia masculina y femenina en las ilustraciones, tanto en términos numéricos como en su tratamiento.

Plantilla nº 3: Contextos en los que aparecen mujeres, niñas y adolescentes en las ilustraciones

Lugar	Nº de veces	Intención coeducativa
Aire libre/ ocio		
Aula / centro escolar		
Ambiente laboral		
Casa: **sala/ dormitorio**		
Casa: cocina		
Mercado o tiendas		
Otros		

En "intención coeducativa", anotar "Sí", "No" o "En Parte". No se resalta si la aparición responde a un protagonismo principal, compartido o secundario por no aumentar la complejidad del trabajo, pero es recomendable que se anote alguna observación relevante al respecto, por ejemplo analizar los datos correspondientes a los extremos de la frecuencia.

La casilla que recoge el número de veces podría desglosarse en tres, para distinguir niñas, adolescentes y mujeres, pero complica el uso de la plantilla y en general no aporta gran información.

Plantilla nº 4: Oficios y profesiones que aparecen en ilustraciones

Oficio / Profesión	**Nº Hombres**	**Nº Mujeres**	**Total**
	Total:	**Total:**	

Se evitará anotar los casos en los que no pueda distinguirse si se trata de hombre o mujer y sólo se tomará para el recuento a aquellas personas que protagonicen de manera evidente la ilustración, prescindiendo de personajes que se vean alejados o confusos.

No se plantea añadir a esta información si la persona que aparece está en primer o segundo plano, o si se advierte o no intención coeducativa. En un primer acercamiento, los datos numéricos suelen ser bastante expresivos y si se tiene la precaución de anotar cuanto nos parezca relevante, se consigue un resultado fácil de interpretar. No obstante, como en otras plantillas, si se hace referencia a estos aspectos podemos considerar que la observación estará más completa.

Plantilla nº 5: Mujeres matemáticas y hombres matemáticos que aparecen en el libro.

Nombre	**Biografía**	**Trabajo**	**En texto**	**En ilustraciones**
Total:				
Hombres matemáticos				
Nombre	**Biografía**	**Trabajo**	**En texto**	**En ilustraciones**
Total:				

Anotar "Sí" o "No", si se habla de su biografía y de los temas matemáticos en los que trabajó, y efectuar al tiempo también un recuento de hombres matemáticos que se mencionan en el libro. Anotar si aparece en texto o en ilustraciones o en ambos. Otras observaciones se podrían orientar hacia la comparación entre la cantidad de datos y anécdotas que se refieren a hombres matemáticos y mujeres matemáticas.

Plantilla nº 6: Tipo de actividades, problemas y ejercicios, que se proponen

Actividad	Individual	Grupal	Intención coeducativa	Indiferente

La plantilla pretende recoger información sobre las actividades que el libro propone realizar, considerando como tales los ejercicios, problemas, juegos, etc.

Los verbos *calcula*, *representa* y *resuelve* serán los más frecuentes por lo que se recomienda hacer una anotación del porcentaje que suponen respecto al total.

En algunos casos no se especifica si la actividad ha de realizarse individualmente o en grupo, pero por sus propias características podemos decidir su mejor ubicación.

Si se anota "Sí" o "No" en "intención coeducativa" o en "indiferente", se tendrá en cuenta las posibles interacciones que puede producir la actividad entre chicas y chicos, si expresamente indica que deba realizarse en grupos mixtos, si introduce acciones compensadoras favoreciendo destrezas y tareas que mejoran la orientación, la visión espacial, la estimación y el tanteo etc.

Plantilla nº 7: Tipo de lenguaje escrito utilizado

Genérico masculino	Coeducativo	Impersonal	Sexista ofensivo	Otro

Para reflejar con la mayor fidelidad todos los matices en cuanto al uso del lenguaje en el libro, se pueden anotar en cada casilla adverbios y expresiones como “totalmente”, “ocasionalmente”, “siempre”, “en parte”, “pocas veces”, etc., acompañadas de un porcentaje estimado que se adjudica en cada caso. Cuando se habla de “Genérico masculino” se refiere a la norma del castellano que masculiniza todos los colectivos aunque haya hombres y mujeres y aunque los primeros sean inferiores numéricamente o en su extremo, uno tan sólo.

Consideramos “coeducativo” utilizar ambos géneros o sustantivos genéricos como profesorado, alumnado, personas, etc. cuando se habla de grupos en los que hay hombres y mujeres e introducir un estilo coloquial e interactivo en la redacción de las actividades, hacer mención expresa de mujeres en ejercicios y problemas, indicar la composición de equipos de trabajo con igual número de chicos y chicas, asociar a mujeres y niñas calificativos positivos y exentos de estereotipos, etc.

Llamamos “lenguaje impersonal” a expresiones como *resuelve*, *calcula*, de tipo imperativo que no permiten ninguna actuación salvo la propia respuesta. El término “sexista ofensivo” admite diferentes grados. Sugerimos tener en cuenta aquello que se perciba tanto de forma expresa como implícita a la situación o hecho que se describe. Hemos añadido una casilla con el término “otro”, considerando que puede haber apreciaciones que no se ajusten claramente a ninguna de las categorías anteriores. En este caso conviene describirlas.

Se podría aplicar una plantilla similar para analizar el lenguaje gráfico que presenta el libro, considerando “genérico masculino” la mayor abundancia de ilustraciones con protagonistas masculinos, “coeducativo” las imágenes que transmitan la idea de igualdad, que muestren a las chicas en contextos y actividades no estereotipadas y que describan un mundo adulto en el que la mujer tenga un lugar digno, “lenguaje impersonal” puede significar ausencia de personajes o de representación de la realidad mediante dibujos o fotografías, etc. El lenguaje “sexista ofensivo”, en el caso del lenguaje gráfico, es más fácil de detectar por su evidencia.

Plantilla nº 8: Resultados generales obtenidos.

<table>
<tr><td colspan="5">Curso: Editorial:</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Ilustraciones</td><td colspan="2">Textos</td></tr>
<tr><td></td><td>Hombres</td><td>Mujeres</td><td>Hombres</td><td>Mujeres</td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Contextos:</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Oficios y profesiones:</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Mujeres/Hombres matemáticas/os</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tipo de actividades</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Tipo de lenguaje</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Otros aspectos</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Las casillas referentes a “ilustraciones” y “textos” deben subdividirse en dos, de forma que pueda anotarse el porcentaje referente a hombres y a mujeres en cada caso. En “actividades”, “oficios y profesiones” reflejar los que más hayan aparecido y en qué porcentaje. Anotar el número de “mujeres matemáticas” que aparecen en texto e ilustraciones. Para el “tipo de lenguaje” anotar el calificativo que pueda aplicarse de forma general a la obra. El “tipo de actividades” se separará en porcentaje de individuales y grupales y en “otros aspectos” pueden añadirse datos que se consideran relevantes, siendo muy interesante partir de las observaciones iniciales que se realizaron en la plantilla número 1 para refutarlas o corroborarlas.

Se revisaron libros de texto utilizando estas plantillas. Entonces no encontramos referencia a “mujeres matemáticas”. En estudios posteriores hemos visto que autores y editoriales han subsanado en parte esta carencia.

También se constataba la carencia de lenguaje coloquial y falta de referencia a personas en la mayoría de los ejercicios y problemas, utilizando “calcula”, “resuelve”, en un marco absolutamente impersonal. Esto continúa ocurriendo con demasiada frecuencia.

Nos parecía también interesante, además de analizar la presencia de mujeres, niñas y adolescentes, buscando modelos sociales, interesarnos por el tipo de relaciones familiares y la conexión entre actividades matemáticas y de otros tipos, pero vimos que no nos permitían sacar grandes conclusiones.

Resaltamos, en primer lugar la muy escasa presencia de mujeres como autoras de los textos e ilustraciones, siendo nula la referente a la responsabilidad en la edición. En cuanto a los personajes femeninos que aparecían en las ilustraciones, problemas y ejercicios, desde el punto de vista cuantitativo no superaban en el mejor de los casos el 10 %. Si combinamos este dato con la asignación de tareas, modelos, profesiones y oficios, ni siquiera este porcentaje cumple con los mínimos deseables. Aparecían madres que cuidaban hijos, mujeres que compraban, niñas jugando o en un aula, alguna enfermera o secretaria. Se confirmaba así el escaso avance conseguido en cuanto al cambio en la forma de presentar un tipo de mujer cuya imagen estuviera más acorde con la sociedad actual.

Por lo general las mujeres adultas estaban escasamente representadas y casi siempre aparecen como esposas, madres o ejerciendo profesiones estereotipadas como femeninas. Como ejemplo ilustrativo comentaremos que en un libro de tercero de BUP en un capítulo elegido aleatoriamente sólo aparecía una mujer adulta que se llamaba "Ropalimpia" y que quería comprarse una lavadora. Seguro que con este enunciado el autor quiso parecer gracioso y sin embargo resultó machista. Este caso que aunque muy llamativo puede parecer aislado, no es anecdótico sino que es el resultado de intentar presentar enunciados "divertidos" en problemas tópicos cuyos protagonistas representan estereotipos sociales, tanto femeninos como masculinos.

Un dato, que por pintoresco no deja de ser significativo, puede ser el hecho de que en uno de los libros casi la única referencia específica que se hacía de una mujer en cuanto a profesión fuera la de reina de un país y su doncella. En los demás, la mayor parte de ese 10 % eran niñas o adolescentes, mientras que las mujeres adultas no solían aparecer vinculadas o relacionadas con profesiones o actividades de prestigio social.

Con todo esto, al hacer ese análisis nos dimos cuenta de la importancia que tiene realizarlo, pues no fuimos conscientes de ese curriculum oculto hasta no verlo con nuestros propios ojos.

El lenguaje utilizado en el texto respondía a los modelos clásicos de los libros de matemáticas, en imperativo segunda persona, o totalmente impersonal en infinitivo, por lo que los resultados fueron aún más desoladores en cuanto a referencias a mujeres y lenguaje coeducativo. Ni siquiera en alusiones a relaciones familiares aparecía apenas una madre como protagonista del problema. Los autores y autoras seguían pensando en un solo género. En algunos libros los problemas se planteaban obviando a las personas, de forma que en capítulos enteros apenas sí se encontraban menciones a algunos oficios masculinos relacionados con el sector servicios. Eran sistemáticas las apariciones de alumnos como colectivo y en algún raro caso se hablaba de una alumna.

No puede afirmarse en términos generales que el tipo de lenguaje no se preocupara por la coeducación, sin embargo nos parece inquietante que los autores y las autoras que se lo proponían, intentaran dar por solucionado el problema del género mediante la utilización de términos epicenos (nombres con igual terminación en masculino y femenino).

No se encontraron ilustraciones claramente sexistas pero sí muy estereotipadas, rara vez se podía hablar de alguna con cierta intención coeducativa. En cuanto a la cantidad de niñas y mujeres, los datos podrían ser engañosos ya que se recurría a recrear ambientes tópicamente considerados “femeninos” como el mercado, la cocina o el interior de la vivienda, el cuidado de la familia, etc. Las representaciones de juegos o actividades deportivas seguían mostrando niñas patinadoras o tenistas frente a niños futbolistas, jugadores de baloncesto o corredores de moto.

El tratamiento de la geometría se centraba en aspectos formales en los que la despersonalización de las ilustraciones era prácticamente total. En los textos no encontramos ninguna actividad digna de mención en la que aparecieran mujeres, limitándose a ejercicios sobre recubrir con baldosas, llenar depósitos, medir superficies, etc. siempre con protagonismo escaso pero masculino.

En los capítulos más abstractos se desarrollaban actividades totalmente desconectadas de la realidad, al servicio de la formalización que se pretendía, pero muy lejos de los intereses del alumnado que los estudiaba.

Finalmente la estadística tampoco ofrecía ninguna aportación notable desde el punto de vista coeducativo, limitándose a comparar estaturas, edades, etc. sin ir más allá, planteando una posible visión crítica, invitando a realizar algún debate o investigación.

En ninguno de los textos apareció referencia alguna a “mujeres matemáticas” y sí se mencionaban, a veces en cada capítulo, datos biográficos de los matemáticos más conocidos así como anécdotas de la tradición y de la cultura matemática.

Concluimos la primera etapa del estudio con una sensación de desaliento, constatando que aún quedaba mucho camino por andar. Las matemáticas que nos mostraban estos libros nos hacían pensar que la enseñanza iba por detrás de los cambios en la sociedad. Cuando a nadie sorprende ver a una mujer conduciendo un taxi, dirigiendo el tráfico, al frente de una empresa o en profesiones de riesgo, los textos seguían empeñados en mantener modelos tradicionales.

Por nuestra parte, en las Jornadas de Coeducación y Matemáticas que tuvieron lugar en marzo de 1 994, denunciamos la existencia de libros con un escandaloso contenido sexista en sus textos e ilustraciones exigiendo su retirada del mercado, y en todos aquellos foros en los que participamos hemos manifestado la necesidad de cuidar la calidad coeducativa de cuantos materiales llegan a los alumnos y las alumnas, exigiendo un control eficaz sobre la misma.

6.3. Un nuevo análisis

Para facilitar el trabajo se pueden introducir modificaciones en los instrumentos a utilizar con el fin de sean más eficaces, e invertir menos energías para conseguir los mejores resultados. Prescindir de recuentos minuciosos hace ganar en agilidad, simplificando la tarea, sin que ello merme la calidad de las conclusiones.

En este sentido sugerimos nuevas plantillas.

En cada plantilla incorporamos un lugar para las observaciones en las que anotar aquello que nos había resultado más llamativo del aspecto estudiado. Se conseguía así una interpretación inmediata y un primer análisis realmente cualitativo de los datos obtenidos.

4.3.1 Nuevos instrumentos de análisis

Con todo lo dicho el diseño propuesto queda como sigue:

Plantilla nº 1: Datos generales

Curso:	
Editorial:	
Datos generales de edición	
Nº de autoras:	Nº de autores:
Nº de ilustradoras:	Nº de ilustradores:

Responsable de edición y/o coordinación: hombre mujer

Nº de páginas totales:

Existencia de otras propuestas para el mismo curso:

Se acompaña de materiales de apoyo:

Valoración de la guía didáctica

Nº de páginas de Geometría:

Nº de páginas de Aritmética:

Nº de páginas de Álgebra:

Nº de páginas de Estadística y Probabilidad:

Otras observaciones de interés:

En las observaciones conviene recoger las primeras impresiones obtenidas al recorrer el texto, los aspectos más novedosos, el atractivo de su formato, la calidad de sus ilustraciones, la facilidad en su manejo, la ordenación y graduación de los contenidos, la variedad en sus actividades, etc.

Plantilla nº 2: Observación de las actividades que realizan las niñas y las adolescentes que aparecen en texto, ejercicios y problemas

Actividad	**Intención coeducativa**		**Trivial**	
Descripción	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
Total:				
Observaciones:				

Se pretende, con este instrumento, obtener una visión de cómo se presenta a las niñas y adolescentes, qué actividades se les asignan y qué valor tienen desde el punto de vista coeducativo o si se desentienden de cualquier intencionalidad por lo que pueden considerarse triviales. Basta marca una cruz en las casillas “Sí” o “No”. Las observaciones permiten matizar y añadir otros elementos como la ruptura o el mantenimiento de estereotipos, el porcentaje de protagonismo principal, compartido o secundario etc.

La misma plantilla se puede aplicar para ilustraciones.

Plantilla nº 3: Observación de mujeres adultas que aparecen en texto, problemas y ejercicios

Actividad		Protagonismo			Estereotipo		Intención coeducativa	
Laboral	**Doméstica**	**P**	**C**	**T**	**Si**	**No**	**Si**	**No**
Total:								
Observaciones:								

Laboral significa actividad laboral; y Doméstica, Actividad relacionada con la casa y la atención familiar; P significa Principal, C, Compartido, y T, Trivial.

La calificación de “trivial” la aplicamos a aquellas referencias que se hacen a mujeres y que podrían eludirse sin que la actividad propuesta notara este cambio. Por ejemplo es igual que Juan o María compren determinado objeto o caminen hacia el colegio.

Las observaciones recogen, como siempre, aspectos novedosos como el posible cambio en el tratamiento de los tópicos, etc.

La misma plantilla puede utilizarse para analizar las ilustraciones.

Plantilla nº 4: Mujeres matemáticas o científicas y hombres matemáticos o científicos que aparecen en textos e ilustraciones.

Mujer matemática o científica: Nombre	Significativo	Trivial	En texto	En ilustraciones
Observaciones:				
Hombre matemático o científico: Nombre	**Significativo**	**Trivial**	**En texto**	**En ilustraciones**
Observaciones:				

Se considera "significativo" cuando se aportan datos sobre su vida y obra y "trivial" cuando aparece apenas mencionada, sin darle ninguna relevancia.

Plantilla nº 5: Observación de las actividades grupales propuestas

Descripción	Intención coeducativa	Trivial	Definida mixta
Observaciones:			

Señalar "Sí" o "No" o "En parte" en "intención coeducativa" si pone de manifiesto una tarea que fomente la igualdad y la cooperación. Se considera "trivial" si no sugiere objetivos específicos de carácter grupal como aprender a organizarse, compartir, valorar a los y las demás, etc. Se anotará “Sí” en “definida mixta” cuando se indica expresamente que ha de realizarse por chicos y chicas.

4.3.2. Análisis de resultados

Al aplicar estas últimas plantillas en la segunda etapa de la investigación, años después de la primera, nos encontramos con diseños mucho más atractivos, con profusión de ilustraciones, de color, de juegos y curiosidades. La mejora en cuanto a presencia de mujeres parecía real, pero una visión más reposada nos ha llevado a adoptar una actitud más crítica respecto a los resultados.

Una de las primeras cuestiones que debemos resaltar es la diferencia notable entre los textos de 1º y 3º. En los primeros, el esfuerzo por conectar con la realidad del alumnado es notable, tanto en el soporte gráfico como en el contenido de las actividades. En alguno de los textos de 3º, sin embargo, se mantiene una opción más despersonalizada, prescindiendo del color y la ilustración casi al límite, con un tratamiento pretendidamente cientificista de la asignatura. En el extremo contrario, alguno de los textos de 1º opta por la trivialización, introduciendo grandes ilustraciones a veces poco significativas y con una falta de originalidad en el tratamiento de los aspectos básicos de la asignatura lejos de lo que podría considerarse aprendizaje significativo.

Nos interesamos por comprender la línea didáctica que proponían estas editoriales, para lo que seleccionamos la misma en ambos cursos. Nuestra impresión es que se ha vestido la propuesta con elementos que resulten atractivos sobre todo visualmente, pero el método básicamente es el mismo.

Un primer dato a tener en cuenta es que sigue sin aparecer referencia alguna a la historia de las matemáticas protagonizada por mujeres. Ahora bien, todos los textos hablan de hombres matemáticos con profusión de detalles. En cuanto a profesiones, las escasas mujeres adultas que aparecen siguen estando vinculadas en su gran mayoría a actividades consideradas típicamente femeninas (vendedoras, secretarias, amas de casa). Se ha aumentado la cantidad pero no la calidad. En un caso se menciona a una mujer directora de un planetario, aunque esta información no es sino un adorno trivial ya que no resulta significativa para el contenido del problema. En otro aparece una oficina en la que trabajan mayoritariamente mujeres, sin especificar si ejercen puestos de responsabilidad pues la ilustración que acompaña al texto más bien indica lo contrario.

En las ilustraciones se aumenta la anteriormente muy escasa presencia cualitativa de mujeres. Aparece una doctora (pediatra), mujeres sirviéndose gasolina, niñas realizando alguna actividad física y mujeres votando. El porcentaje en algunos textos en cuanto a hombres y mujeres llega casi a ser paritario pero disminuye hasta un 20 % si hablamos de mujeres adultas que siguen siendo las eternas olvidadas. Se advierte un ligero esfuerzo por integrar a niños y adultos en actividades familiares y domésticas. Se representa a padres y niñas jugando, leyendo, comprando en el mercado, cocinando, cuidando en algunos casos el equilibrio en las escenas familiares (compartiendo tareas o momentos de ocio), etc.

En cuanto a los textos, los cambios no se han desarrollado al mismo nivel. En los diferentes bloques de contenidos se intenta plantear tareas más activas de aprendizaje. Aumentan considerablemente las informaciones sobre historia de las matemáticas como logros de la humanidad, resaltando su conexión con otras ciencias y con el mundo de la informática. Aparece con frecuencia el uso de la calculadora, y es frecuente ver ilustraciones en este sentido protagonizadas por niñas y niños indistintamente.

Todo ello conforma un escenario más llamativo, más conectado a la realidad, pero salvo uno de los textos que cuida especialmente su intención coeducativa, los demás no llegan ni con mucho a un triste aprobado.

Nos preguntamos ¿qué ha pasado? Parece claro que ni los autores y autoras, ni las editoriales han apostado por avanzar. Era una oportunidad magnífica para demostrar que las matemáticas son una ciencia viva, necesaria a hombres y mujeres, construida por hombres y mujeres.

La enseñanza debería ir marcando unas pautas de progreso para la sociedad en este y en otros muchos campos. Sin embargo, los libros de texto parecen querer presentar de ella un modelo que consideramos caduco. Cuando ya es fácil ver mujeres en muy distintas profesiones, en los libros de texto la mujer adulta es invisible, se sigue sin mostrar que vive su tiempo, que posee capacidad para cualquier trabajo y deseos de superación. Estamos tan poco acostumbradas a ser personas críticas ante estos hechos que es imprescindible realizar este tipo de análisis para reconocer la gravedad de la situación. No nos damos cuenta de que estamos educando a niñas y adolescentes mediante este tipo de "curriculum oculto" que inhibe su disposición a la hora de hacer matemáticas y disfrutar con ello.

Pero esta situación no es insalvable. Si nuestra intención es firme, podemos esforzarnos en recuperar estos materiales en favor de la coeducación.

6.4. Propuestas de mejora

La primera conclusión a la que hemos llegado una vez terminado el estudio es que tenemos que convivir con estos materiales de forma activa y positiva. Una vez decidido el texto y conociendo sus limitaciones es imprescindible buscar refuerzos que nos permitan mantener el equilibrio entre lo que queremos conseguir y en qué medida podemos servirnos del libro para lograrlo.

Las actividades que os proponemos se basan en textos, problemas o ilustraciones encontradas en los libros analizados y que, aunque no fueron planteadas en sentido coeducativo, pueden ser aprovechables como punto de partida.

Primera propuesta:

Todos los textos, sin excepción, utilizan ejemplos del mundo del deporte para explicar conceptos y procedimientos relacionados con la medida, la proporcionalidad, la estadística o el azar. En ninguno de ellos hemos encontrado datos que relacionen al deporte con la mujer.

Nos fijamos en un listado que refleja las medallas de oro, plata y bronce conseguidas en las últimas olimpíadas por diferentes países, entre ellos España. No se presentan datos desglosados de las medallas obtenidas por hombres y mujeres. Suponemos que para los autores y autoras este dato era innecesario, pero ya que los juegos olímpicos cuentan con la participación de hombres y mujeres, nos parece una excelente oportunidad para poner este tema sobre la mesa. Sobre este ejercicio sugerimos:

- Invitar a chicas y chicos a que hablen sobre los deportes que les gustan y sobre los que practican y si encuentran alguna dificultad social para acceder a la práctica de alguno de ellos por razón de género.

Estos datos pueden ser ordenados, tabulados y analizados y estamos seguras de que los resultados obtenidos no les dejarán indiferentes.

- Se les puede invitar a que busquen información sobre los y las deportistas de nuestro país que consiguieron medallas en las olimpíadas, de manera que puedan rehacer el cuadro que se presenta en el libro enriqueciendo así los comentarios que les sugiera.

- Por último puede resultar interesante que realicen actividades que relacionen el aspecto físico femenino y masculino con la práctica deportiva, tratando de eliminar estereotipos y prejuicios.

Segunda propuesta

Cuando se trabaja el tema de las formas geométricas, simetrías, movimientos en el plano, utilizando elementos técnicamente correctos pero muy poco cercanos a los alumnos y alumnas. Como novedad, se introducen reproducciones de cuadros de pintores contemporáneos, todos hombres, aun sabiendo la escasa motivación que suele manifestar el alumnado por la pintura, en lugar de preocuparse primero por interesarlo en este tema.

La motivación para acceder a estos conceptos y procedimientos quizás haya que buscarla en objetos más cercanos. En un momento como el actual en el que el diseño está tan de moda, podría ser un interesante ejercicio que partieran de objetos y elementos conocidos para interiorizar mejor este aprendizaje.

Si añadimos a todo esto el sentido de la funcionalidad, del ahorro de materiales y de la estética, les veremos con un gran interés por entender por qué un objeto es de una específica manera y guarda unas determinadas proporciones.

Sugerimos:

- Incorporar en la geometría objetos como ropa, complementos de vestir, zapatillas, útiles domésticos, muebles, cerámica, rejas, ruedas de coches, etc.

- Podemos también aprovechar la posibilidad de establecer comparaciones respecto a diseños de objetos, en especial de la vivienda, en diferentes momentos de la historia.

- Recuperar las interesantes y complejas técnicas de costura y bordados con la riqueza que contienen en cuanto a diseño y belleza, así como su papel primordial en la alfarería como demostración de sentido de la funcionalidad.

- Una actividad muy interesante puede ser el estudio de la utilización de espacios en la vivienda a lo largo de la historia, distinguiendo en proporción los destinados a los hombres y a las mujeres, así como su particular disposición y compararlos con los actuales.

- Analizar edificios singulares como rascacielos, la torre de Pisa, la Torre Eiffel, el Golden Gate, o la distribución de espacios verdes en su ciudad o su entorno cercano.

- Fotografiar el entorno próximo con ojos geométricos y encontrar en los edificios transformaciones geométricas en el espacio.

Todas estas actividades pueden ser motivadoras para el desarrollo de proyectos de investigación, tanto para descubrir y comprender mejor algunos conceptos geométricos como para realizar propuestas creativas.

Tercera propuesta

En uno de los textos aparece información sobre los votos obtenidos por diferentes partidos políticos que concurrieron a las elecciones en un determinado país. Observamos que uno de los partidos que obtuvo representación parlamentaria se denomina Unión de Mujeres.

Dado que no es frecuente encontrar este tipo de datos, nos parece que es un buen momento para hablar de la difícil relación que han mantenido las mujeres y la política hasta épocas muy recientes.

La actividad que propone el libro se centra en hacer una lectura comentada del diagrama de barras, pero creemos que puede conseguirse algo más.

Sugerimos:

- Plantear un debate sobre la participación política, la democracia y el valor de ejercer el derecho al voto.

- Sugerir la búsqueda de datos sobre la lucha de las sufragistas para conseguir igualdad de derechos y hacer referencia a la historia de nuestro país, comparando mediante un gráfico el período en el que hombres y mujeres han tenido los mismos derechos.

- Elaborar gráficos en los que se refleje por medio de una sencilla encuesta la percepción del alumnado acerca de la participación de hombres y mujeres en la vida política del país.

Cuarta propuesta

Observando la pirámide de población española de 1 991 que aparece en un texto, advertimos que distingue mediante sombreados, a grupos de personas inactivas, paradas y ocupadas. Las mujeres “ocupadas” de entre 15 y 65 años están en amplia desventaja respecto a los hombres, también les superan en número las mujeres paradas y al resto las denomina “inactivas”. Si observamos los hombres “inactivos” en esa misma franja de edades, la cantidad es casi insignificante. En páginas anteriores se ha comentado suficientemente la poco afortunada forma que utilizan los Organismos Oficiales a la hora de describir la realidad socio-laboral de las mujeres.

No podemos agradecer al Instituto Internacional de Análisis de Sistemas Aplicados, de donde provienen estos datos, que haga semejante referencia de la cuestión, aunque responda a diseños estándar. Es muy difícil encontrar en nuestro país mujeres de esas edades a las que se pueda considerar inactivas. Y sin embargo, si no se hace el esfuerzo por resaltar esta incoherencia, bien puede pasar por alto y continuar manejando la igualdad ama de casa igual a mujer inactiva

Como ya se ha comentado, el Instituto de Estadística publica una web "*Mujeres y hombres en España*" desde 2 006 hasta la actualidad, donde se pueden encontrar gran número de interesantes datos para tener una retrato de la situación de la mujer hoy en España.

Sugerimos:

- Que se considere esta pirámide como una provocación para poner de manifiesto la situación de muchas mujeres que centran toda su actividad en el trabajo doméstico y la atención familiar.

Es importante recoger las opiniones de ellos y ellas al respecto, y se debería invitarlas/los a que hicieran un estudio del número de horas que, por término medio, estas mujeres trabajan en la casa, asociando a las diferentes tareas el calificativo que les parezca más adecuado como penosa, aburrida, necesaria, fatigosa, etc. Sería muy interesante añadir cuestiones de actualidad como la reivindicación de un salario para el ama de casa y los costes y beneficios económicos que supondrían para nuestro país, analizar la doble o triple jornada de las mujeres que trabajan también fuera de casa, el reparto de tareas domésticas con criterios de equidad, etc.

Quinta propuesta

En casi todos los textos aparecen reproducidos artículos o reseñas de prensa diaria en los que se aportan datos sobre temas de actualidad: política, medio ambiente, enseñanza, etc.

En uno de ellos se aborda la cuestión de la elección de estudios por parte de los estudiantes universitarios españoles. Siempre habla en masculino y tras constatar que las carreras más masificadas son las Ciencias Jurídicas y la Medicina, plantea que los estudios con más posibilidades de empleo son los que se obtienen tras realizar una carrera técnica a las que sólo accede un 18 % del alumnado. Tal y como aparece esta información se diría que nuestra universidad es un mundo totalmente masculino. Parece necesario recuperar la parte que falta de la historia y llevar a nuestro alumnado datos acerca de la participación de las chicas en estos porcentajes.

Sugerimos:

- Buscar información sobre la elección de carreras universitarias por parte de chicos y chicas en los últimos años.
- Preguntar al grupo sobre sus expectativas de estudios y las razones que les llevarían a elegir una determinada opción.
- Aportar datos sobre los estudios profesionales y/o de nivel superior que tienen mejores posibilidades para el futuro.

Como vemos las posibilidades son múltiples y variadas. Desde algo tan simple como utilizar ambos géneros cuando nos dirigimos al grupo o cuando leemos un determinado texto, hasta la realización de un análisis más complejo de situaciones que pasarían inadvertidas hacen que, pasito a pasito, se vaya haciendo camino.

Nuestras propuestas no pretender quedarse en la forma sino llegar al fondo de la cuestión. Nos gustaría encontrar en el futuro textos, materiales y docentes que dieran la importancia que tiene, emitir determinados mensajes a una población escolar que busca de manera inconsciente modelos que le posibiliten irse formando como persona. A veces una actitud pasiva o neutra, no sólo no favorece, sino que desvirtúa la visión que perciben de una realidad que está conformada no por uno sino por dos géneros bien diferenciados.

6.5. Evaluación

Nos parece imprescindible abordar una evaluación que nos permita reconocer la validez del texto elegido. Pretendemos que sea una evaluación compartida entre profesorado y alumnado, por lo que presentamos dos instrumentos diferentes que pretenden responder a los criterios mantenidos a lo largo de este capítulo.

El primero se dirige al profesorado y tiene como objetivo provocar una reflexión a posteriori sobre la idoneidad de la elección del texto, de forma que el departamento cuente con nuevos elementos de juicio de cara a los próximos cursos. El segundo está planteado en términos sencillos de modo que sea asequible al alumnado de todos los cursos de secundaria.

Una actividad interesante sería realizar una puesta en común de las opiniones manifestadas en el cuestionario por el alumnado, solicitando de ellos y ellas ideas sobre las posibles modificaciones que les gustaría realizar en el texto, tanto en su planteamiento general como en pequeños detalles. Es una forma de conocer la incidencia del texto en su forma de percibir la asignatura, y nos posibilita la mejora de algunas estrategias metodológicas de cara a próximos cursos.

No suele ser frecuente que se realicen este tipo de intercambios entre profesorado y alumnado pero con su participación en el proceso evaluador tendremos un punto de vista, sencillo pero desde luego sincero, que pocas veces se tiene en cuenta y que sin embargo es importante si queremos conseguir el fin que nos proponemos.

Las instrucciones para cumplimentar las plantillas se reducen a marcar con una cruz la opción que más se ajuste a nuestra opinión en cada apartado.

Pueden añadirse otros aspectos o comentarios o sustituir aquellos que no parezcan fundamentales o modificar la redacción en aquellos que se considere necesario.

Cuestionario para el profesorado

Una vez utilizado, sobre el libro de texto seleccionado podrías afirmar que:			
	Sí	No	En parte
Ha resultado motivador del aprendizaje			
Es fácil de manejar para el alumnado			
Es riguroso en conceptos y procedimientos			
Refleja situaciones de interés de la vida cotidiana			
Desarrolla una geometría activa			
Desarrolla una geometría práctica			
Presenta una adecuada graduación en su			

dificultad			
Se adapta a todos los niveles del aula			
Introduce valores de forma adecuada			
Es original en el tratamiento de las matemáticas			
Sus ejercicios y problemas son útiles y atractivos			

Desde un punto de vista coeducativo:			
	Sí	No	En parte
Contribuye a dar una imagen real de la mujer actual			
Aporta datos sobre mujeres en la historia de las matemáticas			
Utiliza un lenguaje coeducativo			
Aporta modelos que animan a las chicas a hacer matemáticas			

Muestra en ilustraciones a mujeres y niñas en actitudes protagonistas			
Incorpora datos en ejercicios y problemas sobre la mujer y el mundo laboral			
Incorpora en textos e ilustraciones a mujeres con profesiones no tradicionalmente femeninas			
Incorpora en ejercicios y problemas una imagen no tradicional de las mujeres			
No contiene en sus ilustraciones escenas que puedan considerarse sexistas			
No contiene en sus textos mensajes con contenido sexista			
Es un libro que puede considerarse material coeducativo			

Cuestionario para el alumnado

Sobre el libro de texto de matemáticas que has utilizado dirías que:			
	Sí	No	En parte
Te ha parecido fácil de manejar			
Te han gustado sus ilustraciones			
Te han parecido interesantes los problemas			
Te ha animado a que te gusten las matemáticas			
Hay más chicas que chicos en las ilustraciones			
Habla de mujeres matemáticas importantes			
Te ha sorprendido lo que cuenta de la historia de las matemáticas			
Habla de situaciones que ocurren en la vida			
Aparecen profesiones actuales			
Aparecen mujeres con profesiones actuales			
Te ha gustado la forma de aprender geometría			
Lo recomendarías para el año que viene			

Es nuestro deseo que la elección del libro de texto por vuestra y nuestra parte alcance una evaluación positiva a final de curso y que, en cualquier caso, no nos neguemos la capacidad de modificar la realidad de acuerdo con el grado de responsabilidad con el que nos proponemos llevar adelante este complejo trabajo.

La pregunta de la que partíamos, ¿puede ser un libro de texto un material coeducativo? tiene una única respuesta para quienes pensamos que se puede favorecer la coeducación a través de las matemáticas. En principio cualquier material no es sino un instrumento a nuestro servicio y no una propuesta cerrada sobre la que no podemos actuar. La situación ideal sería que cada profesor o profesora elaborara su propio material de acuerdo a su concepción de la enseñanza, a su saber didáctico y a sus propias convicciones pedagógicas. No planteemos imposibles y tratemos de sacar partido a lo que tenemos, haciendo llegar al mismo tiempo a quienes tienen la responsabilidad de velar por la calidad de la enseñanza, donde están incluidos los proyectos editoriales, todas aquellas propuestas de mejora que nos harían más fácil nuestro trabajo.

Referencias

[1]. ADAIR, G: *Hypatia*

http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/hypatia.htm

[2]. ALIC, M. (1991): *"El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX"*. Siglo veintiuno editores. Madrid.

[3]. ARRIETA, Josetxu: *La discriminación positiva hacia las chicas en las aulas de matemáticas ¿debe conducir a su segregación?* Revista SUMA Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de la F.E.S.P.M., nº 20, 1995.

[4]. ASSE, E. (1878): *Notice sur la marquise du Châtelet, en-tête de l'Edition des Lettres de la marquise du Châtelet*, París.

[5]. BADINTER, E. (1983): *Emilie, Emilie. L'ambition féminine au XVIIIème siècle*, Flammarion, París.

[6]. BARBER, W. T. (1967): *Mme du Châtelet and Leibnizianism. The genesis of the "Institutions de physique"*, "The Age of Enlightment", T. Bersterman.

[7]. BAUM, J. (1986). *The Calculating Passion of Ada Byron*. Archon Books, 1986.

[8]. BELL, A. W. (1976): *The Learning of General Mathematical Strategies*, Univ. Nottingham.

[9]. BERTRAND, J. (1879): *Oeuvres de Sophie Germain*, "Journal des savants".

[10]. BESTERMAN, T. (éd.) (1958): *Les lettres de la Marquise du Châtelet*, Genève, Institut et Musée Voltaire, (2 vols.).

[11]. BÖLLING, R. (1989): *A Birthday Present*, "The Mathematical Intelligencer", 11, 4, 20-25.

[12]. BÖLLING, R. (1992): *Deine Sonia: a reading from a burned letter*. "The Mathematical Intelligencer", 14, 3, 24-30.

[13]. BÖLLING, R. (1998): *An Unknown Photograph of Kovalevskaya*, "The Mathematical Intelligencer", 20, 3, 27-28.

[14]. BONCOMPAGNI, B. (1880): *Cinq lettres de Sophie Germain à C-F Gauss*, Archiv. Der Math, Phys. Lit. Bericht, CCLIX, 27-31, CCLXI, 3-10.

[15]. BORRÁS, E y MORATA, M. (1989): *Generación y resolución de problemas: dos ejemplos*. Rev. SUMA, nº 4, 15-20.

[16]. BRANSFORD, J. D., STEIN, B. S. (1986): *Solución ideal de problemas*. Labor. Barcelona.

[17]. BRIHUEGA, J., MOLERO, M., SALVADOR, A: "*Didáctica de las Matemáticas. Formación de Profesores de Educación Secundaria*". Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Complutense. Curso de Aptitud Pedagógica. Editorial Complutense. Madrid.

[18]. BRUCK, M. T.(1996): "*Mary Somerville, mathematician and astronomer of underused talents*," Journal of the British Astronomical Association, Vol. 106, no. 4, 201-206.

[19]. BRULLET, C. y SUBIRATS, M. (1990): *La Coeducación*. Ministerio de Educación y Ciencia. Secretaría de Estado de Educación. Madrid.

[20]. BUCCIARELLI, L. L., DWORSKY, N. (1980): *Sophie Germain. An essay in the History of the theory of Elasticity*, Dordrecht.

[21]. BURTON, L. (1984): *Thinking Things Through*. Basil Blackwell. Oxford.

[22]. BYERS, N. (1999): *E Noether's Discovery of the Deep Connection Between Symmetries and Conservation Laws*, Israel Mathematical Conference Proceedings 12,

http://www.physics.ucla.edu/~cwp/articles/noether.asg/noether.html

[23]. BYERS, N. (1996): *Emmy Noether 1882 – 1935*

http://www.physics.ucla.edu/~cwp/Phase2/Noether,_Amalie_Emmy@861234567.html

[24]. CAJORI, F. (1926): *Madame du Châtelet on fluxions*, "Math. Gaz.", Volume 13, pp. 252.

[25]. CAPEFIGUE (1868): *La Marquise du Châtelet et les amies des philosophes du XVIIIe siècle*, Pau.

[26]. CARTWRIGHT, M. L. (1944): *Grace Chisholm Young*, J. London Math. Soc. 19, 185-191.

[27]. Madame du CHÂTELET (1740): *Institutions de Physique*, París, Prault.

[28]. Madame du CHÂTELET (1741): *Réponse de Mme du Châtelet à la lettre de M. de Mairan sur la question des forces vives*, Bruselas, Foppens.

[29]. Madame du CHÂTELET (1744): *Dissertations sur la nature et la propagation du feu*, París, Prault.

[30]. Madame du CHÂTELET (1759): *Principes mathématiques de la philosophie naturelle de Newton, traduits du latin par Mme du Châtelet*, París, Desaint et Saillant, reeditado en facsimil en París, Blanchard, 1966.

[31]. Madame du CHÂTELET (1792): *Doutes sur les religions révélées, adressées à Voltaire par Émilie du Châtelet*, París.

[32]. Madame du CHÂTELET (1740): *Discours sur le bonheur*, introducción y notas de Robert Mauzi, París, Les Belles-Lettres.

[33]. Madame du CHÂTELET (1993): *Discorso sulla felicità*, edición de María Cristina Leuzzi, Palermo, Sellerio ed.

[34]. Madame du CHÂTELET (1996): *Discurso sobre la felicidad*. Edición de I. Morant Deusa. Feminismos clásicos. Ediciones Cátedra. Instituto de la Mujer.

[35]. CHOWDHURY, M.R (1986): *Koblitz, Klein and Kovalevskaia*, "The Mathematical Intelligencer", 8, 4, 68-71.

[36]. COHEN, I. B. (1968): *The French translation of Isaacs Newton's Philosophia Naturalis Principia Mathematica* (1756, 1759, 1966), Archives internationales d'histoire des sciences, Vol. 21 (1968) pp. 261-290.

[37]. COLLET, L. (1854): *Mme du Châtelet*, París.

[38]. COMTE A. (1835): *Cours de philosophie positive*. Vol II, Paris.

[39]. COOKE, R. (1984*): The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*, New York.

[40]. COOKE, R. (1985): *Sonya Kovalevskaya's place in nineteenth century*, "Contemporary Mathematics", 64, 17-52

[41]. COOKE, R. (1996): *S.V. Kovalevskaya's mathematical legacy: the rotation of a rigid body*, "Vita Mathematica", R. Calinguer (ed.), 177-190.

[42]. COOLIDGE, J. L. (1951): *Six Female Mathematicians*, "Scripta Mathematica", 17, 20-31.

[43]. COX, J. F. (1950): *Hommage à la Marquise du Châtelet*, "Ciel Terre", Vol. 66, 1-11.

[44]. DAHAN DALMEDICO, A. (1988): *Étude des méthodes et des styles de mathématisation: la science et l'élasticité*, "Sciences à l'époque de la Révolution Française". R. Rashed (ed), Paris, 349-442.

[45]. DAHAN DALMEDICO, A. (1987): *Mécanique et théorie des surfaces: les travaux de Sophie Germain*, "Historia Mathematica", 14, 247-365.

[46]. DAHAN DALMEDICO, A. (1991): *Sophie Germain*, "Scientific American", 265, 117-122.

[47]. DAHAN DALMEDICO, A. (2000): *Sophie Germain, "*Les mathématiciens*",* Paris, 72-85.

[48]. DEAKIN, M. A. B. (1994): *Hypatia and Her Mathematics*. "The American Mathematical Monthly". 101, 3, 234 - 243.

[49]. DEAKIN, M. (1992): *Women in Mathematics*: *Fact versus Fabulation*, "Math. Soc. Gaz", 19, 105-114

[50]. DEBEVER, R. (1987): *La Marquise du Châtelet traduit et commente les Principia de Newton*, “Ac. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.”, (5), 73, 12, 509-527.

[51]. Mme Du DEFFAND, (1865): *Correspondance*, París, t. II, pp. 762.

[52]. DEL CENTINA, A. (2002): *Letters of Sophie Germain preserved in Florence*, Ferrara.

[53]. DETRAZ, J. (1991): *Sonia Kovalevskaya*, in Report on the fifth annual EWM meeting, CIRM.

[54]. DETRAZ, J. (1993): *Kovalevskaïa: l'aventure d'une mathématicienne*, París.

[55]. DICK, A. (1981): *Emmy Noether, 1882-1935*. Birkhauser, Boston.

[56]. DUBNER, H. (1996): *Large Sophie Germain Primes*, "Math. Computer", 65, 393-396.

[57]. DUBNOV, Y. S. (1994*): Errores en las demostraciones geométricas*. Rubiños. Madrid.

[58]. DUBREIL-JACOTIN, M. L. (1948): *Figures de Mathématiciennes*, "Les grands courants de la pensée mathématique", F. Le Lionnais (ed.). Cahiers du sud, Paris, 258-269.

[59]. DZIELSKA, M. (1996): *Hypatia of Alexandria*. F. Lyra. Massachusetts.

[60]. EDWARDS, H. (1996): *Fermat's Last Theorem*, New York.

[61]. ELIF UNLU (1995): *María Gaetana Agnesi*, http://www.agnesscott.edu/Iriddle/women/agnesi.htm

[62]. EINSTEIN, A. (1935): *Un tributo a Emmy Noether*, "The New York Times" (5 de mayo).

[63]. EYCHENNE, E. (1993): *Mathématiciennes, ... des inconnues parmi d'autres*. Brochure de l'IREM de Besançon.

[64]. INSTITUTO DE LA MUJER (1992): *La mujer en cifras*. 1992. Ministerio de Asuntos Sociales. Madrid.

[65]. FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A.; ZUASTI, N. (1998): *Género y Matemáticas*. Editorial Síntesis. Madrid.

[66]. FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. (1998): *El juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas*. Proyecto Sur de Ediciones, S. L, Granada.

[67]. FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. (1994) **"***Dificultades y logros de una mujer matemática: Mary Somerville***".** Revista SUMA. Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Volumen: Nº 25, 45 - 52. Zaragoza.

[68]. FIGUEIRAS, L.; MOLERO, M.; SALVADOR, A. y ZUASTI, N. (1999). **"***O xogo de Ada. Xogos e actividades cooperativas*

para a clase de matemáticas”. Actas das III Xornadas de Matemática Recreativa. Xunta de Galicia. 351 - 357. A Coruña.

[69]. FITZGERALD, A. (1926): *The Letters of Synesius of Cirene*. Oxford University Press.

[70]. FROST, L. (1899): *Sonja Kowalewski*, "Deutsche Welt", 24, 12, 373-390.

[71]. GARDNER, M. (1981): *Inspiración ¡Ajá!* Labor, Barcelona.

[72]. GARDNER, M. (1981): *¡Ajá! Paradojas*. Labor, Barcelona.

[73]. GERMAIN, S. (1821): *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques,* Paris.

[74]. GERMAIN, S. (1826): *Remarques sur la nature, les bornes et l´étendue de la question des surfaces élastiques et Équation Générale de ces Surfaces,* Paris.

[75]. GERMAIN, S. (1828): *Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l´équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Annales de Physique et de Chimie. Tome XXXVII, 123-131.

[76]. GERMAIN, S. (1831): *Mémoire sur la courbure de surfaces*, "Crelle Journal", VII, 1-29.

[77]. GERMAIN, S. (1831): *Notes sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans la équation…*, "Crelle Journal", VII, 201-204.

[78]. GERMAIN, S. (1833): *Considérations générales sur les Sciences y les Lettres aux différentes époques de leur culture*, A. J. Lherbette (ed), Paris.

[79]. GERMAIN, S. (1879): *Sophie Germain: Oeuvres philosophiques*. H. Stupuy (ed), Paris. (2ª ed. 1890).

[80]. GONZÁLEZ, A. (2002): *Hipatia*. Ediciones del Orto.

[81]. GOT, T. (1948): *Une énigme mathématique*: *Le dernier Théorème de Fermat*, "Les grands courants de la pensée mathématique", F. Le Lionnais (ed.), Paris, 90-98.

[82]. Mme de GRAFFIGNY (1820): *Vie privée de Voltaire et de Madame du Châtelet*, Paris.

[83]. Mme de GRAFFIGNY (1957): *Correspondance*, "Voltaire", ed. Th. Besterman, Ginebra, vol VII.

[84]. GRATTAN-GUINNESS, I. (1975): *A joint bibliography of W. H. and G. C. Young*, Historia Mathematica 2, 43-58.

[85]. GRATTAN-GUINNESS, I. (1972): *A mathematical union: William Henry and Grace Chisholm Young*, Annals of Science 29, 105-186.

[86]. GRAY, M. W. (1987): *Sophie Germain,* "Women of Mathematics. A Bio bibliographic Sourcebook", L. S. Grinstein and P. J. Campbell, (ed.), Connecticut, 47-56.

[87]. GRINSTEIN, L. S.; CAMPBELL, P. J. (eds.), (1987): *Women of Mathematics* Westport, Conn. 246-254.

[88]. GUZMÁN, M. de, (1985): *Enfoque heurístico de la enseñanza de la matemática*, ICE, U. Zaragoza.

[89]. GUZMÁN, M. de, (1991): *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona.

[90]. GUZMÁN, M. de, (2003): *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas*. Anaya. Madrid.

[91]. GUZMÁN, M. (1989): *Juegos y matemáticas*, Revista SUMA, nº4, 61-64.

[92]. HAMEL, F. (1910): *An eighteenth century Marquise: A study of Emilie du Châtelet and her times*, London.

[93]. HAUCHECORNE, B. y SURATTEAU, D. (1996): *Des mathématiciens de A à Z*, París.

[94]. HERNÁN, F. (Grupo Cero de Valencia) (1985): *Investigaciones* "Nueva Revista de Enseñanzas Medias", nº 7.

[95]. HERODOTO EL ROJO: *Hipatia, mártir de la ciencia*

http://www.nodo50.org/arevolucionaria/articulos3/Hipatia.htm

[96]. HEYDEMANN, M. C. (1974): *Histoire de quelques mathématiciennes*, "Mathématiques, Mathématiciens et Société", P. Samuel (ed.), Paris.

[97]. HILL, C. T. y LEDERMAN L. M.: *Symmetry in Physics: Proving Noether's Theorem,* http://www.emmynoether.com/math.htm

[98]. HILL, C. T. y LEDERMAN L. M.: *Symmetries of the Laws of Physics and Noether's Theorem,*

http://www.emmynoether.com/noeth.htm

[99]. HOCHET (1806): *Notice historique sur Madame du Châtelet*, ed. "Lettres inédites de Madame la marquise du Châtelet à M. le C. d'Argental", Paris.

[100]. ILTIS, C. (1977): *Madame du Châtelet's metaphysics and mechanics*, "Studies in Hist. and Philos. Sci." 8, 1, 29-48.

[101]. INDLEKOFER, K. H., JÁRAI, A. (1999): *Largest Known Twin Primes and Sophie Germain Primes*. "Math. Comput", 68, 1317-1324.

[102]. JANIK, L. G. (1982): *Searching for the Metaphysics of Science: the structure and composition of Madame du Châtelet's "Institutions de physique" 1737-1740*, "Stud. Voltaire 18 th Cent.", 85-113.

[103]. JOVY, E. (1922): *Le P. François Jacquier et ses correspondants*, Vitry-le-François, pp. 22-29.

[104]. KAWASHIMA, K. (1990): *La participation de Madame du Châtelet à la querelle sur les forces vives*, “Historia Sci.” 40, 9-28.

[105]. KEEN, L. (1977)*: Sonya Kowaleskaya - Her Life and Work*, "Newsletter of the Association for Women in Mathematics", 7, 2, 2-6.

[106]. KENNEDY, D. H. (1983*): Little Sparrow: A Portrait of Sophia Kovalevsky*, London.

[107]. KIMBERLING, C. (1982) *Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician* "Mathematics Teacher", 84, 3, 246-249. 10.1 del menú en:

http://www.matharticles.com

[108]. KINGSLEY, CH. (1857): *Hypatia or new foes with an old face*. Leipzip.

[109]. KOBLITZ, A. H. (1983): *A Convergence of Lives: Sophia Kovaleskaia: Scientist, Writer, Revolutionary*, Boston.

[110]. KOBLITZ, A. H. (1983): *A few words on Sofia Kovalevskay*a, "Newsletter of the Association for Women in Mathematics", 13, 2, 12-14.

[111]. KOBLITZ, A. H. (1984): *Sofia Kovalevskaia and the Mathematical Community*, "The Mathematical Intelligencer", 6, 1, 20-29.

[112]. KOBLITZ, A. H. (1986): *A reply to Chowdhury,* "The Mathematical Intelligencer", 8, 4, 71-72.

[113]. KOBLITZ, A. H. (1987): *Sofia Vasilevna Kovalevskaia,* "Women of Mathematics. A biobibliographic sourcebook", L. S. Grinstein, P. J. Campbell (ed.), Westport, Connecticut, 103-113

[114]. KOCHINA, P. Y. (1985): *Love and Mathematics: Sophya Kovalevskaya*, Moscú.

[115]. KOCHINA-POLUBARINOVA (1957): *Sophia Vasilyevna Kovalevskaya*, *her life and work*, "Men of Russian Science", Moscú.

[116]. KOLMOGOROV, A. N. y YUSHKEVITCH A. P. (1996): *Mathematics of the 19th century: Geometry, Analytic Function Theory*, Birkhaeuser.

[117]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1875): *Zur theorie der partiellen Differentialgleichungen*, "Crelle Journal", 80, 1-32.

[118]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1884*): Über die Reductoneiner bestimmten Klasse von Abel'scher Integrales,* "Acta Mathematica", 4, 393-414.

[119]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1884): *Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé,* "Comptes-Rendus", 98, 356-357.

[120]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1885*): Über die Brechung in cristallinischen Mittel,, "*Acta Mathematica", 6, 294-304.

[121]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1885*): Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe, "*Astronomische Nachirichten", 111, 37-48.

[122]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1886): *Reminiscences of George Elliot,* "Ruscaya Mysl", 6, 93-108.

[123]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1889) *Mémoire sur un cas particulier de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe,* "Acta Mathematica", 12, 177-232.

[124]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1890): *Mémoire sur un cas particulier de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraélliptiques du temps, "*Mémoires Présentés par Divers Savants", 31, 1-62.

[125]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1890): *Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe,* "Acta Mathematica", 14, 81-93.

[126]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1890): *An autobiographical sketch*, "Russkaya Starina", 11, 450-463. Traducido al inglés por Stilllman (1978) 213-229.

[127]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1890): *Memories of Childhood*, "Vestnik Evropy", 7, 55-98; 8, 584-640.

[128]. KOVALEVSKAYA, S. (1968): *Jugenderinnerungen*, S. Fischer (ed.), Frankfurt, Main.

[129]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1978): *A Russian Childhood. Sofya Kovalevskaya*, B. Stillman, (ed.), New York.

[130]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1996): *Memorias de juventud*, Barcelona.

[131]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1891): *Sur un théorème de M. Bruns*, "Acta Mathematica", 15, 45-52.

[132]. KOVALEVSKAYA, S. V. (1892) *The Nihilist Woman*, Geneva.

[133]. LAFORTUNE, L. (1986): *Femmes et mathématiques*. Les éditions du remue-ménage, Montréal.

[134]. LAFORTUNE, L. y KAYLER, H. (1992): *Les femmes font des Maths*. Les Éditions du remue-ménage. Montreal.

[135]. LAKATOS, Y. (1976): *Profs and Refutations. The Logics of Mathematical Discovery*, [Traducción castellana (1978.): *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza. Madrid]

[136]. LEFFLER Anne-Charlotte (1895): *Sonja Kovalevsky*, Leipzig.

[137]. LEGENDRE, A. M. (1823): *Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat*, "Mémoires de la Académie Royal des Sciences de l'Institut de France", 6, 1-60.

[138]. LEGENDRE, A. M. (1830): *Théorie des Nombres*, Paris.

[139]. LIARD, L. (1879): *Sophie Germain (Oeuvres Philosophiques)*, "Revue Philosophique", 426-431

[140]. LIBRI, G. (1832): *Notice sur Sophie Germain*, "Journal des Debats".

[141]. MANDIC, S. (1995): *Emilie du Chatelet, December 1706 - September 1749*, "Biographies of Women Mathematicians Web Site", Agnes Scott College, Atlanta GA, Larry Riddle, Dept of Math

[142]. MASLOW, A. (1982): La personalidad creadora. Kairos. Barcelona.

[143]. MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. (1982): *Thinking Mathematically*. Addison Wesley. London. [Traducción castellana (1988): *Pensar matemáticamente*. Labor-MEC. Barcelona]

[144]. MATAIX, C. (1993): *Madame du Châtelet: un fuego encendido*. Arbor 565, 79-90.

[145]. MATAIX, S. (1999): *Matemática es nombre de mujer*. Editorial Rubes. Madrid.

[146]. MAUREL, A. (1930): *La marquise du Châtelet, amie de Voltaire*, Paris, Hachette.

[147]. MAUREL, A. (1931): *The romance of Mme. du Châtelet and Voltaire*, London, Hutchinson.

[148]. MCGIRR, K. (1998): *Biographies of Mathematicians - Emmy Amalie Noether*

http://www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/bionoeth.htm

[149]. MERCHÁN, F. (1994): *El salto de la rana*. Revista "Suma" nº 14-15, 50-59.

[150]. MICHELI, G. (1985): *The philosophical works of Sophie Germain*, "Science and philosophy", Milan, 712-729.

[151]. MITTAG-LEFFLER, G. (1892): *Sophie Kovalevsky*, "Acta Mathematica", 16, 385-392.

[152]. MITTAG-LEFFLER G. (1923): *K. Weierstrass and Sonia Kovalevskaia*, "Acta Mathematica", 39, 133-198.

[153]. MOLERO, M., SALVADOR, A. y SALVADOR, A. (1991) "*Mujeres y Matemáticas: Un Estudio Diferencial*", "Números". Revista de la Sociedad "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. 21, 57 - 65. La Laguna. Islas Canarias.

[154]. MOLERO, M., SALVADOR, A. y SALVADOR, A. (1991) *"Mujeres y Matemáticas: Propuesta para una acción compensatoria"*, "Números". Revista de la Sociedad "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas. 21, 22 - 37. La Laguna. Islas Canarias.

[155]. MOLERO, M., SALVADOR, A., ZUASTI, N. (2001): Capítulo: "*Biografías de algunas mujeres matemáticas acompañadas de ciertas reflexiones sobre la educación y las condiciones de vida de las mujeres*" en el libro "*Las mujeres ante la Ciencia del siglo XXI*", 91- 160. Editorial Complutense. Madrid.

[156]. MOLERO, M. y SALVADOR, A. (2002): *"Sonia Kovalevskaya"*. Ediciones del Orto.

[157]. MOLERO, M. y SALVADOR, A. (2007): *"Sophie Germain*". Ediciones del Orto.

[158]. MOLERO, M. y SALVADOR, A.: *Hipatia*

http://divulgamat2.ehu.es/index2.php?option=com_content&do_pdf=1&id=3351

[159]. MORATA, M. (1994): *Los Juegos en la Educación Matemática*, taller de "Matemáticas y Coeducación. Jornadas sobre Matemáticas y Coeducación", Ed. OECOM "Ada Byron". Madrid.

[160]. MOZANS, H. J. (1913): *Women in Science,* (ed. 1974), Cambridge.

[161]. NEDELJKOVIC, D. (1966): *La continuité chez Leibniz, Madame du Châtelet and R. J. Boscovich*, Dijalektika, 1, 65-68.

[162]. NEKRASOV, P. A. (1891): *On the works of S. V. Kovalevskaya in pure mathematics,* "Mattematicheskii Sbornik", 16, 1, 31-38

[163]. NOETHER, E. (1983): *Collected Papers*. Springer - Verlag, New York.

[164]. NOETHER, E. (1918): *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, 235-257.

[165]. NOETHER, E (1921): *Idealtheories in Ringbereichen*, "Mathematische Annalen", 83, 24-66,

http://134.76.163.65/agora_docs/29099TABLE_OF_CONTENTS.html

[166]. NOETHER, E. (1933): *Nichtkommutative Algebra*. "Mathematische Zeitschrift", 37, 514-541,

http://134.76.163.65/agora_docs/8487BIBLIOGRAPHIC_DESCRIPTION.html

[167]. NOETHER, E. (1908): *Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*, Reimer. Berlin

http://134.76.163.65/agora_docs/39727BIBLIOGRAPHIC_DESCRIPTION.html

[168]. O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (1997): *Emmy Amalie Noether*,

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Noether_Emmy.html

[169]. O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (1999): *Hypatia of Alexandria*

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hypatia.html

[170]. O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. (2002): *Fotografías de Emmy Noether*,

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/PictDisplay/Noether_Emmy.html

[171]. O'CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F. (2003): *María Gaetana Agnesi*.

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Agnesi.html

[172]. O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F.:

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Chisholm_Young.html

[173]. ORLICK, Terry (1995): *Libres para cooperar, libres para crear,*

[174]. OSEN, L. M. (1992): *Women in Mathematics*, Cambridge, London.

[175]. PATTERSON, E. (1987). "*Mary Fairfax Greig Somerville (1780-1872)*", in Women of Mathematics: A Biobibliographic Sourcebook, Louise Grinstein and Paul Campbell, Editors, Greenwood Press, 208-216.

[176]. PERL, T. (1978): *Sophie Germain*. *Math Equals*, "Biographies of Women Mathematicians and Related Activities", Menlo Park, (California).

[177]. PERL, T. (1978): *Sonya Kovalevskaya*. *Math Equals*, "Biographies of Women Mathematicians and Related Activities", Menlo Park (California). 127-137.

[178]. PERL, Teri (1978): *Biographies of Women Mathematicians + Related Activities*. Math Equals. Addison-Wesley Innovative Series. USA.

[179]. POLYA, G. (1945): *How to Solve It*. Princeton University Press. Princeton. [Traducción castellana (1965): Cómo plantear y resolver problemas. Trillas. México]

[180]. POLYA, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton University Press. Princeton. [Traducción castellana (1966): Matemáticas y razonamiento plausible. Tecnos. Madrid]

[181]. POLYA, G. (1962-1965): *Mathematical Discovery*. 2 vols. John Wiley and Sons. New York.

[182]. RADOUX, C. (1996): *Quelques mathématiciennes*, "Cahiers Rationalistes", 501 y 502, Paris.

[183]. RAPPAPORT, K. D. (1981): *S. Kovalevsky: a Mathematical Lesson*, "The American Mathematical Monthly", 88, 8, 564-573.

[184]. RIST, J. M. (1965): *Hypatia*. Phoenix 19. 214 - 225.

[185]. ROME, A. (1926): *Le troisiéme livre des commentaires sur l'Almageste par Théon el Hypatia*. Ann. Soc. Sci. Bruxelles 46.

[186]. RUBIN, V. C., STRYKER, L. L. (1985)*: Review of "A Convergence of Lives"* by A. H. KOBLITZ, "The Mathematical Intelligencer", 7, 4, 69-73.

[187]. SALVADOR, A., SALVADOR, A. (1994): "*Coeducación en Matemáticas ¿Para qué?"* Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado (Continuación de la Antigua Revista de Escuelas Normales). 21, 133 - 145. Madrid.

[188]. SALVADOR, A. (1994): *Emilia de Breteuil, Marquesa de Châtelet*. Boletín OECOM "Ada Byron" nº 4.

[189]. SALVADOR, A. (2001): Capítulo: "*Una mirada sobre la educación científica de las mujeres*" en el libro "*Las mujeres ante la Ciencia del siglo XXI*", 229 -232. Editorial Complutense. Madrid.

[190]. SALVADOR, A. (2002): Capítulo: "*Las mujeres matemáticas y la Matemática*". 1 – 44. Título del Libro: *Conferencias año 2000 con motivo del año mundial de las Matemáticas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba. Manuel Torralbo Rodríguez (Ed.). Córdoba.

[191]. SALVADOR, A. y MOLERO, M. (2004): "*Emilie du Châtelet*". Ediciones del Orto.

[192]. SAMPSON, J. H. (1990): *Sophie Germain and the Theory of Numbers*, "Archive for History of Exact Science", 41, 157-161.

[193]. SAVATER, F. (1993): *El jardín de las dudas*. Editorial Planeta. Barcelona.

[194]. SCHWARZBACH, B. E. (1993): *Une légende en quête d'un manuscrit : Le Commentaire sur la Bible de Madame du Châtelet*, en François Moureau ed.: "La communcation manuscrite au XVIIIè siècle", (Oxford, Paris), pp. 97-116.

[195]. SCHWARZBACH, B. E. (1995): *Les études bibliques à Cirey: De l'attribution à Mme du Châtelet des Examens de la Bible et de leur typologie*, en François de Gandt ed., Actes du colloque de Joinville, aparece en "Studies on Voltaire and the eighteenth century".

[196]. SCRIBA, Ch. J. (1968): *The French edition of Newton's Principia (translation of the Marquise du Chatelet)*: 1759 or 1756? Actes XIIe Congrès Internat. d'Histoire des Sciences (París), Tome III, Paris, 1971.

[197]. SCHOENFELD, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Academic Press. Nueva York.

[198]. SEGOND, D. (1879): *Oeuvres Philosophiques de Sophie Germain*, "La philosophie positive".

[199]. SHELL Centre For Mathematical Education. (1993): *Problemas con pautas y números*. Universidad del País Vasco. Bilbao.

[200]. SINGAL, A. R. (1986): *Women mathematicians of the past: some observations*, "Math. Ed", 3, 1, 9-18.

[201]. SMITH, Sanderson M. (1996): *Agnesi to Zeno: Over 100 Vignettes from the History of Math*. Key Curriculum Press. Berkeley.

[202]. SOLSONA, N. (1997): *Mujeres Científicas de todos los tiempos*. Talasa Ed. Madrid.

[203]. SOMERVILLE, M. (1831): *Mechanism of the Heavens*. John Murray. London

[204]. SOMERVILLE, M. (1834): *The Connection of the Physichal Sciences*. John Murray. London

[205]. SOMERVILLE, M. (1848): *Physical Geography*. John Murray. London

[206]. SOMERVILLE, M. (1869): *On Molecular and Mycroscopic Science* John Murray. London

[207]. SOMERVILLE, M. (1874): *Personal Recollections, from Early Life to Old Age, of Mary Somerville*, John Murray. London. [Su hija Martha seleccionó los textos y está disponible en la web en Project Gutenberg.]

[208]. STILLMAN, B. (1974): *Sofya Kovalevskaya: Growing up in the Sixties*, "Russian Literature Triquarterly", 9, 287-298.

[209]. STRETCH, D. (2003): *Emmy Amalie Noether*,

http://www.pass.maths.org.uk/issue12/features/noether/index.html

[210]. TAHAN, M. (1980): *El hombre que calculaba*. Editores Mexicanos Unidos. México.

[211]. TATON, R. (1969): *Madame du Châtelet, traductrice de Newton*, "Archives internationales d'histoire des sciences", 22, 185-210.

[212]. TAYLOR, M. (1998): *Emmy Noether*,

http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/noether.htm

[213]. TEE, G. J. (1987): *Gabrielle-Emilie Le Tonnelier de Breteuil, Marquise du Châtelet*, pp. 21-25 en: "Women of Mathematics. A biobibliographic sourcebook". Greenwood Press, Inc., Westport, Conneticut.

[214]. TEE, G. J. (1977): *Sof'ya Vasil'yevna Kovalevskaya*, "Mathematical Cronicle", 5, 113-139

[215]. TEE, G. J. (1983): *The pioneering Women Mathematicians*, "The Mathematical Intelligencer", 5, 4, 27-36.

[216]. TERI, P. (1978): *Biographies of Women Mathematicians and Related Activities*. Math Equals. Addison Wesley Innovative Series.

[217]. TERRALL, M. (1995): *Emilie du Châtelet and the gendering of science*, "Hist. Sci." 33, nº 101, part 3, 283-310.

[218]. VAILLOT, R. (1978): *Madame du Châtelet*, Préface de René Pomeau, Paris, Albin Michel.

[219]. VAILLOT, R. (1988): *Avec Madame du Châtelet, (1734-1749)*, Oxford, Voltaire Foundation, Taylor Institution.

[220]. VAN DER WAERDEN, B. L. (1935): *Nachruf auf Emmy Noether*, "Mathematische Annalen" 111, 469-476,

[221]. VANNIER, E. y CHAUVEAU, P. (1979): *Como jugar y divertirse con su calculadora de bolsillo*. Ed. Altalena. Madrid.

[222]. VERCRUYSSE, J. (1960): *La Marquise du Châtelet, prévote d'un confrérie bruxelloise*, "Cah. Bruxellois", Vol. 5, 214-215.

[223]. VOLTAIRE (1752): *Eloge historique de Mme la Marquise du Châtelet*, en "Oeuvres", t. XXXIX, pp. 418.

[224]. VYGOTSKI, L. S. (1977): *Lenguaje y Pensamiento*. La Pleyade. Barcelona.

[225]. WADE, Ira Owen (1941): *Voltaire and Madame du Châtelet: An Essay on the Intellectual Activity at Cirey*, Princeton University Press, Princeton, NJ, Octagon Books, New York, 1967.

[226]. WADE, Ira Owen (1947): *Studies on Voltaire: with some unpublished papers of Mme. du Châtelet*, Princeton, Princeton University Press.

[227]. WADE, Ira Owen (1969): *The intellectual development of Voltaire*, Princeton, 253-570.

[228]. WAITHE, M. E. (1987): *Hypatia of Alexandria*. A History of Women Philosophers. 1/600 BC-500 AD. 169 - 195.

[229]. WALLAS, G. (1926): *The art of thought*. Harcourt Brace. Nueva York.

[230]. WANTZEL, M. L. (1837): *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*. Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2, 366-372.

[231]. WEISBERG, R. W. (1987): *Creatividad. El genio y otros mitos*. Labor. Barcelona.

[232]. WEYL, H. (1935): *Emmy Noether*, "Scripta Mathematica III", 3, 201-220.

[233]. WOOD, L. E. (1987): *Estrategias de pensamiento*. Labor. Barcelona.

[234]. WOOLLEY, B. (feb 2002). *The Bride of Science: Romance, Reason, and Byron's Daughter*, 361-362.

[235]. WIEGAND, S. (1977): *Grace Chisholm Young*, Association for Women in Mathematics Newsletter 7, 3, 5-10.

[236]. YOUNG, Grace Chisholm (1970): *Beginners Book of Geometry*. Chelsea Publishing. New York.

[237]. ZINSSER, J. P. (1998): *Emilie du Châtelet: genius, gender and intellectual authority*, en Hilda L. Smith ed.: "Women writers and the early modern British political tradition". Cambridge, pp. 168-190.

Índice

1. Introducción ………………………………………….... 1

Resumen

1.1. La escuela ………………………………………………….. 2

1.1.1. Objetivos

1.1.2. Hechos

1.1.3. Causas

1.1.4. Libros de texto.

1.1.5. Coeducación

1.2. Ideas para la clase de matemáticas ……………………….. 9

1.2.1. Trabajo en grupo

1.2.2. Hacer matemáticas en la clase de matemáticas

1.2.3. Geometría

1.2.4. Estadística

1.2.5. Verbalización

1.2.6. Evolución histórica de las matemáticas

1.3. Historia de mujeres en las matemáticas …………………. 13

1.3.1. La educación de las mujeres.

1.3.2. El reconocimiento de su trabajo científico.

1.3.3. Su acceso a las instituciones científicas y su trabajo profesional.

1.3.4. En la sociedad actual...

2. Resolución de problemas y emociones 23

2.1. Introducción …………………………………………………. 23

2.1.1. El origen de los problemas.

2.1.2. ¿Qué es un problema?

2.1.3. La heurística

2.1.4. Historia de la resolución de problemas

2.1.5. Mujeres y resolución de problemas

2.2. Procesos generales del pensamiento matemático ……... 36

2.2.1. Particularizar y generalizar

2.2.2. Inferencia y deducción

2.2.3. Creatividad.

2.2.4. Técnicas de demostración en matemáticas.

2.3. Fases de los modelos de resolución de problemas ……. 48

2.3.1. Modelo de Polya

2.3.2. Modelo de Mason-Burton-Stacey

2.4. Estrategias de resolución de problemas ………………… 66

2.4.1. Codificar. Usar una buena notación.

2.4.2. Organizar: hacer una figura, un esquema o una tabla.

2.4.3. Experimentar. Ensayo y error.

2.4.4. Explorar: Buscar simetrías regularidades y casos límite

2.4.5. Buscar problemas análogos.

2.4.6. Introducir elementos auxiliares.

2.4.7. Subobjetivos. Dividir el problema en partes.

2.4.8. Suponer el problema resuelto o trabajar marcha atrás.

2.5. Emociones y bloqueos en la resolución de problemas .. 91

2.5.1. Las emociones

2.5.2. Tipos de bloqueos

2.5.3. El enunciado del problema

2.6. Metodología y Evaluación …………………………………… 105

2.6.1. Metodología

2.6.2. Evaluación

3. El juego cooperativo en la clase de Matemáticas.115

3.1. El juego en matemáticas ……………………………..…. 117

3.1.1. Características del juego y de la matemática

3.2. Los juegos en la enseñanza de las matemáticas ………. 118

3.3. Análisis de juegos: ………………………………………. 120

3.3.1. El salto de la rana

3.3.2. Juegos de estrategia ganadora: Llegar a cien

3.3.3. Juegos de azar: Llegar al cielo

3.3.4. Dominós, barajas, juegos de tablero

3.4. El juego cooperativo ……………………………………… 129

4. Biografías de algunas mujeres matemáticas....... 133

4.1. Teano ……………………………………………..…..…….. 135

4.1.1. Las mujeres en la antigüedad

4.1.2. La Escuela Pitagórica

4.1.3. Teano

4.2. Hipatia ……………………………………………………….. 141

4.2.1. Introducción

4.2.2. Su vida

4.2.3. Su obra

4.3. Émilie de Breteuil, marquesa de Châtelet ……………….. 157

4.3.1. Introducción

4.3.2. Los primeros años de Mme. de Châtelet

4.3.3. Sus profesores: Maupertuis y Clairaut.

4.3.4. Los años de Cirey

4.3.5. Sus obras. Instituciones de la Física

4.3.6. Los Principia de Newton

4.4. Sophie Germain ……………………..……………………..…….. 229

4.4.1. Introducción

4.4.2. Su infancia

4.4.3. La Escuela Politécnica

4.4.4. Investigaciones en Teoría de Números

4.4.5. El Premio Extraordinario

4.4.6. Publicaciones de su obra

4.4.7. La amistad entre Germain y Libri

4.4.8. Reconocimiento póstumo

4.4.9. Anexo: Textos del ensayo filosófico

4.5. Caroline Herschel. Mujeres astrónomas …….…..……….. 299

4.5.1. Vida y obra de Carolina Herschel

4.5.2. La astronomía y otras mujeres astrónomas

4.6. María Gaetana Agnesi ………………………….……..……… 313

4.6.1. Su vida

4.6.2. Su obra

4.6.3. La curva de Agnesi

4.7. Ada Lovelace. Las mujeres y la informática ....…..... 327

4.7.1. Su época

4.7.2. Vida y obra de Ada Lovelace

4.7.3. La máquina diferencial y la máquina analítica

4.7.4. Otras mujeres informáticas: Grace Murray Hopper

4.8. Mary Somerville ………………..……………………….…. 347

4.8.1. Su vida

4.8.2. Su obra

4.8.3. Su posición frente a los derechos de la mujer

4.9. Sonia Kovalevskaya ……………………………….………… 369

4.9.1. Su infancia en el campo

4.9.2. Un matrimonio ficticio

4.9.3. Al fin Doctora

4.9.4. Un paréntesis en su trabajo matemático

4.9.5. Profesora en Estocolmo

4.9.6. Prólogo a su actividad literaria y su mayor éxito matemático

4.9.7. El premio Bordín

4.9.8. Su actividad literaria

4.9.9. Sus investigaciones matemáticas

4.9.10. Su lucha por los derechos de la mujer.

4.10. Emmy Noether ……………………………………....... 447

4.10.1. Su vida

4.11.2. Su obra

4.10.3. Emmy y la teoría de la relatividad

4.10.4. La teoría de ideales en anillos noetherianos

4.10.5. Sus trabajos en álgebras no conmutativas

4.10.6. La profesora Emmy Noether

4.10.7. Sobre su trabajo matemático

4.10.8. Reconocimientos.

4.11. Grace Chisholm Young ……………………………… 469

4.11.1. Su vida

4.11.2. Su obra

4.11.3. Primer libro de geometría

4.11.4. Enseñanza de la Geometría: Algunas sugerencias

4.11.5. Conclusiones: Geometría y coeducación

5. Ideas buenas para la clase de Matemáticas ……. 493

5.1. Conseguir un ambiente propicio en el aula …………….. 493

5.1.1 Enseñanza activa

5.1.2 Cooperación

5.1.3 Trabajo en grupo

5.1.4 Humanizar los problemas

5.1.5 Fomentar la expresión verbal

5.1.6 El error en Matemáticas

5.1.7 Tareas para casa y trabajo en clase

5.1.8 Nuevas tecnologías

5.2. Selección adecuada de contenidos ……………………… 509

5.2.1 Conocer la evolución histórica de las Matemáticas

5.2.2 Enseñanza de la Geometría

5.2.3 Estadísticas con la variable género

5.3. Evaluación …………………………………………………..…. 516

6. Análisis de libros de texto …………………….…… 521

6.1. Proyecto curricular y libros de texto ……………………… 521

6.2. Análisis de libros de texto ………………………………….. 525

6.3. Un nuevo análisis ……………………………………….…. 542

6.4. Propuestas de mejora …………………………………….. 550

6.5. Evaluación ………………………………………………….. 557

Referencias ………………………………….……………. 563

Índice …………………………..………………………… 591