

Índice

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

- 1.1. CONCEPTO DE POTENCIA. BASE Y EXPONENTE
- 1.2. EL SISTEMA DE NUMERACIÓN
- 1.3. OPERACIONES ELEMENTALES

2. DIVISIBILIDAD

- 2.1. MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO
- 2.2. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD
- 2.3. OBTENCIÓN DE TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

3. NÚMEROS PRIMOS

- 3.1. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS
- 3.2. LA CRIBA DE ERATÓSTENES
- 3.3. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN FACTORES PRIMOS
- 3.4. MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS
- 3.5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE VARIOS NÚMEROS
- 3.6. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Sistema de numeración griego clásico

α	β	γ	δ	ε	ς	η	θ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ξ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Ilustración: A. Ortega

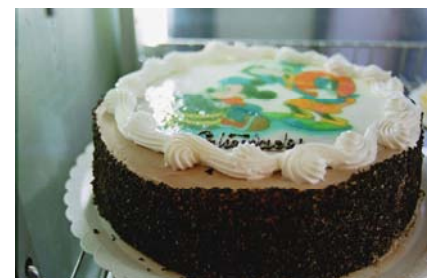


Resumen

Jaime, María y Raquel van a visitar a una amiga. Jaime va cada 2 días, María cada 4 y Raquel solo va un día a la semana. Un día que coincidieron los tres, comentaron que nunca habían comido un pastel tan rico como el que hace su amiga. Ella afirmó: "El próximo día que volváis a coincidir, lo vuelvo a hacer". ¿Cuándo podrán volver a disfrutar del pastel?

En este capítulo aprenderemos a resolver problemas similares a este y profundizaremos en la tabla de multiplicar mediante conceptos como: divisibilidad, factorización o números primos.

Descubrirás algunos de los grandes secretos de los números y nunca te imaginarías que la tabla de multiplicar escondiese tantos misterios ocultos.



Fotografía: Clarisa Rodrigues

1. REPASO DE NÚMEROS NATURALES

1.1. Concepto de potencia. Base y exponente

Ejemplo 1:



✚ María guarda 5 collares en una bolsa, cada 5 bolsas en una caja y cada 5 cajas en un cajón. Tiene 5 cajones con collares, ¿cuántos collares tiene?

Para averiguarlo debes multiplicar $5 \times 5 \times 5 \times 5$ que lo puedes escribir en forma de potencia: 5^4 , que se lee cinco elevado a cuatro.

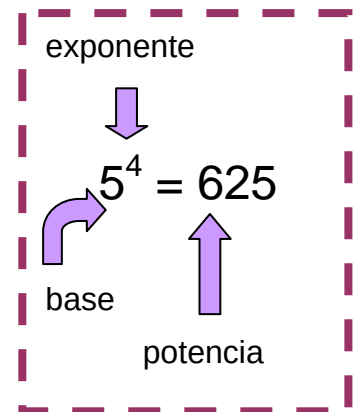
$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625.$$

Recuerda que:

Una **potencia** es una forma de escribir de manera abreviada una multiplicación de factores iguales. La **potencia** a^n de base un número natural a y exponente natural n es un producto de n factores iguales a la base:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \dots n \text{ factores} \dots a \quad (n > 0)$$

El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite es el **exponente**. Al resultado se le llama **potencia**.



Actividades propuestas

- Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

a) 4^2	b) 2^4	c) 10^5	d) 3^3	e) 1^4	f) 1000^2
----------	----------	-----------	----------	----------	-------------
- Calcula en tu cuaderno las siguientes potencias:

a) 3^5	b) 7^4	c) 4^5	d) 9^4	e) 25^2	f) 16^3
----------	----------	----------	----------	-----------	-----------
- Calcula mentalmente las siguientes potencias y escribe el resultado en tu cuaderno:

a) 10^2	b) 10^4	c) 10^5	d) 10^3	e) 10^1	f) 100^2
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	------------

1.2. Los sistemas de numeración

El sistema de numeración decimal

¿Por qué en otros países, aunque se hablen lenguas diferentes, se usan los mismos números?

Esos números, los que nosotros usamos, constituyen un lenguaje muy utilizado y se dice que están expresados en el sistema decimal. Los países árabes también usan el sistema decimal, pero la grafía de sus números es distinta.

El sistema de numeración decimal es el más usado en todo el mundo y en casi todos los ámbitos.

En este sistema el valor de una cifra en un número es diez veces mayor que el de la cifra situada a su derecha y diez veces menor que el valor de la situada a su izquierda. Por eso se dice que es un **sistema posicional**: el valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupe esa cifra.

Actividades resueltas

✚ En el número 4652031 tenemos:

- La cifra de las unidades: el 1.
- Luego la cifra de las decenas: el 3, cuyo valor en el número es 10 veces más que el anterior, luego su valor será: $3 \cdot 10 = 30$.
- En tercer lugar, las centenas: el 0, cuyo valor será el que resulte de multiplicar la cifra situada en tercer lugar por 100 (o por 10^2): $0 \cdot 10^2 = 0$.
- En cuarto lugar las unidades de millar: 2, cuyo valor obtenemos multiplicando por 1000 (o por 10^3) la cifra situada en ese lugar: $2 \cdot 10^3 = 2000$.
- Luego, las decenas de millar: 5 cuyo valor será: $5 \cdot 10^4 = 50000$.
- En sexto lugar, las centenas de millar: 6, cuyo valor se obtiene multiplicando la cifra por 10^5 : $6 \cdot 10^5 = 600000$.
- Y, por último, las unidades de millón: 4, cuyo valor obtenemos multiplicándolo por 10^6 : $4 \cdot 10^6 = 4000000$.

Con esto observamos que el número 4652031 se puede escribir utilizando potencias de 10 de la forma:

$$4652031 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 4 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10 + 1.$$

Actividades propuestas

4. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

- a) 7653 b) 30500 c) 275643 d) 200543.

5. ¿Qué lugar ocupa la cifra 5 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor? a) 508744 b) 65339001 c) 7092157 d) 9745.

6. Razona por qué en un número natural con dos cifras repetidas, éstas no tienen el mismo valor.

Números romanos

Otro sistema de numeración que todavía se usa es el de los **números romanos**. ¿Te acuerdas de sus equivalencias?

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

Si a la derecha de una cifra romana se escribe otra igual o menor, el valor de ésta se suma a la anterior: VII = 7, XXI = 21, LXVII = 67.

La cifra I colocada delante de la V o X, resta 1 unidad: IV = 4.

La cifra X precediendo a la L o a la C le resta 10 unidades: XC = 90.

La cifra C delante de la D o de M resta 100 unidades: CD = 400.

Si un símbolo aparece restando entonces sólo puede aparecer a su derecha un único símbolo de mayor valor.

En ningún número se puede poner una misma letra más de tres veces seguidas. En la antigüedad se ve a veces la I o la X hasta cuatro veces seguidas.

La V, la L y la D no pueden duplicarse porque otras letras (X, C y M) representan su valor duplicado.

Si entre dos cifras cualesquiera existe otra menor, ésta restará su valor a la siguiente:

XIX = 19; CXL = 140.

Las cifras V, D y L no se pueden colocar para restar.

La raya horizontal multiplica por 1000: \overline{M} = 1 000 000.

Ejemplo:

- ✚ El número MDL equivale en el sistema decimal al 1550. Si ahora le añadimos un V, es decir: MDLV, el número es el 1555, pero las cifras siguen teniendo el mismo valor en ambos números.

Actividades propuestas

7. Escribe en números romanos el año 2017.
8. Escribe en números romanos tres fechas que te resulten de interés, como por ejemplo, tu año de nacimiento.
9. Escribe en números romanos los años importantes para la Historia de la Humanidad siguientes:
 - a) 1492: Cristóbal Colón llega a la isla de Guanahani.
 - b) 1789: Revolución Francesa.
 - c) 1945: Bomba atómica sobre Hiroshima.
 - d) 1969: Las universidades norteamericanas de UCLA y Standford son capaces de transmitir entre sí un mensaje a través de la red Arpanet. (Nacimiento de Internet).



Otros sistemas de numeración

Uno de los primeros sistemas de numeración que se utilizó fue el de **base 12** hace ya más de 5000 años. Todavía se usa cuando contamos objetos por docenas o con algunas mediciones del tiempo (como los meses de un año).



Cifras del sistema binario

El sistema de **base 2** o sistema binario también es muy utilizado hoy en día, sobre todo en los ordenadores y calculadoras debido a su simplicidad, ya que para escribir números en este sistema solo se necesitan dos cifras distintas: el 0 y el 1.

Actividades propuestas

10. ¿Podrías escribir los números del 1 al 10 en el sistema binario?

Números naturales

Recuerda que

Los números **naturales** son los que nos sirven para contar y son infinitos:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}.$$

Hay autores que no consideran que el cero sea un número natural. Ya sabes que entró en nuestra historia bastante tarde. Su importancia es enorme como has visto en nuestro sistema decimal.

1.2. Operaciones elementales

Suma

La **suma** o **adición** de números naturales verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $a + b = b + a$.

Ejemplo: $13+19 = 19+13 = 32$.

- Asociativa $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ejemplo: $(15+7)+23 = 22+23 = 45$; $15+(7+23) = 15+30 = 45$.

Multiplicación de números naturales

Como ya sabes, **multiplicar dos números naturales** es equivalente a sumar uno de ellos consigo mismo tantas veces como indica el otro.

Por ejemplo:

✚ Hacer $6 \cdot 5$ es lo mismo que hacer $6 + 6 + 6 + 6 + 6$.

Recuerda que:

Las palabras “**multiplicación**” y “**producto**” significan lo mismo, es decir, hacen referencia a la misma operación.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

Si llamamos a , b y c a tres números naturales, se cumple la siguiente propiedad:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Por ejemplo:

✚ Sustituyendo las letras a por 2, b por 5 y c por 7, tenemos que:

$$2 \cdot (5 + 7) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7.$$

Nota

Recuerda la **propiedad conmutativa** de la multiplicación:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Ejemplo:

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2.$$

Esta propiedad también se cumple para la resta.

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Considerando otra vez, a , b y c números naturales cualesquiera, se cumple que:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Estas propiedades son muy útiles para hacer cálculos mentales rápidos descomponiendo números:

✚ Calcular $15 \cdot 23$ mentalmente es complicado, pero si hacemos:

$$15 \cdot 23 = 15 \cdot (20 + 3) = 15 \cdot 20 + 15 \cdot 3 \text{ resulta más sencillo.}$$

Si leemos la igualdad de derecha a izquierda, es decir:

$15 \cdot 20 + 15 \cdot 3 = 15 \cdot (20 + 3)$ se suele decir que *hemos sacado factor común el número 15*, pero realmente estamos hablando otra vez de la propiedad distributiva.

Generalizando:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ es lo mismo que: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, y utilizando la propiedad conmutativa:

$$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a.$$

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ es lo mismo que: $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$, y utilizando la propiedad conmutativa:

$$b \cdot a - c \cdot a = (b - c) \cdot a.$$

Ejemplos:

- $870 \cdot 4 - 870 \cdot 3 = 870 \cdot (4 - 3) = 870 \cdot 1 = 870.$
- $450 \cdot 2 + 3 \cdot 450 = (2 + 3) \cdot 450 = 5 \cdot 450 = 2250.$
- $45 \cdot 6 - 45 \cdot 5 = 45 \cdot (6 - 5) = 45 \cdot 1 = 45.$

División de números naturales**Ejemplo**

- En la cafetería de mi escuela las mesas son de 6 personas y en la clase de primero de GES hay 33 alumnos, ¿cuántas mesas ocuparán?

Vemos que habrá 5 mesas ocupadas y sobrarán 3 alumnos que han de sentarse en otra mesa:

$$\begin{array}{r} 33 \overline{) 6} \\ \underline{3} \\ 3 \end{array}$$

Cada uno de los números que intervienen en la división se llaman:

33 → Dividendo 6 → Divisor 5 → Cociente 3 → Resto

Además, como ya sabes, se cumple que: $33 = 6 \cdot 5 + 3$

Esta propiedad se cumple siempre para cualquier división. En general:

$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ \underline{ r} \\ C \end{array}$$

Se verifica que:

$$D = d \cdot c + r.$$

Ejemplo:

- El cociente entre 3658 y 65 es 56 y el resto 18. Escribe la relación que existe entre estos cuatro valores.

$$3658 = 65 \cdot 56 + 18.$$

Ejemplos:

- $25/5$, $25:5$ y $\frac{25}{5}$ significan lo mismo: la división o el cociente de 25 entre 5.

La expresión:

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 5} \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$$

También significa lo mismo, pero en Secundaria y Bachillerato apenas se utiliza, así que conviene que te familiarices cuanto antes con las anteriores.

Nota:

La palabra “**cociente**” significa el resultado de hacer una “**división**”
Los símbolos utilizados para representarlas son:

$/$, $:$, y $\frac{\square}{\square}$ (la fracción)

Divisiones con calculadora

Ya sabemos que dividir con calculadora es muy fácil, pero ¿qué hacemos si nos piden el resto de la división y solo podemos usar la calculadora?

Es muy sencillo. Veámoslo con un ejemplo:

Si hacemos:

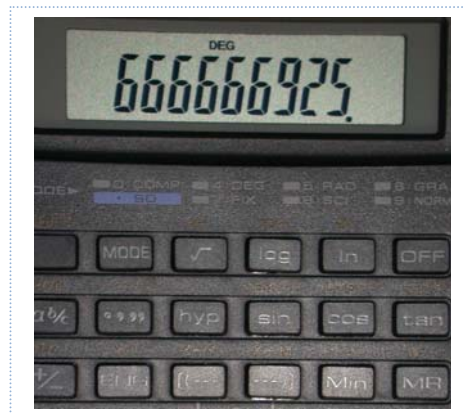
$$325 \div 5 = 65$$

Pero si hacemos:

$$325 \div 15 = 21.6666666667$$

En el primer caso está claro que el cociente es 65 y el resto es 0, pero ¿y en el segundo caso?

Claramente el cociente es 21. Ahora para calcular el resto tenemos que multiplicar este cociente por el divisor y restárselo al dividendo. El resto será: $325 - (15 \cdot 21) = 10$.



Jerarquía de las operaciones

✚ En la expresión: $3 \cdot 4 + 2$, ¿qué operación realizarías antes, la multiplicación o la suma?

Existe una prioridad en las operaciones donde no existen paréntesis y es que la multiplicación y la división siempre se realizan antes que las sumas y las restas.

Por tanto, la operación anterior sería: $3 \cdot 4 + 2 = 12 + 2 = 14$.

En general:

En operaciones con paréntesis, primero hay que realizar las que están entre **paréntesis** y luego las demás.

En operaciones sin paréntesis, primero se efectúan las **potencias** y **raíces**, a continuación las **multiplicaciones** y **divisiones** siempre de izquierda a derecha, y luego, las **sumas** y **restas** también de izquierda a derecha.

Ejemplo:

✚ Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(15 + 10) \cdot 3 = 25 \cdot 3 = 75.$$

$$15 + 10 \cdot 3 = 15 + 30 = 45.$$

✚ Observa la diferencia entre estas dos operaciones:

$$(2 + 3)^2 \cdot 10/5 = 5^2 \cdot 2 = 50.$$

$$2 + 3^2 \cdot 10/5 = 2 + 9 \cdot 2 = 2 + 18 = 20.$$

Notas

- a) Es importante escribir los paréntesis solo cuando sea necesario. Por ejemplo, en la expresión: $(21 \cdot 2) + 30$ resulta innecesario, ya que por la prioridad en las operaciones, ya sabemos que tenemos que efectuar el producto antes que la suma.
- b) Si realizamos una operación en la calculadora sin paréntesis ésta ya respeta la jerarquía en las operaciones, por lo que si la operación necesitase paréntesis, hemos de incluirlos en la calculadora.

Actividades propuestas

11. Saca factor común y calcula mentalmente:

a) $23 \cdot 4 - 23 \cdot 3$ b) $540 \cdot 5 + 540 \cdot 2$ c) $55 \cdot 13 - 55 \cdot 3$ d) $600 \cdot 33 - 600 \cdot 3$.

12. Construye dos números con las cifras 4, 5 y 6 tal que su producto sea lo más grande posible.

13. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad $D = d \cdot c + r$.

a) $6738 : 456$ b) $34540 : 30$ c) $240035 : 981$ d) $397 : 45$.

14. ¿Recuerdas la definición de división exacta? ¿Qué ocurre en la igualdad anterior si la división es exacta?

15. Los alumnos de pintura de la escuela deciden celebrar sus premios en la Gala de la Semana Cultural yendo de viaje con su profesor. Sabiendo que el grupo está formado por 20 alumnos, el viaje cuesta a cada uno 150 €, la noche en habitación individual 50 € y que han pagado 7330 € en total, ¿cuántos días han estado de viaje?

2. DIVISIBILIDAD

2.1. Múltiplos y divisores de un número

Múltiplos de un número

¿Recuerdas muy bien las tablas de multiplicar de todos los números?

✚ Escribe en tu cuaderno la del 5 y la del 7.

Sin darte cuenta, has escrito algunos de los múltiplos de 5 y de 7.

Se definen los **múltiplos** de un número natural n como los números que resultan de multiplicar ese número n por todos los números naturales.

Ejemplo:

✚ La tabla del 5 que has escrito antes está formada por los valores:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90...

Todos ellos son múltiplos de 5.

La notación matemática de este concepto es: $\dot{5}$.

Es decir: $\dot{5} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90\dots\}$.

Ejemplo:

✚ Cuenta los múltiplos de 5 que has escrito antes. ¿Es posible hacerlo?

Efectivamente, los múltiplos que tiene cada número natural son una cantidad infinita.

Actividades propuestas

16. Calcula los siete primeros múltiplos de 8 y de 9.

17. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 12?

12, 13, 22, 24, 25, 100, 112, 142, 144.

18. Halla los múltiplos de 11 comprendidos entre 12 y 90.

Divisores de un número

Un número natural a es **divisor** de otro número natural b cuando al dividir b entre a , el resto es 0.

Nota

Todo número natural tiene siempre como divisor a 1 y a sí mismo.

Ejemplo:

- + 2 es divisor de 8 porque al dividir 8 entre 2, el resto es 0.
- + 10 es divisor de 20 porque al dividir 20 entre 10, el resto es 0.
- + 6 es divisor de 36 porque al dividir 36 entre 6, el resto es 0.
- + 1 es divisor de 18 porque al dividir 18 entre 1, el resto es 0.
- + 18 es divisor de 18 porque al dividir 18 entre 18, el resto es 0

Si a es **divisor** de b , entonces también se dice que b es **divisible** por a .

Ejemplo:

- + 8 es divisible por 2 porque 2 es divisor de 8, es decir, al dividir 8 entre 2, el resto es 0.
- + 20 es divisible por 10 porque 10 es divisor de 20, es decir al dividir 20 entre 10, el resto es 0.
- + 36 es divisible por 6 porque 6 es divisor de 36, es decir, al dividir 36 entre 6, el resto es 0.

Notas

- a) Como habrás deducido, las relaciones ser *múltiplo* y ser *divisor* son relaciones inversas.
- b) **No confundas** las expresiones ser múltiplo, ser divisor y ser divisible. Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo:

- + De la igualdad: $5 \cdot 3 = 15$, podemos deducir lo siguiente:
 - 5 y 3 son divisores de 15.
 - 15 es múltiplo de 3 y de 5.
 - 15 es divisible por 3 y por 5.

Actividades propuestas

19. A partir de la igualdad: $6 \cdot 4 = 24$, escribe las relaciones que existen entre estos tres números.
20. Escribe frases usando las expresiones: “ser múltiplo de”, “ser divisor de “ y “ser divisible por” y los números 10, 5 y 35.

2.2. Criterios de divisibilidad

Para ver si un número natural es divisible por otro número natural, basta con dividirlos y ver si el resto es 0. Pero cuando los números son grandes, las operaciones pueden resultar complicadas.

La tarea se simplifica si tenemos en cuenta los llamados **criterios de divisibilidad** que nos permiten saber si un número es divisible por otro sin necesidad de efectuar la división.

Criterio de divisibilidad por 2

Un número natural es divisible por 2 cuando su última cifra es 0 o cifra par.

Ejemplo:

- Los números: 312, 50, 346, 500, 780, 988 son divisibles por 2.

Criterio de divisibilidad por 3

Un número natural es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ejemplo:

- El número 231 es divisible por 3 ya que $2 + 3 + 1 = 6$ que es múltiplo de 3.
- El número 1002 es divisible por 3 ya que $1 + 0 + 0 + 2 = 3$.

Si al sumar las cifras obtienes un número aún grande y no sabes si es o no múltiplo de 3, puedes volver a aplicar el mismo sistema, solo tienes que volver a sumar todas sus cifras:

- El número 69 es divisible por 3 ya que $6 + 9 = 15$, y 15 es divisible por 3, pues $1 + 5 = 6$ que es múltiplo de 3. Por tanto, 6, 15 y 69 son múltiplos de 3.
- El número 78596778696 es divisible por 3 ya que $7 + 8 + 5 + 9 + 6 + 7 + 7 + 8 + 6 + 9 + 6 = 78$, y 78 es divisible por 3 pues $7 + 8 = 15$, y 15 lo es.

Criterio de divisibilidad por 4

Un número natural es divisible por 4 si el número formado por las dos últimas cifras del número considerado es múltiplo de 4.

Ejemplo:

- El número 3628 es divisible por 4 ya que termina en 28, que es múltiplo de 4.

Criterio de divisibilidad por 5

Un número natural es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplo:

Los números 4875 y 34590 son divisibles por 5.

Criterio de divisibilidad por 6

Un número natural es divisible por 6 cuando lo es a la vez por 2 y por 3.

Ejemplo:

El número 7332 es divisible por 6 ya que:

- Lo es por 2 por ser par.
- Lo es por 3, ya que sus cifras suman 15 que es múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por 9

Un número natural es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras es 9 o múltiplo de 9.

Ejemplo:

El número 6012 es divisible por 9 ya que: $6 + 0 + 1 + 2 = 9$.

El número 3903 no es divisible por 9 ya que: $3 + 9 + 0 + 3 = 15$ que no es múltiplo de 9.

Criterio de divisibilidad por 10

Un número natural es divisible por 10 cuando termina en 0.

Ejemplo:

El número 59870 es divisible por 10.

Nota

Observa que los números que son divisibles por 10 lo son por 2 y por 5 y viceversa.

Criterio de divisibilidad por 11

Un número natural es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugar impar y la suma de las cifras que ocupan lugar par da 0 o múltiplo de 11.

Ejemplo:

El número 80496 es divisible por 11 ya que: $(8 + 4 + 6) - (0 + 9) = 11$.

Actividades propuestas

21. Di cuáles de los siguientes números son múltiplos de 2:

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4520, 3411, 46295, 16392, 385500.

Los números elegidos, ¿coinciden con los divisores de 2? ¿Y con los que son divisibles por 2?

- 22.** Escribe cuatro números que sean divisibles por 10 y por 3 a la vez.
- 23.** Sustituye A por un valor apropiado para que:
- 24 A75 sea múltiplo de 3.
 - 1107 A sea múltiplo de 6.
 - 5 A439 sea múltiplo de 11.
- 24.** ¿Todos los números divisibles por 3 los son por 9? ¿Y al revés? Razona la respuesta.
- 25.** ¿Sabrías deducir un criterio de divisibilidad por 15? Pon un ejemplo.
- 26.** Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
2567	Divisible por 2	
498650	Divisible por 5	
98370034	Divisible por 3	
78337650	Divisible por 6	
984486728	Divisible por 4	
23009845	Divisible por 11	

2.3. Obtención de todos los divisores de un número

En principio, para hallar los divisores naturales de un número natural N , lo vamos dividiendo sucesivamente entre 1, 2, 3, 4, ..., N . De esta manera, los divisores de N serán aquellos números que lo dividan exactamente, es decir den de resto 0.

Ejemplo:

- ✚ Si queremos hallar los divisores de 18 lo tendríamos que dividir entre 1, 2, 3, 4, 5, ..., 18 y ver en qué casos el resto es 0. Puedes comprobar que los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

Lo que ocurre es que esta forma de calcular los divisores de un número se complica mucho cuando el número es grande. Por lo que, si utilizamos los criterios de divisibilidad que hemos aprendido, sólo tendremos que hacer las divisiones por los números por los que N sea divisible.

Si la división es exacta, $N : d = c$, entonces el divisor (d) y el cociente (c) son divisores de N , lo que nos permite acortar la búsqueda de divisores, pues de cada división exacta obtenemos dos divisores.

Terminaremos de buscar más divisores cuando lleguemos a una división en la que el cociente sea menor o igual que el divisor.

Actividades resueltas

- ✚ Veamos, como ejemplo, el cálculo de los divisores del número 54.

Ya sabemos que todo número tiene como divisores a la unidad y a él mismo 1 y 54.

Es divisible por 2. (Termina en cifra par) $\rightarrow 54 : 2 = 27 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 2 y 27.

Es divisible por 3. ($5 + 4 = 9$, múltiplo de 3) $\rightarrow 54 : 3 = 18 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 3 y 18.

Es divisible por 6. (Al ser divisible por 2 y 3) $\rightarrow 54 : 6 = 9 \rightarrow$ Ya tenemos dos divisores: 6 y 9.

Es divisible por 9. ($5 + 4 = 9$, múltiplo de 9) $\rightarrow 54 : 9 = 6$.

Como el cociente 6 es menor que el divisor 9, ya hemos terminado. 9 y 6 (Repetidos).

Por tanto, los divisores de 54 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Actividades propuestas

27. Calcula los múltiplos de 25 comprendidos entre 1 y 200.

28. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| a) 40 es múltiplo de 10. | b) 2 es divisor de 10. |
| c) 4 es múltiplo de 8. | d) 55 es divisible por 11. |
| e) 90 es divisor de 9. | f) 3 es divisible por 45. |

29. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 9 y por 10 a la vez: $256x81y$.

30. ¿Qué único número con tres cifras iguales es divisible por 2 y por 9 a la vez?

31. Calcula todos los divisores de los siguientes números: a) 65 b) 33 c) 60 d) 75 e) 100 f) 150.

3. NÚMEROS PRIMOS

3.1. Números primos y compuestos

¿Cuáles son los divisores de 2? ¿Y del 3? ¿Y del 5? ¿Y del 7? ¿Encuentras alguna similitud entre ellos? Pues sí, los divisores de estos números son el 1 y ellos mismos. A estos números se les llama primos.

Un **número primo** es aquel número natural que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.

Se llama **número compuesto** a aquel número natural que tiene más de dos divisores.

Nota

El 1 se considera que no es primo ni compuesto, ya que no verifica ninguna de las dos definiciones, no tiene dos divisores y tampoco más de dos divisores.

Ejemplo:

- + Los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 son los diez primeros números primos.
- + Números como: 22, 45, 60, 98, 345 o 39867657 son compuestos.

Actividades propuestas

32. Continúa la lista de números primos del ejemplo 20 con 10 más.

33. ¿Cuánto números primos crees que hay? ¿Crees que se acaban en un momento dado o que son infinitos?

3.2. La criba de Eratóstenes

La **criba de Eratóstenes** es un algoritmo (es decir, una secuencia de instrucciones) que permite hallar todos los números primos menores que un número natural dado.

Nosotros lo haremos para los menores o iguales que 100, es decir, vamos a averiguar cuáles son los números primos hasta el 100.

El algoritmo consta de los siguientes pasos:

- a) Construimos una lista con los números del 1 al 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- b) Inicialmente se tacha el 1, porque sabemos que no es primo.
 c) El primer número que quede sin tachar ha de ser primo. Se marca y se tachan sus múltiplos.
 d) Se repite de nuevo el paso d) hasta que se terminen los números.

Por tanto:

- Dejamos sin tachar el siguiente número, que es el 2, que por lo tanto es primo, y tachamos todos los múltiplos de 2, quedando la lista como sigue:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Conservamos el 3 porque al ser el primero que aparece sin tachar, sabemos que es primo, pero eliminamos todos los múltiplos de 3, es decir, tachamos uno de cada tres números. Nos queda una tabla así:

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- No necesitamos tachar el 4 porque ya está tachado, entonces vamos al 5 que es el siguiente número primo, por tanto no lo tachamos y eliminamos todos los múltiplos de 5 (algunos de los cuales ya estaban tachados)

4	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- Y luego seguimos de forma análoga con el 7 y tachando todos los múltiplos de 7 que no estén tachados: $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$...
- Después el siguiente número no tachado es el 11 y tachamos los múltiplos de 11. Pero $11^2 = 121$, luego ya habremos tachado todos los múltiplos de 11 menores que 100.
- Después nos encontramos con el 13 y tacharíamos los múltiplos de 13, si la tabla fuera mayor.

De forma análoga vamos localizando los siguientes primos y tachando sus múltiplos hasta llegar a una tabla de la forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números que no quedan tachados en ningún paso es porque no son múltiplos de ningún número anterior (señalados aquí con una circunferencia).

En realidad, lo que *Eratóstenes* estaba haciendo era construir una especie de “filtro” por el cual, al hacer pasar a todos los números, sólo quedaban los “primos”.

Por tanto, los números primos que hay entre los primeros cien números, son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Actividades propuestas

34. ¿Te atreverías a repetir la criba de Eratóstenes, pero hasta el 150?
35. Busca los distintos significados de las palabras “criba” y “algoritmo”, ¿en qué más contextos los puedes utilizar?

3.3. Descomposición de un número natural en factores primos

Sabemos que un **número primo** solo tiene dos divisores: él mismo y el 1.

Así que si quisiéramos expresar un número primo como producto de otros dos, los únicos factores serían el 1 y el propio número.

Por ejemplo, si quiero expresar 13 como producto de dos números, sería:

$$13 = 1 \cdot 13 \text{ o también } 13 = 13 \cdot 1.$$

Sin embargo, si el número es **compuesto**, podrá expresarse como producto de otros números que no son ni el 1 ni él mismo.

Vamos a aprender a descomponer un número natural en factores primos, lo que significa expresar un número natural como producto de otros números pero han de ser primos.

Descomponer un número natural en factores primos es expresar dicho número como un producto, donde todos sus factores son números primos.

Para descomponer el número 20 podríamos hacer: $20 = 4 \cdot 5$, pero la descomposición en factores primos no sería correcta porque el 4 no es un número primo.

Su descomposición es $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, que se expresa como $20 = 2^2 \cdot 5$.

Para descomponer un número compuesto (pues, como hemos visto, descomponer un número primo no tiene ningún interés ni dificultad) en sus factores primos, se debe seguir el siguiente procedimiento:

- Dividir el número natural dado por el menor primo posible utilizando para ello los criterios de divisibilidad si es posible, o realizando la división si no hay otro remedio.
- Realizar la división, y si el cociente es divisor de dicho número primo, realizar la división.
- Si el cociente no es divisor de dicho número primo, buscar el menor número primo posible que sea divisor, recurriendo nuevamente a los criterios de divisibilidad o continuar dividiendo.
- Seguir con el procedimiento hasta obtener el cociente igual a uno.

Notas

- Para realizar las divisiones utilizaremos una barra vertical, a la derecha escribimos los divisores primos y a la izquierda los cocientes.
- Los factores primos en la expresión del número ya factorizado se suelen escribir en orden creciente.
- Cuando ya tengamos práctica, y con números no demasiado grandes, podemos descomponer un número en producto de dos y luego cada uno de ellos en otros productos hasta que todos los factores obtenidos sean primos.

Por ejemplo: $60 = 30 \cdot 2$.

Como $30 = 15 \cdot 2$ y $15 = 3 \cdot 5$, tenemos que: $60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ y por tanto, su descomposición es:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Actividades resueltas

<p>1. Vamos a realizar la descomposición en factores primos del número 90: Como 90 es múltiplo de 2, lo dividimos: $90 : 2 = 45$. Como 45 no es múltiplo de 2, buscamos el menor primo posible por el que se pueda dividir, que es 3, lo dividimos: $45 : 3 = 15$. Como 15 se puede volver a dividir entre 3, tenemos: $15 : 3 = 5$. Por tanto: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Esto se suele realizar como se señala en la nota 1 de la siguiente forma:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>90</td><td>2</td></tr> <tr><td>45</td><td>3</td></tr> <tr><td>15</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td></td></tr> </table>	90	2	45	3	15	3	5	5	1		<p>2. Vamos a realizar otra factorización para el número 2550:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>2550</td><td>2</td></tr> <tr><td>1260</td><td>2</td></tr> <tr><td>630</td><td>2</td></tr> <tr><td>315</td><td>3</td></tr> <tr><td>105</td><td>3</td></tr> <tr><td>35</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td></td></tr> </table> <p>Por tanto: $2550 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.</p>	2550	2	1260	2	630	2	315	3	105	3	35	5	7	7	1	
90	2																										
45	3																										
15	3																										
5	5																										
1																											
2550	2																										
1260	2																										
630	2																										
315	3																										
105	3																										
35	5																										
7	7																										
1																											

Actividades propuestas

36. Descompón en factores primos los siguientes números:

- a) 40 b) 56 c) 75 d) 90.

37. Descompón en factores primos los siguientes números:

- a) 110 b) 124 c) 290 d) 366.

38. Descompón en factores primos los siguientes números:

- a) 1290 b) 3855 c) 4520 d) 5342.

39. Si descomponemos en factores primos los números: 10, 100, 1000, 10000 y 100000, ¿qué es lo que observas? ¿Lo podrías hacer de forma más rápida sin necesidad de usar el método general?

40. ¿Qué ocurre al descomponer en factores primos los números 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256? ¿Podrías continuar tú la serie con 5 números más?

3.4. Máximo común divisor de varios números

Ejemplo:

✚ Vamos a calcular los divisores de los números 24 y 36:

Divisores de 24 → 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Divisores de 36 → 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.

¿Cuáles son los mayores divisores comunes a ambos? Los divisores comunes a ambos son varios: 1, 2, 3, 4, 6 y 12, pero el mayor de ellos es 12 y se dice que 12 es el **máximo común divisor** de 24 y de 36.

Se llama **máximo común divisor** de varios números naturales al mayor de los divisores comunes a todos ellos y se escribe **M.C.D.**

En el ejemplo anterior, escribiríamos: $M.C.D. (24, 36) = 12$.

En principio, parece que hallar el M.C.D. no es muy complicado, solo tenemos que calcular los divisores de los números, considerar los comunes y tomar el mayor de ellos. Pero este método sólo tiene sentido con pocos números y pequeños, ya que con muchos números o con números grandes, el cálculo se complica mucho.

Por eso, vamos a calcular el máximo común divisor utilizando una serie de pasos, mediante los cuales el cálculo se simplifica muchísimo:

Cálculo del M.C.D.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados al menor exponente.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D.

Actividades resueltas

✚ Vamos a calcular el máximo común divisor de los números: 72, 90 y 120.

1. Factorizamos cada número:

$$\begin{aligned} 72 &= 2^3 \cdot 3^2. \\ 90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5. \\ 120 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5. \end{aligned}$$

2. Tomamos los factores comunes a todos los números elevados al menor exponente: Son 2 y 3.
3. El producto de los factores considerados en el paso 2 es el M.C.D. Es decir:

$$M.C.D. (72, 90, 120) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Nota

Dos números naturales siempre tienen al menos un divisor en común, el 1. Si ese es el M.C.D. entonces decimos que esos números son **primos entre sí**.

Actividades propuestas

41. Calcula el M.C.D. de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45 b) 120 y 55 c) 34 y 66 d) 320 y 80.

42. Calcula el M.C.D. de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22 b) 66, 45 y 10 c) 75, 15 y 20 d) 82, 44 y 16.

3.5. Mínimo común múltiplo de varios números

El **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el menor de los múltiplos que tienen en común, y se escribe **m.c.m.**

Actividades resueltas

Igual que con el M.C.D., se puede calcular el mínimo común múltiplo aplicando la definición que acabamos de ver. Lo que ocurre es que se trata de una forma muy “rudimentaria” y que se complica mucho para números grandes.

Vamos a calcular m.c.m. (10, 15) aplicando esta definición:

Múltiplos de 10 → 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...

Múltiplos de 15 → 15, 30, 45, 60, 75, 90, ...

Como vemos, múltiplos comunes a ambos son: 30, 60, 90, ... pero el menor de ellos es el 30. Por tanto:

$$\text{m.c.m. (10, 15)} = 30.$$

Vamos a ver ahora los pasos a realizar para simplificar este cálculo y hacerlo más mecánico:

Cálculo del m.c.m.

1. Factorizamos los números.
2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.
3. El producto de esos factores del paso anterior es el m.c.m.

Actividades resueltas

✚ Veamos cómo calcular el mínimo común múltiplo de 16, 24, 40 siguiendo estos pasos:

1. Factorizamos los números:

$$16 = 2^4.$$

$$24 = 2^3 \cdot 3.$$

$$40 = 2^3 \cdot 5.$$

2. Tomamos los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente:

En nuestro caso: 2^4 , 3 y 5.

3. Multiplicando estos factores tenemos que:

$$\text{m.c.m. (16, 24, 40)} = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240.$$

Actividades propuestas

43. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

a) 60 y 45

b) 120 y 55

c) 34 y 66

d) 320 y 80.

44. Calcula el m.c.m. de los siguientes números:

a) 30, 12 y 22

b) 66, 45 y 10

c) 75, 15 y 20

d) 82, 44 y 16.

Problemas

Pero, además, el cálculo del M.C.D. y del m.c.m. es muy útil para resolver **problemas de la vida cotidiana**.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo:

- ✚ Una dependienta de una tienda de regalos tiene un rollo de lazo rojo de 15 m y uno azul de 20 m. Como para envolver cada regalo utiliza siempre trozos de 1 metro, y las quiere cortar en trozos de la misma longitud para tenerlas preparadas para hacer empaquetar cajas de modo que no sobre nada en los rollos. ¿Cuál es la longitud máxima que puede cortar cada rollo para hacer los paquetes?

Estamos buscando un número natural que sea divisor de 15 y de 20 a la vez. De los números que cumplan esto, escogeremos el mayor.

Esto es, precisamente, el M.C.D.:

$$\text{M.C.D. (15, 20)} = 5$$

Por tanto, la longitud de cada trozo de lazo para los paquetes será de 5 m.

Ejemplo:

- ✚ El padre de Ana toma unas pastillas para el corazón cada 8 horas y otras para la circulación cada 12 horas.

Acaba de tomar los dos medicamentos a la vez.

¿Dentro de cuantas horas volverá a tomárselos a la vez?

Estamos buscando un número de horas que será mayor o igual a 12, y múltiplo de 8 y de 12 a la vez. De todos los números que lo cumplan, nos interesa el más pequeño. Es decir, tenemos que calcular:

$$\text{m.c.m. (8, 12)} = 24.$$

Por tanto, dentro de 24 horas se tomará ambos medicamentos a la vez.

Actividades propuestas

45. María y Paula tienen 25 cuentas blancas, 15 cuentas azules y 90 cuentas rojas. Quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna cuenta.
 - a) ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
 - b) ¿Qué número de cuentas de cada color tendrá cada collar?
46. Un autobús pasa por una parada cada 18 minutos, otro cada 25 minutos y un tercer autobús cada 36 minutos. Si a las 9 de la mañana han pasado en ese lugar los tres autobuses a la vez, ¿a qué hora vuelven a coincidir?
47. Se compran en una florería 24 rosas y 36 claveles. ¿Cuál es el número de centros de mesa máximo que se pueden elaborar con rosas y claveles sin que sobren flores? ¿Cuántas rosas y claveles se colocan en cada centro de mesa?
48. Raúl tiene varios avisos en su móvil: uno que da una señal cada 60 minutos, otro que da una señal cada 150 minutos y un tercero que da una señal cada 360 minutos. Si a las 10 de la mañana las 3 señales de aviso han coincidido.
 - a) ¿Cuántas horas como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?
 - b) ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?
49. ¿Cuál será la menor cantidad de caramelos que se puede repartir en partes iguales entre grupos de 20, 30, o 60 niños? Determina en cada caso cuántos caramelos les toca a cada niño.

CURIOSIDADES. REVISTA

¿A qué pensabas que los números eran solo eso, pues números?

Pues no, hay **números perfectos, números amigos, ¡¡ hasta números gemelos!!**

Números perfectos

Son **números perfectos** los que son iguales a la suma de sus divisores, excepto él mismo.

El más pequeño es el 6: $6 = 1 + 2 + 3$.

El siguiente es el 28: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Después del 28, no aparece ningún número perfecto hasta el 496, el cuarto número perfecto es el 8.128, el quinto perfecto es 33.550.336. Se observa que cada número perfecto es mucho mayor que el anterior. ¡¡Qué curioso!!

¿Habrá alguna fórmula para obtener números perfectos?

Pues sí, la descubrió Euclides y es la siguiente:

$$2^{n-1} \cdot (2^n - 1).$$

Siendo n un número natural y siempre que $(2^n - 1)$ sea primo.

Números amigos

Dos **números amigos** son dos números naturales tales que la suma de los divisores propios de uno de ellos es igual al otro. (Se consideran divisores propios de un número a todos sus divisores excepto él mismo).

Un ejemplo es el par (220, 284), ya que:

Los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284.

Los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220.

Para los pitagóricos los números amigos eran muy especiales, pues les atribuían propiedades casi mágicas.

Números gemelos

Se llaman **números primos gemelos** a los pares de números primos que son impares consecutivos (3 y 5, 11 y 13,...). ¿Puedes encontrar tú alguno más?

Se supone que el número de primos gemelos es infinito, pero está sin demostrar.

Lo que sí se puede demostrar es que existen dos números primos consecutivos cuya diferencia sea tan grande como queramos.

**Números primos en la música y literatura**

- El compositor francés Olivier Messiaen, inspirándose en la naturaleza, utilizó los números primos para crear música no métrica empleando sonidos con duración un número primo para crear ritmos impredecibles.
- *El curioso incidente del perro a medianoche*, de Mark Haddon, describe en primera persona la vida de un joven autista, utiliza únicamente los números primos para numerar los capítulos.
- *La soledad de los números primos*, novela escrita por Paolo Giordano, ganó el premio Strega en 2008.



¿Quién era Eratóstenes el de la famosa criba que estudiamos antes?

Eratóstenes nació en Cyrene (ahora Libia), en el norte de Africa. Vivió entre los años 275 y 195 antes de Cristo.

Por varias décadas, fue el director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Fue una de las personas más reconocidas de la época, pero lamentablemente sólo pocos fragmentos de lo que escribió sobrevivieron en el tiempo.

Finalmente, murió en una huelga voluntaria de hambre, inducido por la ceguera que lo desesperaba.

Aún así, Eratóstenes se hizo famoso por dos descubrimientos:

- Por la **medición increíblemente precisa que hizo del diámetro de la Tierra.**
- Por haber fabricado una **criba**, o un filtro, para descubrir todos los números primos.

¿QUÉ RELACIÓN TIENEN EL ESPIONAJE CON LA EVOLUCIÓN DE ALGUNOS INSECTOS?

La relación entre ambos son los **números primos**.

La teoría de los números primos tiene aplicación en la **criptografía**, ciencia que estudia formas de cifrar mensajes secretos que solo puedan ser descifrados por el receptor, pero por nadie más. El proceso de encriptar requiere el uso de una clave secreta y para descifrar el mensaje, normalmente, al receptor solo le hace falta aplicar la clave al revés.

Pero lo ideal sería tener una forma para ponerlo en clave fácil mientras que sea el descifrado difícil. Esto se logra utilizando números primos muy grandes, de 80 cifras o más.

Hoy en día la criptografía tiene gran importancia para las comunicaciones entre los gobiernos, compras por Internet o llamadas por teléfono móvil.

En 1996 cientos de miles de **cigarras** nacieron en EEUU. Se reprodujeron y murieron un mes después de haber esparcido sus huevos. Hoy, 17 años después, lo están haciendo de nuevo. Esta especie de cigarra aparece sólo cada 13 o 17 años. Sus huevos permanecen bajo tierra durante todo este tiempo. En breve desaparecerán hasta su próxima visita en el año 2030.

¿13 y 17 años? ¿Tendrá algo que ver que sean números primos?

Si las cigarras tuvieran un ciclo de, por ejemplo 12 años, un depredador podría tener ciclos de 1, 2, 3, 4, 6 ó 12 años para coincidir con ellas. Con un ciclo de 17, sus opciones se reducen a 17 y a 1. ¿Sabrá la evolución de números primos?



RESUMEN

Concepto	Definición	Ejemplos
El sistema de numeración decimal es posicional	El valor de una cifra en un número depende del lugar que ocupa.	El 1 no tiene el mismo valor en 1845 que en 6351.
Jerarquía de las operaciones	- En las operaciones con paréntesis, primero se realizan los paréntesis. Luego las potencias y raíces, después las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha y por último las sumas y restas.	La operación $2 \cdot 3 + 7$ tiene como resultado 13, no 20, que es lo que resultaría efectuando incorrectamente antes la suma que el producto.
- Divisor - Divisible - Múltiplo	- Si a y b son números naturales, a es divisor de b cuando al dividir b entre a el resto es 0. - Si a y b son números naturales, a es múltiplo de b o a es divisible por b cuando al dividir a entre b el resto es 0.	<ul style="list-style-type: none"> • 2 y 3 son divisores de 6. • 6 es múltiplo de 2 y de 3. • 6 es divisible por 2 y por 3.
Criterios de divisibilidad	Simplifican mucho el cálculo de la descomposición factorial y, en general averiguar cuando un número es divisible por otro.	3742 es divisible por 2. 4980 es divisible por 2 y 5. 2958 es divisible por 3.
Número primo	Es aquel que solo tiene dos divisores: el 1 y él mismo.	23 y 29 son números primos.
Número compuesto	Es aquel que tiene más de dos divisores.	25 y 32 son números compuestos.
Criba de Eratóstenes	Es un algoritmo que permite calcular todos los números primos menor que uno dado.	Los primos menores que 20 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19
Descomponer un número en factores primos	Consiste en expresarlo como producto de números primos.	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $18 = 2 \cdot 3^2$ $12 = 2^2 \cdot 3$
Mínimo común múltiplo de varios números	Es el menor de los múltiplos que tienen en común.	m.c.m. (18, 12) = 36.
Máximo común divisor de varios números	Es el mayor de los divisores comunes a todos ellos.	M.C.D. (18, 12) = 6.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS**Repaso números naturales**

1. Escribe mediante potencias de 10 los siguientes números:

- a) 84300 b) 3333 c) 119345 d) 903711.

2. ¿Qué lugar ocupa la cifra 4 en los siguientes números? ¿En cuál de los números tiene mayor valor? ¿Y menor?

- a) 508744 b) 653349001 c) 47092157 d) 9745.

3. Saca factor común y calcula mentalmente:

- a) $28 \cdot 4 - 28 \cdot 3$ b) $30 \cdot 4 + 50 \cdot 2$ c) $66 \cdot 23 - 66 \cdot 13$ d) $700 \cdot 44 - 700 \cdot 4$.

4. Construye dos números con las cifras 6,7 y 8 tal que su producto sea lo más grande posible.

5. Realiza las siguientes divisiones y comprueba con cada una de ellas la propiedad: $D = d \cdot c + r$.

- a) $3844 : 45$ b) $74840 : 30$ c) $983035 : 981$ d) $847 : 45$.

6. Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

- a) $654 : 77$ b) $543 : 7$ c) $8374 : 85$ d) $9485 : 11$ e) $6590 : 41$.

7. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(55 + 12) \cdot 4$ b) $66 \cdot 2 + 10$ c) $55 + 70 \cdot 3 + 11$ d) $330 - 10 \cdot 2 + 82$.

8. Di cuáles de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

- a) $2 \cdot (46 - 16)$ b) $2 \cdot 46 - 16$ c) $2 \cdot 46 - 8 \cdot 16$ d) $2 \cdot (46 + 16)$ e) $2 \cdot 46 + 16$.

9. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

10. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $4 \cdot (44 + 5) - 6 \cdot 2 + 9$ b) $2 \cdot (3 + 11) - (4 + 12)$ c) $(18 - 4) \cdot 5 + 3 \cdot 7 - 13$ d) $5 \cdot 12 + (3 - 2) \cdot 4 - 3 + 4 \cdot 5 - 5$.

11. Inventa un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: $5 + 4 \cdot (6 - 2)$.

12. Halla, utilizando solo la calculadora, los cocientes y los restos de las siguientes divisiones:

- a) $376 : 37$ b) $299 : 7$ c) $3524 : 65$ d) $585 : 22$ e) $2060 : 51$.

13. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(34 + 23) \cdot 5$ b) $87 \cdot 2 + 10$ c) $55 + 65 \cdot 3 + 11$ d) $230 - 100 \cdot 2 + 90$.

14. Di cuáles de las siguientes operaciones tienen el mismo resultado:

- a) $8 \cdot (22 - 12)$ b) $8 \cdot 22 - 12$ c) $8 \cdot 22 - 8 \cdot 12$ d) $8 \cdot (22 + 12)$ e) $8 \cdot 22 + 12$.

15. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

16. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $4 \cdot (65 + 7) - 5 \cdot 2 + 4$ b) $2 \cdot (3 + 9) - (4 + 8)$ c) $(22 - 4) \cdot 5 + 3 \cdot 2 - 1$ d) $5 \cdot 4 + (4 - 2) \cdot 5 - 3 + 4 \cdot 6 - 5$

17. Inventa un problema en el que tengas que realizar la siguiente operación: $(34 + 7) \cdot 8$.

18. Realiza las siguientes operaciones:

a) $23 \cdot 6 + (35 - 13) : 11 - 4 \cdot 7$ b) $48 : 4 \cdot 8 : 2 - (3 \cdot 12) : 6$ c) $357 - 23 \cdot 7 + 280 : 14$ d) $20 \cdot 9 - 11 \cdot 7 + 265 : 53$.

19. Realiza las operaciones del ejercicio anterior en la calculadora y comprueba la importancia de añadir los paréntesis.

20. Sabemos que para el viaje de fin de curso son necesarios 3 autobuses, ya que viajarán 103 alumnos. En los dos primeros autobuses viajan el mismo número de estudiantes y en el tercero un alumno más que en los otros dos. ¿Cuántas personas viajan en cada autobús?

21. ¡MAGIA!

Sigue los siguientes pasos:

- Piensa en dos números naturales de una cifra.
- Multiplica el primero por 2 y súmale 8.
- Multiplica el resultado anterior por 5.
- Suma el segundo número que habías pensado al resultado anterior.
- Resta 40 al último resultado.

¿Qué ocurre? ¿Es casualidad? ¿Pasará siempre lo mismo? ¿Puedes explicarlo?



Divisibilidad

22. Escribe los diez primeros múltiplos de 6 y los diez primeros múltiplos de 9. ¿Cuáles son comunes a ambos?

23. Escribe cuatro números que cumplan que la cifra de las unidades sea el triple que la de las decenas de manera que dos de ellos sean divisibles por 2 y los otros dos no lo sean.

24. Indica cuáles de los siguientes números son múltiplos de 3:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150.

25. Indica cuáles de los siguientes números son múltiplos de 15:

1, 30, 50, 60, 70, 75, 100, 125, 150.

26. Escribe cuatro números de tres cifras que sean divisibles por 11 y por 2 a la vez.

27. Escribe los diez primeros múltiplos de 4 y los diez primeros múltiplos de 5. ¿Cuáles son comunes a ambos?

28. Sustituye A por un valor apropiado para que:

- a) 24 A75 sea múltiplo de 5.
- b) 1107 A sea múltiplo de 3.
- c) 5 A439 sea múltiplo de 6.

29. Busca todos los divisores de 210.

30. Di cuáles de los siguientes números son múltiplos de 5. ¿Y de 10? ¿Cuáles coinciden? ¿Por qué?

23, 24, 56, 77, 89, 90, 234, 621, 400, 4520, 3411, 46295, 16392, 385500.

31. Escribe cuatro números de cuatro cifras que cumplan que la cifra de las decenas sea el doble que la de las unidades de manera que uno de ellos sean divisible por 3, otro por 11, otro por 2 y otro por 4.

32. Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
327	Divisible por 11	
494530	Divisible por 4	
39470034	Divisible por 6	
7855650	Divisible por 3	
985555328	Divisible por 2	
20000045	Divisible por 10	

33. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla escribiendo verdadero o falso:

Número	¿Es...?	Verdadero/Falso
30087	Divisible por 3	
78344	Divisible por 6	
87300	Múltiplo de 11	
2985644	Múltiplo de 4	
1	Divisor de 13	
98	Divisor de 3	

34. Haz una lista con los valores de las monedas y billetes del sistema monetario euro.

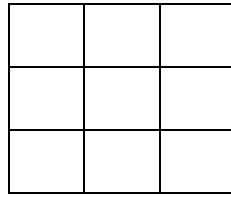
¿Figura entre ellos algún número primo? ¿Por qué crees que es así?

35. Pedro tiene una forma muy peculiar de dar el teléfono a sus amigos: les dice que consta de nueve cifras, que no se repite ninguna y que leyéndolo de izquierda a derecha se cumple:

- La primera cifra es un múltiplo de 3 mayor que 6.
- Las dos primeras cifras forman un múltiplo de 2 y de 5.
- Las tres primeras cifras forman un número par múltiplo de 3.
- Las cuatro primeras cifras forman un número que es múltiplo de 5 pero no de 2.
- Las cinco primeras cifras forman un número múltiplo de 2 y de 3.
- Las seis primeras cifras forman un número múltiplo de 11.
- La séptima cifra es un múltiplo de 7.
- Las ocho primeras cifras forman un número impar.
- Las cuatro últimas cifras forman un múltiplo de 11.

¿Sabrías averiguar cuál es su teléfono?

36. Calcula cuántos cuadrados puedes contar en la siguiente figura:



37. Sustituye x e y por valores apropiados para el siguiente número sea divisible por 2 y por 11 a la vez:

$$256x81y$$

38. Sabemos que el número 1452 es múltiplo de 11. Calcula otro múltiplo de 11 solo cambiando de lugar las cifras de este número.

39. Completa en tu cuaderno con las expresiones "ser múltiplo de", "ser divisor de " o "ser divisible por":

a) 40 es 10.

b) 2 es 10.

c) 4 es 8.

d) 335 es 11.

e) 90 es 45.

f) 3 es15.

Números primos

40. Descompón en factores primos los siguientes números: 1530, 2457 y 7440.

41. Observa la descomposición factorial de los siguientes números a, b, c, d y contesta:

$$a = 2 \cdot 3^2 \quad b = 2 \cdot 3 \quad c = 5 \cdot 7 \quad d = 2 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

a) ¿Cuál de ellos es múltiplo de a?

b) ¿Cuáles son divisores de d?

c) ¿Cuáles son primos entre sí?

42. Averigua cuáles son los números cuyas descomposiciones factoriales son:

$$a) x = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \quad b) y = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 11 \quad c) z = 2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

43. Calcula el M.C.D. de los siguientes pares de números:

$$a) 9 \text{ y } 12 \quad b) 18 \text{ y } 42 \quad c) 8 \text{ y } 15 \quad d) 108 \text{ y } 630.$$

44. Calcula el m.c.m. de los siguientes pares de números:

- a) 140 y 300 b) 693 y 1485 c) 365 y 600 d) 315 y 1845.

45. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

- a) 24, 60 y 80 b) 60, 84 y 132 c) 270, 315 y 360 d) 240, 270 y 36.

46. Calcula el m.c.m. y M.C.D. de m y n sin averiguar el valor numérico de cada uno:

a) $m = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

b) $m = 3 \cdot 5$ $n = 2 \cdot 7$.

c) $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $n = 2^2 \cdot 3^2$.

d) $m = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ $n = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

47. Completa las siguientes afirmaciones:

- a) Cuando dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el mínimo común múltiplo de ambos es.....
- b) Cuando dos números primos entre sí no tienen factores primos comunes, el máximo común divisor de ambos es.....

48. Calcula mentalmente el m.c.m. y M.C.D. de los siguientes números:

- | | | | | |
|-----------|-----------|------------|----------|---------------|
| a) 4 y 8 | d) 7 y 10 | g) 10 y 15 | j) 2 y 2 | m) 2, 3 y 4 |
| b) 2 y 3 | e) 6 y 12 | h) 2 y 5 | k) 4 y 1 | n) 3, 6, y 12 |
| c) 3 y 12 | f) 6 y 9 | i) 4 y 6 | l) 3 y 7 | o) 3, 4 y 6. |

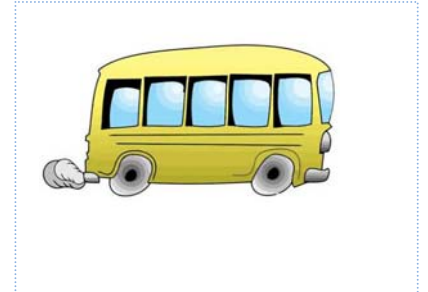
49. Calcula:

- | | |
|--------------------|------------------|
| a) m.c.m. (8,40) | M.C.D. (8,40). |
| b) m.c.m. (15,35) | M.C.D. (15,35). |
| c) m.c.m. (84,360) | M.C.D. (84,360). |

Problemas

50. En un tramo de acera hay tres farolas. Una se enciende cada 12 segundos, otra cada 18 y otra cada 60. A las 18:30 de la tarde las 3 coinciden encendidas. Averigua cuántas veces van a coincidir en los 5 minutos siguientes.

51. Tres autobuses salen de la misma estación en tres direcciones distintas. El primero tarda 1 hora y 45 minutos en volver al punto de partida, y permanece un cuarto de hora en la estación. El segundo tarda 1 hora y 5 minutos y permanece 7 minutos en la estación. El tercero tarda 1 hora y 18 minutos y permanece 12 minutos en la estación. Se sabe que la primera salida ha tenido lugar a las 6 de la mañana. Calcula:



a) A qué hora volverán a salir juntos de la estación.

b) El número de viajes efectuados por cada uno.

52. Un artesano tiene 32 piedras de coral, 88 de turquesa, 56 perlas y 66 de azabache. Con todas ellas desea elaborar el mayor número de collares iguales. ¿Cuántos puede hacer?

53. El ordenador de Lucía escanea con el antivirus cada 180 minutos y hace actualizaciones cada 240 minutos ¿Cada cuántos minutos hace las dos cosas al mismo tiempo?

54. A lo largo de una carretera hay un teléfono de emergencia cada 10 km, un pozo de agua cada 15 km y una gasolinera cada 20 km. ¿Cada cuánto coinciden un teléfono, un pozo y una gasolinera?

55. Para celebrar el cumpleaños de su hijo, Sonia ha comprado 12 gorritos de papel, 6 collares, 18 anillos y 36 caramelos. Si quiere armar bolsas de regalo con la misma cantidad de obsequios de cada tipo, ¿para cuántos amigos le alcanza? ¿Qué deberá poner en cada bolsa?



56. Una máquina llena una caja de 256 botellas de leche en dos minutos y otra máquina llena la misma cantidad de botellas en tres minutos. Si ambas empezaron a embotellar líquidos a las 9:00 de la mañana. ¿A qué hora terminan ambas de llenar una caja? ¿Cuántas botellas habrán llenado ambas máquinas durante ese periodo? ¿Y durante una hora?

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Cuál es el resultado de $20 \cdot 15 + 3$?
a) 360 b) 303 c) 330 d) 36.
2. La propiedad que se ilustra en la siguiente igualdad $2 \cdot (3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$ es:
a) La propiedad conmutativa.
b) La propiedad distributiva.
c) La propiedad asociativa.
d) Esa igualdad no es cierta.
3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
a) En una división exacta el cociente siempre es cero.
b) En el sistema de numeración decimal el valor de una cifra es independiente del lugar que ocupa.
c) Si multiplicamos dividendo y divisor por el mismo número distinto de cero, el cociente no varía.
d) El producto y la división de números naturales cumplen la propiedad conmutativa.
4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
a) Si dos números son primos, su máximo común divisor es 1.
b) Si dos números son primos, su mínimo común múltiplo es 1.
c) El mínimo común múltiplo de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
d) El máximo común divisor de dos números siempre es mayor que el producto de ambos.
5. ¿Cuál de las soluciones es la correcta para el conjunto de los divisores de 40?
a) $D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ c) $D(40) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 20, 40\}$
b) $D(40) = \{1, 2, 4, 6, 5, 8, 10, 20, 40\}$ d) $D(40) = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$.
6. El número de divisores de 12 es:
a) 3 b) 2 c) 4 d) 1.
7. El número 315A es múltiplo de 9 para los siguientes valores de A:
a) $A = 9$ y $A = 3$ b) $A = 9$ y $A = 1$ c) $A = 3$ y $A = 6$ d) $A = 9$ y $A = 0$.
8. ¿Cuál de estos números cumple que es un número de tres cifras par, divisible por 5 y por 17 y la suma de sus cifras es 7?
a) 170 b) 510 c) 610 d) 340.
9. Sabiendo que a es divisible por b . Indica cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:
a) El número a es divisor de b .
b) El número a es múltiplo de b .
c) El número b es un múltiplo de a .
d) Los números a y b son primos entre sí.
10. El M.C.D. (54, 360, 45) es:
a) 9 b) 27 c) 45 d) 70.
11. María compra en el supermercado los zumos en paquetes de 2 y los refrescos en paquetes de 3. Hoy quería comprar el mismo número de zumos que de refrescos, pero el menor número posible para no llevar mucho peso en el camino a su casa. ¿Cuántos compró?
a) 3 b) 2 c) 6 d) 12.



- 12.** Paula quiere hacer un juego de cartas cortando una cartulina de 16 cm de largo y 12 cm de ancho en cuadrados iguales de forma que sean lo más grandes posible y no sobre cartulina. ¿Cuánto medirá el lado de cada carta?
- a) 4 cm b) 2 cm c) 8 cm d) 6 cm.
- 13.** Un operario revisa la excavadora de su empresa cada 28 días y la grúa cada 35. Si revisó las dos el 1 de mayo, ¿cuándo volverán a coincidir?
- a) El 17 de septiembre b) El 18 de septiembre c) El 17 de agosto d) Ese año no vuelven a coincidir.
- 14.** Queremos alicatar una pared de 615x225 centímetros, con azulejos cuadrados de lado el mayor posible y no cortar ningún azulejo. ¿Cuántos azulejos son necesarios?
- a) 615 b) 15 c) 225 d) No es posible.
- 15.** ¿Cómo se escribe 95 en romano?
- a) VC b) XCV c) XCIVI d) LXXXXV.