MATEMÁTICAS

Educación Secundaria para personas adultas

Nivel II de ESPA

Módulo de Matemáticas Aplicadas II

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

AUTORA: Carmen de la Fuente Blanco

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Textos Marea Verde

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10: 84-695-9891-0

ÍNDICE

La educación de personas adultas corresponde a las Comunidades Autónomas, y en cada una de ellas han establecido sus programaciones.

En este texto se pretende dar una versión adaptada a la mayoría de estos programas para que las personas adultas obtengan el graduado escolar.

Las enseñanzas para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas tienen la finalidad de permitirles la adquisición de las competencias, los objetivos y los contenidos de esta etapa y la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.

Se pueden encontrar estos programas para:

La Comunidad de Madrid en: el BOCM-20170516

Para la Comunidad Valenciana en: DOGV Núm: 3691 del 2000_02_ 18

Para Baleares:

Módulo de Matemáticas Académicas II

Módulo de Matemáticas Aplicadas II

Nivel II de ESPAD

Unidad 0

Números naturales y enteros

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR de Alcorcón en cualquiera de las dos opciones (enseñanzas académicas o enseñanzas aplicadas)

En esta unidad se desarrollan contenidos específicos del nivel I que es necesario revisar porque el conocimiento de los mismos y el dominio de las operaciones con números enteros es imprescindible para comenzar el estudio de los contenidos específicos del nivel II del currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

ÍNDICE

1. ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Nuestro sistema de numeración es decimal y posicional. Para escribir cualquier número se utilizan diez dígitos o cifras (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). El valor de una cifra depende de su posición en el número. Cada diez unidades de un orden forman una unidad del orden siguiente superior:

10 unidades = 1 decena, 10 decenas = 1 centena, 10 centenas = 1 unidad de millar,

10 unidades de millar = 1 decena de millar, 10 decenas de millar = 1 centena de millar,

10 centenas de millar = 1 unidad de millón,…

Ejemplo: En el número 7 805 213 el valor de cada cifra viene dado por su posición, como puede verse en la siguiente descomposición:

$7\ 805\ 213 = 3 + 1\cdot 10 + 2\cdot 100 + 5\cdot 1000 + 0\cdot 10\ 000 + 8\cdot 100\ 000 + 7\cdot 1\ 000\ 000$

2. NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son los que nos sirven para contar más el cero y son infinitos.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots.\}$$

2.1. Operaciones con números naturales y propiedades

La **suma** o adición de números verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $a+b=b+a$

  Ejemplo: $13+19 = 19+13 = 32$

- Asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$

  Ejemplo: $(15+7)+23 = 22+23 = 45$; $15+(7+23) = 15+30 = 45$

- El número 0 es el neutro para la suma: $0+a = a$

  Ejemplos: $0+3=3$; $0+7=7$

La multiplicación o **producto** de números naturales es la suma de varios sumandos iguales. (A partir de ahora se usará con más frecuencia el símbolo · como signo de multiplicar que símbolo x). El producto de números verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$.

  Ejemplo: $13\cdot 10 = 10\cdot 13 = 130$

- Asociativa: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$.

  Ejemplo: $(5\cdot 7)\cdot 2 = 35\cdot 2= 70$;$5\cdot(7\cdot 2) = 5\cdot 14 = 70$

- El número 1 es el neutro para la multiplicación: $1\cdot a = a$

  Ejemplos: $1\cdot 5=5$; $1\cdot 9=9$

- Distributiva del producto con respecto a la suma: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Ejemplo: 5·(7+2) = 5.7+5·2

La resta o **diferencia** en el conjunto de los números naturales sólo es posible cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo y es una operación relacionada con la suma de la siguiente manera: la igualdad a-b = c equivale a la igualdad a = c+b.

Ejemplo: 74 – 26 = 48 porque 48 + 26 = 74

Dividir es repartir una cantidad en partes iguales. Los términos de la **división** se llaman:

<u>Dividendo</u>, la cantidad que se reparte (D); <u>Divisor</u>, el número de partes que se hacen (d); <u>Cociente</u>, la cantidad que tiene cada parte (c); <u>Resto</u>, la cantidad que sobra al repartir (r). En toda división de números naturales se verifica que **el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente más el resto**: D = d·c+r. La división es exacta cuando el resto es cero e inexacta cuando el resto es distinto de cero.

Ejemplo: La división 469 : 2 no es exacta, el cociente es 234 y el resto es 1

Se verifica que 469 = 2·234 + 1.

Una **potencia** es una multiplicación en la que todos los factores son iguales. El factor que se repite se llama *base* y el número de veces que se repite *exponente*.

Ejemplo: 3^4 (se lee tres elevado a la cuarta) es igual a 3·3·3·3 = 81

Las operaciones con potencias verifican las siguientes propiedades:

$\boxed{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$ El producto de potencias de igual base es otra potencia de igual base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores

$\boxed{x^a : x^b = x^{a-b}}$ El cociente de dos potencias con la misma base es otra potencia de igual base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes

$\boxed{(x^a)^b = x^{a\cdot b}}$ Para calcular una potencia de una potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes

$\boxed{(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x}$ La potencia de un producto es igual al producto de las potencias

$\boxed{(a : b)^x = a^x : b^x}$ La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias

Por convenio $\boxed{a^1 = a}$ y $\boxed{a^0 = 1}$ (cualquier potencia de exponente 0 es igual a 1)

La **raíz cuadrada** exacta de un número es otro número tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene el primero: $\boxed{\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x}$

Ejemplo: $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$

Cuando el radicando no es un cuadrado perfecto, se halla la raíz cuadrada entera que es el mayor número natural cuyo cuadrado es menor que dicho número. Se llama resto a la diferencia entre el número y el cuadrado de la raíz entera.

Ejemplo: la raíz entera aproximada de 27 es 5 con resto 2 porque 27 = 5^2+2

2.2. Operaciones combinadas y prioridades

Para realizar operaciones combinadas –sumas, restas, multiplicaciones y divisiones- hay que tener en cuenta el siguiente orden de prioridad:

1º. Suprimir los paréntesis después de realizar las operaciones que en ellos se indican.

2º. Realizar las potencias y raíces.

3º. Efectuar las multiplicaciones y divisiones según aparezcan de izquierda a derecha y antes que las sumas y restas.

4º. Efectuar las sumas y restas en el orden de izquierda a derecha según aparezcan.

Ejemplos: 325 – (20+ 40·7) = 325 – (20 + 280) = 325 – 300 = 25

35·2 : (27 – 22) = 70 : 5 = 14

$$5 \cdot 2^3 + \sqrt{64} = 5 \cdot 8 + 8 = 40 + 8 = 48$$

Actividades propuestas

1. Completa la siguiente tabla después de realizar las operaciones adecuadas y comprobar en cada caso la relación dividendo = divisor · cociente + resto

DIVIDENDO	DIVISOR	COCIENTE	RESTO	¿Es la división exacta?
140	7			
150	15			
650	6			
288	24			
8000	100			
403	15			
	40	8	0	
	7	6	4	
	12	12	3	

2. Efectúa las siguientes operaciones combinadas:

a) $18 - 6 + 3 - 5 =$

b) $13 + 6 \cdot 5 - 3 \cdot 8 =$

c) $7 \cdot 8 - 8 \cdot 2 - 6 - 3 =$

d) $9 - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 =$

e) $(7 + 4) \cdot 6 =$

f) $(8 - 3) \cdot (6 + 2) =$

g) $(18 + 2 - 5) \cdot 2 =$

h) $6 \cdot (45 - 15) : 12 + (24 - 6) \cdot 3 =$

i) $(2+5+3)^4 =$

j) $(10+1)^2 =$

k) $10^2 + 1^2 =$

l) $3^2 + 3^2 + 3^2 =$

m) $\sqrt{16} + \sqrt{9} =$

n) $\sqrt{16+9} =$

ñ) $16 + 5^2 - 3^2 =$

o) $3^2 + \sqrt{25} \cdot 2^3 =$

p) $\sqrt{49} - \sqrt{9} - 2^2 =$

q) $(\sqrt{81} - \sqrt{9})^2 + (\sqrt{81} - \sqrt{9}) =$

r) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{100} + 10^3 =$

3. Halla el valor de las siguientes potencias:

   a) 9^2 b) 4^3 c) 10^6

4. Expresa los siguientes números como potencias de 10:

   a) 1.000 b) 1.000.000 c) 10 d) 1

5. Expresa en forma de una sola potencia:

   a) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 =$

   b) $4^8 \div 4^5 =$

   c) $(7^9 \div 7^3) \div 7^4 =$

   d) $(3^2)^4 =$

   f) $5^3 \cdot (5^3)^2 =$

   g) $5^3 \cdot 2^3 =$

   h) $8^2 \div 4^2 =$

6. En un mercado se venden cada día 80 toneladas de fruta. ¿Cuántos camiones de dos toneladas se necesitan para transportar la fruta vendida en una semana?

7. En un edificio de oficinas hay 4 plantas, en cada planta hay 4 oficinas y en cada oficina hay 4 mesas iguales con 4 cajones cada una. ¿Cuántos cajones hay en todo el edificio?

8. Jaime quiere colocar 36 soldados de plomo de forma cuadrada, con el mismo número de filas que de columnas ¿Cuántas filas tendrá la formación?

9. El salón de actos de un instituto tiene forma cuadrada y mide 900 metros cuadrados ¿cuánto mide cada lado?

10. Una furgoneta transporta dos cajas de huevos con 15 docenas cada una. En un frenazo se vuelcan las cajas y se rompen 137 huevos. ¿Cuántos quedan enteros?

11. Un almacenista de fruta compra las manzanas a 22 € la caja y las vende a 2 € el kg. Sabiendo que una caja contiene 15 kg de manzanas, ¿cuántas cajas ha de vender para ganar 600?

3. DIVISIBILIDAD

3.1. Múltiplos y divisores de un número

Un número natural *a* es **múltiplo** de otro número natural *b* si es el resultado de multiplicar éste último por un número natural *c* cualquiera: $a= b \cdot c$

Un número natural es **divisor** de otro si al dividir el segundo por el primero, la división es exacta. En este caso decimos que el segundo número natural es *divisible* por el primero.

> ***Ejemplo:*** 26 es *múltiplo de* 2 porque 26 = 2· 13 , lo que es equivalente a decir que 2 es *divisor de* 26 porque 26:2 = 13, o también que 26 es *divisible por* 2.

3.2. Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas que permiten saber si un número natural es divisible por otro sin tener que realizar la división correspondiente.

- Un número es divisible *por 2* si la cifra de las unidades es 0 o par.
- Un número es divisible *por 3* si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible *por 4* cuando sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 o son dos ceros
- Un número es divisible *por 5* si la cifra de las unidades es 0 o 5.
- Un número es divisible *por 9* si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
- Un número es divisible *por 11* si la diferencia entre las sumas de las cifras que ocupan lugares pares y las que ocupan lugares pares es cero o múltiplo de 11.

3.3. Números primos y números compuestos

Un número natural es **primo** si sólo es divisible por él mismo y por la unidad.

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

Un número es **compuesto** si no es primo, es decir, si tiene algún divisor distinto de él mismo y de la unidad.

El número 1 no es primo ni compuesto, sólo tiene un divisor.

Para averiguar si un número es primo se divide por cada uno de los números primos 2, 3, 5, 7, 11,… sucesivamente, hasta que se obtenga una división exacta (en cuyo caso el número es compuesto), o hasta que uno de los cocientes realizados sea menor o igual que el divisor respectivo sin ninguna división exacta (en cuyo caso el número es primo)

3.4. Descomposición factorial de un número

Descomponer un número en factores primos es expresarlo como producto de números primos.

El método usado para descomponer un número en factores primos es el siguiente:

1º. Se divide dicho número por el primer número primo que sea divisor de éste. Se realiza esta operación con los siguientes números primos hasta llegar a una división de cociente igual a 1.

2º. La descomposición factorial será el producto de los divisores de dichas operaciones.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

La descomposición factorial de 90 es $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

3.5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor divisor común a dichos números y se representa por **m.c.d.**

Para calcular el m.c.d. de varios números se puede seguir el siguiente método:

1º. Se descomponen en factores primos dichos números.

2º. Se consideran los factores primos comunes a todos ellos.

3º. Se realiza el producto de dichos factores comunes, elevados al menor exponente con el que aparecen en las descomposiciones, y el resultado es el m.c.d. de dichos números.

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor múltiplo común a dichos números y se representa por **m.c.m.**
Para calcular el m.c.m. de varios números se puede seguir el siguiente método:

1º. Se descomponen en factores primos dichos números.

2º. Se consideran todos los factores primos, tanto comunes como no comunes

3º. Se realiza el producto de dichos factores, elevados al mayor exponente con el que aparecen en las descomposiciones, y el resultado es el m.c.m. de dichos números.

***Ejemplo*:** Dados los números 90 y 1540, sus descomposiciones factoriales son

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ y } 1540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Luego, $m.c.d.(90{,}1540) = 2 \cdot 5 = 10$ y $m.c.m.(90{,}1540) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 13860$

El producto del m.c.d. y del m.c.m. de dos números cualesquiera es igual al producto de ambos

***Ejemplo*:** m.c.d. (14, 30) = 2 , m.c.m. (14, 30) = 210 y se verifica que 2·210 =14·30 = 420.

Si el m.c.d. de dos números es igual a 1, se dice que dichos números son **primos entre sí**. Si dos números son primos entre sí, el m.c.m. es igual a su producto.

Ejemplo: Los números 7 y 12 son primos entre sí porque m.c.d.(7, 12) = 1
m.c.m.(7, 12) = 7·12 =84

Si dividimos dos números por su m.c.d., los cocientes que se obtienen son primos entre sí.

Ejemplo: m.c.d.(14, 30) = 2 , 14:2 = 7, 30:2 = 15 y m.c.d.(7, 15) =1.

Actividades propuestas

12. Escribe todos los divisores de cada uno de los siguientes números:

a) 36

b) 56

13. Escribe las listas de los diez primeros múltiplos de 12 y de 16 y observando las dos listas deduce cuál es el m.c.m.(12, 16).

14. Razona si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) 381 es divisible por 3

b) 1384 es divisible por 2

c) 5295 es divisible por 3 y por 5

d) 850 es divisible por 2 y por 5

e) El cociente de una división exacta es divisor del dividendo.

15. Completa con la palabra adecuada (*múltiplo, divisor, divisible*):

a) 16 es ……………………… por 2

b) 4 es ……………………… de 20

c) 27 es ……………………… de 9

16. Realiza la Criba de Eratóstenes para obtener los números primos comprendidos entre 1 y 100. Para ello tienes que tachar en la tabla adjunta el número 1 que no es primo, a continuación todos los múltiplos de 2, excepto 2 que es primo; después todos los múltiplos de 3 excepto 3 que es primo y así sucesivamente se hace lo mismo con los primos 5 y 7. Al hacerlo con 11 se observa que todos sus múltiplos han sido ya tachados y se concluye que los números que quedan sin tachar son los números primos menores que 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

17. Clasifica razonadamente los siguientes números en primos o compuestos:

a) 55
b) 83
c) 115
d) 301
e) 307
f) 721
g) 2352

18. Fíjate en el modelo y completa la tabla como productos equivalentes:

60	6·10	2·3·10	2·2·3·5
40			
	4·8		
			2·5·5·5

19. Descomponer en factores primos los siguientes números:

a) 36 b) 52 c) 231 d) 999

20. Calcula estos números y escribe sus divisores:

a) $2^3 \cdot 3 =$ b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 =$ c) $4^2 \cdot 9 =$

21. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números:

a) 2 y 64
b) 20 y 75
c) 4, 6 y 12
d) 6, 9, 12

22. Tenemos que repartir 60 bolas de tenis en estuches de la misma capacidad. ¿Qué capacidades pueden tener los distintos estuches? ¿Cuántos estuches necesitamos en cada caso?

23. Los libros de la biblioteca se pueden organizar en grupos de 2, 3, 5 o 6 ¿cuántos libros pueden ser como mínimo?

24. Dos corredores de Fórmula 1 se entrenan en un circuito. El primero tarda 60 segundos en dar una vuelta mientras que el segundo tarda 70 segundos. Si salen de la meta a la vez, ¿al cabo de cuánto tiempo tardarán en volver a cruzarse en la meta?

25. Los alumnos de 1º de un instituto son entre 80 y 100. Se pueden agrupar exactamente de 4 en 4, pero si se agrupan de 5 en 5 sobra uno. ¿Cuántos son?

26. Una plaza mide 45 m de largo y 25 m de ancho. Se la quiere dividir en zonas cuadradas iguales lo más grandes posible. Calcula la medida del lado de cada cuadrado. ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener?

27. Un anuncio luminoso se enciende cada 10 segundos, otro cada 15 y un tercero cada 18. Calcula cada cuántos segundos se encenderán los tres a la vez.

4. NÚMEROS ENTEROS

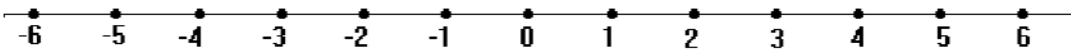
Los números naturales no son suficientes para describir situaciones cotidianas como dar posiciones por debajo del nivel del mar, temperaturas por debajo de 0 grados, el saldo de una cuenta cuando se gasta más de lo que se tenía,…Para este tipo de situaciones se utilizan números con signo, positivos y negativos.

Ejemplos:

- Al hacer las cuentas del dinero que uno tiene, los números negativos indican el dinero gastado, mientras que los números positivos indican el dinero recibido.
- Para medir las temperaturas se define una temperatura de 0 grados como referencia de forma que las temperaturas superiores se dan con números positivos y las inferiores con números negativos.

El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, que son los enteros positivos y que llevan el signo + o no llevan signo, los enteros negativos, que llevan delante el signo –, y el cero, que no es positivo ni negativo. El conjunto de los números enteros se representa por la letra Z:

$$\mathrm{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$



Los números enteros se representan en una recta eligiendo sobre la misma un punto que represente el 0 y una unidad de medida con la que llevar los números positivos a la derecha del cero y los números negativos a la izquierda.

$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$ (El conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros)

4.1. Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número entero es la distancia que lo separa de 0 en la recta graduada y coincide con el número natural que resulta de eliminar su signo.

Ejemplo: $|+5| = |-5| = 5$

Dos números enteros que tienen distinto signo e igual valor absoluto se llaman números **opuestos**.

Ejemplo: 2 es el opuesto de –2, y viceversa.

El 0 es opuesto de sí mismo.

4.2. Relación de orden en el conjunto de los números enteros

Los enteros positivos son mayores que los negativos.

Entre dos enteros positivos es mayor el de mayor valor absoluto.

Entre dos enteros negativos es mayor el de menor valor absoluto.

El menor de dos números enteros es el situado más a la izquierda en la recta numérica.

Ejemplos:

$-7 < -3 < 0 < 1 < 5$ (el símbolo $<$ significa *es menor que*)

$4 > 2 > -2 > -4 > -9$ (el símbolo $>$ significa *es mayor que*)

4.3. Operaciones con números enteros

Operación	Reglas para realizar la operación	Ejemplos
SUMA	Para sumar dos números enteros del mismo signo se suman sus valores absolutos y se deja el mismo signo.	(+4) + (+3) = +7 (– 4) + (– 3) = – 7
	Para sumar dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se antepone el mismo signo del que tenga mayor valor absoluto.	(– 4) + (+3) = – 1 (+ 4) + (– 3) = +1
RESTA	Para restar dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.	(– 4)–(– 3) = (– 4) + (+3) = – 1
PRODUCTO	Para multiplicar dos números enteros con el mismo signo se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo +	(+4)·(+3) = +12 (– 4)·(– 3) = +12
	Para multiplicar dos números enteros con distinto signo se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo –	(+4)·(– 3) = – 12 (– 4)·(+ 3) = – 12
DIVISIÓN	Para dividir dos números enteros con el mismo signo se dividen sus valores absolutos y se pone el signo +	(+12) : (+4) = +3 (– 12) : (– 4) = +3
	Para dividir dos números enteros con el distinto signo se dividen sus valores absolutos y se pone el signo –	(+12) : (– 4) = – 3 (– 12) : (+ 4) = – 3

4.4. Reglas para suprimir paréntesis

Si delante de un paréntesis tenemos el signo +, quitamos el paréntesis y dejamos los números en su interior como están, o sea, con su signo. Si delante de un paréntesis tenemos el signo -, quitamos el paréntesis y cambiamos el signo de los números contenidos en él

Ejemplo:5 + (– 8 + 4 – 2)–(2 + 6 – 5) = 5 – 8 + 4 – 2 – 2 – 6 + 5 = 5 + 4 + 5 – 8 – 2 – 2– 6 = 14 – 18 = – 4

Las operaciones combinadas de sumas y restas con paréntesis se pueden hacer de dos formas:

- Suprimiendo primero los paréntesis y operando después, como en el ejemplo anterior.
- Realizando primero las operaciones de dentro del paréntesis y suprimiéndolo luego.

Ejemplo: 5 + (– 8 + 4 – 2) – (2 + 6 – 5) = 5 + (– 6) – (3) = 5 – 6 – 3 = 5 – 9 = – 4

4.5. Potencias de exponente natural de números enteros

Para calcular la potencia de exponente natural de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplos:

$(+4)^3 = (+4)\cdot(+4)\cdot(+4) = +64$;

$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$;

$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16$

Las potencias de base positiva son números positivos.

Las potencias de base negativa y exponente impar son números negativos.

Las potencias de base negativa y exponente par son números positivos.

4.6. Operaciones combinadas y prioridades

Para realizar operaciones combinadas –sumas, restas, multiplicaciones y divisiones- con números enteros hay que tener en cuenta el mismo orden de prioridad que con los naturales:

1º. Suprimir los paréntesis después de realizar las operaciones que en ellos se indican

2º. Realizar las potencias y raíces.

3º. Efectuar las multiplicaciones y divisiones según aparezcan de izquierda a derecha y antes que las sumas y restas.

4º. Efectuar las sumas y restas en el orden de izquierda a derecha según aparezcan.

Ejemplo:

$$4+2\cdot(3-7-1)-(-9):(-3)+5=4+2\cdot(-5)-3+5=4+(-10)-3+5=9-13=-4$$

4.7. Múltiplos y divisores de un número entero

Los conceptos sobre divisibilidad que se definieron para números naturales se definen de manera similar para números enteros.

Un número entero *a* es **múltiplo** de otro número entero *b* si es el resultado de multiplicar éste último por un número entero *c* cualquiera: *a= b·c*

Un número natural es **divisor** de otro si al dividir el segundo por el primero, la división es exacta. En este caso decimos que el segundo número entero es divisible por el primero.

Ejemplo:

26 es *múltiplo de* −2 porque 26 = (−2)·(−13) , lo que es equivalente a decir que −2 es *divisor de* 26 porque 26:(−2) = −13, o también que 26 es *divisible por* −2.

Actividades propuestas

28. Representa sobre una recta los números +4, -6, 7 y -10 y da el valor absoluto de cada número.
29. Ordena los números 305, -17, -4, 777, 0, 3, -15, 18 y -8 de menor a mayor con el símbolo <.
30. Ordena los números -25, -705, +67, 113, -3, 0. -14,21 y +32 de mayor a menor con el símbolo >.
31. ¿Qué número está cuatro unidades a la izquierda de -5 en la recta numérica?
32. ¿Cuál es el entero anterior a -1000?,¿y el siguiente?
33. ¿Qué valores puede tener x si verifica que -7<x<5?
34. La temperatura más alta registrada en la Tierra fue de 58° C en Libia en septiembre de 1922, y la más baja fue de -88° C en la Antártida en agosto de 1960. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura registrada en Libia y la registrada en la Antártida?,¿y entre la Antártida y Libia?
35. Una empresa empezó el año con un saldo de -35000 €. Gracias a una buena gestión obtuvo a lo largo del año 21000 € de beneficios. ¿Cuál fue su saldo al acabar el año?¿Cuánto dinero necesita para quedarse con un saldo de +72000 €?

36. El producto de dos números enteros es igual a – 56. ¿Cuáles pueden ser los dos números? Escribe cuatro casos diferentes.

37. Realiza las siguientes operaciones con números enteros:

a) 4·(–5) – 23 =

b) 7+8·(–2) =

c) 2·(–3)+3·(–2)=

d) (– 6):2 + (–2)·5=

e) (–14):(–7) – (–2)·(+3) =

f) 8 – 5·(10 + (–5)·(12–6)) =

g) (8–3)·(20 + (–5)·(12–3)) =

h) (–5) – (–4) + (–3) – (–7) =

i) –7 – (23–15) + (–1+4) =

j) 4 – [–14 – (2–5) +7] =

38. Aplica primero la propiedad distributiva y después obtén el resultado de las siguientes operaciones:

a) 8·(–3+7–2) =

b) –5·(6+4–9) =

39. Empieza los siguientes cálculos sacando factor común y obtén el resultado final:

c) 4·(–3) + 4·5 + 4·(–8) =

d) –2·6 + (–2)·(–3) + (–2)·9 =

40. Completa la siguiente tabla. ¿Qué propiedad se está comprobando?

a	b	c	a·b	b·c	(a·b)·c	a·(b·c)
-3	6	-5				
-1	-4	-9				

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1)

DIVIDENDO	DIVISOR	COCIENTE	RESTO	¿Es la división exacta?
140	7	20	0	sí
150	15	10	0	sí
650	6	108	2	NO
288	24	12	0	SÍ
8000	100	80	0	SÍ
403	15	26	13	NO
320	40	8	0	SÍ
46	7	6	4	NO
147	12	12	3	NO

(2) (a) 10 (b) 19 (c) 31 **(d)** 16 **(e)** 66 **(f)** 40 **(g)** 30 **(h)** 69 **(i)** 10 000 **(j)**121
(k) 101 **(l)** 27 **(m)** 7 **(n)** 5 **(ñ)** 32 **(o)** 49 **(p)** 0 **(q)** 42 **(r)** 1050

(3) **(a)** 81 **(b)** 64 **(c)** 1 000 000
(4) **(a)** 10^3 **(b)**10^6 **(c)**10^1 **(d)** 10^0
(5) **(a)** 2^{10} **(b)** 4^3 **(c)** 7^2 **(d)** 3^8 **(f)** 5^9 **(g)** 10^3 **(h)** 2^2
(6) 280 camiones **(7)** 256 cajones **(8)** 6 filas **(9)** 30 metros **(10)** 30 metros **(11)** 75 cajas
(12) **(a)** 1, 36, 2, 18, 3, 12, 4, 9, 6 **(b)** 1, 56, 2, 28, 4, 14, 7, 8

(13) Múltiplos de 12: 12, 24, 36, **48**, 60,72, 84, 96, 108, 120,...
Múltiplos de 16: 16, 32, **48**, 64, 80, 96, 122, 138, 154, 180, ... m.c.m.(12, 16)=**48**
(14) **(a)** verdad **(b)** verdad **(c)** verdad **(d)** verdad **(e)** verdad
(15) **(a)** divisible **(b)** divisor **(c)** múltiplo
(16) Números primos menores que 100:
2, 3, 5, 7
11, 13, 17, 19
23, 29,
31,37,
41, 43, 47,
53, 59,
61, 67,
71, 73, 79,
83, 89,
97

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(17) **(a)** compuesto **(b)** primo **(c)** compuesto **(d)** compuesto **(e)** primo **(f)** compuesto **(g)** compuesto

(18)

60	6·10	2·3·10	2·2·3·5
40	**4·10**	**2·2·10**	**2·2·2·5**
32	4·8	**2·2·4·2**	**2·2·2·2·2**
250	**10·25**	**10·5·5**	**2·5·5·5**

(19) **(a)** $2^2·3^2$ **(b)** $2^2·13$ **(c)** 3·7·11 **(d)** $3^3·37$

(20) **(a)** 24 Divisores: 1, 24, 2, 12, 3, 8, 4 y 6
(b) 60 Divisores: 1, 60, 2, 30, 3, 20, 4, 15, 5, 12, 6 y 10
(c) 144 Divisores: 1, 144, 2, 72, 3, 48, 4, 36, 6, 24, 8, 18, 9, 16 y 12

(21) **(a)** m.c.d. (2, 64)= 2 ; m.c.m. (2, 64)= 64
(b) m.c.d. (20, 75)= 5 ; m.c.m. (20, 75)= 300
(c) m.c.d. (4,6,12)= 2 ; m.c.m. (4,6,12)= 12
(d) m.c.d. (6, 9,12)= 3 ; m.c.m. (6, 9,12)= 36

(22) De 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 o 60 bolas por estuche;
60, 30, 20, 25, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 estuche respectivamente.

(23) 30 libros como mínimo **(24)** Cada 420 segundos **(25)** Son 96 alumnos

(26) El lado de cuadrado debe medir 5 m y se obtienen 45 cuadrados **(27)** Cada 90 segundos

(28) $|-10| = 10$ $|-6| = 6$ $|+4| = 4$ $|7| = 7$

(29) −17 < −15 < −8 < −4 < 0 < 3 < 18 < 305 < 777

(30) 113> 67 > 32 > 21 > 0 > −3 > −14 > −25 > −705

(31) −9 **(32)** −1001 ; −999 **(33)** −6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 o 4 **(34)** 146 º ; −146 º

(35) −14 000 € ; 86 000 € **(36)** Respuesta abierta, por ejemplo, (−2)·28 = 4· (−14) = (−8)·7 = (−1) ·56

(37) **(a)** – 43 **(b)** – 9 **(c)** −12 **(d)** −13 **(e)** 8 **(f)** 108 **(g)** −125 **(h)** 3 **(i)** −12 **(j)** 8

(38) **(a)** 8·(−3 + 7 − 2) = 8· (−3) + 8·7 – 8·2 = −24 + 56 − 16 = 16

(b) −5·(6 + 4 − 9) = (−5)· 6 + (−5)·4 – (−5)·9 = −30 + (−20) – (−45) = −30−20+45= −5

(39) **(a)** 4·(−3) + 4·5 + 4·(−8) = 4·((−3) + 5 + (−8)) = 4· (−6) = −24

(b) −2·6 + (−2)·(−3) + (−2)·9 = (−2)·(6+ (−3) +9) = (−2)· 12 = −24

(40) Propiedad asociativa del producto

a	b	c	a·b	b·c	(a·b)·c	a·(b·c)
-3	6	-5	**- 18**	**- 30**	**90**	**90**
-1	-4	-9	**4**	**36**	**- 36**	**- 36**

Módulo de Matemáticas Aplicadas II

Nivel II de ESPAD

Unidad 1

Números racionales y números irracionales

Los números reales

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en la opción de **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en **Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas** en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

1- Números racionales del libro MATEMÁTICAS 3ºA de ESO (Autor: Paco Moya)

2- Potencias y raíces del libro MATEMÁTICAS 3ºA de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

1- Números reales del libro MATEMÁTICAS 4ºA de ESO (Autores: Paco Moya y María Molero)

ÍNDICE

1. NÚMEROS RACIONALES

1.1. Definición

Los **números racionales** son todos aquellos números que pueden expresarse mediante una fracción de números enteros.

Es decir, el número r es **racional** si $r = \frac{a}{b}$, con a, b números enteros y $b \neq 0$.

El nombre "racional" viene de "**razón**", que en matemáticas significa división o cociente.

El conjunto de todos los números racionales se representa por $\mathbf{Q}$.

Un número racional tiene infinitas representaciones en forma de fracción.

Así: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \ldots$ son infinitas fracciones que representan al mismo número racional, se llaman "**equivalentes**" puesto que tienen igual valor numérico. Si hacemos las divisiones en el ejemplo todas valen $0{,}333\ldots$ que es su expresión decimal.

Los números "*enteros*" son racionales puesto que se pueden expresar mediante una fracción, por ejemplo $-2 = \frac{-8}{4}$, es decir $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ (el conjunto $\mathbf{Z}$ está incluido en el conjunto $\mathbf{Q}$)

Todo número racional tiene un representante que es su **fracción irreducible**, aquella que tiene los números más pequeños posibles en el numerador y el denominador. A esta fracción se llega a partir de cualquier otra dividiendo el numerador y denominador por el mismo número. Si se quiere hacer en un solo paso se dividirá entre el Máximo Común Divisor (M.C.D.) del numerador y el denominador.

Ejemplo: $\frac{60}{80} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ donde hemos dividido primero entre 10 y después entre 2, pero podíamos haber dividido entre 20 directamente ya que 20 es el MCD(60, 80). Por tanto $3/4$ es la fracción irreducible y por ello la que representa al número racional que tiene otras muchas formas de fracción como $60/80 = 6/8 = 30/40 = 12/16 = 9/12 = 15/20 = 18/24 = 21/28 = 24/32 = 27/36$ ... y por expresión decimal $0{,}75$.

1.2. Los tres significados de una fracción

1. **Una fracción es una parte de la unidad**. Un todo se toma como unidad que se divide en partes iguales. La fracción expresa cuántas de esas partes iguales se toman.

   Ejemplo→ $\frac{2}{5}$ de un segmento indica un trozo del segmento obtenido dividiéndolo en 5 partes iguales y tomando 2 de esas partes.

2. **Una fracción es el cociente indicado de dos números**. Para transformar la fracción en un número decimal, se divide el numerador entre el denominador

   Ejemplo→ $\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0{,}4$

3. **Una fracción es un operador que transforma una cantidad dada.** Para calcular la fracción de un número, se divide el número por el denominador, y el resultado se multiplica por el numerador. También se puede hacer multiplicando primero el número por el numerador y dividiendo el resultado por el denominador. Otra forma equivalente de obtener la fracción de un número es transformar la fracción en número decimal y multiplicar el resultado por el número

Ejemplo→ $\frac{2}{5}$ de 10 mm son 4 mm porque $10{:}5{\cdot}2 = 2{\cdot}2 = 4$, o también $10{\cdot}2{:}5 = 20{:}5 = 4$, o también $2{:}5{\cdot}10 = 0{,}4{\cdot}10 = 4$

1.3. Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si se verifica cualquiera de las siguientes condiciones (todas las condiciones son equivalentes):

- Al hacer la división obtenemos la misma **expresión decimal**.

Ejemplo: $4 : 5 = 8 : 10 = 0{,}8$ luego $\frac{4}{5}$ y $\frac{8}{10}$ son equivalentes y puede escribirse $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$.

- Los **productos cruzados son iguales**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Es fácil de demostrar, multiplicamos a ambos lados del igual por b y por d: $\frac{a}{b} \cdot b \cdot d = \frac{c}{d} \cdot b \cdot d$, como $b : b = 1$ y $d : d = 1$ nos queda $a{\cdot}d = c{\cdot}b$.

Ejemplo: $\frac{12}{8} = \frac{6}{4}$ puesto que $12 \cdot 4 = 8 \cdot 6 = 48$

- **Al simplificar las fracciones se llega a la misma fracción irreducible.**

Si A = B y C = B a la fuerza A = C

Ejemplo: $\frac{80}{60} = \frac{4}{3}$; $\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; luego $\frac{80}{60} = \frac{12}{9}$

- **Se puede pasar de una fracción a otra multiplicando (o dividiendo) el numerador y el denominador por un mismo número.**

Ejemplo: $\frac{6}{4} = \frac{24}{16}$ pues basta multiplicar el numerador y el denominador de la primera por 4 para obtener la segunda. En general: $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}}$

Actividades propuestas 1

1. Coloca los numeradores y denominadores que faltan para que las fracciones de cada apartado sean equivalentes y comprueba la igualdad de los productos cruzados:

a) $\frac{24}{30} = \frac{\ }{5}$ b) $\frac{40}{56} = \frac{\ }{7}$ c) $\frac{48}{60} = \frac{\ }{50}$ d) $\frac{15}{50} = \frac{3}{\ }$ e) $\frac{35}{49} = \frac{5}{\ }$

2. Simplifica las siguientes fracciones hasta obtener la fracción irreducible equivalente:

a) $\frac{6}{24} =$ b) $\frac{8}{28} =$ c) $\frac{560}{3360} =$

1.4. Reducción a común denominador

Con objeto de comparar dos o más fracciones (ver cuál es mayor) y también para poder sumarlas o restarlas es importante obtener fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

Ejemplo→ Queremos saber si 5/6 es mayor que 6/7 sin hacer la división. Buscamos un múltiplo común de 6 y de 7 (si es el mínimo común múltiplo mejor, pero no es imprescindible), 42 es múltiplo de 6 y de 7. Lo escribimos como nuevo denominador para las 2 fracciones: $\frac{5}{6} = \frac{}{42}$; $\frac{6}{7} = \frac{}{42}$. Ahora calculamos los nuevos numeradores: como el 6 lo hemos multiplicado por 7 para llegar a 42 pues el 5 lo multiplicamos también por 7 para obtener una fracción equivalente: $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42}$; en la segunda fracción hemos multiplicado el denominador por 6 y tenemos que hacer lo mismo con el numerador: $\frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{36}{42}$.

Ahora está claro cuál de las dos fracciones es mayor: $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$

Para obtener fracciones equivalentes a $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con el **mismo denominador** buscamos un múltiplo común de b y d (el mejor es el m.c.m.), m, y multiplicamos numerador y denominador de cada fracción por el cociente de la división de m entre el denominador correspondiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \frac{m}{b}}{m} \text{ y } \frac{c}{d} = \frac{c \cdot \frac{m}{d}}{m}$$

1.5. Ordenación de fracciones

Para ordenar una serie de fracciones existen varios procedimientos:

i) **Hacer las divisiones y comparar las expresiones decimales**.

Este procedimiento es el más fácil pero no el más rápido (salvo que tengas calculadora).

Ejemplo: Nos piden que ordenemos de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{20}{19}; \frac{21}{20}; \frac{-20}{19}; \frac{-21}{20}; \frac{29}{30}; \frac{28}{29}$$

Hacemos las divisiones que dan respectivamente: 1,0526…; 1,05; –1,0526…; –1,05; 0,9666… y 0,9655… Mirando los números decimales sabemos que:

$$\frac{-20}{19} < \frac{-21}{20} < \frac{28}{29} < \frac{29}{30} < \frac{21}{20} < \frac{20}{19}$$

Recuerda→ **los números negativos son siempre menores que los positivos y además entre números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto (–4 < –3).**

Tienes que tener claro que **si a y b son positivos y $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$**

ii) Reducir a común denominador y comparar los numeradores.

Ejemplo: Para ordenar de mayor a menor las fracciones:

$$\frac{5}{6};\frac{7}{8};\frac{-9}{4};\frac{-7}{3};\frac{-2}{1}$$

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$$
$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$$
$$\frac{-9}{4}=\frac{-9\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{-54}{24}$$
$$\frac{-7}{3}=\frac{-7\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{-56}{24}$$
$$\frac{-2}{1}=\frac{-2\cdot 24}{1\cdot 24}=\frac{-48}{24}$$

Primero buscamos un número que sea múltiplo de 6, de 8, de 4 y de 3 (si es el mínimo común múltiplo mejor que mejor). Encontramos el 24 que es múltiplo de todos ellos. Lo ponemos como nuevo denominador de todas las fracciones y calculamos los nuevos numeradores para que las fracciones sean equivalentes:

24:6 = 4 luego el 6 hay que multiplicarlo por 4 para llegar a 24, lo mismo hacemos con el 5, 5·4 = 20 es el nuevo numerador. Así con las demás.

Después comparamos los numeradores y como 21 > 20 > -48 > –54 > –56, el orden de las fracciones es: $\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>-2>\frac{-9}{4}>\frac{-7}{3}$

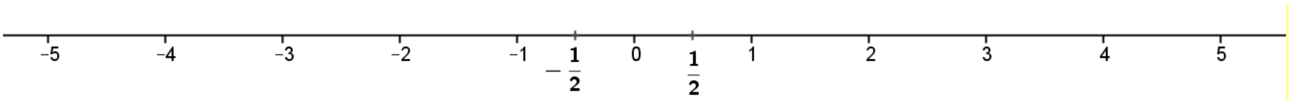
Actividades propuestas 2

1. Reduce las fracciones de cada apartado a un común denominador y ordénalas después de menor a mayor separando una de otra con el símbolo < :

   a) $\frac{4}{5},\frac{1}{3},\frac{7}{15}$ b) $\frac{5}{6},\frac{3}{4},\frac{7}{12}$ c) $\frac{5}{9},\frac{7}{18},\frac{7}{12}$

2. Calcula el valor decimal de las fracciones del ejercicio anterior y comprueba la ordenación.

1.6. Representación en la recta numérica



Ésta es la recta numérica, en ella todo número real tiene un lugar exacto.

Recuerda que

- Para dibujarla sólo se pueden tomar dos decisiones: donde colocamos el 0 y donde colocamos el 1, es decir, dónde está el origen y cuál es el tamaño de la unidad.
- Las unidades han de ser siempre del mismo tamaño.
- Los números positivos van a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda.
- El 0 no es ni positivo ni negativo.
- La recta numérica no tiene ni principio ni fin, sólo podemos dibujar una "pequeña" parte.
- Dos números ***a***, ***b*** siempre se pueden comparar y se cumple que ***a* < *b* si *a* está a la izquierda de *b*** y viceversa (cuanto más a la izquierda esté un número menor es)

  Ejemplos: 1 < 3; –1 < 1; –4 < –2; –1 < –1/2

Todo número racional tiene una posición predeterminada en la recta numérica. Las infinitas fracciones equivalentes que forman un número racional están representadas en el mismo punto de la recta. Así que 1/2 y 2/4, que son el mismo número están en el mismo punto.

Veamos como representar las fracciones de forma exacta según el tipo de fracción.

Fracción propia, fracción impropia y forma mixta

Fracción propia: Se dice de una fracción ***a/b*** donde ***a* < *b*,** es decir, el numerador es menor que el denominador. **La expresión decimal de una fracción propia es, en valor absoluto, menor que 1**.

Ejemplos: 4/5 y 99/100 son fracciones propias, 4/5 = 4:5 =0,8 y 99/100=99:100=0,99

Fracción impropia: Se dice de una fracción a/b donde a > b, numerador mayor que el denominador. La expresión decimal de una fracción propia es, en valor absoluto, un número mayor que 1

Ejemplos: 15/4 y -37/27 son fracciones impropias, 15/4 = 3,75 y -37/27 = -1,37037037…

Número mixto: Las fracciones impropias pueden escribirse como la suma de un número entero y de una fracción propia.

Ejemplo: $\frac{9}{5}=\frac{5+4}{5}=1+\frac{4}{5}$, *ésta última es la forma mixta.*

En España no es frecuente, pero en el mundo anglosajón suele escribirse $1\frac{4}{5}$ *que significa lo mismo.*

Ejemplo de paso de una fracción impropia a número mixto: $\frac{77}{6}$ es impropia pues 77 > 6, para escribirla en forma mixta hacemos la división entera 77 : 6, es decir, sin decimales, ya que lo que nos interesa es el cociente, que es 12, y el resto, que es 5. Por lo tanto $\frac{77}{6}=12+\frac{5}{6}$ **El cociente es la parte entera, el resto es el numerador de la fracción propia y el divisor es el denominador.**

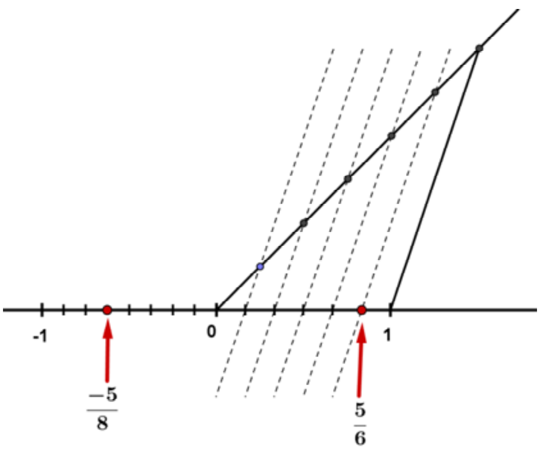
Es importante que lo intentes hacer de cabeza (cuando sea razonable), por ejemplo, para pasar a forma mixta la fracción impropia 47/6, buscamos el múltiplo de 6 más cercano a 47 por abajo, éste es 7 · 6 = 42, por tanto: 47/6 = 7 + 5/6 puesto que de 42 a 47 van 5. Piénsalo, si nos comemos 47/6 de pizza, nos hemos comido 7 pizzas enteras y además 5/6 de pizza.

Si la fracción es negativa procedemos de la siguiente forma: $\frac{-19}{5}=-\left(3+\frac{4}{5}\right)=-3-\frac{4}{5}$

a) Representación de una fracción propia:

Ejemplo: Para representar la fracción 5/6, como el valor está entre 0 y 1, dividimos la primera unidad en 6 partes iguales y tomamos 5.

En la figura se indica cómo hacerlo de forma exacta usando el ***Teorema de Tales***. Trazamos una recta oblicua cualquiera que pase por 0 y sobre ella marcamos con el compás 6 puntos a igual distancia entre sí (la que sea, pero igual). Unimos el último punto con el 1 y trazamos paralelas a ese segmento que pasen por los puntos intermedios de la recta oblicua (las líneas discontinuas). Estas rectas paralelas dividen el intervalo [0, 1] en 6 partes iguales. Fíjate que para dividir en 6 partes iguales sólo hay que marcar 5 puntos intermedios a igual distancia, siempre uno menos.



Si la fracción es negativa se hace igual pero en el intervalo [–1, 0]. En la figura hemos representado –5/8, hemos dividido el intervalo [–1, 0] en 8 partes iguales y hemos contado 5 empezando en 0.

Si queremos representar una fracción propia positiva, ***a/b***, **se divide la primera unidad en "*b*" partes iguales y se cuentan "*a*" divisiones a partir de 0.** En caso de ser **negativa** se hace igual pero contando desde 0 hacia la izquierda.

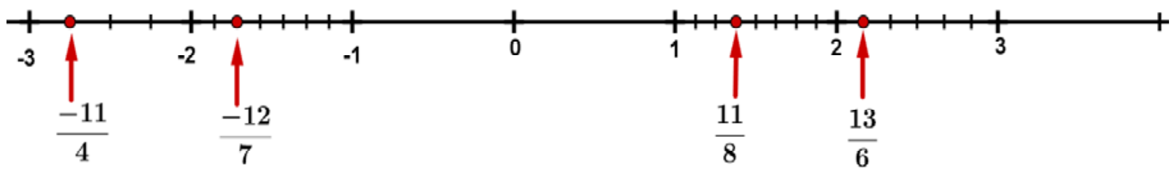
b) Representación de una fracción impropia:

Ejemplos:

Para representar 13/6 lo primero es escribirla en su forma mixta, 13/6=2+1/6, ahora es fácil representarla, nos vamos al 2, la unidad que va del 2 al 3 la dividimos en 6 partes iguales y tomamos 1.

Para 11/8=1+3/8, nos vamos a la unidad que va del 1 al 2 la dividimos en 8 partes iguales y tomamos 3.

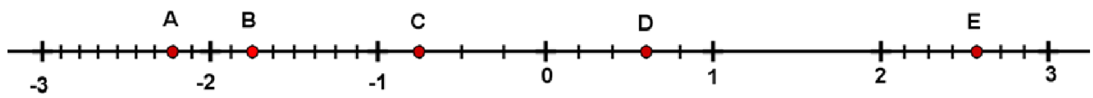
Si la fracción es negativa, como $\frac{-12}{7}$, pasamos a forma mixta $\frac{-12}{7}=-\left(1+\frac{5}{7}\right)=-1-\frac{5}{7}$, nos vamos a la unidad que va del –1 al –2, la dividimos en 7 partes iguales y contamos 5 hacia la izquierda empezando en –1.



Para representar $\frac{-11}{4}$, como $\frac{-11}{4}=-\left(2+\frac{3}{4}\right)=-2-\frac{3}{4}$ nos vamos a la unidad que va de –2 a –3, dividimos en 4 partes iguales y tomamos 3, contando hacia la izquierda y empezando en –2.

Actividades propuestas 3

1. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones: $\frac{50}{7};\frac{25}{11};\frac{101}{6}$
2. Pasa a forma mixta las siguientes fracciones: $\frac{-30}{7};\frac{-50}{13};\frac{-100}{21}$
3. Representa en la recta numérica las fracciones : $\frac{1}{5};\frac{3}{7};\frac{-5}{8};\frac{-3}{4}$
4. Pasa a forma mixta y representa las fracciones: $\frac{23}{8};\frac{-23}{8};\frac{180}{50};\frac{-26}{6}$
5. Halla las fracciones que se corresponden con los puntos A, B, C, D y E, expresando en forma mixta y como fracción impropia las representadas por los puntos A, B y E.



1.7. Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

Debes tener presente que sólo pueden sumarse o restarse cosas "iguales". No podemos sumar metros con segundos, ni euros con litros. De la misma forma no pueden sumarse tercios con quintos, ni cuartos con medios. Es decir, no se puede hacer la suma $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ así tal cual, ya que los sextos y los cuartos son de distinto tamaño. Para poder hacer la suma, antes es necesario hallar fracciones equivalentes a cada uno de los sumandos que tengan el mismo denominador.

Veamos el ejemplo: Un múltiplo de 6 y 4 es 12. Escribimos 12 como nuevo denominador y hallamos los numeradores para que las fracciones sean equivalentes:

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{10}{12}+\frac{9}{12}=\frac{19}{12}$$ (los doceavos ya sí se pueden sumar, y el resultado son doceavos)

Otro ejemplo: $\frac{13}{6}-\frac{51}{10}+\frac{8}{12}=\frac{130}{60}-\frac{306}{60}+\frac{40}{60}=\frac{130-306+40}{60}=\frac{-136}{60}=\frac{-34}{15}$

Hallamos un múltiplo de 6, de 10 y de 12 (60 es el mínimo común múltiplo), se escribe como denominador común y hacemos 60 : 6 = 10, luego el 13 lo multiplicamos por 10, 60:10 = 6 luego el 51 lo multiplicamos por 6, etc.

Cuando todas las fracciones tienen igual denominador, se suman o restan los numeradores, dejando el mismo denominador. Si es posible se simplifica la fracción resultante.

En general, se define la suma de dos fracciones con la fórmula $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}}$

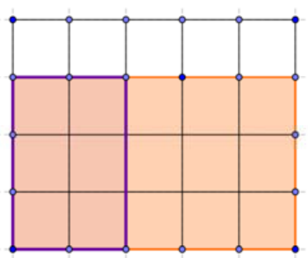
Ejemplo: $\frac{15}{387}+\frac{19}{155}=\frac{15\cdot 155+19\cdot 387}{387\cdot 155}=\frac{9678}{59985}=\frac{3226}{19995}$

Producto de fracciones

Para multiplicar dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí para determinar, respectivamente, el numerador y el denominador de la fracción producto: $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$

Ejemplo: $\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 5}{11\cdot 7}=\frac{15}{77}$

Vamos a explicar la razón de que las fracciones se multiplican así con un ejemplo: $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ significa hallar 2/5 de 3/4. Imagina que la unidad, o el todo, es el rectángulo de la imagen. Para representar los ¾ del rectángulo hay que dividirlo en 4 partes iguales y coger 3 (las 3 franjas inferiores de la figura). Ahora debemos hacer 2/5 de lo que nos ha quedado, esas 3 franjas las dividimos en 5 partes iguales y tomamos 2. Como puede verse nos quedan 6 partes iguales de las 20 totales, por



eso $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$

A veces conviene hacer la multiplicación con inteligencia, como en el siguiente ejemplo

$$\frac{17}{15}\cdot\frac{5}{17}=\frac{\cancel{17}\cdot 5}{15\cdot\cancel{17}}=\frac{1\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{3}$$

Antes de multiplicar nos fijamos en que el 17 se puede simplificar (¿para qué vamos a multiplicar por 17 y luego dividir por 17?) y después simplificamos el 5 puesto que 15=3·5.

Haz tú $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}$ (esperamos que llegues al resultado correcto ya simplificado que es 1/6) ☺

Conviene simplificar los cálculos siempre que se pueda, pero presta atención para hacerlo correctamente y no hacer barbaridades como las siguientes:

$$\frac{\cancel{7}+3}{\cancel{7}+5}=\frac{3}{5}$$

La igualdad anterior es **absolutamente falsa** (10/12 = 5/6 es el resultado correcto y no 3/5).

$$\frac{\cancel{7}\cdot 2+3}{\cancel{7}\cdot 4+5}=\frac{2+3}{4+5}$$

La igualdad anterior también **es una barbaridad** (17/33 es el resultado correcto y no 5/9)

Fracción inversa

La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$ pues se cumple que $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$, que es la definición de inverso.

Ejemplos: La inversa de 3/4 es 4/3 y la inversa de 2 es 1/2.

División de fracciones

Para dividir la fracción $\frac{a}{b}$ entre $\frac{c}{d}$ se multiplica la primera fracción por la inversa de la segunda:

$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$ (se ponen los productos cruzados, a·d en el numerador y b·c en el denominador).

Ejemplo: $\frac{6}{10}:\frac{12}{15}=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{12}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3}=\frac{3}{4}$ También puedes multiplicar y luego simplificar: $\frac{90}{120}=\frac{3}{4}$

Presta atención a los siguientes casos particulares:

- Dividir entre 1/*a* es lo mismo que multiplicar por *a*.

  Ejemplo: Dividir entre una décima es multiplicar por 10 ya que $a:\frac{1}{10}=\frac{a}{1}\cdot\frac{10}{1}=\frac{10a}{1}=10a$

- Dividir entre un número es como multiplicar por su inverso: $a:2=a\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$

- ***Torres de fracciones:*** No te asustes si tienes que hacer algo como esto $\dfrac{\frac{6}{10}}{\frac{4}{15}}$, es muy fácil, es lo mismo que $\frac{6}{10}:\frac{4}{15}=\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{3\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 4}=\frac{9}{4}$, no olvides que “__” es lo mismo que “:”

Potencias

Significado de una potencia de exponente entero positivo:

Dado a, un número cualquiera, y n, un número natural, la potencia a^n es el producto del número a por sí mismo n veces : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \ldots a}_{\text{n factores}}$

Ejemplo → $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$

Propiedades de las potencias:

a) El producto de potencias de la misma base es igual a otra potencia de la misma base y como exponente la suma de los exponentes: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ejemplo → $3^2 \cdot 3^4 = (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

b) El cociente de potencias de la misma base es igual a otra potencia que tiene como base la misma, y como exponente la diferencia de los exponentes: $a^n : a^m = a^{n-m}$

Ejemplo → $5^5/5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5^{5-3} = 5^2$

c) La potencia de una potencia es igual a la potencia cuyo exponente es el producto de los exponentes: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo → $(7^2)^3 = (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7) = 7^6$

d) El producto de potencias de distinta base con el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el producto de las bases y cuyo exponente es el mismo: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

Ejemplo → $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 5)^2$

e) El cociente de potencias de distinta base y el mismo exponente es igual a otra potencia cuya base es el cociente de las bases y cuyo exponente es el mismo: $a^n/b^n = (a/b)^n$

Ejemplo → $8^3/7^3 = (8 \cdot 8 \cdot 8) / (7 \cdot 7 \cdot 7) = (8/7) \cdot (8/7) \cdot (8/7) = (8/7)^3$

Por definición ***$a^0=1$ para cualquier número $a\neq 0$*** y ***$a^1=a$***

La razón de la primera definición es la aplicación de la propiedad b) al caso en el que las dos potencias que tienen la misma base tengan también el mismo exponente:

$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$, pero evidentemente tiene que ser $\frac{a^n}{a^n} = 1$

Significado de una potencia de exponente negativo: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ por definición

Con el siguiente ejemplo entenderás la razón de la anterior definición:

$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a} = \frac{1}{a\cdot a} = \frac{1}{a^2}$, pero aplicando la propiedad b) $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$

Cuando la base de la potencia es una fracción la definición anterior conduce al siguiente resultado:

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ ya que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Operaciones combinadas. Prioridad de las operaciones

Recuerda→ Para hacer varias operaciones combinadas hay que seguir el siguiente orden, respetando la prioridad de una operaciones sobre otras:

1º Se hacen las operaciones de los paréntesis, empezando por los más interiores.

2º Las potencias y las raíces

3º Las multiplicaciones y divisiones.

4º Las sumas y restas.

Si hay varias operaciones con igual prioridad se harán de izquierda a derecha.

Ejemplo→ Calcula paso a paso y simplifica: $\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{3}\right)$

Primero hacemos el paréntesis de más adentro y la multiplicación del segundo paréntesis que tiene prioridad sobre la resta:

$$\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{3}{4}-\left(\frac{-1}{6}\right)\right):\left(\frac{7}{14}-\frac{2}{14}\right)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\frac{5}{14}=\left(\frac{9}{12}+\frac{2}{12}\right):\frac{5}{14}=\frac{11}{12}\cdot\frac{14}{5}=\frac{11\cdot 7\cdot 2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{77}{30}$$

Actividades propuestas 4

1. Realiza las operaciones y expresa el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $3-\frac{7}{9}+\frac{4}{6}+\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)$ c) $2-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{5}:\frac{2}{3}+\frac{1}{6}$ d) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\frac{2}{9}$

2. Opera y expresa el resultado en forma de fracción irreducible:

a) $\left(\frac{-1}{3}\right)^4$ b) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$ c) $\left(\frac{-1}{7}\right)^{-2}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}$

3. Opera y expresa el resultado simplificado como única potencia de exponente positivo:

a) $\left(\frac{-3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)^{-8}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^6\cdot\left(\frac{-8}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{-3}{7}\right)^6$ c) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-4}$

1.8. Expresión decimal y fraccionaria de un número racional

Paso de expresión como fracción a expresión decimal

Toda fracción tiene una expresión decimal que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador (***a/b = a:b***) ***La expresión decimal de una fracción es exacta o periódica.***

Ejemplos: $\frac{3}{25}=0{,}12$; $\frac{68}{99}=0{,}686868...$; $\frac{91}{80}=1{,}1375$; $\frac{177}{90}=1{,}9666...$

Como puedes observar unas veces la expresión decimal es exacta (puesto que el resto de la división sale 0) y otras veces sale periódica, infinitos decimales entre los que se repite un bloque de cifras que se denomina **periodo**.

¿Cuándo sale exacta y cuándo periódica? **Si en el denominador de una fracción irreducible aparecen factores primos distintos de 2 y de 5 la expresión decimal será periódica, mientras que si solamente aparecen como factores primos 2 y 5 la expresión decimal será exacta.**

Hallar la fracción generatriz de una expresión decimal exacta o periódica

Los números decimales exactos o periódicos pueden expresarse como una fracción de enteros.

-Paso de decimal exacto a fracción

Es muy fácil, mira los ejemplos de la derecha.

Se pone en el numerador el número sin la coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene. Después se simplifica la fracción.

$$1{,}175=\frac{1175}{1000}=\frac{47}{40}$$

$$20{,}68=\frac{2068}{100}=\frac{517}{25}$$

$$3{,}1416=\frac{31416}{10000}=\frac{3927}{1250}$$

-Paso de decimal periódico a fracción

Ejemplo: Nos piden expresar el número 7,3252525... en forma de fracción de enteros.

Lo primero que hacemos es ponerle un nombre, por ejemplo N = 7,3252525…, lo segundo es conseguir dos números con la misma parte decimal.

El anteperiodo tiene 1 cifra y el periodo 2. Para conseguir la misma parte decimal multiplicamos por 1000 y la coma se va hasta después del primer periodo, si multiplicamos por 10 la coma se va hasta delante del primer periodo.

$$\begin{array}{rl} 1000N = & 7325{,}2\cancel{5}25\ldots \\ -\quad 10N = & 73{,}2\cancel{5}25\ldots \\ \hline 990N = & 7252 \end{array} \Rightarrow N=\frac{7252}{990}=\frac{3626}{495}$$

Ya tenemos dos números con la misma parte decimal, si los restamos ésta desaparece y podemos despejar N. Fíjate que la resta se hace en los dos miembros a la vez.

En general, para hallar la expresión como fracción de un número periódico, multiplicamos el número por la potencia de 10 necesaria para llevarnos la coma al final del primer periodo, luego lo multiplicamos otra vez para que la coma quede al principio del primer periodo, restamos las dos expresiones con el mismo período y despejamos el número.

Otro ejemplo: N = 15,25636363…

¿Cómo conseguir dos números con la parte decimal ,636363…?

Pues lo más fácil es 10000 N = 152563,6363… y 100 N = 1525,6363…

Restamos: 9900 N = 151038 ➔ $N=\frac{151038}{9900}=\frac{75519}{4950}=\frac{8391}{550}$

Otro ejemplo: N = 4,545454…

$$\begin{array}{rl} 100\,N = & 454{,}5454\ldots \\ N = & 4{,}5454\ldots \\ \hline 99\,N = & 450 \end{array} \rightarrow N=\frac{450}{99}=\frac{50}{11}$$

Puedes comprobar que 50:11=4,545454….

Más ejemplos:

N	10N –	1N =	9N	
1,333…	13,333… –	1,333… =	12	N = 12/9
N	100N –	10N =	90N	
5,6777…	567,77… –	56,77… =	511	N = 511/90
N	1000N –	100N =	900N	
8,65888 …	8658,88… –	865,88… =	7793	N = 7793/900

Observa que siempre el entero que queda en la fracción resultante tiene tantas cifras 9 como cifras tenía el periodo, y tantas cifras 0 como cifras tenía el anteperiodo.

Actividades propuestas 5

2. Pasa a fracción y simplifica: a) 1,4142 b) 0,125 c) 6,66

3. Pasa a fracción y simplifica: a) 1,41424142… b) 0,125125… c) 6,666…

4. Pasa a fracción y simplifica: a) 1,041424142… b) 0,7125125… c) 6,7666…

5. Pasa a fracción cada número decimal y calcula:

A. 0,333… + 0,666…

B. 0,888… · 2,5

C. 0,65 : 0,656565…

1.9. Problemas con fracciones

Vamos a recordar algunos conceptos esenciales en la resolución de problemas con fracciones:

a) Fracción de un número:

Para hallar una fracción $\frac{a}{b}$ de un número c, se multiplica la fracción por el número $\frac{a}{b} \cdot c$

Ejemplo→ Para hallar las tres cuartas partes de 120.

Traducimos: hallar $\frac{3}{4}$ de 120. Este "de" se traduce en matemáticas por un "por", luego:

$$\frac{3}{4} \ de\ 120 = \frac{3}{4} \cdot 120 = \frac{3 \cdot 120}{4} = 3 \cdot 30 = 90$$

b) Fracción de una fracción:

Ejemplo→ $\frac{10}{6} \text{ de } \frac{4}{15} = \frac{10}{6} \cdot \frac{4}{15} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9}$

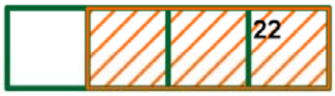
Ejemplo→ *Halla las dos quintas partes de las diez doceavas partes de 360.*

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{12} \cdot 360 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 360}{5 \cdot 12} = \frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot 60}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6}} = 120$$

c) Problema inverso (hallar el total sabiendo el valor de una fracción)

Ejemplo→ *Me dicen que las tres cuartas partes de un número valen 66. ¿Qué número es?*

Está claro que un cuarto será 66 : 3 = 22 y los 4 cuartos son 22·4 = 88. Los dos pasos del razonamiento anterior equivalen a multiplicar 66 por la fracción inversa de $\frac{3}{4}$, $66 \cdot \frac{4}{3} = 88$



$$\frac{a}{b} \cdot x = c \Leftrightarrow x = c \cdot \frac{b}{a}$$

Actividades propuestas 6

6. Halla las cuatro quintas partes de las tres cuartas partes de 12.

7. Las cinco sextas partes de un número son 100, ¿qué número es?

EJEMPLOS RESUELTOS DE PROBLEMAS CON FRACCIONES

i)	*¿Cuántos litros hay en* 80 *botellas de* 3 *cuartos de litro cada una?*

Puedes ponerte un ejemplo con números más fáciles para tener claro qué operación debes hacer.

Si tengo 10 botellas cada una de 2 litros, está claro que tenemos 20 litros; ¿qué operación hemos hecho?, multiplicar, pues lo mismo hacemos con los números del problema:

$$80\,\text{botellas} \cdot \frac{3}{4}\frac{\text{litros}}{\text{botella}} = 80 \cdot \frac{3}{4}\,\text{litros} = 60\,\text{litros}$$

(Observa que botellas se simplifican con botellas y las unidades finales son litros).

ii)	*¿Cuántas botellas de* 3 *octavos de litro necesito para envasar* 900 *litros?*

Nuevamente ponemos un ejemplo con números más sencillos: si quiero envasar 10 litros en botellas de 2 litros, está claro que necesito 5 botellas (10 : 2). Hacemos lo mismo con los datos:

$$900\,\text{litros} : \frac{3}{8}\frac{\text{litros}}{\text{botella}} = 900\,\text{litros} \cdot \frac{8}{3}\frac{\text{botellas}}{\text{litro}} = 900 \cdot \frac{8}{3}\,\text{botellas} = 2400\,\text{botellas}$$

(Fíjate que litros se simplifica con litros y que las botellas que dividen en el denominador pasan multiplicando en el numerador, por lo que unidad del resultado es “botellas”) .

iii)	*Ana gana cierto dinero al mes, se gasta el 2/5 partes de lo que gana en pagar la letra del piso, 3/4* ***de lo que le queda*** *en facturas y le sobran* 90 € *para comer. ¿Cuánto gana y cuánto gasta en el piso y en facturas?*

Si a una cantidad le quitamos sus 2/5 quedan 3/5 de ella (1 – 2/5 = 5/5 – 2/5=3/5)

En facturas gasta $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ del sueldo. De los 3/5 que tenía restamos los 9/20 gastados para calcular la fracción de sueldo que queda: $\frac{3}{5}-\frac{9}{20}=\frac{12}{20}-\frac{9}{20}=\frac{3}{20}$

Esos 3/20 de sueldo nos dicen que son 90 €. Por lo tanto 1/20 serán 90 : 3 = 30 €.

La cantidad total son los 20/20 luego 30 · 20 = <u>600 € es el dinero que Ana gana al mes</u>.

Conviene comprobar la solución del problema:

2/5 de 600 € = 240 € se gasta en la letra.

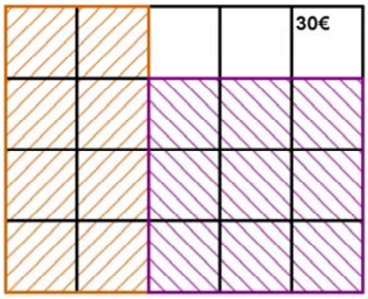
600 – 240 = 360 € quedan después de pagar la letra.

3/5 de 360 = 270 € se gasta en facturas.

360 – 270 = 90 € le quedan para comer. ¡Correcto!

También puedes hacer los razonamientos ayudándote de un gráfico:

Hacemos un rectángulo de 5 x 4 cuadrados que son los denominadores. De las 5 franjas verticales iguales quitamos 2 que es lo que se gasta en la letra del piso. Lo que queda está dividido en 4 partes iguales y quitamos 3 que es lo que se gasta en facturas. Nos quedan 3 cuadraditos que son los 90 € de la comida. Luego un cuadradito es 90 : 3 = 30 €.



Lo que gana es 30 · 20 = 600 €.

En la letra se gasta **30 · 8 = 240 €** y en facturas **30 · 9 = 270 €**.

iv) *A Juan le descuentan la quinta parte de su sueldo bruto en concepto de IRPF y la sexta parte del mismo para la Seguridad Social. Si cobra* 600 € *netos, ¿cuál es su sueldo bruto?*

Sumamos las dos fracciones puesto que se refieren a la misma cantidad: $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{11}{30}$

que es la parte que hay que descontar del sueldo bruto para obtener el neto:

$1-\frac{11}{30}=\frac{30}{30}-\frac{11}{30}=\frac{19}{30}$ del sueldo bruto es el sueldo neto, y nos dicen que son 600 €.

Para calcular el sueldo bruto multiplicamos esta cantidad final por la fracción inversa de 19/30:

$600\cdot\frac{30}{19}\approx 947{,}37\,€$ es el sueldo bruto.

Comprobación: 1/5 de 947,37 = 189,47 € paga de IRPF

1/6 de 947,37 = 157,90 € paga a la S.S.

947,37 – 189,47 – 157,90 = 600 € que es el sueldo neto. ¡Bien!

(Podría haber habido un pequeño desfase de algún céntimo debido a las aproximaciones)

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN 1

1. Ordena de **mayor a menor**: $\frac{5}{6}; \frac{7}{8}; \frac{-7}{8}; \frac{-5}{6}; \frac{-5}{4}$

2. Representa en la recta numérica: $\frac{3}{4}; \frac{17}{6}; \frac{-11}{7}; -0{,}125$

3. Opera paso a paso y simplifica: $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}:\left(2-\frac{11}{3}\right)}{\frac{2}{6}}$

4. Halla las cuatro quintas partes de los cinco octavos de 360.

5. Una botella tiene llenas sus siete octavas partes; si contiene 840 cm^3, ¿cuánto le cabe llena?

6. Opera y expresa el resultado en forma de fracción irreducible: $\left(\frac{2}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3}$

7. Simplifica las siguientes fracciones, halla su valor decimal y di cuáles tienen expresión decimal exacta y cuáles periódica : $\frac{6}{120}; \frac{5}{180}; \frac{42}{150}$

8. Pasa a fracción y simplifica: (a) 2,225 (b) 2,2252525... (c) $\dfrac{0{,}125}{0{,}125125125...}$

9. Una medusa crece cada semana un tercio de su volumen.

a) ¿Cuántas semanas deben pasar para que su volumen se multiplique por más de 3?

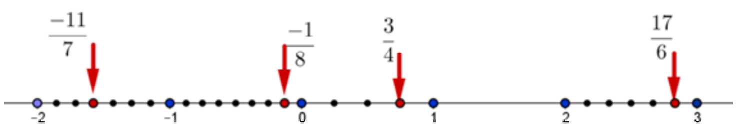
b) Si su volumen actual es de 1200 cm^3, ¿cuál era su volumen hace 3 semanas?

10. A un trabajador le bajan el sueldo la sexta parte, de lo que **le queda** la cuarta parte se va destinado a impuestos y por último del resto que **le queda** las dos quintas partes se las gasta en pagar la hipoteca del piso. Si aun tiene disponibles 450 €, ¿cuánto cobraba antes de la bajada de sueldo?, ¿cuánto paga de impuestos y de hipoteca?

Soluciones:

(1) $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{-5}{6} > \frac{-7}{8} > \frac{-5}{4}$.

(2)



(3) 7/2 (4) 180 (5) 960 cm^3 (6) 25/4

7) Expresiones exactas $\frac{6}{120}=\frac{1}{20}=0{,}05$ y $\frac{42}{150}=\frac{7}{25}=0{,}28$. Expresión periódica $\frac{5}{180}=\frac{1}{36}=0{,}02777...$

8) (a) $\frac{89}{40}$ (b) $\frac{2203}{990}$ (c) $\frac{999}{1000}=0{,}999$

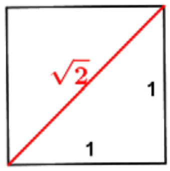
9) a) 4 semanas. b) 506,25 cm^3.

10) Cobraba 1200 €. Ahora cobra 1000 €, paga 250 € de impuestos y 300 € de hipoteca.

2-NÚMEROS IRRACIONALES

El descubrimiento de los números irracionales fue una conmoción para los matemáticos griegos del siglo VI a. C. porque contradecía su concepción filosófica y hacía que su sueño de expresar la armonía del universo por medio de relaciones entre números enteros resultara imposible de alcanzar. El mismo Pitágoras descubrió el número irracional cuando menos se lo esperaba, cuando estudiaba el triángulo rectángulo isósceles o, dicho de otra forma, analizando la diagonal del cuadrado.

Pitágoras fue el primero en enunciar y demostrar la ley general que todo el mundo conoce como **teorema de Pitágoras** y que dice que en cualquier triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre el lado opuesto al ángulo recto (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados (catetos).



Si los lados de los dos catetos son iguales a 1, entonces el cuadrado de la hipotenusa es igual a 2, al ser $1^2+1^2=2$, y la hipotenusa, por lo tanto, es igual a la raíz cuadrada de 2, o $\sqrt{2}$ en notación moderna ($\sqrt{2}$ es el número cuyo cuadrado es 2). Pero es fácil demostrar que no existe ningún número entero ni tampoco fraccionario que multiplicado por sí mismo dé exactamente 2. Hoy escribimos que $\sqrt{2}=1{,}4142135624\ldots$, y añadimos los puntos suspensivos para indicar que el número de decimales es infinito sin que haya periodicidad que nos permita llegar al final de la operación. Estos números recibieron el nombre de "irracionales" por ser inexpresables como razón de números enteros y escapar al razonamiento. Pero a pesar de ello, la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de lado 1 está ahí y tiene una longitud tan real como la de los catetos, aunque esta medida solamente se puede expresar con decimales de manera aproximada, nunca de manera exacta.

Llamamos n**úmeros irracionales** a aquellos números reales que ***no pueden expresarse mediante una fracción de números enteros.*** El conjunto de los números irracionales se representa por I.
La expresión decimal de un número irracional es infinita no periódica.

Todas las raíces cuadradas de números que no sean cuadrados perfectos son número irracionales.

Ejemplos: son irracionales $\sqrt{3}=1{,}73205080\ldots$, $\sqrt{5}=2{,}23606797\ldots$, $\sqrt{10}=3{,}16227766\ldots$

En general, s**i** p **es un número entero y** $\sqrt[n]{p}$ **no es un número entero (es decir,** p **no es una potencia n-ésima), entonces** $\sqrt[n]{p}$ **es irracional**

*Ejemplos :*son irracionales $\sqrt[3]{2}=1{,}2599210\ldots$, $\sqrt[4]{1000}=5{,}62341325\ldots$, $\sqrt[5]{-2}=-1{,}14869835\ldots$

Otro número irracional famoso es **π** (**el número que resulta de dividir la longitud de cualquier circunferencia entre su diámetro**).

Demostrar que el número π es irracional no es tan sencillo como en el caso de $\sqrt{2}$ y hasta el siglo XVIII se seguían calculando decimales intentando hallar un periodo que no existe. La demostración fue realizada por Lambert (matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán) en 1766.

Actividades propuestas 7

Indica a qué conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$) pertenecen los siguientes números:

(a) – 3, 52 (b) $\sqrt{4}$ (c) $\sqrt[3]{-7}$ (d) 0,333... (e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $\frac{-3}{11}$

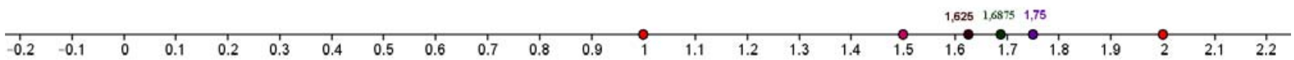
3. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

3.1. Definición y representación de los números reales en la recta real

El conjunto formado por los números racionales y los números irracionales se llama **conjunto de los números reales** y se representa por **R** ($\mathrm{R} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$, el símbolo $\cup$ significa unión de conjuntos)

Los números reales se pueden representar sobre una recta, de forma que a cada número real le corresponde un punto de la recta y viceversa, a cada punto de la recta le corresponde un número real. Esta segunda parte, es la propiedad de completitud de los números reales y la que los distingue de los números racionales (que no llenan la recta). Por esta equivalencia entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales llamamos **recta real** a una recta en la que representamos los números reales.

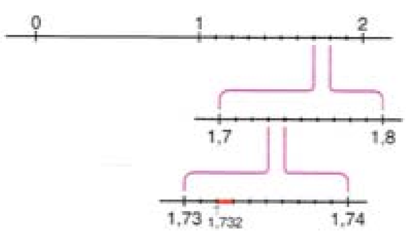
Recuerda que para representar números en una recta se elige un punto cualquiera de la misma que representa el número 0 y una longitud unidad (o lo que es lo mismo, un punto a la derecha de 0 que representa el número 1)



Otra propiedad de los números reales, que también tienen los racionales y los irracionales, es la *densidad,* es decir que entre dos números reales cualesquiera hay infinitos números. Esta propiedad se puede demostrar fácilmente, ya que si a y b son dos números con a<b, es evidente que el número $\frac{a+b}{2}$ está en el **punto medio** entre ellos. Por ejemplo, el punto medio del segmento de extremos los puntos que representan a los números reales 1 y 2 es el punto que representa al número real $\frac{1+2}{2}=1{,}5$. Podemos dividir de la misma manera el segmento de extremos 1,5 y 2 para obtener el punto medio $\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$. Podríamos volver a dividir el segmento de extremos 1,5 y 1,75 para obtener el punto medio 1,625, y así indefinidamente, porque entre dos números reales cualesquiera hay infinitos números reales.

Ya vimos cómo representar los números racionales en la recta real.

Para representar algunos números irracionales de forma exacta en la recta real se usan construcciones geométricas basadas en el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, para representar $\sqrt{10}$ se dibuja un triángulo rectángulo de base 3 unidades y de altura 1 unidad porque la hipotenusa de este triángulo mide exactamente $\sqrt{10}$ unidades. Solamente hay que llevar con el compás un segmento de esta longitud sobre la recta real con el extremo izquierdo en 0 y el extremo derecho representará el número real $\sqrt{10}$



Pero, en general, será suficiente con una representación aproximada a partir del valor decimal aproximado del número real (con la precisión que cada situación requiera).

Por ejemplo, para representar el número real $\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots$ podemos situarlo de forma aproximada entre 1,7 y 1,8, o con una representación más fina, entre 1,73 y 1,74, o con una representación aún más fina, entre 1, 732 y 1,733, etc.

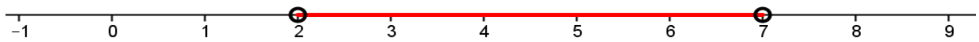
3.2. Intervalos en la recta real

Hay una notación especial para referirse a los infinitos números reales que hay entre dos números. Para referirnos al conjunto de los números que hay entre dos valores pero sin contar los extremos, usamos un **intervalo abierto**.

Ejemplo→ Los números superiores a 2 pero menores que 7 se representan por $(2,\ 7)$ y se lee "intervalo abierto de extremos 2 y 7". A él pertenecen infinitos números como $2{,}001$; π; $3{,}5$; $\sqrt{20}$; 5; $6{,}999$; … pero no son de este conjunto ni el 2 ni el 7. Eso representan los paréntesis, que entran todos los números de en medio pero no los extremos. También conviene familiarizarse con la expresión de estos conjuntos usando desigualdades: $(2,\ 7) = \{x \in R \,/\, 2 < x < 7\}$.

Traducimos: Las llaves se utilizan para dar los elementos de un conjunto, dentro de ellas se enumeran los elementos o se da la propiedad que cumplen todos ellos. Se utiliza la x para denotar a un número y el símbolo $\in$ (pertenece) para indicar que es real (pertenece al conjunto de los números reales, R), la barra / significa "tal que" (en ocasiones se usa, con el mismo significado, otros símbolos como la barra vertical, | , dos puntos, **:**, o punto y coma, ;) y por último se dice la propiedad que cumplen mediante una doble desigualdad. Así que lo de arriba se lee: *el intervalo abierto de extremos 2 y 7 es el conjunto de números reales tales que son mayores que 2 y menores que 7.*

Para la representación gráfica del intervalo abierto (2, 7) en la recta real se ponen pequeños círculos sin rellenar en los extremos y se resalta la zona intermedia. En ocasiones también se pueden poner en el 2 y en el 7 paréntesis: "( )", o corchetes al revés: "] [".



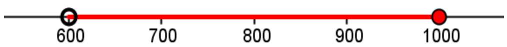
El concepto de **intervalo cerrado** es similar pero ahora sí pertenecen los extremos al conjunto.

Ejemplo→El intervalo de los números mayores o iguales que −2 pero menores o iguales que 5. Ahora el −2 y el 5 sí entran, lo que se indica poniendo corchetes $[-2,\ 5] = \{x \in R \,/\, -2 \le x \le 5\}$

Fíjate que en la definición del conjunto con desigualdades ahora ponemos ≤ que significa "menor o igual". La representación gráfica es similar pero marcando con círculos rellenos los extremos.

Usando paréntesis y corchetes, con el significado indicado de incluir o excluir los extremos, se pueden definir intervalos abiertos por un extremo y cerrados por otro.

Ejemplo→ Los números superiores a 600 pero que no excedan de 1000 son el intervalo abierto por la izquierda y cerrado por la derecha $(600, 1000] = \{x \in R \,/\, 600 < x \le 1000\}$



Una **semirrecta** es un tipo especial de intervalo no acotado por uno de sus extremos, por lo que se utilizan los símbolos +∞, para indicar que el intervalo no está acotado por la derecha y - ∞, para indicar que el intervalo no está acotado por la izquierda.

Ejemplos→ El conjunto de los números reales positivos es el intervalo $(0, +\infty) = \{x \in R \,/\, x > 0\}$

El conjunto de los números reales no mayores que 5 es el intervalo $(-\infty, 5] = \{x \in R \,/\, x \le 5\}$

$(0,\ +\infty)$

$(-\infty,\ 5]$

El extremo no acotado siempre se pone abierto (con paréntesis). El conjunto de los números reales es el único intervalo no acotado ni superior ni inferiormente: $R = (-\infty, +\infty)$

Actividades propuestas 8

1. Expresa como intervalo, en forma de conjunto (usando desigualdades) y representa en la recta real:
   a) Números reales inferiores o iguales a 18.
   b) Números cuyo cubo sea superior a 8.
   c) Números positivos cuya parte entera tiene 3 cifras.
   d) Números cuyo cuadrado sea menor que 4.
2. Da tres números racionales y tres números irracionales que estén en el intervalo (3, 4) y representa de manera aproximada los números en la recta real.

3.3. Aproximaciones y errores

Aunque en la asignatura de matemáticas se prefiera expresar y manejar los números reales con su expresión simbólica exacta (2/3 en lugar de un valor decimal aproximado como 0,667 o π en lugar 3,1416), en ocasiones es necesario hacer aproximaciones por motivos prácticos.

La mejor aproximación de un número decimal, la que debes hacer cuando hagas operaciones con la calculadora y el resultado en pantalla tenga demasiadas cifras decimales para escribirlas todas, es el **redondeo**. Para redondear un número a un orden determinado de cifras decimales debes fijarte en la primera cifra suprimida: si ésta es mayor o igual que 5 la última cifra decimal del número aproximado debe aumentarse en una unidad mientras que si es inferior a 5 mantiene su valor.

Por ejemplo, para aproximar el número $\pi = 3{,}14159265...$ (infinitas cifras decimales),

el redondeo a décimas es $\pi = 3{,}1$, el redondeo a centésimas es $\pi = 3{,}14$,

el redondeo a milésimas es $\pi = 3{,}142$, el redondeo a diezmilésimas es $\pi = 3{,}1416$, etc.

Se define el **Error Absoluto** (EA) de una aproximación como EA=|valor real − valor aproximado| (Las barras significan “valor absoluto”)

Por ejemplo, si aproximamos $\pi = 3{,}1416$ cometemos un error de unas 7 millonésimas:

$$\text{EA} = |\pi - 3{,}1416| = |3{,}14159265... - 3{,}1416| = |-0{,}0000073...| \approx 0{,}0000073$$

Aún sin conocer con exactitud el valor exacto, siempre se puede poner una cota (un valor máximo) al error absoluto sólo teniendo en cuenta el orden de aproximación, así, si hemos redondeado en las diezmilésimas (como en el ejemplo) siempre podemos afirmar que EA ≤0,00005, es decir, menor o igual que media unidad del valor de la cifra de redondeo o 5 unidades de la siguiente (5 cienmilésimas), que es lo mismo.

Se define el **Error Relativo** (ER) de una aproximación como $\text{ER} = \dfrac{\text{EA}}{|\text{valor real}|}$

El cociente suele multiplicarse por 100 para hablar de % de error relativo. En general, el error absoluto, como el relativo, es desconocido, pero puede acotarse y será tanto menor cuantas más cifras significativas se tomen en la aproximación.

Actividades propuestas 9

1. Da el redondeo de $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210...$ a milésimas y acota el error absoluto.
2. Redondea $\sqrt[5]{-2} = -1{,}14869835...$ a millonésimas y acota el error absoluto.
3. Da el valor decimal aproximado de 2/3 con 4 cifras significativas.

4. NOTACIÓN CIENTÍFICA

4.1. Expresiones en notación científica

Un número expresado en notación científica está formado por un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9, multiplicado por 10^n, siendo n un número entero positivo o negativo.

$a \cdot 10^n$ siendo $1 \leq$ Parte Entera de $a \leq 9$

Si el exponente ***n*** es positivo se utiliza para expresar números grandes de valor absoluto mayor que 1, y si es negativo para expresar números pequeños de valor absoluto menor que 1

Ejemplos→ $2,48 \cdot 10^{14} = 248000000000000$, $3420000000000 = 3,42 \cdot 10^{12}$ (números grandes)

$7,561 \cdot 10^{-18} = 0,000000000000000007561$ $0,000000000057 = 5,7 \cdot 10^{-11}$ (números pequeños)

La edad estimada de la Tierra es aproximadamente $4 \cdot 10^9$ años (4000000000 años)

La longitud de un virus es aproximadamente $6,2 \cdot 10^{-8}$ metros (0,000000062 m)

Cuando la calculadora da un resultado que tiene más cifras que los dígitos que entran en pantalla lo expresa en notación científica. Por ejemplo, da como valor de la potencia 2^{64} el resultado aproximado $1,844674407 \cdot 10^{19}$ (el valor exacto es $2^{64} = 18446744073709551616$)

La ventaja de la notación científica es que las cifras se dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Para designar algunos órdenes de magnitud (grandes o pequeños) se usan los siguientes prefijos:

giga	**mega**	**kilo**	**hecto**	**deca**	**deci**	**centi**	**mili**	**micro**	**nano**
10^9	10^6	10^3	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

4.2. Operaciones en notación científica

Para multiplicar o dividir números escritos en notación científica aprovechando las propiedades de las potencias, se multiplican o dividen las partes decimales entre sí y las potencias de base 10 entre sí usando la regla correspondiente ($10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$, $10^a : 10^b = 10^{a-b}$). Si es necesario para expresar el resultado en notación científica se multiplica o divide el factor decimal por la potencia de 10 necesaria para dejar en la parte entera una sola cifra distinta de cero y se divide o multiplica por lo mismo la potencia de 10.

Ejemplos→ $(5,24 \cdot 10^6) \cdot (6,3 \cdot 10^8) = (5,24 \cdot 6,3) \cdot 10^{6+8} = 33,012 \cdot 10^{14} = 3,3012 \cdot 10^{15}$

$$\frac{4,81 \cdot 10^6}{6,5 \cdot 10^{-8}} = \frac{4,81}{6,5} \cdot 10^{6-(-8)} = 0,74 \cdot 10^{14} = 7,4 \cdot 10^{13}$$

Para sumar y restar conviene preparar los sumandos de modo que tengan la misma potencia de base 10 y así poder sacar factor común.

$$5,83 \cdot 10^9 + 6,932 \cdot 10^{12} - 7,5 \cdot 10^{10} = 5,83 \cdot 10^9 + 6932 \cdot 10^9 - 75 \cdot 10^9 = (5,83 + 6932 - 75) \cdot 10^9 =$$
$$6862,83 \cdot 10^9 = 6,86283 \cdot 10^{12}$$

Actividades propuestas 10

1. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $0,000257 + 1,4 \cdot 10^{-5}$ b) $200000000 - 3,5 \cdot 10^6 + 8,5 \cdot 10^5$

2. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $(1{,}3 \cdot 10^{5}) \cdot (6{,}1 \cdot 10^{-3})$ b) $(4{,}7 \cdot 10^{-8}) \cdot (3 \cdot 10^{6}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-4})$

3. Efectúa las operaciones en notación científica:

a) $(3 \cdot 10^{-8}) : (1{,}5 \cdot 10^{-3})$ b) $(3{,}25 \cdot 10^{-5}) \cdot (5 \cdot 10^{2}) : (6{,}25 \cdot 10^{-7})$

4. A Juan le han hecho un análisis de sangre y tiene 5 millones de glóbulos rojos en cada mm^3. Escribe en notación científica el número aproximado de glóbulos rojos que tiene Juan estimando que tiene 5 litros de sangre.

5. Utiliza la calculadora para obtener tu edad en segundos en notación científica.

5. RADICALES

5.1. Definición de raíz enésima de un número

La **raíz enésima** de un número a es un número x tal que al elevarlo a n, da como resultado a.

$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^{n} = a}$ (n es el *índice* de la raíz, a es el *radicando* y x es la *raíz enésima* de a)

La radicación de índice n es la operación inversa de la potenciación de exponente n

Ejemplos→ $\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4^3=64$; $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

Atención→ Como dos números opuestos x y —x tienen el mismo cuadrado, todo número positivo tiene dos raíces cuadradas con el mismo valor absoluto, una positiva y otra negativa, pero con el símbolo radical se designa solamente la positiva. Así, por ejemplo, escribimos $\sqrt{9} = 3$ y cuando damos las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 9$ escribimos $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Lo mismo ocurre con todas las raíces de índice par (cuartas, sextas, etc.)

Observa que $\sqrt{-1}$ no existe en el campo real. Ningún número real al elevarlo al cuadrado da un número negativo. **Sólo podemos calcular raíces de exponente par de números positivos**. Sin embargo $\sqrt[3]{-1}$ sí existe, pues $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

5.2. Radicales como potencias de exponente fraccionario. Propiedades

Se define $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. La razón de esta definición es que $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n} = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^{1} = a$, y por lo mismo:

$$a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^{p}}$$

Ejemplos→ $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$; $2^{\frac{-3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{8}}$; $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

Podemos operar con radicales traduciéndolos a potencias de exponente fraccionario y utilizando las **propiedades de las potencias** (que valen para todo tipo de exponentes):

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	El producto de potencias de igual base es otra potencia de igual base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores
$\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	El cociente de dos potencias con la misma base es otra potencia de igual base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes del numerador y denominador
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada factor
$\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$	La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	Para calcular una potencia de una potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes

Ejemplos→ $\sqrt[3]{64 \cdot 27} = (2^6 \cdot 3^3)^{\frac{1}{3}} = (2^6)^{\frac{1}{3}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2^2 \cdot 3 = 12$

$$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{2^5}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{(2^5)^{\frac{1}{5}}}{(3^5)^{\frac{1}{5}}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{49}} = \left((49)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 49^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{49} = (7^2)^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{2}{6}} = 7^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{7}$$

Actividades propuestas 11

1. Calcula el valor de las siguientes expresiones con radicales factorizando previamente los radicandos:

a) $\sqrt{484}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $\sqrt[3]{8000}$ d) $\sqrt[4]{1296}$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) $25^{0,5}$ b) $32^{\frac{3}{5}}$ c) $\left(7^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$

3. Expresa en forma de radical las siguientes potencias y sitúa cada número irracional en un intervalo que tenga por extremos números enteros consecutivos:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $(-5)^{\frac{2}{5}}$ d) $(-2)^{\frac{3}{5}}$

4. Pasa los radicales a potencias de exponente fraccionario y simplifica:

a) $\sqrt[4]{3^{12}}$ b) $\sqrt[10]{9^5}$

ACTIVIDADES DE AUTOEVALUACIÓN 2

1. El número −0,3333333… **no** es un número:

a) real b) racional c) irracional d) negativo

2. El número 0,63636363…. se escribe en forma de fracción:

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

3. El número π pertenece al conjunto

a) **N** b) **Z** c) **Q** d) **I**

4. Indica qué afirmación es falsa. El número $\sqrt[3]{-8}$ es

a) entero b) racional c) irracional d) -2

5. Al operar y simplificar $\sqrt{2}\cdot\left(7\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)$ se obtiene

a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}\right)$ c) 12 d) 8

6. Contesta sin hacer operaciones. Las fracciones 4/7; 9/150, 7/50 tienen una expresión decimal:

a) periódica, periódica, exacta b) periódica, exacta, periódica c) periódica, exacta, exacta

7. El conjunto de los números reales menores o iguales a –2 se escribe:

a) $(-\infty,-2)$ b) $(-\infty,-2]$ c) $(-2,+\infty)$ d) $]-\infty,-2[$

8. Al efectuara las operaciones $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ se obtiene

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{36}}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{9}{11}}$

9. La expresión correcta en notación científica del resultado de la operación ($4{,}8\cdot 10^{9}$) :($6\cdot 10^{15}$) es

a) 0,000008 b) $486\cdot 10^{24}$ c) $0{,}8\cdot 10^{-6}$ d) $8\cdot 10^{-7}$

10. El resultado de 0,000078 + $2{,}4\cdot 10^{-5}$ es

a) $3{,}6\cdot 10^{-10}$ b) $1{,}8912\cdot 10^{-10}$ c) $1{,}02\cdot 10^{-4}$ d) $18{,}72\cdot 10^{-5}$

Soluciones: 1c 2b 3d 4c 5c 6c 7b 8b 9d 10c

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula: (a) 3/5 de 550 litros (b) 7/4 de 100 euros.
2. ¿Qué fracción de día son :

   (a) 8 horas; (b) 30 horas ;(c) un cuarto de hora; (d) 5 minutos ;(e) 1 segundo
3. Representa en la recta real los números $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{13}{6}, -\frac{13}{6}$
4. Representa en la recta real los números: 0,03; 0,15; 0,20; -0,025
5. Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{8}{9}; \frac{-8}{9}; \frac{4}{5}; \frac{38}{45}; \frac{77}{90}; \frac{-9}{8}$$

6. A continuación tienes un cuadrado mágico; es decir, la suma de todas las líneas, tanto horizontales como verticales o diagonales, es siempre la misma. Esta suma se llama el “número mágico” del cuadrado. Realiza las operaciones de cada casilla y escribe el resultado, totalmente simplificado, en la casilla correspondiente del cuadrado de la derecha. Después calcula el número mágico del cuadrado y averigua el valor de los números A, B,C y D.

$\frac{1}{2}$	$\frac{22}{3}+1-\frac{8}{6}$	$\frac{7}{3}:\frac{2}{3}$	$\frac{21}{4}+\frac{3}{4}$
$\frac{3+7\cdot 6}{6}$	A	$1+\frac{42}{12}$	B
C	$-\left(\frac{3}{2}-4\right)$	$\frac{51}{6}-\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$
$\frac{60}{15}$	$-\left(1-\frac{13}{2}\right)$	D	$\frac{15}{2}-\frac{6}{6}$

¿Cuál es el número mágico?

Comprueba que la suma de las diagonales también es el número mágico.

$\frac{1}{2}$			

7. Realiza las operaciones indicadas y simplifica el resultado, que debe ser una fracción irreducible:

a) $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}$ c) $\frac{1}{28}:\frac{3}{14}$ d) $\frac{1}{104}\cdot\frac{26}{3}$ e) $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}$

f) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}:\frac{9}{8}-\left[2-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)\right]$ g) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}:\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]$ h) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2-3\cdot\frac{2}{9}$

i) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}:\frac{3}{4}\right)^3+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$ j) $\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$

8. Una mezcla de 720 gramos de pintura tiene 3/8 de color magenta, 1/4 de amarillo y el resto de blanco. ¿Qué fracción de la mezcla es el color blanco?¿Cuántos gramos de cada color se han usado para hacer la mezcla?

9. Escribe las expresiones decimales de lo siguientes números racionales dados en forma de fracción: a) $\frac{26}{4}=$ b) $\frac{19}{5}=$ c) $\frac{2}{3}=$ d) $\frac{3}{7}=$

10. Escribe los siguientes números racionales en forma de fracción irreducible de números enteros:

a) 3,4 b) 0,21 c) $5,\hat{3}=5,333...$ d) $0,0\overset{\frown}{51}=0,0515151...$

11. Justifica cuáles de las siguientes raíces son números racionales y cuáles son números irracionales. Da el valor entero exacto de las que sean números racionales (ejemplo: $\sqrt[3]{-64}=-4$)y ordena las que sean números irracionales entre dos números enteros consecutivos (ejemplo: $4<\sqrt{21}<5$):

a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt[7]{-1}$ c) $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{85}$

12. Demuestra que 0,999… = 1 hallando la fracción generatriz. ¿Cuánto vale *n*,999…?

13. Un cazo tiene una capacidad de 2/5 de litro. Calcula cuántos cazos se necesitan para llenar una olla de 4 litros.

14. ¿Cuántos botes de tres octavos de litro puedo llenar con 12 litros?

15. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro necesito para tener la misma cantidad que en 60 botellas de 3/5 de litro?

16. Se adquieren 10 kg de ciruelas para hacer mermelada. Al deshuesarlas se reduce en un quinto su peso. Lo que queda se cuece con una cantidad igual de azúcar, perdiéndose en la cocción un cuarto del peso ¿Cuántos kilos de mermelada se obtienen?

17. En un depósito lleno de agua había 3000 litros. Un día se gastó 1/6 del depósito y al día siguiente se consumieron 1250 litros ¿qué fracción del depósito quedó?

18. Rubén tiene 124,96 euros, que son los 2/3 del precio de una bicicleta que quiere comprar ¿Cuánto cuesta la bicicleta?

19. En una prueba atlética, que tenía dos partes, son eliminados en la primera prueba la cuarta parte de los participantes y, en la segunda, la quinta parte de los que seguían. Llegaron al final de la prueba 744 atletas. ¿Cuántos se presentaron?

20. Los reyes de una dinastía tuvieron 4 nombres diferentes. La tercera parte de los reyes utilizó el primer nombre; la cuarta parte de los reyes llevó el segundo nombre; la sexta parte, el tercero; y el cuarto nombre lo usaron 6 reyes. ¿Qué fracción de los reyes de la dinastía usó el cuarto nombre?. ¿Cuántos reyes había en la dinastía?

21. Expresa en notación científica las siguientes cantidades:

a) Distancia Tierra-Sol: 150 000 000 km.

b) Longitud del virus de la gripe: 2,2 nm (nm significa nanometros)

c) Radio del protón: 0, 000 000 000 05 m.

22. Realiza las operaciones y da el resultado en notación científica:

a) $(2{,}5\cdot 10^{8})\cdot(4\cdot 10^{3})$

b) $(3\cdot 10^{8}):(6\cdot 10^{-2})$

c) $\dfrac{2\cdot 10^{-7}-3\cdot 10^{-6}}{4\cdot 10^{-6}+10^{-5}}$

23. Representa en la recta real y expresa con desigualdades los siguientes intervalos:

a) (-2, 0) b) [½ , 3] c) [4, 5) d) (6, +∞) e) (–∞, -3]

24. Señala a qué conjuntos numéricos (**N**, **Z**, **Q**, **I**, **R**) pertenecen los siguientes números:

a = 6,7 b = $\sqrt[3]{-4}$ c = 6,666... d = $\sqrt{-9}$ e = $\sqrt{36}$ f = $\sqrt[3]{-8}$

(Fíjate que uno de los números no pertenece a ninguno de los conjuntos).

Sitúa cada uno de los números reales en un intervalo que tenga por extremos dos números enteros consecutivos y después ordena todos los números reales de menor a mayor.

25. Otro número irracional famoso es el número phi, $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803398...$, que también se conoce con los nombres de **número de oro**, razón áurea, proporción armónica y divina proporción. El número ϕ aparece con frecuencia en la naturaleza y en el arte.

Da el valor aproximado del número ϕ redondeado a décimas, a centésimas, a milésimas y a millonésimas, acotando en cada caso el error absoluto de la aproximación.

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 1

1. a) 4 b) 5 c) 40 d) 10 e) 7

2. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{1}{6}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 2

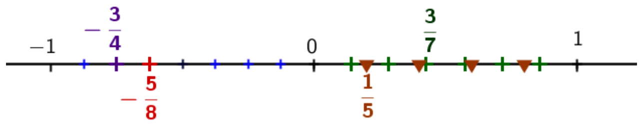
1. a) $\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$ < $\frac{7}{15}$ < $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$ b) $\frac{7}{12}$ < $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ < $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ c) $\frac{7}{18}=\frac{14}{36}$ < $\frac{5}{9}=\frac{20}{36}$ < $\frac{7}{12}=\frac{21}{36}$

2. a) $\frac{1}{3}=0{,}333...<\frac{7}{15}=0{,}4666...<\frac{4}{5}=0{,}8$ b) $\frac{7}{12}=0{,}58333...<\frac{3}{4}=0{,}75<\frac{5}{6}=0{,}8333...$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 3

1. $\frac{50}{7}=7+\frac{1}{7}$; $\frac{25}{11}=2+\frac{3}{11}$; $\frac{101}{6}=16+\frac{5}{6}$

2. $\frac{-30}{7}=-4-\frac{2}{7}$; $\frac{-50}{13}=-3-\frac{11}{13}$; $\frac{-100}{21}=-4-\frac{16}{21}$



3.

4. $a=\frac{23}{8}=2+\frac{7}{8}$; $b=\frac{-23}{8}=-2-\frac{7}{8}$ $c=\frac{180}{50}=3+\frac{3}{5}$ $d=\frac{-26}{6}=-4-\frac{1}{3}$

5. $A=-2-\frac{2}{9}=\frac{21}{9}$; $B=-1-\frac{3}{4}=\frac{-7}{4}$; $C=\frac{-3}{4}$; $D=\frac{3}{5}$ $E=2+\frac{4}{7}=\frac{18}{7}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 4

1. a) $\frac{32}{9}$ b) $\frac{25}{36}$ c) $\frac{7}{3}$ d) $-\frac{11}{45}$

2. a) $\frac{1}{81}$ b) $\frac{16}{81}$ c) 49 d) $\frac{1}{24}$

3. a) $\left(\frac{-4}{3}\right)^3$ b) $\left(\frac{10}{7}\right)^6$ c) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 5

1. a) 7071/5000 b) 1/8 c) 333/50

2. a) 14141/9999 b) 125/999 c) 20/3

3. a) 52066/49995 b) 3559/4995 c) 203/30

4. A. 1/3 + 2/3 = 1 B. 8/9 · 5/2 = 20 /9 = 2,222... C. (65 /100):(65/99)= 99/100= 0,99

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 6

1. 7,2

2. 120

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 7

1. (a) $\mathbf{Q}$ (b) $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$ (c) $\mathbf{I}$ (d) $\mathbf{Q}$ (e) $\mathbf{I}$ (f) $\mathbf{Q}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 8

1. a) (-∞, 18] b) (2, +∞) c) [100, 1000) d) (-2, 2)

2. Respuesta abierta, por ejemplo, 3,1 ; 3,2 ; 3,5 ; π ; $\sqrt{10}$; $\sqrt{11}$

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 9

1. 1,260 con EA<0,0005

2. -1,148698 con EA<0,0000005

3. 0,6667

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 10

1. a) $2{,}71\cdot10^{-4}$ b) $1{,}9735\cdot10^{8}$

2. a) $7{,}93\cdot10^{2}$ b) $35{,}25\cdot10^{-6}$

3. a) $2\cdot10^{-5}$ b) $2{,}6\cdot10^{4}$

4. $2{,}5\cdot10^{13}$ glóbulos rojos

5. respuesta abierta según la edad de cada uno

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS 11

1. a) 22 b) – 4 c) 20 d) 6

2. a) 5 b) 8 c) 343

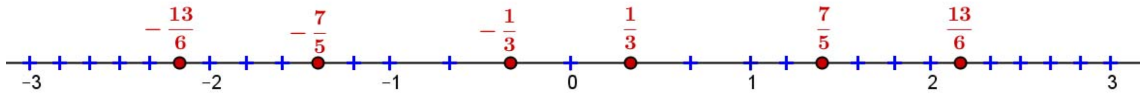
3. a) $\sqrt{7}\in(2,3)$ b) $\sqrt[3]{49}\in(3,4)$ c) $\sqrt[5]{25}\in(1,2)$ d) $\sqrt[5]{-8}\in(-2,-1)$

4. a) 27 b) 3

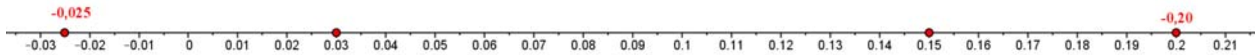
SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. (a) 330 litros (b) 175 €

2. (a) 1/3 (b) 5/4 (c) 1/96 (d) 1/ 288 (e) 1/86400



3.



4.

5. $\frac{8}{9}=\frac{320}{360}$, $\frac{4}{5}=\frac{288}{360}$, $\frac{38}{45}=\frac{304}{360}$, $\frac{77}{90}=\frac{308}{360}$, $\frac{-9}{8}=\frac{-405}{360}$; $\frac{-9}{8}<\frac{-8}{9}<\frac{4}{5}<\frac{38}{45}<\frac{77}{90}<\frac{8}{9}$

6. El número mágico es 7

7. a) 2/3 ; b) 79/476 ; c) 1/6 ; d) 1/12 ; e) 1/24 ; f) -79/36 ; g) 11/42 ; h) -11/45 ; i) 25/4 ; j) 47/8

8. 3/8 de la mezcla; 270 g de magenta, 180 g de amarillo y 720 g de blanco

9. a) 6,5 ; b) 3,8 ; c) $0,\hat{6}=0,666...$; d) $0.\overline{428571}=0,428571428571428571...$

10. a) 17/5 ; b) 21/100 ; c) 16/3 ; d) 17/330

11. a) 7, racional ; b) -1, racional ; c) irracional $2<\sqrt[3]{9}<3$; d) irracional $9<\sqrt{85}<10$

12. n,999... es lo mismo que n+1

13. 10 cazos

14. 32 botes

15. 48 botellas

16. 12 kg

17. 5/12

18. 187,44 €

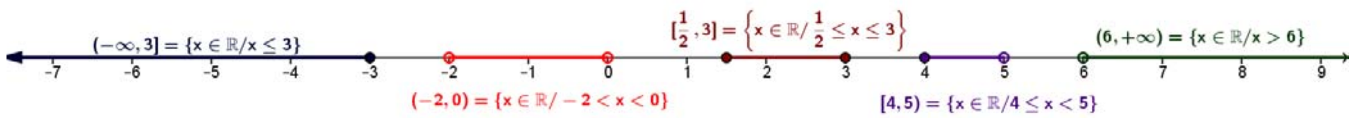
19. 1240 atletas.

20. 24 reyes

21. a) $1,5\cdot10^{8}$; b) $2,2\cdot10^{-9}$; c) $5\cdot10^{-11}$

22. a) 10^{12} ; b) $5\cdot10^{-7}$; c) $-2\cdot10^{-1}$

23.



24. $\mathbf{a}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{a}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{a}\in(6,7)$; $\mathbf{b}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{b}\in(-2,-1)$; $\mathbf{c}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{c}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{c}\in(6,7)$; **d** no es real;

$\mathbf{e}\in\mathbf{N}$; $\mathbf{e}\in\mathbf{Z}$; $\mathbf{e}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{e}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{e}\in[6,7]$ $\mathbf{f}\in\mathbf{Z}$; $\mathbf{f}\in\mathbf{Q}$; $\mathbf{f}\in\mathbf{R}$; $\mathbf{f}\in[-3,-2]$; $f<b<e<c<a$

25. Redondeo a décimas 1,6 con EA<0,02; a centésimas 1,62 con EA<0,002, a milésimas 1,618 con EA<0,0001 y a millonésimas 1,618034 con EA<0,0000001

Módulo de Matemáticas Académicas II
Módulo de Matemáticas Aplicadas II
Nivel II de ESPAD

Unidad 2

Proporcionalidad

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en las opciones de **enseñanzas académicas** o **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

6- Proporcionalidad del libro MATEMÁTICAS 4º B de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

6- Proporcionalidad del libro MATEMÁTICAS 3ºA de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

8- Magnitudes proporcionales. Porcentajes. MATEMÁTICAS 2ºA de ESO (Autora: Nieves Zuasti)

ÍNDICE

1. RAZÓN Y PROPORCIÓN

Una **razón** es el cociente de dos números: $\frac{a}{b}$ (se lee "**a es a b**")

El primer término de la razón, a, se llama **antecedente** y el segundo término, b, **consecuente**. Ambos términos puedes ser números reales enteros o decimales.

La razón se usa en estos términos como comparación entre los valores de dos variables.

Por ejemplo, los números 75 y 100 están en razón de 3 es a 4, ya que su razón $\frac{75}{100}$ equivale a $\frac{3}{4}$

Los términos "razón" y "fracción" son casi sinónimos puesto que ambos significan cociente de números, pero las diferencias de matiz en sus significados están en el contexto en el que se usan:

- Una fracción se usa para expresar una parte de un todo, de una única magnitud, mediante el numerador de la fracción se indica las partes que se toman y con el denominador el total de partes en las que se ha dividido ese todo. Así, por ejemplo, decimos que si un depósito de 100 litros de capacidad contiene 75 litros de agua, está lleno hasta las ¾ parte de su capacidad.
- Una razón se usa como comparación entre dos magnitudes distintas y los términos de la razón se refieren a cantidades de cada una de las dos magnitudes. Así, por ejemplo, si las personas asistentes a un concierto son 75 varones y 100 mujeres, decimos que la razón entre varones y mujeres es "de 3 es a 4", o que hay 3 hombres por cada 4 mujeres.

Otros ejemplos de razón:

1. Si 10 personas consumen 500 litros de agua en un día, la razón entre el consumo y el número de personas es 500:10= 50 litros por persona (razón de $\frac{50}{1}$)
2. Si hemos comprado 5 kg de naranjas por 4€, podemos establecer la relación entre el precio y el peso, 4:5= 0,8 €/kg. La razón entre euros y kilogramos es $\frac{4}{5}$. También puede darse la razón inversa $\frac{5}{4}$ entre el peso y el precio, 5:4= 1,25 kg/€.

Una **proporción** es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (se lee "a es a b como c es a d")
Los términos a y d se llaman **extremos** y los términos b y c se llaman **medios** de la proporción

Por ejemplo, la proporción $\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ se lee "75 es a 100 como 3 es a 4"

Actividades propuestas 1

1. Completa las siguientes expresiones de proporcionalidad con el número que falta:
   a. 12 es a 36 como 1 es a …
   b. 8 es a 20 como … es a 5
   c. 270 es a … como 3 es a 7
   d. … es a 45 como 2 es a 5
2. Medio kilo de cerezas cuesta 1,90 €. ¿Cuál es la razón entre kilos y euros?
3. Calcula el valor de x en las siguientes proporciones:
   a. $\frac{6}{42}=\frac{13}{x}$
   b. $\frac{48}{36}=\frac{x}{45}$

2. RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

Llamamos **magnitud** a cualquier cualidad de los objetos que se pueda medir. Así, longitud, peso, velocidad, precio son ejemplos de magnitudes a las que se puede asignar una cantidad numérica y unas unidades (una cuerda puede medir 1,5 metros, se pueden comprar 3 kg de naranjas, etc)

Entre algunas magnitudes existen relaciones de dependencia que reciben el nombre de relaciones de proporcionalidad, que puede ser directa o inversa, y que se son muy útiles en la resolución de algunos problemas porque permiten hallar el valor de una de las magnitudes conocido el valor de la otra.

2.1. Relación de proporcionalidad directa

Dos magnitudes A y B son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

magnitud A	a	2·a	3·a	...	n·a
magnitud B	b	2·b	3·b	...	n·b

Si las magnitudes A y B son directamente proporcionales **el cociente de dos valores correspondientes es siempre el mismo**. El valor de este cociente constante entre ambas magnitudes se llama **razón o constante de proporcionalidad directa:** $k=\frac{a}{b}$

Ejemplo→ El número de personas y la cantidad de agua que consumen son magnitudes directamente proporcionales (triple número de personas consumen triple cantidad de agua, si el número de personas se reduce a la mitad también se reduce a la mitad el consumo de agua, etc.). Sabiendo que 10 personas consumen 500 litros de agua en un día es fácil hallar el valor de una de las magnitudes sabiendo que el valor de la otra se ha multiplicado o dividido por un número, como se ha hecho para completar la siguiente tabla:

litros	500	1500	250	50	100
nº de personas	10	30	5	1	2

La razón de proporcionalidad entre el número de litros y el número de personas es $k=\frac{500}{10}=\frac{1500}{30}=\frac{250}{5}=\frac{50}{1}=\frac{100}{2}=50$ l/persona.

En los problemas de proporcionalidad directa se da el valor de cada una de las dos magnitudes en una situación y se pide calcular el valor de una de las magnitudes conocido el valor de la otra en una situación distinta. Para resolver el problema solamente hay que establecer la proporción o igualdad de razones entre los valores de ambas magnitudes (tres de ellos conocidos y el cuarto desconocido al que llamamos x) y aplicar lo que sabemos sobre fracciones equivalentes. Este procedimiento para hallar el cuarto término de una proporción directa entre dos magnitudes suele enseñarse de manera mecánica como un algoritmo denominado "***regla de tres directa***".

Ejemplo→ Quince paquetes iguales pesan 330 kg, ¿cuántos kg pesan 6 paquetes?

	Peso (kg)	nº de paquetes
1ª situación	330	15
2ª situación	x	6

Razonamos que las magnitudes peso (kg) y número de paquetes son directamente proporcionales y que, por lo tanto, los cocientes o razones entre ambas magnitudes tienen que ser iguales en ambas situaciones: $\frac{x}{6}=\frac{330}{15}$

Podemos obtener el valor de x a partir de la igualdad de los productos cruzados:

$\frac{x}{6}=\frac{330}{15} \Rightarrow 15\cdot x = 330\cdot 6 \Rightarrow 15\cdot x = 1980 \Rightarrow x=\frac{1980}{15}=132$. Luego 6 paquetes pesan 132 kg.

Para aplicar mecánicamente la regla de tres directa se suelen disponer los datos de la siguiente forma: 330 kg ⟶ 15 paquetes x kg ⟶ 6 paquetes	y se escriben directamente las operaciones que dan el valor de x : multiplicar en cruz y dividir por el tercer término: $x=\frac{330\cdot 6}{15}=\frac{1980}{15}=132\ \text{kg}$

Otro razonamiento alternativo, muy sencillo y útil en problemas de proporcionalidad directa como el de este ejemplo, es el **método de reducción a la unidad**, que consiste en calcular primero el valor de una de las magnitudes asociado al valor unidad de la otra y a partir de ese valor calcular cualquier otro par de valores correspondientes:

Calculamos lo que pesa 1 paquete: $\frac{330}{15}=22\ \text{kg}$ .Sabiendo lo que pesa 1 paquete sólo hay que multiplicar para hallar el peso de 6 paquetes: $22\cdot 6 = 132\ \text{kg}$

El método de reducción a la unidad puede ser el más adecuado para problemas de proporcionalidad en el que intervienen más de dos magnitudes, como el siguiente:

Ejemplo→ Nueve personas han gastado en transporte 630 € en 20 días. ¿Cuánto gastarán 24 personas en 8 días realizando el mismo recorrido?

Calculamos lo que ha gastado cada persona en los 20 días: $\frac{630}{9}=70$ €.

Calculamos lo que gasta 1 persona en 1 día: $\frac{70}{20}=3{,}50$ € por persona y día.

Calculamos lo que gastan 24 personas en 8 días: $3{,}50\cdot 24\cdot 8 = 672$ €

Actividades propuestas 2

1. Si 150 gramos de jamón cuestan 6 €, ¿cuánto costarán 250 gramos?
2. Un grifo abierto durante 5 minutos hace que el nivel de un depósito suba 20 cm. ¿Cuánto subirá el nivel si el grifo se abre durante 7 minutos?
3. Un coche ha recorrido 12 km en los últimos 9 minutos. Si sigue a la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en los próximos 30 minutos?
4. En una receta nos dicen que para hacer una mermelada de fresa necesitamos un kilogramo de azúcar por cada dos kilogramos de fresas. Queremos hacer 5 kilogramos de mermelada, ¿cuántos kilogramos de azúcar y cuántos de fresas debemos poner?
5. La altura de un árbol es proporcional a su sombra (a una misma hora). Un árbol que mide 1,2 m tiene una sombra de 2,1 m. ¿Qué altura tendrá un árbol cuya sombra mida 4,2 m?

2.2. Relación de proporcionalidad inversa

Dos magnitudes A y B son **inversamente proporcionales** si al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda dividida o multiplicada por el mismo número.

magnitud A	a	2·a	3·a	…	n·a
magnitud B	b	b:2	b:3	…	b:n

Si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales **el producto de dos valores correspondientes es siempre el mismo** (el valor de este producto se llama "**constante de proporcionalidad inversa**": $k' = a \cdot b$)

Ejemplo 1→ La velocidad a la que se recorre un trayecto fijo y el tiempo que se tarda en hacer el recorrido son magnitudes inversamente proporcionales (a doble velocidad se reduce el tiempo empleado a la mitad, a mitad velocidad se duplica el tiempo, etc.). Sabiendo que un automóvil que ha recorrido un trayecto a una velocidad constante de 90 km/h ha tardado 4 horas, es fácil hallar el valor de una de las magnitudes sabiendo que el valor de la otra se ha multiplicado o dividido por un número, como se ha hecho para completar la siguiente tabla:

velocidad (km/h)	90	180	45
tiempo (h)	4	2	8

La constante de proporcionalidad inversa es $k' = 90 \cdot 4 = 180 \cdot 2 = 45 \cdot 8 = 360$ (el significado de la constante de proporcionalidad en este caso es la longitud del trayecto recorrido, 360 km). Si queremos saber cuánto tardaría el automóvil en hacer el mismo recorrido si fuera a 120 km/h y llamamos x al número de horas en esta situación, solamente tenemos que imponer que el producto de los valores de las dos magnitudes sea igual a la constante de proporcionalidad: $120 \cdot x = 360 \;\Rightarrow\; x = \frac{360}{120} = 3\,h$

Ejemplo 2→ Cuatro personas realizan un trabajo en 18 días. ¿Cuántas personas necesitaremos para realizar el mismo trabajo en 8 días?

	nº de personas	nº de días
1ª situación	4	18
2ª situación	x	8

Razonamos que el número de personas y el tiempo que tardan en hacer el trabajo son magnitudes inversamente proporcionales (doble número de personas hacen el trabajo en la mitad de tiempo)

Para resolver el problema imponemos la igualdad de los productos de las dos magnitudes en las dos situaciones: $8 \cdot x = 18 \cdot 4 \;\Rightarrow\; 8 \cdot x = 72 \;\Rightarrow\; x = \frac{72}{8} = 9$ personas.

Ejemplo 3→ Con una cantidad de pienso podemos dar de comer a 48 animales durante 30 días con una ración de 1,2 kg para cada uno. ¿Cuántos días podremos alimentar a 60 animales si la ración es de 0,8 kg?

Se trata de un problema de proporcionalidad compuesta que podemos convertir en problema de proporcionalidad inversa simple si pasamos de las magnitudes "nº de animales" y "kg de ración diaria de cada animal" a una única magnitud, los "kg de pienso consumidos al día en total"

	nº de animales	ración (kg)	nº de días
1ª situación	48	1,2	30
2ª situación	60	0,8	x

Calculamos el consumo total de pienso al día en la 1ª situación: $48 \cdot 1,2 = 57,6\ kg$

Calculamos el consumo total de pienso al día en la 2ª situación: $60 \cdot 0,8 = 48\ kg$

Razonamos que el consumo diario de pienso (kg) y el número de días que dura la cantidad de pienso son magnitudes inversamente proporcionales (a doble consumo diario, mitad de días dura el pienso; si el consumo diario se reduce a la mitad el pienso dura el doble de días)

	kg consumidos cada día	nº de días
1ª situación	57,6	30
2ª situación	48	x

Imponemos la igualdad de los productos de las dos magnitudes en las dos situaciones:

$$48 \cdot x = 57{,}6 \cdot 30 \;\Rightarrow\; 48 \cdot x = 1728 \;\Rightarrow\; x = \frac{1728}{48} = 36 \text{ días}$$

Actividades propuestas 3

1. Tienes que tener claro que <u>entre dos magnitudes no siempre hay una relación de proporcionalidad</u>, y cuando sí existe hay que distinguir si es directa o inversa. Resuelve los problemas de cada apartado, razonando en primer lugar si entre las magnitudes que intervienen en cada problema hay una relación de proporcionalidad directa, de proporcionalidad inversa, o si no hay relación de proporcionalidad:

   1.1. Para hacer un pastel para 4 personas hacen falta 400 g de queso. ¿Qué cantidad de queso es necesaria para hacer pastel para 12 personas?

   1.2. Luisa tiene 12 años y su madre 40. Cuando Luisa tenga 24 años, ¿qué edad tendrá su madre?

   1.3. Un grifo tarda 12 minutos en llenar una bañera. ¿Cuánto tardarán dos grifos?

2. Un agricultor necesita 1200 cajas para envasar sus mandarinas en cajas de un kilogramo. ¿Cuántas cajas necesitaría para envasarlas en cajas de medio kilogramo? ¿Y para envasarlas en cajas de 2 kilogramos?
3. Mi coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km, ¿cuántos litros gastará en un viaje de 1250 km?
4. Cortando cierta cantidad de madera se pueden conseguir 6 paneles de 2,25 m de largo. ¿Cuántos paneles se conseguirían si se cortan de 1,5 m de largo cada panel?
5. Un granjero tiene 300 gallinas y tiene pienso para poder alimentarlas durante 90 días. Si compra 150 gallinas más, ¿para cuánto tiempo tendrá pienso?

2.3. Repartos directamente proporcionales

En este tipo de problemas hay que distribuir una cantidad en partes directamente proporcionales a otras cantidades dadas. Para resolverlos se puede utilizar el razonamiento de reducción a la unidad

Ejemplo→ Tres amigos deben repartirse los 300 € que han ganado en una competición de acuerdo a los puntos que cada uno ha obtenido. El primero obtuvo 7 puntos, el segundo 5 y el tercero 3 puntos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?

El problema de reparto directamente proporcional se inicia sumando los puntos para hallar el total de puntos entre los que hay que repartir el dinero: 7 + 5 + 3 = 15 puntos.

Calculamos el premio por punto: 300 : 15 = 20 €. (razonamiento de reducción a la unidad)

El primero obtendrá 20 • 7 = 140 €.

El segundo: 20 • 5 = 100 €.

El tercero: 20 • 3 = 60 €.

Comprobamos que la suma de las tres cantidades es 300 €, la cantidad total a repartir.

Actividades propuestas 4

1. Cinco personas comparten lotería, con 10, 6, 12, 7 y 5 participaciones respectivamente. Si han obtenido un premio de 18000 € ¿Cuánto corresponde a cada uno?
2. Tres socios han invertido 20000 €, 34000 € y 51000 € este año en su empresa. Si los beneficios a repartir a final de año ascienden a 31500 €, ¿cuánto corresponde a cada uno?

2.4. Escalas, aleaciones y mezclas

En planos y mapas encontramos anotadas en su parte inferior la escala a la que están dibujados.

La **escala** es la proporción entre las medidas del dibujo y las medidas en la realidad.

Ejemplo→ Si una cierta escala se expresa de la forma 1 : 20000 significa que 1 cm del plano corresponde a 20000 cm = 200 m en la realidad.

Las escalas también se representan en forma gráfica, mediante una barra dividida en segmentos de 1 cm de longitud

Ejemplo→ Esta escala identifica cada centímetro del mapa con 20 m en la realidad es decir 1 : 2000.

0 20 40 60 80 100 m

Principales calzadas romanas

Una **aleación** es una mezcla de metales para conseguir un determinado producto final. Las aleaciones se realizan en joyería mezclando metales preciosos, oro, plata, platino, con cobre o rodio. La **ley** de una aleación es la relación entre el peso del metal más valioso y el peso total.

Ejemplo→ Una joya de plata de 50 g de peso contiene 36 g de plata pura. ¿Cuál es su ley?

$$\text{Ley} = \frac{\text{peso de metal puro}}{\text{peso total}} = \frac{42}{50} = 0{,}72$$

Otra forma de medir el grado de pureza de una joya es el quilate. Un **quilate** de un metal precioso es 1/24 de la masa total de la aleación. Para que una joya sea de oro puro ha de tener 24 quilates.

Ejemplo→ Una joya de oro de 18 quilates pesa 62 g. ¿Qué cantidad de su peso es de oro puro?

$$\text{Peso en oro} = 62 \cdot \frac{18}{24} = 46{,}5\,\text{g}$$

En los problemas de **mezclas** se combinan distintas cantidades de productos similares pero de distintos precios. Para calcular el precio por unidad de la mezcla hay que calcular el coste total y la cantidad total de la mezcla y dividirlos.

Ejemplo→ Calcula el precio final del litro de aceite si mezclamos 13 litros a 3,5 € el litro, 6 litros a 3,02 €/l y 1 litro a 3,9 €/l.

Calculamos el coste total de los distintos aceites: 13 · 3,5 + 6 · 3,02 + 1 · 3,9 = 67,52 €.

Y el número total de litros: 13 + 6 + 1 = 20 l.

El precio del litro de mezcla valdrá 67,52 : 20 = 3,376 €/l.

Actividades propuestas 5

1. La distancia real entre dos pueblos es 18,5 km. Si en el mapa están a 10 cm de distancia. ¿A qué escala está dibujado?
2. ¿Qué altura tiene un edificio si su maqueta construida a escala 1:300 presenta una altura de 12 cm?
3. Calcula la ley de una joya sabiendo que pesa 80 g y contiene 56 g de oro puro
4. Calcula el precio del kilo de mezcla de dos tipos de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg y 5,20 kg a 6 €/kg.

3. PORCENTAJES

El porcentaje o tanto por ciento es la razón de proporcionalidad de mayor uso en la vida cotidiana.

El **porcentaje** es una razón o fracción con denominador 100. Su símbolo es **%**. El porcentaje como operador se puede expresar con el símbolo %, en forma de fracción o con su valor decimal

Ejemplo→ $24\% = \frac{24}{100} = 0{,}24$

3.1. Problemas de porcentajes

Para **calcular un porcentaje de una cantidad** solamente hay que multiplicar la cantidad por el porcentaje como operador en forma de fracción o como número decimal

Ejemplo→ Para calcular el 24% de 5000, podemos multiplicar primero 5000 por 24 y dividir el resultado entre 100, o dividir primero 24 entre 100 para hallar el valor decimal del porcentaje y multiplicarlo por 5000:

$$\boxed{24\% \text{ de } 5000 = \begin{cases} \frac{24}{100} \cdot 5000 = \frac{24 \cdot 5000}{100} = \frac{120000}{100} = 1200 \\ 0{,}24 \cdot 5000 = 1200 \end{cases}}$$

Algunos porcentajes se pueden calcular mentalmente usando la fracción equivalente simplificada:

- El 50% equivale a la mitad $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
- El 25% es la cuarta parte $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
- El 10% es la décima parte $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
- El 200 % es el doble $\frac{200}{100} = 2$

Para **calcular qué porcentaje representa una parte de un total** se puede utilizar un razonamiento de proporcionalidad directa en el que a la cantidad total le corresponde un porcentaje del 100%

Ejemplo→ Un hotel dispone de 400 habitaciones, de las que 280 están ocupadas. ¿Cuál es el porcentaje de ocupación del hotel?

	total	ocupadas
habitaciones	400	280
porcentaje	100	x

Escribimos la proporción $\frac{280}{400} = \frac{x}{100}$ y pasamos a la igualdad de productos cruzados: $400 \cdot x = 280.100 \Rightarrow x = \frac{28000}{400} = 70$

(El porcentaje de ocupación es del 70%)

Para **calcular la cantidad total sabiendo el porcentaje que representa una parte** se puede utilizar un razonamiento de proporcionalidad directa en el que a la cantidad total le corresponde un porcentaje del 100%. La cantidad total se obtiene multiplicando la cantidad de la parte por la fracción inversa del porcentaje.

Ejemplo→ Un hotel tiene ocupadas 280 habitaciones, que son el 70% del número total de habitaciones del hotel. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?

	total	ocupadas
habitaciones	x	280
porcentaje	100	70

Escribimos la proporción $\frac{280}{x} = \frac{70}{100}$ y pasamos a la igualdad de productos cruzados: $70 \cdot x = 280.100 \Rightarrow x = \frac{280 \cdot 100}{70} = 400$

(El hotel tiene 400 habitaciones)

3.2. Problemas de aumento porcentual

Ejemplo→ La población de Robles era en 2012 de 5680 habitantes. En 2013 se ha incrementado en un 5 %. ¿Cuál es su población al final de 2013?

Podemos comenzar a resolver el problema calculando el 5 % de 5680 : $\frac{5\cdot5680}{100}=284$.

La población se ha incrementado en 284 habitantes, luego al final de 2013 será de: 5680 + 284 = 5964 habitantes.

También puede resolverse el problema razonando primero cuál es el incremento porcentual: 100% + 5% = 105%. El valor final es el 105% del valor inicial y para calcular el 105 % de una cantidad multiplicamos la cantidad por 1,05 (índice de variación): 1,05·5680=5964 habitantes.

El número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final tras un aumento porcentual se llama **índice de variación** o **tanto por uno**. El índice de variación es 1 más el aumento porcentual expresado en forma decimal.

3.3. Problemas de disminución porcentual

Ejemplo→ En las rebajas a todos los artículos a la venta les aplican un 20 % de descuento. Calcula el precio en rebajas a partir de los precios iniciales que aparecen en la tabla:

Precio sin descuento	74 €	105 €	22 €	48 €
Precio en rebajas	59,20 €	84 €	17,6 €	38,4 €

Si nos descuentan el 20 %, pagamos el 80 %. Por tanto: $\frac{80}{100}=0,8$ es el **índice de variación,** el número por el que hay que multiplicar los precios sin descuento para calcular el precio rebajado.

En una **disminución porcentual**, el índice de variación o tanto por uno es 1 menos la disminución porcentual expresada en forma decimal. Para calcular una disminución porcentual se multiplica la cantidad inicial por el índice de variación.

3.4. Problemas de porcentajes encadenados

Ejemplo 1→ En unas rebajas se aplica un descuento del 30 %, y el IVA del 21 %. ¿Cuánto nos costará un artículo que sin rebajar y sin aplicarle el IVA costaba 159 euros?

Podemos hacer el ejercicio en dos pasos: Primero calculamos el precio después del descuento del 30% (índice de variación 0,7): 0,7·159=111,30 €. Después aplicamos a esta cantidad un aumento del 21% (índice de variación 1,21): 1,21·111,30=134,673 €

Observa que la cantidad final es el producto de la cantidad inicial por los dos índices de variación, así que podríamos haber realizado todas las operaciones en un solo paso:

0,70 · 1,21 · 159 = 0,847 · 159 = 134,673 € ≈ 134,67 €.

(0,847 es el índice de variación global, el número por el que hay que multiplicar el precio inicial para obtener el precio final después de la disminución y el aumento porcentual encadenados y es el producto de los índices de variación sucesivos)

Cuando se encadenan aumentos y disminuciones porcentuales, el índice de variación global es el producto de los índices de variación de las sucesivas variaciones.

Ejemplo 2→ El precio de un televisor subió un 20 % en diciembre y después se rebajó un 20 % en enero. ¿Cuál ha sido el porcentaje de variación global? Calcula el precio inicial, en noviembre, si el precio final que se pagado en enero es de 432 €

Al subir el precio un 20 % estamos pagando el 120 % y el tanto por uno es 1,2. En el descuento del 20 % estamos pagando el 80 % y el tanto por uno es 0,8. En total con las dos variaciones sucesivas el índice de variación global es 0,8 ·1,2 = 0,96. Hemos pagado el 96 % del valor inicial, luego ha habido un descuento global del 4 % .

Si llamamos x al precio inicial, 0,96·x = 432 ⇨ x = 432 : 0,96 = 450 € era el precio inicial.

Actividades propuestas 6

1. Rellena la siguiente tabla.

   En cada columna, el porcentaje, la fracción y el decimal deben ser equivalentes:

Porcentaje	**30%**		
Fracción		**3 / 4**	
Decimal			**0,04**

2. La proporción de los alumnos de una clase de 4º de ESO que han aprobado Matemáticas fue del 70 %. Sabiendo que en la clase hay 30 alumnos, ¿cuántos han suspendido?
3. Si sabemos que los alumnos rubios de una clase son el 16 % y hay 4 alumnos rubios, ¿cuántos alumnos hay en total?
4. Un depósito de 2000 litros de capacidad contiene en este momento 1036 litros. ¿Qué tanto por ciento representa?
5. Expresa en tanto por ciento las siguientes proporciones:

   a) "1 de cada 2"   b) "tres de cada cuatro"   c) "54 de 90"
6. ¿Por qué número debes multiplicar una cantidad para disminuirla en un 25%? Utiliza este índice de variación para calcular el precio final de una artículo que inicialmente costaba 240€ y que se ha rebajado un 25%
7. ¿Por qué número debes multiplicar una cantidad para aumentarla en un 12 %? Utiliza este índice de variación para calcular el precio final de un libro que antes costaba 20€ y cuyo precio ha aumentado un 12%.
8. Halla los valores necesarios para completar los huecos:
   a) De una factura de 128 € he pagado 112 €. Me han aplicado un ……… % de descuento
   b) Me han descontado el 15 % de una factura de .... € y he pagado 382,50 €.
   c) Por pagar al contado un mueble me han descontado el 16 % y me he ahorrado 100 €. ¿Cuál era el precio del mueble sin descuento?
9. Calcula el precio final de un lavavajillas que costaba 430 € más un 21 % de IVA, al que se le ha aplicado un descuento sobre el coste total del 15 %.
10. Un comerciante vende los artículos de su tiende aumentando un 40% el precio de coste. Quiere hacer un precio especial a un familiar y ordena al dependiente que le rebajen un 40% del precio de venta al público. ¿Cuánto pagará el familiar por un artículo que el comerciante compró por 100 €? Si lo que el comerciante quería es que el familiar pagará el precio de coste, ¿qué porcentaje de rebaja debería haber ordenado que le hicieran?

4. INTERÉS BANCARIO

4.1. Interés simple

El **interés** es el beneficio que se obtiene al depositar un capital en una entidad financiera a un determinado tanto por ciento durante un tiempo.

En el **interés simple**, al capital *C* depositado se le aplica un tanto por ciento o rédito *r* anualmente.

El cálculo del interés obtenido al cabo de varios años se realiza mediante la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el tiempo que se deposita el capital son meses o días, el interés se calcula dividiendo la expresión anterior entre 12 meses o 360 días (año comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \text{ tiempo en meses} \qquad I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36000} \text{ tiempo en días}$$

Ejemplo → Depositamos 5400 € a un interés simple de 2,25 % anual. ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 28 meses?

Calculamos el interés simple, $I = \frac{5400 \cdot 2{,}25 \cdot 28}{1200} = 283{,}50$ €, y sumamos capital e intereses para obtener el capital final: 5400 + 283,5 = 5683,5 €

4.2. Interés compuesto

En el **interés compuesto** el dinero pagado como interés se acumula al capital sobre el que se calcula el interés del siguiente pago.

Ejemplo → Si se depositan en un banco Ci euros a un 5% de interés compuesto, el capital final al terminar el primer año será $C_f = C_i + 0{,}05C_i = C_i \cdot (1 + 0{,}05) = C_i \cdot 1{,}05$. Si no se saca del banco, al año siguiente se vuelve a multiplicar por 1,05 y así sucesivamente, al cabo de n años se habrá transformado en $C_i \cdot 1{,}05^n$.

El capital final, al cabo de *n* años de interés compuesto, se obtiene multiplicando el capital inicial por la enésima potencia del índice de variación anual: $\mathbf{C_f = C_i \cdot (1 + i)^n}$

Ejemplo → El capital inicial de un depósito asciende a 82000 €. El tanto por ciento aplicado es el 3 % a interés compuesto durante 5 años. Calcula el capital final.

$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0{,}03)^5 = 82000 \cdot 1{,}159... = 95060$ €

Actividades propuestas 7

1. Calcula el interés simple que producen 6000 € en un depósito al 4% durante 2 años.
2. Se depósitan 9500 € en un banco que ofrece un interés simple del 5,5% durante 20 meses. ¿Qué interés se obtendrá?
3. Calcula el interés simple que producen 105000 € al 4,8 % durante 750 días.
4. Al 5 % de interés compuesto durante 12 años, ¿cuál será el capital final que obtendremos al depositar 39500 €?

AUTOEVALUACIÓN

1. Los valores que completan la tabla de proporcionalidad directa son:

A	8	0,75		4,5	100
B		15	6		

a) 160; 0,3; 90; 2000 b) 16, 3, 90, 200 c) 160, 3, 9, 20

2. Con 450 € pagamos los gastos de gas durante 8 meses. En 30 meses pagaremos:

a) 1850 € b) 1875 € c) 1687,5 €

3. Un artículo que costaba 1600 € se ha rebajado a 1400 €. El porcentaje de rebaja aplicado es:

a) 12,5 % b) 14 % c) 15,625 % d) 16,25 %

4. Para envasar 360 litros de agua, ¿cuántas botellas necesitaremos si queremos utilizar envases de tres cuartos de litro?

a) 440 botellas b) 280 botellas c) 480 botellas d) 360 botellas

5. Tres agricultores se reparten los kilogramos de la cosecha de forma proporcional al tamaño de sus parcelas. La mayor, que mide 15 ha recibe 24 toneladas, la segunda es de 10 ha y la tercera de 8 ha recibirán:

a) 16 t y 5 t b) 12,8 t y 16 t c) 16 t y 12,8 t d) 16 t y 11 t

6. Si 6 pintores necesitan 8 días para pintar una casa, 4 pintores necesitarían:

a) 3 días b) 12 días c) 10 días d) 6 días

7. Con 4 rollos de papel de 5 m de largo, puedo forrar 32 libros. ¿Cuántos rollos necesitaremos para forrar 16 libros si ahora los rollos de papel son de 2 m de largo?

a) 3 rollos b) 5 rollos c) 4 rollos d) 2 rollos

8. Después de haber aumentado su precio un 40% el precio de un ordenador es 560€. Su precio antes de la subida era:

a) 520 € b) 340 € c) 220 € d) 400 €

9. El precio de un producto aumentó un 15% en 2015 y un 25% en 2016. El porcentaje de aumento global en los dos años ha sido:

a) 40% b) 37,5% c) 30% d) 43,75%

10. Si se aumenta el precio de un producto un 25% y después se rebaja el 25%, el descuento real con respecto al precio inicial antes de la subida es:

a) 0 % b) 15% c) 6,25% d)10%

SOLUCIONES : 1a 2c 3a 4c 5c 6b 7b 8d 9d 10c

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Copia en tu cuaderno, calcula la razón de proporcionalidad y completa la tabla de proporcionalidad directa:

litros	6,25		0,75	1,4	
euros		15	2,25		4,5

2. Con 76 € hemos pagado 12,5 m de tela, ¿cuánto nos costarán 22,5 m?

3. Para tapizar cinco sillas he utilizado 2,3 m de tela, ¿cuántas sillas podré tapizar con la pieza completa de 23 m?

4. Un camión ha transportado en 3 viajes 220 sacos de patatas de 24 kg cada uno. ¿Cuántos viajes serán necesarios para transportar 550 sacos de 30 kg cada uno?

5. El modelo de teléfono móvil que costaba 285 € + IVA está ahora con un 15 % de descuento. ¿Cuál es su precio rebajado? (IVA 21 %)

6. Por retrasarse dos meses en el pago de una deuda de 1520 €, una persona debe pagar un recargo del 12 %, ¿cuánto tiene que devolver en total?

7. ¿Qué tanto por ciento de descuento se ha aplicado en una factura de 1820 € si finalmente se pagaron 1274 €?

8. Al comprar un televisor he obtenido un 22 % de descuento, por lo que al final he pagado 483,60 €, ¿cuál era el precio del televisor sin descuento?

9. Por liquidar una deuda de 3500 € antes de lo previsto, una persona paga finalmente 3080 €, ¿qué porcentaje de su deuda se ha ahorrado?

10. El precio de un viaje se anuncia a 907,50 € IVA incluido. ¿Cuál era el precio sin IVA? (IVA 21 %)

11. ¿Qué incremento porcentual se ha efectuado sobre un artículo que antes valía 38 € y ahora se paga a 47,12 €?

12. Un mapa está dibujado a escala 1:700000. La distancia real entre dos ciudades es 21 km. ¿Cuál es su distancia en el mapa?

13. La distancia entre Oviedo y Coruña es de 340 km. Si en el mapa están a 10 cm, ¿cuál es la escala a la que está dibujado?

14. Copia en tu cuaderno, calcula la constante de proporcionalidad inversa y completa la tabla:

Magnitud A	4	7,5		3,6	
Magnitud B		12	0,18		10

15. ¿Qué velocidad debe llevar un automóvil para recorrer en 4 horas cierta distancia si a 80 km/h ha tardado 5 horas y 15 minutos?

16. En la granja se hace el pedido de forraje para alimentar a 240 vacas durante 9 semanas. Si el granjero vende 60 vacas, a) ¿cuántas semanas le durará el forraje? b) ¿Y si en lugar de vender, compra treinta vacas? c) ¿Y si decide rebajar la ración una cuarta parte con las 240 vacas?

17. Con doce paquetes de 3,5 kg cada uno pueden comer 80 gallinas diariamente. Si los paquetes fueran de 2 kg, ¿cuántos necesitaríamos para dar de comer a las mismas gallinas?

18. Determina si las dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales y completa la tabla en tu cuaderno:

A	24	8	0,4	6		50
B	3	9	180		20	

19. El alquiler de un piso lo pagan tres amigos, a 300 € cada uno. Si se juntasen 5 amigos, ¿cuánto pagaría cada uno?

20. Si la jornada laboral es de 8 horas necesitamos a 15 operarios para realizar un trabajo. Si rebajamos la jornada en media hora diaria, ¿cuántos operarios serán necesarios para realizar el mismo trabajo?

21. En un concurso el premio de 168000 € se reparte de forma directamente proporcional a los puntos conseguidos. Los tres finalistas consiguieron 120, 78 y 42 puntos. ¿Cuántos euros recibirán cada uno?

22. Un trabajo se paga a 3120 €. Tres operarios lo realizan aportando el primero 22 jornadas, el segundo 16 jornadas y el tercero 14 jornadas. ¿Cuánto recibirá cada uno?

23. Cinco personas comparten un microbús para realizar distintos trayectos. El coste total es de 157,5 € más 20 € de suplemento por servicio nocturno. Los kilómetros recorridos por cada pasajero fueron 3, 5, 7, 8 y 12 respectivamente. ¿Cuánto debe abonar cada uno?

24. ¿Cuál es el capital final que se recibirá por depositar 25400 € al 1,4 % en 10 años?

25. ¿Qué tanto por ciento de ganancias tiene un comerciante que compra un artículo por 600 € y lo vende por 900 €?

26. La mitad de los asistentes a una fiesta no bailan. Los dos quintos de los que no bailan, no lo hacen porque no saben. ¿Qué porcentaje de los asistentes no sabe bailar?

27. En la clase de Ana se han celebrado las elecciones de delegado. El 20% de la clase se ha abstenido en la votación. De los votos emitidos, el 70% ha sido a favor de Ana. En realidad, ¿qué porcentaje de alumnos de la clase ha votado a Ana como delegada?

28. Se ha encargado a un orfebre el diseño y fabricación de un trofeo que ha de pesar 5 kg y ha de estar fabricado con una aleación que contenga tres partes de oro, tres de plata y dos de cobre. ¿Qué cantidad se necesita de cada metal?

29. Antonio da todos los años dinero a sus sobrinos Andrés, Teresa y Pedro, que este año cumplen 16, 14 y 10 años respectivamente, para que se lo repartan proporcionalmente a sus edades. Este año les ha dado 936 €.

a. ¿Cuántos euros recibirá Pedro?

b. Como han subido los precios, este año les ha dado un 4% más que el año pasado. ¿Cuántos euros dio en total Antonio a sus sobrinos el año pasado?

30. Una máquina, trabajando 8 horas diarias, tarda 3 días en fabricar 6000 botellas. Si trabajara 10 horas diarias, ¿cuántos días tardaría en fabricar 5000 botellas? (Idea clave: ¿cuántas botellas fabrica en una hora?)

SOLUCIONES DE ACTIVIDADES Y EJERCICIOS

ACTIVIDADES PROPUESTAS 1

(1a) 3 (1b) 2 (1c) 630 (1d) 18 (2) 0,5 / 1,9 (3a) 91 (3b) 60

ACTIVIDADES PROPUESTAS 2

(1) 10 € (2) 28 cm (3) 40 km (4) 5/3 ≈ 1,667 kg de azúcar y 10/ 3 ≈ 3,333 kg de fresas (5) 2,4 m

ACTIVIDADES PROPUESTAS 3

(1.1) Proporcionalidad directa: 1200 g (1.2) No hay proporcionalidad: 52 años (1.3) Proporcionalidad inversa: 6 min

(2) 2400 cajas de medio kg; 600 cajas de 2 kg (3) 75 l (4) 9 paneles (5) 60 días

ACTIVIDADES PROPUESTAS 4

(1) 4500€, 2700€, 5400€, 3150€, 2250€ (2) 6000€, 10200€, 15300€

ACTIVIDADES PROPUESTAS 5

(1) 1:185000 (2) 36 m (3) 0,7 (4) ≈5,52 €/kg

ACTIVIDADES PROPUESTAS 6

(1) 30% = 3/10 = 0,3 ; 75% = ¾ = 0,75 ; 4% = 1/25 =0,04 (2) 9 alumnos (3) 25 alumnos (4) 51,8 %

(5a) 50% (5b) 75% (5c) 60% (6) 0,75 es el índice de variación; precio final 180€ (7) índice 1,12 ; 22,40€

(8a) 12,5% (8b) 450€ (8c) 625€ (9) 442,26€ (10) 84€ ; ≈ 28%

ACTIVIDADES PROPUESTAS 7

(1) 480€ (2) 870,83€ (3) 10500€ (4) 70936,32€

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1) Razón de proporcionalidad litros/euro $\frac{1}{3}$

Razón de proporcionalidad euros/litro 3

Litros	6,25	5	0,75	1,4	1,5
Euros	18,75	15	2,25	4,2	4,5

(2) 136,80€ (3) 50 sillas (4) 10 viajes (5) 293,12€ (6) 1702,40€ (7) 30% (8) 620€ (9) 12%

(10) 750€ (11) 24% (12) 3cm (13) 1:3400000

(14) Constante de proporcionalidad inversa 90

magnitud A	4	7,5	500	3,6	9
magnitud B	22,5	12	0,18	25	10

(15) 105 m/h (16a) 12 semana (16b) 8 semanas (16c) 12 semanas

(17) 21 paquetes

(18) magnitudes inversamente proporcionales

A	24	8	0,4	6	3,6	50
B	3	9	180	12	20	1,44

(19) 180€ (20) 16 operarios (21) 84000€, 54600€, 29400€

(22) 1320€, 960€, 840€ (23) 15,21€, 25,36€, 35,50€, 40,57€, 60,86€

(24) 28956€ (25) 50% (26) 20% (27) 56% (28) 1,875 kg de oro, 1,875 kg de plata, 1,25 kg de cobre

(29a) 234€ (29b) 900€ (30) 2 días

Módulo de Matemáticas Académicas II
Módulo de Matemáticas Aplicadas II
Nivel II de ESPAD

Unidad 3

Lenguaje algebraico Polinomios

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en las opciones de **enseñanzas académicas** o **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

3- “Expresiones algebraicas. Polinomios” del libro MATEMÁTICAS 4º B de ESO (Autor: Eduardo Cuchillo)

ÍNDICE

1. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

La palabra álgebra procede del árabe y hace referencia a la parte de la matemática que se ocupa del estudio generalizado de las operaciones aritméticas mediante el uso de números, letras y signos operacionales.

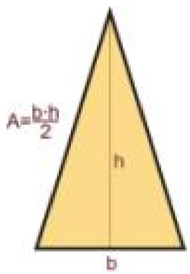
En las unidades anteriores has aprendido a manejar diferentes tipos de números. En los razonamientos, sobre todo matemáticos, usamos letras para designar números desconocidos o valores cualesquiera, de forma que los resultados sean válidos con independencia de los valores particulares.

Ejemplo 1→ Si tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada y queremos expresar el precio de una llamada cualquiera, llamando t a los minutos que dure la llamada, tenemos la siguiente expresión algebraica para su coste:

$$0'05\cdot t+0'12 \text{ euros.}$$

Para calcular el coste de una llamada concreta solamente hay que sustituir t por el valor de su duración y realizar las operaciones indicadas en la expresión algebraica.
Por ejemplo, una llamada de 4 minutos costará $0'05\cdot 4+0'12=0{,}20+0{,}12=0{,}32$ euros.

Ejemplo 2→ El área de un triángulo de base b y altura asociada h se da mediante la fórmula o expresión algebraica $\frac{b\cdot h}{2}$.



El área de un triángulo de base 6 cm y altura asociada 10 cm, por ejemplo, se calcula haciendo las operaciones indicadas en la expresión algebraica después de sustituir b por 6 y h por 10: $\frac{6\cdot 10}{2}=\frac{60}{2}=30\,cm^2$

Ejemplo 3→ Usamos igualdades entre expresiones algebraicas para generalizar propiedades de las operaciones numéricas. Recordemos algunas:

- a+b=b+a (propiedad conmutativa de la suma)
- a·(b·c)=(a·b)·c (propiedad asociativa del producto)
- a·(b+c)=a·b+a·c (propiedad distributiva del producto respecto a la suma)

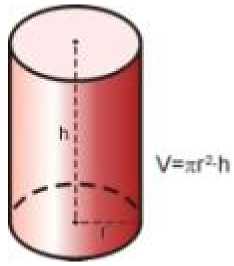
Toda expresión en la que aparecen números y letras relacionados entre sí con operaciones aritméticas recibe la denominación de **expresión algebraica**, y al conjunto de éstas junto con las reglas de uso de sus elementos es lo que se conoce como lenguaje algebraico. Según el contexto, las letras de una expresión algebraica pueden recibir, entre otros, los nombres de *variables*, *indeterminadas*, *parámetros*, *incógnitas*.

ENUNCIADOS	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
La suma de 5 más el triple de un número a	$5+3a$
El doble del número siguiente al número natural b	$2(b+1)$
Las cuatro quintas partes de un número x	$\frac{4x}{5}$

Las expresiones algebraicas surgen al traducir a lenguaje matemático situaciones o enunciados en los que aparecen datos indeterminados o desconocidos que se representan por letras, como los ejemplos de la tabla. En la escritura de las expresiones algebraicas el signo de la multiplicación no suele ponerse entre las letras. Así: $3a$ es lo mismo que $3\cdot a$ y $2xy$ es lo mismo que $2\cdot x\cdot y$.

Al fijar un valor concreto para cada letra de una expresión algebraica y realizar las operaciones indicadas se obtiene un número real que se denomina **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las letras.

Ejemplos:



- El volumen de un cilindro viene dado por la expresión algebraica

$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$

en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a:

$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \ \ cm^3$$

- Si en la expresión $7+\frac{x}{2}+x\cdot y^3-\frac{6}{z}$ particularizamos las tres variables con los valores $x=4,\ y=-1,\ z=\frac{1}{2}$ se obtiene el valor numérico $7+\frac{4}{2}+4\cdot(-1)^3-\frac{6}{1/2}=7+2-4-12=-7$

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z=0$.

Actividades propuestas

1. Recuerda la expresión algebraica que nos proporciona la longitud de una circunferencia.

2. Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera x e y:

a) La mitad del opuesto de su suma.

b) La suma de sus cubos

c) El cubo de su suma

d) El inverso de su suma

e) La suma de sus inversos

3. Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta (variable p)

4. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

5. Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1, y = 2, z = 1$ b) $x = 2, y = 0, z = 5$ c) $x = 0, y = 1, z = 0$.

2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO DE POLINOMIOS

2.1. Monomios y polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos, son los **monomios**.

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones con números y letras que intervienen son la multiplicación y la potenciación de exponente natural. Todo monomio está formado por una parte numérica llamada **coeficiente** (el factor numérico) y una **parte literal** formada por las letras y sus exponentes.

Ejemplos:

- La expresión algebraica $2x$ es un monomio con una única variable, x, y coeficiente 2.
- La expresión algebraica que da el volumen de un cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, r y h, y coeficiente π Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$
- La expresión $7xy^2+3xy-2x$ está formada por tres términos o monomios. Cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primer monomio, $7xy^2$, el coeficiente es 7 y la parte literal xy^2

  El segundo monomio, $3xy$, tiene por coeficiente 3 y parte literal xy

  Y en el tercer término, $-2x$, el coeficiente es -2 y la parte literal x

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, se adjudica un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.
- Un número real es un monomio de grado 0.

Ejemplos:

- $2x$ es un monomio de grado 1 en la variable x.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas r y h.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ es un monomio de grado 5 en x e y.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ es un monomio de grado 4 en x, y y z.

Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal (las letras pueden estar en distinto orden).

- ***Ejemplo:*** *Son semejantes el monomio* $7x^2yz^3$ *y el monomio* $-3yz^3x^2$

La semejanza de monomios es esencial para definir la suma o diferencia de monomios.

Los monomios semejantes que tienen el mismo coeficiente son **iguales**.

- ***Ejemplo:*** Son iguales el monomio $7x^2yz^3$ y el monomio $7yz^3x^2$

Los monomios semejantes que tienen coeficientes opuestos son **opuestos**.

- ***Ejemplo:*** Son opuestos el monomio $7x^2yz^3$ y el monomio $-7yz^3x^2$

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de monomios. Cada uno de los monomios que forman el polinomio se dice que es un **término** del polinomio. El término de grado cero se llama **término independiente**.

El **grado de un polinomio** viene dado por el mayor grado de sus términos. El coeficiente del término de mayor grado del polinomio recibe el nombre de **coeficiente principal**

Si el polinomio tiene 2, 3, 4,… términos se llama **binomio**, **trinomio**, **cuatrinomio**…, respectivamente.

Ejemplos:

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable x.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un trinomio de grado 4 en las indeterminadas x e y.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 + 3\cdot y^2$ es un binomio de grado 5 en x e y.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en x, y y z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir ordenados los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto de un polinomio de grado n en la variable x es $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Los coeficientes a_k son números reales, el coeficiente principal es a_n y el término independiente a_0

Ejemplos:

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable x.

  El coeficiente principal es -3 y el término independiente es 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada y.

  El coeficiente principal es 4 y el término independiente es -7.
- $z^2 - 3z + 12$ es un polinomio de grado 2 en z, con coeficiente principal 1 y término independiente 12
- $3x$ es un polinomio de grado 1 en x, con coeficiente principal 3 y término independiente 0

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real que es el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número -3 la denotamos por $p(-3)$, y leemos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

Ejemplos:

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número

$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868$$

- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es

$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14$$

- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta el número $r(0) = 12$.

2.2. Suma de polinomios

Las letras que aparecen en las expresiones algebraicas representan números y que, por esta razón, las operaciones que se realizan con letras cumplen las mismas propiedades que las operaciones que se realizan con números.

Dados dos monomios, en general, no pueden sumarse o restarse para dar otro monomio a no ser que sean monomios semejantes. **La suma o diferencia de dos monomios semejantes es otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes**

Así: $3x^2y + 6x^2y = (3+6)x^2y = 9x^2y$ (observa que se aplica la propiedad distributiva)

$3x^2y - 6x^2y = (3-6)x^2y = -3x^2y$

La suma o diferencia de dos monomios no semejantes es el polinomio formado por la suma o diferencia indicada de dichos monomios.

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. **Para sumar dos polinomios se suman los monomios semejantes de ambos y se deja indicada la suma de los términos no semejantes.**

Ejemplos:

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio $-4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$:

$$(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) =$$
$$(-3x^4 - x^4) + (\frac{1}{5}x^2 + 4x^2) - 5x + (2 - 6) =$$
$$(-3 - 1) \cdot x^4 + (\frac{1}{5} + 4) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) =$$
$$-4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$

- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos uno sobre otro con los monomios del mismo grado en la misma columna:

$$\begin{array}{rrrrrr} 4x^5 & +2x^4 & +x^3 & -5x^2 & +x & +4 \\ -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos: $p+q=q+p$

- ***Ejemplo:*** $(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$

$$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$$

Propiedad asociativa. Para sumar tres o más polinomios, se pueden agrupar y sumar de dos en dos como se quiera: $(p+q)+r=p+(q+r)$

- ***Ejemplo:***

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

También:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

Elemento neutro. El *polinomio cero*, dado por el número 0, es el elemento neutro porque el resultado de sumarlo con cualquier otro polinomio siempre es éste último: $0+p=p$

- ***Ejemplo:*** $0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su *polinomio opuesto*, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Obtenemos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

- ***Ejemplo:*** El polinomio opuesto de $p\equiv-2x^4+x^3+2x-7$ es $2x^4-x^3-2x+7$, al que denotaremos como $-p$. Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0$$

Para realizar la resta de dos polinomios $p-q$ hay que sumar al polinomio minuendo p el opuesto del polinomio sustraendo q: $p-q\equiv p+(-q)$

- ***Ejemplo:***

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

Recuerda que para quitar un paréntesis que lleva delante el signo – hay que cambiar el signo de todos sus términos: $(3x^2-1)-(x^3-5x^2-7x+3)=3x^2-1-x^3+5x^2+7x-3=-x^3+8x^2+7x-4$

Actividades propuestas

6. Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$

b) $-x^4-(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)-(2x^3-x+5)$

7. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $3x^4+5x^3+x^2+4x-1$

b) $7x$

c) $-x^4+3x^2$

8. Considera los polinomios $p\equiv -x^3-5x+2$, $q\equiv 3x^2+3x+1$, y calcula el polinomio suma $s\equiv p+q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x=-2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. ¿Qué relación existe entre esos tres valores?.

9. Obtén el valor numérico del polinomio $p\equiv -x^3-5x+2$ en $x=3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x=3$?

10. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-4x^3+2x)-(-3x^2)$

b) $(2x^4+x)-(-3x-4)$

c) $(3x^2-x)-(2x^3+x^2-x)$

2.3. Producto de polinomios

El **producto de dos monomios** es otro monomio que tiene como coeficiente el producto de los coeficientes y como parte literal las letras que aparecen en los monomios con exponente igual a la suma de los exponentes con que figuran en los factores: $ax^n\cdot bx^m=abx^{n+m}$

Ejemplos:

- $(-5)x^2\cdot 2x^4=(-5)\cdot 2\cdot x^{2+4}=-10x^6$
- $5x^3\cdot(-4)=5\cdot(-4)\cdot x^3=-20x^3$

El **producto de dos polinomios** es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo (propiedad distributiva) y reduciendo después los términos semejantes.

Ejemplos:

- $3x^2\cdot(2x^2-4x+6)=(3x^2\cdot 2x^2)-(3x^2\cdot 4x)+(3x^2\cdot 6)=6x^4-12x^3+18x^2$
- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$ $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

Una disposición práctica para multiplicar polinomios es la siguiente:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & -2x^3 & & +x & +4 \\ & & & x^2 & -3x & +1 \\ \hline & & -2x^3 & & +x & +4 \\ & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\ -2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\ \hline -2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4 \end{array}$$

Actividades propuestas

11. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-4x^3+2x)\cdot(-3x^2)$

b) $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$

c) $(2x^3+x^2-x)\cdot(3x^2-x)$

d) $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

12. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$

b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$

d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos: $p\cdot q = q\cdot p$

Ejemplo:

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

Propiedad asociativa. Para multiplicar tres polinomios se multiplican dos cualesquiera de ellos y el polinomio resultante se multiplica por el tercero: $(p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r)$

Ejemplo:

$$((4x^2-2)\cdot(-3x+1))\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot((-3x+1)\cdot(-x^3+x))=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Actividades propuestas

13. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$ b) $(2x - 3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$

Elemento neutro. El polinomio dado por el número 1 o *polinomio unidad* es el elemento neutro porque al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último.

- ***Ejemplo:*** $1 \cdot (-5x^3 - 2x + 3) = -5x^3 - 2x + 3$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de polinomios: $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$

La propiedad distributiva nos dice que cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x))$$

tenemos dos opciones para calcular el resultado:

a) realizar la suma primero y, después, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 6x + 7) =$$
$$3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir primero, aplicar la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$(-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

Conviene recordar que la propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

- ***Ejemplo:*** $6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$

Actividades propuestas

14. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-15x^3 - 20x^2 + 10x$ b) $24x^4 - 30x^2$

2.4. Potencias y productos notables

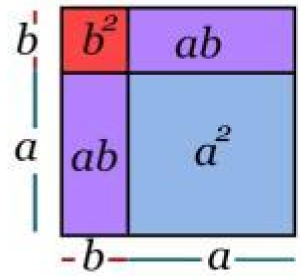
Las potencias de expresiones algebraicas se definen de la misma forma que las potencias de números: la potencia enésima de un polinomio es el polinomio que se obtiene multiplicando el polinomio por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

Si p es un polinomio cualquiera y $n > 1$ un número natural se define $p^n = \overbrace{p \cdot p \cdots p}^{\text{n factores}}$

Por definición $p^0 = 1$ y $p^1 = p$

A continuación, como aplicación de la potenciación, se dan algunos resultados importantes que conviene memorizar por la frecuencia con la que tendrás que utilizarlos a partir de ahora. Junto con la identidad o igualdad algebraica notable hay una interpretación geométrica del resultado.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los productos indicados en cada potencia y reducir términos semejantes:

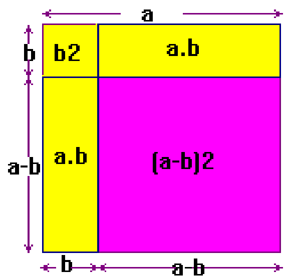


- **Cuadrado de una suma:** $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

El cuadrado de una suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Demostración algebraica:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\,a + a\,b + b\,a + b\,b = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$



- **Cuadrado de una diferencia:** $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Demostración algebraica:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\,a - a\,b - b\,a + b\,b = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

Ejemplos:

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2$

Actividades propuestas

15. Realiza los cálculos:

a) $(1+3a)^2$ b) $(-x+3)^2$ c) $(-3x-2)^2$

16. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

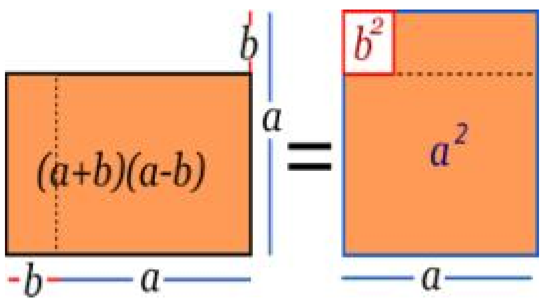
a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

17. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3y/5 - 2/y)^2$

Suma por diferencia: $\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$



La suma de dos monomios por su diferencia es igual a diferencia del cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

Demostración algebraica:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\,a - a\,b + b\,a - b\,b = a^2 - b^2$$

Ejemplos:

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$

Actividades propuestas

18. Efectúa estos productos:

a) $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$ b) $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$ c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

Actividades resueltas

- Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones algebraicas y obtener otras equivalentes. Después calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas de cada uno de los miembros para los valores de las letras que se indica y comprueba que son iguales.

(Se ha hecho el primer ejercicio como modelo)

a) $(4x-2y)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$)

Desarrollamos el cuadrado de una diferencia $(4x-2y)^2=(4x)^2-2(4x)(2y)+(2y)^2=16x^2-16xy+4y^2$

Calculamos el valor numérico de la expresión algebraica inicial $(4x-2y)^2$ *para* $x=\frac{3}{2}, y=\frac{5}{2}$:

$$(4\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\frac{5}{2})^2=(6-5)^2=1^2=1$$

Calculamos el valor numérico de la expresión algebraica desarrollada $16x^2-16xy+4y^2$ *para* $x=\frac{3}{2}, y=\frac{5}{2}$:

$$16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-16\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=16\cdot\frac{9}{4}-16\cdot\frac{15}{4}+4\cdot\frac{25}{4}=36-60+25=1$$

Comprobamos que el valor numérico de ambas expresiones algebraicas es igual a 1.

Actividades propuestas

19. Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones algebraicas y obtener otras equivalentes. Después calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas de cada uno de los miembros para los valores de las letras que se indica y comprueba que son iguales.

b) $(4+x)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=3$)

c) $(4-x)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=5$)

d) $(4+x)(4-x)=$ (comprueba la igualdad para $x=-6$)

e) $(4x-2y)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$)

f) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=4$, $y=1$)

g) $(3x+6y)(3x-6y)=$ (comprueba la igualdad para $x=2$, $y=1$)

3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Hasta este momento hemos estudiado varias operaciones con polinomios: suma, resta y producto. El resultado de cualquiera de las operaciones anteriores con polinomios siempre es otro polinomio. No sucede lo mismo con la división

3.1. División de monomios

Para que el cociente de dos monomios sea un monomio, el dividendo tiene que tener, al menos, las mismas variables que el divisor con exponentes mayores o iguales. Cuando la división puede hacerse, el cociente es un polinomio que tiene:

- → Como coeficiente el cociente de los coeficientes de ambos monomios.
- → Como parte literal las variables que aparecen en el dividendo con exponente igual a la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor de cada una de ellas.

Ejemplos:

Se puede dividir el monomio $8x^3y^5z^4$ entre el monomio $4x^2y^2z$ y el cociente resultante es un polinomio: $\dfrac{8x^3y^5z^4}{4x^2y^2z}=\dfrac{8}{4}x^{3-2}y^{5-2}z^{4-1}=2xy^3z^3$

La división del monomio $21x^3y$ entre el monomio $7xy^2z^3$ no es un monomio, sino una fracción algebraica que se puede simplificar: $\dfrac{21x^3y}{7xy^2z^3}=\dfrac{\cancel{7}\cdot 3\cdot \cancel{x}\cdot x^2\cdot \cancel{y}}{\cancel{7}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{y}\cdot y\cdot z^3}=\dfrac{3x^2}{yz^3}$

3.2. División entera de polinomios en una variable

Recordemos que hacer la división entera de dos números naturales, D (dividendo) entre d (divisor, distinto de 0), consiste en hallar otros dos números, el cociente (c) y el resto (r), que verifican la relación $D=d\cdot c+r$, en la que el resto r tiene que ser menor que el divisor d y mayor o igual que 0.

La división entera de polinomios se define y realiza de manera similar.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, consiste en hallar otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$, de forma que se verifique la relación $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$ y el grado de $r(x)$ sea menor que el grado del polinomio divisor $q(x)$.

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

Ejemplo:

Vamos a dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$. Como el polinomio divisor es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$

La división se efectúa ejecutando los siguientes pasos:

→ Se escribe a la izquierda el dividendo colocando sus términos de mayor a menor grado y en caso de que falte algún grado se deja un espacio o se pone el término de dicho grado con coeficiente 0.

→ El polinomio divisor se coloca ordenado de mayor a menor grado en su caja.

→ Se divide el monomio de mayor grado del dividendo entre el monomio de mayor grado del divisor para obtener el primer término del cociente.

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2$$

→ Se multiplica el primer término del cociente por todos los términos del divisor y, para efectuar la resta, el resultado cambiado de signo se coloca debajo de los términos semejantes del dividendo para sumar después ambos polinomios.
El resultado es el primer resto parcial

$$3x^2(2x^2 - x + 3) = 6x^4 - 3x^3 + 9x^2$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 0x - 2 \\ -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \\ \hline 8x^3 - 8x^2 + 0x - 2 \end{array}$$

→ Se procede a dividir este resto parcial entre el polinomio divisor para obtener el siguiente término del polinomio cociente repitiendo el procedimiento anterior para obtener el siguiente resto parcial, y así sucesivamente, hasta que el resto obtenido sea un polinomio de grado inferior al del divisor.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 0x - 2 & 2x^2 - x + 3 \\ \cline{2-2} -6x^4 + 3x^3 - 9x^2 & 3x^2 + 4x - 2 \\ \cline{1-1} 8x^3 - 8x^2 + 0x - 2 & \\ -8x^3 + 4x^2 - 12x & \\ \cline{1-1} -4x^2 - 12x - 2 & \\ 4x^2 - 2x + 6 & \\ \cline{1-1} -14x + 4 & \end{array}$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x)=3x^2+4x-2$ y como polinomio resto $r(x)=-14x+4$.

Podemos comprobar que se verifica la relación $6x^4+5x^3+x^2+3x-2=(2x^2-x+3)\cdot(3x^2+4x-2)+(-14x+4)$

Actividades propuestas

20. Divide los siguientes polinomios y comprueba la relación dividendo=divisor·cociente+resto:

a) $2x^3-x^2-x+7$ entre x^2-2x+4

b) $-10x^3-2x^2+3x+4$ entre $5x^3-x^2-x+3$

c) $4x^4-6x^3+6x^2-3x-7$ entre $-2x^2+x+3$

d) $-8x^5-2x^4+10x^3+2x^2+3x+5$ entre $4x^3+x^2+x-1$

e) $-6x^5+x^2+1$ entre x^2+1

21. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x)=x^2+x-3$ como polinomio cociente y $r(x)=-3x^2+1$ como resto.

3.3. Regla de Ruffini para dividir un polinomio entre x-a

Si en la división entera de polinomios el divisor es un binomio de primer grado de la forma $x-a$ (a es un número real cualquiera) se puede hacer la división con mayor rapidez usando un algoritmo conocido con el nombre de regla de Ruffini.

- ***Ejemplo:*** Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x-2$.

A la derecha se ha hecho la división con la caja, por el método explicado anteriormente.
Como el polinomio divisor es de grado 1 con coeficiente principal igual a 1:

→ El grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.
→ El coeficiente principal del cociente es el mismo número que el coeficiente principal del divisor.
→ El resto es de grado 0, es decir, un número.

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3-4x^2+x+3 & x-2 \\ \cline{2-2}
-3x^3+6x^2 \qquad & 3x^2+2x+5 \\ \cline{1-1}
2x^2+x+3 & \\
-2x^2+4x \quad & \\ \cline{1-1}
5x+3 & \\
-5x+10 & \\ \cline{1-1}
13 &
\end{array}
$$

La **regla de Ruffini**, para hacer la división anterior con mayor rapidez, consiste en hacer las misma operaciones pero escribiendo solamente en una fila los coeficientes del dividendo ordenados de mayor a menor grado (si falta algún grado se pone 0) y en una segunda fila y a la izquierda el valor del número a (en este caso 2)

En una tercera fila, debajo de una línea divisoria, se repite el primer coeficiente del dividendo en la misma columna; este coeficiente se multiplica por a (en este caso 2) y el resultado se escribe en la segunda fila y en la siguiente columna para sumarlo con el siguiente coeficiente del dividendo; se multiplica este resultado nuevamente por a, y así sucesivamente hasta llegar al último término, que se separa de los anteriores porque es el resto de la división. Los demás números de la tercera fila son los coeficientes del polinomio cociente, de mayor a menor grado. El primer coeficiente de la izquierda es el que corresponde al monomio de mayor grado (una unidad menos que el grado del dividendo) y el coeficiente anterior al resto es el del término de grado 0

Dividendo:
$p(x)=3x^3-4x^2+x+3$

divisor: $d(x)=x-2$

Algoritmo de la división usando la REGLA DE RUFFINI

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
2 & \downarrow & 6 & 4 & 10 \\ \hline
 & 3 & 2 & 5 & \underline{|\,13}
\end{array}
$$

cociente: $c(x)=3x^2+2x+5$

resto: $r=13$

Si el divisor es $x+2$ el valor de a para usar la regla de Ruffini es ahora -2, ya que $x+2=x-(-2)$.

La división $(3x^3-4x^2+x+3):(x+2)$, *que se hace a la derecha usando la regla de Ruffini, da como cociente* $c(x)=3x^2-10x+21$ *con resto* $r=-39$

Dividendo:
$p(x)=3x^3-4x^2+x+3$

divisor: $d(x)=x+2$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & \downarrow & -6 & 20 & -42 \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & \underline{|-39}
\end{array}
$$

Actividades propuestas

22. Usa la regla de Ruffini para obtener el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-2x^2+x+1$ entre $x+1$

b) x^3+2x^2-2x+1 entre $x+2$

c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x-1$

d) x^3-9x+1 entre $x-3$

3.4. Valor de un polinomio para x=a. Teorema del resto

Recuerda que el valor numérico de un polinomio P(x) para x=a, P(a), es el número que se obtiene al sustituir la x por a y efectuar las operaciones indicadas. El siguiente teorema, que recibe el nombre de **teorema del resto**, nos proporciona otra forma de calcular P(a):

El valor numérico de un polinomio P(x) para x=a es igual al resto de la división P(x) : (x-a)

La demostración es sencilla: si C(x) es el cociente de la división P(x):(x-a) y el número R es el resto entonces, teniendo en cuenta que el dividendo es igual al divisor por cociente más resto, se verifica que P(x)= (x-a)C(x)+R, por lo que P(a)=(a-a)C(a)+R y como a-a=0 , entonces P(a)=R

Por lo tanto, para calcular el valor numérico de un polinomio P(x) para x=a se puede hacer la división P(x):(x-a) y tomar el resto de la división, que es igual a P(a)

Por ejemplo, el valor numérico del polinomio $P(x)=5x^6-7x^3+3x^2+x+3$ para $x=2$ se puede calcular sustituyendo x por 2 en el polinomio y haciendo las operaciones indicadas,

$$P(2)=5\cdot 2^6-7.2^3+3\cdot 2^2+2+3=5\cdot 64-7\cdot 8+3\cdot 4+2+3=320-56+12+5=281\ ,$$

o bien, haciendo la división $P(x):(x-2)$, que puede hacerse usando la regla de Ruffini. El resto de la división es 281, por lo tanto $P(2)=281$.

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 5 & 0 & 0 & -7 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & & 10 & 20 & 40 & 66 & 138 & 278 \\ \hline & 5 & 10 & 20 & 33 & 69 & 139 & 281 \end{array}$$

También podemos hallar el resto de una división de la forma $P(x):(x-a)$ sin hacer la división, calculando $P(a)$. Por ejemplo, podemos afirmar que el resto de la división $(x^{25}-x^{12}+3):(x-1)$ es 3 sin necesidad de hacer la división porque el valor numérico del polinomio dividendo para $x=1$ es 3.

Otro ejemplo: se puede ver fácilmente que $(x-1)$ es un divisor del polinomio $P(x)=x^3-x^2-4x+4$, es decir, que la división $P(x):(x-1)$ es exacta, comprobando que $P(1)=0$, $P(1)=1^3-1^2-4\cdot 1+4=0$, por lo que el resto de la división $P(x):(x-1)$ también es 0.

Actividades propuestas

23. Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $P(x)=-x^3+2x^2+x+2$ en $x=3$.

24. Calcula el resto de la división $(x^{25}-x^{12}+3):(x+1)$ sin hacer la división.

25. Calcular el valor de k para que el polinomio $P(x)=2x^3+kx^2+6$ sea divisible por $x+1$

3.5. Raíces y divisores de un polinomio

Un número a se llama **raíz** de un polinomio P(x) si P(a)=0.

Un polinomio de grado n puede tener como máximo n raíces reales.

Si el número a es raíz del polinomio P(x), entonces (x -a) es un divisor de P(x) y el polinomio P(x) se puede descomponer como producto de dos factores, **P(x)=(x-a)·C(x)** siendo C(x) el cociente de la división exacta P(x):(x-a).

Actividades propuestas

26. Determina si a es una raíz de P(x) en los siguientes casos:

a) $a=3$, $P(x)=x^3-4x^2+5$

b) $a=-2$, $P(x)=-x^3-2x^2+x+2$

c) $a=1$, $P(x)=-2x^4+x+1$

d) $a=-1$, $P(x)=2x^3+2x^2$

Para buscar raíces de un polinomio tenemos en cuenta el siguiente teorema:

Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente

Ejemplo: Buscamos las raíces enteras del polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ entre los divisores enteros del término independiente, $1, -1, 2, -2$, y sabemos que como máximo hay tres raíces:

$P(1)=1^3+2\cdot1^2-1-2=1+2-1-2=0 \Rightarrow$ $x=1$ es raíz de $P(x)$

$P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-(-1)-2=-1+2+1-2=0 \Rightarrow$ $x=-1$ es raíz de $P(x)$

$P(2)=2^3+2\cdot2^2-2-2=8+8-2-2\neq0 \Rightarrow$ $x=2$ no es raíz de $P(x)$

$P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-(-2)-2=-8+8+2-2=0 \Rightarrow$ $x=-2$ es raíz de $P(x)$

El polinomio P(x) tiene las tres raíces que hemos encontrado: $1, -1, -2$.

Actividades propuestas

27. Halla todas las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $P(x)=5x^2-5$ b) $P(x)=x^3+3x^2-x-3$

28. Comprueba que a es una raíz del polinomio P(x) haciendo la división P(x):(x-a) y escribe la descomposición de P(x) como producto de dos factores, uno de los cuales debe ser x-a:

a) $a=2$, $P(x)=3x^3-4x^2-9x+10$

b) $a=-1$, $P(x)=x^3+1$

c) $a=-3$, $P(x)=x^2-9$

d) $a=3$, $P(x)=2x^2-10x+12$

4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Factorizar un polinomio P(x) es escribirlo como producto de polinomios de menor grado que P(x).

Se dice que un polinomio es **irreducible** si no se puede descomponer como producto de polinomios de grado menor que el grado de P(x) y que no sean de grado cero (es decir que no sean factores numéricos). Todo polinomio de grado 1 se considera irreducible.

Ejemplos:

- El polinomio $P(x)=x^2-9$ se puede descomponer como producto de dos factores irreducibles $P(x)=(x+3)(x-3)$
- El polinomio $P(x)=x^2+9$ es irreducible, no se puede escribir como producto de polinomios de menor grado

ESTRATEGIAS PARA DESCOMPONER UN POLINOMIO COMO PRODUCTO DE FACTORES IRREDUCIBLES.

- **Si el polinomio P(x) no tiene término independiente**, se puede descomponer como producto de dos factores sacando factor común a la menor potencia de x.
    - ***Ejemplo:*** *El polinomio* $P(x)=2x^7+x^5$ *se puede descomponer sacando factor común a* x^5 *con el resultado* $P(x)=x^5(2x^2+1)$.
- Si el polinomio P(x) es el resultado de desarrollar el cuadrado de una suma o diferencia de monomios, o de multiplicar una suma de monomios por su diferencia, se puede aplicar la identidad notable correspondiente para descomponer el polinomio como producto de dos factores.
    - ***Ejemplo 1:*** $P(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$
    - ***Ejemplo 2:*** $P(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$
    - ***Ejemplo 3:*** $P(x)=x^2-5=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
- **Si el polinomio P(x) tiene término independiente distinto de cero**, para hacer una descomposición de P(x) como producto de dos factores, se trata de buscar un divisor del polinomio de la forma (x-a), donde a es una raíz del polinomio P(x), ya que entonces la división P(x): (x-a) es exacta. Si el cociente de la división es C(x), entonces la relación dividendo es igual a divisor por cociente nos da una descomposición del polinomio P(x) como producto de dos factores de menor grado: P(x) = (x-a)·C(x). Por esta razón, los pasos para descomponer como producto de factores irreducibles un polinomio con coeficientes enteros y con término independiente no nulo son los siguientes:

1. Buscar una raíz entera entre los divisores del término independiente.
2. En cuanto se haya encontrado una raíz x = a del polinomio P(x), se hace la división P(x): (x-a), que tiene resto cero, y se obtiene el polinomio cociente C(x).
3. Se escribe la descomposición del polinomio dividendo P(x) como producto del divisor (x-a) por el cociente C(x): P(x)=(x-a)·C(x)
4. Si el polinomio C(x) tiene alguna raíz, se descompone a su vez como producto de dos factores repitiendo los pasos 1, 2 y 3, o bien aplicando alguna identidad notable si es posible. Así

sucesivamente, hasta que todos los factores de la descomposición de P(x) sean de grado uno o de grado dos sin raíces reales (irreducibles).

- **Ejemplo 1:** *Para descomponer el polinomio* $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

1. *Buscamos una raíz entre los divisores de 4:* ± 1, ± 2, ± 4 *calculando el valor numérico del polinomio para cada uno de estos números hasta encontrar uno para el cual el valor numérico sea cero:*

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$; *luego x = 1 es una raíz de P(x)*

2. *Hacemos la división P(x) : (x-1) usando la regla de Ruffini*

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

El cociente de la división es el polinomio $C(x) = x^2 - 4$

3. *Tenemos la primera descomposición del polinomio:* $P(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 4)$
4. *Ahora descomponemos el polinomio* $C(x) = x^2 - 4$. *Aquí podemos fijarnos que es una diferencia de cuadrados y descomponerlo como suma por diferencia:*
   $C(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$

   Por lo tanto, la descomposición del polinomio P(x) en factores irreducibles es: $\boxed{P(x) = (x-1)(x+2)(x-2)}$ *como puede comprobarse haciendo los productos:*

   $(x-1)(x+2)(x-2) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

- **Ejemplo 2:** $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

a) *Como el polinomio no tiene término independiente, sacamos factor común a x:*
   $P(x) = x(x^2 - 5x + 6)$

b) *Para descomponer el polinomio* $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ *seguimos el procedimiento general:*

   1. *Buscamos una raíz entre los divisores de 6:* ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

   $P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$, *luego 1 no es raíz del polinomio.*

   $P(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12 \neq 0$, *luego -1 no es raíz del polinomio.*

   $P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, *luego 2 es una raíz de Q(x).*

   2. *Hacemos la división Q(x) : (x-2) usando la regla de Ruffini*

	1	-5	6
2		2	-6
	1	-3	0

El cociente de la división es el polinomio $C(x) = x - 3$

   3. *Tenemos la descomposición del polinomio* $Q(x) = (x-2) \cdot (x-3)$
   4. *Por lo tanto, la descomposición del polinomio P(x) en factores irreducibles es:*
   $\boxed{P(x) = x(x-2)(x-3)}$ *como puede comprobarse haciendo los productos:*

   $$x(x-2)(x-3) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

Ejemplo 3: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Vemos que 1 es una raíz y hacemos la división exacta P(x) : (x-1) usando la regla de Ruffini

	1	-3	3	-1
1		1	-2	1
	1	-2	1	0

El cociente de la división es el polinomio $C(x) = x^2 - 2x + 1$

Ahora descomponemos el polinomio $C(x) = x^2 - 2x + 1$. *Aquí podemos fijarnos que es el desarrollo de un cuadrado:*

$C(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ *(También se puede ver que 1 es una raíz de C(x) y hacer la división C(x):(x-1))*

La descomposición del polinomio P(x) en factores irreducibles es $\boxed{P(x) = (x-1)^3}$.

Comprobación:

$$(x-1)^3 = (x-1)(x-1)(x-1) = (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

*Se dice que **1 es una raíz triple** del polinomio P(x) porque el factor (x-1) aparece tres veces en la descomposición.*

Actividades propuestas

29. Utiliza los productos notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 2x + 1$ b) $x^4 - 16$ c) $x^2 + 12x + 36$

d) $3x^2 + 18x + 27$ e) $4x^5 - 16x^3$ f) $9x^2 - 6x^3 + x^4$

g) $9 - x^2$ h) $x^4 - 81x^2$ i) $16x^2 - 16x + 4$ j) $9x^2 + 24x + 16$

30. Realiza la descomposición en factores irreducibles de los siguientes polinomios, indica cuántas raíces tiene cada uno y escríbelas ordenadas de menor a mayor:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

c) $3x^3 + 3x^2 - 12x - 12$ d) $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$

e) $x^4 - 3x^2 - 2x$ f) $x^4 + x^2 - 20$

g) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ h) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2$

i) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ j) $5x^3 - x^2 - 5x + 1$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En este ejercicio se va a presentar un truco mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre
Que lo multiplique por 10
Que al resultado anterior le sume 100
Que multiplique por 1000 lo obtenido
Que divida entre 10000 la última cantidad
Que al resultado precedente le reste el número que escribió

Independientemente del número desconocido original ¿qué número se obtiene al final?

2. Consideremos los polinomios $p \equiv -5x^3+x^2-3x-2$, $q \equiv 3x^4+2x^3-x^2+2x+7$ y $r \equiv 4x^2+5x-1$. Realiza las siguientes operaciones: a) $p+q+r$ b) $p-q$ c) $p \cdot r$ d) $p \cdot r-q$

3. Calcula los siguientes cocientes de monomios:

a) $\dfrac{8x^4}{2x^2}$ b) $\dfrac{3x^2y^4z^6}{0,5xy^3z^5}$ c) $\dfrac{7xy^4z^5}{4xy^3z^5}$

4. Efectúa las divisiones de polinomios y la prueba de la división:

a) $2x^4-3x^3-8x^2+9x-1$ entre $2x^2+3x-3$

b) x^4+2x^2+1 entre x^2+1

c) $4x^5-5x^4+6x^3+2x^2-10x-6$ entre x^3+2x+3

5. Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

6. Encuentra el polinomio $p(x)$ tal que al dividirlo entre el polinomio $q(x)=x^3+x^2+1$ se obtenga como polinomio cociente $c(x)=5x^2-1$ y como resto $r(x)=x-3$

7. Utiliza la regla de Ruffini para hallar el valor numérico de cada polinomio en el valor de x dado:

a) $3x^3+11x^2+5x-3$ en $x=-2$

b) $3x^3+2x^2+8x-3$ en $x=3$

c) $3x^3+5x^2+x-1$ en $x=1/3$

d) $2x^3+x^2-6x-3$ en $x=-1/2$

8. Desarrolla las potencias notables:

a) $\left(\dfrac{a}{2}+4b^2\right)^2$ b) $(5x^3-3y^2)^2$

9. Descompón cada polinomio como producto de polinomios irreducibles y da todas las raíces ordenadas de menor a mayor:

a) x^3-2x^2-12x

b) $3x^3+5x^2+x-1$

c) $3x^3+11x^2+5x-3$

d) $3x^3-6x^2+x-2$

10. Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) x^2+6x+9 b) x^4-8x^2+16 c) x^2-36

d) $5x^2+1$ e) $4x^2-25$ e) $4x^2-20x+25$

AUTOEVALUACIÓN

1. Si llamamos x a la edad de una persona, la expresión algebraica para la edad que tenía hace 7 años es

a) 7 – x b) x – 7 c) 7x d) 7 + x

2. El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2, y=-1, z=-1$ es:

a) 17 b) 15 c) -3 d) -5

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas no es un monomio?

a) $8xy$ b) $\sqrt{5}x^3$ c) $5x^{-2}$ d) 9

4. El coeficiente principal del polinomio $2x-x^2+5-x^3$ es:

a) 2 b) 5 c) 1 d) -1

5. La expresión algebraica equivalente a $(8-x)^2$ es

a) $x^2-16x+64$ b) $64-x^2$ c) $64+x^2$ $16-2x$

6. La expresión algebraica equivalente a $9-4x^2$ es

a) $5x^2$ b) $(3+2x)(3-2x)$ c) $(3+2x)^2$ d) $(3-2x)^2$

7. Al dividir el polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2. b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado menor que 2. d) ninguna de las opciones precedentes.

8. El resto de la división $(2x-x^2+5-x^3):(x-1)$ es:

a) 2 b) 0 c) - 1 d) 5

9. ¿Cuál de los siguientes números enteros es una raíz del polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$?

a) 3 b) 2 c) –5 d) -7

10. La descomposición factorial del polinomio $x^3-6x^2+12x-8$ es:

a) $(x-2)(x+2)(x+1)$ b) $(x-2)^3$ c) $(x-2)(x+2)^2$ d) $(x-8)(x+1)(x-1)$

Soluciones → 1 b 2 c 3 c 4 d 5 a 6 b 7 c 8 d 9 a 10 b

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1) $2\pi r$ **(2a)** $\frac{-(x+y)}{2}$ **(2b)** x^3+y^3 **(2c)** $(x+y)^3$ **(2d)** $\frac{1}{x+y}$ **(2e)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

(3) $0{,}8p$ **(4a)** – 12 **(4b)** – 24 **(4c)** 8 **(5a)** 80 **(5b)** 170 **(5c)** 20

(6a) $2x^3-3x^2-3x-1$ **(6b)** $-x^4-3x^3-3x^2-6x-2$

(7a) $-3x^4-5x^3-x^2-4x+1$ **(7b)** $-7x$ **(7c)** x^4-3x^2

(8) $p+q\equiv -x^3+3x^2-2x+3$; $p(-2)=20$; $q(-2)=7$; $s(-2)=27$; relación: $s(-2)=p(-2)+q(-2)$

(9) $p(3)=-40$; $-p(3)=40$ **(10a)** $-4x^3+3x^2+2x$ **(10b)** $2x^4+4x+4$ **(10c)** $-2x^3+2x^2$

(11a) $12x^5-6x^3$ **(11b)** $-6x^5-8x^4-3x^2-4x$ **(11c)** $6x^5+x^4-4x^3+x^2$ **(11d)** $-7x^3+4x^2+3x-1$

(12a) $6x^3+12x^2-18x$ **(12b)** $12x^2+2x-24$

(12c) $8a^2b-6a^5-20b^2+15ba^3$ **(12d)** $-54a^3+336a^2-504a+96$

(13a) $-4x^7-6x^6+2x^5$ **(13b)** $6x^4+x^3-23x^2+12x$ **(14a)** $5x(-3x^2-4x+2)$ **(14b)** $6x^2(4x^2-5)$

(15a) $9a^2+6a+1$ **(15b)** x^2-6x+9 **(15c)** $9x^2+12x+4$

(16a) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ **(16b)** $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

(17a) $4x^2+12xy+9y^2$ **(17b)** $9x^2+2xy+\frac{y^2}{9}$ **(17c)** $25x^2-50+\frac{25}{x^2}$

(17d) $9a^2-30a+25$ **(17e)** $a^4-2a^2b^2+b^4$ **(17f)** $\frac{9}{25}y^2-\frac{12}{5}+\frac{4}{y^2}$

(18a) $16x^2-9y^2$ **(18b)** $4x^4+16$ **(18c)** $9x^2-x^4$

(19b) $(4+x)^2=16+8x+x^2$ Para $x=3$ las dos expresiones algebraicas valen 49.

(19c) $(4-x)^2=16-8x+x^2$ Para $x=5$ las dos expresiones algebraicas valen 1.

(19d) $(4+x)(4-x)=16-x^2$ Para $x=-6$ las dos expresiones algebraicas valen -20.

(19e) $(4x-2y)^2=16x^2-16xy+4y^2$ Para $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$ las dos expresiones algebraicas valen 1.

(19f) $(4+x)^2=16+8x+x^2$ Para $x=3$ las dos expresiones algebraicas valen 49.

(19g) $(3x+6y)(3x-6y)=9x^2-36y^2$ Para $x=2$, $y=1$ las dos expresiones algebraicas valen 0.

(20a) Cociente= $2x+3$, resto= $-3x-5$ **(20b)** Cociente= -2, resto= $-4x^2+x+10$

(20c) Cociente= $-2x^2+2x-5$, resto= $-4x+8$ **(20d)** Cociente= $-2x^3+3$, resto= $-3x^2+8$

(20e) Cociente= $-6x^3+6x+1$, resto= $-6x$

(21) Respuesta abierta: escribe un polinomio cualquiera como divisor y calcula el dividendo con la relación ***dividendo=divisor·cociente+resto***.

(22a) Cociente= $-2x+3$, resto= -2 **(22b)** Cociente= x^2-2 , resto= 5

(22c) Cociente= $4x^2+x+1$, resto= 0 **(22d)** Cociente= x^2+3x , resto= 1

(23) El resto de la división $P(x):(x-3)$ es igual a $P(3)=-4$ **(24)** 1

(25) $k=-4$ (Se obtiene fácilmente imponiendo que $P(-1)=0$) **(26a)** No **(26b)** Sí **(26c)** Sí **(26d)** Sí

(27a) Dos raíces: $-1, 1$ **(27b)** Tres raíces: $-1, 1, -3$ **(28a)** $P(x)=(3x^2+2x-5)(x-2)$

(28b) $P(x)=(x^2-x+1)(x+1)$ **(28c)** $P(x)=(x+3)(x-3)$ **(28d)** $P(x)=(2x-4)(x-3)$

(29a) $(x-1)^2$ **(29b)** $(x+2)(x-2)(x^2+4)$ **(29c)** $(x+6)^2$ **(29d)** $3(x+3)^2$ **(29e)** $4x^3(x+2)(x-2)$

(29f) $x^2(3-x)^2$ **(29g)** $(3+x)(3-x)$ **(29h)** $x^2(x+9)(x-9)$ **(29i)** $(4x-2)^2$ **(29j)** $(3x+4)^2$

(30a) $(x-1)(x+2)(x-3)$ Tres raíces: - 2, 1, 3 **(30b)** $(x-1)(x+1)(x+2)$ Tres raíces: - 2, - 1, 1

(30c) $3(x+1)(x+2)(x-2)$ Tres raíces: - 2, - 1, 2 **(30d)** $x(x-1)(x+1)(x+3)$ Cuatro raíces: - 3, - 1, 0, 1

(30e) $x(x+1)^2(x-2)$ Tres raíces: - 1 (doble), 0, 2 **(30f)** $(x-2)(x+2)(x^2+5)$ Dos raíces: - 2, 2

(30g) $(x-1)(x-2)(x-4)$ Tres raíces: 1, 2, 4 **(30h)** $x^2(x-1)^2(x+5)$ Tres raíces: - 5, 0, 1

(30i) $(x+1)(x+3)(2x-1)$ Tres raíces: - 3, - 1, ½ **(30j)** $(x-1)(x+1)(5x-1)$ Tres raíces: - 1, 1/5, 1

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1) Sea cual sea el número inicial n, al final se obtiene 10. La cadena de expresiones algebraicas que se van obteniendo en cada paso es: n→10n→10n+100→10000n+100000→n+10→10

(2a) $p+q+r\equiv 3x^4-3x^3+4x^2+4x+4$ **(2b)** $p-q\equiv -3x^4-7x^3+2x^2-5x-9$

(2c) $p\cdot r\equiv -20x^5-21x^4-2x^3-24x^2-7x+2$ **(2d)** $p\cdot r-q\equiv -20x^5-24x^4-4x^3-23x^2-9x-5$

(3a) $4x^2$ **(3b)** $6xyz$ **(3c)** $\frac{7}{4}y$ **(4a)** Cociente= x^2-3x+2 , resto= $-6x+5$

(4b) Cociente= x^2+1 , resto= 0 **(4c)** Cociente= $4x^2-5x-2$, resto= $9x$

(5) El polinomio más sencillo es $x(x-6)(x+3)=x^3-3x^2-18x$ (podemos obtener otra solución multiplicando este polinomio por cualquier número real distinto de cero)

(6) $p(x)\equiv 5x^5+5x^4-x^3+4x^2+x-4$ **(7a)** 7 **(7b)** 63 **(7c)** 0 **(7d)** 0

(8a) $\frac{a^2}{4}+4ab^2+16b^4$ **(8b)** $25x^6-30x^3y^2+9y^4$

(9a) $2x(x+2)(x-3)$ Tres raíces: -2, 0, 3 **(9b)** $(x+1)^2(3x-1)$ Dos raíces: -1 (doble), ½

(9c) $(x+1)(x+3)(3x-1)$ Tres raíces: -3, -1, 1/3 **(9d)** $(x-2)(3x^2+1)$ Una raíz: 2

(10a) $(x+3)^2$ **(10b)** $(x^2-4)^2=((x+2)(x-2))^2=(x+2)^2(x-2)^2$ **(10c)** $(x+6)(x-6)$

(10d) $5x^2+1$ es irreducible **(10e)** $(2x+5)(2x-5)$ **(10f)** $(2x-5)^2$

Módulo de Matemáticas Académicas II
Módulo de Matemáticas Aplicadas II
Nivel II de ESPAD

Unidad 4

Ecuaciones y sistemas

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en las opciones de **enseñanzas académicas** o **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

9- “Álgebra” del libro MATEMÁTICAS 2º de ESO (Autora: Raquel Caro)

5- “Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales” de 3ºA de ESO (Autora: Raquel Hernández)

ÍNDICE

1. IGUALDADES: IDENTIDADES Y ECUACIONES

Una **igualdad** es una expresión matemática en la que aparece el signo igual (=).

Hay tres tipos de igualdades:

Identidad numérica es una igualdad cierta entre números como 3 + 4 + 2 = 7 + 2

Identidad algebraica es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor que demos a las letras.

- ***Ejemplos:*** $3x^2 - x = x(3x-1)$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Ecuación es una igualdad algebraica que solamente se verifica para algunos valores determinados de las letras que en ella intervienen y que se llaman **incógnitas**.

- ***Ejemplo:*** $x^2 - 9 = 0$ es una ecuación que sólo es cierta para $x = -3$ y para $x = 3$;
- ***Ejemplo:*** $x + y = 10$ es una ecuación con dos incógnitas que se verifica para infinitas parejas de valores de x y de y, como por ejemplo: ($x = 1$, $y = 9$); ($x = 2$, $y = 8$); ($x = -1$, $y = 11$)...;

1.1. El lenguaje de las ecuaciones

Las expresiones que hay a cada lado del igual se llaman **miembros** de la ecuación. Todas las ecuaciones tienen dos miembros: la expresión que está a la izquierda del signo igual se llama **primer miembro** y la que está a la derecha, **segundo miembro**.

Las letras que contienen las ecuaciones algebraicas (las "partes literales" de sus dos expresiones algebraicas) se llaman **incógnitas**, que significa literalmente "*desconocidas*". Si todas las letras son iguales, se dice que la ecuación tiene una sola incógnita.

Las **soluciones** o **raíces de una ecuación** son los valores que sustituyendo a las letras en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Resolver una ecuación es hallar todas las soluciones numéricas de la misma.

Comprobar una solución consiste en sustituir en la ecuación las incógnitas por los valores obtenidos y ver si la igualdad resultante es cierta, es decir, si el valor numérico de los dos miembros es el mismo.

Hay ecuaciones tan sencillas que podemos resolverlas “a ojo” o tanteando.

Ejemplo → La ecuación $x + 4 = 9$ tiene como solución evidente $x = 5$.

Ejemplo → La ecuación $2x = 14$ tiene como solución evidente $x = 7$.

Ejemplo → La ecuación $2^x = 8$ tiene como solución $x = 3$.

Para resolver ecuaciones más complejas aplicaremos lo estudiado en el tema anterior para simplificar expresiones algebraicas y veremos técnicas para resolver algunos tipos concretos de ecuaciones.

1.2. Ecuaciones equivalentes. Criterios de equivalencia de ecuaciones

Ecuaciones equivalentes son las que tienen las mismas soluciones, es decir, dos ecuaciones son equivalentes si toda solución de la primera lo es de la segunda y recíprocamente. Para expresar que dos ecuaciones son equivalente usamos el símbolo $\Leftrightarrow$

Ejemplo → $3x-7=11 \Leftrightarrow 3x=18$ puesto que la solución de las dos ecuaciones es $x = 6$.

Ejemplo → $3x+\frac{x}{2}=14 \Leftrightarrow 7x=28$ puesto que la solución de ambas ecuaciones es $x = 4$.

En el proceso de resolver ecuaciones se pasa de una ecuación a otra que sea equivalente y más sencilla. Para obtener ecuaciones equivalentes se tienen en cuenta las siguientes propiedades que nos dicen qué tipo de transformaciones podemos hacer con una ecuación para pasar a otra equivalente.

Criterios de equivalencia de ecuaciones:

. Si se **suma** o se **resta** a los dos miembros de una ecuación una misma cantidad, se obtiene una ecuación equivalente: $A=B \Leftrightarrow A+S=B+S$

. Si se **multiplican** o **dividen** los dos miembros de una ecuación por una misma cantidad distinta de cero, se obtiene una ecuación equivalente: $A=B \Leftrightarrow mA=mB \quad (m \neq 0)$

Estas dos propiedades son el fundamento de las transformaciones que hacemos con una ecuación para pasar a otra equivalente más sencilla y que llamamos *transposición de términos* de un miembro de la ecuación a otro.

Ejemplo de uso de la propiedad de la suma o resta para resolver una ecuación:

- Para resolver la ecuación $x+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$, sumamos $-\frac{2}{3}$ (o restamos $\frac{2}{3}$, que es lo mismo) a los dos miembros para **despejar la incógnita** (conseguir que x esté sola en un miembro) y haciendo las operaciones del segundo miembro obtenemos la solución. En la práctica no suelen escribirse los dos sumandos opuestos, $+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$, ya que su suma es 0, y, usando el lenguaje de transposición de términos, se dice que se aplica la regla de pasar términos (sumandos) de un miembro al otro cambiando su signo.

$$x+\frac{2}{3}=\frac{5}{6} \Leftrightarrow$$
$$x+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{2}{3} \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$$

La solución es $x=\frac{1}{6}$

Ejemplos de uso de la propiedad de la multiplicación o división para resolver una ecuación:

- Para resolver la ecuación $3x=4$, dividimos los dos miembros entre 3 para despejar la incógnita. Usando el lenguaje de transposición de términos, no escribimos el primer paso y decimos que pasamos el factor 3, que multiplica en el primer miembro, dividiendo al otro miembro.

$$3x=4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}=\frac{4}{3}$$

La solución es $x=\frac{4}{3}$

- Para resolver la ecuación $\frac{x}{6}=7$, multiplicamos los dos miembros por 6. Usando el lenguaje de transposición de términos, decimos que pasamos el factor 6, que divide en el primer miembro, multiplicando al otro miembro.

$$\frac{x}{6}=7 \Leftrightarrow \cancel{6}\cdot\frac{x}{\cancel{6}}=6\cdot 7$$

La solución es $x=42$

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación $3x + 9 = x - 5$ transformándola en otra más sencilla equivalente.*

1) Pasamos a un miembro los términos con x y al otro los términos numéricos para pasar a la ecuación equivalente $3x - x = - 5 - 9$.

2) Efectuamos las sumas en el primer miembro y en el segundo: $2x = -14$.

3) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 2: $\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{-14}{2}$ de donde la solución es $x = -7$.

4) Podemos comprobar este valor de x en la ecuación inicial: $3 \cdot (-7) + 9 = (-7) - 5$ es una igualdad cierta porque el valor de los dos miembros es -12.

- *Resuelve la ecuación $6 - x = 2x - 3$.*

1) Transponemos términos de un miembro a otro: $6 + 3 = 2x + x$.

2) Efectuamos las sumas: $9 = 3x$.

3) Despejamos x dividiendo los dos miembros por 3: $3 = x$. La solución de la ecuación es $x = 3$.

4) Comprobamos que, en efecto, es la solución de la ecuación inicial $6 - x = 2x - 3$: $6 - 3 = 3$; $2 \cdot 3 - 3 = 3$.

Actividades propuestas

1. Comprueba que $x = -1$ es solución de la ecuación $\frac{2-x}{5} + \frac{2x-3}{4} = \frac{x-12}{20}$.

2. Verifica si es cierto que $x = 5$ es solución de la ecuación $\frac{5x - 1}{6} = \frac{1}{3}(4 + x) + 1$.

3. Comprueba si alguno de los valores que se dan en cada caso son, o no, solución de la ecuación:

a) Ecuación $\sqrt{5x+9} = 7$; valores: $x = 7$, $x = 8$.

b) Ecuación $2^{x+1} = 64$; valores: $x = 5$, $x = 6$.

c) Ecuación $x^4 - 6 = 10$; valores: $x = -2$, $x = 2$.

4. Resuelve **mentalmente** las siguientes ecuaciones y escribe la solución:

a) $x + 3 = 2$ b) $x - 2 = 3$ c) $x/5 = 1$ d) $x/3 + 2/3 = 4/3$.

5. Elige entre las siguientes ecuaciones todas las que sean equivalentes a la ecuación $3x - 6 = x + 10$.

a) $x - 10 = 5$ b) $16 - x = 3x - 5x$ c) $4x = 32$ d) $2x = 10 + 6$ e) $8 = x$.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $2x - 5 = 4x - 7$ b) $x - 12 = 7x + 6$ c) $x + 9 = 3x - 3$
d) $5x - x + 7 = 2x + 15$ e) $4x + 2 = 14$ f) $3x - 4 = x + 18$
g) $3x - 5 = 2x - 5$ h) $3x - 4 + x = 8$.

2. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **ecuación de primer grado** es aquella en la que solo aparecen expresiones algebraicas de grado 1, de forma que después de simplificarlas y aplicar los criterios de equivalencia se transforman en una ecuación equivalente de la forma $ax = b$ (cuya solución es $x = b/a$ si $a \neq 0$)

Veamos con un ejemplo los pasos que conviene dar para resolver una ecuación de primer grado :

	Ecuación: $6-\frac{3(x+5)}{12}=\frac{2(11-x)}{9}+\frac{x+1}{6}$
1º **Quitar paréntesis**, si los hay, y pasar a una ecuación equivalente sin paréntesis	$6-\frac{3x+15}{12}=\frac{22-2x}{9}+\frac{x+1}{6}$
2º **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores. Conviene hacer las multiplicaciones en dos pasos, escribiendo los paréntesis adecuados en el primer paso.	$36\cdot 6-36\cdot\frac{3x+15}{12}=36\cdot\frac{22-2x}{9}+36\cdot\frac{x+1}{6}$ $\Leftrightarrow$ $216-3\cdot(3x+15)=4\cdot(22-2x)+6(x+1)$ $\Leftrightarrow 216-9x-45=88-8x+6x+6$
3º **Pasar los términos en x a un miembro y los números al otro**, cambiando el signo de los términos que cambien de miembro y después simplificar cada miembro.	$-9x+8x-6x=88+6-216+45$ $\Leftrightarrow\ -7x=-77$
4º **Despejar la incógnita**.	$x=\frac{-77}{-7}=11$ ***Solución:*** x = 11.

Al resolver una ecuación de primero grado, podemos obtener una solución o podemos llegar a una de las siguientes expresiones "especiales": 0·x = 0 ó 0·x = a. Veamos cómo interpretarlas:

- $0\cdot x=0$ significa que cualquier número es solución, ya que cualquier número multiplicado por cero da cero. Se trata de una identidad. La ecuación tiene infinitas soluciones.
- $0\cdot x=a$, con $a\neq 0$ significa que no hay solución, puesto que no existe ningún número que al multiplicarlo por cero dé un número distinto de cero. La ecuación no tiene solución.

Ejemplo → $3(x-2)+2x=5(x-1)-1 \Leftrightarrow 3x-6+2x=5x-5-1 \Leftrightarrow 5x-5x=-6+6 \Leftrightarrow 0x=0$
Cualquier número real x verifica la ecuación inicial, que es una identidad.

Ejemplo → $3(x-2)+2x=5(x-1)+6 \Leftrightarrow 3x-6+2x=5x-5+6 \Leftrightarrow 5x-5x=1+6 \Leftrightarrow 0x=7$
No existe ningún número real x que verifique la igualdad inicial.

Actividades propuestas

7. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba las soluciones:

a) $1-3(2x-1)=16$ b) $5+3(2-x)=3-x$ c) $\frac{1}{7}x-11=13-x$ d) $\frac{3x}{5}-\frac{9}{5}=2x+1$

e) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=3$ f) $x-\frac{4}{5}=\frac{2x}{3}-1$ g) $\frac{1}{4}\left(3x+\frac{5}{2}\right)=2x$ h) $\frac{1}{2}(2x-3)-x=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$

3. ECUACIONES DE 2º GRADO

3.1. Concepto de ecuación de 2º grado

Una **ecuación de segundo grado** es una ecuación polinómica en la que la mayor potencia de la incógnita es 2. Las ecuaciones de segundo grado se pueden escribir de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplos → $3x^2 - 7x + 1 = 0$; $-2x^2 + 5x + -2 = 0$; $x^2 - 9x - 11 = 0$; $-2{,}7x^2 + 3{,}5x - 0{,}2 = 0$.

3.2. Resolución de ecuaciones de 2º grado completas

Se llama **ecuación de segundo grado completa** a la que tiene valores distintos de cero para a, b y c.

Para resolver las ecuaciones de segundo grado completas, usaremos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se llama **discriminante** a la parte de la fórmula que está en el interior de la raíz: $\Delta = b^2 - 4ac$.

Actividad resuelta

- Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Primero debemos saber los valores de a, b y c: $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$.

Sustituyendo estos valores en nuestra fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Por lo tanto, las dos soluciones de la ecuación son: $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ y $x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$

Podemos comprobar cada una de las soluciones sustituyendo el valor en la ecuación inicial:

$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, luego 3 y 2 son soluciones de la ecuación.

Actividades propuestas

8. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado completas:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$.

3.3. Resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas

Llamamos **ecuación de 2º grado incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que el coeficiente b vale 0 (falta b), o el coeficiente c vale 0 (falta c).

Ejemplo → La ecuación de 2º grado $2x^2 - 18 = 0$ es incompleta porque el coeficiente $b = 0$, es decir, falta b.

Ejemplo → La ecuación de 2º grado $3x^2 - 15x = 0$ es incompleta porque no tiene c, es decir, $c = 0$.

Las ecuaciones de 2º grado incompletas pueden resolverse usando la fórmula general, pero es mejor seguir otros procedimientos más sencillos, dependiendo del tipo:

Si el coeficiente b = 0: Despejamos la incógnita normalmente, como hacíamos en las ecuaciones de primer grado:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficiente c = 0: Sacamos factor común:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Para que el producto de dos factores valga cero, uno de los factores debe valer cero. Por tanto, o bien $x = 0$, o bien $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Resumen

Si **b = 0, ax^2 + c = 0**, despejamos la incógnita:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Si **c = 0, ax^2 + bx = 0**, sacamos factor común:

$$\boldsymbol{x = 0} \text{ y } x = \frac{-b}{a}.$$

Ejemplo → En la ecuación $2x^2 - 18 = 0$ falta la b.

Para resolverla despejamos x^2: $2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$.

Una vez que llegamos aquí, razonamos que x puede ser cualquiera de las dos raíces cuadradas de 9, la positiva, 3, o la negativa, –3: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de nuestra ecuación, 3 y –3.

Podemos comprobar cada solución: $2\cdot 3^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$ y $2\cdot(-3)^2 - 18 = 2\cdot 9 - 18 = 0$.

Ejemplo → En la ecuación $3x^2 - 15x = 0$ falta la c. Para resolverla, sacamos factor común:

$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ Una vez que llegamos aquí, tenemos dos opciones:

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.
2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Así hemos obtenido las dos soluciones de la ecuación $x = 0$ y $x = 5$.

Actividades resueltas

- *Resuelve la ecuación de 2º grado $2x^2 - 32 = 0$:*

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la b. Por lo tanto, despejamos la incógnita

$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$. Las soluciones son 4 y –4.

Resuelve la ecuación de 2º grado $x^2 + 7x = 0$:

Solución: Se trata de una ecuación de 2º grado incompleta donde falta la *c*. Por lo tanto, sacamos factor común: $x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$. Las dos posibilidades de que el producto dé 0 son: $x = 0$ y $x + 7 = 0$

Las dos soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = -7$.

Actividades propuestas

9. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado incompletas:

a) $3x^2 + 6x = 0$ b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

3.4. Ecuaciones de segundo grado más complejas

En ocasiones será necesario transformar la ecuación inicial en otra equivalente en la forma estándar y a la que podamos aplicar la fórmula para obtener las soluciones, si es completa, o aplicar alguno de los procedimientos indicados para resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas. Para ello tendremos que quitar paréntesis (si los hay), quitar denominadores (si los hay), pasar todos los términos al primer miembro y agrupar términos del mismo grado

Ejemplo → *Resolver la ecuación:*	$\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x+2)(x-2)}{4} = (x-1)(x+2) + \frac{3}{4}$
1º **Quitar paréntesis**, si los hay, y pasar a una ecuación equivalente sin paréntesis	$\frac{x^2-2x+1}{2} - \frac{x^2-4}{4} = x^2 + x - 2 + \frac{3}{4}$
2º **Quitar denominadores**, si los hay. Para ello se multiplican los dos miembros por el mínimo común múltiplo de todos los denominadores.	$\Leftrightarrow 2(x^2-2x+1)-(x^2-4) = 4x^2+4x-8+3$ $\Leftrightarrow 2x^2-4x+2-x^2+4 = 4x^2+4x-5$
3º **Pasar todos los términos a un miembro**, cambiando el signo de los términos que cambien de miembro y simplificar los términos del mismo grado.	$-3x^2-8x+11=0 \Leftrightarrow 3x^2+8x-11=0$
4º **Aplicar la fórmula para obtener las soluciones**.	$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+132}}{6} = \frac{-8 \pm 14}{6}$ Dos soluciones $x=1$ y $x=-11/3$

Actividades propuestas

10. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $(2x-1)^2 = 25$ b) $x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{1}{5} = 0$

c) $\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{3} = x - \frac{1}{6}$ d) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{1}{2}\right) - 2x = 8x^2 - 1$

3.5. Número de soluciones de una ecuación de 2º grado

Antes hemos definido lo que era el **discriminante**, $\Delta = b^2 - 4ac$

El número de soluciones posibles de una ecuación de 2º grado depende del signo del discriminante.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución real.

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución real.

Ejemplos → *a) La ecuación $2x^2 - 4x - 7 = 0$ tiene como discriminante:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot 2\cdot(-7) = 16 + 28 = 44 > 0$$

Por lo tanto, la ecuación dada tiene 2 soluciones reales y distintas, 5 y –1.

(*Comprobación:* $5^2 - 4\cdot 5 - 5 = 25 - 20 - 5 = 0$ y $(-1)^2 - 4(-1) - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$).

b) La ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene como discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución real, $x = 1$.

c) La ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ tiene como discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\cdot 1\cdot(8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. Ningún número real verifica la ecuación.

Actividades propuestas

11. Averigua cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 + x + 4 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

3.6. Descomposición factorial de un polinomio de 2º grado

Para descomponer un polinomio de segundo grado $P(x) = a x^2 + b x + c$ como producto de factores de primer grado, hallamos sus raíces usando la fórmula que nos da las soluciones de la ecuación de segundo grado $a x^2 + b x + c = 0$:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Como la ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones, una o ninguna según que el discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, sea positivo, cero o negativo, hay tres casos posibles en cuanto a la descomposición del polinomio como producto de factores de primer grado:

-Si el polinomio $P(x) = a x^2 + b x + c$ tiene dos raíces r_1 y r_2, entonces la descomposición como producto de factores de primer grado es $\boxed{P(x) = a(x - r_1)(x - r_2)}$

-Si el polinomio $P(x) = a x^2 + b x + c$ tiene una única raíz r, entonces la descomposición como producto de factores de primer grado es $\boxed{P(x) = a(x - r)^2}$ (en este caso se dice que *r* es una raíz doble).

-Si el polinomio $P(x) = a x^2 + b x + c$ no tiene ninguna raíz real, entonces es **irreducible**, es decir, no se puede descomponer como producto de factores de menor grado.

Ejemplo → *Para descomponer el polinomio* $P(x) = 2x^2 - 7x + 6$,

Aplicamos la fórmula para hallar las raíces:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4}$$

y llegamos a la conclusión de que el polinomio tiene dos raíces: $r_1 = 2$ y $r_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, la descomposición del polinomio como producto de factores irreducibles es

$\boxed{P(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)}$. También podemos escribir la descomposición $P(x) = (2x - 3)(x - 2)$

Ejemplo → *Para descomponer el polinomio* $P(x) = x^2 - 12x + 36$*,*

Aplicamos la fórmula para hallar las raíces:

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{12 \pm 0}{2}$$

y llegamos a la conclusión de que el polinomio tiene solamente un raíz, $r = 6$. Por lo tanto, la descomposición del polinomio como producto de factores irreducibles es

$$\boxed{P(x) = (x - 6)^2}$$

Se dice que 6 es una raíz doble del polinomio porque aparece dos veces en la descomposición.

Ejemplo → *Podemos comprobar que el polinomio* $P(x) = x^2 - 6x + 13$ *no puede descomponerse como producto de factores de menor grado*, viendo que no tiene raíces reales:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

La raíz cuadrada de –16 no es un número real.

Actividades propuestas

12. Escribe la descomposición factorial de los polinomios que no sean irreducibles:

a) $x^2 + x + 4$ **b)** $x^2 - 6x + 9$ **c)** $10x^2 - 3x - 1$ **d)** $2x^2 - 8x + 8$

e) $x^2 - 6x - 7$ **f)** $x^2 - 3x + 5$ **g)** $7x^2 + 5x$ **h)** $2x^2 - 50x$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1. Concepto de ecuación lineal con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad del tipo $a\,x+b\,y=c$, donde a, b y c son números reales. Solución de una ecuación con dos incógnitas es todo par de valores, uno para cada incógnita, que hacen cierta la igualdad. Una ecuación con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Ejemplo→ $2x+3y=6$ es una ecuación lineal con dos incógnitas.

El par de valores (x = 0 , y = 2) es una solución de la ecuación porque 2·0 + 3·2 = 6

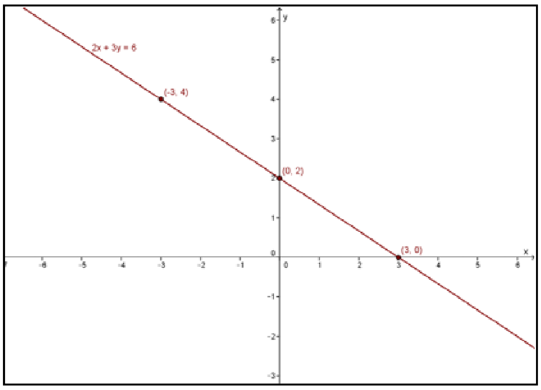
También son soluciones (x = 3, y = 0); (x = –3, y = 4); (x = 1, y = 4/3).Cada solución de una ecuación lineal con dos incógnitas puede interpretarse como un punto del plano dado por sus coordenadas (x, y). Las infinitas soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas son los puntos de una recta, que puede representarse en un sistema de ejes cartesianos.

Para obtener soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas, se despeja una de ellas y se le dan valores a la otra:

Ejemplo→ $2x+3y=6 \quad \Leftrightarrow \quad 3y=6-2x \quad \Leftrightarrow y=\dfrac{6-2x}{3}$

Dando valores a x obtenemos la tabla de valores, en la que cada columna es una solución de la ecuación (un punto de la recta que representa dicha ecuación).

x	0	3	-3	1	-6
y	2	0	4	4/3	6



4.2. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Donde a, b, a' y b' son números reales que se denominan **coeficientes** y c y c' también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (x, y) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplos→ Son sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x-4y=-1 \\ 2x+5y=7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x+2y=7 \\ x-y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x+2y=3 \\ 7x-3y=4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y+2=3x \\ 7x-3=5y \end{cases}$$

Contraejemplos→ **No** es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy+5y=7 \\ 4x-8xy=9 \end{cases}$ porque tiene términos en xy.

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2+5y=7 \\ 4x-8y=9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

4.3. Clasificación de sistemas de ecuaciones

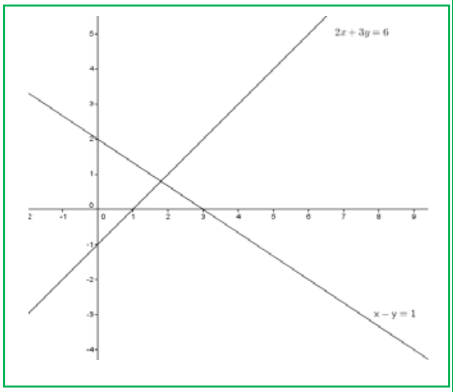
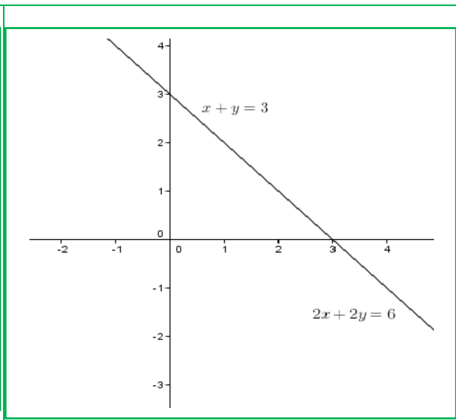
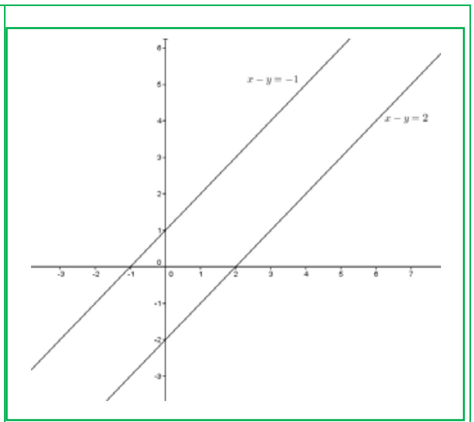
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano y una solución del sistema, si existe, es punto que pertenece a ambas rectas.

Según la posición relativa de las dos rectas que forman el sistema, o lo que es equivalente, según el número de soluciones, un sistema puede ser:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución porque las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones porque las rectas son **COINCIDENTES** (son la misma recta)**.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución porque las rectas son **PARALELAS.**

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><td>Compatible determinado</td><td>Compatible indeterminado</td><td>Incompatible</td></tr>
<tr><td>Rectas secantes</td><td>Rectas coincidentes</td><td>Rectas paralelas</td></tr>
</table>

4.4. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular el valor de la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

***Ejemplo*→** Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación: $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$ y lo sustituimos en la primera:

$2(3-2y)-3y=-1 \Rightarrow 6-4y-3y=-1 \Rightarrow -4y-3y=-1-6 \Rightarrow -7y=-7 \Rightarrow y=(-7)/(-7)=1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*: $x=3-2y \Rightarrow x=3-2\cdot 1=1$. *Solución:* $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Actividades propuestas

13. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x+4y=-7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=0 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=10 \end{cases}$

4.5. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos. Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular el valor de la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo → Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2} = 3 - 2y \Rightarrow 3y - 1 = 2(3-2y) = 6 - 4y \Rightarrow 3y + 4y = 6 + 1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Con el valor obtenido de y, calculamos la x: $x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$ *Solución:* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Actividades propuestas

14. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

4.6. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando dos ecuaciones equivalentes a las del sistema. Para ello, si es necesario, se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de x o y sean números opuestos.

Ejemplo → Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por –2 para que los coeficientes de la x sean opuestos y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de y, calculamos la x:

$2x - 3\cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$ *Solución:* $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Actividades propuestas

15. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

4.7. Sistemas sin solución (incompatibles)

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias, por lo que es imposible que las dos igualdades sean ciertas para los mismos valores de las incógnitas. Son sistemas incompatibles.

Ejemplo → En el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases}$, el primer miembro de la segunda ecuación, 4x + 6y es el doble de 2x + 3y, el primer miembro de la otra ecuación, por lo que debería ser igual al doble de 7 y no a 9.

Veamos lo que ocurre si intentamos resolver un sistema como éste por cualquiera de los métodos explicados en los apartados anteriores, por ejemplo, por reducción:

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por –2 : $\begin{cases} -4x - 6y = -14 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases}$

Y sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro: $0x + 0y = -5$

Como al multiplicar cualquier número x ó y por 0 da cero, la ecuación obtenida no tiene ninguna solución, es una igualdad falsa sin incógnitas, $0 = -5$.

Cuando en el proceso de resolución de un sistema llegamos a una igualdad del tipo cero igual a un número distinto de cero, es porque el sistema es incompatible, no tiene solución.

4.8. Sistemas con infinitas soluciones (indeterminados)

Hay sistemas cuyas dos ecuaciones dicen lo mismo porque son equivalentes. Se llaman sistemas compatibles indeterminados porque tienen infinitas soluciones (las soluciones de cualquiera de las dos ecuaciones equivalentes).

Ejemplo → En el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$, tanto el primer miembro de la segunda ecuación, 4x + 6, como el segundo miembro, 14, son el doble de los respectivos miembros de la otra ecuación, 2x + 3y, 7. Las dos ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones, por lo que las soluciones del sistema son las de cualquiera de las ecuaciones.

Veamos lo que ocurre si intentamos resolver un sistema como éste por cualquiera de los métodos explicados en los apartados anteriores, por ejemplo, por reducción:

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por –2 : $\begin{cases} -4x - 6y = -14 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$

Y sumamos las dos ecuaciones miembro a miembro: $0x + 0y = 0$

Como al multiplicar cualquier número x o y por 0 da cero, la ecuación obtenida se verifica para cualesquiera valores de las incógnitas, es una identidad, $0 = 0$, por lo que el sistema está formado en realidad por una sola ecuación:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \{2x + 3y = 7$$

Para expresar las infinitas soluciones de esta ecuación, se elige una de las incógnitas como parámetro (una forma de decir que esta incógnita puede tomar cualquier valor real λ) y se despeja la otra incógnita en la ecuación:

$$y = \lambda \Rightarrow \quad 2x + 3\lambda = 7 \;\Rightarrow\; 2x = 7 - 3\lambda \;\Rightarrow x = \frac{7 - 3\lambda}{2} \qquad \text{Soluciones:} \begin{cases} x = \dfrac{7 - 3\lambda}{2} \\ y = \lambda \; (cualquier\, número) \end{cases}$$

Cada vez que en la expresión anterior demos un valor concreto al parámetro λ, obtenemos una solución concreta de las infinitas que tiene el sistema, por ejemplo, para λ = 1 obtenemos la solución $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$, para λ = –1 obtenemos la solución $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$, para λ = 0 obtenemos la solución $\begin{cases} x = 7/2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Cuando en el proceso de resolución de un sistema llegamos a una igualdad del tipo cero igual a cero, es porque el sistema es compatible indeterminado. Para expresar las infinitas soluciones de cualquiera de las dos ecuaciones equivalentes del sistema se elige una de las incógnitas como parámetro y se despeja la otra incógnita.

Actividades propuestas

16. Clasifica cada sistema como “compatible determinado”, “compatible indeterminado” o “incompatible” y resuelve los sistemas que sean compatibles:

a) $\begin{cases} -2x + 5y = 4 \\ 2x - 5y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$

5. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5.1. Resolución de problemas mediante ecuaciones

Para resolver problemas por medio de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar la incógnita

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear la ecuación y resolverla

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

- *Busca un número que sumado con su siguiente dé como resultado 9.*

Para resolverlo, sigue los siguientes pasos:

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema.

Lee con mucho cuidado el enunciado, y pregúntate: ¿Qué te piden? ¿Qué datos tienes?

Nos piden un número. La **incógnita** es ese número. Llama a ese número x. Su siguiente, será $x + 1$. Nos dicen que la suma de ambos es 9.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Es un problema que queremos resolver mediante una ecuación. Escribe en lenguaje algebraico el enunciado del problema y plantea una ecuación:

$$x + (x + 1) = 9.$$

Pregúntate si efectivamente resuelve el problema releyendo el enunciado.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia

Ahora sí, ahora resuelve la ecuación. Para resolver una ecuación conviene seguir un orden de actuación que nos ayude a no cometer errores, para ello seguimos el procedimiento aprendido.

Quita los paréntesis: $x + x + 1 = 9$.

Pon en el primer miembro los términos con x, y en el segundo los términos numéricos: $x + x = 9 - 1$.

Opera: $2x = 8$

Para despejar la x, se hace lo mismo a los dos lados, se dividen por 2 ambos miembros: $2x/2 = 8/2$, por tanto, $x = 4$.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

En efecto, comprueba que: $4 + 5 = 9$.

- *En un pequeño hotel hay 34 habitaciones simples y dobles. Si en total tiene 54 camas, ¿cuántas habitaciones son simples y cuántas son dobles?*

Sigue los pasos para la resolución de problemas.

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Llama x al número de habitaciones simples. El número de habitaciones dobles es $34 - x$. El número de camas es 54.

Paso 2: Busca una buena estrategia.

Escribe en forma de ecuación la información del enunciado: $x + 2(34 - x) = 54$.

Paso 3: Lleva adelante tu estrategia. Resuelve la ecuación.

Quita paréntesis: $x + 68 - 2x = 54$.

Deja en el primer miembro los términos con x y pasa al segundo miembro los términos numéricos:

$x - 2x = 54 - 68$.

Opera: $-x = -14$

Para despejar la x divide los dos miembros por –1: $x = -14/-1 = 14$.

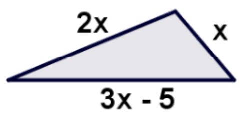
Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Hay 14 habitaciones simples. Luego hay 34 – 14 = 20 habitaciones dobles. Por tanto el número de camas es 54 pues $14 + 2\cdot 20 = 54$.

- *Se quiere dibujar un triángulo de 55 cm de perímetro, de forma que un lado sea el doble de otro, y el tercero sea el triple del menor menos 5 cm. ¿Qué longitud debe tener cada lado?*

Paso 1: Antes de empezar a actuar, intenta entender bien el problema

Dibuja un triángulo, pensando en los datos del enunciado.



Llamamos x al lado menor, de esta forma puedes definir los otros dos lados. El lado mediano es $2x$. El lado mayor es $3x - 5$

Paso 2: Como el perímetro es 55, se puede plantear la ecuación: $x + 2x + (3x - 5) = 55$

Paso 3: Se resuelve la ecuación: $x + 2x + 3x - 5 + 5 = 55 + 5$; $x + 2x + 3x = 60$; $6x = 60$.

Luego $x = 60 / 6 = 10$ es la longitud del lado menor en cm.

Los otros dos lados miden $2x = 20$ y $3x - 5 = 25$.

Solución: Los lados del triángulo miden 10 cm, 20 cm y 25 cm.

Paso 4: Comprueba el resultado. Piensa si es razonable.

Sumando los tres lados, 10 + 20 + 25 = 55, obtenemos el perímetro del triángulo, 55.

¿Cuál es el número natural cuyo quíntuplo aumentado en 6 es igual a su cuadrado?

1.- Una vez comprendido el enunciado, identificamos la incógnita, que en este caso, es el número que estamos buscando. 2.-Número buscado = x.

3.- Traducimos ahora el problema al lenguaje algebraico: $5x + 6 = x^2$

4.- Resolvemos la ecuación:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solución: Como el enunciado dice "número natural" el número buscado es el 6.

5.- ***Comprobación***: En efecto $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Actividades propuestas

17. Si la suma de tres números consecutivos es 63, ¿de qué números se trata?

18. Hemos comprado 8 libros iguales y hemos pagado con un billete de 50 €. Si nos han devuelto 10 €, ¿cuánto costaba cada libro?

19. Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al doble del tercer lado menos 2 cm. Calcula su medida si el perímetro del triángulo es 84 cm.

20. Calcula la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que el ángulo mayor es igual al triple del menor menos 6°.

21. Dos coches salen de dos puntos situados a 560 km de distancia, uno al encuentro de otro. El primero lleva una velocidad de 70 km/h y el segundo de 90 km/h. ¿Cuántas horas tardan en cruzarse?

22. Si en el monedero tenemos 16 monedas de 10 cent y de 20 céntimos de euro, y en total reunimos 2 €, ¿cuántas monedas de cada clase tenemos?

23. Un bolígrafo vale el triple del precio de un lápiz, he comprado un 7 lápices y 1 bolígrafo y he pagado en total 5,50 €, ¿cuál es el precio de bolígrafo?

24. Nieves tiene una pareja de hámsteres con una camada de varias crías. Le regala a una amiga la mitad de las crías. A un segundo amigo le regala la mitad de las crías que le quedan más media cría. La única cría que le queda se la regala a un tercer amigo. ¿Cuántas crías formaban la camada?

25. De un depósito lleno de líquido se saca la mitad del contenido, después la tercera parte del resto y quedan aún 1600 litros. Calcula la capacidad del depósito.

26. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

27. Calcula tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 365.

28. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Cuál es el número?

5.2. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida.

Actividades resueltas

- *Se quieren mezclar dos tipos de café, uno de calidad superior que cuesta 13 €/kg, y otro de calidad inferior que cuesta 8 €/kg, para conseguir 20 kg de mezcla que resulte a 10 €/kg. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de café son necesarios?*

1.- Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son los kilogramos de cada tipo de café que se toman para hacer la mezcla

2.- Kilogramos de café de 13 €/kg = x Kilogramos de café de 8 €/kg = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La mezcla de las dos cantidades de café debe pesar 20 kg: $x + y = 20$

El coste total de la mezcla debe ser 200 € (20 kg · 10 €/kg) : $13x + 8y = 200$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por sustitución:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 13x + 8y = 200 \end{cases} \xrightarrow{\text{despejamos x}} y = 20 - x$$

$$\xrightarrow{\text{sustituimos}} 13x + 8(20 - x) = 200 \Leftrightarrow 13x + 160 - 8x = 200 \Leftrightarrow 5x = 40 \Leftrightarrow x = 8$$

$$\xrightarrow{\text{hallamos el valor de y}} y = 20 - 8 = 12$$

Solución: Se necesitan 8 kg de café superior y 12 kg de café inferior.

5.- ***Comprobación***: En efecto, 8 kg de café de 13 €/kg cuestan 104 €, y 12 kg de café de 8 €/kg cuestan 96 €, con lo que la cantidad total de mezcla es 8 + 12 = 20 kg, el coste total de la mezcla es:

104 + 96 = 200 € y el coste por kilogramo es 200 € / 20 kg = 10 €/kg

Actividades propuestas

29. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

30. Eduardo ha pagado 6,60€ por tres kilos de naranjas y dos de manzanas. En la misma frutería, Ana ha pagado 3,90€ por dos kilos de naranjas y uno de manzanas. ¿Cuánto cuesta un kilo de manzanas?

31. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$ b) $x(-1 + x) = 6$ c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$ e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$ f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -18$

g) $(2x + 3)\cdot(x - 1) = -x - 3$ h) $x\cdot(x + 2) = 168$ i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado con denominadores:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$ b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$ c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{6}$ e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x-1$ f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = \frac{3}{5}$

3. Resuelve mentalmente las ecuaciones siguientes, luego desarrolla las expresiones y utiliza la fórmula general para volver a resolverlas.

a) $(x - 2)\cdot(x - 6) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 3) = 0$ c) $(x - 9)\cdot(x - 3) = 0$

d) $(x - 1)\cdot(x + 4) = 0$ e) $(x + 7)\cdot(x - 2) = 0$ f) $(x - 4)\cdot(x + 6) = 0$

4. Determina el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones de segundo grado calculando su discrimínate, y luego resuélvelas.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$ b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$ c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$ e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$ f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

5. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

6. Resuelve los siguientes sistemas por el método que prefieras:

a) $\begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$

7. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$

8. Resuelve los siguientes sistemas por el método que te parezca más adecuado

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$

9. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

10. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

11. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

12. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

13. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13. años. ¿Qué edad tiene Mario?

14. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

15. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes y polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

16. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

17. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

18. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5 €. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8 €. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

19. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

20. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

21. En una bolsa hay monedas de 1 € y 2 €. Si en total hay 40 monedas y 53 €, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?

22. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

23. Un tren sale de una estación a 90 km/h. Media hora más tarde sale otro tren más rápido en la misma dirección a 110 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar al primer tren?

AUTOEVALUACIÓN

1. Las soluciones de la ecuación $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ son:

a) $x = 2$ y $x = 1$ b) $x = 1$ y $x = -3$ c) $x = 1$ y $x = -2/3$ d) $x = 2$ y $x = -6/5$.

2. Las soluciones de la ecuación $156 = x(x - 1)$ son:

a) $x = 11$ y $x = -13$ b) $x = 13$ y $x = -12$ c) $x = 10$ y $x = 14$ d) $x = -12$ y $x = -11$.

3. Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 14x + 15 = 0$ son:

a) $x = 2$ y $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ y $x = 4$ c) $x = 1$ y $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ y $x = 3$.

4. Las soluciones de la ecuación $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ son:

a) $x = 24$ y $x = 8$ b) $x = 21$ y $x = 3$ c) $x = 5$ y $x = 19$ d) $x = 23$ y $x = 2$.

5. Las soluciones de la ecuación $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ son:

a) Infinitas b) $x = 9$ y $x = 5$ c) no tiene solución d) $x = 1$ y $x = 4$.

6. Las rectas que forman el sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 8x - 4y = 28 \end{cases}$ son:

a) Secantes b) Paralelas c) Coincidentes d) Se cruzan.

7. La solución del sistema $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 6x - 8y = 12 \end{cases}$ es:

a) $x = 1$ e $y = 1$ b) $x = 2$ e $y = 1$ c) $x = 3$ e $y = 2$ d) No tiene solución.

8. La solución del sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$ es:

a) $x = 4$ e $y = 2$ b) $x = 3$ e $y = 3$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $x = 5$ e $y = 1$.

9. En una granja, entre pollos y cerdos hay 27 animales y 76 patas. ¿Cuántos pollos y cerdos hay en la granja?

a) 16 pollos y 11 cerdos b) 15 pollos y 12 cerdos c) 13 pollos y 14 cerdos.

10. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15, le faltan 100 unidades para llegar a su cuadrado?

a) 16 años b) 17 años c) 20 años d) 18 años

Soluciones: 1d 2b 3d 4a 5c 6c 7d 8c 9a 10c

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1) Para x= -1 los dos miembros de la ecuación valen lo mismo, -13/20
(2) Sí, x=5 es solución porque el valor de las expresiones algebraicas de ambos miembros para x=5 es el mismo, 4
(3a) 7 no es solución; 8 sí es solución (3b) 5 sí es solución, 6 no es solución (3c) -2 y 2 son soluciones
(4a) x= -1 (4b) x=5 (4c) x=5 (4d) x=2 (5) Son equivalentes las ecuaciones c, d y e
(6a) x=1 (6b) x= -3 (6c) x=6 (6d) x=4 (6e) x=3 (6f) x=11 (6g) x=0 (6h) x=3
(7a) x= -2 (7b) x= 4 (7c) x=21 (7d) x= -2 (7e) x=4 (7f) x= -3/5 (7g) x= ½ (7h) x= -3
(8a) 2 y 5 son las soluciones (8b) -4 y 3 son las soluciones (8c) 1 y 2 son las soluciones (8d) -2 y 6 son las soluciones
(9a) -6 y 0 son las soluciones (9b) -3 y 3 son las soluciones (9c) -5 y 5 son las soluciones
(9d) -1/2 y 0 son las soluciones (9e) -3/2 y 3/2 son las soluciones (9f) 0 y 2 son las soluciones
(10a) -2 y 3 son las soluciones (10b) 2/5 y ½ son las soluciones (10c) -1 y -1/3 (10d) ½ y 3/2 son las soluciones
(11a) Ninguna solución (11b) Una solución (11c) Dos soluciones (11d) Ninguna solución
(12a) irreducible (12b) $(x-3)^2$ (12c) $10\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ (12d) $2(x-2)^2$
(12e) (x+1)(x-7) (12f) irreducible (12g) $7x\left(x+\frac{5}{7}\right)$ (12h) 2x(x-25)
(13a) x= -1 , y= -1 (13b) x= 2 , y= -1 (13c) x= 2 , y= 2
(14a) x= 1 , y= -1 (14b) x= -2, y= 3 (14c) x=1 ,y=1 (15a) x= 2 , y= -2 (15b) x= 19/7 , y= -27/7 (15c) x= 3 , y= -2
(16a) Incompatible (16b) Compatible determinado: x= 3, y= 2 (16c) Compatible indeterminado: x= λ , y= 5 – λ
(17) 20, 21 y 22 (18) 5€ (19) 17,6 cm (20) 24° (21) 3,5 horas
(22) 12 monedas de 10 céntimos y 4 monedas de 20 céntimos. (23) 1,65 € (24) 6 crías (25) 4800 litros
(26) Dos soluciones: el número -5 y el número 8 (27) Dos soluciones: los números 10, 11, 12 y los números -12, -11 y -10
(28) Dos soluciones: el número 5 y el número -17/3 (29) 49,5 y 73,5 (30) 1,50 € (31) Alberto tiene 24 años y María 8 años

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1a) Dos soluciones: x=-4 y x=-2 (1b) Dos soluciones: x= -2 y x=3 (1c) Dos soluciones: x=0 y x=10
(1d) Dos soluciones: x=-1/2 y x=1 (1e) Dos soluciones: x = -10 y x =1 (1f) Dos soluciones: x = -1/2 y x =1
(1g) Dos soluciones: x = -1 y x =0 (1h) Dos soluciones: x = -14 y x =12 (1i) Dos soluciones: x = 1 y x =7/10
(2a) Dos soluciones: x = -13/3 y x =5 (2b) Dos soluciones: x = - 27/10 y x =3 (2c) Dos soluciones: x = -3 y x =2
(2d) Dos soluciones: x = 0 y x =2 (2e) Dos soluciones: x = 1/4 y x =3 (2f) Dos soluciones: x = -1/6 y x =0
(3a) Dos soluciones: x = 2 y x =6 (3b) Dos soluciones: x = -1 y x =3 (3c) Dos soluciones: x = 3 y x =9
(3d) Dos soluciones: x = -4 y x =1 (3e) Dos soluciones: x = -7 y x =2 (3f) Dos soluciones: x = -6 y x =4
(4a) Dos soluciones: x = -4 y x =1 (4b) Dos soluciones: x = -2 y x =2/7 (4c) No tiene solución
(4d)No tiene solución (4e) Dos soluciones: $x=\frac{2-\sqrt{76}}{12}$ y $x=\frac{2+\sqrt{76}}{12}$ (4f) Dos soluciones: $x=\frac{-8-\sqrt{184}}{10}$ y $x=\frac{-8+\sqrt{184}}{10}$
(5a) x = 3 , y = 2 (5b) x = 1 , y = 4 (5c) x = 1 , y = 1
(6a) x = - 2 , y = 3 (6b) x = 1 , y = 4 (6c) x = 1 , y = 1
(7a) x = 2 , y = 1 (7b) x = 5 , y = -2 (7c) x = 1 , y = 1
(8a) x = 4 , y = 3 (8b) x = 1 , y = 0 (8c) x = 2 , y = 1
(9a) x = 1 , y = 4 (9b) x = -1 , y = 2 (9c) x = 1 , y = 1
(10) 8=4·2 (11) Dos soluciones: 5 ó -17/3 (12) El asno lleva 5 sacos y el mulo 7 (13) Dos soluciones : 8 ó -5
(14) Dos soluciones: 10, 11, 12 ó -12, -11, -10 (15) 21 años (16) 12 y -7
(17) En cada bandeja debe poner 0,5 kg de mazapanes y 0,5 kg de polvorones. Necesitará 12,5 kg de cada producto.
(18) 15 y 5 (19) Pedro tiene 30 años y Raquel 15 años. (20) El bocadillo cuesta 2€ y el refresco 1€
(21) 17 vacas y 33 pollos (22) 54 m de largo y 32 m de ancho. (23) 13 monedas de 2€ y 27 monedas de 1€
(24) 24 chicos y 8 chicas (25) 2,25 horas

Módulo de Matemáticas Académicas II
Módulo de Matemáticas Aplicadas II
Nivel II de ESPAD

Unidad 5

Unidades de medida

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR de Alcorcón en las opciones de **enseñanzas académicas** o **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017).

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se ha utilizado el siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde:**

(www.apuntesmareaverde.org.es):

5- "Sistemas de medida" del libro MATEMÁTICAS 2º de ESO (Autor: Pedro Luis Superviola Serrano)

ÍNDICE

1. MAGNITUDES Y UNIDADES DE MEDIDA

Una **magnitud** es una característica que se puede medir y expresar cuantitativamente, es decir, mediante un número. Una magnitud se mide comparándola con un patrón que tenga bien definida esa magnitud y observando el número de veces que lo contiene. Ese patrón es lo que se llama **unidad de medida**. Una misma magnitud se puede expresar con distintas unidades de medida.

La longitud, por ejemplo, es una magnitud y se puede expresar en kilómetros, metros, centímetros, millas, pulgadas,... Se puede decir que alguien mide 1,52 metros, 152 centímetros, 4,98 pies,...

1.1. Sistema Internacional de Unidades (SI)

En 1792 la Academia de Ciencias de París propuso el **Sistema Métrico Decimal** para solventar los dos grandes inconvenientes de las antiguas medidas:

1. Las unidades cambiaban de una región a otra, dificultando la comunicación entre distintas comunidades. Incluso unidades con el mismo nombre variaban de una provincia a otra.
2. Las subdivisiones de las diferentes medidas no eran decimales, lo que representaba grandes complicaciones para el cálculo.

Se trataba de crear un sistema simple y único de medidas que pudiese reproducirse con exactitud en cualquier momento y lugar, con medios disponibles para cualquier persona. El Sistema Métrico se basa en la unidad "*metro*" con múltiplos y submúltiplos decimales. Del metro se deriva el metro cuadrado como unidad de superficie y el metro cúbico como unidad de volumen. También se derivó del metro el *kilogramo*, que se definió como la masa de un decímetro cúbico de agua.

Se eligió como definición del *metro* "la diezmillonésima parte de la longitud de un cuarto del meridiano terrestre que pasa por París", se fabricó una barra de platino que representaba la nueva unidad de medida y se puso bajo la custodia de los *Archives de France*, junto con el patrón representativo de la unidad *kilogramo*, también fabricado en platino. Copias del metro y del kilogramo se distribuyeron por muchos países que adoptaron el sistema métrico. En España fue declarado obligatorio en 1849, aunque ha coexistido con las unidades tradicionales, sobre todo en el ámbito agrario.

En 1875, para asegurar la uniformidad mundial de las unidades de medida, se creó el **Comité Internacional de Pesos y Medidas** (CIPM) y la **Conferencia General de Pesas y Medidas** (CGPM), que se reúne cada cuatro años. Desde su creación, se han revisado las definiciones de las unidades básicas, con el objetivo de basarlas en constantes fundamentales de fenómenos físicos, lo que es una característica de las definiciones actuales con la única excepción del kilogramo. En 1960, en la undécima CGPM, el sistema métrico de medidas fue llamado oficialmente **Sistema Internacional de Unidades** (**SI**).

El **SI** actual se basa en 7 unidades básicas, unidades derivadas de las unidades básicas, prefijos para denotar múltiplos y submúltiplos de las unidades, y reglas para escribir el valor de magnitudes físicas.

Entre las unidades derivadas que se expresan a partir de las unidades básicas están, por ejemplo, el metro cuadrado (para la magnitud superficie), el metro cúbico (para la magnitud volumen), el metro por segundo (para la magnitud velocidad) o el metro por segundo cuadrado (para la magnitud aceleración).

El CIPM reconoció en 1969 la necesidad de utilizar algunas unidades que no pertenecen al SI pero que juegan un papel importante en ciencia y tecnología o cuyo uso estaba ampliamente extendido. La lista de las unidades fuera del SI en uso reconocido por el CIPM junto con el SI comprende unidades empleadas cotidianamente, como las unidades de tiempo: *día*, *hora* y *minuto*, las unidades angulares: *grado*, *minuto* y *segundo*, el *litro* como unidad de volumen, o la *tonelada* como unidad de masa.

UNIDADES BÁSICAS		
MAGNITUD	nombre	símbolo
Longitud	**metro**	**m**
Masa	**kilogramo**	**kg**
Tiempo	**segundo**	**s**
Intensidad de corriente eléctrica	**amperio**	**A**
Temperatura termodinámica	**kelvin**	**k**
Cantidad de sustancia	**mol**	**mol**
Intensidad luminosa	**candela**	**cd**

El ***metro*** se define como la longitud de trayecto recorrido por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299792458 segundos. El ***segundo*** como la duración de 9192631770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

El kilogramo se define como la masa del prototipo internacional (un cilindro de iridio y platino que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Sèvres, Francia), pero se ha propuesto una redefinición a un valor relacionado con la constante de Plank.

Para escribir los múltiplos o submúltiplos decimales de una unidad, se coloca un prefijo delante del símbolo de dicha unidad, sin ningún espacio intermedio.

Los prefijos del los múltiplos y submúltiplos hasta el kilo (k) se escriben con minúscula y a partir de mega (M) van en mayúscula.

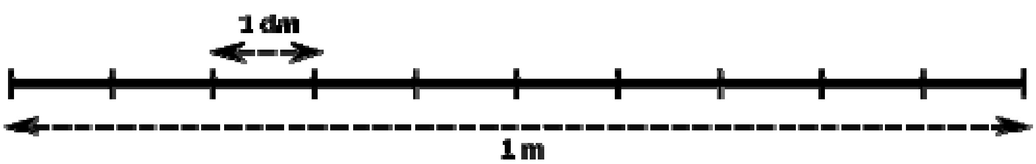
Al no ser abreviaturas los símbolos no se pluralizan y no van seguidos de un punto, salvo al final de una frase. Por ejemplo, es incorrecto escribir “kgs” o “kg.”, lo correcto es “kg”.

MÚLTIPLOS			SUBMÚLTIPLOS		
FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	**deci**	**d**
10^{21}	zeta	Z	10^{-2}	**centi**	**c**
10^{18}	exa	E	10^{-3}	**mili**	**m**
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^{9}	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^{6}	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^{3}	**kilo**	**k**	10^{-18}	atto	a
10^{2}	**hecto**	**h**	10^{-21}	zepto	z
10^{1}	**deca**	**da**	10^{-24}	yocto	y

2. MEDIDA DE LA LONGITUD: EL METRO

El **metro** es la unidad principal de medida de longitudes en el SI y se representa por **m.**

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro	**Hectó**metro	**Decá**metro	**Metro**	**Decí**metro	**Centí**metro	**Milí**metro
km	**h**m	**da**m	**m**	**d**m	**c**m	**m**m
1.000 m	**100** m	**10** m	1 m	**0,1** m	**0,01** m	**0,001** m



Un metro está dividido en 10 decímetros

Otros submúltiplos decimales del metro son:

Micrómetro o **micra** (**μ**m): 1 μm = 0,001 mm = 0,000.001 m = 10^{-6} m.

Nanómetro (**n**m): 1 nm = 0,001 μm = 0,000.000.001 m = 10^{-9} m.

Ángstrom (**Å**): 1 Å = 0,1 nm = 0,000.000.000.1 m = 10^{-10} m.

Otras unidades de longitud, que no son múltiplos o submúltiplos del metro son:

Unidad astronómica (UA), es la distancia media entre la Tierra y el Sol, y es aproximadamente igual a

150 millones de km.

Año luz, es la distancia recorrida por un rayo de luz en un año: 1 año luz ≈ 63.241 UA ≈ $9{,}46\cdot 10^{15}$ m.

Ejemplos:

- El átomo más pequeño, el de hidrógeno, tiene aproximadamente 1 Å de diámetro.
- Los chips electrónicos están compuestos de transistores de 22 nm de tamaño.
- La Vía Láctea tiene un radio de 50.000 años luz.
- El diámetro de un cabello es de aproximadamente 0,1 mm.
- Un espermatozoide mide 53 µm, un hematíe 7 µm.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de longitud debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.

$$\text{km} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dam} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{m} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cm} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mm}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Ejemplos:

- A) 8,25 km = 82,5 hm = 825 dam = 8250 m
- B) 712 mm = 71,2 cm = 7,12 dm = 0,712 m
- C) 25 km 3 hm 7 m = 25307 m
- D) 9 dam 6 m 8 dm 5 mm = 96,805 m.

Actividades propuestas

1. Expresa las siguientes longitudes en centímetros:

a) 54 dm b) 21,08 m c) 8,7 hm d) 327 mm.

2. Expresa las siguientes longitudes en las unidades que se indican en cada caso:

a) 8 m 1 mm en centímetros b) 3,5 km 27 dam en centímetros.

c) 13 km 21 mm en milímetros d) 7 hm 15 cm en centímetros.

e) 2 dam 5 dm en metros f) 0,6 m 340 mm en decímetros.

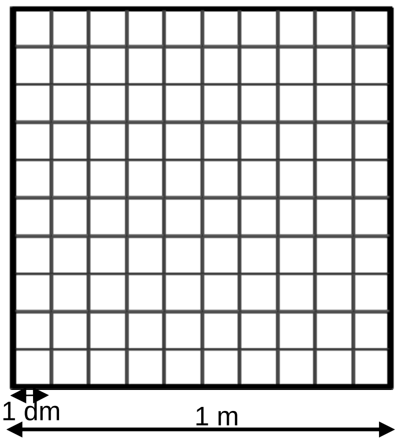
3. MEDIDA DE LA SUPERFICIE: EL METRO CUADRADO

El **metro cuadrado** es la unidad principal de medida de superficie en el SI y se representa por m^2. Se define como la superficie de un cuadrado de lado 1 m.

Es una unidad derivada del metro, por lo que no es una unidad básica del SI.

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cuadrado	**Hectó**metro cuadrado	**Decá**metro cuadrado	**Metro cuadrado**	**Decí**metro cuadrado	**Centí**metro cuadrado	**Milí**metro cuadrado
km^2	**h**m^2	**da**m^2	$\mathbf{m^2}$	**d**m^2	**c**m^2	**m**m^2
1.000.000 m^2	10.000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,000.1 m^2	0,000.001m^2

Para comprender la relación que existe entre las distintas unidades, por ejemplo, que en 1 m^2 hay 100 dm^2 observa la figura que representa un metro cuadrado y su descomposición en decímetros cuadrados. El metro cuadrado se ha dividido en 10 filas de 1 dm de altura. Cada fila contiene 10 cuadrados de 1 dm^2 de superficie cada uno. En el metro cuadrado hay 100 de estos cuadrados, es decir, 100 dm^2.



Ejemplos:

- Un piso suele medir entre 60 m^2 y 110 m^2.
- Un campo de fútbol para partidos internacionales mide entre 64 dam^2 y 82,5 dam^2.
- La provincia del estado español con mayor superficie es Badajoz, con 21.766 km^2, la menor Guipúzcoa con 1.980 km^2.
- El estado de la Unión Europea con mayor superficie es Francia, con 547.030 km^2.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **superficie** debemos multiplicar o dividir por **cien** tantas veces como sea necesario.

$$km^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} hm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} dam^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} m^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} dm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} cm^2 \underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}} mm^2$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de dos en dos cifras por cada posición.

Ejemplos:

a) 0,743 km^2 = 743.000 m^2

b) 95.400 mm^2 = 0,0954 m^2

c) 5,32 hm^2 = 53.200 m^2

d) 37 cm^2 = 0,0037 m^2

e) 82 km^2 = 82.000.000 m^2

f) 4 km^2 53 hm^2 2 m^2 = 4.530.002 m^2.

Actividades propuestas

3. Completa con el número adecuado:

a) 35 dam^2= ____ m^2 b) 67 m^2 = ____mm^2 c) 5 km^2 = ____ m^2 d) 7 m^2 = ____ hm^2.

4. Pasa 98 hm^2 37 dam^2 a centímetros cuadrados.

Unidades agrarias

Son unidades que no pertenecen al Sistema Internacional pero se utilizan para medir superficies rurales, bosques, plantaciones,...

El **área**	1 **a** = 100 m^2 = 1 dam^2.
La **hectárea**	1 **ha** = 100 a = 100 dam^2 = 1 hm^2.
La **centiárea**	1 **ca** = 0,01 a = 1 m^2.

Ejemplos:

- Una **hectárea** es un cuadrado de 100 m de lado. Un campo de fútbol mide 62 áreas, aproximadamente media hectárea. Para hacernos una imagen mental, podemos pensar que dos campos de fútbol son más o menos una hectárea.
- La superficie incendiada en España cada año es, en promedio, unas 125.000 ha. La provincia más pequeña es Guipúzcoa, con 1.980 km^2, es decir, 198.000 ha. Es decir, el área incendiada cada año es casi del tamaño de esa provincia.

Para hacer la conversión entre unidades agrarias y su conversión al Sistema Internacional podemos utilizar la siguiente regla:

$$\begin{array}{ccccc} hm^2 & \xrightarrow{\cdot 100} & dam^2 & \xrightarrow{\cdot 100} & m^2 \\ ha & \xleftarrow[:100]{} & a & \xleftarrow[:100]{} & ca \end{array}$$

Ejemplos:

- a) 5,7 km^2 = 570 hm^2 = 570 ha.
- b) 340.000 ca = 34 ha.
- c) 200.000 dm^2 = 0,2 hm^2 = 0,2 ha.
- d) 930 dam^2 = 9,3 hm^2 = 9,3 ha.

Actividades propuestas

5. Expresa las siguientes superficies en áreas:

a) 1.678 ha b) 5 ha c) 8 ha 20 a d) 28.100 ca.

6. La superficie de un campo de fútbol es de 7.140 metros cuadrados. Expresa esta medida en cada una de estas unidades:

a) Centímetros cuadrados

b) Decámetros cuadrados

c) Hectáreas

d) Áreas.

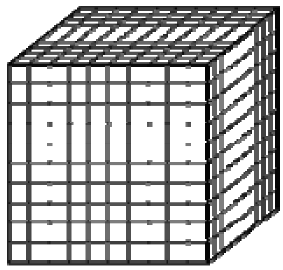
4. MEDIDA DEL VOLUMEN: EL METRO CÚBICO Y EL LITRO

El **metro cúbico** es la unidad principal de medida de **volumen** y se representa por **m^3**. Se define como el volumen de un cubo de arista un metro.

El metro cúbico es una unidad derivada del metro, por lo que no es una unidad básica del SI.

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilómetro cúbico	**Hectó**metro cúbico	**Decá**metro cúbico	**Metro cúbico**	**Decí**metro cúbico	**Centí**metro cúbico	**Milí**metro cúbico
km^3	**hm**^{3}	**dam**^{3}	**m^3**	**dm**^{3}	**cm**^{3}	**mm**^{3}
1.000.000.000 m^3	1000.000 m^3	1000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000.001 m^3	0,000.000.001 m^3

Para comprender la relación entre estas unidades, por ejemplo, que 1 m^3 son 1.000 dm^3, observa la figura que representa un metro cúbico descompuesto en decímetros cúbicos. El metro cúbico se ha dividido en 10 capas de 1 dm de altura. Cada capa contiene 10x10=100 cubos de 1 dm de arista. Es decir, en el metro cúbico hay 1.000 de estos cubos de 1 dm^3 de volumen, es decir, 1.000 dm^3.



Ejemplo:

- El consumo de agua y de gas en las facturas se mide en m^3. Una persona consume de media 4,5 m^3 de agua al mes.
- El tamaño de un embalse puede ser 50 hm^3 de capacidad.
- Uno de los embalses de mayor capacidad en España es el de la Almendra, con 2,6 km^3 de capacidad.
- La capacidad total de los embalses de España es de 55 km^3.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de **volumen** debemos multiplicar o dividir por **mil** tantas veces como sea necesario.

km^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ hm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dam^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ m^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ cm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ mm^3

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) de tres en tres cifras por cada posición.

Ejemplos:

- a) 0,743 km^3 = 743.000 dam^3 b) 95.400 mm^3 = 0,0954 dm^3
- c) 5,32 hm^3 = 5.320.000 m^3 d) 457 cm^3 = 0,000457 m^3
- f) 3 km^3 52 hm^3 8 m^3 = 3.052.000.008 m^3 g) 9 dam^3 6 m^3 34 dm^3 = 9.006,034 m^3.

Actividades propuestas

7. Expresa en metros cúbicos 3,2 dam^3 5.600 dm^3.

8. Expresa estos volúmenes en decámetros cúbicos:

a) 0,38 m^3 b) 81 dm^3 c) 1,23 hm^3 d) 52 m^3.

4.1 Medida de la capacidad: el litro

La "*capacidad*" es la misma magnitud que el "*volumen*". El *litro* se utiliza por razones históricas, y no pertenece estrictamente al Sistema Internacional de Unidades, aunque se acepta su uso con las unidades del SI. Debemos conocer el litro y sus múltiplos y submúltiplos porque es una unidad utilizada en la vida cotidiana para medir la capacidad de los recipientes. Un litro equivale a un dm^3 y se utilizan múltiplos de litro como si fuera una unidad más del SI, con múltiplos y submúltiplos decimales, teniendo en cuenta que van de diez en diez.

La **capacidad** es el volumen (generalmente de materia líquida o gaseosa) que es capaz de albergar un recipiente. Su unidad principal de medida es el **litro** y posee doble símbolo reconocido: **L** o **l.**

Múltiplos			**Unidad**	**Submúltiplos**		
Kilolitro	**Hecto**litro	**Deca**litro	**Litro**	**Deci**litro	**Centi**litro	**Mili**litro
kL	**h**L	**da**L	**L**	**d**L	**c**L	**m**L
1.000 L	**100** L	**10** L	1 L	**0,1** L	**0,01** L	**0,001** L

Ejemplos:

- Una botella de agua grande tiene una capacidad de 1,5 L.
- Un depósito de gasóleo para una casa puede tener una capacidad de 4 hL.
- Una lata de refresco tiene una capacidad de 33 cL.
- Una dosis típica de jarabe suele ser de 5 mL.
- En una ducha de cinco minutos se utilizan unos 90 L de agua.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de capacidad debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario, igual que con metros, pues la unidad no está elevada ni al cuadrado ni al cubo.

$$\text{kL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{daL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{L} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mL}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Ejemplo:

a) 5,7 hL = 570 L
b) 200 mL = 0,2 L
c) 9,5 kL = 9500 L
d) 0,0345 kL = 34,5 L
e) 710 cL = 7,1 L
f) 9,2 mL = 0,0092 L.

Actividades propuestas

9. ¿Cuántos decilitros tiene un litro?

10. Expresa en hectolitros:

a) 34 L
b) 1.232 cL
c) 57 daL
d) 10,7 kL.

Relación entre litros y m^3

Los litros se relacionan con las unidades de volumen porque **1 L equivale a 1 dm^3**. Por lo tanto:

1 L = 1 dm^3 1 mL = 1 cm^3 1 kL = 1 m^3

$$\text{kL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{daL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{L} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cL} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mL}$$

$$\text{m}^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} \text{dm}^3 \underset{:1.000}{\overset{\cdot 1.000}{\rightleftarrows}} \text{cm}^3$$

Ejemplos:

- Un depósito de agua de 1 m^3 tiene 1 kL de capacidad, es decir, 1.000 L.
- En los botellines de agua, dependiendo de la marca, se expresan la cantidad de agua en mL o en cm^3 es decir, como capacidad o como volumen. Pueden poner 250 mL o 250 cm^3.
- Un litro de leche ocupa un volumen de 1 dm^3.

Actividades resueltas

- Expresa en litros:

  a) 7,2 dm^3 = 7,2 L b) 52 m^3 = 52 kL = 52.000 L c) 33 cm^3 = 33 cL = 0,033 L.

- Expresa en decímetros cúbicos:

  a) 0,635 hL = 63,5 dm^3 = 63,5 dm^3.

  b) 23 cL = 0,23 L = 0,23 dm^3.

  c) 73,5 kL = 73.500 L = 73.500 dm^3.

  d) 0,5 dL = 0,05 L = 0,05 dm^3.

Actividades propuestas

11. Ordena de menor a mayor estas medidas:

a) 7,0001 m^3 b) 23.000 L c) 8 hL d) 4 hm^3.

12. Calcula el volumen (en litros y en cm^3) de una caja que mide 20 cm de ancho, 20 cm de largo y 5 cm de alto.

5. MEDIDA DE LA MASA: EL KILOGRAMO

La unidad principal de medida de masa es el gramo y se representa por **g**.

Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
Kilogramo	**Hecto**gramo	**Deca**gramo	**Gramo**	**Deci**gramo	**Centi**gramo	**Mili**gramo
kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
1.000 g	**100** g	**10** g	1 g	**0,1** g	**0,01** g	**0,001** g

Otros múltiplos		
Tonelada métrica	**Quintal métrico**	**Miriagramo**
tm	**qm**	**mag**
1.000 kg	100 kg	10 kg

El SI estableció como unidad básica de masa el kilogramo y definió su patrón como la masa que tiene el ***prototipo internacional*** (un cilindro de platino e iridio) que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Aunque la tonelada no forma parte del SI, ha sido aceptada para su uso con las unidades y prefijos del SI por el Comité Internacional de Pesas y Medidas. El megagramo (Mg) es una unidad idéntica a la tonelada que sí es parte del SI

Nota: ¡La masa no es lo mismo que el peso!

Una bola de acero pesa mucho en la Tierra, pero no pesa nada en el espacio, y aún así, si te la tiran con fuerza te sigue dando un buen golpe. La fuerza de ese golpe te dice que tiene mucha masa (gramos). La masa se conserva en el espacio porque es una verdadera magnitud, pero el peso es una fuerza debida a la gravedad de la Tierra. Solo en la Tierra la masa y el peso de una persona coinciden como cantidad, por eso es normal decir que alguien "*pesa tantos kg*" aunque no sea del todo correcto, se debería decir que "tiene una masa de 70 kg y, en la Tierra, pesa 70 kgf (kilo gramos fuerza)".

En los ejemplos siguientes usaremos kg como peso por seguir con la forma *coloquial* de hablar, pero deberíamos usar kgf o decir que "tiene una masa de 70 kg".

Cuando pedimos en la tienda *un kilo de patatas*, desde el punto de vista matemático, estrictamente hablando estamos diciendo *mil patatas*, puesto que el prefijo *kilo* significa *mil*.

No significa que esté mal decirlo, pero debemos distinguir los distintos contextos y situaciones.

En la tienda podemos comprar *un kilo de patatas*, mientras que en clase de matemáticas diremos un *kilogramo de patatas*.

Ejemplos:

- Para plantar trigo, se utilizan entre 60 kg y 250 kg de semilla por hectárea y se cosechan varias toneladas por hectárea.
- El peso de un coche vacío es de unos 1.200 kg.
- El peso máximo autorizado de un vehículo con dos ejes es de 18 t.
- Un elefante africano puede pesar hasta 7,5 t. Una ballena azul, 120 t.

Un **litro** de agua tiene de masa, casi de forma exacta **1 kg**. Esta aproximación se puede realizar, de forma menos precisa, para otros líquidos.

Cambio de unidades

Para realizar cambios de unidades de masa debemos multiplicar o dividir por diez tantas veces como sea necesario.

$$\text{kg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{hg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dag} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{g} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{dg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{cg} \underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}} \text{mg}$$

Esto lo hacemos desplazando la coma hacia la derecha (para multiplicar) o a la izquierda (para dividir) tantas veces como queramos multiplicar o dividir por diez.

Ejemplos:

a) 0,45 kg = 45 g

b) 712 mg = 0,712 g

c) 9,32 hg = 932 g

d) 8,57 cg = 0,0857 g

e) 0,031 kg = 31 g

f) 56 kg 3 hg 7 g = 56307 g

g) 7 dag 2 g 3 dg 5 mg = 72,305 g

h) 8,2 t = 8200 kg

i) 340 g = 0,34 kg

j) 2,4 q = 240 kg

k) 92 mag = 920 kg

l) 678 hg = 67,8 kg

m) 8900 dag = 89 kg.

Actividades propuestas

13. Expresa las siguientes cantidades en hectogramos:

a) 17 g b) 59 dag c) 73,5 kg d) 350 g.

14. Expresa en gramos las siguientes masas:

a) 3,6 dag b) 59 kg c) 740,5 kg 8,5 dag d) 3 dag 15,10 dg.

15. Expresa en kilogramos:

a) 5 t 5 q 2,5 mag b) 9,35 t 750 dag c) 712 q 459 hg d) 22 t 3 mag 8 kg.

6. MEDIDA DE ÁNGULOS

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo **°** y se define como 1/360 de un ángulo completo.

1 ° = 1 / 360 parte de un ángulo completo.

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = 1 ´ = 1/ 60 parte de un grado.

Segundo 1 segundo = 1 ´´ = 1 / 60 parte de un minuto.

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Si un ángulo viene expresado en dos o tres de estas unidades, se dice que está expresado en *forma* ***compleja***. En la *forma incompleja* de la medida de un ángulo aparece una sola unidad.

El paso de una a otra forma se realiza mediante multiplicaciones o divisiones por 60, según haya que transformar una unidad de medida de ángulos en la unidad inmediata inferior o superior.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360 °

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1 ° = 60 minutos = 3600 segundos

1 minuto = 60 segundos

Ejemplo:

- Forma compleja: A = 12° 23 ´ 10´´ B = 13´ 54´´ C = 120° 23´´
- Forma incompleja: D = 35000´´ E = 23° F = 34´

Ejemplo:

- Pasamos el ángulo A del ejemplo anterior a forma incompleja:
  A = 12 ° 23´ 10´´ = 12 · 3600´´ + 23 · 60´´ + 10´´ = 44590´´

Ejemplo:

- Pasaremos el ángulo D del ejemplo anterior a forma compleja:

35000´´	60	583´	60
500	583´	**43´**	**9 °**
200			
20´´			

D = 35000´´ = 583´ 20´´= 9 ° 43´ 20´´

Actividades propuestas

16. Pasa a forma compleja los siguientes ángulos:
a) 12500´´ b) 83´ c) 230´´ d) 17600 ´´.

17. Pasa de forma incompleja a forma compleja:
a) 12 ° 34´ 40´´ b) 13 ° 23´ 7 ´´ c) 49 ° 56´ 32 ´´ d) 1 ° 25´ 27 ´´.

18. Completa la tabla:

Expresión en segundos	Expresión en minutos y segundos	Expresión en grados, minutos y segundos
8465”		
	245 ´ 32 ´´	
		31 ° 3´ 55 ´´

Suma y resta de ángulos en el sistema sexagesimal

Para sumar ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan los sumandos haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después se suman las cantidades correspondientes a cada unidad. Si los segundos sobrepasan 60, se transforman en minutos y se suman a los minutos resultantes de la primera fase de la suma. Si los minutos sobrepasan 60, los transformamos en grados y se suman a los grados anteriormente obtenidos.

Ejemplo:

- 24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´

24º 43´ 29´´	77´´	60	73´	60
+45º 29´ 48´´	**17´´**	1´	**13´**	1º
69º 72´ 77´´	Nº minutos = 72´+ 1´= 73´		Nº de grados= 69º + 1º = 70º	
24º 43´ 29´´ + 45º 29´ 48´´ = 69º 72´ 77´´ = 69º 73´ 17´´ = **70º 13´ 17´´**				

Para restar datos de medida de ángulos expresados en el sistema sexagesimal, se colocan el minuendo y el sustraendo haciendo coincidir grados, minutos y segundos, después restamos. Si en alguna columna el minuendo es menor que el sustraendo, se pasa una unidad inmediatamente superior a la que presente el problema para que la resta sea posible.

Ejemplo:

- 65º 48´ 50´´ – 45º 29´ 48´´

65º 48´ 50´´	
–45º 29´ 48´´	65º 48´ 50´´ – 45º 29´ 48´´ = **20º 19´ 2´´**
20º 19´ 2´´	

Ejemplo:

- 38º 12´ 14´´ – 15º 15´ 15´´

38º 12´ 14´´	37º 72´ 14´´	37º 71´ 74´´
–15º 15´ 15´´	–15º 15´ 15´´	–15º 15´ 15´´
		22º 56´ 59´´
38º 12´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 72´ 14´´ – 15º 15´ 15´´ = 37º 71´ 74´´ – 15º 15´ 15´´= **22º 56´ 59´´**		

Actividades propuestas

19. Calcula:

a) 34º 45´ 30´´ + 12 º 27´ 15´´

b) 16 º 30´ 1´´+ 12 º 13´ 12´´ + 2 º 1´

c) 16 º 45' + 23 º 13'' + 30 º 20´ 30´´

d) 65 º 48´ 56´´ - 12 º 33´ 25´´

e) 35 º 54´ 23´´ - 15 º 1´ 35''

f) 43 º 32´ 1 ´´ - 15 º 50´ 50''.

7. MEDIDA DEL TIEMPO

¿Qué es un **día**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje.

¿Y un **año**? Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol.

Durante toda la historia de la humanidad y hasta bien entrado el siglo XX el tiempo se ha medido basándose en el movimiento aparente del Sol en el cielo. Babilonios y asirios fueron los primeros pueblos en realizar estudios astronómicos con el objetivo de medir el tiempo con la mayor precisión posible. Usaban un sistema de numeración que no era decimal, sino sexagesimal. De ellos aún nos quedan el *día*, la *hora* y el *minuto* como unidades de medida del tiempo, que aunque no son unidades del SI están aceptadas para su uso con las unidades del SI.

La unidad básica del Sistema Internacional de Unidades (SI) para medir la magnitud "tiempo" es el **segundo**, que se representa por la letra **s**, en minúscula y sin punto.

Un **día** tiene 24 horas. Una **hora** tiene 60 minutos. Un **minuto** tiene 60 segundos.

Para tiempos de 1 s o más, se usan, por razones históricas, la unidad minuto, cuyo símbolo es **min** y la unidad hora, cuyo símbolo es **h;** pero para menos de 1 s, se usa el sistema decimal (décimas, centésimas o milésimas de segundo).

Otras medidas del tiempo usadas cotidianamente son:

La semana, que tiene 7 días.

El mes, que tiene 30 días, o 31 días o 28 días el mes de febrero, salvo los años bisiestos que tiene 29.

El año, que tiene 12 meses. Un año tiene 365 días excepto los años bisiestos que tienen 366 días.

Como en el caso de los ángulos, las medidas de tiempos pueden darse en forma compleja o incompleja y se utilizan los mismos procedimientos para pasar de una a otra forma. La suma o diferencia de cantidades de tiempo dadas en forma compleja se realiza también de manera similar a como se hace en el caso de los ángulos.

Producto y división de una cantidad compleja por un número.

<table>
<tr>
<td>Ejemplo 1: (1 h 3 min 18 s)x7= 7 h 23 min 6 s

1 h 3 min 18 s
x 7
7 h 21 min 126 s

126 s = 2 min 6 s
21 min+2 min= 23 min</td>
<td>Ejemplo 2: (5 h 27 min 48 s) : 3 = 1 h 49 min 16 s

5 h | 3
2h   1h
2 h=120 min

120 min+27 min = 147 min
147 min | 3
27   49 min
0 min

48 s | 3
18   16 s
0 s</td>
</tr>
</table>

Actividades propuestas

20. ¿Cuántas horas tiene una semana? ¿Cuántos minutos? ¿Cuántos segundos?

21. Un motorista tarda 1 min 35 s en dar una vuelta a un velódromo. ¿Cuánto tarda en completar una serie de veinte vueltas?

22. Disponemos de 1 hora para fabricar 9 tartas. ¿Cuánto tiempo tenemos para cada tarta?

23. Pasa a forma compleja: a) 8564 s b) 124,6 min c) 1,53 h d) 5,7 h.

RESUMEN

Magnitud	Una **magnitud** se puede medir en distintas **unidades de medida**.
La distancia (magnitud) se puede medir en metros, centímetros, kilómetros,... (distintas unidades de medida).	
Longitud: metro	km $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dam $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ m $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cm $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mm
0,32 km = 32 m = 3.200 cm 3.400 mm = 34 dm = 0,34 dam	
Superficie: metro cuadrado	km^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ hm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dam^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ m^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ dm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ cm^2 $\underset{:100}{\overset{\cdot 100}{\rightleftarrows}}$ mm^2
0,0014 km^2 = 0,14 hm^2 = 14 dam^2 23.000 mm^2 = 230 cm^2 = 2,3 dm^2 = 230 dm^2	
U. agrarias	1 ha = 1 hm^2 1 a = 1 dam^2 1 ca = 1 m^2
5 km^2 = 500 hm^2 = 500 ha 13.000 m^2 = 13.000 ca= 1,3 ha	
Volumen: metro cúbico	km^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ hm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dam^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ m^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ dm^3 $\underset{:1000}{\overset{\cdot 1000}{\rightleftarrows}}$ cm^3 mm^3
3,2 hm^3 = 320 dam^3 = 32.00 m^3 2.800 mm^3 = 28 cm^3 = 0,28 dm^3	
El litro	kL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ daL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ L $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cL $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mL
3,7 kL = 37 hL = 370 daL = 3.700 L 85 mL = 8,5 cL = 0,85 dL = 0,085 L	
Litros y m^3.	1 kL = 1 m^3 1 L = 1 dm^3 1 mL = 1 cm^3
4,5 cL = 45 mL = 45 cm^3 3 hL = 0,3 kL = 0,3 m^3 3 hL = 300 L = 300 dm^3	
Masa: gramo	kg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ hg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dag $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ g $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ dg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ cg $\underset{:10}{\overset{\cdot 10}{\rightleftarrows}}$ mg
2300 kg = 2,3 t 0,23 dag = 2,3 g = 2.300 mg 5,3 hg = 53.000 cg	
Medida de ángulos	Un grado = 1° = 1 / 360 parte de un ángulo completo. ***Minuto:*** 1 minuto = 1´ = 1/60 parte de un grado. ***Segundo:*** 1 segundo = 1´´ = 1/60 parte de un minuto.
Unidades de tiempo	Un **día e**s el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje. Un **año e**s el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol. Un día tiene 24 **horas**. Una **hora** tiene 60 **minutos**. Un **minuto** tiene 60 **segundos.**

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Unidades de longitud

1. Completa con el número o unidad correspondiente:

a) 50 m = _______ hm = 5000 _______ b) 300 hm = 30 _____ = ___________ m

c) _____ dm = _______ m = 2300 mm d) 40 km = 4000 ____ = ___________ dm.

2. Ordena de menor a mayor: 2,7 m; 30 cm; 0,005 km; 2600 mm; 0,024 hm; 26 dm.

3. Rebeca y su compañera de clase han comprobado que el grosor de un paquete de 500 folios mide 6 cm. ¿Cuál es el grosor de un folio? ¿Cuántos folios hay en una caja de 21 cm de alto?

4. Un parque rectangular mide 100 m de largo y 75 m de ancho. Juan quiere correr 7 km. ¿Cuántas vueltas al parque debe de dar?

Unidades de superficie

5. Completa las siguientes igualdades:

a) 3,5 dam^2 = ______ m^2 = ______ dm^2 b) 0,08 km^2 = _______ m^2 = _____ cm^2

c) 32 cm^2 = _____ dm^2 = ______ dam^2 d) 6075 m^2 = _____ dm^2 = ______ hm^2.

6. Expresa las siguientes superficies en las unidades que se indican en cada caso:

a) 3 m^2 2 cm^2 5 mm^2 en decímetros cuadrados

b) 6 dam^2 2 dm^2 en metros cuadrados

c) 9,3 hm^2 5 m^2 6 cm^2 en decámetros cuadrados.

7. La superficie de China es de 9.560.000 km^2. ¿Cuántas ha tiene?

8. Expresa en hectáreas:

a) 3,2 km^2 b) 600.000 dam^2 c) 824 m^2 d) 200 dm^2.

9. Expresa las siguientes superficies en metros cuadrados:

a) 800 ha b) 261 ca c) 3 ha 3 a 3ca.

10. Juan quiere comprar un terreno de 7,3 ha a 3,2 € cada m^2. ¿Cuánto le va a costar?

Unidades de volumen y de capacidad

11. Expresa en metros cúbicos: 28 dam^3 5 m^3 45 dm^3.

12. Completa las siguientes igualdades:

a) 2 m^3 = ______ L b) 33 cL = ______ dm^3 c) 500 mm^3 = _______ mL

d) 230 mL = _____ dm^3 e) 0,02 hm^3 = _____ L f) 230 cL = ______ cm^3.

13. En una urbanización se recoge cada semana 21 m^3 de residuos sólidos. Si viven 42 familias, ¿cuántos litros estimas que produce cada familia al día?

Unidades de masa

14. Expresa en gramos las siguientes masas:

a) 2,7 dag b) 51,3 kg c) 35,7 kg 8,6 dag d) 3 dag 5 g 26 dg.

15. Completa la siguiente tabla:

	kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**
0,943 hg							
75.282,9 dg							
64,92 kg							
4375 dag							
369.266 cg							

16. La densidad se define como el cociente entre la masa y el volumen. El oro puro tiene una densidad de 19,32 g/cm^3 (gramos por centímetro cúbico). Calcula el volumen de un lingote de oro puro de 12,4 kg.

Medida de ángulos

17. Calcula :

a) 36º 57´ 37´´ + 45 º 18´ 54´´ b) 46 º 37´ 35´´+ 82 º 32´ 41´´ + 43 º 5´´

c) 78 º 5´ 34´´ – 26º 5´ 47'' d) 44 º 43´ 2 ´´ – 26 º 47´ 31''

18. La suma de dos ángulos es 236º 57' 46''. Si uno de ellos mide 68º 57' 58'', ¿cuánto mide el otro?

Unidades de tiempo

19. Si duermes 8 horas al día, ¿cuántas horas has dormido en un año no bisiesto? Esas horas, ¿cuántos días son?

20. Cinco guardas de seguridad deben repartirse por igual un servicio de vigilancia de 24 horas. Expresa en horas y minutos el tiempo que debe permanecer vigilando cada uno de ellos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Un cubo de 3 cm de lado, ¿qué volumen tiene?

a) 9 cm^3 b) 0,27 dm^3 c) 0,003 m^3 d) 27 cm^3.

2. De las siguientes medidas, ¿cuál es la mayor?

a) 5,78 daL b) 578 L c) 5,78 kL d) 0,578 hL.

3. El resultado de sumar 0,07 kg + 0,62 dag + 9,3 hg es:

a) 1000 g b) 1 kg 62 g c) 10 hg 62 g d) 1006,2 g.

4. La medida más adecuada para expresar el volumen del contenido de una taza es:

a) 2 L b) 2 cL c) 200 cm^3 d) 2000 mL.

5. El peso de 320 decilitros de agua es:

a) 32 kg b) 320 g c) 0,32 kg d) 3,2 hg.

6. Una jarra de 2 litros de agua pesa vacía 200 g. Si se llena las 3/4 partes de la jarra, ¿cuánto pesa?

a) 1500 g b) 1,7 kg c) 16 hg d) 10,7 kg.

7. El número de segundos de una semana es:

a) 25200 s b) 604800 s c) 602520 s d) 10080 s.

8. El número de segundos de un día es:

a) 1440 s b) 85931 s c) 86400 s d) 10080 s.

9. Transforma a segundos: 2 grados, 45 minutos y 3 segundos:

a) 9903 s b) 2070 s c) 99030 s d) 10303 s.

10. Un ángulo mide la octava parte de un ángulo recto. Su valor en grados, minutos y segundos es:

a) $11^{\circ}\,2'\,00''$ b) $11^{\circ}\,15'\,00''$ c) $10^{\circ}\,15'\,15''$ d) $10^{\circ}\,15'\,2''$.

SOLUCIONES 1d 2c 3d 4c 5a 6b 7b 8c 9a 10b

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1a) 540 cm (1b) 2108 cm (1c) 87.000 cm (1d) 32,7 cm

(2a) 800, 1 cm (2b) 377.000 cm (2c) 13.000.021 mm (2d) 70.015 cm (2e) 20,5 m (2f) 9,4 dm

(3a) 3500 (3b) 67.000.000 (3c) 5.000.000 (3d) 0,0007 (4) 98.370.000 cm^2

(5a) 167.800 a (5b) 500 a (5c) 820 a (5d) 281 a

(6a) 71.400.000 cm^2 (6b) 71,4 dam^2 (6c) 0,714 ha (5d) 71,4 a

(7) 3205,6 m^3 (8a) 0,00038 dam^3 (8b) 0,000 081 dam^3 (8c) 1230 dam^3 (8d) 0,052 dam^3

(9) 10 (10a) 0,34 hL (10b) 0,1232 hL (10c) 5,7 hL (10d) 107 hL

(11) 8 hL < 7,0001 m^3 < 23.000 L< 4 hm^3 (12) 2000 cm^3 = 2 L

(13a) 0,17 hg (13b) 5,9 hg (13c) 735 hg (13d) 3,5 hg

(14a) 36 g (14b) 59000 g (14c) 740585 g (14d) 31,51 g

(15a) 5525 kg (15b) 9357,5 kg (15c) 71245,9 kg (15d) 22038 kg

(16a) 3° 28´ 20´´ (16b) 1° 23´ (16c) 3´ 50´´ (16d) 4° 53´ 20´´

(17a) 45280´´ (17b) 48187´´ (17c) 179792´´ (17d) 5127´´

(18)

Expresión en segundos	Expresión en minutos y segundos	Expresión en grados, minutos y segundos
8465”	141´ 5´´	2° 21´ 5´´
14732´´	245´ 32´´	4° 5´ 32´´
111835´´	1863´ 55´´	31° 3´ 55´´

(19a)47° 12´ 45´´(19b)30° 44´ 13´´(19c)70° 5´ 43´´(19d)53° 15´ 31´´(19e)20° 52´ 48´´(19f) 27° 41´ 11´´

(20) 168 h = 10.080 min = 604.800 s (21) 31 min 40 s (22) 6 min 40 s

(23a) 2h 22 min 44 s (23b) 2 h 4 min 36 s (23c) 1h 31 min 48 s (23d) 5 h 42 min

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1a) 50 m = 0,5 hm = 5000 cm (1b) 300 hm = 30 km = 30.000 m (1c) 23 dm = 2,3 m = 2300 mm

(1d) 40 km = 4000 dam= 400.000dm (2) 30 cm <0,024 hm <25 dm <2600 mm <2,7 m <2,7 m

(3) 0,012 cm; 1750 folios (4) 20 vueltas (5a) 3,5 dam^2 = 350 m^2 = 35000 dm^2

(5b) 0,08 km^2 = 80000 m^2 = 800.000.000 cm^2 (5c) 32 cm^2 = 0,32 dm^2 = 0,000032 dam^2

(5d) 6075 m^2 = 607.500 dm^2 = 0,6075 hm^2 (6a) 300,0205 dm^2 (6b) 60,02 m^2 (6c)930,050006 dam^2

(7) 956.000.000 ha (8a) 320 ha (8b) 6.000 ha (8c) 0,0824 ha (8d) 0,0002 ha

(9a) 8000000 m^2 (9b) 261 m^2 (9c) 30.303 ca (10) 233.600 € (11) 28005,045 m^3

(12a) 2 m^3 = 2000 L (12b) 33 cL = 0,33 dm^3 (12c) 500 mm^3 = 0,5 mL (12d) 230 mL = 0,23 dm^3

(12e) 0,02 hm^3 = 20000 L (12f) 230 cL = 2300 cm^3 (13) 500 L (14a) 27 g (14b) 51300 g (14c) 35786 g

(14d) 37,6 g (16) ≈ 641, 822 cm^3 (17a) 82° 16´ 31´´ (17b) 172° 15´ 16´´ (17c) 51° 59´ 47´´

(17d) 17° 55´ 31´´ (18) 167° 59´ 48´´ (19) 2920 h ≈ 122 días (20) 4 h 48 min

Módulo de Matemáticas Aplicadas II
Nivel II de ESPAD

Unidad 6

GEOMETRÍA

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR de Alcorcón en la opción de **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

8- "Figuras planas" del libro MATEMÁTICAS 1º de ESO (Autora: Milagros Latasa Asso)

9- "Longitudes y áreas" del libro MATEMÁTICAS 1º de ESO (Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo)

7- "Geometría del plano" del libro MATEMÁTICAS 3ºB de ESO (Autor: Pedro Luis Superviola Serrano)

7- "Semejanza" del libro MATEMÁTICAS 4ºB de ESO (Autor: Jorge Muñoz)

8- "Movimientos en el plano y en el espacio" del libro MATEMÁTICAS 3ºB de ESO (Autoras: Adela Salvador y María Molero)

7- "Cuerpos geométricos" del libro MATEMÁTICAS 2º de ESO (Autor: Fernando Blasco)

5- "Geometría del plano y del espacio" del libro MATEMÁTICAS 4ºA de ESO (Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez)

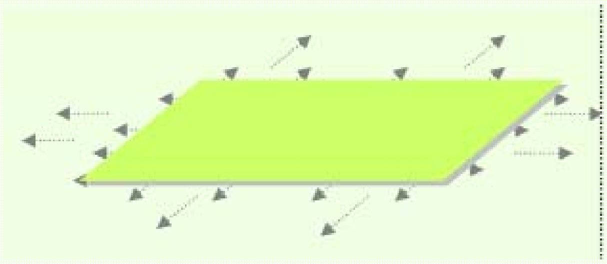
ÍNDICE

1. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

1.1. Puntos, rectas, semirrectas, segmentos

El elemento más sencillo del plano es el **punto**. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Para nombrar puntos se utilizan letras mayúsculas A, B, C,...

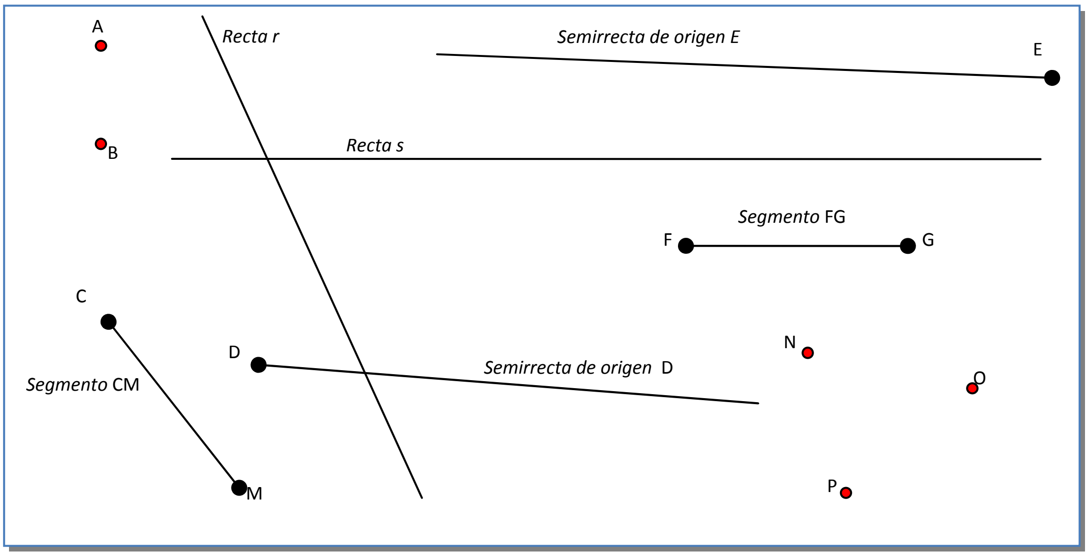
La recta es otro objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas *r, s, t,...*



Imagina que cada uno de los límites de una hoja de papel o de cada una de las paredes de una habitación se prolonga indefinidamente. Los objetos resultantes serían ejemplos de **planos**.

Una **semirrecta** es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta *p*, ...

Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento $\overline{AB}$ o segmento de extremos A, B.



1.2. Posiciones relativas entre dos rectas en el plano

Rectas paralelas: No tienen ningún punto común

Rectas secantes: Tienen un único punto común

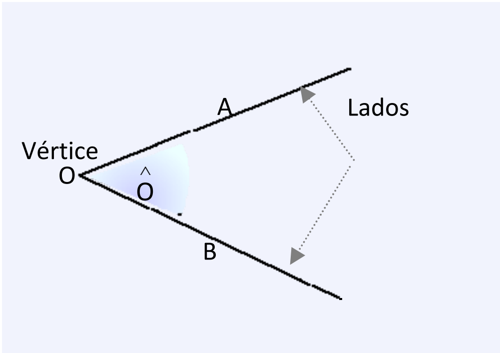
Rectas coincidentes: Todos sus puntos son comunes

Por un punto P exterior a una recta r solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

1.3. Ángulos. Tipos de ángulos

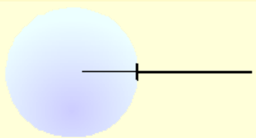
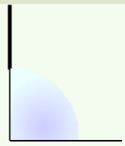
Se llama ***ángulo*** a la región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman **lados** y el origen **vértice.**

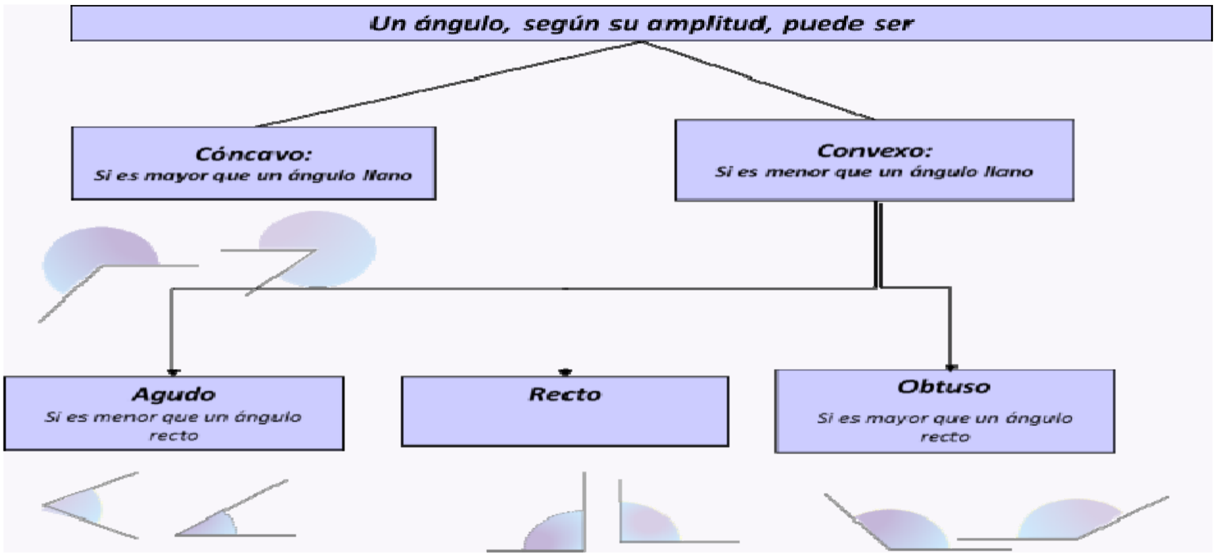
Para nombrar un ángulo podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último puntos sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo ^.



En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = \widehat{AOB}$

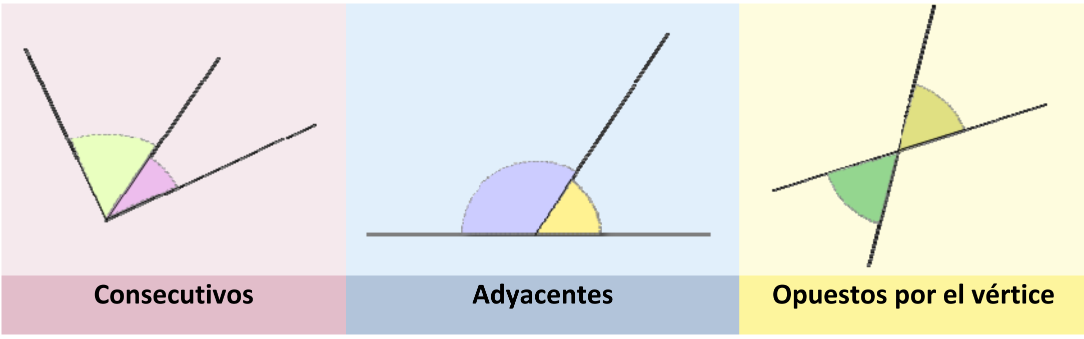
Asociados a semirrectas especiales definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas:

Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.	**Ángulo llano**: Es la mitad de un ángulo completo.	**Ángulo recto**: Es la mitad de un
		



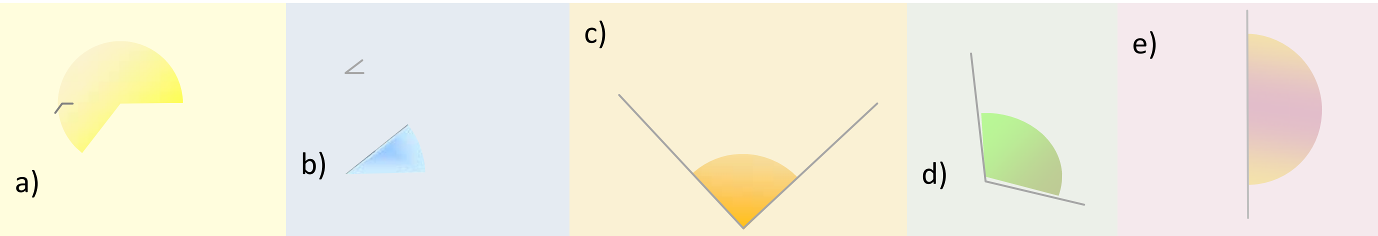
Se llaman ***ángulos consecutivos*** a dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común. Un caso particular son los ***ángulos adyacentes*** que son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo llano.

Se llaman ***ángulos opuestos por el vértice*** a los ángulos que tienen el mismo vértice y tales que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

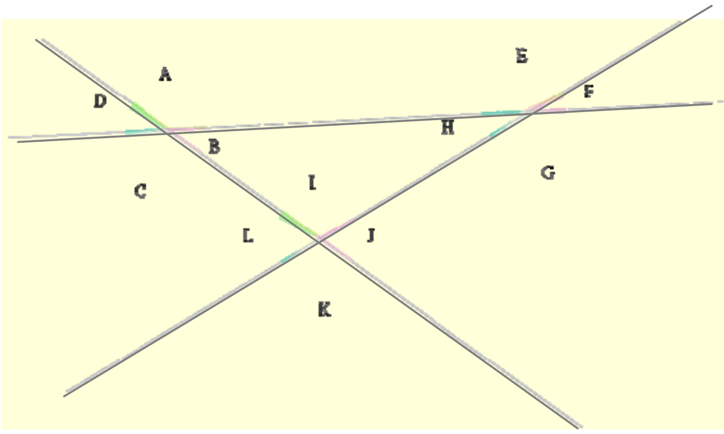


Actividades propuestas

1. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



2. Indica seis parejas de ángulos adyacentes y otras seis de ángulos opuestos por el vértice que se encuentran en el siguiente dibujo:



1.4. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo ° y se define como 1/360 de un ángulo completo.

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = 1 ´ = 1/60 parte de un grado

Segundo 1 segundo = 1 ´´ = 1/60 parte de un minuto

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360 °

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1 grado = 60 minutos = 3600 segundos

1 minuto = 60 segundos

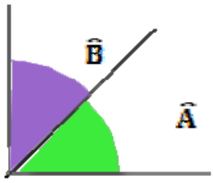
1.5. Ángulos complementarios y suplementarios

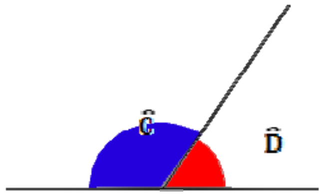
Se llaman **ángulos complementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90^{o})
Se llaman **ángulos suplementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180^{o})

Ejemplo:

- En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y B son ángulos complementarios. C y D son suplementarios.





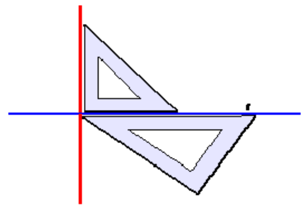
Ejemplo:

- El ángulo $\hat{A} = 12^{o}$ es el complementario de $\hat{B} = 78^{o}$ y el suplementario de $\hat{C} = 168^{o}$

1.6. Rectas perpendiculares. Mediatriz

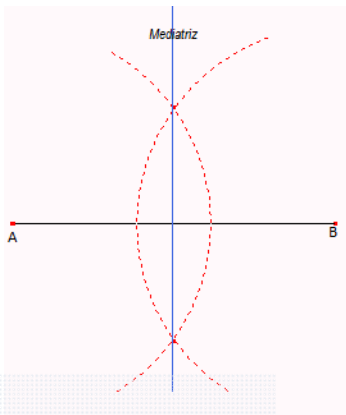
Dos rectas son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. Es un caso especial de rectas secantes.

Para construir una recta perpendicular a una recta dada r, se adapta un cartabón a r y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.



La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio
Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

Para dibujar la mediatriz de un segmento AB con regla y compás, con centro en A y con radio R mayor que la mitad del segmento se traza un arco que corte al segmento AB, con el mismo radio se traza un arco de centro B; se unen los puntos comunes de los dos arcos y esta recta es la mediatriz.

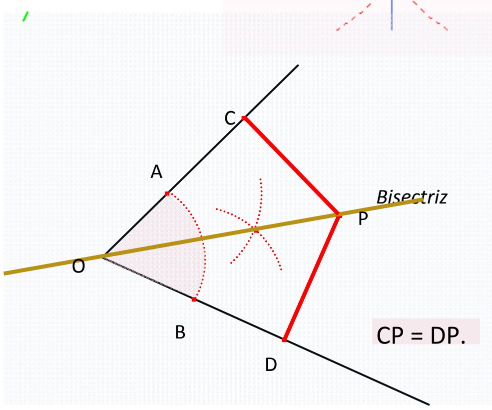


1.7. Bisectriz de un ángulo

La **bisectriz d**e un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Todos los puntos de la bisectriz tienen la propiedad de estar a la misma distancia de los dos lados del ángulo.

Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice O, se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, A y B. A continuación, con centros en A y B respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia AB, trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice O nos da la bisectriz.



Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos, iguales dos a dos, y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.

Actividades propuestas

3. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:

a) 45^{o} b) 130^{o} c) 70^{o} d) 45^{o}

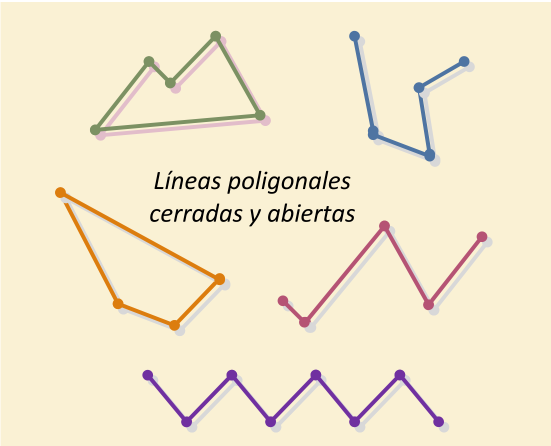
2. FÍGURAS PLANAS

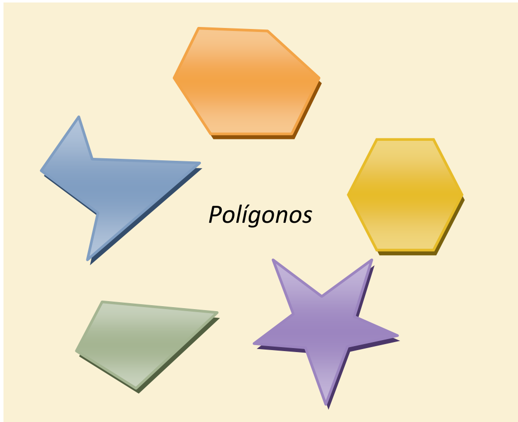
2.1. Líneas poligonales y polígonos

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente. Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es *abierta*.

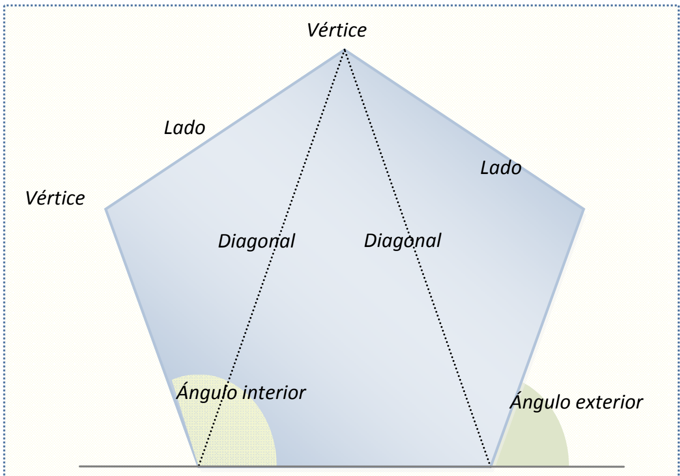
Un **polígono** es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Ejemplos:





2.2. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales



Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono

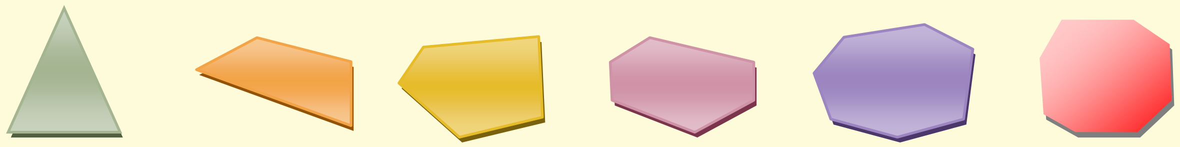
Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices.**

Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal.**

Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.
Dos polígonos son **iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales.

2.3. Clasificación de los polígonos

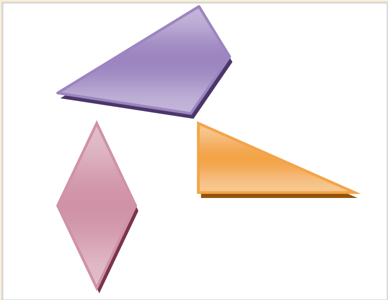
Por *el número de lados,* los polígonos se clasifican en



Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octógono
Tres lados	*Cuatro lados*	*Cinco lados*	*Seis lados*	*Siete lados*	*Ocho lados*

Los nombres que siguen son: eneágono (9 lados), decágono (10), undecágono (11), dodecágono (12),...

Según *los ángulos* los polígonos se clasifican en dos grandes grupos:



Convexos
Si todos sus ángulos son convexos.

Cóncavos
Si al menos uno de sus ángulos es cóncavo

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**.

Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares.** Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular.**

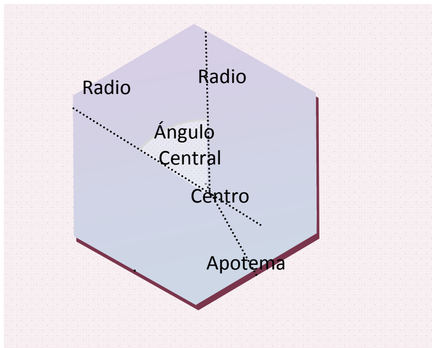
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

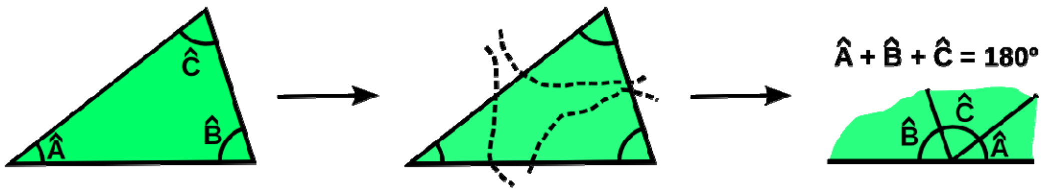
Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. El apotema es perpendicular al lado.



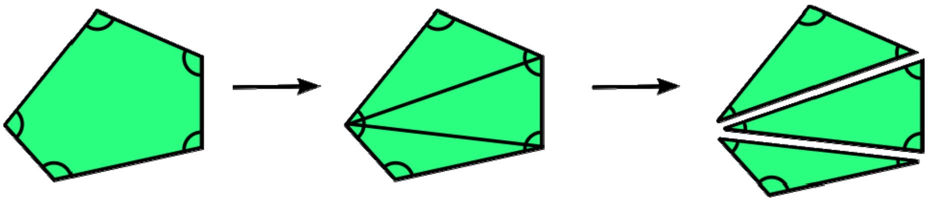
2.4. Suma de ángulos de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .



La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es $(n-2)\cdot 180°$

Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos dividido en triángulos.

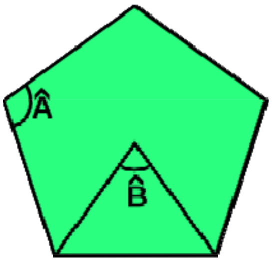


Por lo tanto:

Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180°	Cuadrilátero	180° · 2 = 360°
Pentágono	180° · 3 = 540°	Hexágono	180° · 4 = 720°

Si el polígono de *n* lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre *n* la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:



- *En un pentágono la suma de los ángulos interiores es* 180° · 3 = 540°.

  Por lo tanto el **ángulo interior:** $\hat{A} = \frac{540^o}{5} = 108^o$

  El **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360^o}{5} = 72^o$

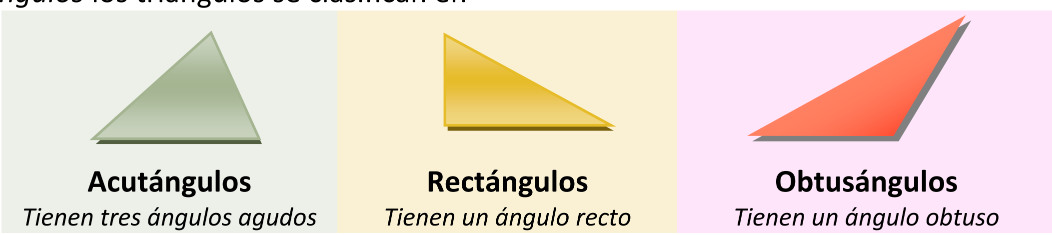
Actividades propuestas

4. Calcula los ángulos central e interior del hexágono regular.
5. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?

2.5. Triángulos

Según *los lados* los triángulos se clasifican en

Según *los ángulos* los triángulos se clasifican en

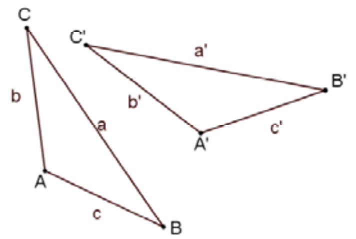


En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman ***catetos*** y el tercero se denomina ***hipotenusa***.

Igualdad de triángulos

Dos triángulos son iguales si sus lados y ángulos son respectivamente iguales

$$\overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = a' \,,\, b = b' \,,\, c = c' \\ \hat{A} = \hat{A}' \,,\, \hat{B} = \hat{B}' \,,\, \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$



Sin embargo, para saber con certeza que dos triángulos son iguales no es necesario comprobar todas las igualdades anteriores y basta con comprobar algunas de ellas, como se establece en los siguientes **criterios de igualdad de triángulos**:

I. Si dos triángulos tienen los tres lados respectivamente iguales, entonces son iguales

$$a = a' \,,\, b = b' \,,\, c = c' \quad \Rightarrow \quad \overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'}$$

II. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo que forman, son iguales

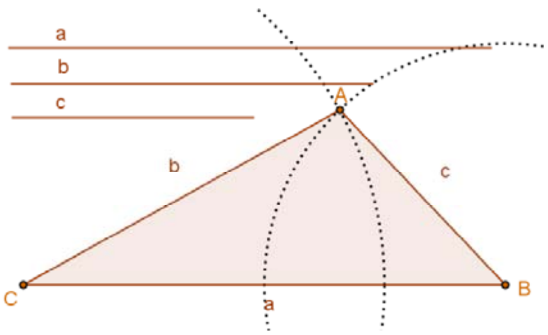
$$a = a' \,,\, b = b' \,,\, \hat{C} = \hat{C}' \quad \Rightarrow \quad \overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'}$$

III. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales un lado y sus dos ángulos contiguos, son iguales

$$a = a' \,,\ \hat{B} = \hat{B}' \,,\, \hat{C} = \hat{C}' \quad \Rightarrow \quad \overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'}$$

Construcción de triángulos

Para construir un triángulo es suficiente conocer algunos de sus elementos. Los casos posibles coinciden con los criterios de igualdad de triángulos:



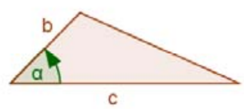
I. Se conocen los tres lados.

Para que se pueda construir el triángulo, el lado mayor debe medir menos que la suma de los otros dos.

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Si se cumple la condición anterior se puede construir un único triángulo como se indica en la figura de la izquierda.

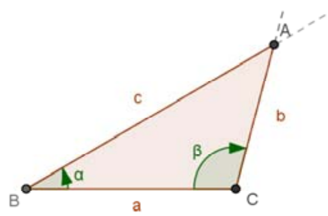
II. Se conocen dos lados y el ángulo que forman.



Siempre se puede construir un triángulo si se dan las medidas de dos de sus lados y del ángulo que forman

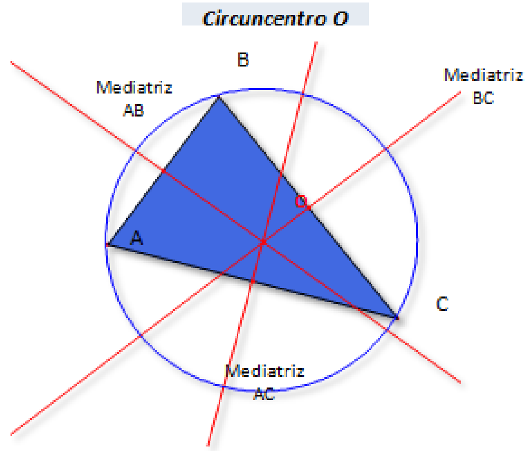
III. Se conocen un lado y los dos ángulos contiguos.

Siempre que la suma de las medidas de los dos ángulos sea menor que 180° se puede construir un triángulo



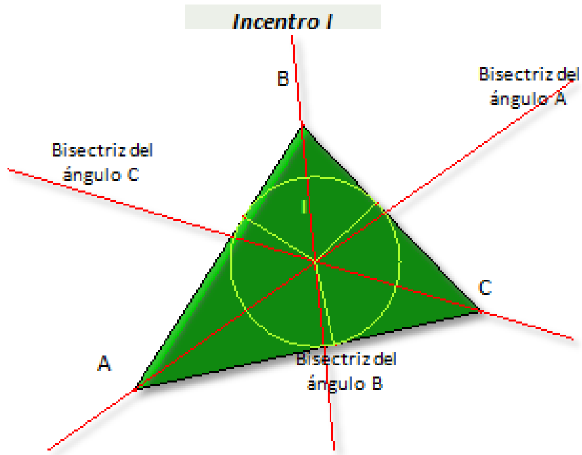
Rectas y puntos notables de un triángulo.

Mediatrices. Circuncentro.



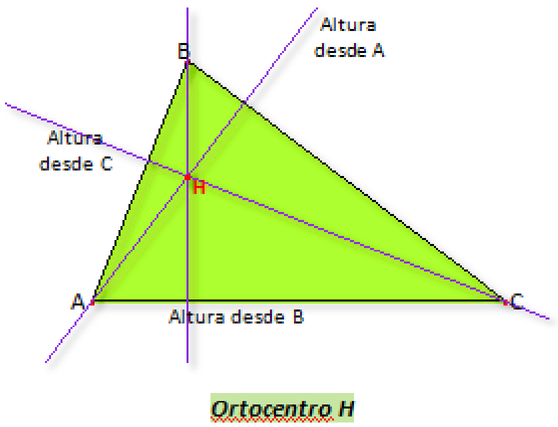
Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en el ***circuncentro***. El circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices.
Es el centro de la circunferencia circunscrita.

Bisectrices. Incentro.



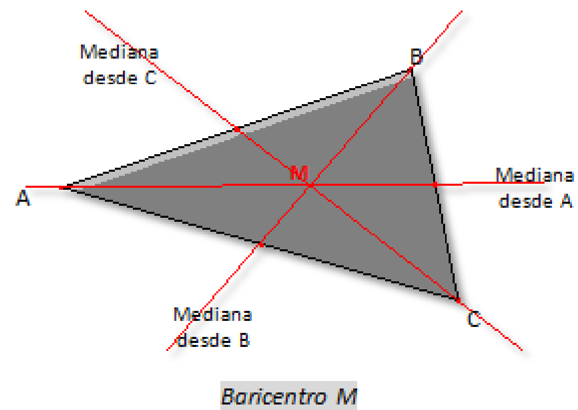
Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en el ***incentro***. El incentro está a la misma distancia de los tres lados.
Es el centro de la circunferencia inscrita.

Alturas. Ortocentro.



Las alturas son las perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.
Se cortan en el ***ortocentro***.

Medianas. Baricentro.



Las medianas son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Dividen al triángulo en dos triángulos de igual área. Se cortan en el ***baricentro***, el centro de gravedad del triángulo.

En cualquier triángulo el circuncentro, ortocentro y baricentro están sobre una misma línea recta, a la que se denomina *Recta de Euler*. El incentro está en dicha recta sólo si el triángulo es isósceles.

Actividades propuestas

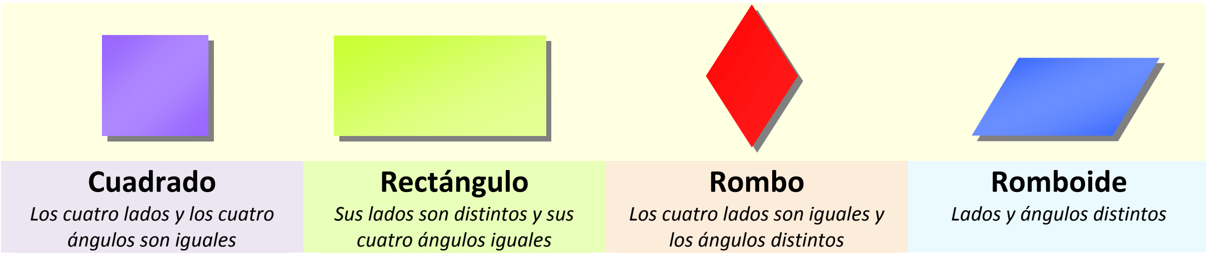
6. Dibuja un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.
7. Dibuja un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40° y 30°. Encuentra su ortocentro y su baricentro.
8. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40° comprendido entre dos lados iguales de 6 cm. Obtén su ortocentro, circuncentro y baricentro. El baricentro es el centro de gravedad. Si pones el triángulo recortado horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.

2.6. Cuadriláteros

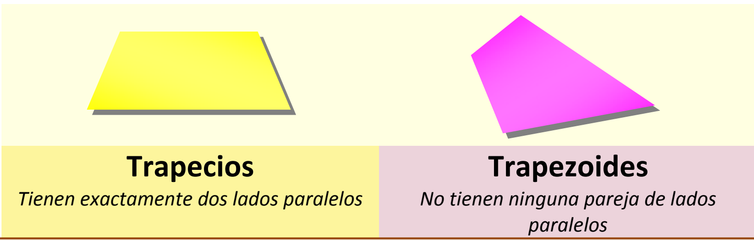
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos. Además, podemos distinguir varios tipos de cuadriláteros convexos.

Los cuadriláteros convexos se clasifican en **paralelogramos** y **no paralelogramos.**

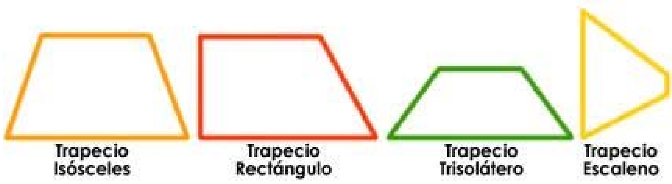
Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:



Un trapecio con dos ángulos rectos se llama **rectángulo**
Un trapecio con los dos lados no paralelos iguales se llama **isósceles**
Un trapecio con los tres lados desiguales se llama **escaleno**



La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360 ^{o}.

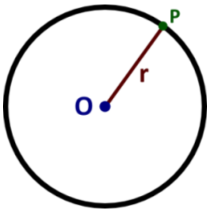
Actividades propuestas

9. Averigua qué tipo de cuadrilátero aparece si se unen los puntos medios de:

a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) trapezoide

10. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32^{o}. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?

2.7. Circunferencias y círculos

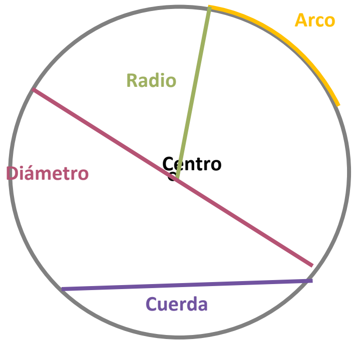


Una circunferencia es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama **círculo**

El **diámetro** de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.

Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima. Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama **arco**.



3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FÍGURAS PLANAS

3.1. Concepto de perímetro y de área de una figura plana

El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.

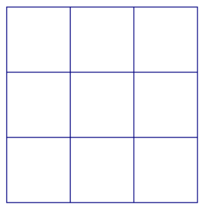
Las unidades para el perímetro en el SI son: metros (m), centímetros (cm), decímetros (dm),...

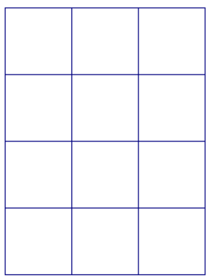
El **área** de una figura plana es lo que mide la región limitada por los lados de la figura.

Las unidades para el área en el SI son $\mathrm{m}^2, \mathrm{cm}^2, \mathrm{dm}^2$, ...

Ejemplo:

Si tenemos un cuadrado de lado 3 *cm*, su perímetro es 3 + 3 + 3 + 3 = 12 *cm* y su área es 9 cm^2 porque podemos meter en él 9 cuadraditos de lado 1 *cm*:





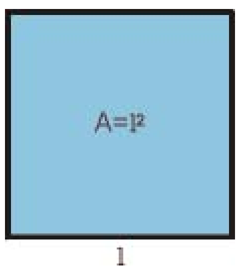
Ejemplo:

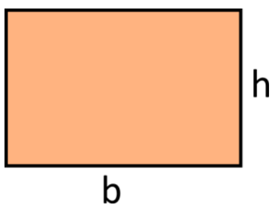
Si tenemos un rectángulo de base 3 *cm* y altura 4 *cm*, su perímetro es 3 + 4 + 3 + 4 = 14 *cm* y su área es 12 cm^2 porque podemos meter en él 12 cuadraditos de lado 1 *cm*:

3.2. Área del cuadrado y del rectángulo

El área de un cuadrado es el cuadrado de su lado: $A = l^2$.

El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura: $A = b \cdot h$.





Ejemplos:

- Si tenemos un cuadrado de 13 *dm* de lado, el área de dicho cuadrado es 169 dm^2 ya que:

$$\text{Área}_{\ cuadrado} = lado^2 = 13^2 = 169\ dm^2.$$

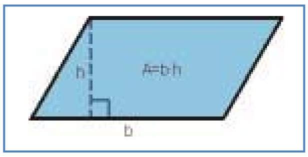
- El área de un rectángulo de 9 cm de base y 4 cm de altura es 36 cm^2.

$$\text{Área}_{\ rectángulo} = base \cdot altura = 9 \cdot 4 = 36\ cm^2.$$

3.3. Área de paralelogramo y del triángulo

El área de un paralelogramo es el producto de su base por su altura:

Área Paralelogramo = base · altura

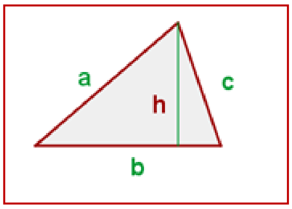


La base es uno cualquiera de los lados del paralelogramo y la altura es la distancia entre dicho lado y el lado paralelo. Un paralelogramo puede convertirse en un rectángulo, como se ve en la figura, cortando un triángulo por la altura y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

El **área de un triángulo** es la mitad del área de un paralelogramo:

$$\text{Área}_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2}$$



En la fórmula anterior, base es la longitud de cualquier lado del triángulo y altura es la distancia a dicho lado desde el vértice opuesto.

Ejemplo:

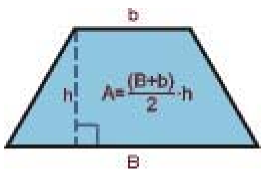
- El área de un triángulo de base b = 5 *cm* y altura h = 8 *cm* es $\frac{5 \cdot 8}{2} = 20\ cm^2$.

3.4. Área del trapecio, rombo y romboide

A los lados paralelos de un trapecio se les llama bases y a la distancia entre las bases se le llama altura

Uniendo dos trapecios iguales como se indica en la figura se forma un paralelogramo que tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad del paralelogramo, es la semisuma de las bases por la altura.

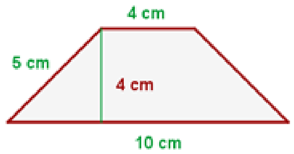
El área de un trapecio es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura: $A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$.

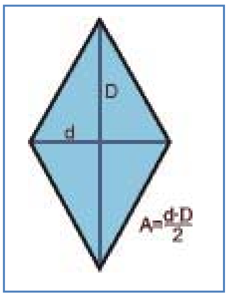


Ejemplo:

- Tenemos el siguiente trapecio cuyas medidas son: B = 10 *cm*, b = 4 *cm*, h = 4 *cm*, su área es:

$$A = \frac{(10+4)\cdot 4}{2} = 28\ cm^2$$





Un rombo está formado por dos triángulos iguales

El área de un rombo es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

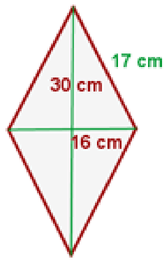
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo:

- Si tenemos un rombo cuyas diagonales miden D = 30 *cm* y d = 16 *cm* y un lado mide 17 *cm*,

  el área será $A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\,\text{cm}^2$,

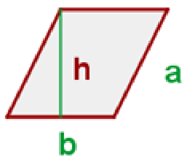
  y el perímetro P = 17 · 4 = 68 cm al ser todos los lados iguales.



  Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados 15 *cm*, (la mitad de la diagonal D) y 8 *cm* (la mitad de la diagonal d), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa 17 *cm*, el lado del rombo.

  El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos: (8 · 15 : 2) · 4 = 60 · 4 = 240 cm^2.

El romboide es un caso particular de paralelogramo, luego su área es el producto de su base y su altura:



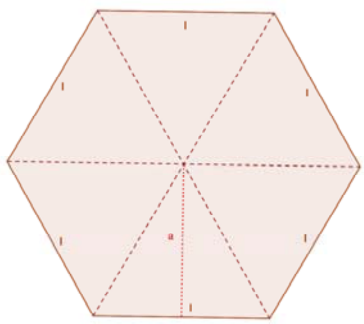
Área romboide = base · altura = b · h

Ejemplo:

- Si tenemos un romboide de 5 *cm* de base y 4 *cm* de altura su área es 5 · 4 = 20 cm^2.

  Si el otro lado mide 4 cm, el perímetro es 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

3.5. Área de polígonos regulares



Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área (base · altura)/2. La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, el apotema del polígono.

Ejemplo

- El hexágono regular de lado l=4 *cm* y apotema a=3,5 *cm* lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 *cm* y altura 3,5 *cm*, por

  lo que su área es: $Área_{\,triángulo} = \frac{4 \cdot 3{,}5}{2} = 7\ cm^2$.

  El área del hexágono es por tanto: $Área_{\,hexágono} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}5}{2} = (\frac{6 \cdot 4}{2}) \cdot 3{,}5 = 42\ cm^2$.

Al ser ($\frac{6\cdot 4}{2}$) el semiperímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

Área de un polígono regular = semiperímetro · apotema

3.6. Longitud de una circunferencia

El número π (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación por redondeo de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592. Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio r, entonces su diámetro mide 2r, y su longitud, por la definición de π, mide 2·π·r. **Longitud de la circunferencia = 2·π·r.**

Ejemplo

- La circunferencia de radio 3 *cm* tiene una longitud L = 2·π·*r* = 2·π·3 = 6·π ≈ 18,84 cm

3.7. Longitud de un arco de circunferencia

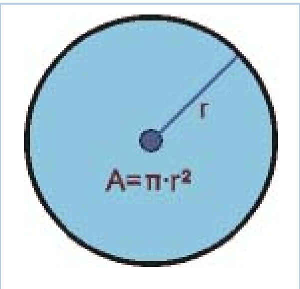
Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360°. Por tanto:

L = 2·π·r·α/360.

3.8. Área del círculo

El área del círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

A = π·r^2.



Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio *r*, con cada vez más lados. Entonces:

i) La apotema del polígono se aproxima al radio.

ii) El perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia.

Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semiperímetro por la apotema, es igual a: (2·π·*r*/2)·*r* = π·*r*^{2}.

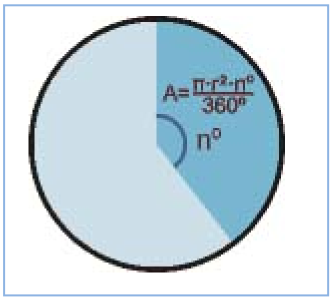
Ejemplo

- El área de un círculo de radio 7 *cm* es A = 49 π ≈ 153,86 *cm*^{2}.

3.9. Área del sector circular

El área de un sector circular que abarca un ángulo de n grados es igual a:

A = π·r^2·n/360.



Ejemplo

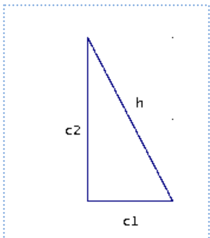
- Para hallar el área del *sector* circular de radio 7 m que abarca un ángulo de 90°, calculamos el área del círculo completo: π·7^2 = 49 π, y hallamos la proporción:

$$A_S = 49\pi\cdot 90/360 = 12{,}25\ \pi \approx 38{,}465\ m^2.$$

Actividades propuestas

11. El tejado de una casa tiene forma de trapecio. La base pegada al techo de la vivienda mide 53 m y la otra base mide 27 m. Sabiendo que la altura del tejado son 8 m, ¿Cuánto mide su área?
12. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso?
13. Una circunferencia de 98,27 cm de longitud, ¿qué radio tiene? ¿y qué diámetro?
14. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia de 270° si el radio mide 17 cm?
15. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 5 cm.
16. Calcula el radio de un círculo de área 28,26 m^2.
17. En una habitación rectangular de lados 3 y 5 m, cubrimos un trozo con una alfombra circular de radio 2 m, ¿qué área de suelo queda sin cubrir?
18. Calcula el área en m^2 de los círculos de radio *r* igual a: a) *r* = 53 *cm* b) *r* = 8,2 *dam*

4. TEOREMA DE PITÁGORAS



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Recuerda que los catetos son los lados que forman el ángulo recto del triángulo y la hipotenusa es el lado opuesto a dicho ángulo.

Utilizando el teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos, $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, o también podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

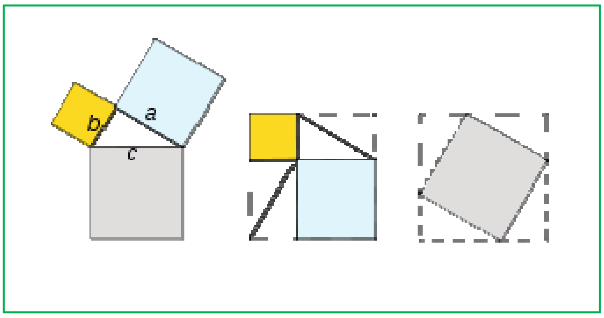
Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 *cm* y 24 *cm*, su hipotenusa vale 26 *cm*, ya que:

$$\mathrm{h} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26\ cm.$$

El teorema de Pitágoras dice que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*, en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.



Por tanto: $a^2 + b^2 = c^2$

Actividades propuestas

19. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

    a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* d) 13,6 *km* y 21,4 *km*.

20. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de los que se da la medida de la hipotenusa y de un cateto:

    a) 13 *cm* y 5 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm*

21. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 *m*. (Da el resultado con dos cifras decimales)
22. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*. (Da el resultado con dos cifras decimales)
23. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*. (Redondea el resultado a mm)
24. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.

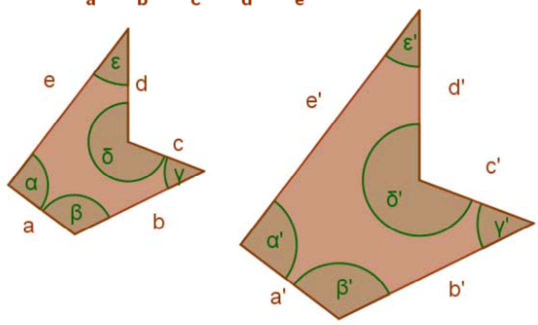
5. SEMEJANZA

5.1. Figuras semejantes

Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*, solamente difieren en el tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales, es decir, cada longitud de una de las figuras se obtiene multiplicando la longitud correspondiente de la otra por un número fijo llamado **razón de semejanza**.

$\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$, $\delta=\delta'$, $\varepsilon=\varepsilon'$

$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=\frac{e'}{e}=1,5$



Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

5.2. Escala en planos, mapas y maquetas

Cuando representamos un objeto en un plano, o mapa, o mediante una maqueta, la razón de semejanza entre la reproducción y la realidad también se llama *escala*.

Escala es el cociente entre cada longitud en la reproducción y la correspondiente longitud en realidad.

La proporción entre las longitudes de un objeto y su reproducción se expresa en algunas ocasiones en forma de producto y otras veces en forma de cociente.

El producto indica, mediante el signo **"X"**, cuántas veces mayor es la representación frente al modelo. (10X, 100X, etc.)

Ejemplo:

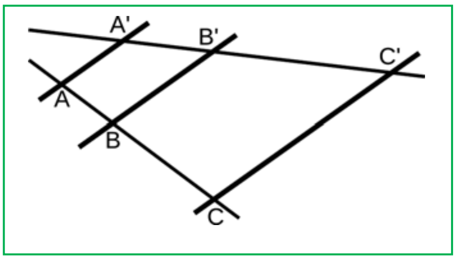
- *Una representación a escala 100X de una célula, indica que la representación es 100 veces más grande que el modelo, o que 100 células en fila tienen la misma longitud que la representación.*

La división indica cuánto más pequeño es el modelo frente a su representación (1:100, 1:500, etc.).

Ejemplo:

- *Un plano de un edificio de escala* 1:100, *indica que la representación es 100 veces más pequeña que el modelo. Si una distancia en el plano es 10 cm, en la realidad será de 1000 cm = 10 m.*

5.3. Teorema de Tales

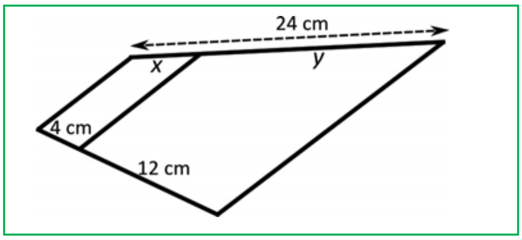


El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas: los segmentos entre las paralelas en una de las rectas son directamente proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

Ejemplo:

- Para calcular los valores de x e y en la figura usamos las proporciones entre segmentos que establece el teorema de Tales:

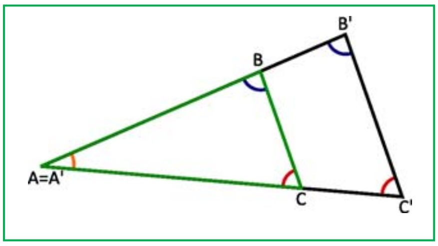


$$\frac{24}{16}=\frac{x}{4} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 24}{16}=6 \quad \Rightarrow x=6\ \text{cm}$$

$$\frac{24}{16}=\frac{y}{12} \Rightarrow y=\frac{12\cdot 24}{16}=18 \quad \Rightarrow y=18\ \text{cm}$$

5.4. Triángulos en posición de Tales

Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando tienen un ángulo común y los lados opuestos a dicho ángulo son paralelos.



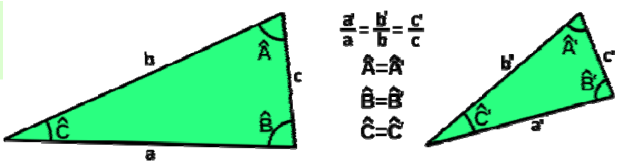
Se verifica la siguiente propiedad importante:

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes, es decir, los ángulos son iguales y los lados son proporcionales:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

5.5. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza

Dos triángulos son semejantes si tienen todos los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales.



Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario medir todos los lados y ángulos, basta medir los elementos que se indican en los siguientes **criterios de semejanza**:

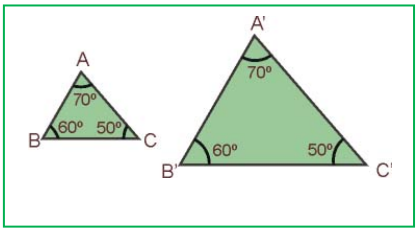
(1º): Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, entonces son semejantes.

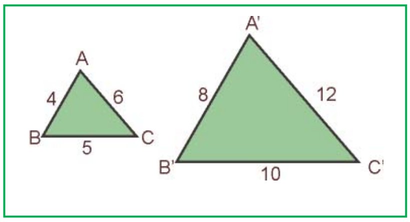
(2º): Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales, entonces son semejantes

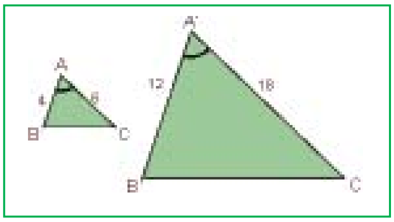
(3º): Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual, son semejantes

La demostración de estos criterios de semejanza se basa en ver que en cada caso los triángulos se pueden poner en posición de Tales.

Ejemplos







Ejemplo

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide* 1 *m, si la sombra de un árbol mide* 12 *m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide* 0,8 *m, ¿cuánto mide el árbol?*

Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman con los rayos del Sol triángulos semejantes), por lo que, si llamamos x a la altura del árbol podemos decir:

$\frac{0,8}{1} = \frac{12}{x}$. Por tanto x = 12/0,8 = 15 metros.

Actividades propuestas

25. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

    a) Un ángulo de 80° y otro de 40°. Un ángulo de 80° y otro de 60°.
    b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70°. Triángulo isósceles con ángulos iguales de 55°.
    c) A = 30°, b = 7 cm, c = 9 cm. A'= 30°, b' = 3,5 cm, c' = 4,5 cm
    d) a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. a' = 10 cm, b' = 12,5 cm, c' = 24,5 cm

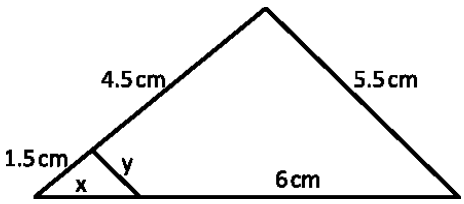
26. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

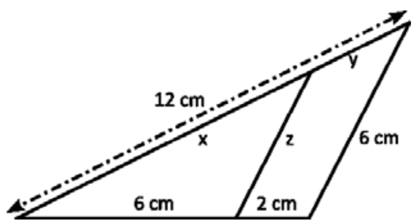
    a) a = 9 cm, b = 6 cm, c = 12 cm. a' = 6 cm, b' = 4 cm, ¿c'?

    b) A = 90°, b = 9 cm, c = 12 cm. A' = 90°, b' = 3 cm, ¿c'? ¿a´?

27. Un triángulo tiene lados de 5 cm, 7 cm y 8 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

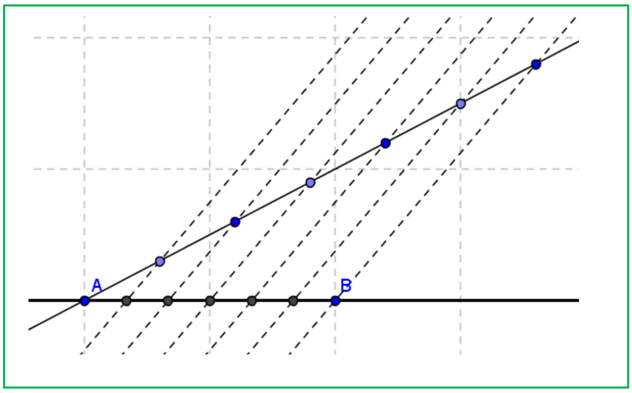
28. Calcula las longitudes desconocidas en cada figura y la razón de semejanza entre los dos triángulos en posición de Tales:





29. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7,2 m. ¿Cuánto mide el edificio?

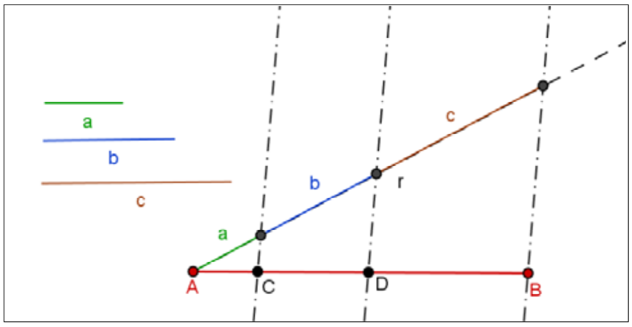
5.6. Aplicaciones del teorema de Tales



Para dividir un **segmento *AB* en *n* partes iguales** se traza una semirrecta *r* con origen en *A* donde se señalan, con ayuda de un compás, *n* segmentos consecutivos de la misma longitud. El extremo del último segmento se une con *B*, y se trazan paralelas a este segmento por cada uno de los puntos señalados de la semirrecta.

La figura obtenida es de triángulos en posición Tales y los segmentos obtenidos en *AB* son todos de igual longitud.

Del mismo modo el teorema de Tales nos sirve para **dividir un segmento en partes que tengan una proporción dada**. El procedimiento es el mismo que el anterior. La diferencia es que ahora sobre la semirrecta *r* se llevan en lugar de segmentos iguales los segmentos con los valores dados por la proporción.



En la figura se ha dividido el segmento AB en partes proporcionales a las longitudes de los segmentos a, b y c.

$$\frac{AC}{a} = \frac{CD}{b} = \frac{DB}{c}$$

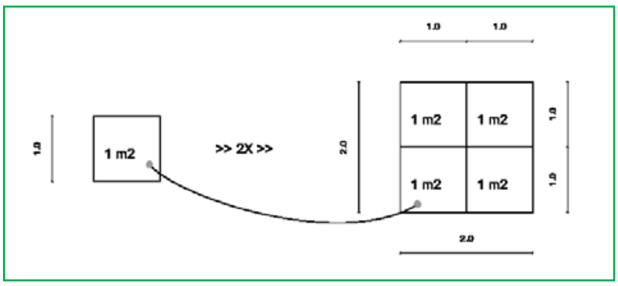
Actividades propuestas

30. Dibuja un segmento de 6 cm y divídelo en 5 partes iguales utilizando regla y compás.
31. Dibuja un segmento de 7 cm de longitud, y divídelo en dos segmentos que estén en una proporción de 3/5.
32. Dibuja una recta numérica y representa en ella las fracciones 5/7 y -5/3 aplicando el teorema de Tales para dividir la unidad en partes iguales.

5.7. Semejanza en longitudes y áreas

En las figuras semejantes la forma no varía, únicamente cambia el tamaño. Toda las longitudes de una figura son proporcionales a las correspondientes de la figura semejante (lados, perímetros,…).

La **razón de semejanza** se aplica a todas las **longitudes** del modelo por igual.



Cuando otras propiedades de una figura dependen de la longitud, como el área, estas propiedades también cambian en la figura semejante, aunque no de la misma manera que la longitud.

Si el área del cuadrado es $A = L^2 = L \cdot L$, el área de un cuadrado semejante de razón 2, será:

$$A = 2{\cdot}L \cdot 2{\cdot}L = 2{\cdot}2 \cdot L{\cdot}L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$$

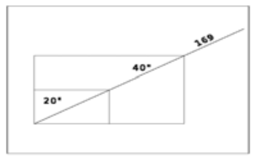
El área de una figura es una propiedad que depende de la longitud de sus segmentos. En concreto, la relación entre la longitud de una figura y su área es cuadrática.

Cuando se aplica el factor de semejanza, se conserva la relación cuadrática entre longitud y área, por lo que en una figura plana, provocará un aumento de su área proporcional al cuadrado.

Si la razón de semejanza entre las longitudes de dos figuras es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$.

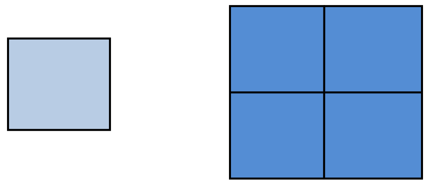
Ejemplo:

Un televisor de 40 *pulgadas cuesta aproximadamente cuatro veces más que uno de* 20. Por extraño que parezca, el aumento de precio está justificado. El tamaño del televisor, indica la longitud de su diagonal en pulgadas. Una longitud doble, implica un área cuatro veces mayor y por tanto necesita cuatro veces más componentes electrónicos.



Ejemplo:

- *Observa la figura del margen.* Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es 2^2 = 4 veces la del pequeño.



Actividades propuestas

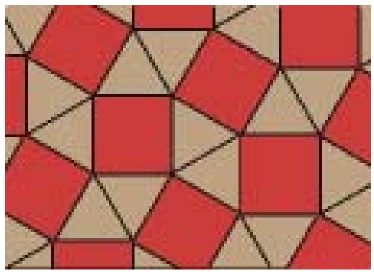
33. En un mapa de carretera de escala 1:300000 la distancia entre dos ciudades es de 2,7 cm. Calcula la distancia real entre dichas ciudades.
34. Un microscopio tiene un aumento de 500X, ¿qué tamaño tiene la imagen que se ve por el objetivo si observamos un paramecio de 0,034 mm de diámetro?
35. En una fotografía una persona que sabe que mide 1,75 m tiene una altura de 2,5 cm. Aparece un árbol que en la fotografía mide 5,7 cm, ¿cuánto mide en la realidad?
36. El área de un rectángulo es 10 cm^2, y uno de sus lados mide 2 cm, ¿qué área tiene un rectángulo semejante al anterior en el que el lado correspondiente mide 1 cm? ¿Qué perímetro tiene?
37. El mapa a escala 1:1500000 de una región tiene un área de 16 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicha región?

6. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

En el mosaico del margen todos los cuadrados son iguales y también son iguales todos los triángulos.

A las transformaciones geométricas que nos llevan de un cuadrado a otro (o de un triángulo a otro) que mantienen la forma y el tamaño las llamamos isometrías o movimientos.

La palabra *isometría* proviene del griego: Iso = Igual. Metría = Medida. Significa por tanto: *Igual medida*.



Isometrías

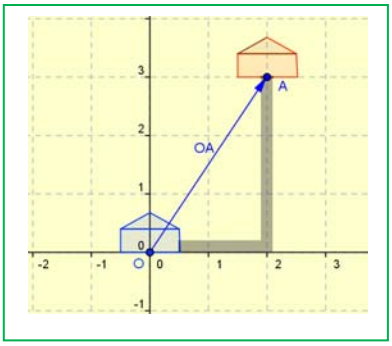
Las **isometrías,** (**movimientos** o **congruencias**) son transformaciones geométricas que conservan ángulos y distancias (aunque no tienen por qué conservar la orientación de los ángulos).

Isometrías en el plano son las **traslaciones**, los **giros** y las **simetrías**.

6.1. Traslaciones

Para definir el sentido, la dirección y la longitud de una traslación en el plano se utiliza un objeto geométrico llamado vector.

Un **vector fijo OA** es un segmento orientado con origen en el punto **O** y extremo en el punto **A**. Tiene una dirección, la de la recta, un sentido, desde **O** hasta **A**, y una longitud, a la que llamamos módulo. Representamos un vector con una flecha.



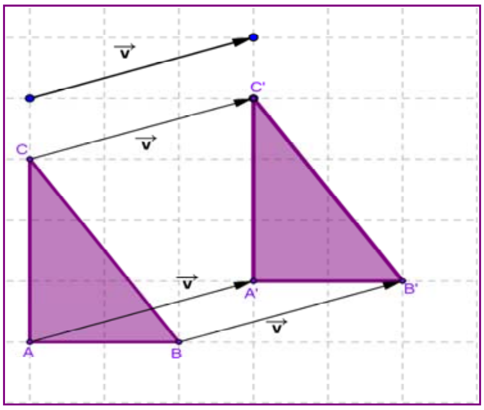
Dos vectores fijos son **equipolentes** cuando tienen igual módulo, dirección y sentido. Todos los vectores que son equipolentes se dicen que son un **vector libre**, y cada uno de sus vectores fijos, un **representante** del vector.

Para definir una traslación basta conocer su vector de traslación.

Se llama traslación de vector libre **v** a una transformación T que hace corresponder a cada punto P otro punto P'=T(P), de forma que el vector fijo **PP'** es un representante del vector libre **v**.

Ejemplo:

En la figura de la derecha se ve la traslación del triángulo ABC según el vector **v**. El resultado de la traslación es el triángulo A'B'C'



Entre el triángulo inicial y su transformado por la traslación se conservan todas las distancias: AB = A´B´, BC = B'C, AC = A'C'. La traslación también mantiene los ángulos: el ángulo $B\hat{A}C$ es recto, y el nuevo ángulo $B'\hat{A}'C'$ también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. También son iguales y con la misma orientación las otras parejas de ángulos $A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$ y $C\hat{B}A = C'\hat{B}'A'$.

6.2. Giros en el plano

Para determinar un giro o rotación es necesario conocer un punto, O, el centro de giro; un ángulo α y el sentido de giro de ese ángulo.

Existe el acuerdo de considerar *positivo* (+) al sentido de giro contrario de las agujas de un reloj y sentido *negativo* (–) el de las agujas del reloj.

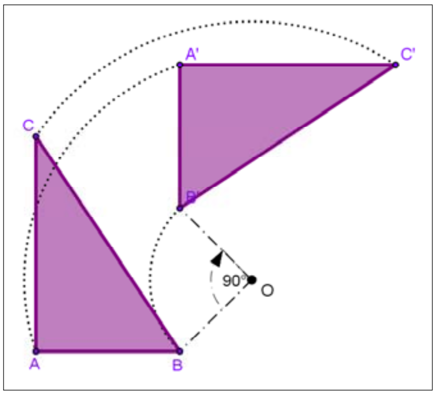
Si P' es el punto girado de P, con centro O y ángulo α, entonces el segmento OP forma un ángulo α con OP' y ambos segmentos tienen la misma longitud.

Dados un punto O y un ángulo α, se llama **giro de centro** O **y ángulo** α a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro punto P´=G(P) de modo que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ y $P\hat{O}P' = \alpha$

Para girar una figura se giran los puntos que la forman.

Ejemplos:

- Si han pasado 15 minutos la manecilla de los minutos ha girado –90° (90° en sentido negativo), cuando pase media hora habrá girado –180°, y si sólo pasan 10 minutos habrá girado –60°.

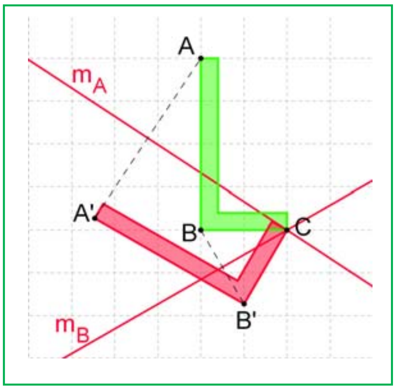


- En la figura de la izquierda el triángulo ABC se ha transformado en el triángulo A’B’C’ por un giro de centro el punto O y ángulo –90°

El triángulo transformado por el giro mantiene las distancias: AC=A´C´, BC = B’C´ y AB = A’B´. También mantiene los ángulos: el ángulo $B\hat{A}C$ es recto, y el nuevo ángulo $B'\hat{A}'C'$ también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. También son iguales y con la misma orientación las otras parejas de ángulos $A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$ y $C\hat{B}A = C'\hat{B}'A'$.

Los movimientos que, como los giros y las traslaciones, además de mantener distancias y ángulos, conservan el sentido de los ángulos, se llaman **movimientos directos**. Los movimientos directos también se llaman deslizamientos porque la figura se *desliza* por el plano hasta su posición final.

Para saber si dos figuras son dos figuras giradas trazamos las mediatrices de los puntos correspondientes y todas ellas deben cortarse en un mismo punto, el centro de giro. Con el transportador de ángulos podemos entonces medir el ángulo de giro.



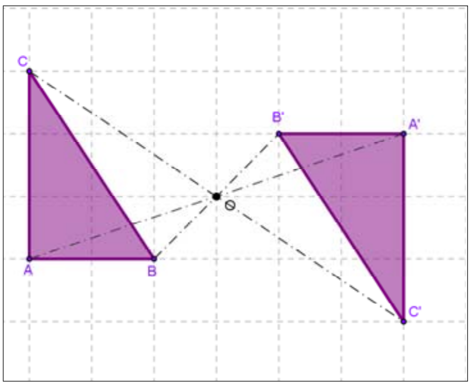
Ejemplos:

- En la figura de la derecha se ha comprobado que la letra L de color rosa es el resultado de realizar un giro de la letra L verde de centro el punto C y ángulo 60°. En el giro, el punto A se ha transformado en el punto A´ y el punto B en B´. Se han trazado las mediatrices de los segmentos AA´y BB. Ambas mediatrices se cortan en el centro de giro C.

6.3. Simetría central en el plano. Centro de simetría

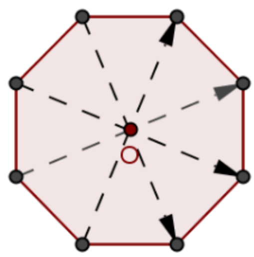
La **simetría central de centro O** en el plano es un giro con ese centro **O** y ángulo 180°. La simetría central es, por tanto, un movimiento directo.

Si P' es el simétrico de P en la **simetría central** de centro de simetría O, entonces, O es el punto medio del segmento PP'.



Ejemplos:

- En la figura de la izquierda el triángulo A’B’C’ es la figura simétrica del triángulo ABC con respecto al punto O.



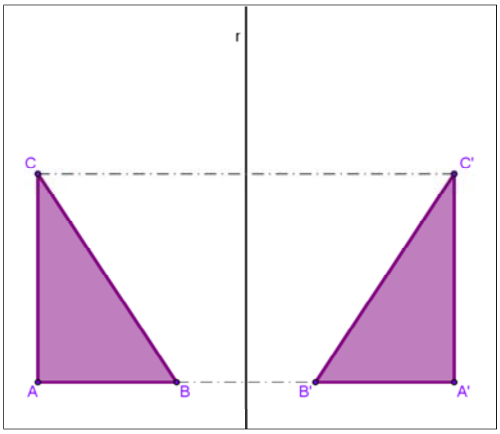
Un punto O es un **centro de simetría** de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro O otro punto de la figura. La simetría central de centro O transforma la figura en ella misma.

Ejemplo:

- El círculo, el cuadrado, el rectángulo tienen centro de simetría, sin embargo, un triángulo nunca tiene centro de simetría.
- Los polígonos regulares con un número par de lados tienen centro de simetría.
- El pentágono regular, no lo tiene.

6.4. Simetrías axiales. Eje de simetría

Una **simetría axial** de eje una recta *r* transforma un punto P en otro P´, llamado punto simétrico, de forma que los dos puntos están a la misma distancia de la recta, es decir, *r* es la **mediatriz** del segmento PP'.



Ejemplos:

- En la figura de la izquierda el triángulo A'B'C' es la figura simétrica del triángulo ABC con respecto a la recta r.

El triángulo transformado por el giro mantiene las distancias: AC=A´C´, BC = B'C´ y AB = A'B'. También mantiene la magnitud de los ángulos, pero no la orientación: el ángulo $B\hat{A}C$ es recto, y el nuevo ángulo $B´\hat{A}´C´$ también es un ángulo recto pero con orientación opuesta al anterior; lo mismo ocurre con las otras dos parejas de ángulos, son iguales en magnitud pero con sentidos opuestos.

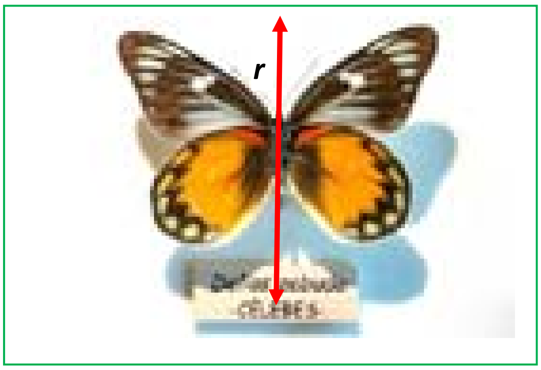
Movimientos, como la simetría axial, que conservan todas las longitudes y la magnitud de los ángulos, pero cambian el sentido de éstos se llaman **movimientos inversos**. En los movimientos inversos, a diferencia de los directos, para llevar una figura a su posición final hay que sacarla del plano.

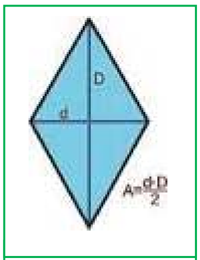
<u>Figuras simétricas. Eje de simetría de una figura</u>

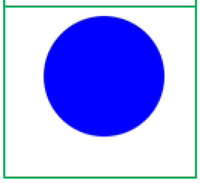
Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una figura simétrica y al eje se le llama eje de simetría de la figura

Ejemplos:

- La mariposa de la figura es simétrica respecto del eje de simetría *r*.
- Puedes obtener figuras simétricas doblando un papel. El doblez es el eje de simetría. Si dibujas una figura, doblas el papel y la calcas obtienes la figura simétrica.
- Otra forma es doblar un papel y recortar una figura: se obtiene una figura simétrica respecto al doblez.

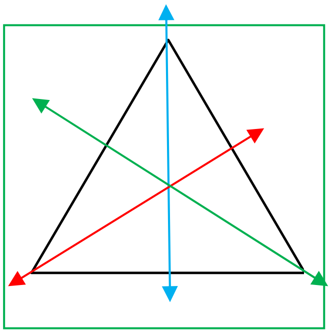






Si la recta r es un eje de simetría de una figura entonces todo punto de esa figura tiene como transformado por la simetría de eje r a otro punto de dicha figura.

Ejemplos:

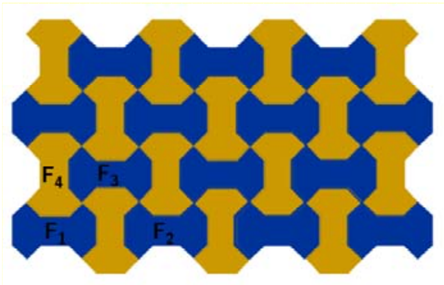


- Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría y un triángulo equilátero, tres.
- Un rectángulo o un rombo tienen dos ejes de simetría, y un cuadrado cuatro.
- Un círculo tiene una infinidad de ejes de simetría (todos sus diámetros).

Actividades propuestas

38. Señala los ejes de simetría de la figura de la derecha.

    Comprueba que la figura tiene también simetría central y señala cuál es el centro de simetría:



39. Con movimientos repetidos de la figura del ejercicio anterior se puede construir un mosaico como el que ves en la figura de la derecha. Describe un giro que transforme F_1 en F_4 (señala el centro y la medida del ángulo de giro. Describe un giro que transforme F_1 en F_3 (señala el centro y la medida del ángulo de giro).Describe una traslación que transforme F_1 en F_2 (dibuja el vector que define la traslación).Describe una traslación que transforme F_1 en F_3 (dibuja el vector que define la traslación)
40. Diseña tu propio mosaico mediante la composición de movimientos de figuras geométricas.

7. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO

7.1. Las tres dimensiones del espacio

Nuestra vida se desarrolla en un entorno tridimensional: cuando vamos a comprar un mueble medimos tres dimensiones, para ver si nos cabe en casa: alto, ancho y largo. Incluso los objetos "planos", como una hoja de papel o un DVD en realidad son tridimensionales, pero su altura es muy pequeña y tendemos a considerarlos planos.

El espacio involucra tres dimensiones: ancho, alto y largo, mientras que el plano involucra solo a dos.

7.2. Elementos geométricos en el espacio

Puntos, rectas y planos

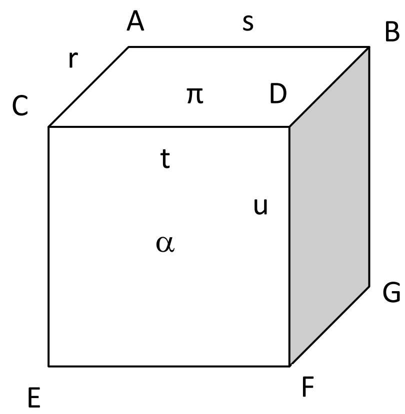
Las paredes, el suelo y el techo de una habitación son planos. Estos planos a veces se cortan en segmentos de rectas. Y la intersección de tres de esos planos o de dos de esas rectas es en un punto.

Posiciones relativas de dos planos

En una habitación el plano del techo y el del suelo son planos paralelos. El plano del techo y el de una pared son planos secantes. Además como forman un ángulo recto son planos perpendiculares.

Dos planos en el espacio son paralelos si no tienen ningún punto en común, y son secantes si tienen una recta en común.

Ejemplos:



- En el cubo del margen hemos dado nombre a los puntos con letras mayúsculas: *A, B, C, D, E, F, G…;* a las rectas con letras minúsculas: *r, s, t, u…;* y a los planos con letras griegas: π, α… También se podrían denominar diciendo, recta que pasa por los puntos *A* y *B*, o plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.
- El plano π y el plano α son secantes y se cortan en la recta *t*.
- El plano π y el del suelo son paralelos.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Fíjate en una recta del techo de una habitación. Las otras tres rectas del techo o se cortan con ella, o son paralelas. Sigue fijándote en la misma recta, y mira las cuatro rectas verticales que forman las paredes. ¿Cómo son respecto a esa recta? Observa que dos de ellas la cortan pero las otras dos ni la cortan ni son paralelas. Decimos que esas rectas se cruzan

Dos rectas en el espacio o son paralelas o se cortan o se cruzan.

Ejemplos:

- Nos fijamos en el cubo anterior en la recta r. La recta s la corta (es secante) en el punto A.
- Las tres rectas r, s y t están en el plano π.
- Las rectas s y t son paralelas.
- Las rectas r y u no se cortan en ningún punto, ni son paralelas, ni hay ningún plano que contenga a ambas. Las rectas r y u se cruzan.

Posiciones relativas de recta y plano

Una recta puede estar contenida en un plano o ser paralela al plano o ser secante.

Ejemplo:

- Seguimos fijándonos en el cubo anterior. El plano π contiene a las rectas r, s y t . La recta u corta al plano π en el punto D. La recta que pasa por los puntos E y F es paralela al plano π.

7.3. Cuerpos geométricos. Poliedros

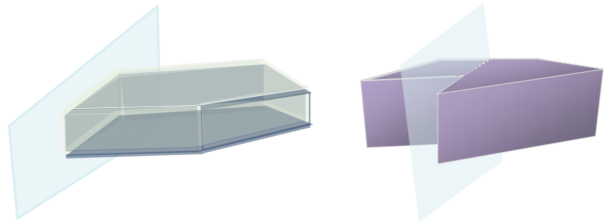
Los cuerpos geométricos son elementos que ocupan un volumen en el espacio desarrollándose en las tres dimensiones de alto, ancho y largo. Los cuerpos geométricos se clasifican en cuerpos poliedros y cuerpos redondos.

Llamamos **cuerpos redondos** a figuras bastante regulares que tienen alguna superficie curva.

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos. Llamamos **aristas** de un poliedro a los lados de las caras de éste. Los **vértices** del poliedro son los vértices de sus caras.

Es posible clasificar poliedros atendiendo a diferentes criterios. Si nos fijamos en la amplitud de sus ángulos, se clasifican en ***cóncavos y convexos**.*

Un poliedro es *convexo* si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro, está dentro del mismo. Un poliedro es *cóncavo* en caso contrario.



Poliedro convexo   Poliedro cóncavo

En los poliedros convexos se cumple el llamado *Teorema de Euler* que relaciona las caras, vértices y aristas y afirma que en todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2. Si caras, vértices y aristas se representan por sus iniciales, se escribe:

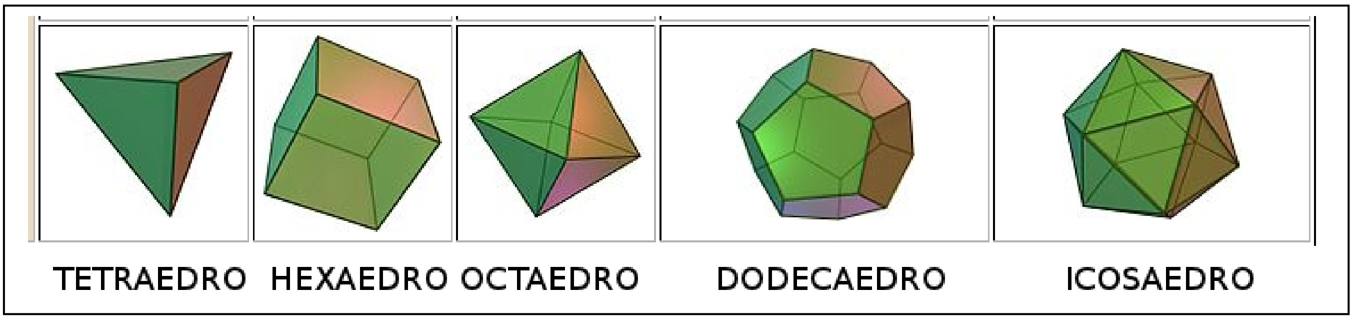
$$C + V = A + 2$$

Existen poliedros cóncavos que cumplen esta relación y poliedros cóncavos que no la cumplen.

7.4. Poliedros regulares

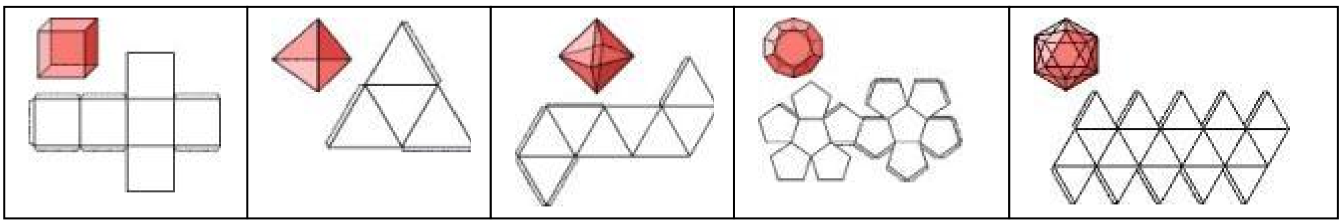
Un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Solo existen 5 poliedros regulares convexos, que son los que presentamos en la siguiente tabla:



POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO (HEXAEDRO)	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

Se puede construir cada poliedro regular a partir de su desarrollo en el plano:



7.5. Prismas

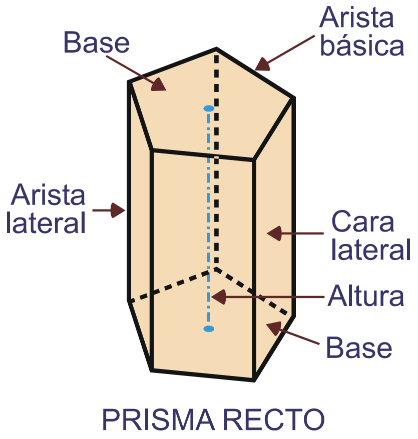
Un **prisma** es un poliedro limitado superior e inferiormente por dos polígonos paralelos e iguales (bases) y tantos paralelogramos (caras laterales) como lados tienen las bases.

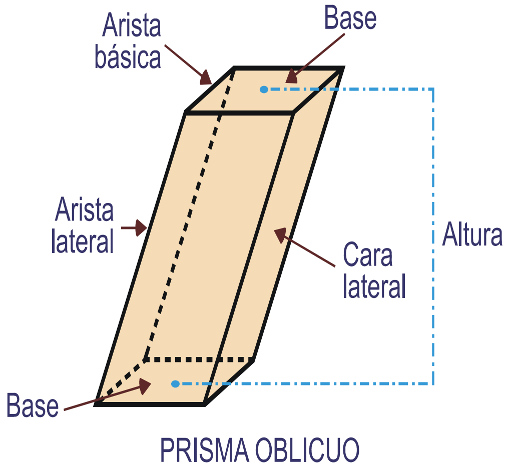
La **altura** del prisma es la distancia entre sus bases.

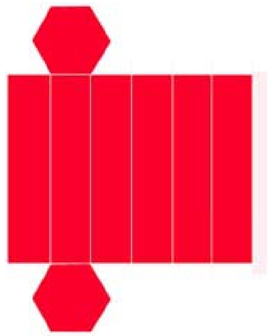
Cuando todas las caras laterales son rectángulos, se dice que el prisma es un **prisma recto**.

Si algunas caras laterales son romboides, tenemos un **prisma oblicuo**.

Llamamos **prisma regular** al prisma que tiene por bases dos polígonos regulares.







Desarrollo de prisma hexagonal

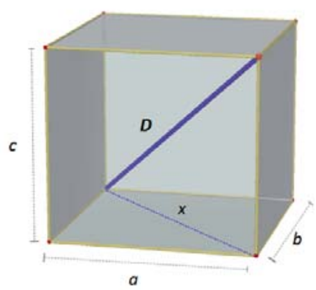
Un prisma se nombra en función de los polígonos de la base. Así, si la base es un triángulo tendremos un **prisma triangular**, si es un cuadrilátero el prisma se llamará **cuadrangular**, si es un rombo, **prisma rómbico**, si es un hexágono, el prisma será **hexagonal**…

Los prismas cuadrangulares pueden tener otros muchos nombres como **paralelepípedo**, si todas sus caras son paralelogramos, paralelas dos a dos; **ortoedro** si sus caras son rectángulos, es decir, es un paralelepípedo rectangular (el ortoedro se conoce también como "caja de zapatos"). Si todas las caras del paralelepípedo son cuadradas recibe el nombre particular de **cubo**.

Teorema de Pitágoras en el espacio

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.

Vamos a demostrarlo: Sean *a, b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a* , *b*. Si *x* es la diagonal de este rectángulo, cumple: $x^2 = a^2 + b^2$. El triángulo de lados *D, x, c* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$. Y teniendo en cuenta la relación que cumple *x:*



$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Actividades resueltas

- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 10 cm y 11 cm y su altura 8 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 14 cm, 16 cm y 18 cm.*

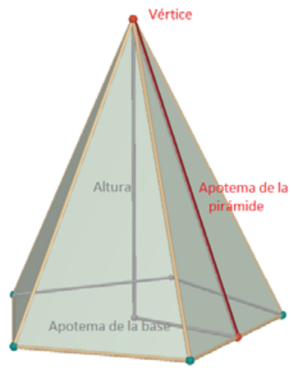
El rectángulo de la base tiene una diagonal d que mide: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14{,}9$ cm. Luego la barra más corta cabe apoyada en la base. Calculemos ahora cuánto mide la diagonal del ortoedro:

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 10^2 + 11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx 16{,}9 \text{ cm}$$

Luego, la barra de 16 cm cabe también en la caja pero la de 18 cm no.

7.6. Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado inferiormente por un polígono y superior y lateralmente por triángulos con un vértice común.

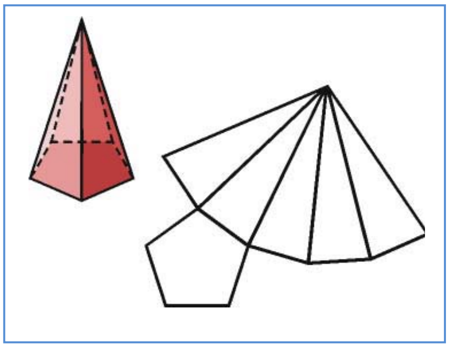


Se llama **base** de la pirámide al polígono que la limita inferiormente.

Caras laterales a los triángulos que tienen un lado común con la base y un vértice común.

A ese vértice común se le llama **vértice** de la pirámide.

La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice a la base.



Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, nos encontramos ante una **pirámide regular**.

Dependiendo del número de lados de la base de la pirámide, ésta puede ser **triangular**, **cuadrangular**, **pentagonal**...

7.7. Superficie de poliedros

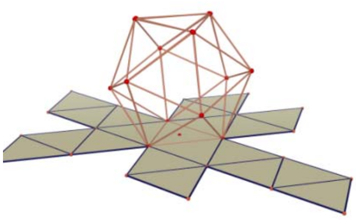
La superficie de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras.

Calcular la superficie de un poliedro es simple, puesto que solo hay que **reducirlo a calcular las áreas de los polígonos que forman sus caras** y sumar.

Ejemplos:

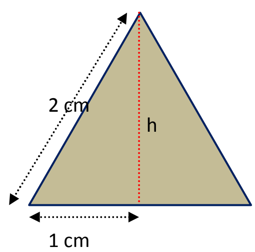
- Superficie de un cubo de 3 cm de arista:

El cubo tiene 6 caras, que son cuadrados. Como el área de cada uno de esos cuadrados es 9 cm^2, el del cubo será $6 \cdot 9 = 54\ cm^2$.



- *Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.*

Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos la altura h que divide a la base en dos



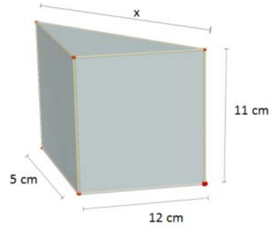
segmentos iguales

$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\text{cm}^2$

y por tanto Área icosaedro $= 20\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \approx 34{,}64\,\text{cm}^2$

- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*



Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13$ cm

$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm$; $A_B = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$

$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2$ $\qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

- Superficie de un prisma hexagonal regular recto de altura 10 *cm* y en el que el lado del hexágono de la base es de 4 *cm*.

Debemos recordar que el área de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro por su apotema. Así, como el lado mide 4 *cm*, el perímetro mide 24 *cm*. Calculamos la longitud de apotema, utilizando el teorema de Pitágoras podemos deducir que la apotema del hexágono mide $2\sqrt{3}$. Así el área de una base es $24\sqrt{3}\ cm^2$.

Las caras laterales son rectángulos. El área de cada una de las caras laterales se calcula multiplicando la base por la altura: $4 \cdot 10 = 40\ \text{cm}^2$.

La superficie total del prisma se obtiene sumando el área de las 6 caras laterales rectangulares más el de las dos bases hexagonales: $6 \cdot 40 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 240 + 48\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 1015{,}96\ \text{cm}^2$.

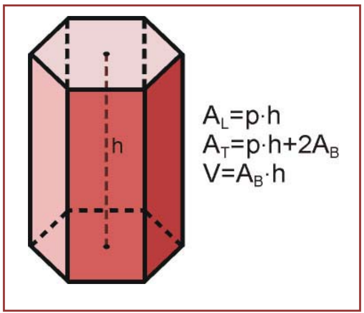
Actividades propuestas

41. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?

42. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar una escultura con forma de icosaedro regular de 4m de arista?

7.8. Volumen de prismas y pirámides

El **volumen** de un cuerpo geométrico representa lo que ocupa en el espacio. Asociado a este concepto está el de **capacidad** de un cuerpo, que es lo que puede contener. En matemáticas muchas veces se confunden estos dos conceptos, dado que las "paredes" del cuerpo se suponen sin grosor.



Del mismo modo que el área de un rectángulo es el producto de sus dos dimensiones (base x altura), el volumen del prisma rectangular recto (**ortoedro**) es el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto.

Largo x ancho es el área de la base, con lo que el volumen del ortoedro también puede calcularse multiplicando el área de su base por su altura. Podemos extender esa idea a cualquier prisma:

El volumen de un prisma es igual al producto del área de su base por su altura.

Actividades resueltas

- Calcula el volumen de un ortoedro cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y su altura es de 15 cm.

Volumen = Área de la base x altura = $10^2 \cdot 15 = 1500$ cm^3

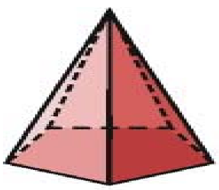
- Halla el volumen de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura es igual a la diagonal mayor.

El área del rombo es la mitad del producto de sus dos diagonales. Así en este caso el área de la base del prisma es $1/2 \cdot 6 \cdot 8 = 24$ cm^2.

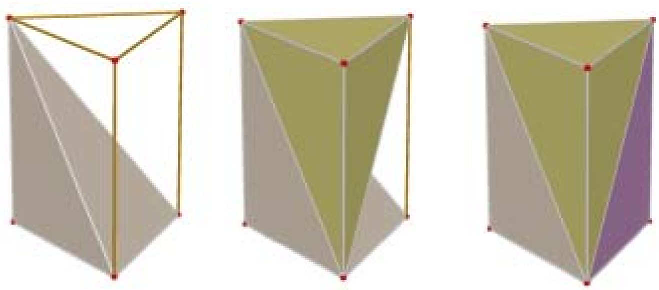
Para calcular el volumen nos da igual que el prisma sea recto o no, ya que solo nos interesa el área de la base y la altura, que en este caso es de 8 cm, igual a la diagonal mayor.

Volumen = Área de la base x altura = $24 \cdot 8 = 192$ cm^3

El volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide.



Volumen = (Área de la base x altura)/3



Actividades propuestas

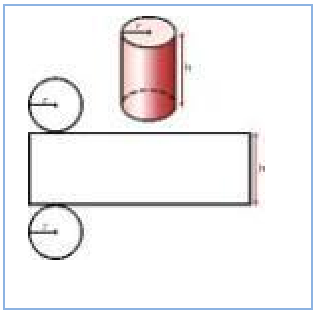
43. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 2 cm y la altura es de 10 cm.
44. Calcula el volumen de un prisma triangular recto de 5 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm

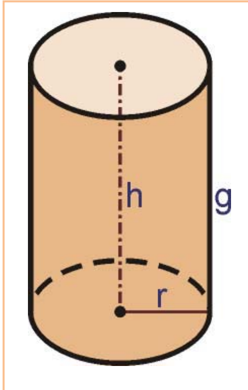
7.9. Cuerpos de revolución: cilindros, conos y esferas

Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos, como cilindros y conos, que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*.

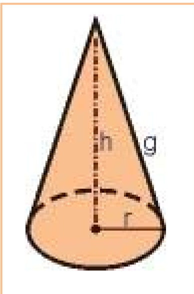
También puede obtenerse un cuerpo de revolución mediante el giro de una figura plana alrededor de un eje de giro, como en el caso de las esferas.

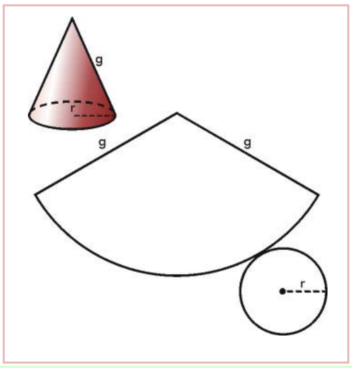
Un **cilindro** se puede generar haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los círculos que se obtienen al girar el otro lado son las bases del cilindro. El lado del rectángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la altura del cilindro.





El **desarrollo** de un cilindro nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo. Consta de un rectángulo, que lo limitará lateralmente y de dos círculos, las bases que lo limitan inferior y superiormente.

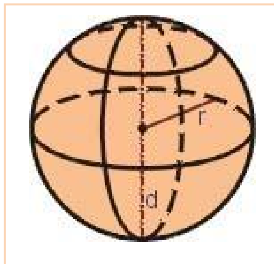




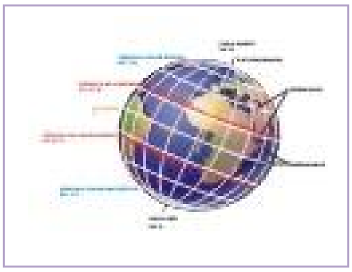
Un **cono** se puede generar haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que se obtiene al girar el otro cateto es la *base* del cono. El lado del triángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la *altura* del cono. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide lo mismo que la *generatriz* del cono.

El desarrollo de un cono consta de un sector circular y un círculo. Nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo.

Una **esfera** se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro. El *radio* del semicírculo es el radio de la esfera.



Cuando cortamos una esfera por un plano, todos los cortes son círculos. Si el plano por el que cortamos pasa por el centro de la esfera, obtenemos un **círculo máximo**. Su radio es igual al de la esfera.

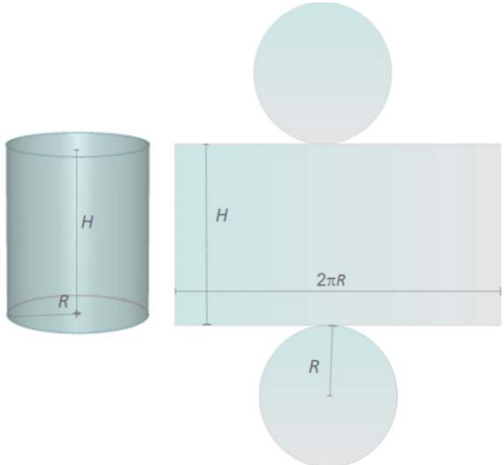


- En la esfera terrestre, los meridianos se corresponden con círculos máximos. Los paralelos son las circunferencias que limitan los círculos que quedan al cortar la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje que pasa por los polos. El ecuador es el único paralelo que es un círculo máximo.

7.10. Superficie de cilindros, conos y esferas

Superficie del cilindro

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y un rectángulo. A partir de su desarrollo podemos ver que el área lateral del cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.



Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

A_L = Longitud de la base . Altura = $(2\pi R).H = 2\pi RH$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos de que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

Superficie del cono

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora R al radio de la base y G a la generatriz. El área lateral del cono es el área del sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

$$\frac{\text{Área lateral del cono}}{\text{Longitud de arco correspondiente al sector}} = \frac{\text{Área total del círculo de radio G}}{\text{Longitud de la circunferencia de radio G}}$$

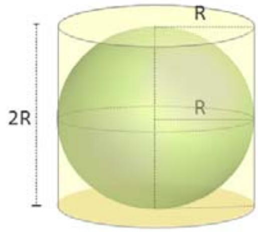
Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos: $A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi R G$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$\mathbf{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Superficie de la esfera

Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.



Si llamamos R al radio de la esfera: $A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2$

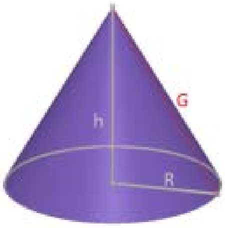
El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos : **A= 4πR²**

Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base tiene un radio de 3 dm.*

  Calculamos la generatriz G:

  $G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37$ dm.

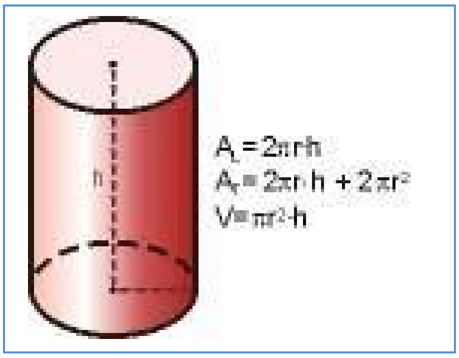


$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79$ dm^2.

7.11. Volumen de cilindros, conos y esferas

Volumen del cilindro

El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de su base (que es un círculo) por su altura. Si el radio de la base es r y la altura es h nos queda



Volumen cilindro = $\pi r^2 h$

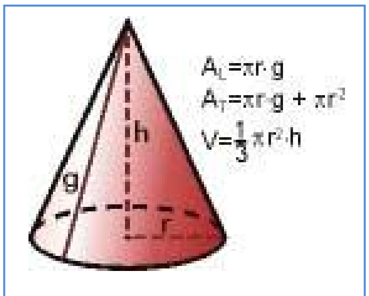
Ejemplo:

- Una lata de tomate frito en conserva tiene un diámetro de 6 *cm* y una altura de 12 *cm*. Vamos a calcular el volumen de la lata, que nos indicará cuánto tomate cabe en su interior.

Hay que tener cuidado con los datos porque nos dan el diámetro en lugar del radio. El radio de la base es 3 *cm*, la mitad del diámetro.

$$\text{Volumen} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339{,}12\ cm^3$$

Volumen del cono



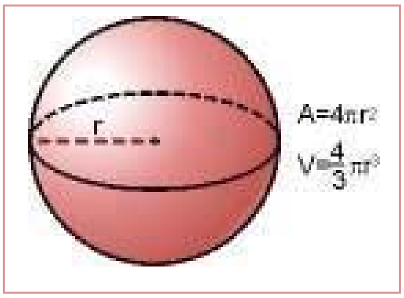
El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura. Así, para un cono cuyo radio de la base es r y su altura es h se tiene que

Volumen cono = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumen de la esfera

La fórmula que permite calcular el volumen de la esfera en función de su radio r es la siguiente:

Volumen de la esfera = $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$



Actividades propuestas

45. Calcula el área total y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de la base mide 5 cm y la altura es el triple del diámetro.

46. Una esfera tiene 4 m de diámetro. Calcula el área y el volumen de la esfera.

47. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π). Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?

48. Calcula la superficie total y el volumen de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.

49. Calcula los litros de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.

7.12. Razón entre volúmenes de cuerpos semejantes

Extendiendo el concepto de semejanza del plano al espacio, podemos decir que dos cuerpos son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño. Si la razón de semejanza entre dos cuerpos es k las longitudes homólogas de los dos cuerpos son proporcionales, el cociente de todas las parejas de longitudes homólogas es igual a k.

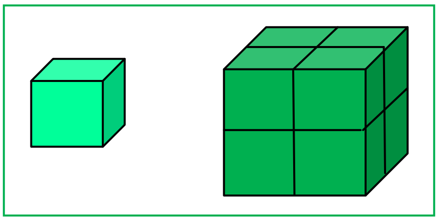
La relación entre las longitudes de una figura y su volumen es cúbica. Si la razón de semejanza entre las longitudes de dos figuras es k, y el volumen de partida es $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: al aplicar la semejanza se tiene:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = \text{k}\cdot\text{k}\cdot\text{k} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Si la razón de semejanza entre las longitudes de dos figuras es $\boldsymbol{k}$, entonces entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:

- *Observa la figura del margen*. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) veces el del cubo pequeño.



Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese un kilo, ¿qué altura tendrá?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto k^3 = 8000000/1 = 8 000 000, y k = 200. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

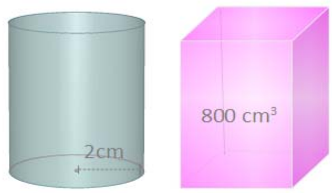
Si la Torre Eiffel mide 300 *m* de altura (mide un poco más, 320 m), y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: 300/x = 200. Despejamos x que resulta igual a x = 1,5 *m*. ¡Mide metro y medio!

Actividades propuestas

50. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura y qué radio de base debe tener la maqueta?

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.
2. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 20 *cm*.
3. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.
4. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?
5. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.
6. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura y calcula las áreas de la base y total.
7. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2,7 *dm*, 6,2 *dm* y 80 *cm*.
8. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.
9. **Calcula el volumen de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base mide 36 *dm* y la altura de la pirámide mide 6 *dm*.**
10. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.
11. ¿Cuál es la capacidad, en litros, de un pozo cilíndrico de 1,50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?
12. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?

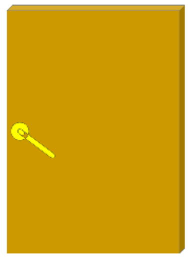


13. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.
14. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?
15. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

16. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.
17. **(CDI Madrid 2011**) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

18. (**CDI Madrid 2012**) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

19. Una circunferencia de longitud 18,84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.

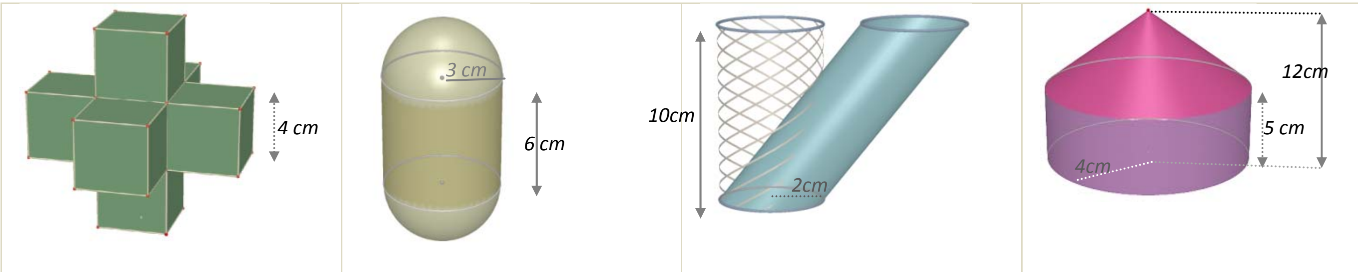


20. Una puerta mide 1,8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.

21. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

22. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 *m*?

23. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos



24. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

25. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

26. El lado de la base cuadrada de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?

27. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?

28. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?

29. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm^3 de helado contiene?

30. Se quiere construir un ortoedro de base cuadrada que tenga un volumen de 240 cm^3 y un área lateral total de 240 cm^2 ¿Qué medidas deben tener las aristas?

AUTOEVALUACIÓN

1. En un mapa de carretera de escala 1:120000 la distancia entre dos pueblos es de 5 cm. La distancia real entre dichos pueblos es de:

a) 60 m b) 6 km c) 24 km d) 240 cm

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. El perímetro de un rombo de diagonales 12 cm y 16 cm es:

a) 34 cm b) 70 cm c) 40 cm d) 62 cm

4. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

5. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura y lado de la base 1 *m*. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}\ \text{m}^3$ b) $45\sqrt{2}\ \text{m}^3$ c) $30000\sqrt{2}\ \text{dm}^3$ d) $7{,}5\sqrt{3}\ \text{m}^3$

6. Al introducir una piedra en un recipiente cilíndrico, de 20 cm de diámetro, la altura del agua que contiene sube 10 cm. El volumen de la piedra es:

a) 1000 cm^3. b) 6284 cm^3. c) 3142 cm^3. d) 2000 cm^3.

7. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

8. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

9. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura y 3 *cm* de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

10. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. Los lados de *ABC* miden 3, 5 y 7 cm, y el perímetro de *DEF* mide 60 m. Los lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 y 14 cm b) 12, 20 y 28 cm c) 9, 15 21 m d) 12, 20 y 28 m

SOLUCIONES 1b 2b 3c 4a 5d 6c 7d 8b 9a 10b

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(4) ángulo interior=120° , ángulo central=60° **(5)** 1440° **(10)** 148° **(11)** 320 m^2

(12) cuadrado 144 cm^2 y reborde 48 cm, círculo 28,27 cm^2 y reborde 43,98 cm

(13) 15,64 cm **(14)** 80,11 cm **(15)** **153,94 cm** **(16)** ≈ 3 m

(17) ≈ 2,43 m^2 **(18a)** ≈ 0, 8824 m^2 **(18b)** ≈ 2114,069 m^2

(19a) 10 cm **(19b)** 5 m **(19c)** ≈ 25,356 km **(20a)** 12 cm **(20b)** 15 m **(20c)** 12 dm

(21) ≈ 27,71 m^2 **(22)** ≈ 10,39 cm^2 **(23)** ≈ 4,243 m **(24)** 17 cm

(25a) sí **(25b)** sí **(25c)** sí **(25d)** no

(26a) c´=8cm **(26b)** c'=4 cm a'= 5 cm **(27)** 15 cm, 21 cm y 24 cm

(28a) razón de semejanza k=4; x=2 cm ; y= 1,375 cm **(28b)** **k=4/3; x=9 cm ; y= 3 cm; z=4,5 cm**

(29) 12,8 m **(33)** 8,1 km **(34)** 17 mm **(35)** 3,99 m **(36)** área= 2,5 cm^2, perímetro= 3,5 cm

(37) 3600 km^2 **(41)** 1208 cm^2 **(42)** ≈ 7 litros **(43)** **34,641 cm^3** **(44)** 30 cm^3

(45) A≈ 1099,56 cm^2 V≈ 2356,194 cm^3 **(46)** A≈ 50,27 m^2 V≈ 33,510 m^3

(47) 2400 € **(48)** **A≈ 452,39 cm^2 V≈ 402,124 cm^3**

(49) ≈ 1,13 litros **(50)** altura= 0,5 m , radio≈7,98 cm

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1) $\sqrt{2}$ ≈1,414 m **(2)** 25 cm **(3)** ≈11, 7 cm **(4)** ≈10,770 m

(5) área lateral= 96 dm^2, área total= 108 dm^2

(6) área base ≈ 23,38 cm^2 , área total ≈ 208,77 cm^2 **(7)** 175,88 dm^2

(8) área total ≈ 13251,24 cm^2, volumen ≈ 19792,034 cm^3

(9) volumen ≈ 187,061 dm^3

(10) área total ≈ 1809,56 cm^2, volumen ≈ 3216,991 cm^3 **(11)** ≈ 53014,78 litros

(12) ≈ 531,732 cm^2 **(13)** 618,319 cm^3 **(14)** 9 dm

(15) 2 513 274 envases **(16)** 748, 246 dm^3 **(17)** 9 924 778 litros

(18a) 1000 cm^3 **(18b)** 10 cm **(19)** ≈112,925 cm^3 **(20)** 123,18 €

(21) 7 cm **(22)** ≈267 675 060 m^3

(23a) 448 cm^3 **(23b)** ≈282,743 cm^3 **(23c)** ≈125,664 cm^3 **(23d)** ≈368,614 cm^3

(24) 659,73 € **(25)** 3,665 cl **(26)** 2 574 466,667 m^3 **(27)** ≈1,6 cm

(28) 50 cm **(29)** ≈83,776 cm^3 **(30)** arista base de 4 cm y arista lateral de 15 cm

Módulo de Matemáticas Aplicadas II

Nivel II de ESPAD

Unidad 7
Funciones y sucesiones

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico en la modalidad "enseñanzas aplicadas" del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017).

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

6. Funciones y gráficas. (4ºA ESO). Autores: José Gallegos y David Miranda

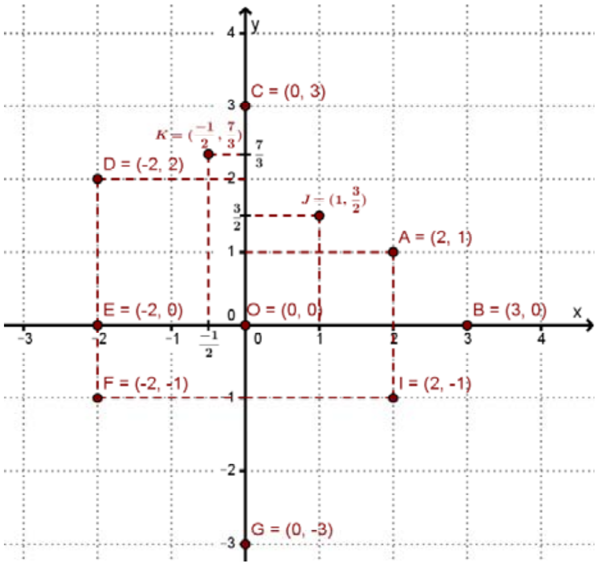
10. Funciones y gráficas (4ºB ESO). Autores: Andrés García y Javier Sánchez.

11 Funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa (4ºB ESO). Autor: David Miranda Suárez

ÍNDICE

1. GRÁFICAS EN UN SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO

Un **sistema de referencia cartesiano** está formado por dos ejes perpendiculares entre sí llamados **ejes de coordenadas**: el eje horizontal recibe el nombre de **eje de abscisas** o eje X, y el eje vertical se llama **eje de ordenadas** o eje Y. El punto de corte de ambos ejes es el **origen de coordenadas** O. Para dar la posición de un punto en el plano necesitamos además de los ejes de coordenadas una **unidad de medida** en cada eje, con lo que cada uno de los ejes se convierte en una recta numérica en la que pueden representarse todos los números reales (El nombre cartesiano viene de *Cartesio*, que era el nombre con el que firmaba su inventor, *Renè Descartes*)



Las **coordenadas** de un **punto** son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo ***x*** el número real que se lee en el eje X al realizar la proyección vertical del punto sobre este eje e ***y*** el número real que se lee en el Y al realizar la proyección horizontal del punto sobre este eje. La primera coordenada del punto, ***x*,** recibe el nombre de **abscisa** y la segunda coordenada, ***y***, recibe el nombre de **ordenada**.

Observa que el orden en el que se dan las coordenadas es esencial para definir el punto y que, por ejemplo, son puntos distintos (0,3) y (3,0).

Las coordenadas del origen O son (0,0).

Los puntos que están en el eje Y tienen su abscisa cero. Los puntos que están a la derecha del eje Y tienen su abscisa positiva y los que están a la izquierda tienen su abscisa negativa.

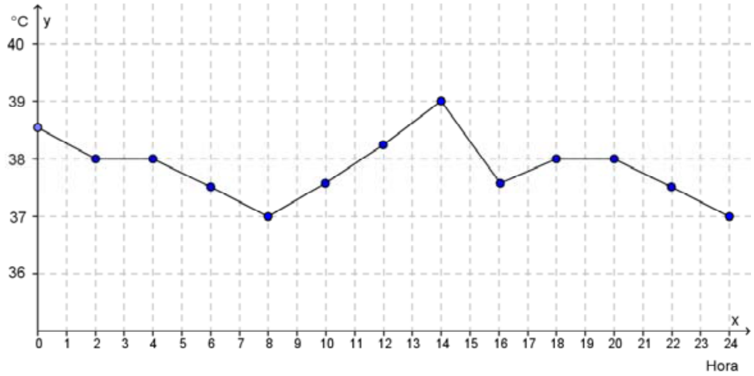
Los puntos que están en el eje X tienen su ordenada cero. Los puntos que están por encima del eje X tienen su ordenada positiva y los que están por debajo tienen su ordenada negativa.

Algunos tipos de información se pueden representar en un sistema de referencia cartesiano en el que los ejes X e Y tienen un significado concreto.

Ejemplo:

La gráfica de la derecha representa la temperatura de un enfermo, tomada cada dos horas de un día.

En la gráfica podemos ver los valores de la temperatura (y) en función de la hora (x) para contestar las siguientes preguntas:



¿Qué temperatura tenía a las 18:00? 38°

¿Cuál fue la máxima temperatura que tuvo en el día? 39°

¿A qué hora alcanzó la temperatura máxima? A las 14:00

¿Cuál fue la temperatura mínima que tuvo en el día? 37°

¿A qué hora alcanzó la temperatura mínima? A las 8:00 y a las 24:00

2. FUNCIONES REALES

2.1. Concepto de función

Utilizamos funciones para describir la relación de dependencia entre dos magnitudes. Decimos que una magnitud Y es función de otra magnitud X, cuando fijado un valor de la magnitud X podemos hallar, con arreglo al criterio que se establezca en la definición de la función, el valor correspondiente de la magnitud Y, y este valor es único. Así, por ejemplo, decimos que el precio de un viaje en taxi es función de los kilómetros recorridos o que la longitud de cualquier circunferencia es función de su radio. La variable que se fija previamente recibe el nombre de ***variable independiente***, y la variable que se deduce de la anterior se llama ***variable dependiente***.

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde ***un solo*** valor de la variable dependiente, y.

Para indicar que la variable y depende o es función de otra, x, se usa la notación $\mathbf{y = f(x)}$, que se lee *"y es función de x"*. En la expresión anterior, **f** es el nombre que le ponemos a la **función**, (podríamos llamarla usando otras letras, las que se usan más frecuentemente son *"f"*, *"g"* y *"h"*). También pueden usarse otras letras para las variables independiente y dependiente, pero las más utilizadas en matemáticas son x para la variable independiente e y para la variable dependiente.

Es MUY IMPORTANTE que tengamos un solo valor de y (variable dependiente) para cada valor de x (variable independiente). En caso contrario no tenemos una función.

Ejemplos:

- *Pensemos en el precio de una llamada telefónica. Si sabemos cuántos minutos hemos hablado también sabemos cuánto nos toca pagar. El dinero que pagamos es función del tiempo.*
- *Vamos al casino y apostamos a rojo o negro. Si apostamos un euro, podemos ganar dos o no ganar nada. Si decimos cuánto apostamos no sabemos cuánto vamos a ganar. Por tanto, las ganancias en un casino NO son una función de la apuesta.*

Para determinar completamente una función es necesario conocer:

- El ***conjunto inicial***, donde toma valores la variable independiente.
- El ***conjunto final***, donde toma valores la variable dependiente.
- La **regla** que permite asociar a cada elemento del conjunto inicial su correspondiente en el conjunto final, que llamamos ***imagen*** del primero, generalmente definida con un fórmula algebraica o una tabla de valores.

Ejemplo:

- Un kilo de tomates cuesta 0,8 €/kg. La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es $y = f(x) = 0{,}8\ x$.

  La variable x representa el número de kilos que compramos, es la *variable independiente* puesto que nosotros elegimos la cantidad de tomates que queremos. La variable y representa el precio que debemos pagar, es la *variable dependiente* puesto que "depende" de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de x. La expresión, $f(x)$, que se lee "*f* de *x*", se usa con frecuencia para designar a la variable dependiente, en lugar de usar la letra y, para indicar la imagen de un valor concreto de la variable independiente, por ejemplo, para expresar el coste de 5 kg de tomates, escribimos $f(5)$ "*f* de 5" y calculamos su valor sustituyendo x por 5: $f(5) = 0{,}8 \cdot 5 = 4$ €.

Las funciones son como máquinas a las que se les mete un valor, *x*, y devuelve otro valor, *y* = *f*(*x*). Por ejemplo, en la función *f*(*x*) = x^2, se introduce un valor de *x*, y nos devuelve su cuadrado.

Actividades resueltas

Dada la función f *de* R *en* R*, definida por* $f(x) = x^2 - 9$

- Calcular las siguientes imágenes: f(0) y f(-5)

  $f(0) = 0^2 - 9 = -9$ (-9 es la imagen de 0 por la función f)

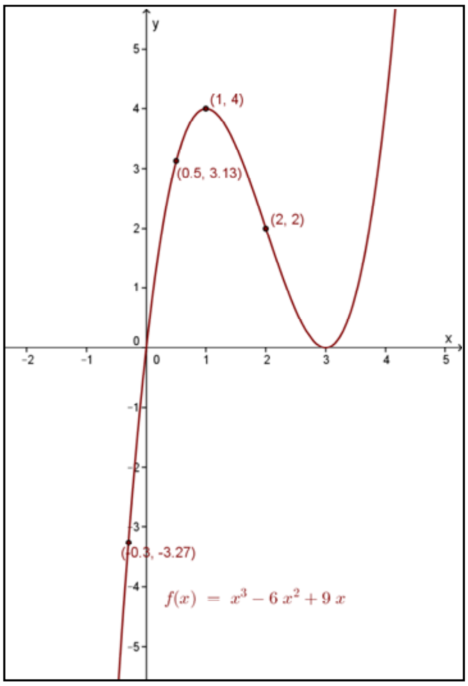
  $f(-5) = (-5)^2 - 9 = 25 - 9 = 16$ (16 es la imagen de -5 por la función f)

- Hallar los valores de x que tienen imagen 0

  $f(x) = x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad o \quad x = 3$ ($f(-3) = f(3) = 0$)

2.2. Gráfica de una función

Para apreciar el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente en un sistema de referencia cartesiano. La gráfica de una función y=f(x) está formada por todos los puntos del plano cartesiano (x, y) que verifican la relación y = f(x).



Ejemplo:

La gráfica de la función definida analíticamente por la fórmula $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ que puedes ver a la derecha se ha hecho con el programa Geogebra (software libre)

En cualquier punto de la gráfica se verifica que la ordenada es la imagen de la abscisa por la función. Por ejemplo, el punto de abscisa $x = 1$ tiene ordenada $y = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$

Solamente está dibujada la parte central de la gráfica que entra en el trozo de plano cartesiano utilizado para la representación. Por ejemplo, el punto de la gráfica de abscisa $x = -1$ no entra en el espacio reservado porque tiene la ordenada muy abajo, $y = f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) = -16$; el punto de abscisa $x = 5$ tampoco se ve porque su ordenada está muy arriba, $y = f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 = 20$

2.3. Descripción del comportamiento de una función

Para describir las variaciones de una función tenemos que mirar su gráfica de izquierda a derecha y ver como varía la variable independiente, y, cuando la variable dependiente, x, aumenta.

Siguiendo con el ejemplo anterior, describimos el comportamiento que vemos en la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ de la siguiente manera:

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es **creciente** porque al aumentar el valor de x aumenta el valor de y.

En el intervalo $(1, 3)$ f(x) es **decreciente** porque al aumentar el valor de x disminuye el valor de y.

En el intervalo $(3, +\infty)$ la función vuelve a ser creciente.

En el punto de abscisa x=1, donde pasa de ser creciente a decreciente, la función alcanza un **máximo relativo** (la ordenada de este punto es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean).

En el punto de abscisa x=3, donde pasa de ser decreciente a creciente, la función alcanza un **mínimo relativo** (la ordenada de este punto es menor que la ordenada de los puntos que lo rodean).

2.4. Dominio y recorrido de una función

El **dominio** de una función o **campo de existencia** es el conjunto de valores que la variable independiente puede tomar. Se escribe *Dom f* o *Dom*(*f*).

El **recorrido, rango** o **conjunto imagen** de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente. Se escribe con diversas notaciones: *Rgf* , *Rg*(*f*), *Im f* o *Im(f)*.

En general, existen dos razones por las que un valor de x NO pertenezca al dominio de una función:

1. La función no tiene sentido para esos valores. Por ejemplo, si tenemos una función que represente el consumo de electricidad a cada hora de un día, es evidente que x debe estar entre 0 y 24.
2. La operación que nos da $f(x)$ no puede hacerse. Por ejemplo, no es posible dividir entre 0 o calcular raíces cuadradas o de índice par de números negativos.

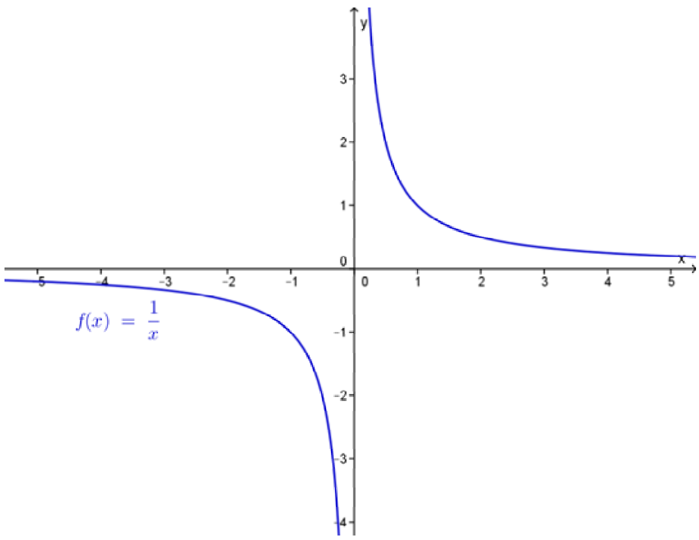
Ejemplos:

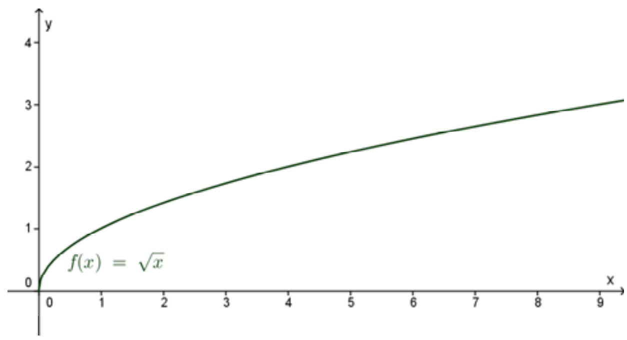
El dominio de cualquier función cuya expresión analítica sea un polinomio es $\Re = (-\infty, +\infty)$

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto $\{x \in \Re ; x \neq 0\}$, es decir $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

El recorrido de esta función es el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, como puede verse en la gráfica.

La función $f(x) = \sqrt{x}$ tiene como dominio y como recorrido el conjunto $[0, +\infty)$.





En los siguientes apartados se estudian dos tipos de funciones polinómicas que debes conocer y saber representar bien, las funciones polinómicas de primer grado, con gráficas que son líneas rectas, y las de segundo grado, con gráficas que se llaman parábolas.

3. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

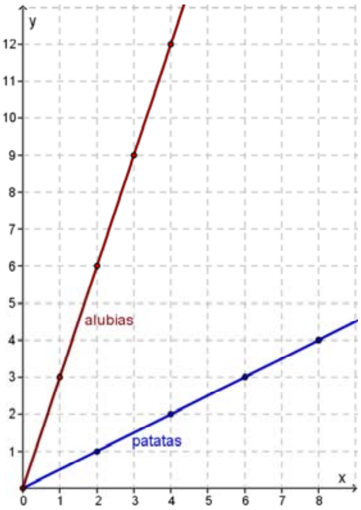
3.1. Función lineal. Rectas de la forma $y = m \cdot x$

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar a la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número, de forma que el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra es una constante que recibe el nombre de **razón de proporcionalidad directa**.

Las funciones en las que las dos variables son directamente proporcionales se llaman funciones lineales y tienen una expresión algebraica de la forma $y = m \cdot x$, donde m es la razón de proporcionalidad. Las funciones lineales se representan mediante rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Ejemplos:

Cada una de las dos rectas dibujadas en el mismo sistema de referencia cartesiano representa el coste (€) de un producto en función de la cantidad comprada (kg). La variable independiente x (cantidad) y la variable dependiente y (coste) son directamente proporcionales.



x (kg)	1	2	3	4
y (€)	3	6	9	12

La expresión algebraica de la función coste para las alubias, cuyo precio es 3€/kg es **y = f(x) =3x**

x (kg)	2	4	6	8
y (€)	1	2	3	4

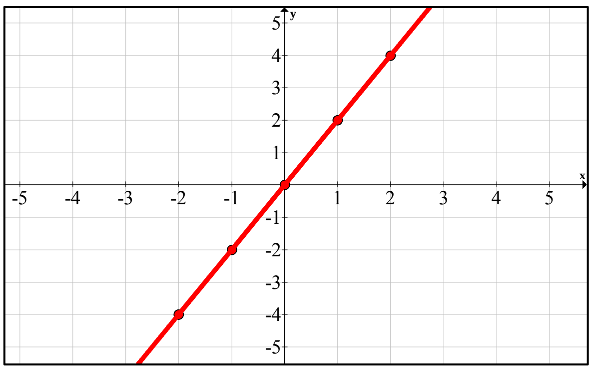
La expresión algebraica de la función coste para las patatas, cuyo precio es 0,5 €/kg es **y= g(x)= 0,5x**

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado de la forma $y = m \cdot x$. Su representación en el plano cartesiano es una recta que pasa por el origen. El coeficiente m se llama **pendiente** de la recta y es una medida de su inclinación. Si m es un número positivo la función es creciente y si es negativo es decreciente.

Actividades resueltas

- *Representa la función lineal* $f(x) = 2 \cdot x$.

  Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.



x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

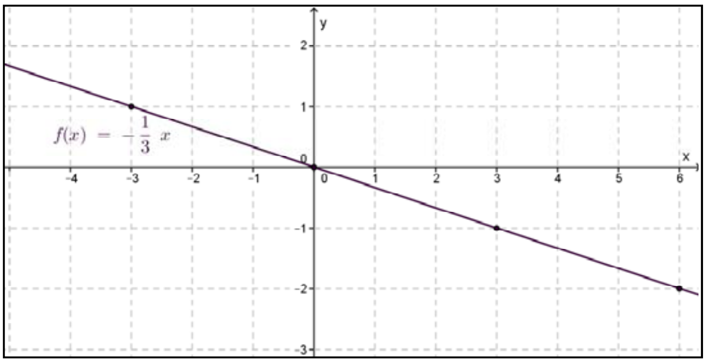
Para obtener cada uno de los puntos de la tabla se da el valor que se quiera a la variable independiente x y se calcula su imagen y haciendo el producto indicando en la expresión algebraica de la función: $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$, $f(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, etc.

¿Pertenece a la recta el punto $(10, 20)$? Sí, porque sustituyendo x por 10 e y por 20 en la ecuación de la recta se verifica la igualdad: $20 = 2 \cdot 10$

➢ *Representa la recta* $y = -\frac{1}{3}x$

x	-3	0	3	6
y	1	0	-1	-2

¿Pertenece a la recta el punto (10, -3)*?* No, porque sustituyendo x por 10 e y por -3 en la ecuación de la recta no se verifica la igualdad: $-3 \neq -\frac{1}{3} \cdot 10$



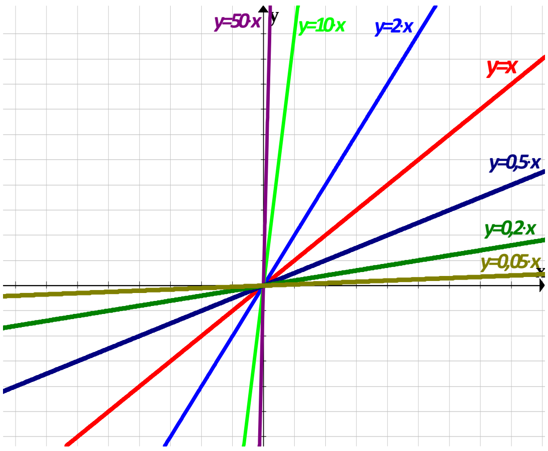
Actividades propuestas

1. Representa las siguientes funciones lineales: (a) $y = 4 \cdot x$ (b) $y = -5x$ (c) $y = 0,5\,x$

   Indica a cuál de las rectas anteriores pertenece cada punto: P(12, 6) , Q(15, 60) , R(9, -45)

3.2. Relación entre la pendiente y el crecimiento o decrecimiento

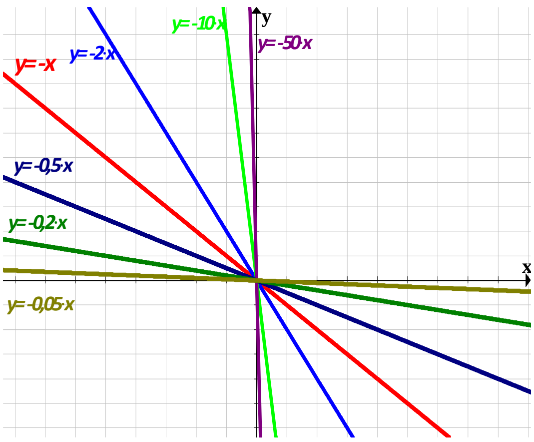
En las funciones de proporcionalidad directa, la pendiente es la razón de proporcionalidad entre la variable dependiente y la variable independiente. La pendiente de una recta mide su inclinación respecto al eje de abscisas, o lo que es lo mismo, la rapidez o lentitud con la crece o decrece la función.



Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Todas la rectas tienen pendiente positiva y son funciones crecientes (al aumentar el valor de x aumenta también el valor de y)

Al aumentar el valor de m aumenta la inclinación, el ángulo que la recta forma con el eje de abscisas, y la recta se aproxima cada vez más a la vertical. Si disminuye m, entonces disminuye la inclinación, la recta se aproxima cada vez más a la horizontal.

El valor de la pendiente m indica cuánto aumenta el valor de la ordenada y al aumentar una unidad el valor de la abscisa x, o dicho de otra forma, las unidades que subimos por cada unidad que avanzamos hacia la derecha (desplazándonos por la recta).



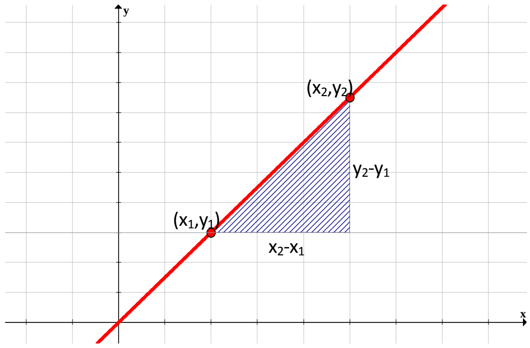
Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos. Todas las rectas con pendiente negativa son funciones decrecientes (al aumentar el valor de x disminuye el valor de y)

Cuanto mayor es el valor absoluto de la pendiente mayor es la inclinación de la recta (como las pendientes son negativas, el valor absoluto es mayor cuanto menor es el número).

El valor de la pendiente m indica las unidades que bajamos (disminuye y) por cada unidad que avanzamos hacia la derecha (desplazándonos por la recta).

3.3 Obtención de la pendiente de una recta a partir de dos puntos

Una manera de calcular la pendiente de una recta a partir de su gráfica es dividiendo la variación de la variable y entre la variación de la variable x entre dos cualesquiera de sus puntos:

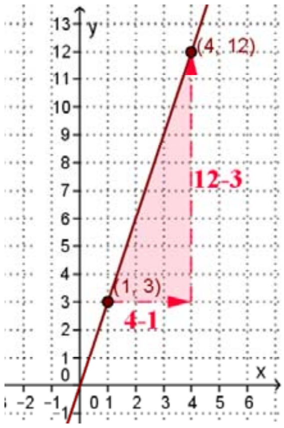


Dados dos puntos cualesquiera de una recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Para calcular la pendiente de la recta representada a la derecha tomamos los puntos (1,3) y (4,12)



La variación de la variable dependiente y al pasar del primer punto al segundo es 12 – 3 = 9 (unidades que se sube al pasar del primer punto al segundo) y la variación de la variable dependiente x es 4 – 1 = 3 (unidades que se avanza hacia la derecha), entonces, la pendiente es

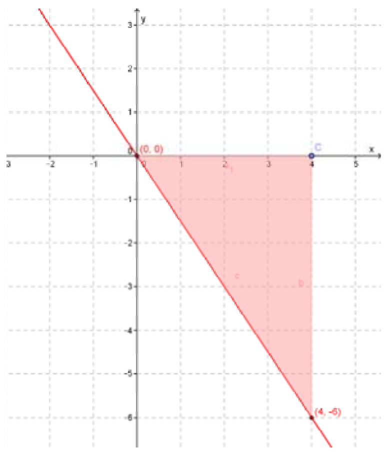
$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

La expresión algebraica de la función lineal es $y = 3x$ (ecuación de la recta)

Podemos comprobar que otros puntos, como (2, 6) y (3,9) están en la recta porque verifican la ecuación (la ordenada es el triple de la abscisa)

Actividades resueltas

Calcula la pendiente y escribe la ecuación de la recta representada.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, por ejemplo, el (0, 0) y el (4, -6).

Calculamos la pendiente: $m = \frac{(-6)-0}{4-0} = \frac{-6}{4} = -1{,}5$

Como la recta pasa por el origen de coordenadas es una función lineal y su ecuación es $y = -1{,}5\,x$

Podemos comprobar que las coordenadas de cualquier otro punto de la recta verifican la ecuación, por ejemplo el punto (-2, 3) de abscisa $x = -2$ y ordenada $y = 3$ es una solución de la ecuación: $3 = -1{,}5 \cdot (-2)$

Actividades propuestas

2. Representa y halla la expresión algebraica de la recta de cada apartado, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y por el punto que se indica:

   a) A (3, 2)   b) B(2, -3)   c) C(2, -5)

   ¿A cuál de las rectas anteriores pertenece cada uno de los puntos: P(10, -15) , Q(21, 14) y R(30, -75)?

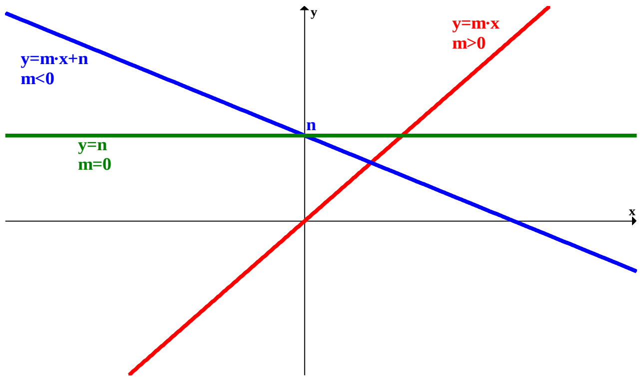
3.4. Función afín. Rectas de la forma $\mathbf{y = m \cdot x + n}$

Las funciones polinómicas de primer grado, o afines, se describen algebraicamente con una ecuación de la forma $\mathbf{y = m \cdot x + n}$ y sus gráficas son rectas que pasan por el punto $(0,n)$

Además de la **variable independiente** $\mathbf{x}$**,** la **variable dependiente** $\mathbf{y}$, y la **pendiente** $\mathbf{m}$, cuyo significado es el mismo que para las funciones lineales, se añade el valor $\mathbf{n}$ que recibe el nombre de **ordenada en el origen** porque es la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas. En el caso particular de que sea $n = 0$ la función es también lineal (tipo particular de función afín)

Como en las funciones lineales, el crecimiento o decrecimiento de una función afín viene determinado por el signo de la pendiente:

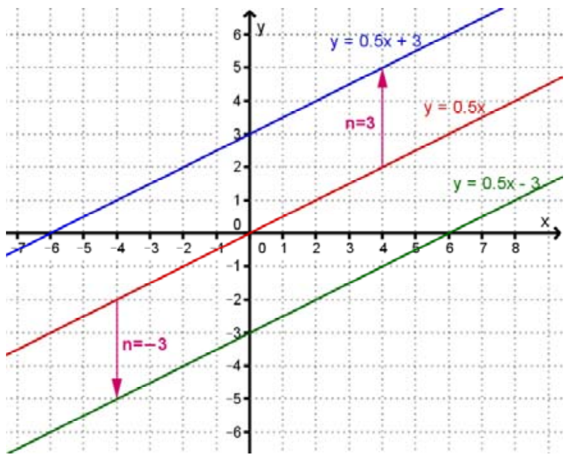
- Si $m > 0$, la función es **creciente**.
- Si $m < 0$, la función es **decreciente**.
- Si $m = 0$, la expresión de la función afín toma la forma particular $\mathbf{y = n}$, en la que no aparece la variable independiente x, indicando que sea cual sea el valor de x la imagen y es siempre n. Este tipo de funciones, cuya gráfica es una recta horizontal que pasa por el punto $(0, n)$, se llaman **funciones constantes**.



Todas las rectas que tienen la misma pendiente son **rectas paralelas** entre sí

Ejemplo:

Comparemos la recta $y = 0,5\,x$ *con las rectas* $y = 0,5\,x + 3$ *e* $y = 0,5\,x - 3$



Las tres rectas tienen la misma pendiente o inclinación. En los tres casos es $m = 0,5$. Son rectas paralelas.

La diferencia entre las rectas está en el valor de n: la segunda recta (con $n = 3$) se obtiene desplazando todos los puntos de la primera recta (con $n = 0$) 3 unidades hacia arriba y la tercera recta (con $n = -3$) es el desplazamiento de la primera 3 unidades hacia abajo.

Actividades resueltas

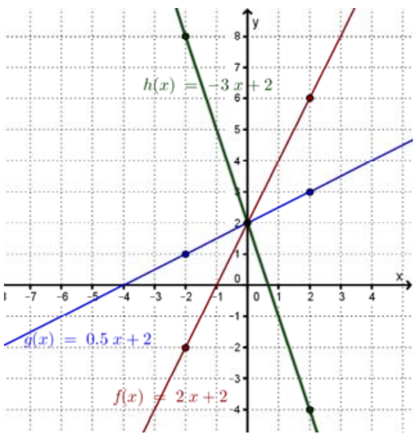
1. Representa en el mismo sistema de coordenadas cartesianas las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x+2$ *b)* $g(x) = 0,5x+2$ *c)* $h(x) = -3x+2$

x	−2	0	2
f(x)	−2	2	6
g(x)	1	2	3
h(x)	8	2	-4

Todas las gráficas son rectas que pasan por el punto $(0,2)$ porque en todas $n = 2$

¿A la gráfica de que función pertenece el punto $(20, 12)$? A $y=g(x)$ porque $g(20)=0,5\cdot 20+2=12$



2. El alquiler de una bicicleta cuesta 2€ de entrada más 0,5€ por cada hora. Escribe la expresión algebraica del coste en función del tiempo que se alquila la bicicleta y representa la función.

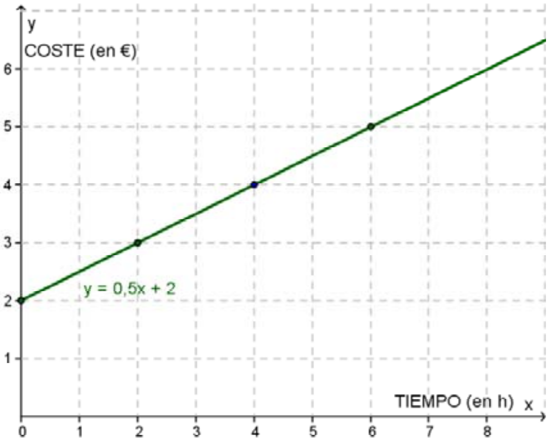
El enunciado dice que, una vez pagada la cantidad inicial de 2 €, el coste añadido es proporcional al tiempo que tenemos la bicicleta alquilada.

Hacemos una tabla de valores para situar algunos puntos de la recta en el sistema de referencia:

x (h)	0	2	4	6
y (€)	2	3	4	5

La expresión algebraica de la función es

$$y = 2 + 0{,}5\,x$$

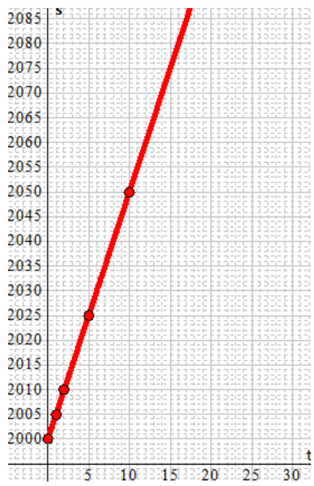


3.Representa la gráfica s-t del movimiento rectilíneo uniforme que lleva un ciclista que se ha trasladado 2 km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.

La fórmula del MRU, con un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. En este caso: $s = 2000 + 5t$.

Tiempo (*t*)	0	1	2	5	10
Espacio (*s*)	2000	2005	2010	2025	2050

Construimos una tabla de valores y dibujamos la gráfica:



Observa que hemos tenido que adaptar los ejes para poder dibujar la gráfica.

La pendiente de la recta 5, es la velocidad (el espacio recorrido por cada unidad de tiempo).

Actividades propuestas

3. Representa las siguientes funciones afines y determina si alguna de las rectas pasa por le punto $P(50, -24)$:

a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = 2x - 3$ c. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

3.5. Distintas formas de dar la ecuación de una recta

La ecuación de una recta en la forma $y = mx + n$ recibe el nombre de **ecuación explícita** de la recta

Otra forma de expresar la ecuación de una recta, de la que conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente, m, es $y = y_0 + m(x - x_0)$, que recibe el nombre de **ecuación punto-pendiente**.

Cualquiera de las ecuaciones anteriores se puede transformar en una ecuación equivalente de la forma $ax + by = c$, que recibe el nombre de **ecuación general** de la recta.

Se pasa de la ecuación punto-pendiente a la ecuación explícita quitando paréntesis y simplificando. Sea cual sea el punto de la recta elegido para dar la ecuación punto-pendiente se obtiene una única ecuación explícita, que es la definición de la recta como función.

Actividades resueltas

Escribir, en forma punto pendiente, explícita y general, las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2,1) y cuyas pendientes son

a) $m=2$ *b)* $m = -\frac{1}{3}$

a) La ecuación punto-pendiente de la recta es

$$y = 1 + 2(x - 2)$$

Paso a la forma explícita: $y = 1 + 2x - 4$

$\Leftrightarrow y = 2x - 3$

Ecuación general: $2x - y = 3$

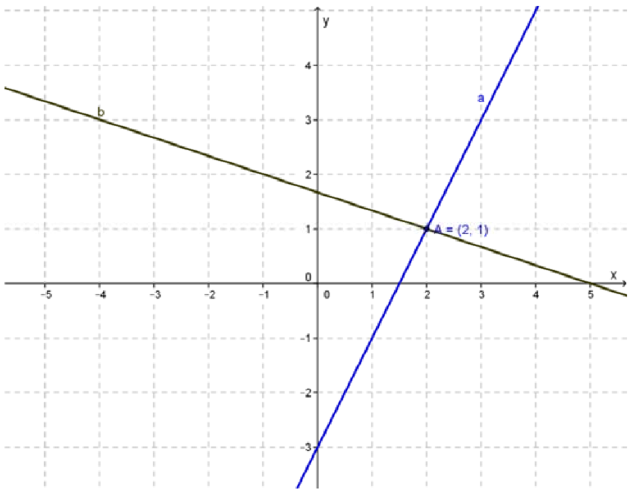
b) Ecuación punto-pendiente: $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 2)$

Paso a la ecuación explícita: $y = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Paso a la forma general quitando denominadores:

$3y = -x + 5 \Leftrightarrow x + 3y = 5$



Para hallar la **ecuación de una recta que pasa por dos puntos** podemos calcular primero la pendiente y escribir después la ecuación punto-pendiente.

Si de una recta conocemos dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente de la recta se puede calcular dividiendo la variación de la ordenada entre la variación de la abscisa:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Actividades resueltas

Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-1,5) y B(7,3) *y escribirla en las tres formas (punto-pendiente, explícita y general)*

Calculamos la pendiente: $m = \dfrac{3-5}{7-(-1)} = \dfrac{-2}{8} = \dfrac{-1}{4}$

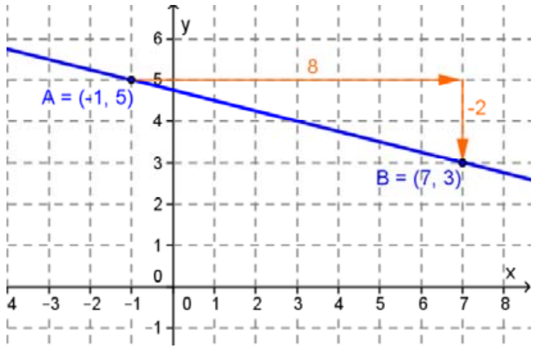
Ecuación punto-pendiente: $y = 5 - \dfrac{1}{4}(x+1)$

Quitamos paréntesis $y = 5 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{4}$ y simplificamos.

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{19}{4}$

Quitamos denominadores: $4y = -x + 19$

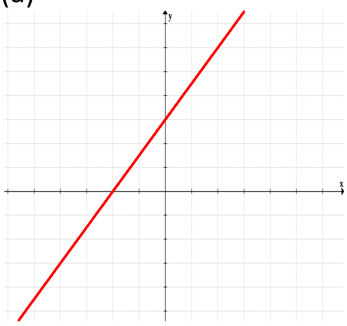
Ecuación general: $x+4y = 19$



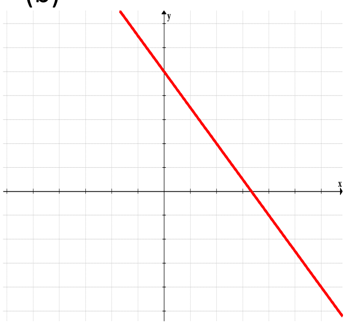
Actividades propuestas

4. Halla la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas:

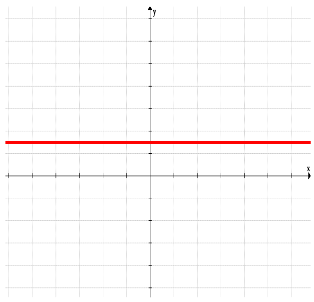
(a)



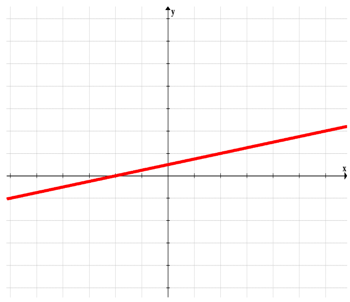
(b)



(c)



(d)



Razona a cuál de las rectas anteriores pertenece cada uno de los puntos siguientes:

$P(-40, 65)$ $Q(-40, -19.5)$ $R(-40, -57)$ $S(-40, 1.5)$.

3.6. Posiciones relativas entre rectas

Las posibles posiciones relativas entre dos rectas, en el plano, se definen con los siguientes términos:

- **Rectas secantes**, tienen un único punto en común. Las pendientes son distintas.
- **Rectas paralelas**, no tienen ningún punto en común. Las pendientes son iguales y las ordenadas en el origen distintas.
- **Rectas coincidentes**, tienen todos sus puntos comunes porque son la misma recta. Las pendientes y las ordenadas en el origen son iguales.

Para hallar las coordenadas del punto de corte de dos rectas se resuelve el sistema formado por sus ecuaciones. Si las rectas son secantes, el sistema es compatible determinado (la solución es el punto común a las dos rectas), si son paralelas distintas el sistema es incompatible (no tiene solución), y si son rectas coincidentes el sistema es compatible indeterminado (las dos ecuaciones son equivalentes y las infinitas soluciones del sistema son los puntos de la única recta que forma el sistema).

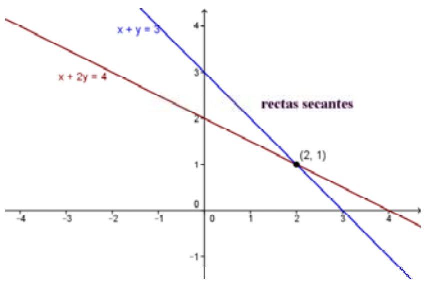
Actividades resueltas

Representa las rectas de cada sistema (pasando previamente cada ecuación a forma explícita), di si el sistema tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna, y da la posición relativa entre las dos rectas:

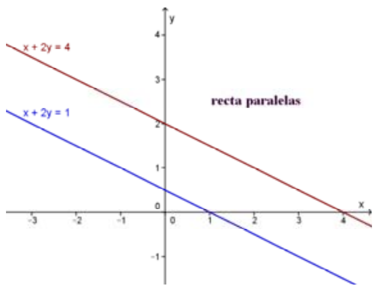
a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-x+3 \end{cases}$ La única solución es $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$. Son rectas secantes en el punto $(2,1)$

b) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$ Ninguna solución. Son rectas paralelas

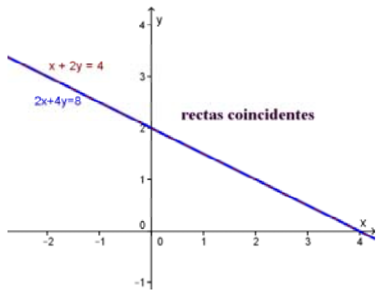
c) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$ Infinitas soluciones. Son rectas coincidentes



a)

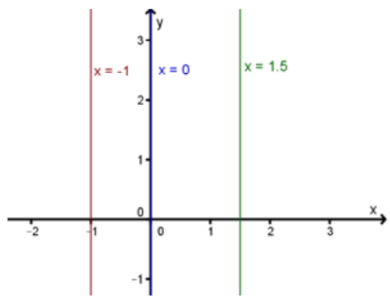


b)



c)

3.7. Rectas que no son funciones.



Las **rectas verticales**, paralelas al eje y no son funciones, ya que a un único valor de x le corresponden infinitos valores de y.

Las ecuaciones de estas rectas verticales son de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{k}$ (el valor de la abscisa de todos los puntos de la recta es k)

4. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

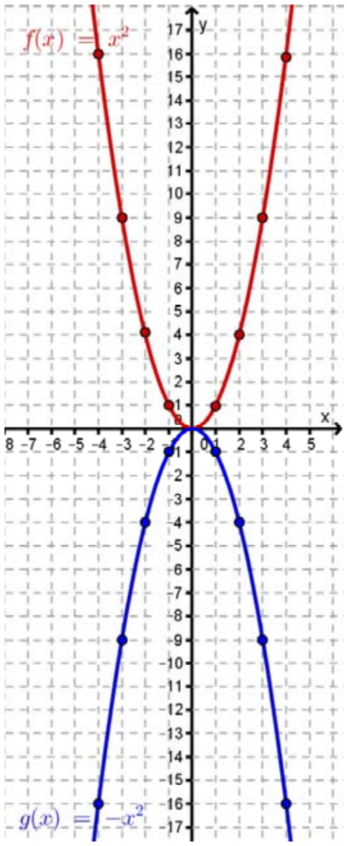
Las funciones polinómicas de segundo grado, también llamadas **funciones cuadráticas** son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de segundo grado, es decir, su expresión es de la forma

$$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c\,.$$

La gráfica de una función polinómica de segundo grado es una curva llamada **parábola.**

Parábola de ecuación $y=a\cdot x^2$

Se han representado en el mismo sistema cartesiano de coordenadas las gráficas de la función $y=x^2$ (a=1) y de la función $y=-x^2$ (a= −1)



Para dibujar las gráficas de estas funciones construimos una tabla de valores y representamos los puntos en el plano cartesiano.

x	y=x²
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

x	y= -x²
-4	-16
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9
4	-16

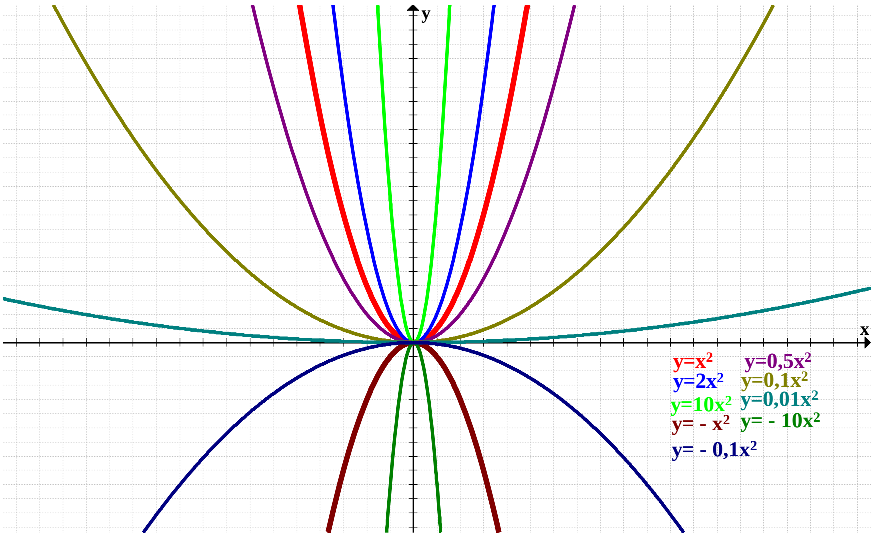
Observa que ambas funciones tienen la propiedad de que valores opuestos de x tienen la misma imagen, por esta razón las gráficas son **simétricas respecto al eje y**: todo punto de la parábola tiene su punto simétrico también en la parábola (el punto que está a la misma distancia del eje de simetría y)

El único punto de la parábola que está en el eje de simetría (es el simétrico de sí mismo) recibe el nombre de **vértice** de la parábola.

En las tablas y en las gráficas se pueden observar algunas características de estas funciones:

	$y=x^2$	$y=-x^2$
DOMINIO	$\mathrm{Dom}\, f(x)=\Re=(-\infty,+\infty)$	
RECORRIDO	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0]$
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO	decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$, creciente en $(0,+\infty)$	creciente en el intervalo $(-\infty,0)$, decreciente en $(0,+\infty)$
EXTREMOS	**Mínimo** relativo y absoluto en $(0,0)$	**Máximo** relativo y absoluto en $(0,0)$

Representando en el mismo sistema de coordenadas varias parábolas con distintos valores del coeficiente a, vemos que cuanto mayor es el valor absoluto de a más estrecha es la parábola, mientras que al disminuir el valor absoluto de a, la parábola se va ensanchando.



En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $y = a \cdot x^2$, tienen las siguientes características:

- El dominio son todos los números reales.
- Si $a > 0$, la parábola está abierta hacia arriba, el recorrido es $[0, +\infty)$ y tiene un **mínimo absoluto** en el punto $(0,0)$
- Si $a < 0$, la parábola está abierta hacia abajo y tiene un **máximo absoluto** en el punto $(0, 0)$
- El vértice de la parábola es el punto $(0,0)$
- Son funciones simétricas respecto al eje y porque números opuestos tienen la misma imagen ($a(-x)^2 = a x^2$). Si una función verifica que $f(-x) = f(x)$ se dice que es una **función par.**

Actividades propuestas

5. Dibuja la gráfica de las siguientes parábolas en el mismo sistema de coordenadas:

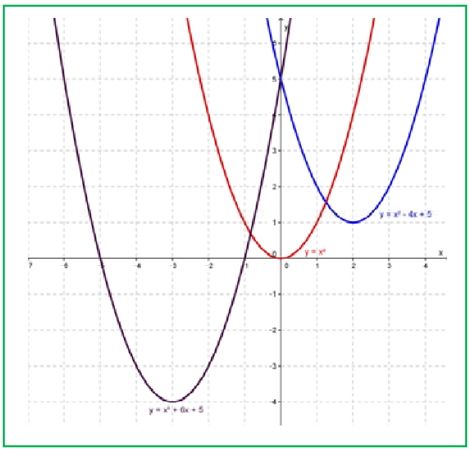
a) $y = \frac{3}{4}x^2$ b) $y = \frac{5}{4}x^2$ c) $y = \frac{1}{2}x^2$

d) $y = -0,5x^2$ e) $y = -1,25x^2$ f) $y = -0,75x^2$

Parábola de ecuación $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con el mismo aspecto que la de ecuación $y = a x^2$, pero con el vértice desplazado a otro punto del plano distinto del $(0,0)$.

Para representar bien una parábola hay que situar en primer lugar el eje de simetría y el vértice, después los puntos de corte de la parábola con los ejes cartesianos y por último completar con algunos puntos obtenidos con una tabla de valores.



EJE DE SIMETRÍA DE LA PARÁBOLA: La recta vertical de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$

VÉRTICE: Es un punto del eje de simetría de la parábola, por lo que tiene abscisa $x = \frac{-b}{2a}$ y por ordenada la imagen, y, que se obtiene al sustituir $x = \frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$

· Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba y en el vértice está el **mínimo absoluto** de la función.

· Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo y en el vértice está el **máximo absoluto** de la función.

PUNTO DE CORTE CON EL EJE DE ORDENADAS:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x = 0$.

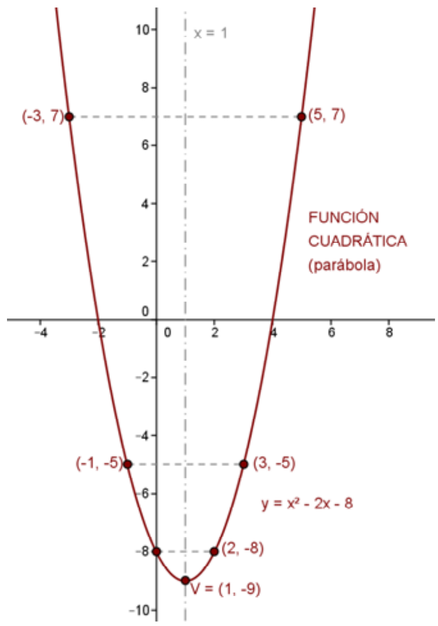
Cuando $x=0$, la parábola toma el valor c, luego el punto de corte es el punto $(0, c)$.

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE DE ABSCISAS:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y = 0$. Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.

(Pueden ser dos puntos, uno o ninguno, según el número de soluciones de la ecuación)

Actividades resueltas



Representar la función cuadrática

$y = f(x) = x^2 - 2x - 8$ $\quad$ $a = 1$ $b = -2$ $c = -8$

- Hallamos el **eje de simetría**: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

  El eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = 1$

- El **vértice** está en el eje de simetría, por lo que su abscisa es $x = 1$ y la ordenada se calcula hallando la imagen de la abscisa.

  $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = -9$

  El vértice es el punto $V(1, -9)$ y es el punto más bajo (mínimo) porque $a>0$

- El **punto de corte con el eje de ordenadas** ($x = 0$) es $(0, -8)$

- Los **puntos de corte con el eje de abscisas** ($y = 0$)se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 - 2x - 8 = 0$:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1.(-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

La parábola corta al eje X en dos puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$, ambos a la misma distancia del eje de simetría.

- Representamos algunos puntos más a partir de una adecuada tabla de valores y aprovechamos la simetría con respecto al eje.

x	3	5
y	-5	7

- El **recorrido** o **conjunto imagen**, como puede verse en la gráfica es el intervalo $[-9, +\infty)$

- *Representar la parábola* $y=-2x^2-12x-10$

· **Eje de simetría**: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-12)}{2\cdot(-2)}=\frac{12}{-4}=-3$. El eje de simetría es la recta vertical $x=-3$.

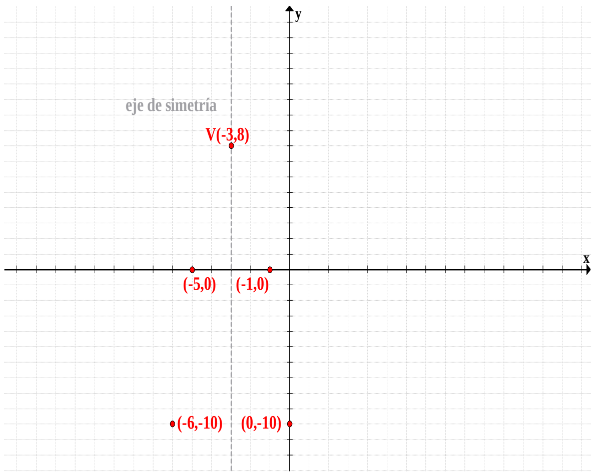
· **Vértice**: $\begin{cases} x=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3,8)$

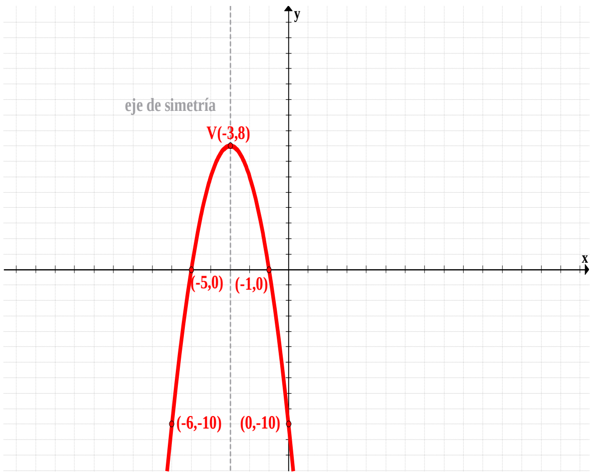
$a=-2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo y el vértice es el punto más alto (8 es el máximo absoluto de la función)

· **Puntos de corte con los ejes de coordenadas**:

- Eje OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5 \Rightarrow (-5,0) \\ x_2=-1 \Rightarrow (-1,0) \end{cases}$
- Eje OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10 \Rightarrow (0,-10)$

La parábola también pasa por su simétrico: $(-6,-10)$.





· El **recorrido** o **conjunto imagen**, como puede verse en la gráfica es el intervalo $(-\infty,8]$

Actividades propuestas

6. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y=2x^2+4x-6$ b. $y=6x^2-24x$ c. $y=-2x^2+4x-2$

d. $y=2x^2+5x-12$ e. $y=3x^2+6x-9$ f. $y=-2x^2+7x+3$

g. $y=7x^2+21x-28$ h. $y=5x^2-9x+4$ i. $y=-4x^2-4x-1$

5. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA : $y=k/x$

Recuerda que:

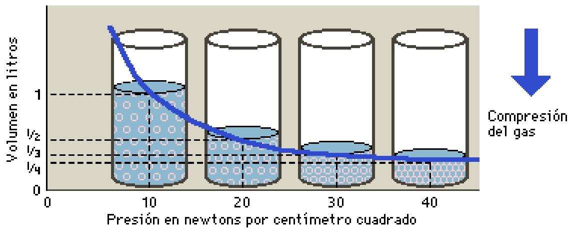
Dos magnitudes, A y B, son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar a la primera por un número, la segunda queda dividida por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k* es el producto de cualquier par de valores correspondientes de ambas magnitudes: *k* = *a* · *b* = *a'* · *b'*.

Ejemplo

- La ley de Boyle-Mariotte establece que "a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce".

  La fórmula que describe esta ley es $P \cdot V = k$. Si despejamos V, obtenemos la siguiente expresión para el volumen como función de la presión: $V = \dfrac{k}{P}$.

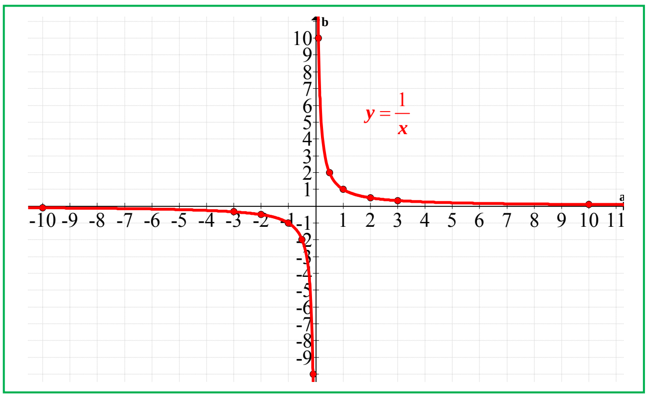
  La gráfica describe una curva que a medida que aumenta la presión disminuye el volumen, y al contrario, si disminuye la presión, el volumen aumenta.



Actividades resueltas

- *Representa la función* $y = \dfrac{1}{x}$

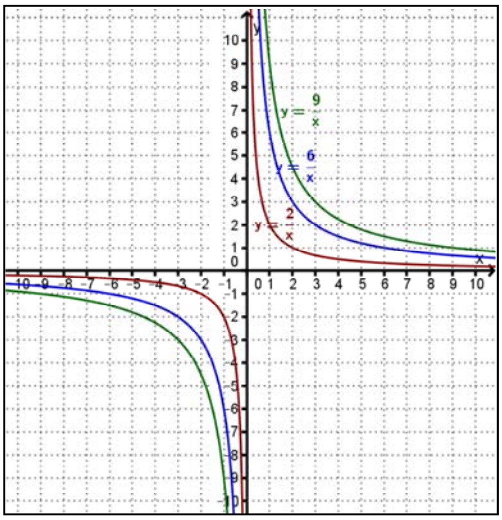
Completamos una tabla de valores y representamos los puntos en un sistema de coordenadas.

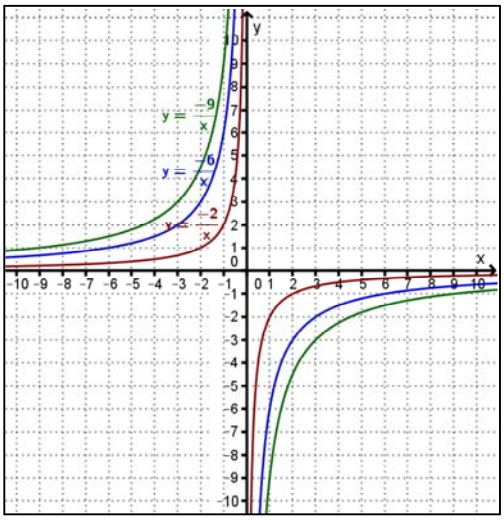


x	–10	–3	–2	–1	–1/2	–0,1	0,1	1/2	1	2	3	10
y	–0,1	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	1/2	1/3	0,1

Se puede observar que la gráfica nunca corta a los ejes de coordenadas, ya que ni la *x* ni la *y* pueden valer 0. El 0 no está en el dominio y tampoco en el recorrido de la función (no se puede dividir por 0). El dominio y el recorrido de esta función es $\Re-\{0\}$.

Las funciones $y = \dfrac{k}{x}$ se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** . Su gráfica es una curva formada por dos ramas infinitas, simétricas respecto al origen de coordenadas, llamada **hipérbola**. Su dominio está formado por los tramos $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$





En el primer sistema de coordenadas cartesianas están representadas tres funciones de proporcionalidad inversa con el valor de k positivo, y en el segundo otras tres con el valor de k negativo. Observa que en el primer caso son funciones decrecientes en su dominio, mientras que en el segundo caso son crecientes.

En estas funciones, cuando x toma valores grandes en valor absoluto las imágenes son muy próximas a cero, por lo que la curva se aproxima mucho al eje de abscisas. Por esta razón se dice que el eje X es una **asíntota horizontal** de función.

Ninguna de estas funciones está definida para x=0 (no se puede dividir entre 0), pero cuando x toma valores muy próximos a 0, las imágenes son muy grandes en valor absoluto, por lo que la curva se aproxima mucho al eje de ordenadas. Por esta razón se dice que el eje Y es una **asíntota vertical** de la función.

Actividades propuestas

7. Representa las funciones $f(x)=\frac{5}{x}$ y $g(x)=\frac{-5}{x}$

8. Se quiere abrir una ventana en una pared que tenga 2 m^2 de área. Da la expresión algebraica de la función que da la altura de las ventanas según la longitud elegida para la base y representa la función después de completar la tabla de valores:

base en metros (b)	0,25	0,5	1	2	3	4	8
altura en metros (a)							

6. FUNCIONES EXPONENCIALES: $y=b^x$

Hay dos tipos de funciones cuya expresión analítica o fórmula es una potencia:

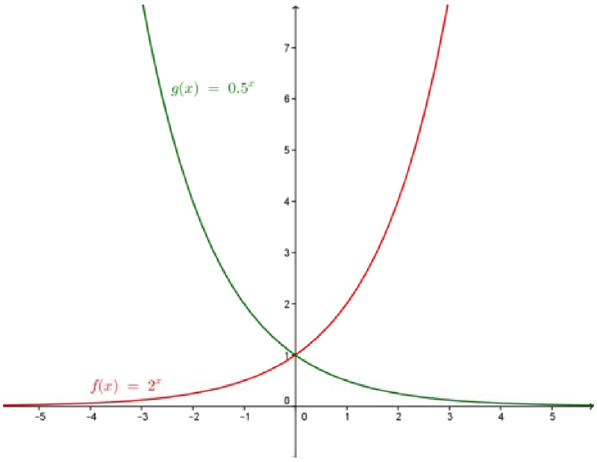
- Si la variable independiente está en la base y el exponente es un número, por ejemplo $y=x^3$, se llama **función potencial**, y si además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente y la base es un número, por ejemplo $y=3^x$, se llama **función exponencial**.

Ejemplo:

- Para representar las funciones exponenciales

$f(x)=2^x$ y $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

calculamos unas cuantas imágenes para la tabla de valores:



x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Recuerda: $a^0=1$ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

Aunque en la tabla solamente se han dado valores enteros a x, cuya imagen se puede calcular mentalmente, x puede ser cualquier número real. Usando la calculadora podríamos haber calculado, por ejemplo, $f(-0{,}5)=2^{-0{,}5}\approx 0{,}707$

En ambos casos el dominio es $(-\infty,+\infty)$

En ambos casos las imágenes son todas positivas, el recorrido es $(0,+\infty)$.

La función de expresión algebraica $y=b^x$, siendo la base **b un número real positivo y distinto de 1**, recibe el nombre de función exponencial de base b.

El dominio es $\Re=(-\infty,+\infty)$ y el recorrido es $(0,+\infty)$

La gráfica de la función pasa por los puntos $(0,1)$ y $(1, b)$

Puede ser una función creciente o decreciente, dependiendo de que la base sea mayor o menor que 1

· Si $b>1$ la función es creciente. · Si $0<b<1$ la función es decreciente.

En el caso en el que b = 1 no se trata de una función exponencial, sino de la función constante y = 1, cuya gráfica es una recta horizontal.

El crecimiento exponencial es muy frecuente en la naturaleza (cultivos de microorganismos, poblaciones vegetales y animales,…). También sirve para describir fenómenos económicos y otros.

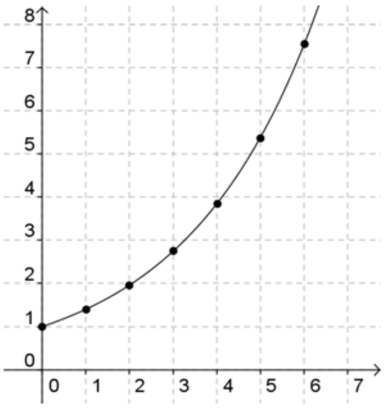
Actividad resuelta

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número *"y"* de bacterias que habrá al cabo de *"x"* horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	Número de bacterias (*y*)
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gráfica de la función



Actividades propuestas

9. Representa conjuntamente las graficas de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = 4^x$

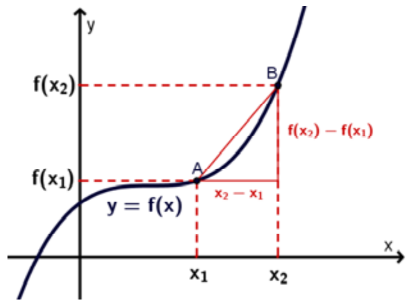
10. Representa conjuntamente las graficas de las funciones $f(x) = 0{,}1^x$ y $g(x) = 0{,}8^x$

7. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

La **tasa de variación de una función y= f(x) en un intervalo [x_1, x_2]** es lo que aumenta o disminuye una función entre los extremos del intervalo. Se define como: **TV = $f(x_2) - f(x_1)$, $(x_2 > x_1)$**

Si la función es creciente en el intervalo la tasa de variación es positiva y si es decreciente es negativa.

Dividiendo la tasa de variación entre la longitud del intervalo, tenemos el concepto de tasa de variación media, que es más significativo, porque no es lo mismo que una función varíe su valor una misma cantidad en un intervalo pequeño que en un intervalo grande



La **tasa de variación media de una función y= f(x) en un intervalo [x_1, x_2]** es el cociente entre la variación de f(x) y la variación de x en el intervalo:

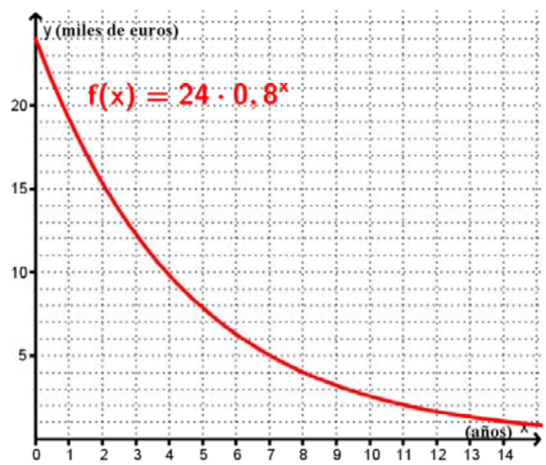
$$\text{TVM} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La **TVM** de f(x) en [x_1, x_2] es la **pendiente** del segmento que une los puntos A(x_1, $f(x_1)$) y B(x_2, $f(x_2)$)

En una función afín, f(x)=mx+n, la tasa de variación media en cualquier intervalo es igual a la pendiente de la recta, como puede verse fácilmente a partir de la definición:

$$\text{TVM}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(mx_2-n)-(mx_1-n)}{x_2-x_1}=\frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=m$$

Actividad resuelta



La gráfica representa el precio (en miles de euros) de un coche en función del tiempo transcurrido desde su compra. La tasa de variación media en un intervalo de tiempo es lo que se ha depreciado el coche en dicho intervalo. El decrecimiento de la función es muy rápido al principio y se hace más lento con el tiempo.

Calculamos la TVM en el intervalo [0,2]:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{24\cdot 0{,}8^2-24\cdot 0{,}8^0}{2-0}=\frac{15{,}36-24}{2}=\frac{-8{,}64}{2}=-4{,}32$$

El valor disminuye 4320 euros por año durante los dos primeros años.

Calculamos la TVM en el intervalo [10,12]: $\frac{f(10)-f(8)}{10-8} \approx -0{,}725$

Entre los años 10 y 12 la depreciación es de 725 euros por año.

Actividades propuestas

11. Para comparar la rapidez de crecimiento de la función potencial $f(x)=x^2$ y de la función exponencial $g(x)=2^x$, calcula las tasas de de variación media de cada una de las dos funciones en los intervalos indicados y observa cuál de las dos funciones crece más deprisa en cada intervalo:

a) [0, 2]

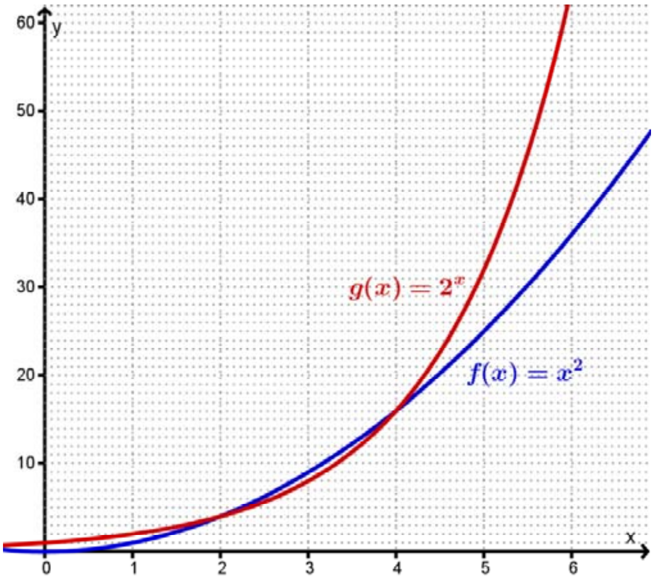
b) [2, 3]

c)[3, 4]

d)[4, 5]

e)[5, 6]

f) [10,20]



8. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Una **sucesión de números reales** es una función con dominio **N***, que hace corresponder a cada número natural (excluido el cero) un número real.

Para las sucesiones se usa generalmente una notación especial que consiste en representar las imágenes de los números naturales 1, 2, 3, 4, …, n, …, con una letra minúscula con un subíndice que indica el número natural del que es imagen.

N*	1	2	3	4	…	n	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
R	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n	…

Se acostumbra a representar la sucesión por sus imágenes, $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$. Así, vemos una sucesión como una secuencia ordenada de números reales. Los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman términos de la sucesión. Los subíndices indican la posición de cada término en la sucesión.

La representación gráfica de una sucesión está formada por un conjunto de puntos aislados que tienen por abscisas los números naturales 1, 2, 3, 4, …, y por ordenadas los números reales $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Ejemplos:

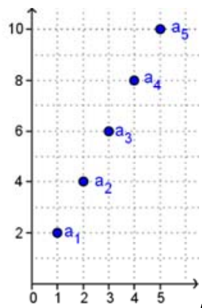
- En la sucesión $(a_n) = (\ 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ )$

  los primeros términos son

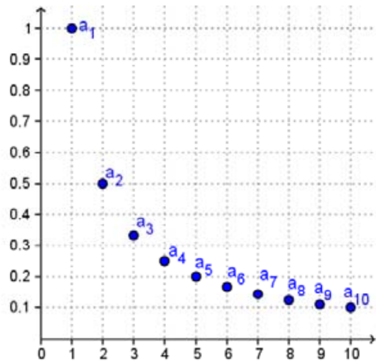
  $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 10$

- En la sucesión $(b_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ los primeros términos son

  $b_1 = 1\ , b_2 = \frac{1}{2},\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_4 = \frac{1}{4}\ b_5 = \frac{1}{5}$



(a_n)



(b_n)

Una forma de definir una sucesión es dando la expresión del **término general** de la sucesión, $\mathbf{a_n}$, es decir, la expresión algebraica que define la sucesión como función de **N*** en **R**. La expresión algebraica del término general en función de n permite calcular cualquier término de la sucesión.

Ejemplos:

- Se define la sucesión de término general $a_n = n^2 + 3$

  Podemos construir los términos de la sucesión sin más que sustituir n:

  $a_1 = 1^2 + 3 = 4, \qquad a_2 = 2^2 + 3 = 7, \qquad a_3 = 3^2 + 3 = 12, \qquad a_4 = 4^2 + 3 = 19, \ldots$

  Podemos hallar cualquier otro término, por ejemplo el 50º: $a_{50} = 50^2 + 3 = 2503$

- En la sucesión de término general $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ los primeros términos son

  $d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1 \qquad d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{-1}{3} \qquad d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

  El término 75º es $a_{75} = (-1)^{75} \frac{1}{75} = \frac{-1}{75}$ y el término 100º es $a_{100} = (-1)^{100} \frac{1}{75} = \frac{1}{75}$

Algunas sucesiones se definen por una **ley de recurrencia**, es decir, una expresión que permite calcular un término cualquiera a partir de los anteriores.

Ejemplo:

- La sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…, conocida como sucesión de Fibonacci se obtiene con la siguiente ley de recurrencia: $a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

- Dada la sucesión definida por la ley de recurrencia: $a_1=1$, $a_n = a_{n-1} + 3$

  Sus cuatro primeros términos son: $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 3 = 4$, $a_3 = 4 + 3 = 7$, $a_4 = 7 + 3 = 10$

Actividades propuestas

12. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2n^2+1$ b) $b_n = \dfrac{4n-1}{3n}$

c) $c_1 = 1$, $c_n = 3c_{n-1} + 5$ d) $d_1=2$, $d_2=5$, $d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

13. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,\dots)$ b) $(2, 4, 6, 8, 10,\dots)$

c) $(1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ d) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \dots\right)$

8.1. Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante: $\mathbf{a_{i+1} - a_i = d}$.

A esta constante se le llama **diferencia de la progresión** y se suele denotar con la letra d.

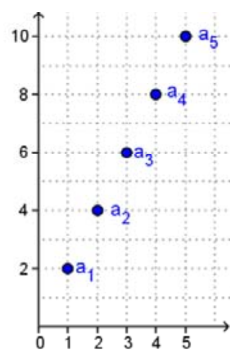
En una progresión aritmética cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, $\mathbf{a_{i+1} = a_i + d}$:

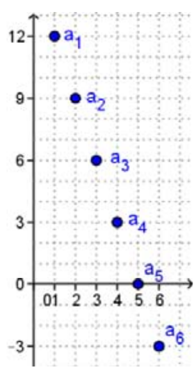
$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,\ \dots$$

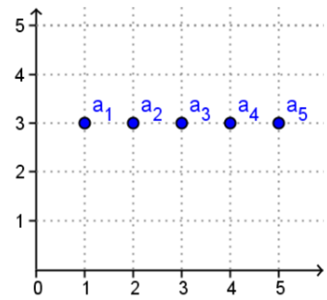
La expresión algebraica del **término general de una progresión aritmética** es: $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\,d}}$

La gráfica de una progresión aritmética es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.

- **Si d > 0 la progresión es creciente** (cada término es mayor que los anteriores). Ej. $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$
- **Si d < 0 la progresión es decreciente** (cada término es menor que los anteriores). Ej. $(12, 9, 6, 3, 0, -3, \dots)$
- Si **d = 0 la progresión es constante** (todos sus términos son iguales). Ej. $(3, 3, 3, 3, 3, \dots)$







Ejemplos:

- La sucesión formada por los números naturales: $(1, 2, 3, 4, 5,\ldots)$ es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 1 al término anterior.
- La sucesión formada por los números impares: $(1, 3, 5, 7, 9,\ldots)$ es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 2 al término anterior. El término general se obtiene sustituyen los valores $a_1 = 1$ y $d = 2$ en la fórmula y simplificando:

$$a_n = 1 + (n-1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1 .$$

Podemos comprobar que la fórmula $a_n = 2n - 1$ devuelve los primeros términos de la sucesión

$$a_1 = 2\cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1,\ a_2 = 2\cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3,\ a_3 = 2\cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5,\ a_4 = 2\cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Con la fórmula del término general podemos calcular el valor de cualquier término, por ejemplo del que ocupa la posición 100ª: $a_{100} = 2\cdot 100 - 1 = 200 - 1 = 199$

- La sucesión $(20, 15, 10, 5, 0, -5, \ldots)$ es una progresión aritmética de diferencia $d = -5$.

Calculamos el término general: $a_n = 20 + (n-1)\cdot(-5) = 20 - 5n + 5 = 25 - 5n \Rightarrow \quad a_n = 25 - 5n$

- La sucesión $\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ es una progresión aritmética porque la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es constante: $\frac{1}{2} - 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - 2 = d = \frac{1}{2}$

  Término general: $a_n = 0 + (n-1)\cdot\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{n-1}{2}$

8.2. Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina **razón de la progresión** y se suele denotar con la letra *r*. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ (siempre que a_i sea distinto de cero).

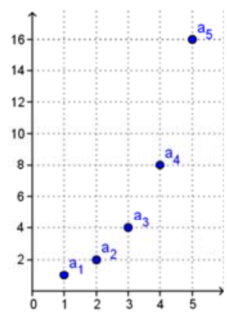
En una progresión geométrica cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón, $\mathbf{a_{i+1} = a_i \cdot r}$

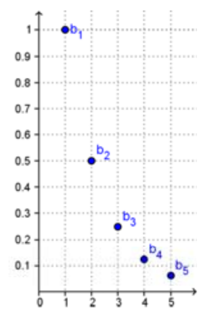
$$a_2 = a_1 \cdot r, \quad a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2, \quad a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3, \ldots$$

La expresión algebraica del **término general de una progresión geométrica** es: $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}}$

Ejemplos:

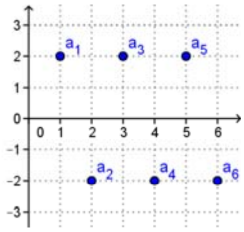
- La sucesión $(a_n)=(1, 2, 4, 8, 16,\ldots)$ es una progresión geométrica de razón 2. Es una sucesión creciente, mientras que $(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$ es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y es una sucesión decreciente.





- La sucesión $(a_n) = (2, -2, 2, -2, 2, -2, ...)$ es una progresión geométrica, ya que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por −1. El término general se obtiene sustituyen los valores $a_1 = 2$ y $r = -1$ en la fórmula :

$$a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}.$$



- Comprobamos que la sucesión (2, 3, 4.5, 6.75, 10.125, …) es una progresión geométrica dividiendo cada término entre el anterior: $\frac{3}{2} = \frac{4.5}{3} = \frac{6.75}{4.5} = \frac{10.125}{6.75} = r = 1.5$.

  El término general de la sucesión es : $a_n = 2 \cdot 1.5^{n-1}$

  Con la fórmula del término general podemos calcular el valor de cualquier término, por ejemplo del que ocupa la posición 30ª: $a_{30} = 2 \cdot 1.5^{30} = 383502.1185$

Actividades propuestas

14. Calcula la expresión del término general de cada progresión aritmética. Escribe los cinco primeros términos y el 20º término de cada sucesión:

a) De diferencia *d* = 3 y de primer término 3.

b) De diferencia *d* = –2 y de primer término 0.

c) De diferencia *d* = 1/3 y de segundo término 1.

15. Calcula la expresión del término general de cada progresión geométrica. Escribe los cinco primeros términos y el 20º término de cada sucesión:

a) De razón *r* = 3 y de primer término 3.

b) De razón *r* = 0,1 y de primer término 1000.

c) De razón r = 1/3 y de segundo término 81.

16. Para cada una de las siguientes sucesiones, indica si es una progresión aritmética, una progresión geométrica, o de ninguno de los dos tipos; obtén el término general y calcula el 15º término.

a) $(a_n) = (32, 25, 18, 11, 4 ...)$

b) $(b_n) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...)$

c) $(c_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, ...)$

d) $(d_n) = (-5\ ; -0{,}5\ ; -0{,}05\ ; -0{,}005; ...)$

e) $(e_n) = (\frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, ...)$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa las rectas: a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2,3x$.

2. Representa las siguientes funciones, justificando si son crecientes o decrecientes:

a) $y = 1,5x$ b) $y = -0,5x$.

3. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (0, 0) y determina su expresión algebraica. ¿Es una función creciente o decreciente?

4. Representa las siguientes funciones lineales y determina los puntos de cortes con los ejes:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.

5. Representa las rectas que pasa por los puntos que se indican y escribe su expresión algebraica en forma punto-pendiente, explícita y general.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

6. Un transportista cobra por cada trabajo 30 euros fijos más 1,50 euros por km recorrido. Completa la siguiente tabla con el coste del transporte para viajes con el recorrido dado:

km	100	200	300	400	500
Euros					

Escribe la expresión algebraica de la función que da el coste de un transporte en función de los kilómetros recorridos y representa la función en un sistema de ejes cartesianos.

7. Dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = 2,5x^2$ b) $y = -1,2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0,7x^2$.

8. Representa la gráfica de las funciones cuadráticas siguientes y determina el recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y el máximo o mínimo absoluto:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = -5x^2 + 2x - 6$ d) $y = -x^2 + x - 3$

e) $y = 3x^2 + 2x + 5$ f) $y = -2x^2 + 4x - 1$ g) $y = (x - 2)^2 + 4$ h) $y = 4(x - 2)^2 + 9$

9. Se lanza una pelota hacia arriba. Después de t segundos, se encuentra a h metros de altura. La expresión algebraica de la altura en función del tiempo es $h= 40t-5t^2$. Representa la gráfica.

a) ¿A qué altura se encuentra al cabo de 1 segundo?, ¿y de 2 segundos?

b) ¿En qué momento la pelota volverá a estar en el suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima y en qué momento se alcanza?

10. El número de personas atacadas cada día por una enfermedad viene dado por la función $f(x) = -x^2 + 20x + 62$, donde x representa el número de días desde que se descubrió la enfermedad. Representa la función (no tienen sentido valores negativos de x ni de y)

a) ¿Cuándo deja de crecer la enfermedad?

b) ¿Cuál es el número máximo de personas atacadas por la enfermedad en un día?

c) ¿Cuándo desaparecerá la enfermedad?

11. Una asociación de senderistas va a contratar un autocar para realizar una excursión por 540 €. Completa la siguiente tabla que relaciona los valores de las variables "número de personas que pagan la excursión" y "precio por persona":

x (número de personas que pagan la excursión)	10	20		40	45	
y (precio por persona)			18			9

¿Qué relación existe entre las variable x e y? Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona ambas variables.

12. Representa la gráfica de la función $f(x) = 1{,}5^x$ y calcula la tasa de variación media en los siguientes intervalos: (a) [0,1] (b) [2, 3] (c) [5, 6]

13. Escribe los diez primeros términos de la sucesión definida con las siguiente ley de recurrencia: $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$

14. Escribe la expresión algebraica del término general de cada sucesión:

(a) 1, −2, 3, −4, 5, −6, …

(b) −2, 4, −6, 8, −10, 12, …

15. El primer término de una progresión aritmética es 3,73 y la diferencia es 0,04. Escribe los ocho primeros términos, la expresión algebraica del término general y el valor del término a_{37}

16. El primer término de una progresión geométrica es 125 y la razón es 0,04. Escribe los ocho primeros términos, la expresión algebraica del término general y el valor del vigésimo término redondeado a millonésimas.

17. Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

(a) $a_n = 10 - 5n$

(b) $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$

(c) $c_n = 3^{n-2}$

(d) $d_n = \dfrac{2n - 1}{n + 1}$

Entre las sucesiones anteriores hay una progresión aritmética. Señala cuál es y da el valor de la diferencia. También hay una progresión geométrica. Indica cuál es y da el valor de la razón.

18. Escribe el término general y calcula el valor del vigésimo término de las siguientes sucesiones:

(a) 3,3; 4,4; 5,5; 6,6; …

(b) $\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \ldots$

(c) 0,25; 0,75; 2,25; 6,75; …

(d) 3, −6, 12, −24, …

AUTOEVALUACIÓN

1) La recta $y = 4x + 2$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen n:

a) m = 4, n = 0 b) m = 1/2, n = 6 c) m = 2, n = 4 d) m = 4, n = 2

2) La recta que pasa por los puntos (1, 6) y (–2, 4) tiene de pendiente m y ordenada en el origen n:

a) m = 2, n = 4 b) m = 3/2, n = 6 c) m = 2/3, n = 16/3 d) m = 6, n = 2/3

3) Indica el vértice de la función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

4) El único punto que pertenece a la recta $y = 2x + 5$ es:

a) (0, 2) b) (-1, 3) c) (1, 5) d) (-5, 0)

5) Indica cuál de las siguientes parábolas abre hacia arriba:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

6) Indica cuál de las siguientes parábolas no corta al eje OX:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

7) Indica cuál de las siguientes funciones es siempre decreciente:

a) $y = -5x+1$ b) $y = 5x^2+6x$ c) $y = 3x-8$ d) $y = -x^2$

8) Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas alcanza un mínimo absoluto:

a) $y = (-10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (-1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = -x^2 + 3$

9) La bajada de bandera en un taxi es de 1,50 € y cobra 50 céntimos por km recorrido. Se ha pagado 9,50 € por un trayecto de:

a) 8 km b) 10 km c) 9,5 km d) 16 km

10) Un vendedor de pólizas de seguro tiene un sueldo base (fijo) de 700 € al mes y un incentivo variable de 30 € por póliza contratada. Si un mes ha cobrado 1150 € el número de pólizas que ha contratado en dicho mes es:

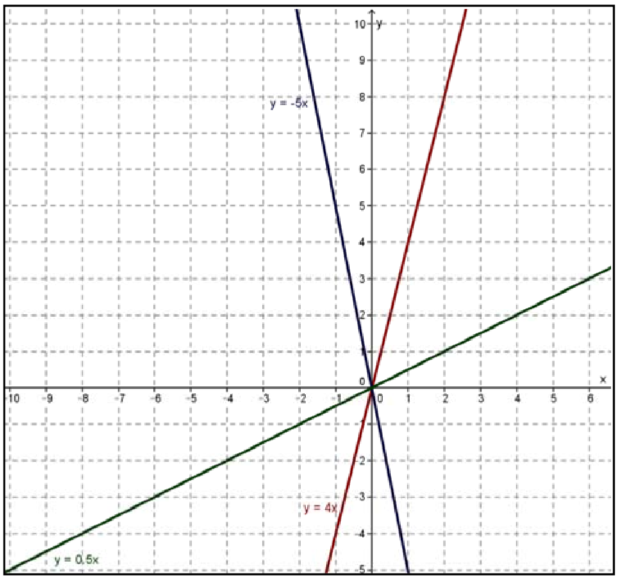
a) 20 b) 10 c) 12 d) 15

SOLUCIONES:

1d 2c 3a 4b 5b 6b 7a 8b 9d 10d

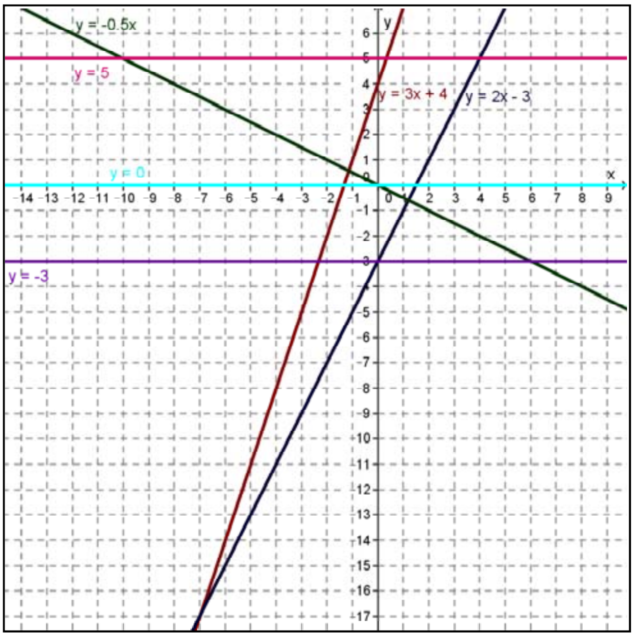
SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1) P (c) , Q (a) , R (b)



(2a) $y=\frac{2}{3}x$ Punto Q **(2b)** $y=\frac{-3}{2}x$ Punto P

(2c) $y=\frac{-5}{2}x$ Punto R



(3) La recta c pasa por P

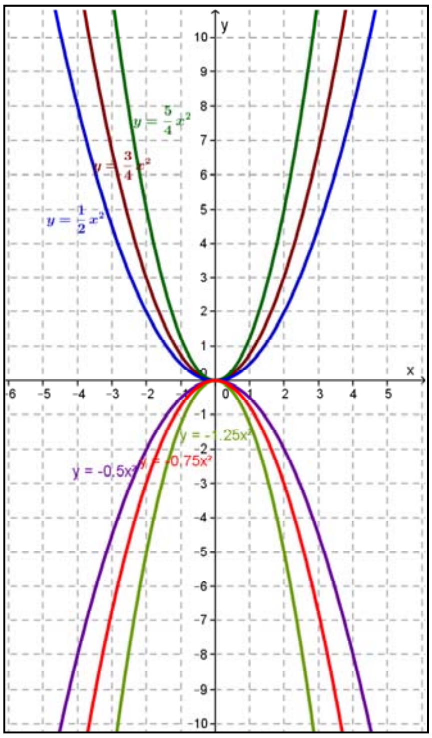
(4a) Recta $y=\frac{3}{2}x+3$ contiene a R

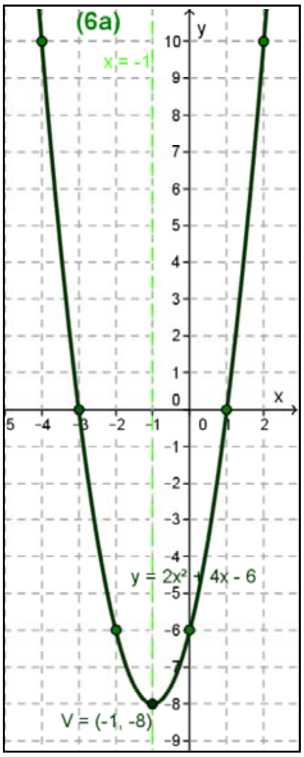
(4b) Recta $y=\frac{-3}{2}x+5$ contiene a P

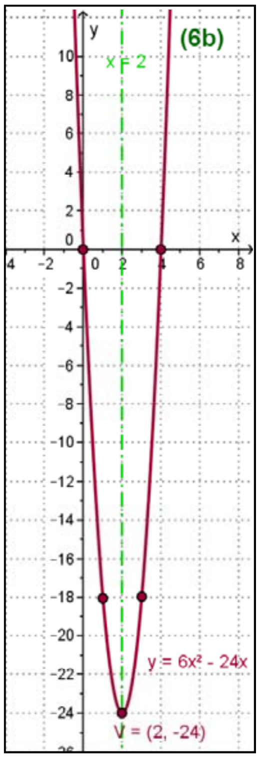
(4c) Recta $y=1{,}5$ contiene a S

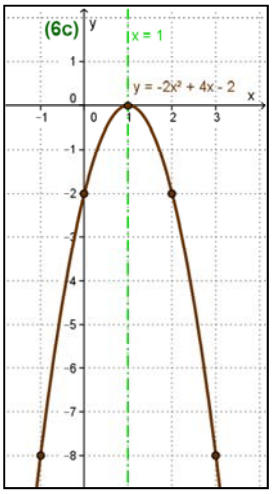
(4d) Recta $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ contiene a Q

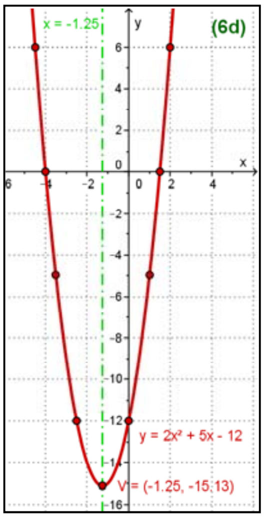
(5)

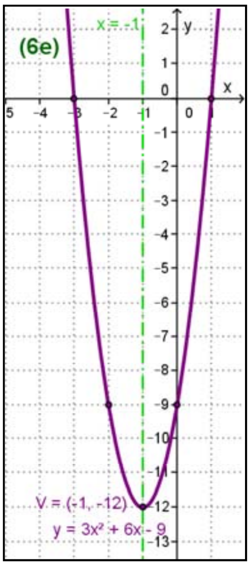


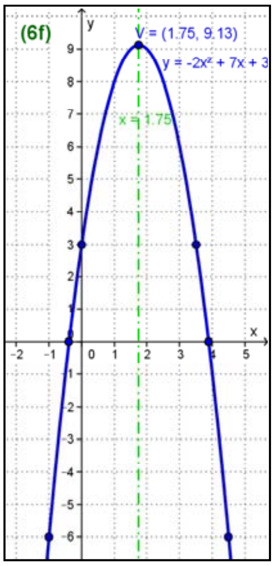


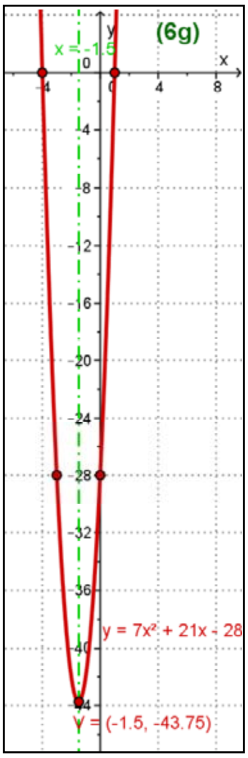


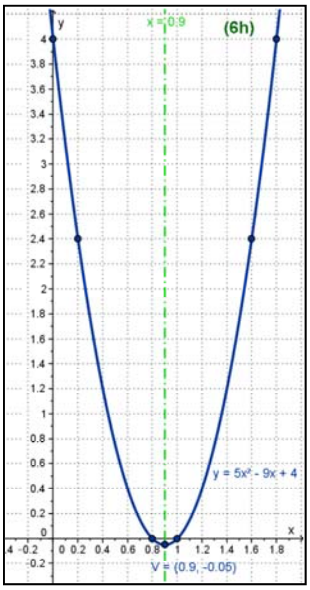

(6c)
x = 1
y = -2x² + 4x - 2

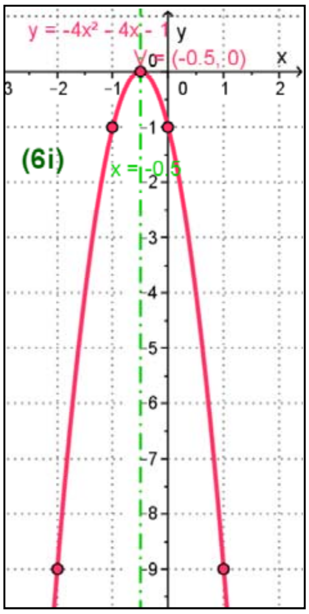

(6d)
x = -1.25
y = 2x² + 5x - 12
V = (-1.25, -15.13)


(6e)
x = -1
V = (-1, -12)
y = 3x² + 6x - 9

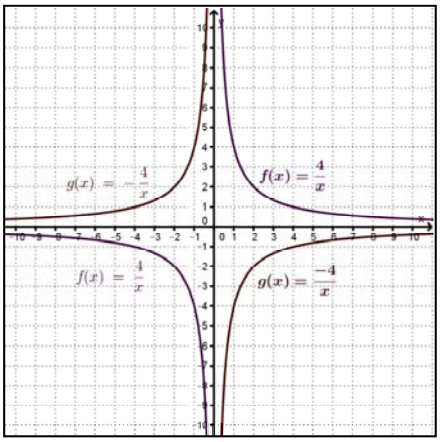

(6f)
V = (1.75, 9.13)
y = -2x² + 7x + 3
x = 1.75

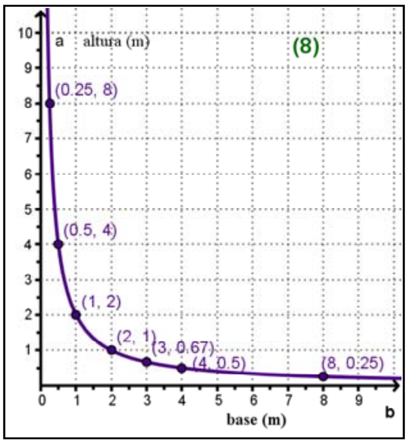

(6g)
x = -1.5
y = 7x² + 21x - 28
V = (-1.5, -43.75)

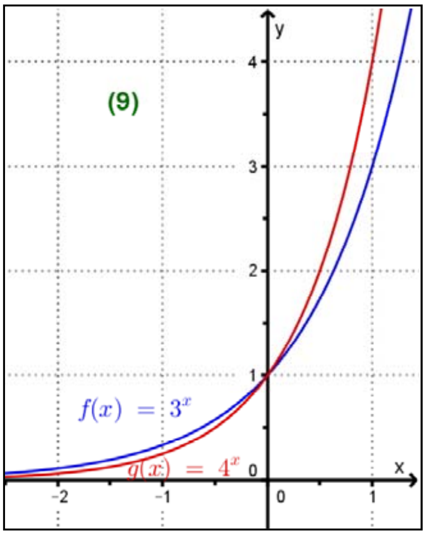

(6h)
x = 0.9
y = 5x² - 9x + 4
V = (0.9, -0.05)

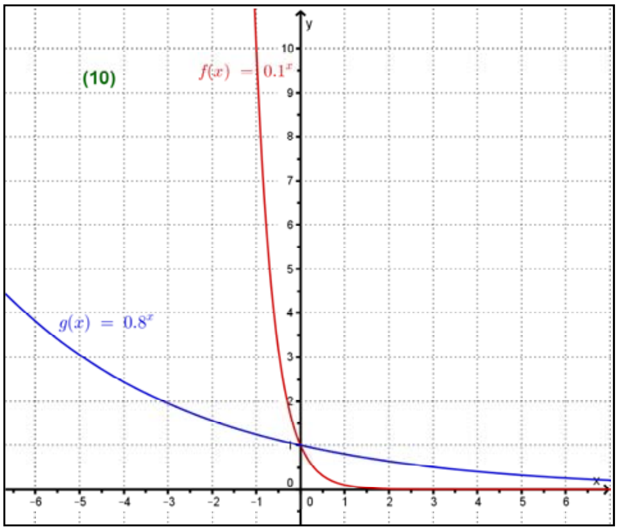

y = -4x² - 4x - 1
V = (-0.5, 0)
(6i)
x = -0.5

7


g(x) = -4/x
f(x) = 4/x
f(x) = 4/x
g(x) = -4/x


altura (m)
(8)
(0.25, 8)
(0.5, 4)
(1, 2)
(2, 1)
(3, 0.67)
(4, 0.5)
(8, 0.25)
base (m)





(11)

TVM en cada intervalo	[0,2]	[2,3]	[3,4]	[4,5]	[5,6]	[10,20]
$f(x)=x^2$	2	5	7	9	11	30
$g(x)=2^x$	1,5	4	8	16	32	104755,2

(12) (a) $a_1 = 3,\quad a_2 = 9,\quad a_3 = 19,\quad a_4 = 33$ **(b)** $b_1 = 1,\quad b_2 = \frac{7}{6},\quad b_3 = \frac{11}{9},\quad b_4 = \frac{5}{4}$

(c) $c_1 = 1,\quad c_2 = 8,\quad c_3 = 29,\quad c_4 = 92$ **(d)** $d_1 = 2,\quad d_2 = 5,\quad d_3 = 12,\quad a_4 = 29$

(13) (a) $a_n = (-1)^n$ **(b)** $b_n = 2n$ **(c)** $c_n = n^2$ **(d)** $d_n = \frac{n}{n+1}$

(14a) $a_n = 3n$**;** $a_1 = 3,\quad a_2 = 6,\quad a_3 = 9,\quad a_4 = 12,\quad a_5 = 15$**;** $a_{20} = 60$

(14b) $b_n = 2-2n$**;** $b_1 = 0,\quad b_2 = -2,\quad b_3 = -4,\quad b_4 = -6,\quad b_5 = -8$**;** $b_{20} = -38$

(14c) $c_n = \frac{n+1}{3}$**;** $c_1 = \frac{2}{3},\quad c_2 = 1,\quad c_3 = \frac{4}{3},\quad c_4 = \frac{5}{3},\quad c_5 = 2$**;** $c_{20} = 7$

(15a) $a_n = 3^n$**;** $a_1 = 3,\quad a_2 = 9,\quad a_3 = 27,\quad a_4 = 81,\quad a_5 = 243$**;** $a_{20} = 3486784401$

(15b) $b_n = 1000\cdot 0{,}1^{n-1}$**;** $b_1 = 1000,\quad b_2 = 100,\quad b_3 = 10,\quad b_4 = 1,\quad b_5 = 0{,}1$**;** $b_{20} = 10^{-16}$

(15c) $c_n = 3^{6-n}$**;** $c_1 = 243,\quad c_2 = 81,\quad c_3 = 27,\quad c_4 = 9,\quad c_5 = 3$**;** $c_{20} = 3^{-14} \approx 2\cdot 10^{-7}$

(16a) Progresión aritmética; $a_n = 39 - 7n$; $a_{15} = -66$

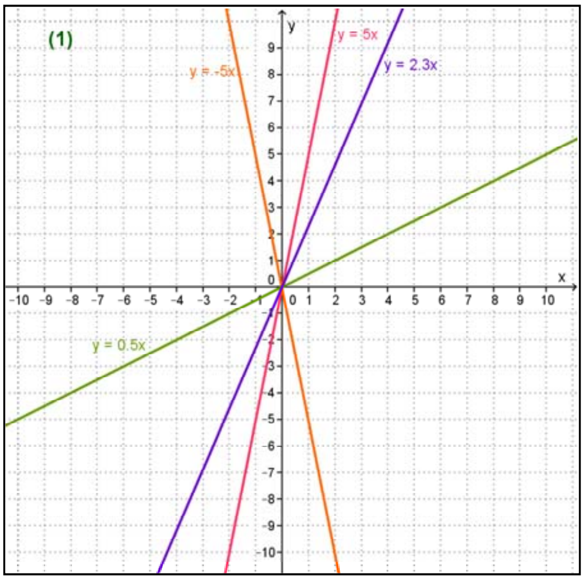
(16b) Progresión geométrica; $b_n = 2^{n-5}$; $a_{15} = 1024$

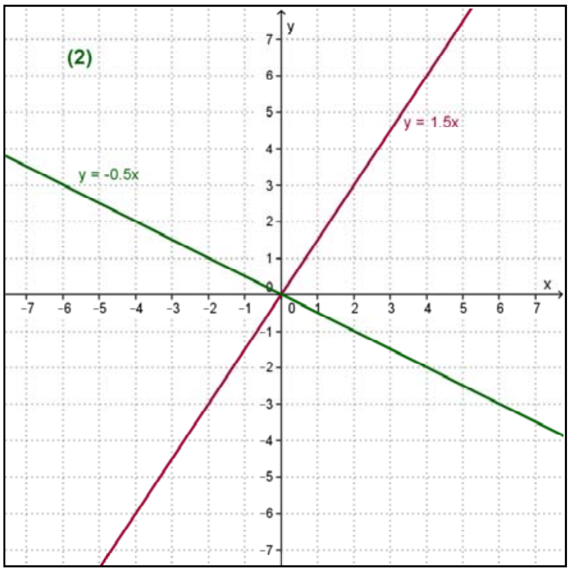
(16c) $c_n = \frac{1}{n^2}$; $a_{15} = \frac{1}{225} = 0{,}00\overset{\frown}{4}$; No es progresión aritmética ni geométrica.

(16d) Progresión geométrica; $d_n = -5\cdot 0{,}1^{n-1}$; $d_{15} = -5\cdot 10^{-4}$

(16e) Progresión aritmética; $e_n = \frac{n+6}{8}$; $e_{15} = \frac{21}{8}$

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS



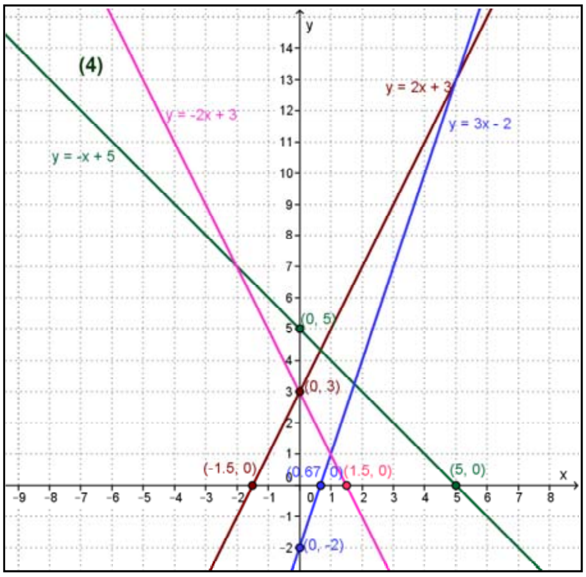


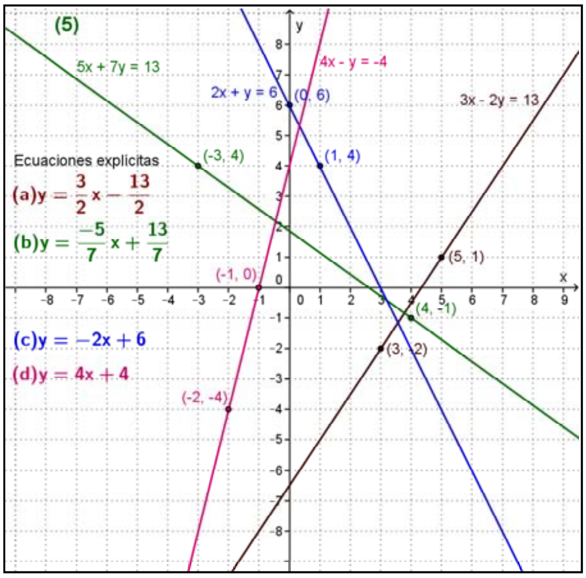
(2a) Creciente

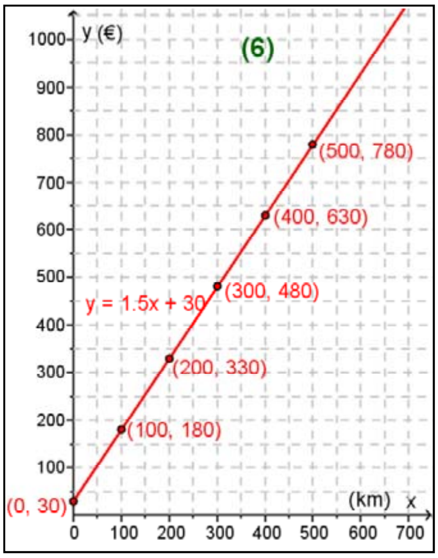
(2b) Decreciente

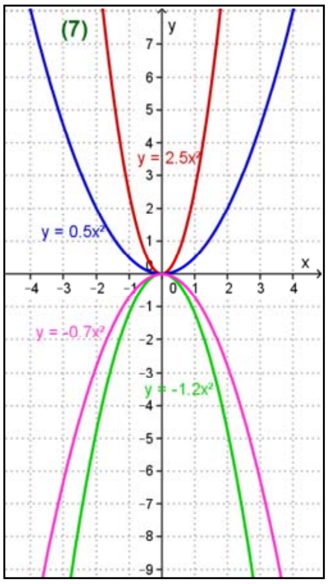
(3) $y = 4x$

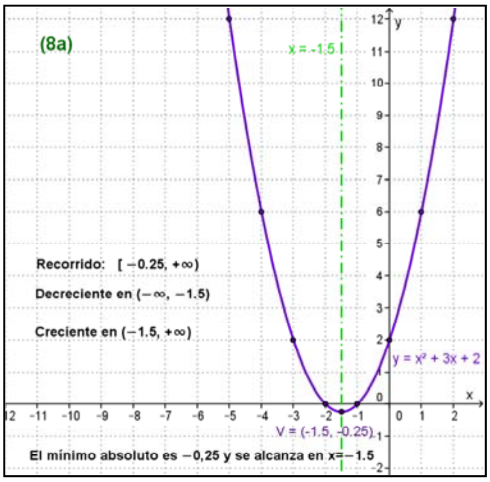
Función creciente

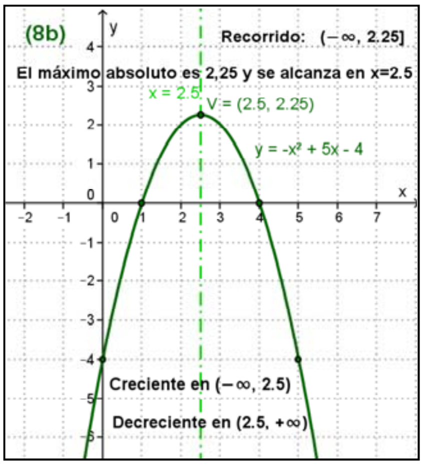


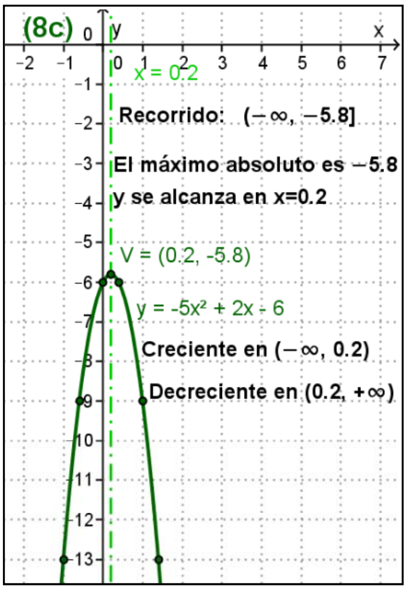


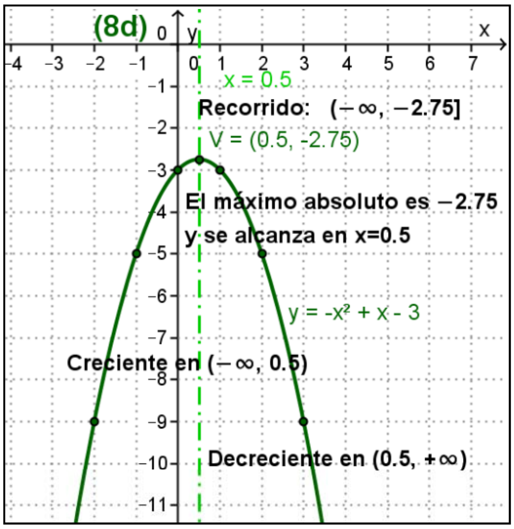


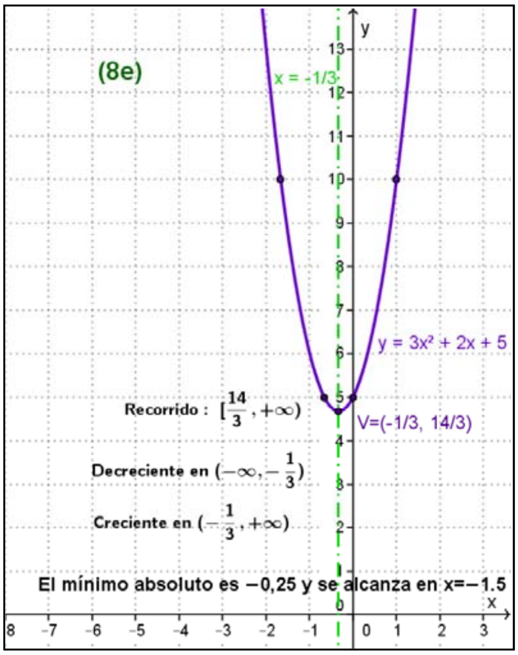


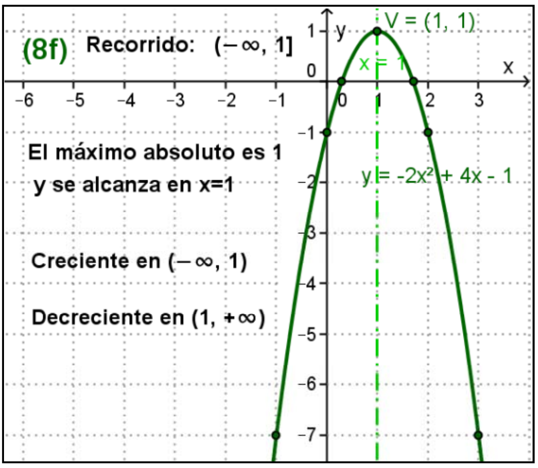

(8a)
x = -1.5
Recorrido: [−0.25, +∞)
Decreciente en (−∞, −1.5)
Creciente en (−1.5, +∞)
y = x² + 3x + 2
V = (-1.5, -0.25)
El mínimo absoluto es −0,25 y se alcanza en x=−1.5

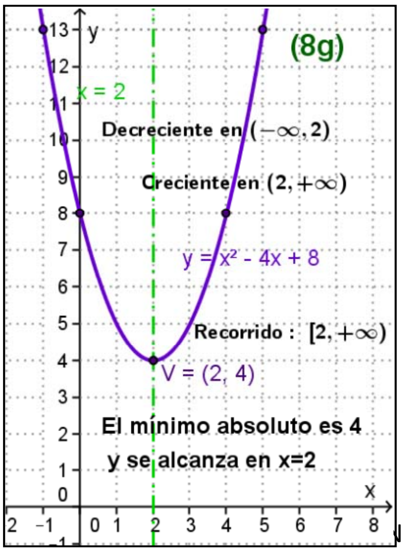

(8b)
Recorrido: (−∞, 2.25]
El máximo absoluto es 2,25 y se alcanza en x=2.5
x = 2.5
V = (2.5, 2.25)
y = -x² + 5x - 4
Creciente en (−∞, 2.5)
Decreciente en (2.5, +∞)

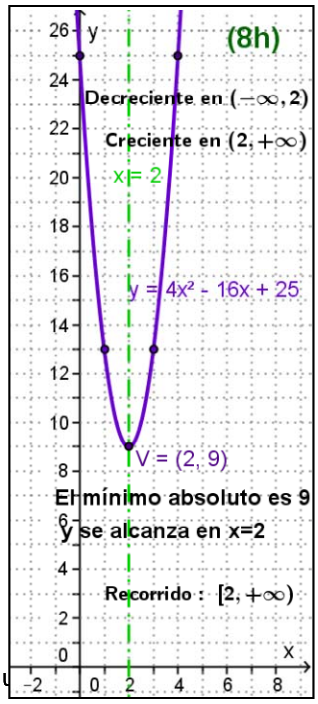

(8c)
x = 0.2
Recorrido: (−∞, −5.8]
El máximo absoluto es −5.8
y se alcanza en x=0.2
V = (0.2, -5.8)
y = -5x² + 2x - 6
Creciente en (−∞, 0.2)
Decreciente en (0.2, +∞)


(8d)
x = 0.5
Recorrido: (−∞, −2.75]
V = (0.5, -2.75)
El máximo absoluto es −2.75
y se alcanza en x=0.5
y = -x² + x - 3
Creciente en (−∞, 0.5)
Decreciente en (0.5, +∞)


(8e)
x = -1/3
y = 3x² + 2x + 5
Recorrido : [14/3, +∞)
V=(-1/3, 14/3)
Decreciente en (−∞, −1/3)
Creciente en (−1/3, +∞)
El mínimo absoluto es −0,25 y se alcanza en x=−1.5


(8f)
Recorrido: (−∞, 1]
V = (1, 1)
x = 1
El máximo absoluto es 1
y se alcanza en x=1
y = -2x² + 4x - 1
Creciente en (−∞, 1)
Decreciente en (1, +∞)


(8g)
x = 2
Decreciente en (−∞, 2)
Creciente en (2, +∞)
y = x² - 4x + 8
Recorrido : [2, +∞)
V = (2, 4)
El mínimo absoluto es 4
y se alcanza en x=2

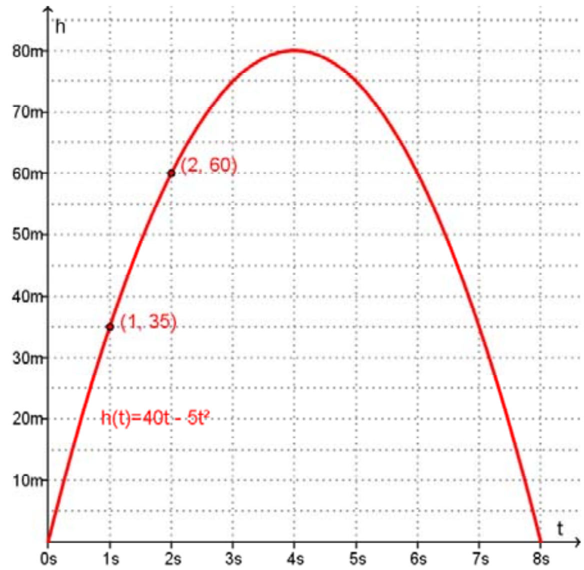

(8h)
Decreciente en (−∞, 2)
Creciente en (2, +∞)
x = 2
y = 4x² - 16x + 25
V = (2, 9)
El mínimo absoluto es 9
y se alcanza en x=2
Recorrido : [2, +∞)

(9)

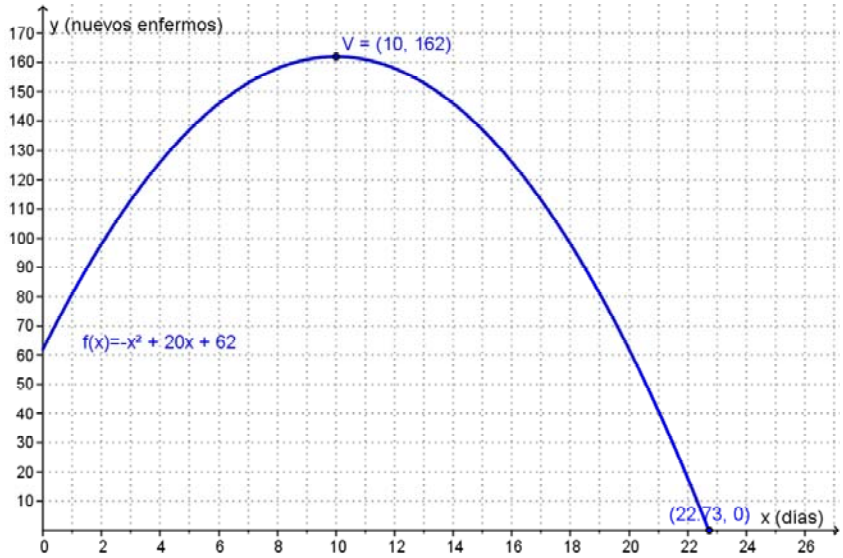
a) Al cabo de 1 segundo se encuentra a 35 m de altura y después de 2 segundos a 60 m de altura.

b) A los 8 segundos

c) La altura máxima es 80 metros y se alcanza a los 4 segundos.



(10)



a) A los 10 días

b) 162 personas

c) En el 23º día

(11) Relación de proporcionalidad inversa

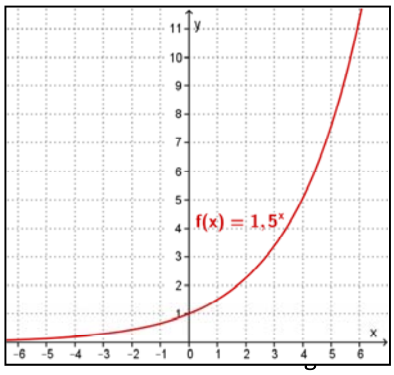
x (número de personas que pagan la excursión)	10	20	30	40	45	60
y (precio por persona)	54	27	18	13,50	12	9

$$y = f(x) = \frac{540}{x}$$

(12) La TVM en [0,1] es 0,5

La TVM en [2,3] es 1,125

La TVM en [5,6] es aproximadamente 3,8



(13) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

(14) **(a)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ **(b)** $b_n = (-1)^n \cdot 2n$

(15) 3,73; 3,77; 3,81; 3,85; 3,89; 3,93; 3,97; 4,01 $a_n = 3{,}69 + 0{,}04n$ $a_{37} = 5{,}17$

(16) 125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; 0,2048 $a_n = 125 \cdot 0{,}4^{n-1}$ $a_{20} \approx 0{,}000001$

(17) **(a)** $5, 0, -5, -10, -15$. Es una progresión aritmética de diferencia −5

(b) $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}$

(c) $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27. Es una progresión geométrica de razón 3

(d) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

(18) **(a)** $a_n = 1{,}1n + 2{,}2$ $a_{10} = 13{,}2$

(b) $b_n = n - \frac{3}{4}$ $b_{10} = \frac{37}{4}$

(c) $c_n = 0{,}25 \cdot 3^{n-1}$ $c_{10} = 4920{,}75$

(d) $d_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ $d_{10} = -1536$

Módulo de Matemáticas Aplicadas II

Nivel II de ESPAD

Unidad 8
Estadística y Probabilidad

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico (en las modalidades “enseñanzas académicas” y “enseñanzas aplicadas”) del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017).

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

7 Estadística. Azar y probabilidad. 4ºA ESO. Autores: María Molero y Andrés García Mirantes.

También se han tomado ideas y ejemplos del libro “THE CARTOON GUIDE TO STATISTICS” de LARRY GONICK & WOOLLCOTT SMITH.

ÍNDICE

1. ESTADÍSTICA

1.1. Estudios estadísticos. Población y muestra

Si queremos hacer un estudio estadístico tenemos que:

a) Recoger los datos.

b) Describir esos datos con tablas y gráficas, cálculo de parámetros estadísticos…

c) Extraer conclusiones.

Para recoger los datos y determinar los valores de la variable se puede utilizar a toda la población, todo el universo sobre el que se realiza el estudio, o seleccionar una muestra. En muchas ocasiones no es conveniente recoger valores de toda la población, porque es complicado o demasiado costoso, o incluso porque es imposible, como en el caso de un control de calidad, en que se destruya el objeto a analizar. La parte de la Estadística que se ocupa de cómo seleccionar adecuadamente las muestras se denomina **Teoría de Muestras**.

Población o universo es todo el conjunto de individuos sobre el que se realiza el estudio estadístico.

Una **muestra** es un subconjunto representativo de esa población.

Cada uno de los elementos de la población es un **individuo**.

Las características de la población que se estudian se denominan **variables estadísticas**, que se clasifican en **cuantitativas** y **cualitativas** según que los valores que tomen sean o no numéricos. Las variables cuantitativas que toman valores aislados se denominan **variables discretas** y las que pueden tomar cualquier valor de un intervalo de la recta real, **variables continuas**.

La parte de la Estadística que ordena, analiza y representa un conjunto de datos para describir sus características se denomina **Estadística Descriptiva**. Para extraer conclusiones se utilizan probabilidades y la parte de la Estadística que se ocupa de ello es la **Inferencia Estadística**.

Ejemplos:

- Si queremos conocer las preferencias en deportes del alumnado del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas,, es posible preguntar a toda la población (alumnado del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas,), aunque es adecuado elegir una muestra representativa, seleccionando a algunos estudiantes. En este estudio sobre preferencias deportivas, la variable utilizada es cualitativa (los valores de la variable pueden ser: fútbol, baloncesto, tenis…)
- Para conocer la intención de voto ante unas elecciones se utilizan muestras, pues preguntar a toda la población sería muy costoso (y eso ya se hace en las elecciones). La variable en este caso también es cualitativa (los valores posibles son los distintos partidos políticos que se presentan).
- Si una fábrica quiere conocer las horas de vida útil de una bombilla, una nevera, un camión… no puede poner a funcionar a toda la población, (todas las bombillas o neveras o camiones…) hasta que se estropeen pues se queda sin producción. En este caso es imprescindible seleccionar una muestra. La variable en este caso es cuantitativa, y el tiempo puede tomar cualquier valor real, es una variable cuantitativa continua.
- Si se hace un estudio sobre el número de personas que habitan las viviendas de una ciudad, se trata de una variable cuantitativa discreta (los valores posibles son números naturales).

1.2. Variable discreta. Tablas y gráficos

Al hacer un estudio estadístico o realizar un experimento aleatorio la información obtenida se resume en una tabla o distribución de frecuencias.

Posibles resultados	Frecuencia absoluta
Les gusta	28
No les gusta	12
Total	40

Ejemplo:

- *Preguntamos a 40 personas si les gusta, o no, el fútbol. En la tabla del margen reflejamos los resultados. Es una tabla de frecuencias absolutas.*

Al dividir la frecuencia absoluta entre el número total de individuos de la muestra tenemos la frecuencia relativa, así la frecuencia relativa de los que les gusta el fútbol es 28/40 = 0,7 o el porcentaje, 70 %, y la de los que no les gusta el futbol es 12/40 = 3/10 = 0,3 o el porcentaje 30 %.

La **frecuencia absoluta** de un resultado es el número de veces que se ha obtenido ese resultado.

La **frecuencia relativa** se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de datos.
La suma de las frecuencias relativas es siempre igual a 1 (100 %).

Posibles resultados	Frecuencias relativas	Porcentaje
Les gusta	0,7	70 %
No les gusta	0,3	30 %
Suma total	1	100 %

Actividad resuelta

- *Se han obtenido los datos sobre el número de visitas que se han hecho a la web de los Textos Marea Verde de Matemáticas en los meses indicados, y se han reflejado en una tabla. Haz una tabla de frecuencias absolutas, relativas y porcentajes, de frecuencias acumuladas absolutas y de frecuencias relativas acumuladas.*

Marea verde	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas	Porcentajes	Frecuencias acumuladas absolutas	Frecuencias acumuladas relativas
Septiembre	1834	0,51	51	1834	0,52
Octubre	956	0,26	26	2790	0,77
Noviembre	432	0,12	12	3222	0,89
Diciembre	389	0,11	11	3611	1
TOTAL	3611	1	100		

Observa que las **frecuencias acumuladas** se obtienen sumando la frecuencia anterior e indica, en este ejemplo, el número de visitas hasta ese momento.

Actividades propuestas

Resultados	Frecuencias absolutas
1	17
2	12
3	17
4	15
5	21
6	14

1. Copia y completa la siguiente tabla de frecuencias absolutas de los valores obtenidos al tirar un dado, con las frecuencias relativas y porcentajes, y con frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias acumuladas relativas.

Las **representaciones gráficas** ayudan a comprender el significado de los datos.

Dada una tabla de frecuencias (absolutas, relativas, porcentajes, acumuladas absolutas o acumuladas relativas) para representar un **diagrama de rectángulos o de barras** se traza para cada valor de la variable un rectángulo o barra de altura proporcional a la frecuencia que se esté representando.

Si se unen los puntos medios de los extremos superiores de las barras tenemos un **polígono de frecuencias relativas o diagrama de líneas**.

En un **diagrama de sectores** se dibuja un círculo que se divide en sectores de amplitudes proporcionales a las frecuencias.

Actividad resuelta

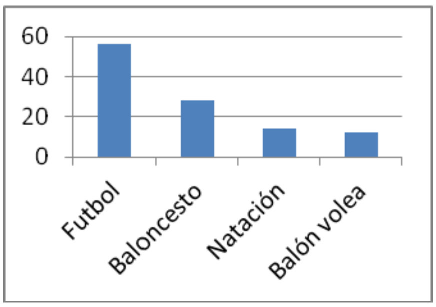
- *Tenemos un estudio estadístico sobre las preferencias deportivas del alumnado* del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas, *de un determinado centro. Represéntalos en un diagrama de barras de frecuencias absolutas, en un polígono de frecuencias relativas y en un diagrama de sectores (calcula previamente la medida angular en grados de cada sector)*

Deporte	Frecuencia Absoluta
Fútbol	56
Baloncesto	28
Natación	14
Balón volea	12
TOTAL	110

El número total de datos es 110. Calculamos las frecuencias relativas y las multiplicamos por 360° para obtener los grados de cada sector:

Deporte	Fútbol	Baloncesto	Natación	Balón volea
Ángulo del sector	$\frac{56}{110}\cdot 360° \approx 183°$	$\frac{28}{110}\cdot 360° \approx 92°$	$\frac{14}{110}\cdot 360° \approx 46°$	$\frac{12}{110}\cdot 360° \approx 39°$

Diagrama de barras de frecuencias absolutas



Polígono de frecuencias relativas o diagrama de líneas

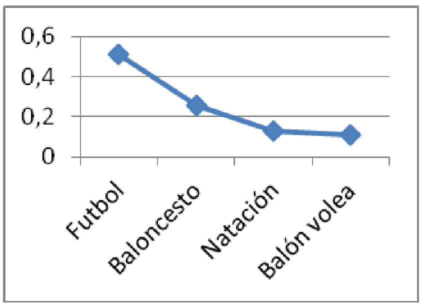
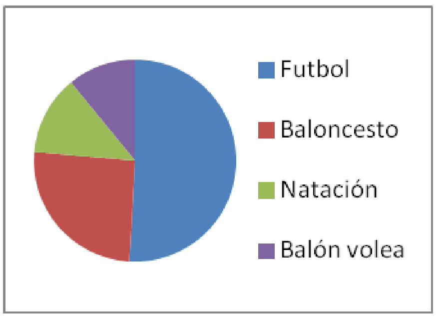


Diagrama de sectores



1.3. Parámetros de centralización

Los parámetros de centralización dan información sobre el "*centro*" de un conjunto de datos cuantitativos. Estudiamos la media aritmética, la moda y la mediana.

Para calcular la **media** ($\bar{x}$) de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se suman todos y se divide por el número total de datos (n).

$$\textbf{Media} = \bar{x} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$$

La **moda** (***mo***) de una distribución de frecuencias es el valor más frecuente.

La **mediana** (***me***) es el valor central que deja por debajo el mismo número de valores de la variable que por encima (con datos ordenados de menor a mayor).

Actividad resuelta

- *Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas: 8, 4, 6, 10 y 10. Calcula su media, su moda y su mediana.*

Su nota media se calcula sumando todas las notas: 8 + 4 + 6 + 10 + 10 = 38, y dividiendo la suma entre el número total de notas que es 5: 38/5 = 7,6.

La moda es 10 pues es el valor más frecuente.

Una forma de calcular la mediana es ordenar los valores de menor a mayor, y si el número de datos es impar, el valor central es la mediana. Si el número de datos es par, la mediana es la media de los dos datos centrales.

En nuestro caso: $4 \leq 6 \leq \mathbf{8} \leq 10 \leq 10$, por lo que la mediana es 8.

Actividades propuestas

2. Dadas las temperatura en una ciudad a una hora determinada el día 1 de cada mes se tiene la siguiente tabla:

MES	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura (° C)	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

Calcula la temperatura media, la moda y la mediana.

3. Calcula la media, la mediana y la moda de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

Observa en cada caso cómo influyen los valores extremos. ¿Influyen en la moda? ¿Y en la mediana? ¿Y en la media?

Actividad resuelta

- *En una clase de 40 alumnos las calificaciones han sido:*

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Suma**
f_i	1	2	0	1	2	8	7	6	6	4	3	**40**

A cada nota la llamamos x_i y a la frecuencia absoluta de esa nota: f_i. Esto significa que ha habido un cero, dos unos, ningún 2… y 3 dieces.

Para calcular la media aritmética añadimos a la tabla una fila con los productos $x_i \cdot f_i$ y sumamos esa fila:

$x_i \cdot f_i$	0	2	0	3	8	40	42	42	48	36	30	**251**

Al ser 40 el número total de estudiantes la media es: **Media** = $\bar{x}$ = 251 / 40 = 6,275.

Si la variable estadística toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con una frecuencia absoluta $f_1, f_2, \ldots, f_n$, para calcular la **media** se multiplica cada valor por su frecuencia absoluta, se suman dichos productos y se divide por n el total de valores de la variable:

$$\textbf{media} = \bar{x} = (x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n) / (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$$

La formula anterior se resume, utilizando el símbolo sumatorio ∑ en la siguiente:

$\bar{x} = \dfrac{\sum_i x_i \cdot f_i}{N}$ donde $N = \sum_i f_i$ es el tamaño de la muestra o número total de individuos.

La **moda** es la nota más frecuente, que es mo = 5 pues es la de mayor frecuencia.

La **moda** es el valor de la variable estadística que tiene la frecuencia más alta.

Puede ocurrir que una distribución de frecuencias tenga más de una moda. Por ejemplo, la distribución:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	10	9	10	8	7	10

tiene 3 modas, 1, 3 y 6, ya que el valor más alto de la frecuencia absoluta es 10 en los tres casos.

Para calcular la **mediana** añadimos una nueva fila, la de las frecuencias acumuladas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencias acumuladas	1	3	3	4	6	14	21	27	33	37	40

La mitad de los datos es 40/2 = 20, y como 14 < 20 < 21, la mediana es 6.

Para obtener la **mediana** se calculan las frecuencias acumuladas y se busca el valor de la variable que ocupa el lugar central N/2.

Actividades propuestas

4. Se ha lanzado un dado 100 veces y se ha confeccionado la siguiente tabla de frecuencias absolutas:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	18	16	14	16	16	20

a) Calcula la media, moda y mediana.

b)

5. Lanzamos 2 dados y sumamos los valores obtenidos. Repetimos el experimento 1000 veces y obtenemos las siguiente tabla de frecuencias absolutas.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	24	65	73	81	158	204	148	79	68	59	41

a) Calcula la media, la mediana y la moda.

6. Calcular la media, la mediana y la moda de la siguiente tabla de frecuencias absolutas, que indica el número de hijos que tienen 200 familias entrevistadas:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_i	14	65	73	27	9	6	2	1	0	2	1

1.4. Parámetros de dispersión

Los parámetros de dispersión muestran cómo están de dispersos o alejados del centro los datos de un estudio estadístico (en general ese centro es la media aritmética de la distribución).

El **recorrido** es la diferencia del valor máximo menos el valor mínimo. Aunque es una medida muy fácil de calcular, en la mayoría de los casos no es una medida muy significativa.

El parámetro más utilizado como medida de la dispersión de los datos es la desviación típica (o desviación estándar) que se define a partir de otro parámetro llamado varianza. La **varianza** es la media de los cuadrados de las desviaciones de los valores de la variable estadística respecto a la media.

Varianza = $\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{N}$ o también **Varianza** = $\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N} - \overline{x}^2$

Desviación típica = $\sqrt{\text{var ianza}}$

Las dos fórmulas para calcular la varianza son equivalentes. La primera es la definición de la varianza como suma de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. La segunda es más cómoda de usar para realizar los cálculos, sobre todo cuando los valores de la variable son enteros y el valor de la media no.

Ya sabes que la mediana nos indica el valor de la variable que ocupa el lugar central. Se denomina **primer cuartil (Q1)** al valor de la variable que deja menores o iguales que él a la cuarta parte de los datos, (o un 25 %), (siendo por tanto las tres cuartas partes mayores o iguales que él). La mediana es el segundo cuartil, que deja por debajo la mitad de los datos o un 50 %. El **tercer cuartil (Q3)** es el valor de la variable que deja menores o iguales que él las tres cuartas partes de los datos o un 75 % (y mayores o iguales la cuarta parte). Se llama **intervalo intercuartil** (o recorrido intercuartílico) a la distancia entre el tercer y el primer cuartil (**Q3 – Q1**). Por lo que hemos dicho, en ese intervalo están la mitad de los datos.

Actividad resuelta

- *Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas: 8, 4, 6, 10 y 10. Calcula su recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.*

La mayor calificación ha sido un 10 y la menor un 4, luego el **recorrido** es 10 – 4 = 6.

Recorrido = Máximo – Mínimo.

La media ya la hemos calculado y es 7’6. Queremos analizar cómo las observaciones se separan de la media. Si a cada valor le restamos la media, unos salen positivos y otros negativos, y si sumamos todos, se compensan, por lo que sale 0. Es posible superar esa dificultad calculando esas diferencias en valor absoluto, o elevándolas al cuadrado. Si las elevamos al cuadrado, sumamos todo y dividimos por el número total de valores de la variable menos 1, obtenemos la varianza.

x_i	x_i – media	$(x_i$ – media$)^2$
8	0’4	0’16
4	-3’6	12’96
6	-1’6	2’56
10	2’4	5’76
10	2’4	5’76
Media = 7’6		Suma = 27’2

x_i	x_i^2
8	64
4	16
6	36
10	100
10	100
Suma = 38	Suma = 316

Si después calculamos la raíz cuadrada, se obtiene la desviación típica. Estamos evaluando la distancia de los valores de la variable a la media.

Si dividimos 27’2 entre 5 (N) se obtiene la **varianza = 5,44**.

Calculamos la raíz cuadrada de la varianza: **desviación típica = 2,33**.

En la tabla de la derecha se han dispuesto los cálculos para usar la fórmula alternativa para la varianza y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

Varianza = (316/5) – $(7'6)^2$ = 63’2 – 57’76 = 5’44.

Para calcular los cuartiles debemos ordenar los datos; 4 ≤ 6 ≤ 8 ≤ 10 ≤ 10.

1º	2º	3º	4º	5º
4	**6**	8	**10**	10

El primer cuartil deja por debajo la cuarta parte o el 25 % de los datos. Hay 5 datos y 5/4 = 1’25, como 1 < 1’25 < 2, el primer cuartil es 6. Q1 = 6. El tercer cuartil deja por debajo las tres cuartas partes o el 75 % de los datos: 3(5/4) = 3’75. Como 3 < 3’75 < 4, entonces Q3 = 10.

El intervalo intercuartil = Q3 – Q1 = 10 – 6 = 4.

Intervalo intercuartil = Q3 – Q1.

Actividades propuestas

7. Dadas las temperatura en una ciudad de un ejercicio anterior:

Meses	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Temperatura	–2	5	8	9	11	13	27	33	21	14	9	4

Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.

8. Calcula el recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil de las distribuciones siguientes:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000 b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10 c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 100, 200

1.5. Variable continua: intervalos y marcas de clase. Histogramas

Recuerda que las variables pueden ser cualitativas, si no son numéricas, o cuantitativas, que a su vez pueden ser discretas o continuas.

Por ejemplo: Si se hace un estudio estadístico sobre la población de estudiantes, se puede preguntar sobre la profesión de sus padres y madres, que es una variable cualitativa, sobre el número de hermanos, que es una variable cuantitativa discreta (nadie tiene 3,7 hermanos), o sobre el peso, la estatura, la calificación media… que son variables cuantitativas continuas.

Con las variables cuantitativas continuas, o las variables que toman muchos valores diferentes, tiene sentido agrupar los valores en intervalos o clases, para que sean más fáciles de manejar e interpretar.

Al valor central o punto medio del intervalo se le denomina **marca de clase**. Es el valor x_i que representa a todo el intervalo para el cálculo de la media y de la varianza.

La representación gráfica más adecuada es el **histograma** que es un diagrama de rectángulos en el que el área de cada rectángulo es proporcional a la frecuencia.

Actividad resuelta

- *Para realizar un estudio estadístico se han recogido los datos de los pesos de 40 estudiantes de un centro escolar y se han agrupado en intervalos como se muestra en la siguiente tabla de frecuencias absolutas:*

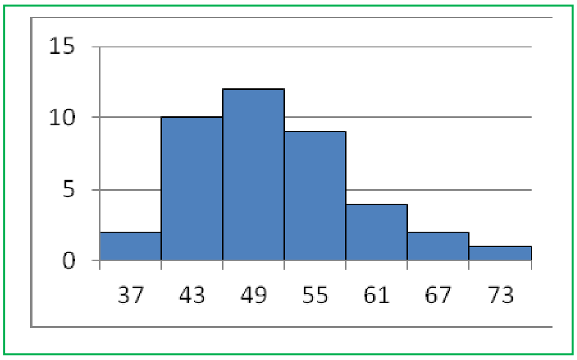
Peso (kg)	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
Estudiantes	2	10	12	9	4	2	1

La tabla nos dice que hay 2 estudiantes cuyo peso es mayor o igual a 34 kg y menor que 40 kg, 10 estudiantes cuyo peso es mayor o igual a 40 kg y menor que 46 kg, …

Calculamos las marcas de clase, buscando el punto medio de cada intervalo, que se obtiene sumando los extremos y dividiendo la suma entre 2: (40 + 34)/2 = 37. Todos los intervalos en este ejemplo tienen una longitud de 6. Escribimos la tabla con las marcas de clase y las frecuencias absolutas:

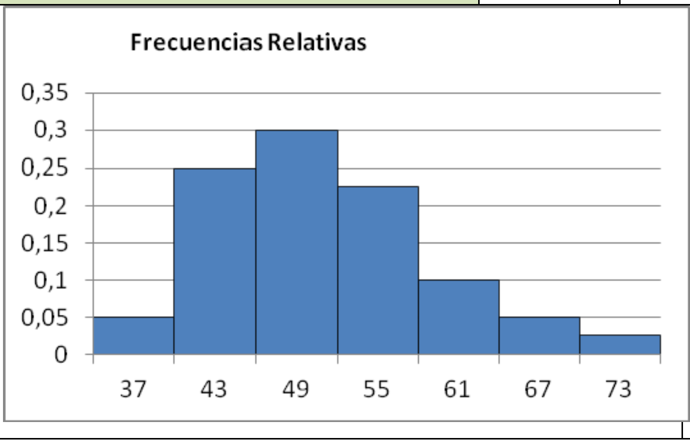
x_i	37	43	49	55	61	67	73
f_i	2	10	12	9	4	2	1

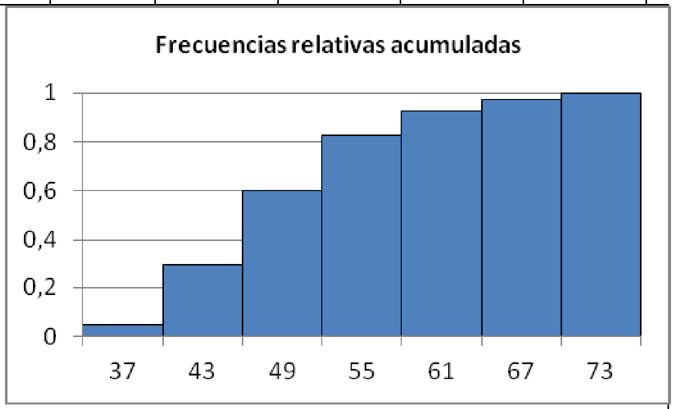
En este caso el histograma de las frecuencias absolutas es muy sencillo pues todos los intervalos tienen igual longitud. Si no fuera así, habría que calcular con cuidado las alturas de los rectángulos para que las áreas fueran proporcionales a las frecuencias.



Vamos a representar también el histograma de las frecuencias relativas y de las frecuencias relativas acumuladas:

x_i	37	43	49	55	61	67	73
Frecuencias relativas	0’05	0’25	0’3	0’225	0’1	0’05	0’025
Frecuencias relativas acumuladas	0’05	0’3	0’6	0’825	0’925	0’975	1





Cálculo de la media y la desviación típica

Procedemos de la forma que ya conocemos, calculando el producto de las marcas de clase por las frecuencias absolutas:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	**Suma**
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i \cdot f_i$	74	430	588	495	244	134	73	2038

La **media** es igual a 2038/40 = 50’95.

Para calcular la **desviación típica** restamos a cada marca de clase, la media, elevamos al cuadrado y multiplicamos por la frecuencia relativa:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	Suma
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$x_i - \bar{x}$	−13’95	−7’95	−1’95	4’05	10’05	16’05	22’05	
$(x_i - \bar{x})^2$	194’60	63’2025	3’8025	16’4025	101’0025	257’6025	486’2025	1122’8175
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$	389’20	632’025	45’63	147’62	404’01	515’205	486’2025	2619’9

La suma de los productos de los cuadrados de las desviaciones (diferencias de cada valor menos la media) por las frecuencias relativas correspondientes es 2619’9. Ahora dividimos entre N, 40, y se obtiene 65’5 que es la varianza. Calculamos la raíz cuadrada. La desviación típica es 8’09.

Si usamos la otra fórmula, $\text{varianza} = \dfrac{\sum_i x_i \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$ organizamos los cálculos de la siguiente forma:

x_i	37	43	49	55	61	67	73	Suma
f_i	2	10	12	9	4	2	1	40
x_i^2	1369	1849	2401	3025	3721	4489	5329	22183
$x_i^2 \cdot f_i$	2738	18490	28812	27225	14884	8978	5329	106456

Varianza = (106456/40) – (50’95)^2 = 2661’4 – 2595’9 = 65’5 y *desviación típica* = 8’09.

Cálculo de la mediana y los cuartiles

Calculamos las frecuencias absolutas acumuladas y vemos a qué intervalos corresponden las frecuencias absolutas acumuladas $n/2$ para la mediana, $n/4$ para el primer cuartil, y $3n/4$ para el tercero. En nuestro caso $n/2$= 20, $n/4$= 10 y $3n/4$=30.

Intervalos	[34, 40)	[40, 46)	[46, 52)	[52, 58)	[58, 64)	[64, 70)	[70, 76)
f_i	2	10	12	9	4	2	1
F_i	2	12	24	33	37	39	40

Observamos que 12 < 20 < 24, por lo que la mediana está en el intervalo [46, 52) cuya marca de clase es 49; como 2 < 10 < 12, el primer cuartil en el intervalo [40, 46) cuya marca de clase es 43, y como 24<30<33, el tercer cuartil está en el intervalo [52, 58) cuya marca de clase es 55.

Actividades propuestas

9. Se conocen las cantidades de residuos sólidos recogidos en m^3/semana durante 12 semanas de una urbanización: 23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24. Escribe una tabla de frecuencias absolutas con cuatro intervalos: [20, 25), [25, 30), [30, 35) y [35, 40). Calcula las marcas de clase. Dibuja el histograma de frecuencias absolutas. Calcula la media y la desviación típica. Calcula los intervalos de clase de la mediana y de los cuartiles.

2. AZAR Y PROBABILIDAD

2.1. Experimento aleatorio y sucesos

Se llama **experimento aleatorio** a todo experimento del que no se puede predecir el resultado porque depende del azar.

- Son ejemplos de experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda y anotar si sale cara o cruz.

b) Lanzar un dado y anotar el número de la cara superior.

c) Si en una urna hay bolas blancas y rojas, sacar una al azar y anotar el color.

d) Sacar una carta de una baraja y anotar de qué palo es.

e) Abrir un libro y anotar la página por la que se ha abierto.

Sin embargo, calcular el coste de una mercancía, sabiendo el peso y el precio por kg, no es un experimento aleatorio. Tampoco lo es calcular el coste del recibo de la luz sabiendo el gasto.

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

El conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina **espacio muestral**, E.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

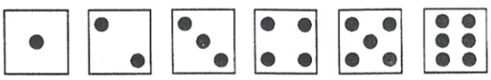
Cuando el suceso es un subconjunto de E formado por un solo resultado elemental, se llama suceso elemental. Cuando el suceso se compone de varios sucesos elementales se llama **suceso compuesto**.

Al realizar el experimento aleatorio queda determinada la ocurrencia o no ocurrencia de un suceso. Como veremos más adelante, a cada suceso se le asigna una probabilidad, un número entre 0 y 1, que mide "las posibilidades" de ocurrencia del suceso antes de realizar el experimento.

Ejemplos:

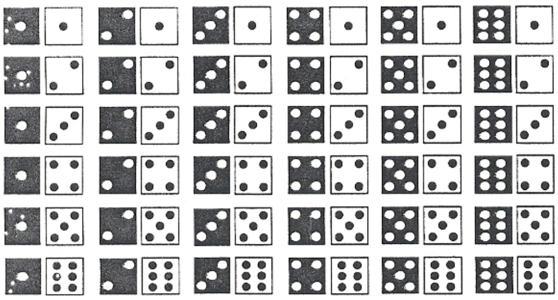
- *Los posibles resultados al tirar una moneda son que salga cara o salga cruz. El conjunto de sucesos elementales es* $E = \{cara, cruz\}$.
- *El conjunto de posibles resultados del experimentos aleatorio que consiste en sacar una bola, y anotar el color, de una bolsa en la que hay 9 bolas blancas y 5 negras es* $E = \{blanca, negra\}$.
- *El espacio muestral del experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y anotar el número de la cara superior es* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

  El suceso obtener par es $\{2, 4, 6\}$, *el suceso obtener impar es* $\{1, 3, 5\}$, *el suceso obtener múltiplo de 3 es* $\{3, 6\}$, *sacar un número menor que 3 es* {1, 2}.



- *Para el lanzamiento de un par de dados, supongamos que, por ejemplo, un dado es negro y el otro blanco, y en cada realización del experimento anotamos los resultados del negro y del blanco por este orden. El espacio muestral tiene 36 sucesos elementales.*

- *En el experimento "extraer una carta de una baraja española" el espacio muestral está formado por las cuarenta cartas, cada una de las cuales es un suceso elemental. El suceso "es un as" está compuesto por cuatro sucesos elementales y el suceso "es un oros" por diez.*



E ={(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1),
(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2),
(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3),
(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4),
(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5),
(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)}

Algunos sucesos compuestos del experimento aleatorio de tirar dos dados son:

A = *"los dados suman 3"*	*A* = {(1,2), (2,1)}	*suceso formado por 2 resultados elementales*
B = *"los dados suman 6"*	*B* = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}	*formado por 5 resultados elementales*
C = *"el dado blanco es 1"*	*C* = {(1,1), (2,1), (3;1), (4,1), (5,1), (6,1)}	*formado por 6 resultados elementales*
D = *"el dado negro es 1"*	*D* = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)}	*formado por 6 resultados elementales.*

- *Al lanzar dos monedas escribimos* el conjunto de posibles resultados de la siguiente forma: E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)} (C significa cara y + significa cruz). El suceso *sacar cero caras* es {(+, +)}, *sacar una cara* es el suceso {(C, +), (+, C)} y *sacar dos caras* {(C, C)}.

El conjunto de todos los sucesos que pueden definirse para el espacio muestral de un experimento aleatorio recibe el nombre de **Espacio de Sucesos**, y lo designaremos por $\boldsymbol{S}$. Si el espacio muestral, $\boldsymbol{E}$, tiene n elementos, $\boldsymbol{S}$ está formado por 2^n sucesos, entre los que hay que incluir dos sucesos muy especiales:

Suceso seguro. Se llama así al suceso que siempre se verifica en la realización del experimento. Es evidente que tiene que estar formado por todos los resultados elementales y, por tanto, coincide con el propio espacio muestral, $\boldsymbol{E}$.

Suceso imposible. Se llama así al suceso que no se verifica nunca en la realización del experimento y se designa por **Ø** (conjunto vacío porque no tiene ningún elemento).

Actividades propuestas

10. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio: "*Escribir en cinco tarjetas cada una de las vocales y sacar una al azar*".

11. En el juego de lotería, escribe el espacio muestral e indica dos sucesos distintos de los elementales respecto a la cifra de las unidades del primer premio.

2.2. Operaciones con sucesos

Lo bueno de usar sucesos, en lugar de resultados elementales, es que podemos combinar los sucesos para construir otros sucesos, usando operaciones lógicas. Las palabras clave son ***Y, O, NO*** equivalentes a las operaciones con conjuntos: intersección ($\cap$), unión ($\cup$) y complementario ($\overline{\ }$). Es decir, dados dos sucesos A y B, podemos definir nuevos sucesos mediante las siguientes operaciones con ellos:

Intersección de sucesos: A ***Y*** $B = A \cap B$ = "Los sucesos A y B ocurren a la vez".

El suceso $A \cap B$ (se lee "A intersección B") es el subconjunto de elementos del espacio muestral que pertenecen simultáneamente a A y a B). El suceso $A \cap B$ ocurre cuando lo hacen a la vez A y B.

Unión de sucesos: A ***O*** $B = A \cup B$ = "Ocurre el suceso A o el suceso B o ambos".

El suceso $A \cup B$ (se lee "A unión B") está formado por los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos). El suceso $A \cup B$ ocurre cuando lo hacen A o B o ambos.

Suceso contrario o complementario: ***NO*** $A = \overline{A} = E - A$= "El suceso A no ocurre" (La diferencia de conjuntos $E - A$ es el conjunto de elementos de E que no pertenecen a A).

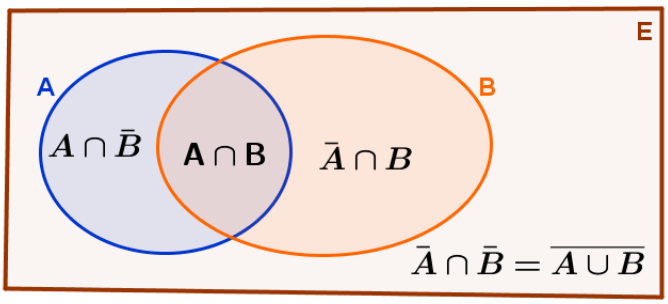
El suceso seguro y el suceso imposible son sucesos contrarios: $\overline{E} = \phi$ y $\overline{\phi} = E$.

El suceso contrario del contrario de A es, evidentemente, el propio suceso A: $\overline{\overline{A}} = A$.

Todo suceso A tiene suceso contrario $\overline{A}$ y se verifica que $A \cup \overline{A} = E$ y $A \cap \overline{A} = \phi$.

Se dice que A y B son **sucesos incompatibles** si no tienen ningún resultado elemental en común ($A \cap B = \phi$), por lo que no pueden verificarse simultáneamente en una realización del experimento. En caso contrario, es decir si $A \cap B \neq \phi$, se dice que A y B son **sucesos compatibles**.

El uso de diagramas de *Venn*, para representar los conjuntos que son los sucesos con líneas cerradas, es útil para visualizar los razonamientos en algunos problemas de probabilidad.



La imagen de la izquierda muestra dos sucesos A y B definidos en un espacio muestral E que se descompone como unión de cuatro sucesos (subconjuntos) incompatibles (disjuntos):

$A \cap \overline{B}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$ y $A \cup \overline{B}$.

Los sucesos A, B y su unión pueden descomponerse a su vez como unión de sucesos incompatibles:

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$.

Se define la diferencia de dos suceso A y B, como el suceso que se da cuando se da A y no B, de forma que podemos escribir con la notación de la diferencia los sucesos $A \cap \overline{B} = A - B$ y $\overline{A} \cap B = B - A$.

- ***Ejemplos*** *con el lanzamiento de dos dados:*

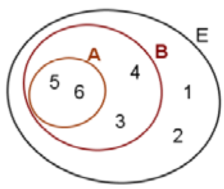
Si A es el suceso "dado blanco 1" (primera fila), y B es el suceso "dado negro 1" (primera columna):

(1,1)	*(2,1)*	*(3,1)*	*(4,1)*	*(5,1)*	*(6,1)*
(1,2)	*(2,2)*	*(3,2)*	*(4,2)*	*(5,2)*	*(6,2)*
(1,3)	*(2,3)*	*(3,3)*	*(4,3)*	*(5,3)*	*(6,3)*
(1,4)	*(2,4)*	*(3,4)*	*(4,4)*	*(5,4)*	*(6,4)*
(1,5)	*(2,5)*	*(3,5)*	*(4,5)*	*(5,5)*	*(6,5)*
(1,6)	*(2,6)*	*(3,6)*	*(4,6)*	*(5,6)*	*(6,6)*

$A \cup B$ es el área sombreada (en la que uno u otro dado es 1); $A \cap B$ es la superposición de las zonas sombreadas (en la que ambos dados son 1); $\overline{A}$ está formado por los sucesos que no están en la primera fila y $\overline{B}$ está formado por los sucesos que no están en la primera columna. $\overline{A \cup B}$ está formado por los sucesos que no están en la zona sombreada (ni en la primera fila ni en la primera columna); $\overline{A \cap B}$ está formado por todos los sucesos distintos del suceso (1,1).

- *Los sucesos C = "los dos dados suman 4" y D = "los dos dados suman 6" son incompatibles:* $C \cap D = \phi$
- *Los sucesos A = "dado blanco 1" y C = "los dos dados suman 4" son compatibles:* $A \cap C$ = {(3,1)}.

Se dice que un suceso A está **incluido** en otro suceso B, y se escribe $A \subset B$, cuando todos los elementos de A están en B, de forma que siempre que ocurre A, se da B. También se dice que A está contenido en B o que A implica B.



- **Ejemplo**: En el experimento aleatorio "lanzar un dado", el suceso A = "sacar mayor que 4" está incluido en el suceso B = "sacar mayor que 2":

$$A = \{5,6\} \qquad B = \{3, 4, 5, 6\} \qquad A \subset B.$$

2.3. Asignación de probabilidades a los sucesos elementales

Definir el concepto de probabilidad es una cuestión compleja. Entre las principales aproximaciones históricas a esta cuestión destacamos las siguientes (por su aplicación a muchos de los razonamientos que haremos en este tema):

Definición frecuentista de "probabilidad de un suceso"

Se basa en la ley de los grandes números, enunciada por *Jakob Bernouilli* (1654 - 1705) y que dice así: "La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un número a medida que el número de veces que se repite el experimento crece indefinidamente". Este número es a lo que se llama probabilidad del suceso.

Como comprobación experimental de la ley de los grandes números se propone realizar el experimento aleatorio de "lanzar al aire dos monedas iguales, anotando el número de caras que han salido" y repetir el experimento 100 veces. Si se va completando la siguiente tabla con las frecuencias relativas de los resultados "0 caras", "1 cara", "2 caras" después de 10 lanzamientos, después de 20 lanzamientos, etc., se puede ir viendo que cada una de estas frecuencias relativas se aproxima a un valor fijo (la probabilidad de cada resultado):

Nº de lanzamientos	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	→∞
Frecuencia relativa de "0 caras"											→0,25
Frecuencia relativa de "1 cara"											→0,5
Frecuencia relativa de "2 caras"											→0,25

Usaremos esta idea intuitiva de probabilidad como frecuencia relativa en muchos razonamientos. Es decir, entendemos como probabilidad de un suceso, la frecuencia relativa con la que ocurriría dicho suceso (a la larga) si el experimento se repitiese "muchísimas veces". Como tal frecuencia relativa, la probabilidad se puede expresar en forma de fracción, como número entre 0 y 1, o como porcentaje. Así, decimos que en el lanzamiento de dos monedas la probabilidad de sacar 2 caras es 1/4, o 0,25, o del 25 % y que la probabilidad de sacar 1 cara es 1/2 = 0,5 o 50 %.

Definición clásica de "probabilidad de un suceso" o regla de Laplace

Fue enunciada por *Pierre Simon*, marqués de *Laplace* (1749 - 1827) y dice así: "La probabilidad de un suceso es el cociente entre el número de casos favorables al suceso y el número de casos posibles (dando por supuesto que todos los casos posibles tienen las mismas posibilidades de ocurrencia)".

Si indicamos la probabilidad del suceso A por p(A) la regla de *Laplace* podría escribirse mediante la siguiente fórmula:

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Esta definición presenta un inconveniente: sólo puede aplicarse en aquellas situaciones en las que todos los casos posibles son igualmente probables (**equiprobables)**. Así, por ejemplo, nos sirve para asignar como probabilidad del suceso A = "sale 6" en el experimento de lanzar un dado, el valor p(A) = 1/6 (un caso favorable entre 6 casos posibles). Pero no nos sirve para asignar probabilidades a las distintas caras de un dado trucado. La forma de asignar probabilidades a los resultados elementales no equiprobables de este tipo de experimentos se basa en la definición frecuentista de probabilidad y consiste en realizar el experimento un número muy grande de veces, N, para asignar como valor aproximado de p(A) la frecuencia relativa de A. Cuanto mayor sea N, más preciso y fiable es el valor asignado a P(A).

$$p(A) = f_r(A) = \frac{n^o \text{ de veces que ha ocurrido } A}{n^o \text{ de veces que se ha realizado el experimento}}.$$

Ejemplos:

- La probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, pues sólo hay dos casos posibles {*cara*, *cruz*}, un único caso favorable, *cara*, y suponemos que la moneda no está trucada. Si sospecháramos que la moneda estuviera trucada para asignar esa probabilidad habría que tirar la moneda un montón de veces para observar hacia qué valor se acerca la frecuencia relativa de obtener cara.
- La probabilidad de que al cruzar la calle te pille un coche NO es 1/2, aunque sólo hay dos casos posibles, que te pille el coche y que no te pille. Para calcular esa probabilidad se recogen datos de peatones atropellados y se calcula utilizando las frecuencias relativas.
- La probabilidad de sacar una bola roja de una bolsa con 7 bolas rojas y 3 bolas blancas es 7/10.
- La probabilidad de que un bebé sea niña asignada con la regla de *Laplace* es 0,5, pero al hacer el estudio con las frecuencias relativas se ha visto que es 0,49.
- Si consideramos una baraja española de 40 cartas, antes de sacar ninguna carta todas ellas son igualmente factibles, y como puede salir una cualquiera de las 40 cartas decimos que la probabilidad, de por ejemplo, *sacar el caballo de copas* es 1/40, la de *sacar un oro* es 10/40, y la de un *as* es 4/40.

Actividades propuestas

12. Calcula la probabilidad de que al sacar una carta de la baraja de 40 cartas sea una figura (sota, caballo o rey).

13. Se ha lanzado un dado trucado 1000 veces y cada cara ha salido el número de veces indicado en la siguiente tabla:

resultado obtenido	1	2	3	4	5	6
nº de veces	48	95	144	192	238	283

Asigna una probabilidad a cada uno de los resultados elementales del experimento aleatorio que consiste en lanzar este dado trucado y anotar el número obtenido.

14. Halla la probabilidad de que la suma de los puntos de las caras visibles de un dado que se lanzó al azar sea múltiplo de 5.

15. Un jugador expresó a *Galileo* su sorpresa al observar que al jugar con tres dados, la suma 10 aparece con más frecuencia que la suma 9. Explica el porqué de su sorpresa calculando la probabilidad de cada suceso.

16. Se escuchan tres discos y se vuelven a guardar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los discos haya sido guardado en el envoltorio que le correspondía?

2.4. Probabilidad de un suceso. Propiedades de la probabilidad

A partir de la idea intuitiva de probabilidad de un suceso como frecuencia relativa con la que se produce el suceso cuando el número de realizaciones del experimento es muy grande, y teniendo en cuenta las propiedades de las frecuencias relativas, *Kolmogorov* enuncia la siguiente definición axiomática de probabilidad (que es la "oficial" en la matemática moderna):

Dado un experimento aleatorio, con espacio muestral E y espacio de sucesos S, se llama **probabilidad** a una aplicación que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S un número real, que llamamos probabilidad de A y representamos por p(A), que cumple los siguientes axiomas o condiciones:

1. $p(A) \geq 0$ (**No tiene sentido una probabilidad negativa**: *peor que imposible no es posible*)
2. $p(E) = 1$ (**La probabilidad del suceso seguro tiene que ser 1**)
3. **Si A y B son sucesos incompatibles ($A \cap B = \phi$), entonces** $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

De estas propiedades axiomáticas se deducen otras propiedades:

Probabilidad del suceso contrario: $\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

Demostración: Como $A \cup \overline{A} = E$ y $A \cap \overline{A} = \phi$ $\Rightarrow p(A) + p(\overline{A}) = p(E) = 1 \Rightarrow p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Probabilidad del suceso imposible: $\boxed{P(\phi) = 0}$ *(El suceso imposible NO puede ocurrir).*

Se demuestra a partir de la propiedad anterior porque $\overline{\phi} = E \Rightarrow p(\overline{\phi}) = 1 - p(E) = 1 - 1 = 0$.

Si $A \subset B \quad \Rightarrow \quad p(A) \leq p(B)$ (propiedad evidente a partir de la propiedad 3).

$\boxed{p(A) \leq 1}$ cualquiera que sea el suceso A (propiedad evidente a partir de la anterior).

Actividades resueltas

- *¿Cuál es la probabilidad de sacar un as en la baraja de 40 cartas? ¿Y de **no** sacar un as? ¿Y de sacar una copa? ¿Y de **no** sacar una copa?*

El suceso *no sacar un as* es el suceso **contrario** al de *sacar un as*. Cartas que no son ases hay 36, luego la probabilidad de no sacar as es 36/40 = 9/10. Se verifica que p(no as) = 1 – p(as).

La probabilidad de *sacar copa* es 10/40 y la de ***no** sacar copa* es 1 − 10/40 = 30/40 (o 3/4, o del 75 %).

Actividades propuestas

17. ¿Cuál es la probabilidad de *no* sacar un 5 al tirar un dado? ¿Y de *no* sacar un múltiplo de 3? ¿Y de *no* sacar un número menor que 2?

18. Al tirar una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara? ¿Y de sacar al menos una cara? Observa que sacar al menos una cara es el suceso contrario de no sacar ninguna cara.

Hemos visto que si A y B son dos sucesos incompatibles $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$. Cuando los sucesos son compatibles hay que usar una regla más general:

PROBABILIDAD DE LA UNIÓN (regla de la suma): $\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$

Esta regla general aplicada al caso particular de sucesos incompatibles se transforma en la anterior.

Ejemplos:

- *¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar una copa o un oro?*

  Hay 10 copas y 10 oros, y ninguna carta es a la vez copa y oro, luego la probabilidad es 20/40.

  Los sucesos C = "sacar una copa" y O = "sacar un oro" son incompatibles, $A \cap B = \phi$,

  $p(C) = \dfrac{10}{40}$, $p(O) = \dfrac{10}{40}$ y observamos que se verifica $p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

- *¿Cuál es la probabilidad de, en una baraja de 40 cartas, sacar un as o un oro?*

  Hay 4 ases y hay 10 oros, pero hay el *as de oros*, luego las cartas que son o bien un as o bien un oro son 13, luego la probabilidad es 13/40.

  Los sucesos A = "sacar un as" y O = "sacar un oro" son compatibles $A \cap O =$ {as de oros}:

  $p(A) = \dfrac{4}{40}$, $p(O) = \dfrac{10}{40}$ y $p(A \cup O) = p(A) + p(O) - p(A \cap O) = \dfrac{4}{40} + \dfrac{10}{40} - \dfrac{1}{40} = \dfrac{13}{40} = 0{,}325$.

Actividades resueltas

- *Calcula la probabilidad de sacar un basto o una figura.*

  Hay 10 bastos y hay 12 figuras, pero hay 3 figuras que son a la vez bastos (sota, caballo y rey), luego p(Basto o Figura) = 10/40 + 12/40 – 3/40 = 19/40 = 0,475.

Actividades propuestas

19. Lanzamos dos dados no trucados y anotamos los números de su cara superior. Consideramos el suceso A que la suma de las dos caras sea 8, y el suceso B que esos números difieran en dos unidades. Calcula a) p(A); b) p(B); c) p($A \cap B$); d) p($A \cup B$); e) p($A \cap \overline{B}$); f) p($\overline{A} \cap B$); g) p($\overline{A} \cap \overline{B}$).

La generalización a la unión de más de dos sucesos es sencilla si son **sucesos incompatibles dos a dos**:

$$Si\ A_i \cap A_j = \phi \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

La generalización de la regla de la suma cuando los sucesos no son incompatibles dos a dos no es tan sencilla, por eso es tan importante descomponer la unión en sucesos incompatibles.

Como consecuencia de la regla anterior se concluye que **la probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo forman**.

Para un experimento aleatorio con n sucesos elementales, E = {O_1, O_2, ..., O_n}, si P(Oi) designa la probabilidad del suceso Oi, se tiene que verificar que $P(O_1) + P(O_2) + \ldots + P(O_n) = 1$.

Cuando todos los resultados elementales del experimento aleatorio son **equiprobables** y se quiere calcular la probabilidad de un suceso compuesto, la regla de la suma se convierte en la **regla de Laplace,** ya que si todos los sucesos tienen la misma probabilidad, entonces $n\,P(O_i)=1 \Rightarrow P(O_i)=\frac{1}{n}$.

Si un suceso A está compuesto por m de estos sucesos elementales equiprobables, entonces:

$$\mathrm{P(A)}=\frac{1}{n}+\overset{\text{m sumandos}}{\dots}+\frac{1}{n}=\frac{m}{n}=\frac{\text{nº de elementos de A}}{\text{nº de elementos de E}}$$

Pero los sucesos elementales no tienen necesariamente la misma probabilidad.

Ejemplo:

- *Si se lanza un dado cargado para que 1 salga un 25 % de las veces (a la larga) y los otros resultados sean igualmente probables, el espacio muestral es el mismo que para un dado "justo", E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, pero ahora P(1) = 0,25 mientras que P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 0,15.*

  En este caso no podemos utilizar la regla de *Laplace* para calcular la probabilidad de un suceso.

  Por ejemplo, para calcular la probabilidad del suceso A = "sale impar", tenemos que utilizar la regla de la suma:

$$\mathrm{P(A)}=\mathrm{P}(\{1\})+\mathrm{P}(\{3\})+\mathrm{P}(\{5\})=0{,}25+0{,}15+0{,}15=0{,}55.$$

  (con este dado trucado el resultado sería impar el 55 % de las veces, a la larga).

2.5. Probabilidad condicionada

Nos acercaremos al concepto de probabilidad condicionada con un **ejemplo:**

- *Supongamos que cambiamos ligeramente el experimento aleatorio de lanzar dos dados (uno blanco y uno negro) y que lanzamos el dado blanco antes que el dado negro. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos dados sumen 3, suceso al que llamaremos A?*

Antes de lanzar el primer dado $p(A)=\frac{2}{36}$ porque A = {(1, 2), (2, 1)}.

Supongamos ahora que el dado blanco ha sido 1 (Suceso C) ¿Cuál es la probabilidad de A ahora?

A esta última probabilidad la llamamos la probabilidad condicionada de que ocurra el suceso A dada la condición de que el suceso C ya se ha producido. Escribimos p(A/C) y leemos "probabilidad de A dado C" o bien "probabilidad de A condicionada por C".

Antes de que se lanzara el primer dado, el espacio muestral tenía 36 resultados elementales, pero ahora que el suceso C ha ocurrido los posibles resultados deben pertenecer al espacio muestral reducido por C. En este espacio muestral reducido, compuesto por seis resultados elementales, sólo un resultado, (2, 1), suma 3. Por lo tanto, la probabilidad condicional es 1/6.

En general, para calcular la probabilidad condicional p(A/C) miramos el suceso A/C como parte del espacio muestral reducido por C. Esta última idea se plasma en una definición formal:

La probabilidad de A condicionada por C es: $\boxed{p(A/C) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(C)}}$

A partir de la definición se deducen algunas propiedades evidentes:

- P(A/A) = 1 (Una vez que A ocurre su ocurrencia es segura).
- Cuando A y C son incompatibles P(A/C) = 0 (Si ha ocurrido C es imposible la ocurrencia A).

En el ejemplo anterior: $$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo de elaboración y análisis de una tabla de contingencia

- *Se ha producido un acalorado debate entre dos institutos próximos sobre la dificultad de aprobar el bachillerato en cada uno de ellos. Para dilucidar la cuestión, ambos institutos dan a conocer el número de estudiantes que han aprobado 2º de bachillerato en las convocatorias de Junio de los últimos 5 años y el número total de estudiantes matriculados en cada una de las modalidades "bachillerato de Ciencias Sociales" y "bachillerato de Ciencia y Tecnología":*

BACHILLERATO DE CIENCIAS SOCIALES:

INSTITUTO 1: Estudiantes matriculados: 433 Estudiantes aprobados: 141

INSTITUTO 2: Estudiantes matriculados: 695 Estudiantes aprobados: 248

BACHILLERATO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA:

INSTITUTO 1: Estudiantes matriculados: 597 Estudiantes aprobados: 325

INSTITUTO 2: Estudiantes matriculados: 359 Estudiantes aprobados: 207

Con estos datos en la mano, el instituto 1 afirma que en su centro aprueba 2º de bachillerato un porcentaje de estudiantes superior al que aprueba en el instituto 2 y que por lo tanto la probabilidad de aprobar es mayor en su centro. Con los mismos datos, el instituto 2 afirma que el porcentaje de estudiantes aprobados en el bachillerato de Ciencias Sociales es mayor en su centro y que también es mayor el porcentaje de estudiantes aprobados en el bachillerato de Ciencia y Tecnología. Concluye, por lo tanto, que la probabilidad de aprobar el bachillerato de Ciencias Sociales es mayor en su centro, y que también es mayor la probabilidad de aprobar el bachillerato de Ciencia y Tecnología.

¿Es posible que ambos centros tengan razón? Se puede comprobar que así es, aunque parezca paradójico, completando las siguientes tablas de contingencia y calculando después las probabilidades que intervienen en el conflicto planteado:

INSTITUTO 1	***bachillerato CS***	***bachillerato CT***	***totales***
Aprobados	*141*	*325*	*466*
Suspensos	*292*	*272*	*564*
Totales	*433*	*597*	*1030*

INSTITUTO 2	*bachillerato CS*	*bachillerato CT*	*totales*
Aprobados	*248*	*207*	*455*
Suspensos	*447*	*152*	*599*
Totales	*695*	*359*	*1054*

- *¿Cuál es la probabilidad de aprobar si se cursa el bachillerato de Ciencias Sociales en cada uno de los institutos?*

  Se pide la probabilidad condicional del suceso A = "aprobar" *condicionada por el suceso* S = "cursar la modalidad de bachillerato de Ciencias Sociales"*, es decir, la frecuencia relativa de aprobados en el grupo reducido de estudiantes que cursan esta modalidad.*

  En el INSTITUTO 1: $P(A/S) = \dfrac{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CS y aprobados}}{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CS}} = \dfrac{141}{433} = 0{,}3256$

  (Aprueban el bachillerato de Ciencias Sociales un 33 % de los alumnos, aproximadamente).

  En el INSTITUTO 2: $P(A/S) = \dfrac{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CS y aprobados}}{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CS}} = \dfrac{248}{695} = 0{,}3568$.

  (Aprueban el bachillerato de Ciencias Sociales un 36 % de los alumnos, aproximadamente).

  La probabilidad de aprobar el bachillerato de Ciencias Sociales es mayor en el instituto 2.

- *¿Cuál es la probabilidad de aprobar si se cursa el bachillerato de Ciencia y Tecnología en cada uno de los institutos?*

  Ahora se pide la probabilidad del suceso A = "aprobar" *condicionada por el suceso* C = "cursar la modalidad de Ciencia y Tecnología"*, es decir, la proporción de alumnos aprobados en el grupo reducido de alumnos que cursan esta modalidad.*

  En el INSTITUTO 1: $P(A/C) = \dfrac{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CT y aprobados}}{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CT}} = \dfrac{325}{597} = 0{,}5444$.

  (Aprueban el bachillerato de Ciencia y Tecnología un 54% de los alumnos, aproximadamente)

  En el INSTITUTO 2: $P(A/C) = \dfrac{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CT y aprobados}}{N^{\circ} \text{ de alumnos del bachillerato CT}} = \dfrac{207}{359} = 0{,}5766$.

  (Aprueban el bachillerato de Ciencia y Tecnología un 58 % de los alumnos, aproximadamente).

  La probabilidad de aprobar el bachillerato de Ciencia y Tecnología es mayor en el instituto 2.

- *¿Cuál es la probabilidad de aprobar en cada instituto?*

  Ahora se piden la proporción de alumnos aprobados en el total de alumnos matriculados, sin diferenciar la modalidad de bachillerato.

  En el INSTITUTO 1: $P(A) = \dfrac{N^{\circ} \text{ de alumnos aprobados}}{N^{\circ} \text{ de alumnos total}} = \dfrac{466}{1030} = 0{,}4524$.

  (Aprueban 2º de bachillerato un 45 % de los alumnos, aproximadamente).

En el INSTITUTO 2: $P(A)=\dfrac{N^{o}\ de\ alumnos\ \ aprobados}{N^{o}\ de\ alumnos\ total}=\dfrac{455}{1054}=0{,}4316$.

(Aprueban 2º de bachillerato un 43 % de los alumnos, aproximadamente).

La probabilidad de aprobar 2º bachillerato es mayor en el instituto 1.

- *¿Cuál es la probabilidad de cursar el bachillerato CS y aprobar en el instituto1?*

Ahora se pide la proporción de alumnos que cursan esta modalidad y aprueban en el total de alumnos matriculados:

$$P(A\cap S)=\frac{N^{o}\ de\ alumnos\ \ del\ \ bachillerato\ CS\ \ y\ aprobados}{N^{o}\ de\ alumnos\ total}=\frac{141}{1030}=0{,}1369\,.$$

(Hacen bachillerato CS y lo aprueban un 14 % de los alumnos, aproximadamente).

- *¿Cuál es la probabilidad de cursar el bachillerato CS en el instituto1?*

Ahora se pide la proporción de alumnos de esta modalidad en el total de alumnos matriculados:

$$P(S)=\frac{N^{o}\ de\ alumnos\ \ del\ bachillerato\ CS}{N^{o}\ de\ alumnos\ total}=\frac{433}{1030}=0{,}4204\,.$$

(Hacen bachillerato CS un 42 % de los alumnos).

Comprobamos la fórmula dada como definición de probabilidad condicionada para el instituto 1:

$$\mathrm{P(A/S)}=\frac{\mathrm{P(A\cap S)}}{\mathrm{P(S)}}=\frac{\frac{141}{1030}}{\frac{433}{1030}}=\frac{141}{433}\,.$$

Actividades propuestas

20. Se está estudiando un tratamiento con un nuevo medicamento, para lo que se seleccionan 100 enfermos. A 60 se les trata con el medicamento y a 40 con un placebo. Los valores obtenidos se representan en la tabla adjunta

	Medicamento (M)	**Placebo (no M)**	**totales**
Curados (C)	50	30	80
No curados (no C)	10	10	20
totales	60	40	100

Calcula con estos datos :

a) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el medicamento.

b) La probabilidad de que un enfermo curado haya sido tratado con el placebo.

2.6. Probabilidad de la intersección. Independencia de sucesos

Despejando en la definición de la probabilidad condicionada , $p(C/A) = \frac{p(C \cap A)}{p(A)}$, la probabilidad de la intersección y teniendo en cuenta que $C \cap A = A \cap C$, se obtiene la regla de multiplicación para calcular la probabilidad de la intersección de dos sucesos:

$$\boxed{p(A \cap C) = p(A) \cdot p(C/A)}$$

Ejemplo:

- *Para calcular la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja española sean ambas reyes, se hace un razonamiento como el que sigue:*

  Nombramos los sucesos R_1 = "la primera carta es rey", R_2 = "la segunda carta es rey". Nos piden la probabilidad del suceso $R_1 \cap R_2$ = "la primera y la segunda carta son reyes". Aplicamos la regla del producto: $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = 0{,}0077$.

La regla del producto se generaliza de la siguiente manera para calcular la probabilidad de la intersección de más de dos sucesos:

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{n-1})}$$

Ejemplo:

- *La probabilidad de que al sacar cuatro cartas de una baraja española sean los cuatro reyes se calcula usando la regla del producto:*

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1) \cdot P(R_3 / R_1 \cap R_2) \cdot P(R_4 / R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{1}{37} = 0{,}00001$$

INDEPENDENCIA DE SUCESOS Y REGLA ESPECIAL DEL PRODUCTO

Se dice que A y C son dos **sucesos independientes** uno del otro si la ocurrencia de uno de ellos no tiene ninguna influencia en la probabilidad de ocurrencia del otro. *Por ejemplo, en el experimento aleatorio del lanzamiento de dos dados, el lanzamiento de un dado y su resultado no tiene ningún efecto en el lanzamiento del otro (a menos que estén pegados, magnetizados, etc.)*. En caso contrario, es decir, si la ocurrencia de un suceso influye en la probabilidad de otro, se dice que son **sucesos dependientes**.

En términos de probabilidad condicionada se puede dar la siguiente definición:

A y C son dos **sucesos independientes** si $p(A/C) = P(A)$ o, lo que es equivalente, $p(C/A) = P(C)$.

Cuando A y C son independientes tenemos una regla especial de multiplicación:

$$\boxed{p(A \cap C) = p(A) \cdot p(C) \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ y } C \text{ son independientes}}$$

La relación anterior se usa también para demostrar la independencia de dos sucesos A y B de los que se conocen o se pueden calcular $p(A)$, $p(B)$ y $p(A \cap B)$. En otras situaciones sabemos, por la naturaleza del experimento aleatorio, que los sucesos A y B son independientes, y entonces usamos la relación $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ para calcular la probabilidad de la intersección de A y de B como producto de las probabilidades de cada uno de los sucesos. Hay que tener muy presente que esta relación es un caso particular de la regla general del producto que solamente es aplicable cuando los sucesos son independientes.

La regla del producto se generaliza de manera obvia para la probabilidad de la intersección de n sucesos independientes entre sí:

$$\boxed{p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \ldots \cdot p(A_n) \quad si \ A_1, A_2, \ldots, A_n \quad son \quad independientes}$$

Ejemplo:

- *Tenemos una bolsa con 3 bolas rojas y 2 bolas negras.*

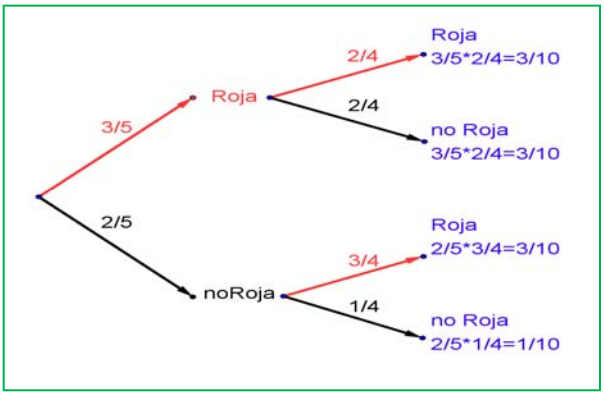
En el experimento aleatorio se sacar dos bolas de la bolsa, la probabilidad de que las dos sean rojas depende de si volvemos a meter en la bolsa la primera bola o si la dejamos fuera. En el primer caso decimos que es extracción **con reemplazamiento** y en el segundo, **sin reemplazamiento**.

La probabilidad de que la primera bola que se saca sea roja es 3/5. Si volvemos a meter la bola en la bolsa después de anotar el color, la probabilidad de sacar bola roja en la segunda extracción volverá a ser 3/5 (la probabilidad de esta segunda bola *no depende* de lo que hayamos sacado la primera vez). En este caso la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 3/5 · 3/5 = 9/25.

Pero si la primera bola ha sido roja y la dejamos fuera, ahora en la bolsa sólo hay 4 bolas y de ellas sólo quedan 2 bolas rojas, luego la probabilidad de que esa segunda bola sea roja es 2/4 (está condicionada por lo que hemos sacado antes).

La probabilidad de sacar dos bolas rojas sin reemplazamiento es: 3/5 · 2/4 = 6/20 = 3/10.

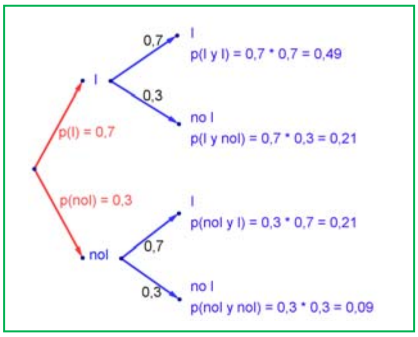
Observa el diagrama de árbol en el que se representan todas las posibilidades para la primera y la segunda extracción y dónde se escribe cada probabilidad.



La probabilidad de sacar primero una bola roja y luego una bola negra (no roja) es 3/5 · 2/4 = 3/10 pues después de sacar una bola roja en la bolsa quedan sólo 4 bolas y de ellas 2 son negras. La probabilidad de sacar primero una bola negra y luego bola roja es 2/5·3/4 = 6/20 = 3/10, y la de sacar dos bolas negras es: 2/5·1/4 = 2/20 = 1/10.

Actividades resueltas

- *Si consideramos que la probabilidad de que un incendio sea intencionado es 0,7 ¿cuál es la probabilidad de que al considerar dos incendios, al menos uno haya sido intencionado?*



Llamamos I al suceso "ser intencionado" y noI al suceso "no ser intencionado". Representamos la situación en un diagrama de árbol. Como el que un incendio sea intencionado es independiente de cómo sea el segundo, tenemos que:

P(I y I) = 0,7 · 0,7 = 0,49 P(I y noI) = 0,7 · 0,3 = 0,21

P(noI y I) = 0,3 · 0,7 = 0,21 P(noI y noI) = 0,3 · 0,3 = 0,09

La probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado la podemos calcular sumando las probabilidades de (I y I), (I y noI), y (noI y I) que es 0,49 + 0,21 + 0,21 = 0,91. Pero más sencillo es calcular la probabilidad del suceso contrario p(noI y noI) = 0,09 y restarla de 1:

p(al menos uno intencionado) = 1−p(ninguno intencionado9 = 1 – 0,09 = 0,91.

- *El Caballero de Mére planteó en el siglo XVII al matemático Pascal el siguiente problema:*

"¿Qué es más probable: sacar al menos un seis en cuatro lanzamientos de un dado, o sacar al menos un doble seis en 24 lanzamientos de un par de dados?".

Él pensaba erróneamente que los dos sucesos eran igualmente probables, pero había comprobado (apostando muchas veces) que perdía más frecuentemente con el segundo tipo de apuesta. Calcula ambas probabilidades para resolver el problema planteado.

Sea A el suceso de conseguir al menos un 6 en 4 lanzamientos de un dado. ¿Cuál es la probabilidad $P(A)$? Este es uno de esos sucesos para los que es más fácil calcular la probabilidad del suceso contrario o complementario: $\overline{A}$ es el suceso "no sale ningún 6 en las 4 tiradas".

Si $\overline{A_i}$ es el suceso "no se consigue un 6 en la i-ésima tirada", sabemos que $P(\overline{A_i}) = 5/6$. También sabemos que los sucesos $\overline{A_i}$ son independientes, por lo tanto:

$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}482$ Así pues, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}518$.

(Si de Mère realizaba muchas veces este tipo de apuesta, debería ganar aproximadamente el 52 % de las mismas).

Y ahora, la otra parte: sea D el suceso "conseguir al menos un seis doble en 24 lanzamientos de dos dados". Nuevamente $NO\ D$ es más fácil de describir: $\overline{D}$ es el suceso "no se consigue un doble seis en ninguna de las 24 tiradas".

Si $\overline{D}_i$ es el suceso "no sale un seis doble en la i-ésima tirada", entonces la probabilidad de cada $\overline{D}_i$ es $P(\overline{D}_i) = 35/36$, por lo tanto: $P(\overline{D}) = P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 \cap \ldots \cap \overline{D}_{24}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}509$.

Y podemos concluir que $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 0{,}491$.

(Por lo tanto, de Mére debería ganar aproximadamente el 49 % de las veces con este tipo de apuesta).

Actividades propuestas

21. Se tiene una bolsa con 10 bolas rojas y 6 negras, de la que se extraen dos bolas. Hallar la probabilidad de que ambas sean negras en cada uno de los siguientes casos:

a) La primera bola se devuelve a la bolsa antes de extraer la segunda bola;

b) La primera bola no se devuelve a la bolsa.

22. En un examen de física, un alumno sólo ha estudiado 15 temas de los 25 que contiene el cuestionario. El examen consiste en contestar a dos temas extraídos al azar del total de temas del cuestionario. Hallar la probabilidad de que los dos temas sean de los que el alumno estudió.

23. Para tratar de curar una enfermedad se ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de individuos, obteniéndose los resultados reflejados en la siguiente tabla que hay que completar con los totales:

Elegido un individuo al azar, halla las siguientes probabilidades:

Tratamiento	**Curados**	**NO curados**	**totales**
T. Nuevo	60	21	
T. Antiguo	43	36	
Totales			

a) Que se haya curado si se le ha aplicado el nuevo tratamiento.

b) Que habiendo sido sometido al nuevo tratamiento, no se haya curado.

c) Que habiendo sido sometido al tratamiento antiguo, se haya curado.

d) Que se haya curado si ha recibido el tratamiento antiguo.

e) Que se haya curado.

24. La probabilidad de que una bomba lanzada por un avión haga blanco en el objetivo es 1/3. Calcula la probabilidad de alcanzar el objetivo si se tiran tres bombas seguidas.

25. Se tienen dos urnas: la urna A contiene 6 bolas rojas y 4 bolas negras; la urna B contiene 4 bolas rojas y 8 bolas negras. Se lanza un dado y si sale un múltiplo de 3 extraemos una bola de la urna A, en caso contrario extraemos una bola de la urna B. Dibuja un diagrama en árbol para describir esta experiencia compuesta y calcula la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística

1. Las notas de alumnos de un grupo en un examen de Matemáticas son:

2, 10, 7, 8, 1, 0, 3, 5, 6, 9, 2, 4, 1, 6, 9, 10, 5, 6, 7, 8, 3, 1, 0, 1, 5, 9, 10, 9, 8, 7.

a) Haz una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias relativas (expresadas en fracción, número porcentaje), frecuencias acumuladas absolutas y frecuencias relativas acumuladas (expresadas en fracción, número porcentaje).
b) Calcula la media, la mediana y la moda.
c) Calcula la desviación típica y los cuartiles.

2. Se ha preguntado a 40 alumnos por el número de hermanos que tenía, y se ha obtenido

Número de hermanos	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Número de veces	5	15	7	6	4	2	1

Calcula la media, la mediana y la moda.

3. Se han lanzado cuatro monedas 100 veces y anotado el número de caras en cada lanzamiento. Los resultados están reflejados en la tabla siguiente:

Número de caras	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de lanzamientos	7	25	36	26	6

a) Escribe la tabla de frecuencias absolutas, y frecuencias relativas.

b) Representa un diagrama de sectores después de calcular el ángulo de cada sector.

c) Representa un diagrama de barras para las frecuencias relativas.

d) Calcula la media y la desviación típica.

e) Calcula la mediana y los cuartiles.

4. Para conocer la distribución de un cierto país de las personas según su edad se ha recogido una muestra de diez mil personas y los valores obtenidos vienen reflejados en la tabla siguiente:

Edades	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 25)	[25, 35)	[35, 45)	[45, 55)	[55, 65)	[65,105)
Número de personas	900	1000	900	1500	1300	1200	1300	900	1000

a) Representa un histograma de frecuencias absolutas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales. *Recuerda:* El área de los rectángulos debe ser proporcional a las frecuencias.
b) Calcula la media y la desviación típica.

5. Una compañía de seguros selecciona al azar a 200 propietarios y les pregunta cuántos euros han gastado en reparaciones del automóvil, con los siguientes resultados agrupados en intervalos:

Euros	[0, 100)	[100, 200)	[200, 400)	[400, 600)	[600, 800)	[800, 3000)
Nº de personas	40	30	20	40	50	20

a) Representa un histograma de frecuencias relativas. *Cuidado*: Los intervalos no son todos iguales.
b) Calcula la media y la desviación típica.

Probabilidad

6. Lanzamos dos monedas distintas, una de 50 céntimos y otra de un euro. Calcula la probabilidad de que: A) En la moneda de un euro salga cara. B) Salga una cara. C) Salga al menos una cara. D) No salga ninguna cara. E) Salga una cara y una cruz.

7. Escribe el experimento aleatorio de lanzar tres monedas y anotar si cada una de ellas ha sido cara o cruz. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos: A = No sale ninguna cara; B = Sale al menos una cara; C = Salen dos caras y una cruz.

8. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que la suma sea 1, sea 2, sea 3, …., sea 12.

9. Lanzamos a la vez una moneda y un dado. Calcula las probabilidades de los sucesos A = "Sale cara y un número par"; B = "Sale cruz o un número primo" y C = "sale un número primo".

10. Una moneda está trucada. La probabilidad de obtener cara es doble que la de obtener cruz. Calcula las probabilidades de los sucesos C = "obtener cara" y X =" obtener cruz" al tirar la moneda.

11. Tenemos un dado trucado de forma que los números impares tienen una probabilidad doble a la de los números pares. Calcula las probabilidades de: A) Salga un número impar. B) Salga un número primo. C) Salga un número primo impar. D) Salga un número que sea primo o sea impar.

12. En una clase hay 24 alumnos y 14 alumnas. La mitad de las alumnas y la tercera parte de los alumnos tienen los ojos azules. Se elige un estudiante al azar. A) Calcula la probabilidad de que sea chico y tenga los ojos azules. B) Calcula la probabilidad de que sea chico o tenga los ojos azules.

13. En un grupo de 12 amigas hay 3 rubias. Se eligen dos chicas al azar. Calcula la probabilidad de que: A) Ambas sean rubias. B) Ninguna sea rubia. C) Al menos una sea rubia.

14. Lanzamos dos dados y anotamos los valores de las caras superiores. Calcula las probabilidades de que: A) Los números obtenidos sean iguales. B) Los números obtenidos difieran en 3 unidades. C) Los números obtenidos sean pares.

15. Un lote de 20 artículos tiene 2 defectuosos. Se sacan 4 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno sea defectuoso?

16. Se ha comprobado que en una ciudad están enfermos con diarrea el 60 % de los niños; con sarampión el 50 %, y el 20 % con ambas enfermedades. A) Calcular la probabilidad de que elegido un niño al azar, esté enfermo con diarrea o sarampión o ambas enfermedades. B) En un colegio con 450 niños, ¿Cuántos cabe esperar que estén enfermos con diarrea o sarampión?

17. En el lanzamiento de dos dados se definen los sucesos: A = "la suma de puntos es 5", B = "uno de los dados es 4" y C = "los dos números son iguales". Calcular A) p(A), B) p(B), C) p(C), D) p($A \cup B$), E) p($A \cap B$), F) p($A \cap C$).

18. En una empresa hay 200 empleados, de los cuales la mitad son mujeres y la mitad varones. Son fumadores 15 mujeres y 20 varones. Se elige un empleado al azar. Calcula la probabilidad de que A) sea fumador o fumadora, B) sea mujer y no fume, C) fume sabiendo que es mujer.

19. Ana tiene en su monedero 4 monedas de cinco céntimos, 3 monedas de veinte céntimos y 2 monedas de un euro. Saca dos monedas al azar. Calcula las probabilidades de que A) las dos sean de cinco céntimos, B) ninguna sea de un euro, C) saque 1,20 €.

20. Una encuesta revela que el *35 %* de los habitantes de una ciudad oyen la cadena SER, el 28 % la COPE y el 10 % ambas emisoras de radio. Se elige un ciudadano al azar: ¿Cuál es la probabilidad de que no escuche ni la SER ni la COPE?

AUTOEVALUACIÓN

Con los datos siguientes, 1, 5, 2, 8, 9, 4, 7, 7, 5, 7, calcula:

1. La media:

a) 5 b) 5’5 c) 6 d) 7

2. La mediana:

a) 5 b) 5’5 c) 6 d) 7

3. La moda:

a) 5 b) 5’5 c) 6 d) 7

4. La desviación típica:

a) 2 b) 2,3 c) 2,5 d) 2,6

5. El intervalo intercuartil

a) 3 b) 2,75 c) 4 d) 2

6. Al tirar dos dados, la probabilidad de sacar al menos un 5 es:

a) 5/6 b) 11/36 c) 25/36 d) 30/36

7. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar exactamente dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

8. Al tirar 3 monedas, la probabilidad de sacar al menos dos caras es:

a) 1/2 b) 3/4 c) 3/8 d) 5/8

9. Sacamos una carta de una baraja de 40 cartas, la probabilidad de que sea un oro o un múltiplo de 2 es:

a) 22/40 b) 19/40 c) 36/40 d) 3/4

10. Indica cuál de las afirmaciones siguientes es **siempre** correcta:

a) P(A) + P(no$A$) = 1

b) P(A y B) = P(A) · P(B)

c) P(A o B) = P(A) + P(B).

SOLUCIONES: **1b 2b 3d 4d 5b 6b 7a 8d 9a 10a**

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1)

Resultados	Frecuencias absolutas	Frecuencias relativas			Frecuencias absolutas acumuladas	Frecuencias relativas acumuladas
		fracción	número	porcentaje		
1	**17**	**17/96**	**0,18**	**18%**	**17**	**0,18**
2	**12**	**12/96**	**0,13**	**13%**	**19**	**0,31**
3	**17**	**17/96**	**0,18**	**18%**	**46**	**0,49**
4	**15**	**15/96**	**0,15**	**15%**	**61**	**0,64**
5	**21**	**21/96**	**0,22**	**22%**	**82**	**0,86**
6	**14**	**14/96**	**0,14**	**14%**	**96**	**1**
totales	**96**	**96/96**	**1**	**100%**		

(2) Media $\overline{x} = 12{,}67°$ Moda $= 9°$ Mediana $= 10°$.

(3) Los valores extremos influyen en la media.

	Media	Mediana	Moda
a)	116,11	6	9
b)	6,11	6	9
c)	34,00	6,5	0,9

(4) Media = 3,56 Mediana = 3,625 Moda = 6.

(5) Media = 7,032 Mediana = 6,98 Moda = 7.

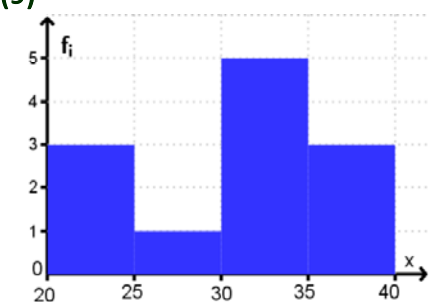
(6) Media = 2,025 Mediana = 1,78 Moda = 1.

(7) Recorrido=35 Varianza= 269 Desviación típica=16,4 Q_1=7,25 Q_3=15,75 Intervalo intercuartil=8,5.

(8)

	Recorrido	Varianza	Desviación típica	Q_1	Q_3	Intervalo intercuartil
a)	998	109870,61	331,47	4	9	5
b)	8	8,11	2,85	4	9	5
c)	200	4303,11	65,60	4,2	9	4,75

(9)



Intervalo de clase I_i	[20, 25)	[25, 30)	[30, 35)	[35, 40)
Marcas de clase x_i	22,5	27,5	32,5	37,5
Frecuencias absolutas f_i	3	1	5	3

Media = 30,83 m^3/semana; Desviación típica 29,53 m^3/semana. El intervalo de la mediana es [25, 30). El primer cuartil está en el intervalo [20, 25) y el tercer cuartil en [30, 35).

(10) E = {a, e, i, o, u} (11) E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Respuesta abierta, por ejemplo, A = ”es múltiplo de 3” = {3, 6, 9}, B = “es mayor que 5” = {6, 7, 8, 9}.

(12) 12/40 = 0,3 o 30 %.

(13)

resultado	1	2	3	4	5	6
PROBLABILIDAD	0,048	0,095	0,144	0,192	0,238	0,283

(14) 1/3

(15) p(suma 9) = 25/216 p(suma 10) = 27/216 **(16)** *2/3* **(17)** 5/6 , 4/6, 5/6 **(18)** 1/4, 3/4

(19) a) p(A) = 5/36, b) p(B) = 8/36; c) p($A \cap B$) = 2/36, d) p($A \cup B$) = 11/36; e) p($A \cap \overline{B}$) = 3/36; f) p($\overline{A} \cap B$) = 6/36; g) p($\overline{A} \cap \overline{B}$) = 25/36.

(20) (a) p(M/C) = 50/80 = 5/8 = 0,625 (b) p(no M/C) = 30/80 = 3/8 = 0,375.

(21) a) 0,141 b)0,125 **(22)** 0,35 **(23)** a) 0,741 b) 0,259 c)0,544 d) 0,544 e) 0,644.

(24) 0,704 **(25)** 0,422.

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1) (a)

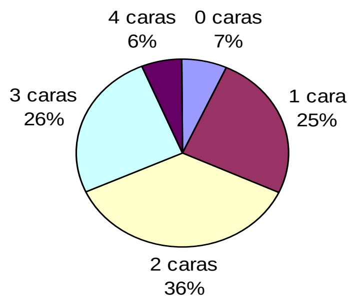
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*sumas*
Frecuencias absolutas		**2**	**4**	**2**	**2**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**	**3**	*30*
Frecuencias relativas	**fracción**	**2/30**	**4/30**	**2/30**	**2/30**	**1/30**	**3/30**	**3/30**	**3/30**	**3/30**	**4/30**	**3/30**	*30/30*
	número	**0,07**	**0,13**	**0,07**	**0,07**	**0,03**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,1**	**0,13**	**0,1**	*1*
	porcentaje	**7%**	**13%**	**7 %**	**7 %**	**3 %**	**10%**	**10%**	**10%**	**10%**	**13 %**	**10%**	*100 %*
F. absolutas acumuladas		**2**	**6**	**8**	**10**	**11**	**14**	**17**	**20**	**23**	**27**	**30**	
Frecuencias relativas acumuladas	**fracción**	**2/30**	**6/30**	**8/30**	**10/30**	**11/30**	**14/30**	**17/30**	**20/30**	**23/30**	**27/30**	**30/30**	
	número	**0,07**	**0,2**	**0,27**	**0,34**	**0,37**	**0,47**	**0,57**	**0,67**	**0,77**	**0,9**	**1**	
	porcentaje	**7%**	**20%**	**27%**	**34%**	**37%**	**47%**	**57%**	**67%**	**77%**	**90%**	**100%**	

(b) Media = 5,4; Mediana = 6 ; Modas: 1 y 9 (c) Desviación típica = 3,25 ; Q_1 = 2 ; Q_3 = 8.

(2) Media = 1,975; Mediana = 1 Moda = 1 hermano.

(3)

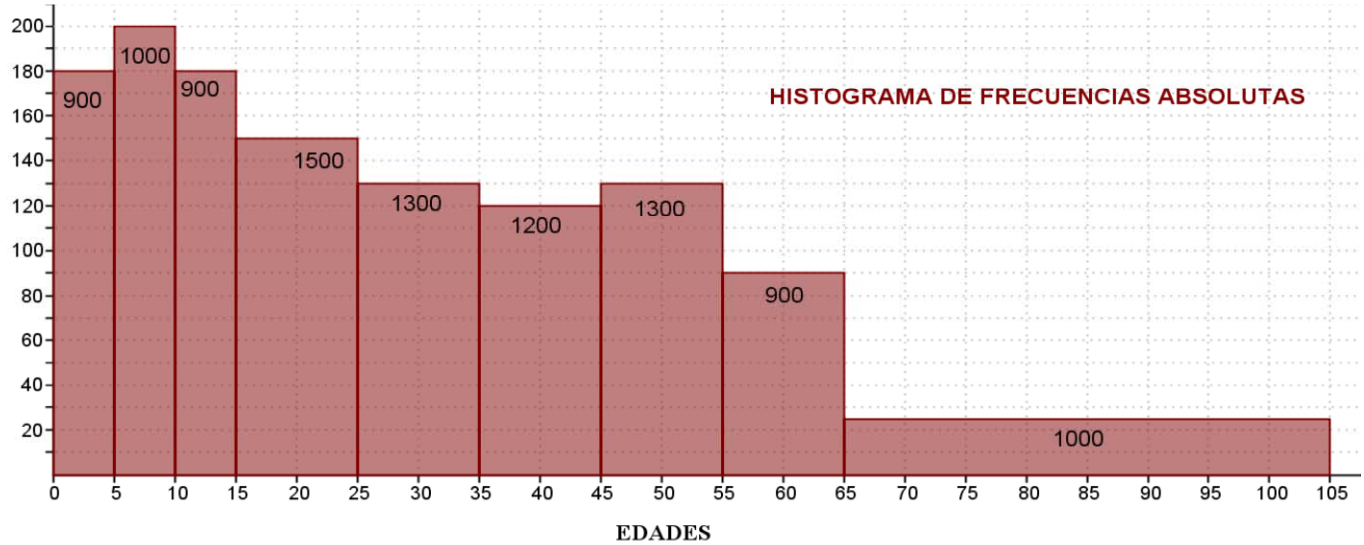
Número de caras	0	1	2	3	4
Frecuencia absoluta	7	25	36	26	6
Frecuencia relativa	0,07	0,25	0,36	0,26	0,06
Ángulo del sector	25°	90°	130°	94°	21°



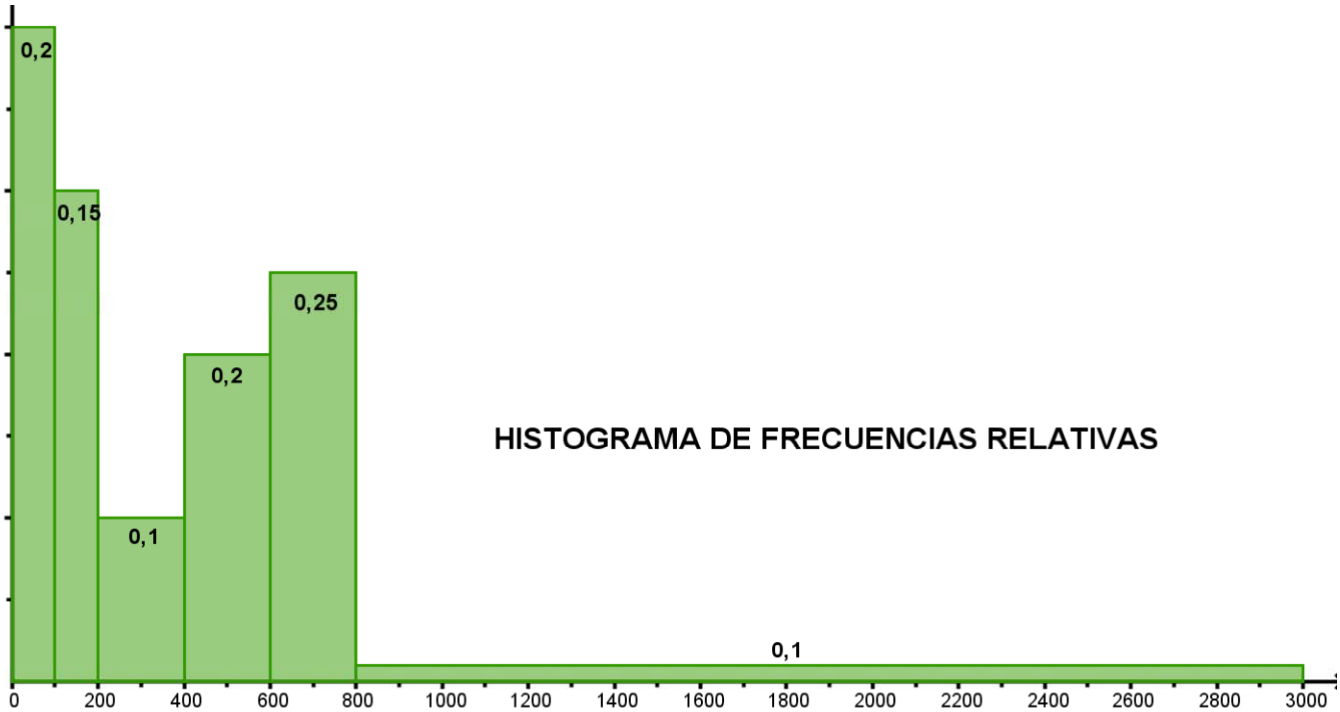
Media = 1,99; Desviación típica = 1,015.

Mediana = 2; Q_1 = 1; Q_3 = 3.

(4) Media = 33,95 años; Desviación típica = 23,8 años.



(5) Media = 527,5, Desviación típica = 518.



(6) A) 1/2 B) 1/2 C) 3/4 D) 1/4 E) ½.
(7) Espacio muestral. E = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}; p(A) = 1/8; p(B) = 7/8; p(C) = 3/8.
(8) p(1) = 0, p(2) = 1/36, p(3) = 2/36, p(4) = 3/36, p(5) = 4/36, p(6) = 5/36, p(7) = 6/36, p(8) = 5/36, p(9) = 4/36, p(10) = 3/36, p(11) = 2/36, p(12) = 1/36.

(9) p(A)=1/4, p(B)=3/4, p(C)=1/2 **(10)** p(C)=2/3, p(X)=1/3 **(11)** A) 6/9, B) 5/9, C) 7/9 **(12)** A)8/38, B)31/38
(13) A) 1/22 B)6/11 C)5/11. **(14)** A) 1/6, B)1/6, C)1/4. **(15)** 12/19. **(16)** A) 0,9. B)405 niños.
(17) A)1/9. B) 11/36. C) 1/6. D)13/36. E) 1/18. F)0 **(18).** A) 0,175. B) 0,425 C) 0,15.
(19) A) 1/6, B) 7/12, C) 1/6, **(20)** 0,47.