MATEMÁTICAS

Educación Secundaria para Personas Adultas

Nivel II de ESPA

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

AUTORA: Ana María Zarco García

VERSIÓN ADAPTADA AL CURRICULUM DE LA COMUNIDAD VALENCIANA

I.S.B.N. - 13: 978-84-695-9891-7

I.S.B.N. - 10:   84-695-9891-0

ÍNDICE

La educación de personas adultas corresponde a las Comunidades Autónomas, y en cada una de ellas han establecido sus programaciones.

En este texto se pretende dar una versión adaptada al programa de la Comunidad Valenciana, para que las personas adultas obtengan el graduado escolar.

Las enseñanzas para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas tienen la finalidad de permitirles la adquisición de las competencias, los objetivos y los contenidos de esta etapa y la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.

Este documento ha sido realizado por la profesora Ana Zarco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017).

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

Unidad didáctica 5: Capítulo 5 Ecuaciones y Sistemas de 3º A, autora Raquel Hernández

Unidad didáctica 6: Capítulo 7 Geometría del plano de 3º A, autor Pedro Luis Suberviola

Unidades didácticas 7 y 8: Capítulos 10 y 11 Funciones y gráficas de 4º B, Autores: Andrés García y Javier Sánchez. Revisores: Javier Rodrigo y José Gallegos.

Unidad didáctica 9: Capítulo 11 Estadística y probabilidad de 3º A, de autor Fernando Blasco

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 1

Números naturales y enteros

Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Unidad Didáctica 1 Números naturales y enteros

1. Los números naturales

Los números naturales surgieron de la necesidad de contar colecciones o conjuntos. Denotamos por **N** el conjunto de los números naturales, admitiendo el 0 como número natural.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

En este conjunto las operaciones suma y producto de números naturales son internas, es decir, si sumamos o multiplicamos dos números naturales entonces el resultado es un número natural. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las operaciones resta y división. Por ello, necesitamos ampliar este conjunto de números.

Sabías que…

Códigos de barras

Los productos vendidos al por menor fuera de EEUU y Canadá tienen el código de barras EAN estándar. La sigla "EAN" significa Número Europeo de Artículo. Los productos en venta al por menor vendidos dentro de EEUU y Canadá tienen el código de barras UPC, que significa código universal de producto.

Código de barras real

Código de barras ficticio

	Número del país	Número Empresa	Número del producto	Carácter de control
	84	**12345**	**67890**	**0**
	España	Empresa, S.A. Plaza España, S/N Zaragoza	Melocotón en almíbar 500 g.	Código de seguridad
Origen del número	Asociación europea de codificación de productos EAN	Asociación española de codificación comercial (AECOC)	Industrial o fabricante	Algoritmo matemático

https://www.codigoean.com/calculadora_del_digito_control.php

CÓDIGO DE BARRAS. EAN 13

Posición	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Valores	8	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Corrector	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	Suma (control)
Valor x corrector	8	12	1	6	3	12	5	18	7	24	9	0	

1.- Multiplicamos por 1 las posiciones impares y por 3 las posiciones pares del código, empezando de izquierda a derecha.
2.- Sumamos los valores resultantes.
8 + 12 + 1 + 6 + 3 + 12 + 5 + 18 + 7 + 24 + 9 + 0 = 105
3.- Restamos de la decena superior el valor de la suma de los valores resultantes. El resultado de esta operación es el valor del código de control (primera posición de la derecha del código de barras). Si el resultado es 0 el dígito de control será 0.

En nuestro ejemplo la decena superior a 105 es 110, por tanto:
110 - 105 = 5 ==> 5 es el valor del código de control.
Otra posibilidad es dividir la suma resultante (105) entre 10, siendo el
resto de esta división el valor del dígito de control: 105 / 10 = 10 de cociente y 5 de resto.
El resultado final del código es: 84
12345 67890 **5** (EAN-13).

Sabías que…

El sistema de matrículas actual en España es una combinación de cuatro números (del 0000 al 9999) y tres letras (comenzado por BBB y terminando por ZZZ), excluidas las vocales, la Ñ y la Q. 

Ejercicios

1. Comprueba el dígito de control del siguiente código de barras:

8 437013 764001

2. Jerarquía de las operaciones

Cuando mezclamos las operaciones, éstas se deben resolver en un orden.

Primero. Paréntesis, corchetes y llaves. (Se simplifica al máximo las operaciones que están dentro).

Segundo. Potencias

Tercero. Multiplicaciones y divisiones

Cuarto. Sumas y restas.

Las expresiones se leen de izquierda a derecha. Es decir, si tenemos una multiplicación y una división se realizará primero la operación que está más a la izquierda. Si tenemos sólo sumas y restas se realizará en primer lugar la operación que quede más a la izquierda.

Ejemplo:

Resuelve

$$3 \cdot 5 - 4 : 2 + 5^2 - 3 + 4 \cdot 2$$

Solución:

$3 \cdot 5 - 4 : 2 + 25 - 3 + 4 \cdot 2$	*Efectuamos en primer lugar la potencia*
$15 - 2 + 25 - 3 + 8$	*Realizamos las multiplicaciones y divisiones.*
43	*Y por último, las sumas y las restas*

Ejercicios

2. Calcula

a) $30 - 2 \cdot (5 + 7)$ =

b) $3 \cdot 4 - 6 \cdot (10 - 4 \cdot 2)$ =

c) $15 + 4 \cdot (3 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2)$ =

d) $8 + 7 \cdot 2 - 3 \cdot (9 - 5) + 3 \cdot 4$ =

3. Los números enteros

En la vida cotidiana utilizamos el signo negativo. Por ejemplo en los botones del ascensor, para indicar temperaturas y para indicar que debemos una cierta cantidad de dinero.

Por tanteo intenta calcular el valor de x que satisface la igualdad:

$$x + 8 = 5$$

Habrás observado que no existe ningún número natural que sumándole 8 dé como resultado 5.

Esta ecuación tiene solución en el conjunto de números enteros.

Denotamos por **Z** el conjunto de números enteros.

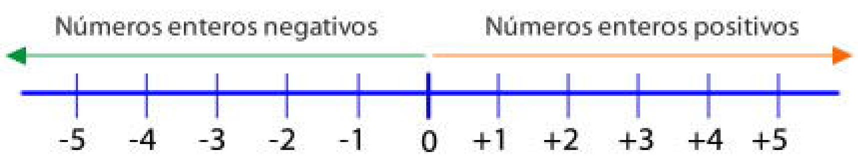
$$\mathbf{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Los números enteros se utilizan para contar o medir magnitudes con signos. Por ejemplo, la temperatura, la velocidad, la aceleración, el número de planta,…

Así, el conjunto de números enteros está formado por enteros positivos, negativos y el cero. Los enteros no negativos se identifican con el conjunto de números naturales.

Representación gráfica

Los números enteros se representan sobre la recta graduada de forma que un número mayor que otro se representa a la derecha.



Ejercicios

3. En la siguiente tabla se muestran algunas situaciones descritas con números enteros. Asigna el número entero correspondiente.

Situación	Nº Entero
La temperatura ambiente es de 2º bajo cero	
La temperatura ambiente es de 2º sobre cero	
La ciudad se encuentra a 800 m sobre el nivel del mar	
El buzo está nadando a 20 m de profundidad	
Estamos justo al nivel del mar	
Julián tiene una deuda de $5.000	
El avión está volando a 9.500 metros de altura	
El saldo deudor de la libreta de ahorro es de $12.356	
Los termómetros marcaron una temperatura de 3º bajo cero	
Latitud de la línea del ecuador	
La altura del monte Aconcagua es de 7.010 metros	
La profundidad de la fosa marina es de 10.882 metros	

Marisa debe 11.650 €	
Andrés tiene 3.580 €	
El submarino está a 35 metros bajo el nivel del mar.	

Conceptos

1) ¿Qué significa ***valor absoluto*** de un número entero?
2) ¿Qué significa ***opuesto*** de un número entero?

Se llama valor absoluto de un número a la distancia de dicho número al punto de origen o cero en la representación en la recta numérica. Para representar el valor absoluto se utilizan dos barras verticales.

El valor absoluto de -8 es igual a 8

$$|-8| = 8$$

El valor absoluto de +4 es igual a 4

$$|+4| = 4$$

El ***opuesto de un número entero*** es su simétrico respecto del número cero en la recta numérica. Por ejemplo, a distancia de tres unidades comenzando en la posición del cero tenemos dos números 3 y -3.

Por lo tanto, decimos que 3 es el opuesto de -3 y que -3 es el opuesto de 3.

Escribimos:

$$-(-3) = 3$$

Por lo tanto, el opuesto del opuesto de un número es el mismo número.

4. Operaciones con números enteros

Suma de números enteros

Para sumar valores del mismo signo se suman los valores absolutos de los números y se deja el mismo signo.

Ejemplos:

$$(+\mathbf{2}) + (+\mathbf{3}) = +\mathbf{5}$$

$$(-\mathbf{2}) + (-\mathbf{4}) = -\mathbf{6}$$

Para sumar valores de distinto signo se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$(-\mathbf{4}) + (+\mathbf{10}) = +\mathbf{6}$$

$$(-\mathbf{17}) + (+\mathbf{10}) = -\mathbf{7}$$

Forma reducida de una suma de números enteros:

Cuando tengamos (-3)+(+1) podemos escribir simplemente -3+1 que es la forma reducida de la expresión anterior.

Ejercicios

4. Expresa en la forma reducida y calcula:

(- 3) + (+1) =	(+ 6) + (+ 9) =
(+ 4) + (+7) =	(+ 5) + (- 8) =
(-23) + (10) =	(- 2) + (+ 1) =
(+ 5) + (+ 5) =	(+ 9) + (- 2) =
(- 3) + (+ 7) =	(+ 5) + (+ 8) =

Resta de números enteros

La resta de números enteros es el resultado de sumar al primer entero el opuesto del segundo entero. Es decir,

$$(+3) - (+4) = (+3) + (-4) = 3 - 4 = -1$$

La forma reducida de $(+3) - (+4)$ es $3 - 4$

Ejercicios

5. Expresa en la forma reducida y calcula:

(+9) - (+ 5) =	(+ 8) - (- 5) =
(-15) - (- 3) =	(- 1) - (- 13) =
(-8) - (+ 4) =	(+7) - (+ 5) =
(+ 3) - (- 7) =	(- 5) - (+ 8) =
(- 11) - (+ 6) =	(+ 9) - (- 9) =

Producto de números enteros

Se multiplican los valores absolutos de los números y se añade el signo + o – según la regla de los signos:

$(+)\cdot(+)=(+)$

$(+)\cdot(-)=(-)$

$(-)\cdot(+)=(-)$

$(-)\cdot(-)=(+)$

División de números enteros

Se dividen los valores absolutos de los números y se añade el signo + o – según la regla de los signos:

La división de dos números enteros no es siempre un número entero.

$$\frac{(+)}{(+)}=(+) \qquad \frac{(-)}{(+)}=(-)$$

$$\frac{(+)}{(-)}=(-) \qquad \frac{(-)}{(-)}=(+)$$

Ejercicios

6. Calcula:

$(+4)\cdot(-2)=$	$(-8):(+2)=$
$(-7)\cdot(+3)=$	$(-15):(-3)=$
$(+5)\cdot(+1)=$	$(+4):(+1)=$
$(-3)\cdot(+8)=$	$(+10):(-2)=$

7. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones. Haz el cálculo en varios pasos. Fíjate en la posición de los paréntesis.

a) $6-(5-(2-3+5)-1)$	*b)* $16-\big(6+(5-7)-(3-1)\big)$
c) $6-(5-(2-3)+5-1)$	d) $16-\big(6+5+(-7-3)-(3-1)\big)$
e) $7-(6-(-5+4)-2)+1$	f) $-(4-3)+2-(1-(4+2)-5)$

8. Calcula:

a/ $3-4\cdot(2+3)$

$3-4\cdot5$	←	Paréntesis
	←	Producto
	←	Suma/Resta

b/ $5+(3-4)\cdot(2+3)$

	Paréntesis
	Producto
	Suma/Resta

9. Calcula:

a/ $4+6\cdot7-3\cdot2+5\cdot(-4)$	b/ $4+6\cdot(7-3\cdot2)+5\cdot(-4)$
c/ $-1\cdot5+3\cdot[(-2)\cdot4-5\cdot3]+6$	d/ $-1\cdot(5+3)\cdot[(-2)\cdot4-5\cdot(3+6)]$

Potencia de base un número entero y exponente un número natural

La potencia de base un número entero a y exponente un número natural n distinto de cero es el número entero que resulta de multiplicar la base por sí misma n veces, es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \cdots a}_{n\ veces}$$

Cuando la base es distinta de cero, entonces

$$a^0 := 1$$

Sabías que…

0^0 es una indeterminación matemática

Ejemplos:

$(+3)^4 = 81$	$(+6)^3 = 216$	$(-5)^4 = 625$	$(-4)^3 = -64$

Observa que si la base es un número entero positivo, el signo del resultado de la potencia es siempre positivo.
Si la base es un número entero negativo, el signo del resultado depende del exponente.
*Cuando el exponente es **par** el resultado es positivo y cuando el exponente es **impar** el resultado es negativo

Ejercicios

10. Calcula:

$a)\quad (-4)^2$	$b)\quad (-3)^3$
$c)\quad (-4)^0$	$d)\quad (-2)^5$

5. Divisibilidad

Múltiplos y divisores

Un número entero *a* es **múltiplo** de otro número entero *b* si existe un número entero *n* tal que

$$a = n \cdot b.$$

Cuando *b* es distinto de cero se dice que ***b* es divisor de *a***.

Por ejemplo, 3 es divisor de 12 y 12 es múltiplo de 3.

Criterios de divisibilidad
Un número es divisible por 2 si y sólo si acaba en 0 o cifra par.
Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3
Un número es divisible por 5 si y sólo si acaba en 0 o en 5
Un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan los lugares impares menos la suma de las cifras que ocupan los lugares pares es múltiplo de 11.

Ejemplo:

El número 10890

Es divisible por		
2	→	Acaba en 0
3	→	$1+0+8+9+0=18$
5	→	Acaba en 0
11	→	$(1+8+0)-(9+0)=0$

Ejercicios

¿Divisible por 3?

940	430	115	124	264	517	956
244	925	977	487	867	725	907
949	941	322	426	677	169	995

11.

¿Divisible por 8 y 6?

712	134	209	796	540	731	442	757
108	282	979	782	182	649	430	132
161	816	831	673	673	486	579	737

12. Inventa un número que sea divisible por 11 que tenga 5 cifras.
13. Busca el criterio de divisibilidad del número 7 y del número 13.**

Número primo es un número distinto de la unidad que solamente es divisible por el mismo y la unidad. Si un número tiene más de dos divisores se le llama ***compuesto.***

Ejercicios

14. ¿Qué es la criba de Eratóstenes?**

Descomposición factorial.

Factorizar un número consiste en expresarlo como producto de factores primos.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad 108 = 2^2 \cdot 3^3$ $\qquad 495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

Ejercicios

15. Descompón en factores primos:

252 | 132 | 81 |

252= 132= 81=

189 | 144 | 54 |

189= 144= 54=

16. Encuentra un método para hallar de forma rápida la descomposición en factores primos de números que acaben en muchos ceros.

6. Máximo común divisor

El **máximo común divisor** (M.C.D) de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes.

Para calcular el M.C.D. de dos o más números, se descomponen éstos en sus factores primos y se multiplican los factores comunes elevados a su menor exponente.

Si los números no tienen divisores primos comunes entonces el M.C.D. es la unidad.

Ejemplos: Calcula el M.C.D. de 1225 y 490

$$\begin{array}{r|l} 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$1225 = 5^2 \cdot 7^2$ $\qquad 2 \cdot 5 \cdot 7^2$

M.C.D.(1225,490)=$5 \cdot 7^2 = 245$

Observa que 245 es divisor de ambos números y es el mayor posible.

Ejercicios

17. Calcula el máximo común divisor de 40 y 50.
18. Calcula el máximo común divisor de 42 y 70.
19. Calcula el máximo común divisor de 100 y 150.
20. Calcula el máximo común divisor de 50, 300 y 180.
21. Calcula el máximo común divisor de 38808 y 847

Indicación:
$38808 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$
$847 = 11^2 \cdot 7$

7. Mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes distintos de cero.

Para calcular el m.c.m. de dos o más números, se descomponen éstos en sus factores primos y se multiplican los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplos: Calcula el m.c.m. de 1225 y 490

$$\begin{array}{r|l} 1225 & 5 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$1225 = 5^2 \cdot 7^2$ $\qquad 2 \cdot 5 \cdot 7^2$

m.c.m.(1225,490)=$2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 2450$

Observa que 2450 es múltiplo de ambos números y es el menor posible no nulo.

Ejercicios

22. Calcula el mínimo común múltiplo de 40 y 50.
23. Calcula el mínimo común múltiplo de 42 y 70.
24. Calcula el mínimo común múltiplo de 100 y 150.
25. Calcula el mínimo común múltiplo de 50, 300 y 180.
26. Calcula el mínimo común múltiplo de 38808 y 847

    Indicación:

    $38808 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$

    $847 = 11^2 \cdot 7$

27. Se quieren envasar en una fábrica de alimentos lácteos 350 litros de leche desnatada, 300 litros de leche semidesnatada y 450 litros de leche entera en envases iguales de la mayor capacidad posible. ¿Qué capacidad deben tener estos envases?
28. En dos calles de 144 m y 168 m cada una se quieren plantar árboles que estén igualmente espaciados. ¿Cuál es la mayor distancia posible entre cada árbol?
29. María quiere comenzar a vender bombones con lo que aprendió en su taller de chocolatería. Hizo 32 bombones de trufa, 24 de frambuesa y 28 de manjar. ¿Cuántos paquetes con la misma cantidad de bombones de cada tipo puede hacer?
30. Diego ha iniciado un tratamiento médico para su alergia. Debe tomar tres medicamentos distintos: unas pastillas, un jarabe y una crema. Las pastillas las debe tomar cada tres horas, el jarabe cada cuatro y la crema aplicarla cada dos horas. Si Diego tomó todos los medicamentos a las 8:00 de la mañana, ¿a qué hora los volverá a tomar todos a la vez?
31. En el aeropuerto existen dos líneas aéreas que realizan vuelos a Isla de Pascua durante todo el día. Los aviones de la primera línea aérea, despegan cada 10 minutos y los de la otra despegan cada 15 minutos. Si el primer vuelo de ambas líneas aéreas se realiza a las 7:00 a. m., ¿a qué hora vuelven a despegar juntos los aviones?
32. En el almacén tenemos 100 cartones de zumo, 60 piezas de fruta y 40 bocadillos. Queremos guardarlos en cajas con el mismo número de objetos. ¿Cuántos artículos habrá en cada caja? ¿Cuántas cajas harán falta?

Sabías que…

LETRA DEL D.N.I. O DEL N.I.F.

La letra de tu D.N.I. no se pone al azar. A cada número del D.N.I. le corresponde una letra según un algoritmo que veremos a continuación. Para saberla haz lo siguiente:

Algoritmo para hallar la letra del D.N.I.

1. Haz la división entera del número del D.N.I. entre 23.
2. A cada resto se le asocia una letra según la tabla siguiente.

RESTO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

LETRA	T	R	W	A	G	M	Y	F	P	D	X	B
RESTO	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
LETRA	N	J	Z	S	Q	V	H	L	C	K	E	

Ejercicios

33. Calcula la letra de tu NIF.

Ejercicios finales

34. Encuentra la descomposición en factores primos de los siguientes números:

a) 8820 b) 16 100 000

35. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 60 y 80. Comprueba que se verifica la siguiente propiedad: “El producto de dos números es igual al producto de su máximo común divisor por su mínimo común múltiplo”.

36. Completa:

15345		8085		1155	
	3		3		3
	3		5		5
	5		7		7
	11		7		11
	31		11		

M.C.D.=

m.c.m.=

37. Almudena y Carlos quieren construir una torre con las piezas cúbicas de un juego de construcción de su hermano pequeño. Quieren que la torre tenga 50 cm de alto, 30 de largo y 20 de ancho. ¿Cuánto ha de medir el lado de los cubos para que sean de la mayor dimensión posible? ¿Cuántas piezas necesitaran?

38. Enuncia y pon un ejemplo sobre:

a) El criterio de divisibilidad por 9.
b) El criterio de divisibilidad por 7

39. Calcula, escribiendo los pasos intermedios:

$$a)\quad \left[(-4)^2\cdot(-4)^0\right]^2 - 100 : 50\cdot 4 - 9 + 5$$

$$b)\quad -5\cdot(-3+4) + 64 : (-8)^0 - 49\cdot(-2)\cdot(-1)$$

40. ¿Es lo mismo $5^2+2\cdot 4\cdot 5+4^2$ que $(5+4)^2$? Razona la respuesta.

41. Enuncia y pon un ejemplo del criterio de divisibilidad:

a) Del número 3.

b) Del número 11.

42. Calcula, escribiendo los pasos intermedios:

a) $\mathbf{100 : 20 \cdot 3 - (4 - 5 + 6) \cdot (-1) + \left[(-5)^6\right]^0 \cdot 3}$

b) $\mathbf{(-11 + 6 \cdot 2) \cdot 3 - (-4) \cdot (-6) + (-2)^3}$

Vocabulary

- The **exponent** of a number says **how many times** to use the number in a multiplication.
- **"Operations"** mean things like add, subtract, multiply, divide, squaring, etc.
- **Least Common Multiple**
- **Greatest Common Factor**

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 2

Fracciones. Proporcionalidad

Ana Mª Zarco

Educación de adultos

Unidad Didáctica 2. Números racionales e irracionales y sus operaciones. Proporcionalidad y porcentajes

1. Números racionales

Una fracción es una división entre dos números enteros, teniendo en cuenta que el divisor no puede ser un número cero. Se denota por:

$$\frac{a}{b}$$

Al número *a* se le llama ***numerador*** y al número *b* se le llama ***denominador***.

Si el numerador es menor que el denominador, la fracción es menor que la unidad, y se llama ***fracción propia***.

Si el numerador es mayor que el denominador, la fracción es mayor que la unidad, y se llama ***fracción impropia***.

Los números enteros también se pueden expresar como fracción, por ejemplo:

$$6 = \frac{12}{2} = \frac{6}{1}$$

El conjunto de todas las fracciones se llama ***conjunto de números racionales*** y se designa por Q.

Observa la interpretación geométrica:

2. Fracciones equivalentes

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número, al hacerlo diremos que hemos simplificado o reducido la fracción. La nueva fracción que se obtiene es equivalente a la primera, pues ambas representan el mismo número racional.

Cuando una fracción tiene el denominador positivo y no se puede reducir más porque el numerador y el denominador son primos entre sí, diremos que es ***irreducible***.

Dos fracciones se llaman ***equivalentes*** cuando al simplificarlas dar lugar a la misma fracción irreducible.

Propiedad: Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo:

Simplifica la fracción $\frac{15}{200}$

Solución. Dividimos numerador y denominador por 5:

$$\frac{15}{200} = \frac{3}{40}$$

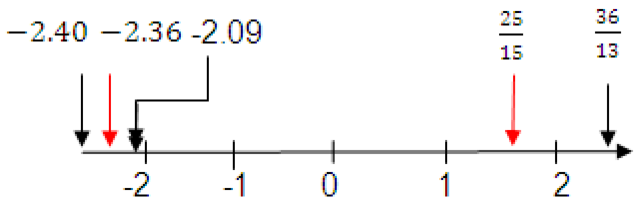
Ejercicios

1. Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{80}{60}$	b) $\frac{10}{14}$	c) $\frac{150}{250}$	d) $\frac{90}{120}$
e) $\frac{21}{7}$	f) $\frac{60}{180}$	g) $\frac{1500}{1200}$	h) $\frac{500}{2500}$

3. Representación en la recta

Las fracciones se pueden representan en la recta numérica. Para obtener su posición podemos hacer la división entre el numerador y el denominador y obtener el decimal y también podemos utilizar el teorema de tales** (ver contenidos de ampliación).



Ejercicios

2. Representa, aproximadamente, sobre una recta:

$$\frac{4}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{18}{5}$$

4. Reducción a común denominador

Reducir dos o más fracciones a común denominador consiste en encontrar otras fracciones equivalentes a las primeras que tengan el mismo denominador.

El denominador común puede ser un múltiplo culquiera de todos los denominadores. Por ejemplo podemos tomar el producto de todos los denominadores y también el m.c.m. de los denominadores. Es preferible tomar el m.c.m por ser el menor múltiplo común no nulo de los denominadores.

Ejemplo:

Reduce a común denominador las fracciones

$$\frac{3}{4}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{2}$$

Solución.

El m.c.m de los denominadores es 12.

$\frac{3}{4}=\frac{\mathbf{9}}{12}$	$\frac{-5}{3}=\frac{\mathbf{-20}}{12}$	$\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{2}}{12}$	$\frac{-1}{2}=\frac{\mathbf{-6}}{12}$
El número 9 resulta de dividir 12 entre 4 (el denominador y multiplicar por 3 (el numerador).	El número -20 resulta de dividir 12 entre 3 (el denominador y multiplicar por -5 (el numerador).	El número 2 resulta de dividir 12 entre 6 (el denominador y multiplicar por 1 (el numerador).	El número -6 resulta de dividir 12 entre 2 (el denominador y multiplicar por -1 (el numerador).

Ejercicios

3. Reduce a común denominador las fracciones:

$$\frac{11}{6},\frac{5}{4},\frac{2}{5}$$

4. Reduce a común denominador las fracciones:

$$\frac{-7}{6},\frac{8}{9},\frac{5}{12}$$

5. Ordena de mayor a menor estas fracciones:

$$\frac{7}{12},\frac{4}{6},\frac{5}{9},\frac{3}{4},\frac{13}{18}$$

5. Operaciones con fracciones

Suma de fracciones con igual denominador

Para sumar fracciones con el mismo denominador, se suman sus numeradores y se mantiene el denominador.

Ejemplo:

Calcula la suma

$$\mathbf{\frac{45}{60}+\frac{48}{60}+\frac{50}{60}}$$

Solución.

$$\mathbf{\frac{45}{60}+\frac{48}{60}+\frac{50}{60}=\frac{45+48+50}{60}=\frac{143}{60}}$$

Ejercicios

6. Calcula:

$$\frac{10}{9}+\frac{5}{9}+\frac{3}{9}$$

Suma de fracciones con distinto denominador

Para sumar fracciones con distinto denominador, en primer lugar hallamos fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador y después sumamos los nuevos numeradores manteniendo el denominador común.

Ejemplo:
Calcula la suma:

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$$

Solución. El m.c.m. de los denominadores es 60,

$$\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=\frac{45}{60}+\frac{48}{60}+\frac{50}{60}=\frac{45+48+50}{60}=\frac{143}{60}$$

Ejercicios

7. Calcula:

$$\frac{11}{9}+\frac{5}{4}+\frac{2}{5}$$

Ejemplo:
Calcula la suma:

$$\frac{3}{4}+5$$

Solución. Escribiendo 5 como $\frac{5}{1}$,

$$\frac{3}{4}+5=\frac{3}{4}+\frac{5}{1}=\frac{3}{4}+\frac{20}{4}=\frac{23}{4}$$

Ejercicios

8. Calcula:

$a)\ \frac{1}{9}+6$ $\qquad$ $b)\ 4+\frac{3}{2}$

Resta de fracciones

El cálculo de la resta se hace de la misma forma que la suma teniendo en cuenta los signos de los números enteros que aparezcan.

Ejemplo:
Calcula:

$$\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$$

Solución. El m.c.m. de los denominadores es 60,

$$\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}=\frac{45}{60}-\frac{48}{60}+\frac{50}{60}=\frac{45-48+50}{60}=\frac{47}{60}$$

Ejercicios

9. Calcula:

$a)\ \frac{1}{30}-\frac{1}{45}$ $b)\ \frac{11}{30}-\frac{3}{40}-\frac{7}{60}$

Producto de fracciones

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo denominador es el producto de sus denoninadores y cuyo numerador es el producto de sus numeradores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo:
Calcula:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$$

Solución.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$$

La fracción $\frac{5}{8}$ se obtiene simplificando la fracción $\frac{15}{24}$.

Ejercicios

10. Calcula y simplifica:

$a)\ \frac{2}{3}\cdot\frac{-3}{5}$ $b)\ \frac{11}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{10}$

Cociente de fracciones:

La inversa de la fracción no nula $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$

El cociente de dos fracciones es el producto de la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo:
Calcula:

$$\frac{7}{4}:\frac{2}{5}$$

Solución.

$$\frac{7}{4}:\frac{2}{5}=\frac{35}{8}$$

Ejercicios

11. Calcula y simplifica:

$a)\ \frac{5}{3}:\frac{11}{5}$ $\quad b)\ 7:\frac{4}{3}$ $\quad c)\ \frac{4}{3}:7$

Operaciones combinadas con fracciones:

Cuando aparecen varias operaciones y también paréntesis entre fracciones tenemos que aplicar la jerarquía de las operaciones.

Ejercicios

12. Calcula y simplifica:

$a)\ \dfrac{\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-1\right)}{\frac{3}{4}+1}$ $\quad b)\ \left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right):\frac{7}{5}$

6. Potencias de fracciones. Propiedades

La potencia de base una fracción $\frac{a}{b}$ y exponente un número natural n distinto de cero es el número racional que resulta de multiplicar la fracción $\frac{a}{b}$ por sí misma *n* veces, es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ \cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ veces}$$

Cuando la base es distinta de cero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 := 1$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\left(\frac{45}{11}\right)^0 = 1$$

La potencia de base una fracción no nula $\frac{a}{b}$ y exponente -*n* siendo *n* un número natural n distinto de cero es el número racional que resulta de calcular la fracción inversa de $\left(\frac{a}{b}\right)^n$,es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ \cdots\cdot\frac{a}{b}}_{n\ veces}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{125}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{81}{16}$$

Propiedades de las potencias con base una fracción no nula y exponente entero

- Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- Producto de potencias con la misma base $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
- Cociente de potencias con la misma base $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
- Potencia de un producto $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m$
- Potencia de base otra potencia $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$

Ejercicios

13. Expresa como potencia de base 10 el resultado de la operación:
$0{,}0\,000\,001 : 10\,000\,000\,000$

14. Expresa con una sola fracción irreducible:

$a)\ \frac{2^3}{2^4}$ $\quad b)\ 2^{-1}$ $\quad c)\ \frac{a^2}{a^6}$ $\quad d)\ x^{-1} \cdot y^{-2}$

$e)\ \frac{x^2 \cdot y^4}{x^3 \cdot y^6}$ $\quad f)\ (2 \cdot a^2 \cdot b)^{-2}$ $\quad g)\ \left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$ $\quad h)\ \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$

15. Reduce a un solo número racional:

$a)\ \left(\frac{1}{3}\right)^2$ $\quad b)\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ $\quad c)\ \left(\frac{-1}{3}\right)^{-2}$

$d)\ \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)^5$ $\quad e)\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5$ $\quad f)\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

7. Decimales y fracciones. Números irracionales

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división entre el numerador y el denominador. El cociente puede ser:

Cociente	***Ejemplos***	
Número entero	$\frac{72}{9} = 8{=}8{,}0$	Cociente entero

Decimal exacto	$\frac{197}{40} = 4{,}925$	Cociente decimal exacto
Decimal periódico puro	$\frac{11}{3} = 3{,}6 \cdots = 3{,}\hat{6}$	Hay una o varias cifras decimales que se repiten indefinidamente. Estas cifras que se repiten se llaman periodo.
Decimal periódico mixto	$\frac{87}{66} = 1{,}3181818 \cdots = 1{,}3\widehat{18}$	Hay una o varias cifras decimales que no forman parte del periodo

Sabías que…

Una fracción irreducible cuyo denominador solo tenga los divisores primos 2 y 5 da lugar a un decimal exacto y en el caso de que tenga otros divisores primos dará lugar a un decimal periódico.

Ejercicios

16. Calcula la expresión decimal de las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{10}{3}$ $\qquad b)\ \frac{3}{7}$ $\qquad c)\ \frac{8}{6}$

17. Sin hacer la división, di si estas fracciones darán lugar a decimales exactos o periódicos.

$a)\ \frac{313}{500}$ $\qquad b)\ \frac{122}{150}$ $\qquad c)\ \frac{505}{1024}$

Números irracionales

Existen números decimales que no son exactos ni periódicos a estos números se les llama números irraciones. Tienen infinitas cifras decimales que no son periódicos y no se pueden expresar como un cociente de dos enteros.

Son irracionales: $\pi, \sqrt{2}, e, \cdots$

Observa que no todas las raíces de números enteros son irracionales. Por ejemplo$\sqrt{4}$ =2 es un número entero.

Sabías que…

El inteligentísimo y brillante Mr. Spock, de la serie futurista Star Trek, consiguió salvar a la tripulación de la maldad de una diabólica computadora. Le ordenó que calculara el valor de π, y como este es irracional, la computadora se quedó presa del proceso y…ellos escaparon.

Sabías que…

El número aúreo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 \cdots$ es un irracional.

Más información en:

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci

8. Proporcionalidad y porcentajes. Repartos

Una razón es el cociente indicado de dos números que corresponden a valores de diferentes magnitudes:

$$\frac{a}{b}$$

Una proporción es una igualdad de dos razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por su colocación, los números *a* y *d* se llaman extremos y los números *b* y *c* medios.

En una proporción se cumple que el producto de extremos es igual al producto de medios.

Dos magnitudes son directamente proporcionales con razón de proporcionalidad *k* cuando el cociente $\frac{a}{b}$ es siempre igual a k.

Observa, que en este caso al aumentar una magnitud también aumenta el valor de la otra.

$$\frac{a}{b} = k$$

Dos magnitudes son inversamente proporcionales con razón de proporcionalidad *k* cuando el producto $a \cdot b$ es siembre igual a k.

$$a \cdot b = k$$

Observa que al aumentar el valor de una disminuye el valor de la otra.

Ejemplos:

El peso es directamente proporcional a la masa.

En un movimiento rectilíneo y uniforme el espacio recorrido es directamente proporcional a la velocidad.

En un movimiento rectilíneo y uniforme el tiempo empleado es inversamente proporcional a la velocidad.

En una factura de compra de patatas el precio total es directamente proporcional al número de kilogramos que se han comprado.

9. Regla de tres simple directa e inversa

***Problema 1*. Para transportar 120000 litros de agua se necesitan 8 camiones cisterna. ¿Cuántos camiones se necesitarán para transportar 315000?**

Solución. A más volumen de agua, más camiones. Es evidente que se trata de una proporcionalidad **directa**.

En el método de la regla de tres tenemos que colocar en cada columna los valores de una misma magnitud

$$\left.\begin{array}{lcr} 120\,000\ litros & ------\rightarrow & 8\ camiones \\ 315\,000\ litros & ------\rightarrow & x \end{array}\right\}$$

Como la relación entre litros y camiones es constante, la ecuación que tenemos que plantear es:

$$\frac{120\,000}{8} = \frac{315\,000}{x}$$

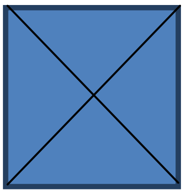
Es equivalente a plantear:

$$\frac{120\,000}{315\,000} = \frac{8}{x}$$

Basta con recordar que en una proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos.

Ahora aplicamos la regla del cuadrado y sus diagonales para despejar *x*:

$x = \frac{8 \cdot 315\,000}{120\,000}$;



$$x = 21\ camiones$$

También podemos calcular los litros que puede llevar un camión y después divir el total de litros que se tienen que transportar por la capacidad de un camión. Este método se llama reducción a la unidad de la magnitud.

En este caso,

$$120\,000 : 8 = 15\,000\ litros\ caben\ en\ cada\ camión$$

$$315\,000 : 15\,000 = 21\ camiones\ se\ necesitan$$

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre litros y camiones?

La respuesta es 15 000

***Problema 2*. Seis pintores tardan 8 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarán 4 pintores en realizar la misma tarea?**

A menos pintores, más tiempo Se trata de una proporcionalidad **inversa**.

Planteamos el problema con el esquema de regla de tres.

$$\left.\begin{array}{lcr} 6\ pintores & ------\rightarrow & 8\ días \\ 4\ pintores & ------\rightarrow & x \end{array}\right\}$$

El producto del número de pintores por el número de días es constante.

Por lo tanto la ecuación que tenemos que plantear es

$$\frac{4}{6}=\frac{8}{x}$$

Esta ecuación es equivalente, $\underbrace{4\cdot x}_{pintores\ por\ días} = \overbrace{6\cdot 8}^{pintores\ por\ días}$

Por lo tanto, $x=\frac{6\cdot 8}{4}; x=12\ días.$

Ejercicios

18. El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?

19. Cinco carpinteros necesitan 21 días para entarimar un suelo. ¿Cuántos carpinteros serán necesarios si se desea hacer el trabajo en 15 días?

20. Una locomotora, a 85 km/h, tarda tres horas y dieciocho minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades. ¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta si aumenta su velocidad a 110 km/h?

10. Repartos proporcionales directos.

En los problemas de repartos tenemos una cantidad que tenemos que repartir con unas condiciones.

Los repartos directamente proporcionales a unas cantidades iniciales se resuelven de la siguiente forma:

1. Se suman los valores iniciales
2. Se divide la cantidad a repartir entre el resultado del paso 1.
3. Se multiplica cada valor inicial por el resultado del paso 2.

La suma de los valores obtenidos en 3 da la cantidad a repartir.

Ejemplo:

Dos amigas juntan 1,2 y 1,8 € que tenían para comprar un paquete de pegatinas de una serie de dibujos animados. El paquete contiene 120 pegatinas. ¿Cómo deben repartírselas de forma justa?

Solución.

Se suman los valores iniciales	$1{,}20+1{,}80=3$
Se divide 120 entre 3	$\frac{120}{3}=40$
Se multiplican los valores iniciales por 40	$1{,}20\cdot 40=48\ pegatinas$ $1{,}80\cdot 40=72\ pegatinas$
Comprobación: 48+72= 120 pegatinas	

Ejercicios

21. Los dos camareros de un bar se reparten un bote con 544 € de propina de forma proporcional al número de días que han trabajado, que han sido respectivamente 60 y 100 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

22. Por un reportaje fotográfico realizado por tres fotógrafos me cobraron 6720 euros. Del reportaje, 140 fotos eran del primer fotógrafo, 180 del segundo y 240 del tercero. ¿Qué cantidad de euros le corresponde a cada uno?

23. Modeliza algebraicamente el problema del reparto proporcional directo.

Indicación.

Sea M la cantidad a repartir directamente proporcional a las cantidades a, b, c

Sean x, y, z las cantidades que corresponden a cada uno entonces se tiene:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{M}{a+b+c}$$

Completa: La constante de proporcionalidad es ___________

Las cantidades que corresponden a cada uno son__________

____

11. La fracción como operador

En este apartado calculamos la fracción de una cantidad.

Ejemplo:

Calcula los $\frac{2}{3}$ de 360 €: → $\frac{2}{3} \cdot 360 = \frac{2 \cdot 360}{3} = 240$ €

De igual forma, el producto de las fracciones se puede encadenar:

Calcula los $\frac{4}{5}$ de los $\frac{2}{3}$ de 360 €: → $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 360 = \frac{8}{15} \cdot 360 = 192$ €

Ejercicios

24. En una clase de 35 alumnos, los $\frac{2}{7}$ son chichas, ¿cuántos chicos hay?

25. Unos amigos hacen un trayecto de 210 km en bicicleta. En la primera etapa hacen $\frac{1}{3}$ del trayecto, en la segunda los $\frac{2}{5}$ y dejan el resto para la tercera etapa. ¿Cuántos km han recorrido en cada etapa?

12. Cálculo de la fracción que queda

Todas las fracciones en que se divide un todo suman 1.

Ejemplo:

De un viaje en tren llevo recorridas $\frac{5}{7}$ partes. ¿Qué fracción del viaje me queda por recorrer?.

Queda por recorrer:	→	$1-\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$

Es decir, llevo recorridas $\frac{5}{7}$ partes y me quedan $\frac{2}{7}$. En total deben sumar 1.

Sabías que…

La herencia y el Cadí.

La herencia de tres hermanos consistía en 17 camellos que se debían repartir de la siguiente forma: al mayor le correspondía la mitad, al mediano la tercera parte y al menor la novena parte.

Como no podían partir ningún camello, acudieron al Cadí para que los ayudara a resolver el problema. El Cadí tomó uno de sus camellos y lo añadió a la herencia. Ahora había 18 camellos que se repartieron así:

mayor $\frac{18}{2}=9\ camellos$, mediano $\frac{18}{3}=6\ camellos$ y menor $\frac{18}{9}=2\ camellos$

Se han repartido 17 camellos y ha sobrado el del Cadí. ¿Podrías explicar qué ha pasado?

Ejercicios

26. Una empresa tiene tres socios. Dos de ellos poseen $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ partes respectivamente. ¿Qué parte de la empresa posee el tercer socio?

27. Una persona realiza $\frac{3}{5}$ partes de un viaje en tren, los $\frac{7}{8}$ del resto en autobús y la última parte en taxi. ¿Qué parte del trayecto ha recorrido en taxi?

13. Cálculo del total a partir de la fracción

En ciertos problemas se conoce la parte que representa una fracción dada y se busca calcular la cantidad total.

Ejemplo:

Una piscina está llena hasta sus $\frac{3}{7}$ partes. Si tiene 3600 litros de agua, ¿Cuál es su capacidad total?.

El enunciado dice…	→	$\frac{3}{7}$ del total son 3600
Que en matemáticas se escribe	→	$\frac{3}{7}\cdot x=3600$
Para calcular la x se invierte la fracción y se multiplica	→	$x=3600\cdot\frac{7}{3}=\frac{25200}{3}=8400$

Ejercicios

28. Los $\frac{3}{11}$ de los alumnos de la escuela llevan gafas, si llevan gafas 72 alumnos, ¿cuántos alumnos son en total?

29. He gastado las $\frac{3}{4}$ partes de mi dinero y me quedan 900 euros. ¿Cuánto tenía?

30. Elabora un método gráfico para resolver el problema 29.

31. Unos amigos hacen una excursión en tres días. El primer día recorren $\frac{1}{4}$ del trayecto, el segundo día $\frac{2}{3}$, y dejan los últimos 25 km para el tercer día. ¿Cuántos kilómetros han recorrido en total?

14. Porcentajes

Porcentaje mediante regla de tres.

Cuando tenemos 100 unidades y r de ellas tienen una cierta propiedad decimos que el ***r***% tienen dicha propiedad.

Ahora, si tenemos una cantidad ***T,*** ¿cuántas tienen esa propiedad?

Planteamos la regla de tres

$$\left.\begin{array}{ccc} Parte & & Total \\ r & ------\rightarrow & 100 \\ p & ------\rightarrow & T \end{array}\right\}$$

Las magnitudes parte y total son directamente proporcionales porque el cociente entre la parte y el total es constante. Observa que a mayor parte mayor total.

De donde deducimos que el ***r***% de una cantidad T se calcula mediante la fórmula:

$$p = \frac{T \cdot r}{100}$$

Porcentaje como fracción de una cantidad. Observa que $\frac{r}{100}$ de la cantidad ***T*** es igual al ***r***% de dicha cantidad.

Ejercicios

32. El 25 % de los socios de un club son menores de 20 años. Si el club tiene 180 socios, ¿cuántos socios menores de 20 años tiene el club?

33. De 600 personas encuestadas, 396 dicen que leen con frecuencia. ¿Qué porcentaje representan?

34. En la compra de un producto he pagado con antelación 528 euros que supone el 48% del total que cuesta. ¿Cuál es el precio total del producto?

35. El censo electoral de una población es de 2200 personas. En unas elecciones un partido político ha obtenido el 40,5 % de los votos. ¿Cuántos votos ha obtenido?

36. Una máquina fabrica al día 650 piezas de las que 26 presentan algún defecto. ¿Qué porcentaje de piezas defectuosas fabrica la máquina?

15. Aumentos Porcentuales

Aumentar el ***r***% una cantidad ***C*** significa realizar el siguiente cálculo:

$$C + el\ r\%\ de\ C$$

Observa que si ***C*** es igual a una unidad entonces el resultado del cálculo anterior es:

A

P

índice de variación, es decir:

$$C_a = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Ejemplos:

El precio de un libro es de 32 euros. A este precio hay que añadirle el 7% de I.V.A. ¿Cuál es el precio final?

Resolución mediante la fórmula:

Datos: r=7; C=32 . Nos piden la cantidad final

$C_a = 32 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)$=34,24

Planteamiento mediante regla de tres.

$$\left.\begin{array}{ccc} Sin\ IVA & & Con\ IVA \\ 100 & ------\rightarrow & 107 \\ 32 & ------\rightarrow & C_a \end{array}\right\} C_a = \frac{32 \cdot 107}{100} = 34{,}24$$

Planteamiento como fracción de una cantidad.

$$C_a\ es\ el\ \frac{107}{100}\ de\ 32$$

Un ordenador cuesta con el IVA (21%) incluido 472 €. ¿Cuánto cuesta sin IVA?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos: r=21; C_a=472. Aquí nos piden la cantidad.

$$472 = C \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right)$$

Ahora, despeja C y termina el ejercicio

Planteamiento con regla de tres

$$\left.\begin{array}{ccc} Sin\ IVA & & Con\ IVA \\ 100 & ------\rightarrow & 121 \\ C & ------\rightarrow & 472 \end{array}\right\} C = \frac{472 \cdot 100}{121} = 390{,}08$$

Planteamiento cómo cálculo del Total a partir de conocer la parte.

Sabemos que el $\frac{121}{100}$ de una cantidad C es 472. De donde, la cantidad $C = \frac{472 \cdot 100}{121}$

Ejercicios

37. Completa

r	$1 + \frac{r}{100}$
1	
40	
16	
8	
50	
100	
200	
25	

Ejemplos:

De una superficie edificada de 750 m^2 se ha pasado a una superficie edificada de 1200 m^2. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento que ha habido?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos C=750 m^2; C_a=1200 m^2. Nos piden r.

$$1200 = 750 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \Rightarrow \frac{1200}{750} = 1 + \frac{r}{100}$$

Como $\frac{1200}{750}$ es igual a 1,6 entonces r=60

Planteamiento mediante regla de tres

$$\left.\begin{array}{ccc} Cantidad & & Cantidad\ aumentada \\ 750 & ------\rightarrow & 1200 \\ 100 & ------\rightarrow & x \end{array}\right\} x = \frac{1200 \cdot 100}{750} = 160$$

Por lo tanto el porcentaje es del 60%

Ejercicios

38. El precio de un portátil que costaba 490 €, ha subido el 14%. ¿Cuánto cuesta ahora?

39. Al subir el precio de unos zapatos un 25 %, el precio final es ahora de 35 euros. ¿Cuál era el precio inicial?

40. Al aumentar el precio de un televisor ha pasado de 350 a 392 €. ¿Qué tanto por ciento ha subido?

41. Se prevé una subida de la bombona del gas propano para el año que viene del 8 %. Si ahora cuesta 67,5 €, ¿cuánto costará?

16. Disminuciones Porcentuales

Disminuir el ***r***% una cantidad ***C*** significa realizar el siguiente cálculo:

$$C - el\; r\%\; de\; C$$

Observa que si C es igual a una unidad entonces el resultado del cálculo anterior es:

$$1 - \frac{r}{100}$$

A este número se le llama índice de variación para una disminución del *r%*.

Por lo tanto, para disminuir el ***r***% a una cantidad ***C*** podemos multiplicar dicha cantidad por el índice de variación, es decir:

$$C_d = C \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

Ejemplos:

El precio de un libro es de 32 euros. Si tiene una rebaja del 7%, ¿cuál es el precio final?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos: r=7; C=32. Nos piden la cantidad disminuida

$C_d = 32 \cdot \left(1 - \frac{7}{100}\right)$ =29,76

Planteamiento mediante regla de tres.

$$\left.\begin{array}{ccc} Precio & & Precio\; Descontado \\ 100 & ------\rightarrow & 93 \\ 32 & ------\rightarrow & C_d \end{array}\right\} C_d = \frac{32 \cdot 93}{100} = 29{,}76$$

Planteamiento como fracción de una cantidad.

$$C_d\; es\; el\; \frac{93}{100}\; de\; 32$$

Un ordenador cuesta con una rebaja del 15% incluido 540 €. ¿Cuánto cuesta sin rebaja?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos: r=15; C_d=540. Aquí nos piden la cantidad C.

$$540 = C \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right)$$

Despejando, nos queda $C = \frac{540 \cdot 100}{85}$=635,29

Planteamiento mediante regla de tres

$$\left.\begin{array}{ccc} Precio & & Precio\ Descontado \\ 100 & ------\rightarrow & 85 \\ C & ------\rightarrow & 540 \end{array}\right\} C = \frac{540 \cdot 100}{85} = 635{,}29$$

Planteamiento como cálculo del Total a partir de conocer la parte

$$\frac{85}{100}\ de\ una\ cantidad\ C\ es\ igual\ a\ 540$$

Ejercicios

42. Completa

r	$1 - \frac{r}{100}$
1	
40	
16	
8	
50	
100	
20	
25	

Un vestido que costaba 240 €, cuesta en rebajas 168 €. ¿Qué porcentaje de descuento han hecho?

Planteamiento mediante la fórmula:

Datos C=240 €; C_d=168 €. Nos piden r.

$$168 = 240 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) \Rightarrow \frac{168}{240} = 1 - \frac{r}{100}$$

Como $\frac{168}{240}$ es igual a 0,7 entonces r=30

Planteamiento mediante regla de tres:

$$\left.\begin{array}{ccc} Precio & & Descuento \\ 100 & ------\rightarrow & r \\ 240 & ------\rightarrow & 240 - 168 \end{array}\right\} x = \frac{72 \cdot 100}{240} = 30$$

Planteamiento con fracciones

$$\frac{r}{100}\ de\ 240\ es\ 72$$

Ejercicios

43. El precio de un ordenador que costaba 490 ha sido rebajado un 18 %, ¿cuánto cuesta ahora?

44. El precio de unos zapatos está rebajado un 25%. El precio rebajado es ahora de 36 euros. ¿Cuál era el precio antes de la rebaja?

45. Un televisor que costaba 390 ha sido rebajado a 315,9 €. ¿Qué tanto por ciento de rebaja tiene?

46. Se prevé una bajada del precio del jamón para el año que viene del 8 %. Si ahora cuesta 17,5 €/kg. ¿Cuánto costará?

Ejercicios finales

47. El sueldo mensual de un representante de informática consta de una parte fija de 500 € más un 4% del dinero de las ventas que formalice.
   a) Si durante un mes ha vendido 54 ordenadores a un precio por unidad de 450 €, ¿cuánto le corresponde cobrar dicho mes?
   b) Si su sueldo durante un mes ha sido 1300 €, ¿a cuánto asciende el importe de las ventas realizadas durante dicho mes?

48. Reparte 1485 € entre tres niños en partes directamente proporcionales a sus edades que son 12, 11 y 10 años.

49. Una mezcla de café está compuesta por 3/8 de café de Brasil, 5/12 de café de Colombia y el resto de café de Arabia.
   a) ¿Qué parte de café de Arabia tiene la mezcla?
   b) Si de café de Arabia hay 70 gramos, ¿Qué cantidad hay de los otros tipos de café?

50. Aumenta 1 euro el 2 por ciento. Disminuye la cantidad resultante el 2 por ciento. ¿Queda un euro?

51. Una factura con I.V.A. incluido asciende a 345 euros. Si el impuesto que se aplica es del 21%, calcula el valor de la factura sin I.V.A.

52. Seis pintores tardan 8 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarán 4 pintores en realizar la misma tarea?

53. En una granja, 16 conejos consumen 100 kg de alfalfa en 12 días. ¿Cuántos días pueden comer 6 conejos con 100 kg de alfalfa?

54. Tres socios pusieron 2, 3 y 6 millones, respectivamente, para crear una empresa.
   a. ¿Qué parte de las ganancias corresponderá a cada uno?
   b. Si las ganancias del primer año fueron de 75900€, ¿cuánto corresponderá a cada uno?

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS.

UNIDAD DIDÁCTICA 3

Polinomios

Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Unidad Didáctica 3.Polinomios.

1 Introducción

En este tema generalizamos el modelo numérico introduciendo el lenguaje algebraico y las operaciones entre expresiones algebraicas de una variable.

La palabra álgebra se debe al matemático árabe AL-KHOWARIZMI, que murió en la primera mitad del siglo IX. Su obra más importante se titula AL-JABR WA'L MUQABALAH.

Una expresión algebraica es un conjunto de números y variables (letras) entre las cuales existen las operaciones de suma, resta, producto, división, potencia o raíz.

Significado

"AL-JABR"= álgebra=restauración o complementación.

"MUQABALAH"= reducción o compensación.

Ejemplo:

$$3xy^2 + \sqrt[3]{x+5} - 5$$

Observa que la operación producto no suele escribirse entre las variables y los números.

Debemos entender:

$$3 \cdot x \cdot y^2 + \sqrt[3]{x+5} - 5$$

2 Monomios, grado de un monomio, monomios semejantes, operaciones con monomios.

Un monomio en la variable x con coeficiente real es una expresión algebraica de la forma:

$$ax^n$$

donde *a* es un número real y **n** es un número entero positivo o es cero.

El monomio x^0 se identifica con el número 1.

Al número *a* se le llama coeficiente o parte numérica del monomio. A x^n se le llama parte literal del monomio.

Si *a* es distinto de cero entonces se dice que *n* es el grado del monomio.
Si *a* es cero entonces el grado del monomio se dice que es infinito.

Ejemplo de monomio:

$$3x^5$$

¿La expresión algebraica $\sqrt{2x}$ es un monomio? Razona la respuesta.
¿Y la expresión $\frac{1}{x}$?
¿Es razonable que el grado del monomio nulo sea infinito?

Ejercicios

1. Completa la tabla:

Monomio	Coeficiente	Grado
$-3x$		
0		
5		
x		
$-x$		
	-1	2
$\frac{2}{3}x^2$		
$\sqrt{2}x$		
$-\frac{1}{3}x^2$		

Dos monomios en la indeterminada *x* se dice que son ***semejantes*** si tienen la misma parte literal.

<u>Operaciones con monomios:</u>

Dos monomios que sean semejantes se pueden sumar o restar. Para sumar dos monomios semejantes se suman los coeficientes y se deja igual la parte literal.
Para restar dos monomios semejantes se restan los coeficientes y se deja igual la parte literal.

Ejemplo 1:

$$4x^5 + 6x^5 = 10x^5$$

Ejemplo 2:

$$14x^7 - 6x^7 = 8x^7$$

Ejercicios

2. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $\boldsymbol{x + 2x - 4x + 8x}$	**b)** $\boldsymbol{3x - 4x + 7x + 4x}$	**c)** $\boldsymbol{-2x^2 + x^2}$
d) $\boldsymbol{\frac{2}{3}x - x}$	**e)** $\boldsymbol{2x - \frac{1}{3}x + x}$	**f)** $\boldsymbol{3x^5 + 6x^5}$

El producto de dos monomios no nulos en la indeterminada *x* es igual a un monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados.
El producto de un monomio por el monomio nulo es el monomio nulo.

Ejemplo 1 :

$$4x^5 \cdot 6x^2 = 24x^7$$

Ejemplo 2:

$$0 \cdot 6x^7 = 0$$

Ejercicios

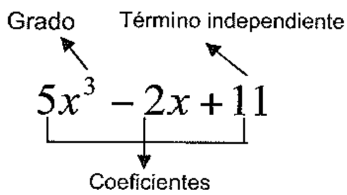
3. Realiza las siguientes operaciones con monomios:

a) $\boldsymbol{x \cdot 1}$	**b)** $\boldsymbol{1 \cdot x}$	**c)** $\boldsymbol{-1 \cdot x^2}$
d) $\boldsymbol{x \cdot x}$	**e)** $\boldsymbol{x \cdot x^2}$	**f)** $\boldsymbol{x^2 \cdot x^8}$

¿La expresión algebraica $14x/(2x^5)$ es un monomio?

3 Polinomios, grado de un polinomio, operaciones con polinomios.

- Un ***polinomio*** es la suma o resta de varios monomios no semejantes.
- Cada uno de los monomios que componen un polinomio se llama ***término***.
- Los ***coeficientes*** de un polinomio son todos los coeficientes de los términos que componen el polinomio.
- Se llama ***polinomio nulo*** al polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a cero.
- El ***grado*** de un polinomio no nulo es el máximo de los grados de los términos que componene el polinomio.
- El grado del polinomio nulo es infinito.
- El término de grado cero se llama ***término independiente***.



Los coeficientes son 5,0,-2,11.

Un polinomio se dice que está **completo** cuando todos los términos del grado cero al grado mayor tienen coeficientes distintos de cero.

Un polinomio se dice que está ordenado en ***orden creciente*** si en primer lugar escribimos el término independiente (en el caso de que tenga) y a continuación escribimos el resto de términos ordenados de menor a mayor grado.

Ejemplo :

$$\mathbf{2 + 3x - 7x^2 + x^3}$$

Un polinomio se dice que está ordenado en ***orden decreciente*** si escribimos los términos de grado distinto de cero ordenados de mayor a menor grado y a continuación el término independiente en el caso de que tenga.

Ejemplo 1:

$$6x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x + 1$$

Ejemplo 2:

$$3x^2 - x$$

Ejercicios

4. Completa la tabla. Fíjate en el ejemplo.

	Coeficientes	Grado
$3x^3 - 5x + 1$	3, 0, –5, 1	3
$5x^3 - x^2 + 2x - 7$		
$x^4 - 2x + 1$		
$-2x^5 + 3x^4 + 5x^3 - 2$		

	Coeficientes	Grado
$x^4 + 2x^3 - 3x$	1, 2, 0, –3, 0	4
$-4x^2 + 9$		
$6x^4 + 2x^3 - 5x^2 + x$		
$-5x^3 + 7$		

5. Completa la tabla. Fíjate en el ejemplo.

	Ordenado	Coeficientes	Grado
x^2+3x^3-5+6x	$3x^3+x^2+6x-5$	$3, 1, 6, -5$	3
$3x-2x^3-5+x^2$			
$2+x^4-x$			
$-x^5+-x+x^2+1+x^4-x^3$			
$-2+3x-4x^2+5x^3$			

El ***valor numérico*** de un polinomio *P(x)* en número real dado es el resultado de sustituir la variable por dicho número y realizar las operaciones.

Ejemplo: Calcula el valor de $3x^2+7x-1$ ***para*** $x=2$

Calcula el valor de $3x^2+7x-1$ **para** $x=2$ **y para** $x=-4$

$x=2$	$\Rightarrow$	Sustituimos la x	$\Rightarrow$	$3\cdot 2^2+7\cdot 2-1$
		Potencias		$3\cdot 4+7\cdot 2-1$
		Productos		$12+14-1$
		Sumas/restas		25

Ejercicios

6. Calcula el valor de x^3+5x^2-4x+3 para $x=2$ y para $x=-1$

$x=2$	$\Rightarrow$	Sustituye la x	$\Rightarrow$	
		Potencias		
		Productos		
		Sumas/restas		
$x=-1$	$\Rightarrow$	Sustituye la x	$\Rightarrow$	
		Potencias		
		Productos		
		Sumas/restas		

7. Calcula el valor numérico de los polinomios en los valores indicados

Polinomio	$x=-1$	$x=0$	$x=2$
x^3-2x^2+3	$(-1)^3-2\cdot(-1)^2+3=$ $-1-2+3=0$	$0^3-2\cdot 0^2+3=$	$2^3-2\cdot 2^2+3=$
x^2-3x+1			
$2x^3-8x$			
$-x^2+3x+4$			

Operaciones con polinomios

Suma:

La suma de dos polinomios es el polinomio que resulta de sumar los términos semejantes de ambos polinomios.

Ejemplo:

$$P(x)=6x^5+9x^4-5x^3+x+1$$

$$Q(x)=7x^5+2x^4+3x^3+2x+4$$

$$P(x)+Q(x)=13x^5+11x^4-2x^3+3x+5$$

Producto de un número por un polinomio

El producto de un número por un polinomio es el polinomio que resulta de múltiplicar por dicho número todos los coeficientes de los términos del polinomio.

Ejemplo:

$$P(x)=6x^5+9x^4-5x^3+x+1$$

$$3\cdot P(x)=18x^5+27x^4-15x^3+3x+3$$

Opuesto de un polinomio

El opuesto de un polinomio es el resultado de cambiar de signo todos los términos de dicho polinomio.

Ejemplo:

$$P(x) = 6x^5 + 9x^4 - 5x^3 + x + 1$$

$$-P(x) = -6x^5 - 9x^4 + 5x^3 - x - 1$$

Resta

La resta de dos polinomios es el polinomio que resulta al sumar al primer polinomio el opuesto del segundo.

Ejemplo :

$$P(x) = 5x^2 + 8x + 4$$

$$Q(x) = 3x^2 + 5x + 5$$

$$P(x) - Q(x) = 5x^2 + 8x + 4 - (3x^2 + 5x + 5) =$$

$$5x^2 + 8x + 4 - 3x^2 - 5x - 5 =$$

$$2x^2 + 3x - 1$$

Ejercicios

8. Dados los polinomios

$P(x) = 5x^2 - 2x + 3$

$Q(x) = -3x^3 + 2x - 4$

calcula

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

Producto de un monomio por un polinomio

El producto de un monomio por un polinomio es el polinomio formado por los términos que

Observa

$$-(x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1) =$$

$$-x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

El resultado es el mismo que si multiplicamos por (-1) el polinomio:

$$(-1) \cdot (x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1) =$$

$$-x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

resultan al multiplicar dicho monomio por todos los términos del polinomio dado.

Ejemplo :

$4\cdot(5x^2+3x-5)$	$\rightarrow$	$20x^2+12x-20$
$3x\cdot(-2x^2-5x+3)$	$\rightarrow$	$-6x^3-15x^2+9x$
$-2x^2\cdot(x^2-x-7)$	$\rightarrow$	$-2x^4+2x^3+14x^2$

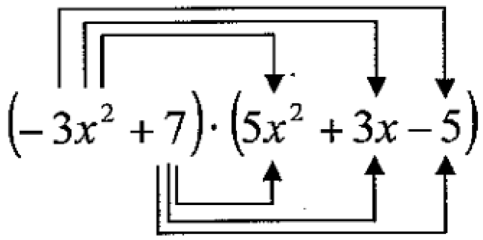
Ejercicios 3

9. Calcula

$-3\cdot(x^2+2x-2)$	$\rightarrow$	
$x\cdot(-2x^2+x+6)$	$\rightarrow$	
$-2x^2\cdot(2x^2-4x-1)$	$\rightarrow$	
$5\cdot(-x^2+3x+1)$	$\rightarrow$	
$4x\cdot(3x^2+3x-2)$	$\rightarrow$	
$3x^2\cdot(2x^2+6x-8)$	$\rightarrow$	
$4x^2\cdot(-9x^2-6x-3)$	$\rightarrow$	
$-3x\cdot(-5x^2+3x-4)$	$\rightarrow$	

__Producto de polinomios__

El producto de dos polinomios es el polinomio cuyos términos resultan de multiplicar todos los términos del primer polinomio por todos los términos del segundo polinomio y agrupar los monomios semejantes.



Ejemplo : Calcula el producto

$$\left(-3x^2+7\right)\cdot\left(5x^2+3x-5\right)=$$

Se agrupan los monomios

$$-15x^4-9x^3+\overbrace{15x^2+35x^2}^{monomios\ semejantes}+21x-35=$$

$$-15x^4-9x^3+50x^2+21x-35=$$

Ejercicios

10. Calcula

Calcula: $\left(-x+5\right)\cdot\left(3x^2+x+2\right)$

Multiplica todos los términos del primero por los del segundo	→	
Agrupa términos semejantes	→	

Calcula: $\left(x^2+3x-2\right)\cdot\left(2x^2-3x-1\right)$

Multiplica todos los términos del primero por los del segundo	→	
Agrupa términos semejantes	→	

Sabías que…

Paolo Ruffini (Valentano, 22 de septiembre de 1765 – Módena, 10 de mayo de 1822) fue un matemático, profesor y médico italiano.

3.1 Regla de Ruffini

Es un método que sirve para hallar los coeficientes del polinomio cociente y el resto de la división de un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x + a$.

En el siguiente enlace encontrarás un vídeo que explica el algoritmo:

https://www.youtube.com/watch?v=nLhT2jET7WY

y en esta página encontrar ejercicios interactivos:

http://www.vitutor.com/ab/p/a_8e.html

Explicación del método mediante un ejemplo:

Consideramos los polinomios $P(x) = -3x + 2x^4 + x^2 + 5$ y $Q(x) = x - 2$.

Hallaremos el cociente y el resto de la división $P(x): Q(x)$

Primero: Escribimos $P(x)$ en orden decreciente, es decir, $P(x) = 2x^4 + x^2 - 3x + 5$. Con este orden los coeficientes son: 2,0,1,-3,5.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Hemos colocado a la izquierda el término independiente de $Q(x)$ cambiado de signo.

Segundo: Bajamos el primer coeficiente de $P(x)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

Tercero: Multiplicamos el término independiente de $Q(x)$ por el número que hemos bajado y colocamos el resultado debajo del segundo coeficiente de $P(x)$ y sumanos.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & 4 & & & \end{array}$$

Cuarto: Multiplicamos el término independiente de $Q(x)$ por el último número que tenemos en la parte inferior y colocamos el resultado debajo del siguiente coeficiente de $P(x)$ y sumamos.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & & 4 & 8 & & \\ \hline & 2 & 4 & 9 & & \end{array}$$

Volvemos a repetir este paso hasta que ya no queden coeficientes de $P(x)$.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & & 4 & 8 & 18 & 30 \\ \hline & 2 & 4 & 9 & 15 & \boxed{35} \end{array}$$

Los números que nos aparecen en la última fila excepto el último son los coeficientes del polinomio cociente $C(x)$ en orden decreciente y el último número es el resto de la división.

Es decir:

$$C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 9x + 15$$

$$R = 35$$

Comprobación:

Tenemos que comprobar que se verifica la igualdad:

$$Dividendo = divisor \cdot cociente + resto$$

En efecto, $2x^4 + x^2 - 3x + 5 = (x - 2) \cdot (2x^3 + 4x^2 + 9x + 15) + 35$.

Ejercicios

11. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

A) $(3x^4 + 2x^3 - 5x + 8): (x - 3)$
B) $(x^3 - 4x^2 + 9 + 6x): (x + 3)$

3.2 Teorema del resto: El valor numérico de un polinomio $P(x)$ en un número real *a* coincide con el resto de la división $P(x): (x - a)$.
El valor numérico del polinomio $P(x)$ en el número real *a* se denota por $P(a)$.

Ejemplo :

Dado el polinomio $P(x) = -3x + 2x^4 + x^2 + 5$***, calcula*** $P(2)$.

En el apartado anterior hemos visto que el resto de la división $P(x): (x - 2)$ es 35. Aplicando el teorema del resto deducimos que $P(2) = 35$

Ejercicios

12. Dado el polinomio $P(x) = 2x^4 + 9x - 3$, calcula $P(-1)$ utilizando el teorema del resto.

4. Identidades notables.

Una ***identidad*** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor que tengan las variables.
En esta unidad didáctica estudiamos tres identidades: El cuadrado de la suma, el cuadrado de la diferencia y suma por diferencia.

Cuadrado de la suma:

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2}$$

Ejemplo:

Desarrolla: $\boldsymbol{(2x + 5)^2}$

Solución: $\boldsymbol{(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25}$

Ejercicios

13. Desarrolla:
$\boldsymbol{a})\ \boldsymbol{(3x + 5)^2}$
$\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{(2x + 4)^2}$

Cuadrado de la diferencia:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(2x - 5)^2$

Solución: $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

Ejercicios

14. Desarrolla:

$a)$ $(1 - 3x)^2$

$b)$ $(x - 2)^2$

Suma por diferencia:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

Desarrolla: $(2x + 5) \cdot (2x - 5)$

Solución. $(2x + 5) \cdot (2x - 5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

Ejercicios

15. Desarrolla:

a) $(3x + 4) \cdot (3x - 4)$

b) $(x - 5) \cdot (x + 5)$

5. Operaciones combinadas con polinomios.

Ejemplo:

Calcula: $3x \cdot (-3x + 7) + 3 \cdot (2x - 3)^2 - 4 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$

Potencias	→	$3x \cdot (-3x + 7) + 3 \cdot (4x^2 - 12x + 9) - 4 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$
Productos	→	$-9x^2 + 21x + 12x^2 - 36x + 27 - 4 \cdot (x^2 - 1)$ $-9x^2 + 21x + 12x^2 - 36x + 27 - 4x^2 + 4$
Sumas/restas	→	$-x^2 - 15x + 31$

Ejercicios

16. Calcula

a) $(x+1)^2+(2-x)^2$

b) $(x-2)^2+3\cdot(x^2+x+1)$

c) $(3x+4)\cdot(3x-4)-(x+1)\cdot(9x-1)$

d) $(2x+4)^2+(2x+4)\cdot(2x-4)$

17. Calcula

a) $(3x+2)\cdot(3x-2)+(x+3)^2$

b) $3x\cdot(x-4)+(3-2x)^2-(4x+2)\cdot(2x+1)$

c) $4\cdot(-x^2+2)+(2x+3)^2$

d) $(x+2)\cdot(2x-3)-(1-3x)^2$

e) $(2x+1)^2-(2x-1)^2$

f) $(2x+3)^2-(2x-3)\cdot(2x+3)$

g) $(x-5)\cdot(x+5)+3x\cdot(x+1)$

h) $(x+3)\cdot(x-3)-x\cdot(x-1)+9$

6. Traduce al lenguaje algebraico.

Traducir al lenguaje algebraico significa expresar con variables, números y operaciones el lenguaje natural.

Ejemplos:

Cuatro menos un número: $4-x$

El cuádruplo de un número: $4x$

La cuarta parte de un número: $\frac{x}{4}$

Dos números se diferencian en 4 unidades: $x-y=4$

El quíntuplo de un número divido entre 3: $5x:3$

Ejercicios

18. Traduce al lenguaje algebraico:

a) La mitad de un número menos su tercera parte.
b) Número de personas casadas después de celebrarse x matrimonios.
c) Repartir una fortuna entre 7 hermanos.
d) Contenido de 12 botellas de agua de igual capacidad.
e) Duplo de la edad más 25 años.
f) Dos quintos de un número.
g) El triple de un número más 1.
h) Un número menos 3.
i) Tres octavos de un número.
j) La edad de Juan dentro de 16 años.
k) La edad de Pedro hace 4 años.

Ejercicios finales

19. Calcula:

$$(-3x^2+7)\cdot(5x^2+3x-5)-(7x^2+3x-5)$$

20. Escribe tres identidades notables sobre binomios.

21. Desarrolla utilizando identidades notables:

$a)\ (4x-1)^2$
$b)\ (x+5)^2$
$c)\ (x^2+8)\cdot(x^2-8)$
$d)\ (x^3-2)^2$

22. Traduce al lenguaje algebraico:

a. Una cantidad aumentada el 67%.

b. Una cantidad disminuida el 6%
c. La suma de dos números por su diferencia es igual a cinco.
d. Un número menos su precesor.
e. La suma de tres números consecutivos es mayor o igual a veinte.
f. El triple de un número más su mitad es igual a veintiséis.
g. Dos tercios de la suma de dos números más trece veces su diferencia.
h. Una cantidad aumentada el 7%.
i. Una cantidad disminuida el 30%
j. La suma de dos números por su diferencia es igual a ocho.

23. Desarrolla:

$a)\ (x^2+4)\cdot(x-1)+(2-x)\cdot(2+x)$

$b)\ (x+6)^2-3x\cdot(x^2-1)$

24. Calcula el cociente y el resto de la división

$P(x):(x+3), siendo\ P(x)=-2x^5+x^4-x^2+x-1.$

Realiza la prueba de la división.

25. Calcula el valor numérico del polinomio:

$$P(x)=x^4-x^2+x-4\ en\ \ x=-2\ y\ en\ x=0.$$

26. Calcula el valor numérico del polinomio:

$$P(x)=x^6-x^2+x-4\ en\ \ x=-1\ y\ en\ x=0.$$

27. ¿Es lo mismo (1000+6000)2 que 10002+60002? Justifica la respuesta.

28. Halla el valor de m para que la división sea exacta:

$$(x^2-12x+m):(x+4)$$

29. Factoriza los polinomios siguientes:

$a)\ \ 5x^2+20x+20$ $\qquad$ $b)\ \ x^3-4x^2+x+6$

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MAEMÁTICOS. UNIDAD 4

UNIDAD DIDÁCTICA 4

Ecuaciones

Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Unidad Didáctica 4. Ecuaciones de primer grado

1. Introducción

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es cierta para ciertos valores de las variables. Si es cierta para cualquier valor que pongamos en las variables o incógnitas entonces se dice que es una identidad.

Por lo tanto, una ecuación consta de dos lados o miembros separados por el signo de igualdad.

Ejemplo:

$$3xy^2 + \sqrt[3]{x+5} - 5 = 8xz + 9$$

Es una ecuación de varias variables.

2. Definiciones:

Solución de una ecuación:

Es un número tal que al sustituir en la ecuación la variable x por dicho valor y realizar las operaciones indicadas nos queda en ambos lados de la igualdad el mismo número.

Ecuaciones equivalentes:

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Operaciones elementales en una ecuación:

Son aquellas operaciones que transforman una ecuación en otra equivalente.

1. Sumar (o restar) a ambos lados de la igualdad un mismo número.
2. Multiplicar (o dividir) a ambos lados de la igualdad por un número distinto de cero.

Términos de una ecuación.

Son las expresiones de cada miembro que están separadas por los signos más y menos.

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado con una incógnita en su forma reducida es una ecuación de la forma

$$ax + b = 0$$

siendo a y b números reales con $a \neq 0$, es decir, tenemos en el primer lado de la igualdad un polinomio de grado 1.

Ejemplo:

$$5x + 15 = 0$$

3. Resolución de ecuaciones de primer grado

La solución de la ecuación

$$ax + b = 0$$

es

$$x = \frac{-b}{a}.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación $5x + 15 = 0$ es $x = -3$.

Ejercicios 1

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x + 6 = 0$	b) $5x - 10 = 0$
c) $-3x + 9 = 0$	d) $-x + 8 = 0$
e) $-2x = -14$	f) $-2x = 14$

Ejemplo: Ecuaciones con paréntesis

Resuelve: $\mathbf{3 \cdot (x-2) + 4 \cdot (x-1) = 2x - (x-3) + 11}$

$\mathbf{3x - 6 + 4x - 4 = 2x - x + 3 + 11}$	***Aplicamos la propiedad distributiva***
$\mathbf{3x + 4x - 2x + x = 3 + 11 + 4 + 6}$	***Colocamos los términos con x en el primer lado de la igualdad, teniendo en cuenta que cambiamos el signo si hacemos un cambio de lado. Este procedimiento se llama <u>trasposición</u> de términos.***
$\mathbf{6x = 24}$	***Simplificamos en los dos lados de la igualdad***
$\mathbf{x = \frac{24}{6}}$	***Despejamos la x.***
$\mathbf{x = 4}$	***Simplificamos***

Ejercicios 2

Resuelve las siguientes ecuaciones siguiendo las instrucciones del ejemplo:

1) $2 \cdot (x+1) - 3 \cdot (x-2) = x + 4$

$$Sol: x = 2$$

2) $3 \cdot (x-5) = 4 \cdot (2x-3) + 7$

$$Sol: x = -2$$

3) $7x - 3 \cdot (2x+4) = 5x - 8 \cdot (3x-1)$

$$Sol: x = 1$$

Recuerda que el cálculo del opuesto de un polinomio es equivalente a multiplicar por -1.:

$$-(3x-6) = -3x + 6$$

Ejemplo: Ecuaciones con denominadores.

La estrategia consiste en multiplicar todos los términos por el mínimo común múltiplo de los denominadores y a continuación simplificar.

Resuelve:

$$\boldsymbol{x-\frac{13x}{12}=\frac{5x}{18}+\frac{13}{12}}$$

Calculamos el mínimo común múltiplo de 1, 12, 18 y 12.

m.c.m.=36

Multiplicamos por el mínimo común múltiplo y simplificamos.

Observa que 36/1*1=36, 36/12*13=39, 36/18*5=10, 36/12*13=39

$$\boldsymbol{36x-39x=10x+39}$$

Colocamos en un lado de la igualdad los términos con la variable y en otro lado los términos independientes, cambiando de signo los términos que cambiamos de lado, es decir realizamos el procedimiento llamado *trasposición de términos*.

$$\boldsymbol{-13x=39}$$

$$\boldsymbol{x=-3}$$

Ejercicios 3

Resuelve las siguientes ecuaciones, simplificando la solución cuando sea posible:

1) $\frac{x+1}{6}-\frac{x+3}{4}=-1$

$Sol: x=5$

2) $\frac{x+11}{2}-\frac{2x+3}{5}=5$

$Sol: x=1$

3) $\frac{3x+5}{2}-\frac{7x+1}{6}=\frac{4x-5}{3}-5$

$Sol: x=9$

4) $\frac{x+5}{2}=\frac{2x+3}{3}$

$Sol: x=9$

5) $x-\frac{x+1}{5}=\frac{x+3}{2}-2$

$Sol: x=-1$

Ejemplo: Ecuaciones con denominadores y paréntesis en los numeradores

En primer lugar simplificamos los numeradores para que nos quede una ecuación como la del caso anterior. A continuación procedemos de la misma forma que antes, calculando el mínimo común múltiplo.

Resuelve:

$$\frac{10x-2}{12}-\frac{2\cdot(x+5)}{8}=\frac{2\cdot(11-x)}{9}+x-6$$

$\frac{10x-2}{12}-\frac{2x+10}{8}=\frac{22-2x}{9}+x-6$	*Simplificamos los numeradores*
m.c.m.$=2^3\cdot 3^2=72$	*Calculamos el mínimo común múltiplo de los denoninadores*
$6\cdot(10x-2)-9\cdot(2x+10)=8\cdot(22-2x)+72x-432$	*Multiplicamos por 72 y simplificamos*
$60x-12-18x-90=176-16x+72x-432$	*Aplicamos la propiedad distributiva en los paréntesis*
$60x-18x+16x-72x=176-432+12+90$	*Trasposición de términos*
$-14x=-154$	*Simplificamos*
$x=\frac{-154}{-14}$	*Despejamos x (Fíjate en el signo)*
$x=11$	*Simplificamos*

Ejercicios 4

Resuelve las siguientes ecuaciones, simplificando la solución cuando sea posible:

1) $\frac{2\cdot(2-x)}{3}-\frac{4\cdot(2x+3)}{9}=\frac{-4\cdot(3x-2)}{6}$

$Sol: x=3$

2) $\frac{3x-1}{20}-\frac{2\cdot(x+3)}{5}=\frac{4x+2}{15}-5$

$Sol: x=7$

Ejercicios Finales

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{x}{15}+x=\frac{2x}{5}+10$

$Sol: x=15$

2) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}=\frac{3x}{4}+\frac{1}{4}$

$Sol: x=2$

3) $\frac{3x+3}{4}-\frac{3x-2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{x+3}{12}$

$Sol: x=3$

4) $\frac{3\cdot(x+3)}{2}-2\cdot(2-3x)=8x-1-2\cdot(x+3)$

$Sol: x=-5$

5) $\frac{2}{3}\cdot(\mathrm{x}+3)-\frac{1}{2}\cdot(\mathrm{x}+1)=1-\frac{3}{4}\cdot(\mathrm{x}+3)$

$Sol: x=-3$

6) $\frac{5}{2x+1}=\frac{3}{3x-3}$

$Indicación: Producto\ de\ medios = Producto\ de\ extremos;\ Sol: x=2$

7) $\frac{44}{9}-\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=\frac{5}{6}\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$

$Sol: x=5$

8) Laura tiene 5 años más que su hermano Antonio, y su padre tiene 41 años. Dentro de 6 años, entre los dos hermanos igualarán la edad del padre. ¿Qué edad tiene cada uno?

$Sol: Laura\ tiene\ 20\ años\ y\ Antonio\ tiene\ 15\ años.$

9) La suma de tres números naturales consecutivos es igual al cuádruple del menor. ¿De qué números se trata?

$Sol: 3, 4\ y\ 5.$

10) Se han mezclado 30 litros de aceite barato con 25 litros de aceite caro, resultando la mezcla a 3,2 €/L. Calcula el precio del litro de cada clase, sabiendo que el de más calidad es el doble de caro que el otro.

$Sol: El\ barato\ a\ 2{,}2\frac{€}{L}\ y\ el\ caro\ a\ 4{,}4\frac{€}{L}.$

11) Inventa una ecuación de primer grado que no tenga solución.

12) Inventa una ecuación de primer grado que tenga infinitas soluciones, es decir una igualdad que sea una identidad.

Ejercicios de pruebas libres

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $9 \cdot (x+4) = 5 \cdot (4x-4) + 1$

$Sol: x = 5$

2) $\frac{5}{x+5} = \frac{15}{x+7}$

$Sol: x = -4$

3) $\frac{x-1}{2} - 3 \cdot (-x-2) = \frac{x}{5} + 22$

$Sol: x = 5$

4) $\frac{3x-1}{4} - \frac{2 \cdot (x+3)}{2} = \frac{4x+2}{3} - 15$

$Sol: x = 7$

Ejercicios de refuerzo

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 9 = 44$

b) $\frac{4x+1}{3} = \frac{12x-3}{7}$

c) $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+3}{2} = -3$

d) $\frac{2x-5}{12} = -\frac{x}{4} - \frac{5}{3}$

e) $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} - 1 = \frac{x}{2}$

f) $9 \cdot (x-1) = 81$

g) $3 \cdot (x+7) = 240$

h) $5 \cdot (3x-1) = 2 \cdot (4x-3) + 15$

$Sol: x = 2$

i) $\frac{3x+17}{8} - \frac{1-4x}{13} = \frac{1-x}{4} - \frac{9+x}{6}$

$Sol: x = -3$

j) $\frac{2 \cdot (3x-4)}{3} - \frac{3 \cdot (x+1)}{4} - \frac{5-2x}{2} = 5 + \frac{1}{3}$

$Sol: x = 5$

2) Comprueba si $x = 8$ es solución de la ecuación $3x - 22 = 2$.

3) La suma de tres números consecutivos es igual a 60. Calcula dichos números.

4) La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 5

Sistemas

Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Unidad didáctica 5: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Concepto de sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde *a, b, a'* y *b'* son números reales que se denominan **coeficientes** y *c* y *c'* también son números reales llamados **términos independientes**.

Llamamos **solución** del sistema al par de valores (*x*, *y*) que satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

Se dice que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes**, cuando tienen la misma solución.

Ejemplo:

Son sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Ejemplo:

No es un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ porque tiene términos en *xy*.

Tampoco lo es $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ porque tiene un término en x^2.

Actividades propuestas

1. Razona si son o no sistemas de ecuaciones lineales los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

2. Clasificación de sistemas de ecuaciones

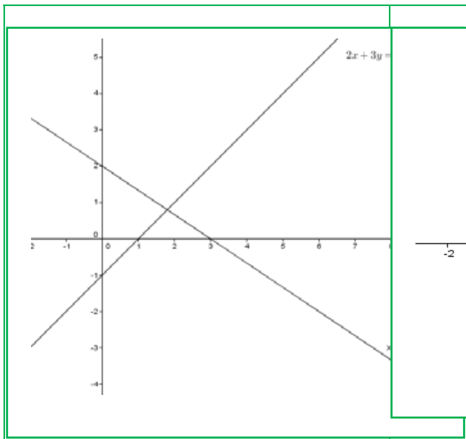
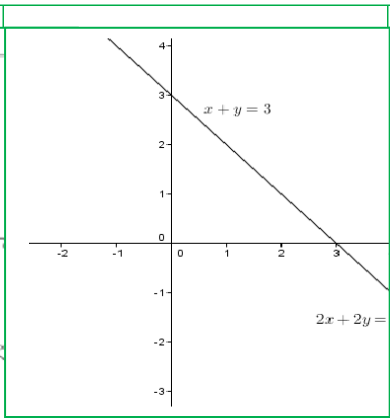
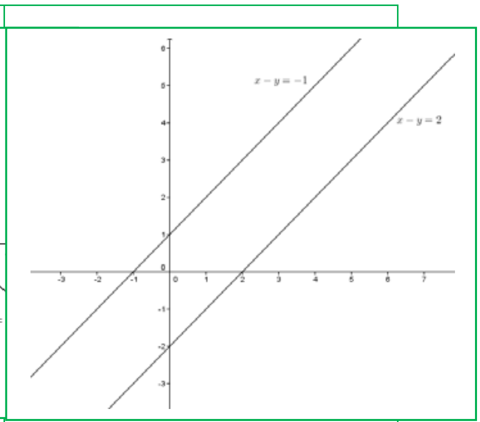
En un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada una de las ecuaciones representa una recta en el plano.

Estas rectas pueden estar posicionadas entre sí de tres maneras distintas, lo que nos ayudará a clasificar nuestro sistema en:

1) **Compatible determinado**: el sistema tiene una única solución, por lo que las rectas son **SECANTES**, se cortan en un punto.

2) **Compatible indeterminado**: el sistema tiene infinitas soluciones, por lo que las rectas son **COINCIDENTES.**

3) **Incompatible**: el sistema no tiene solución, por lo que las rectas son **PARALELAS.**

		
Compatible determinado	**Compatible indeterminado**	**Incompatible**
Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**

Actividades resueltas

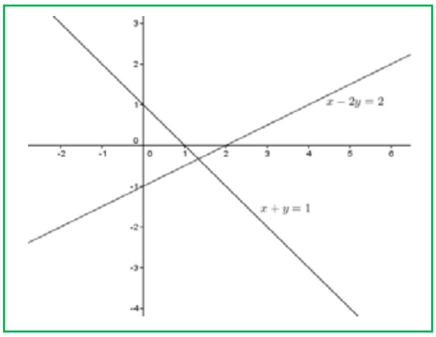
- Añade una ecuación a $x - 2y = 2$ para que el sistema resultante sea:

  a) Compatible determinado

  b) Incompatible

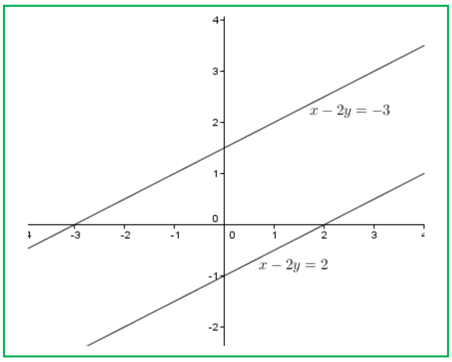
  c) Compatible indeterminado

Solución:

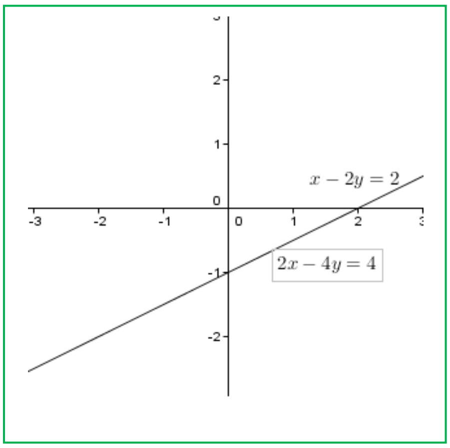


a) Para que el sistema sea compatible determinado, añadiremos una ecuación que no tenga los mismos coeficientes que la que nos dan. Por ejemplo, $x + y = 1$.

b) Para que sea incompatible, los coeficientes de las incógnitas tienen que ser los mismos (o proporcionales) pero tener diferente término independiente. Por ejemplo $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Para que sea compatible indeterminado, pondremos una ecuación proporcional a la que tenemos. Por ejemplo $2x - 4y = 4$.



Actividades propuestas

2. Representa los siguientes sistemas y clasifícalos:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

3. Resolución de sistemas por el método de sustitución

El **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita de una de las ecuaciones del sistema y sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podemos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, obtenemos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de sustitución:

Despejamos *x* de la segunda ecuación:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

y lo sustituimos en la primera:

$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2·1 = 1$.

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

4. Resolución de sistemas por el método de igualación

El **método de igualación** consiste en despejar la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema e igualar los resultados obtenidos.

Así, obtenemos una ecuación de primer grado en la que podremos calcular la incógnita despejada. Con el valor obtenido, calculamos el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ por el método de igualación:

Despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones que forman el sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \\ x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y \end{cases}$$

Igualamos ahora los resultados obtenidos y resolvemos la ecuación resultante:

$$\frac{3y-1}{2}=3-2y \Rightarrow 3y-1=2(3-2y)=6-4y \Rightarrow 3y+4y=6+1 \Rightarrow 7y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{7}=1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2\cdot(1) = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

4. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ -2x+3y=-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$

5. Resolución de sistemas por el método de reducción

El **método de reducción** consiste en eliminar una de las incógnitas sumando las dos ecuaciones. Para ello se multiplican una o ambas ecuaciones por un número de modo que los coeficientes de *x* o *y* sean iguales pero de signo contrario.

Ejemplo:

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ por el método de reducción:

Multiplicamos la segunda ecuación por -2 para que los coeficientes de la *x* sean iguales pero de signo contrario y sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Con el valor obtenido de *y*, calculamos la *x*:

$2x - 3\cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

Solución:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Actividades propuestas

5. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

6. Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas por medio de sistemas de ecuaciones, primero tendremos que pasar a lenguaje algebraico el enunciado del problema y luego resolverlo siguiendo los siguientes pasos:

1.- Comprender el enunciado

2.- Identificar las incógnitas

3.- Traducir el enunciado al lenguaje algebraico

4.- Plantear el sistema y resolverlo

5.- Comprobar la solución obtenida

Actividades resueltas

Vamos a resolver el siguiente problema:

- *La suma de las edades de un padre y su hijo es 39 y su diferencia 25. ¿Cuál es la edad de cada uno?*

Una vez comprendido el enunciado, identificamos las incógnitas que, en este caso, son la edad del padre y el hijo

2.- Edad del padre = x

Edad del hijo = y

3.- Pasamos el enunciado a lenguaje algebraico:

La suma de sus edades es 39:

$$x + y = 39$$

Y su diferencia 25:

$$x - y = 25$$

4.- Planteamos el sistema y lo resolvemos por el método que nos resulte más sencillo. En este caso, lo hacemos por reducción:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{sumamos} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solución: El padre tiene 32 años y el hijo tiene 7 años.

5.- *Comprobación:* En efecto, la suma de las edades es 32 + 7 = 39 y la diferencia es 32 – 7 = 25.

Actividades propuestas

6. La suma de las edades de Raquel y Luis son 65 años. La edad de Luis más cuatro veces la edad de Raquel es igual a 104. ¿Qué edad tienen cada uno?

7. La suma de las edades de María y Alberto es 32 años. Dentro de 8 años, la edad de Alberto será dos veces la edad de María. ¿Qué edad tiene cada uno en la actualidad?

8. Encuentra dos números cuya diferencia sea 24 y su suma sea 123.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-4 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x+5y=7 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación:

a) $\begin{cases} -2x+3y=13 \\ 3x-7y=-27 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=-3 \\ 4x-y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -8x+3y=-5 \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 3x-5y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=14 \\ -x-6y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=4 \\ -7x+5y=-2 \end{cases}$

4. Resuelve de forma gráfica los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+3y=4 \\ x-6y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x-5y=13 \\ -7x+5y=-9 \end{cases}$

5. Resuelve los siguientes sistemas por el método que creas más apropiado:

a) $\begin{cases} \dfrac{4x-1}{3}-\dfrac{2y+2}{5}=-1 \\ \dfrac{x+3}{2}+\dfrac{4y-1}{3}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{2}-\dfrac{y+3}{5}=-3 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y+2}{3}=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

6. Copia en tu cuaderno y completa los siguientes sistemas incompletos de forma que se cumpla lo que se pide en cada uno:

Compatible indeterminado Incompatible Su solución sea x = 2 e y = 1

a) $\begin{cases} (\ )x+3y=(\ ) \\ 2x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -5x+y=2 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=(\ ) \\ (\ )x+y=7 \end{cases}$

Incompatible indeterminado Su solución sea x = −1 e y = 1 Compatible

d) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ 4x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+3y=5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (\ )x+6y=(\ ) \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$

7. Escribe tres sistemas lineales que sean incompatibles.

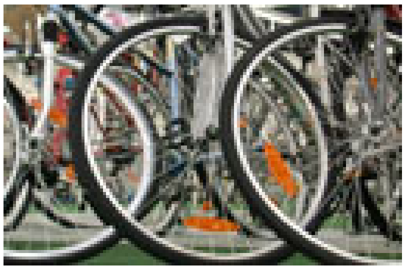
8. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles indeterminados.

9. Escribe tres sistemas lineales que sean compatibles determinados.

10. Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución gráficamente. ¿De qué tipo es cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=13 \\ x-3y=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 4x-4y=-12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemas



11. En una tienda alquilan bicicletas y triciclos. Si tienen 51 vehículos con un total de 133 ruedas, ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos tienen?

12. ¿Cuál es la edad de una persona si al multiplicarla por 15 le faltan 100 unidades para completar su cuadrado?

13. Descompón 8 en dos factores cuya suma sea 6

14. El triple del cuadrado de un número aumentado en su duplo es 85. ¿Qué número es?

15. La suma de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 394. Determina dichos números.

16. Van cargados un asno y un mulo. El asno se quejaba del peso que llevaba encima. El mulo le contestó: Si yo llevara uno de tus sacos, llevaría el doble de carga que tú, pero si tú tomas uno de los míos, los dos llevaremos igual carga. ¿Cuántos sacos lleva cada uno?

17. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

18. Calcula tres números consecutivos cuya suma de cuadrados es 365

19. Dentro de 11 años, la edad de Mario será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Mario?

20. Dos números naturales se diferencian en 2 unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son dichos números?

21. La suma de dos números es 5 y su producto es –84. ¿De qué números se trata?

22. María quiere formar bandejas de un kilogramo con mazapanes polvorones. Si los polvorones le cuestan a 5 euros el kilo y los mazapanes a 7 euros el kilo, y quiere que el precio de cada bandeja sea de 6 euros, ¿qué cantidad deberá poner de cada producto? Si quiere formar 25 bandejas, ¿Qué cantidad de polvorones y de mazapanes va a necesitar?

23. Determina los catetos de un triángulo rectángulo cuya suma es 7 cm y la hipotenusa de dicho triángulo mide 5 cm.

24. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados 17. Calcula dichos números

25. La suma de dos números es 20. El doble del primero más el triple del segundo es 45. ¿De qué números se trata?

26. En un garaje hay 30 vehículos entre coches y motos. Si en total hay 100 ruedas, ¿cuántos coches y motos hay en el garaje?

27. La edad actual de Pedro es el doble de la de Raquel. Dentro de 10 años, sus edades sumarán 65. ¿Cuántos años tienen actualmente Pedro y Raquel?

28. En mi clase hay 35 personas. Nos han regalado a cada chica 2 bolígrafos y a cada chico 1 cuaderno. Si en total había 55 regalos. ¿Cuántos chicos y chicas somos en clase?

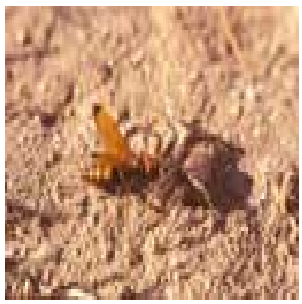
29. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tiene cada uno?

30. Dos bocadillos y un refresco cuestan 5€. Tres bocadillos y dos refrescos cuestan 8€. ¿Cuál es el precio del bocadillo y el refresco?

31. En una granja hay pollos y vacas. Si se cuentan las cabezas, son 50. Si se cuentan las patas, son 134. ¿Cuántos pollos y vacas hay en la granja?

32. Un rectángulo tiene un perímetro de 172 metros. Si el largo es 22 metros mayor que el ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

33. En una bolsa hay monedas de 1€ y 2€. Si en total hay 40 monedas y 53€, ¿cuántas monedas de cada valor hay en la bolsa?



34. En una pelea entre arañas y avispas, hay 70 cabezas y 488 patas. Sabiendo que una araña tiene 8 patas y una avispa 6, ¿cuántas moscas y arañas hay en la pelea?

35. Una clase tiene 32 estudiantes, y el número de alumnos es triple al de alumnas, ¿cuántos chicos y chicas hay?

36. Yolanda tiene 6 años más que su hermano Pablo, y su madre tiene 50 años. Dentro de 2 años la edad de la madre será doble de la suma de las edades de sus hijos, ¿Qué edades tiene?

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 6

Geometría

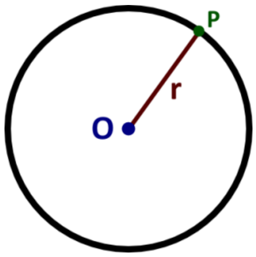
Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Unidad Didáctica 6 Geometría

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

Muchas veces definimos una figura geométrica como los puntos del plano que cumplen una determinada condición. Decimos entonces que es un *lugar geométrico del plano*.

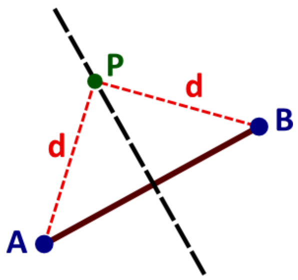


1.1. La circunferencia

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto del mismo (el centro) es un valor determinado (el radio).

Todos los puntos de la circunferencia tienen una distancia igual al radio (*r*) del centro (*O*).

1.2. Mediatriz de un segmento

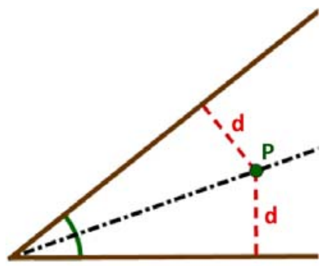


La **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del mismo.

Un punto *P* de la mediatriz verifica que está a la misma distancia de *A* que de *B*. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la mediatriz.

La mediatriz es una recta perpendicular al segmento y pasa por el punto medio del mismo.

1.3. Bisectriz de un ángulo



Dado un ángulo delimitado por dos rectas, la **bisectriz** del ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las mismas.

Un punto *P* de la bisectriz verifica que está a la misma distancia de las dos rectas que forman el ángulo. Cualquier otro punto que lo cumpla pertenece a la bisectriz.

La bisectriz pasa por el vértice del ángulo y divide a éste en dos ángulos iguales.

Actividades propuestas

1. Un agricultor encuentra en su campo una bomba de la Guerra Civil. Las autoridades establecen una distancia de seguridad de 50 metros. ¿Cómo se debe acordonar la zona?

2. Un juego de dos participantes consiste en que se sitúan a una distancia de dos metros entre sí y se ponen varias banderas a la misma distancia de ambos. La primera a 5 metros, la segunda a 10 metros, la tercera a 15 y así sucesivamente. ¿Sobre qué línea imaginaria estarían situadas las banderas?

3. Cuando en una acampada se sientan alrededor del fuego lo hacen formando un círculo. ¿Por qué?

4. Utiliza regla y compás para dibujar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento.

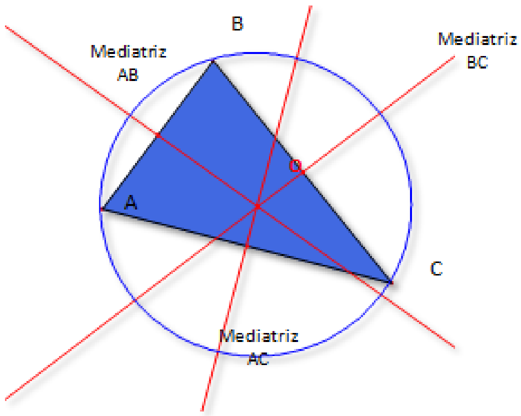
1.4. Rectas y puntos notables de un triángulo

Recuerda que:

En cualquier triángulo podemos encontrar sus mediatrices, bisectrices, alturas y medianas.

Mediatrices. Circuncentro.

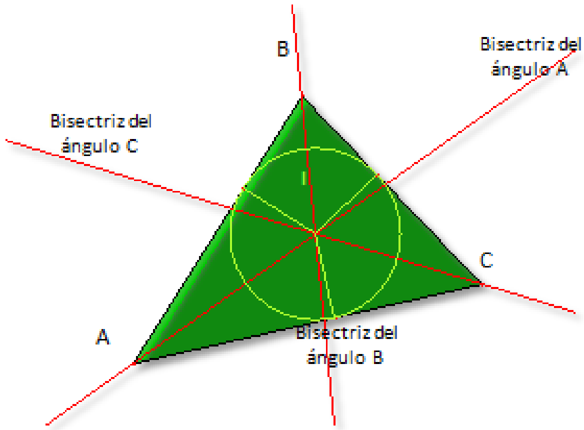
Circuncentro O



Las mediatrices se cortan en el circuncentro.
El circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices. Es el centro de la circunferencia circunscrita.

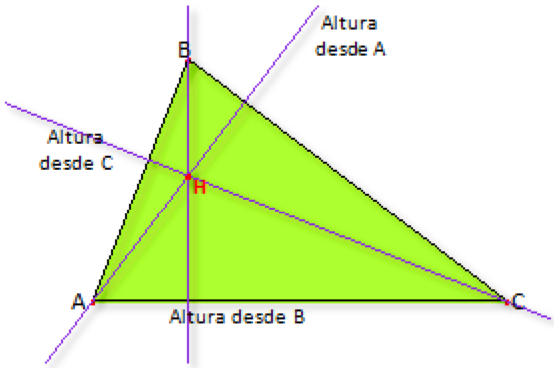
Bisectrices. Incentro.

Incentro I



Las bisectrices se cortan en el Incentro.
El incentro está a la misma distancia de los tres lados. Es el centro de la circunferencia inscrita.

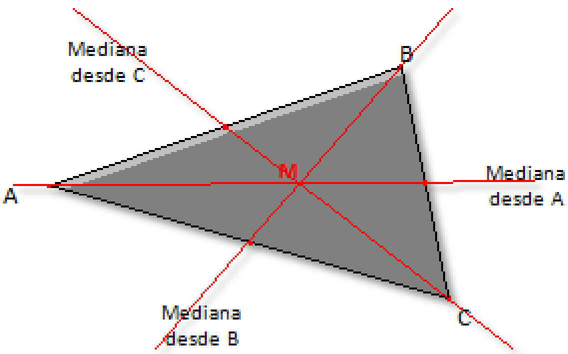
Alturas. Ortocentro.



Ortocentro H

Las alturas son las perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto. Se cortan en el ortocentro.

Medianas. Baricentro.



Baricentro M

Las medianas son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Dividen al triángulo en dos triángulos de igual área.
Se cortan en el baricentro. La distancia del mismo a cada vértice es el doble de su distancia al punto medio del lado opuesto correspondiente.

Si la **mediatriz** de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento, cada mediatriz de un triángulo equidistará de dos de los vértices del triángulo y es la mediatriz de uno de sus lados. Las tres mediatrices se cortan en un punto, el **circuncentro**, que, por tanto, distará lo mismo de cada uno de los tres vértices del triángulo, y es el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo, que pasa por sus tres vértices.

Si la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo, ahora cada una de las tres bisectrices de un triángulo equidistará de dos de los lados del triángulo. Las tres bisectrices se cortan en un punto, el **incentro**, que, por tanto, equidista de los tres lados del triángulo y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

En cualquier triángulo el circuncentro, ortocentro y baricentro están sobre una misma línea recta, a la que se denomina *Recta de Euler*. Esta recta contiene otros puntos notables. El incentro está en dicha recta sólo si el triángulo es isósceles.

Actividades propuestas

5. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.

6. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40º y 30º. Encuentra su ortocentro y su baricentro.

7. Dibuja en tu cuaderno un triángulo con un ángulo de 40º comprendido entre dos lados de 6 y 4 cm. Obtén su circuncentro y su incentro.

8. ¿Qué pasa con las rectas y los puntos notables en un triángulo equilátero?

9. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40º. Traza las rectas notables para el lado desigual y para uno de los lados iguales. ¿Qué pasa?

10. Una hormiga anda por una mediana de un triángulo partiendo del vértice. Cuando llega al baricentro ha recorrido 8 centímetros. ¿Qué distancia le falta para llegar al punto medio del lado opuesto al vértice de donde partió?

11. Queremos situar una farola en una plaza triangular. ¿Dónde la pondríamos?

12. Tenemos un campo triangular sin vallar y queremos atar una cabra de forma que no salga del campo pero que acceda al máximo de pasto posible. ¿Dónde pondríamos el poste?

13. A Yaiza y a su hermano Aitor les encanta la tarta. Su madre les ha hecho una triangular. Yaiza la tiene que cortar pero Aitor elegirá primero su pedazo. ¿Cómo debería cortar Yaiza la tarta?

14. El ortocentro de un triángulo rectángulo, ¿dónde está?

15. Comprueba que el circuncentro de un triángulo rectángulo está siempre en el punto medio de la hipotenusa.

16. El baricentro es el centro de gravedad. Construye un triángulo de cartulina y dibuja su baricentro. Si pones el triángulo horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.

17. Calcula el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. [*Ayuda*: Aplica que en este caso el circuncentro coincide con el baricentro y que éste último está al doble de distancia del vértice que del lado opuesto.]

1.5. Uso de Geogebra para el estudio de los puntos y rectas notables de un triángulo

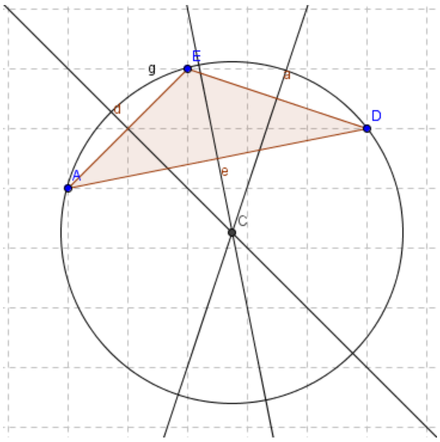
Se utiliza el programa **Geogebra** para determinar el *circuncentro*, el *incentro* y el *baricentro* de un triángulo, estudiar sus propiedades y dibujar la *recta de Euler*.

Actividades resueltas

Una vez abierto el programa en la opción del menú **Visualiza**, oculta **Ejes** y activa **Cuadrícula.**

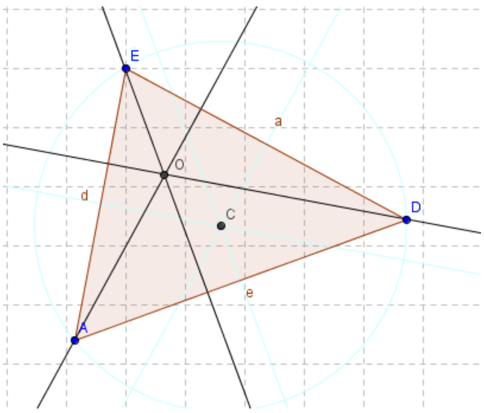
Circuncentro:

- *Dibuja las tres mediatrices de un triángulo y determina su circuncentro.*



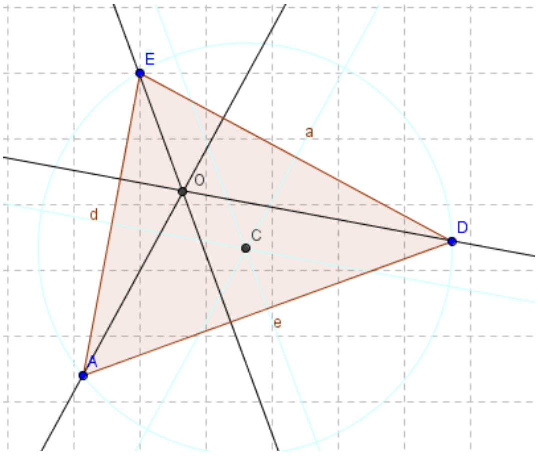
- Define tres puntos *A*, *D* y *E*, observa que el programa los define como *A, B* y *C*, utiliza el botón derecho del ratón y la opción **Renombra** para cambiar el nombre.
- Con la herramienta **Polígono** activada dibuja el triángulo que tiene por vértices estos puntos. Observa que cada lado tiene la misma letra que el ángulo opuesto con minúscula.
- Con la herramienta **Mediatriz** dibuja las mediatrices de dos lados, los segmentos *a* y *d*.
- Determina con **Intersección de dos objetos** el punto común de estas rectas y con **Renombra** llámalo *C*. Dicho punto es el *circuncentro* del triángulo.
- Dibuja la **Mediatriz** del segmento *e* y observa que pasa por el punto *C*.
- Activa **circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar la circunferencia circunscrita al triángulo.
- Utiliza el **Puntero** para desplazar los vértices *A*, *D* o *E* y comprobar que la circunferencia permanece circunscrita al triángulo.

Ortocentro:



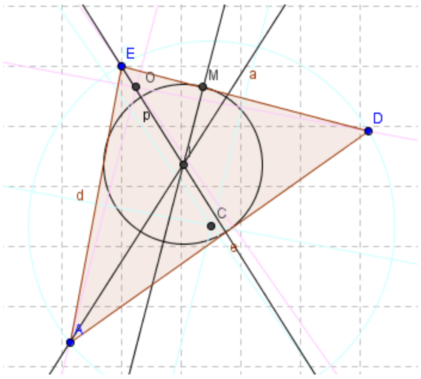
- *Dibuja las tres alturas de un triángulo y determina su ortocentro.*
- En el mismo triángulo cambia el color de las mediatrices y la circunferencia situándote con el ratón sobre el trazo o sobre su ecuación y con el botón derecho elige en **Propiedades, Color** un azul muy próximo al blanco.
- Dibuja dos alturas con la herramienta **Recta Perpendicular**. Observa que el programa te pide que el punto por el que vas a trazarla y la recta o el segmento respecto al que es perpendicular.
- Determina con **Intersección de dos objetos** el *ortocentro* como el punto de corte de las dos alturas y con **Renombra** denomínalo *O*.
- Dibuja la tercera altura y comprueba que pasa por el *ortocentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.

Incentro:

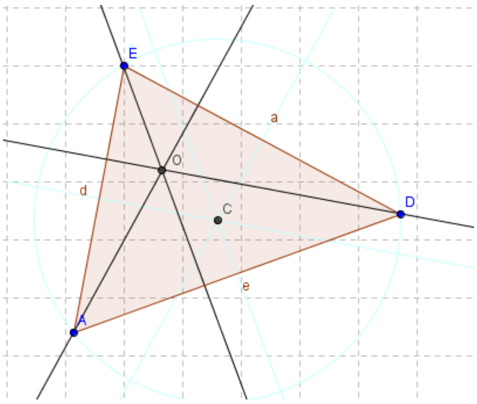


Dibuja las tres bisectrices de un triángulo y determina su incentro.

- Cambia el color de las alturas como en la construcción anterior, ahora con color rosa pálido.
- Con la herramienta **Bisectriz** dibuja dos bisectrices. Observa que para determinar la bisectriz de un ángulo es suficiente señalar tres puntos que pueden ser los vértices del triángulo en el orden adecuado.
- Determina el *incentro* con **Intersección de dos objetos** como el punto de corte de las dos bisectrices y con **Renombra** denomínalo *I*.
- Dibuja la tercera bisectriz y comprueba que siempre pasa por el *incentro*, desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.
- Traza desde el punto *I* una **Recta perpendicular** a uno de los lados y con **Intersección de dos objetos** calcula el punto de corte entre esta recta y el lado del triángulo y con **Renombra** llámalo *M*.
- Activa **Circunferencia por centro y punto que cruza** para dibujar con centro en *I* y radio el segmento *IM* la circunferencia inscrita al triángulo.
- Desplaza con el **puntero** los vértices del triángulo para comprobar que la circunferencia permanece inscrita al triángulo.

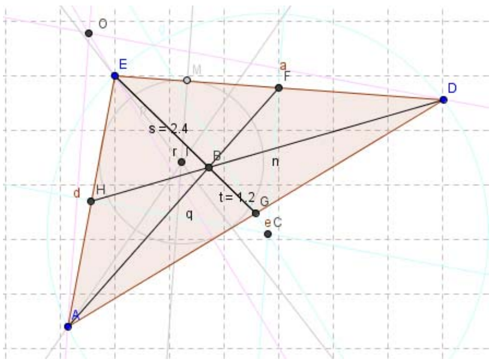


Baricentro:



Dibuja las tres medianas de un triángulo y determina su baricentro.

- Cambia el color de las bisectrices, del punto *M* y de la circunferencia inscrita, con gris muy pálido, como en las construcciones anteriores.
- Con la herramienta **Punto medio o centro** calcula los puntos medios de dos lados. Si el programa nombra alguno con la letra *B*, utiliza **Renombra** para llamarlo *H*.
- Con la herramienta **Segmento entre dos puntos** dibuja dos medianas y con **Intersección de dos objetos**, su punto de corte, el **baricentro**, que llamarás *B*.
- Traza la tercera mediana y verifica que el baricentro pertenece a este segmento desplazando con el **Puntero** los vértices del triángulo.
- Activa **Segmento entre dos puntos** y determina los dos segmentos determinados por el baricentro en una de las medianas.

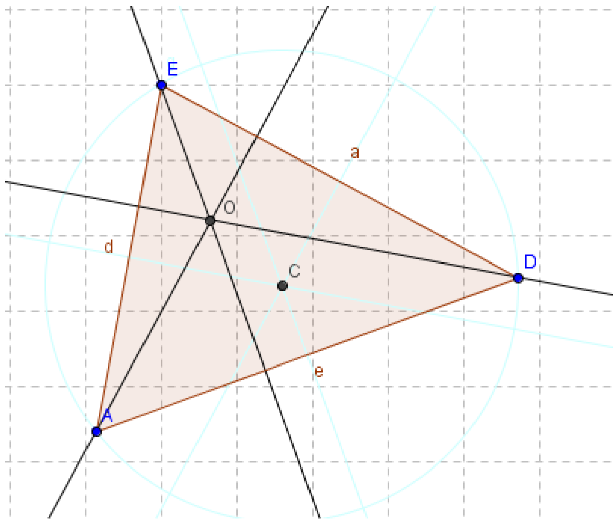


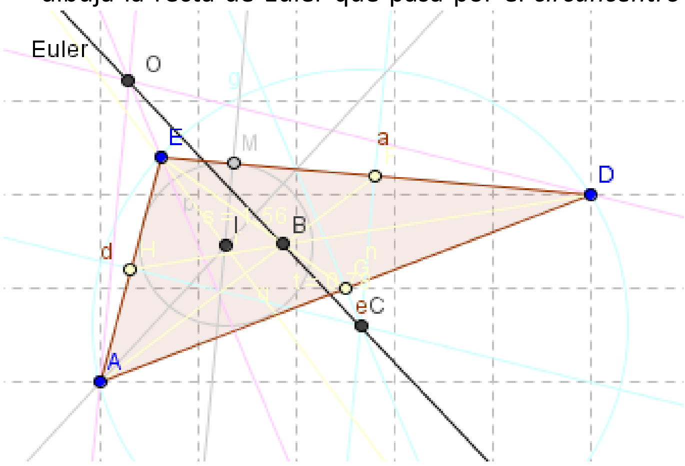
- Activa **Distancia** para medir estos segmentos.
- Desplaza los vértices del triángulo con el **Puntero** y observa la relación que existe entre las medidas realizadas.

Recta de Euler

Dibuja la recta que pasa por el circuncentro y el ortocentro.

- Cambia el color de las medianas, de los puntos medios de los lados y de los dos segmentos de la mediana, con amarillo muy pálido.
- Con la herramienta **Recta que pasa por dos puntos** dibuja la recta de Euler que pasa por el *circuncentro* y el *ortocentro* y utiliza **Renombra** para llamarla *Euler*. Comprueba que el baricentro pertenece a la recta de Euler y que el incentro no siempre pertenece.





Actividades propuestas

18. Repite las actividades resueltas con *Geogebra*. Modifica a tu gusto colores y líneas.

19. Mueve uno de los vértices originales del triángulo e indica qué cosas permanecen invariantes.

20. Comprueba que se verifican las propiedades de *circuncentro*, como centro de la circunferencia circunscrita, del *incentro*, como centro de la circunferencia inscrita.

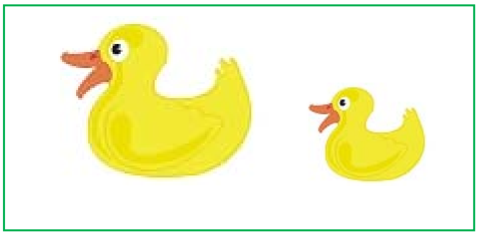
21. En *baricentro* divide a la mediana en dos parte, siendo una dos tercios de la otra. Compruébalo.

22. La recta de *Euler* pasa por el *circuncentro*, el *baricentro* y el *ortocentro*, y qué el *incentro* no siempre pertenece a la recta de *Euler*. ¿Cómo debe ser el triángulo para que pertenezca?

23. Mueve los vértices del triángulo para determinar si es posible que sus cuatro puntos notables coincidan.

2. SEMEJANZA

2.1. Figuras semejantes

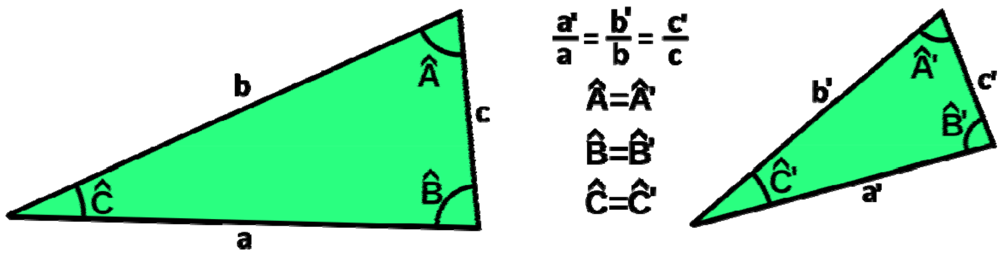


Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*. Es muy útil saber reconocer la semejanza para poder estudiar una figura e inferir así propiedades de una figura semejante a ella que es más grande o inaccesible. La semejanza conserva los ángulos y mantiene la proporción entre las distancias.

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

2.2. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza.

Dos triángulos son **semejantes** tienen todos los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario conocer todos los lados y ángulos, es suficiente con que se cumpla alguno de los siguientes **criterios de semejanza.**

Dos triángulos son semejantes sí:

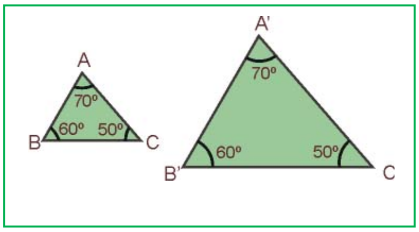
Primero: Tienen dos ángulos iguales.

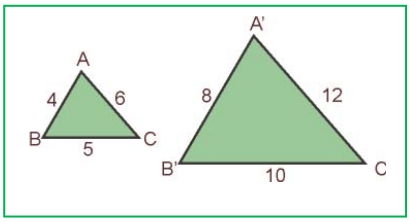
Segundo: Tienen los tres lados proporcionales.

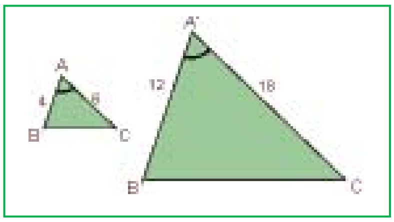
Tercero: Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual.

La demostración se basa en los criterios de igualdad de triángulos. Ya sabes que dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales, pero no es necesario que se verifiquen esas seis igualdades para que lo sean. Basta por ejemplo que tengan un lado y dos ángulos iguales. Así, se puede construir un triángulo igual a uno de los dados en posición *Tales* con el segundo y deducir la semejanza.

Ejemplo







Actividades propuestas

24. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80º y otro de 40º. Un ángulo de 80º y otro de 60º.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70º. Triángulo isósceles con ángulo igual de 50º.

c) *A* = 30º, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'*= 30º, *b'* = 3.5 cm, *c'* = 4.5 cm

d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 10 cm, *b'* = 12.5 cm, *c'* = 24.5 cm

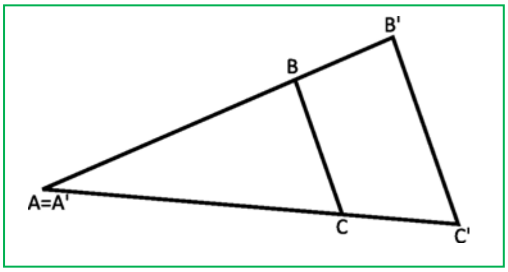
25. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) *a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 cm. *a*' = 6 cm, *b*' = 4 cm, ¿*c*'?

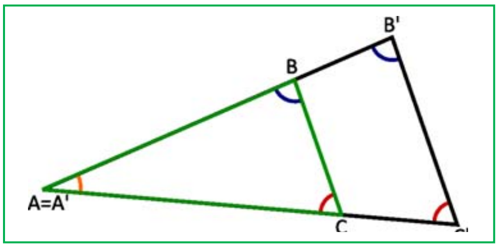
b) *A* = 45º, *b* = 8 cm, c = 4 cm. *A'* = 45º, *b*' = 8 cm, ¿*a*'?

26. Un triángulo tiene lados de 6 cm, 7 cm y 7 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

2.3. Triángulos en posición de Tales



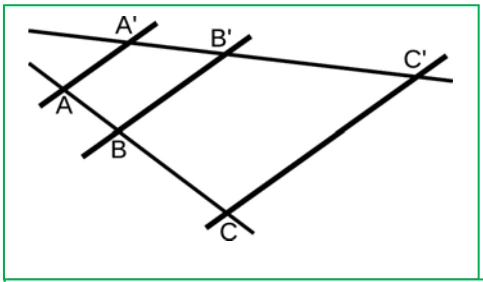
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando dos de los lados de cada uno están sobre las mismas rectas y los otros lados son paralelos.

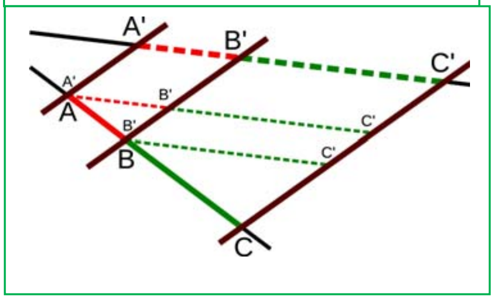


Los ángulos son iguales. Uno porque es el mismo. Los otros por estar formados por rectas paralelas. Por lo tanto, por el primer criterio de semejanza de triángulos, los triángulos son proporcionales y se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$$

2.4. Teorema de Tales





El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas.

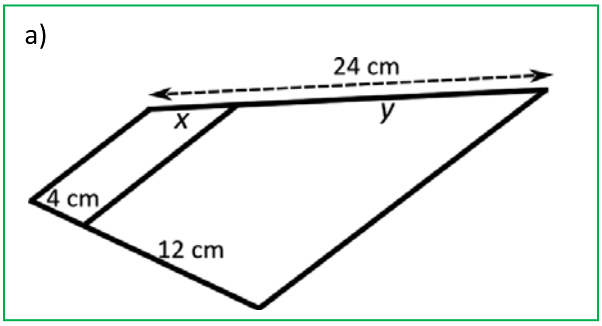
En la segunda figura se puede apreciar cómo se forman en este caso tres triángulos semejantes y que por lo tanto se establece que:

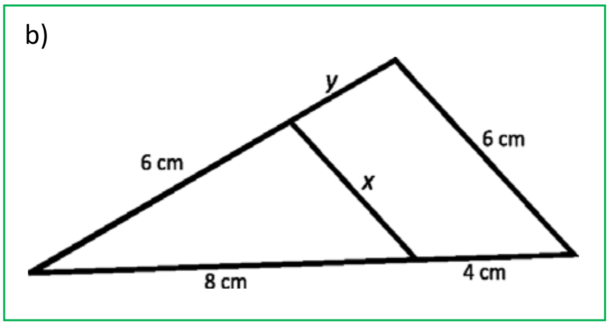
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

Observación: En este caso no relacionamos los segmentos *AA'*, *BB'* y *CC'* que se forman sobre los lados paralelos.

Actividades propuestas

27. Calcula los valores de *x* e *y* en las siguientes figuras.

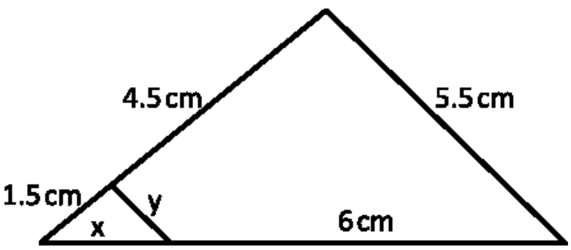


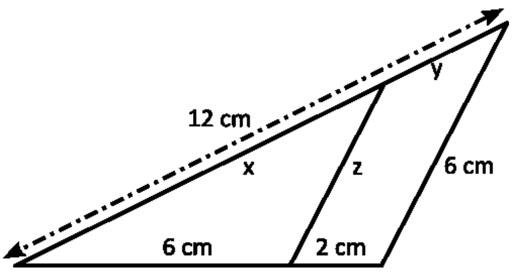


28. Un poste muy alto se sujeta con cables de acero que van de su extremo superior al suelo. La distancia del anclaje de uno de los cables a la base del poste es 6 metros. Ponemos una barra de 120 centímetros de forma que está perpendicular al suelo y justo toca el suelo y el cable. Su distancia al anclaje del cable es 90 centímetros. Calcula la longitud del poste y la longitud del cable de acero.

29. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7,2 m. ¿Cuánto mide el edificio?

30. Calcula las longitudes que se indican:

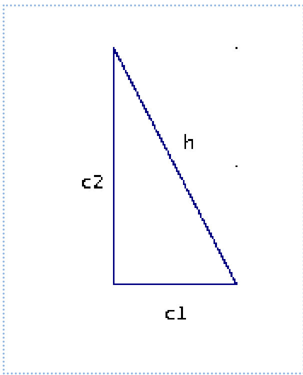




3. ÁNGULOS, LONGITUDES Y ÁREAS

3.1. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

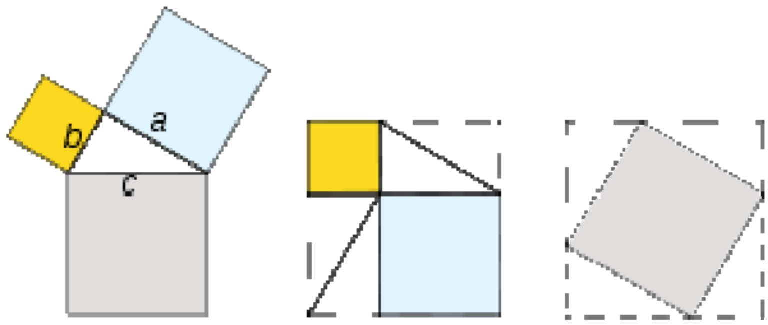
Utilizando el teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos: $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, o también podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 *cm* y 24 *cm*, su hipotenusa vale 26 *cm*, ya que:

$$h = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26 \ cm.$$

Interpretación del teorema de Pitágoras



Si dibujamos un cuadrado de lado la hipotenusa *h* de un triángulo rectángulo, su área es h^2 (ver el primer ejemplo de 1.1). Si dibujamos dos cuadrados de lados los catetos c_1 y c_2 de ese triángulo rectángulo, sus áreas son c_1^2 , c_2^2 . Entonces el teorema de Pitágoras dice que el área del primer cuadrado (cuadrado gris de la figura de la izquierda) es igual a la suma de las áreas de los otros dos (cuadrados azul claro y amarillo de la figura de la izquierda).

Existen más de 367 demostraciones diferentes del Teorema de Pitágoras.

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*,

en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.
Por tanto:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Actividades propuestas

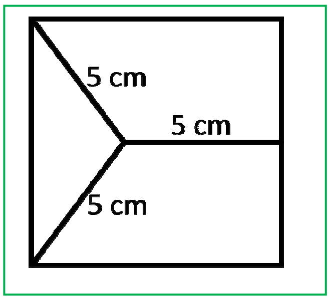
31. ¿Es posible encontrar un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 5 y 12 *cm* y su hipotenusa 24 *cm*? Si tu respuesta es negativa, halla la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 12 *cm*. Utiliza calculadora para resolver esta actividad si te resulta necesaria.

32. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:

a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* c) 8 *dm* y 15 dm d) 13,6 *km* y 21,4 *km*.

33. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de hipotenusa y cateto:

a) 26 *cm* y 10 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm* d) 14,7 *km* y 5,9 *km*



34. Calcula el lado del cuadrado de la figura del margen:

35. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 9 *m*.

36. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*.

37. Calcula el volumen de un tetraedro regular de lado 7 *dm*.

38. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*.

39. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.

40. Una portería de fútbol mide 7,32 m de ancho por 2,44 m de alto. El punto de penalti está a 10 metros. Calcula la distancia que recorre el balón en:

a) Un tiro directo a la base del poste.

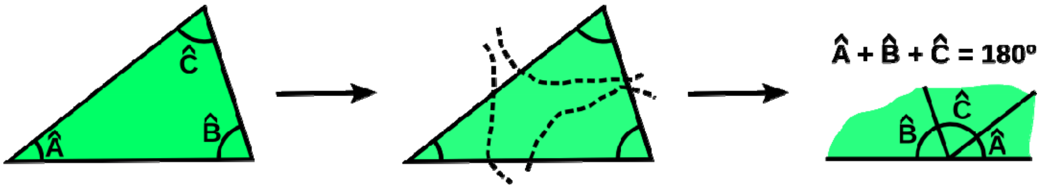
b) Un tiro directo a la escuadra.

41. Demuestra que el diámetro de un cuadrado de lado *x* es $d = \sqrt{2}x$.

42. Demuestra que la altura de un triángulo equilátero de lado *x* es $d = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

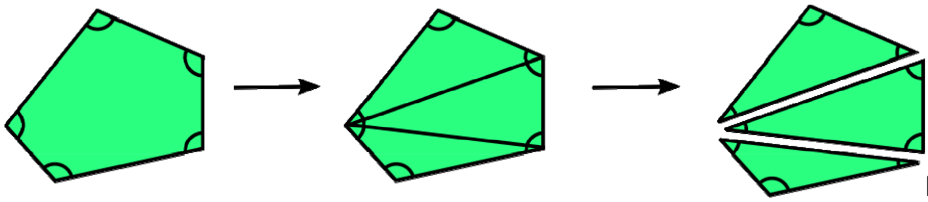
3.2. Suma de ángulos de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.



La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es (n – 2)·180º.

Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos dividido en triángulos.

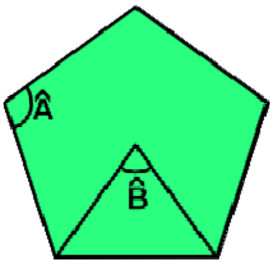


Por lo tanto:

Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180º	Cuadrilátero	180º · 2 = 360º
Pentágono	180º · 3 = 540º	Hexágono	180º · 4 = 720º

Si el polígono de *n* lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre *n* la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:



- *En un pentágono la suma de los ángulos centrales es* 180 · 3 = 540º.

Por lo tanto el **ángulo interior:** $\hat{B} = \frac{540^o}{5} = 108^o$

También es muy común calcular el **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360^o}{5} = 72^o$

Actividades propuestas

43. Calcula los ángulos central e interior del triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, hexágono regular y eneágono regular.

44. Justifica que un hexágono regular se puede descomponer en 6 triángulos equiláteros.

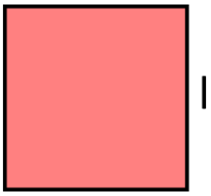
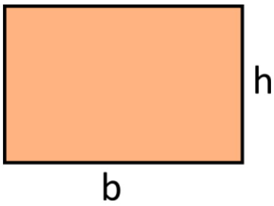
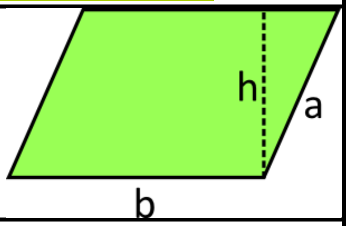
45. Dos ángulos de un triángulo isósceles miden 36º y 72º, ¿cuánto puede medir el ángulo que falta?

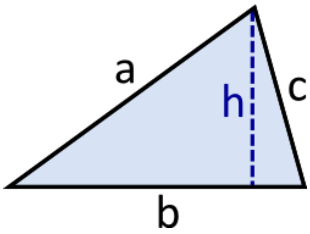
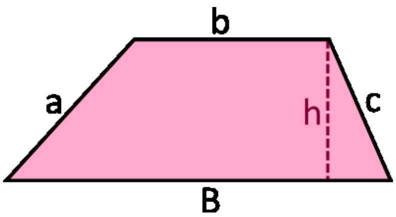
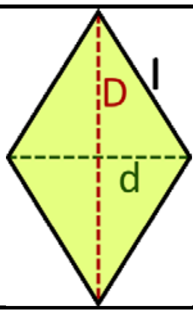
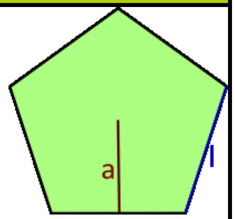
46. Dos ángulos de un trapecio isósceles miden 108º y 72º, ¿cuánto miden los ángulos que faltan?

47. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?

3.3. Longitudes y áreas de figuras poligonales

Recuerda que:

Cuadrado	Rectángulo	Romboide
		
Perímetro: P = $4l$ **Área: A** = l^2	**P** = $2b + 2h$ **A** = $b \cdot h$	= $2b + 2a$ **A** = $b \cdot h$

Triángulo	Trapecio	Rombo	Polígono regular de *n* lados
			
P = $a + b + c$ $A = \frac{b \cdot h}{2}$	**P** = $a + B + b + c$ $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$	l $A = \frac{d \cdot D}{2}$	**P** = $n \cdot l$ $A = \frac{P \cdot a}{2}$

Actividades propuestas

48. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 50 cm y 26 cm y altura 5 cm.

49. Calcula el área y perímetro de un trapecio rectángulo de bases 100 cm y 64 cm, y de altura 77 cm.

50. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de bases 100 cm y 60 cm y lados laterales 29 cm.

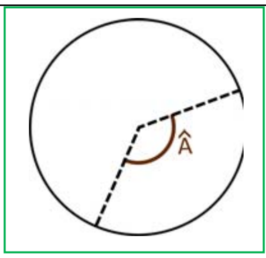
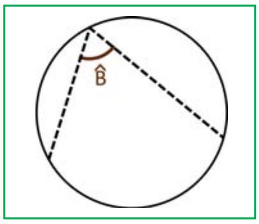
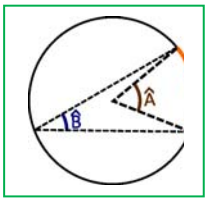
51. Utiliza el teorema de Tales para determinar el área y el perímetro de la zona sombreada de la figura.

52. Teniendo en cuenta que un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos equiláteros (cuya altura es la apotema del hexágono regular), calcula el área de un hexágono regular de 5 cm de lado.

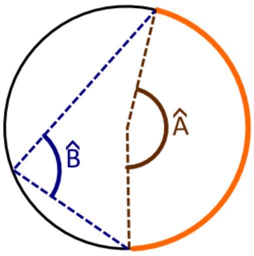
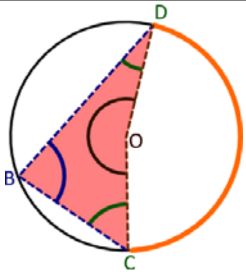
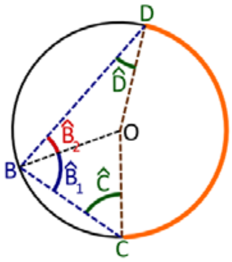
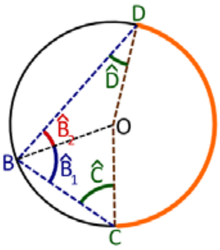
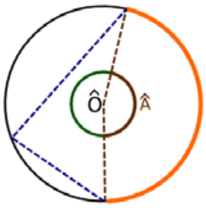
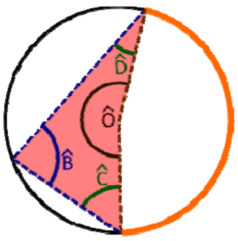
53. Queremos cubrir el plano con polígonos regulares de 100 cm^2. Las únicas opciones posibles son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono. Calcula cuál de estas tres figuras tiene menor perímetro. ¿Qué animal aplica este resultado? [Utiliza la relación entre lado y altura de un triángulo equilátero obtenida anteriormente]

3.4. Ángulos de la circunferencia

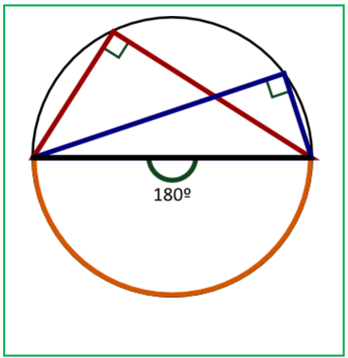
En una circunferencia tienen especial importancia los **ángulos centrales** (tienen su vértice en el centro de la circunferencia) y los **ángulos inscritos** (tienen su vértice en un punto de la circunferencia).

		
Ángulo central	**Ángulo inscrito**	$\hat{B} = \frac{\hat{A}}{2}$

Se verifica además que un ángulo inscrito mide la mitad que un ángulo central que abarca el mismo arco de circunferencia.

Demostración de la propiedad		
		
Debemos comprobar que el ángulo $\hat{B}$ es la mitad de $\hat{A}$. $2\hat{B} = \hat{A}$	Vamos a estudiar el cuadrilátero *BCOD* y aplicar en el último paso que sus ángulos suman 360º.	*BO* y *OD* son radios de la circunferencia. Por lo tanto *BDO* es isósceles y $\hat{B}_2$ y $\hat{D}$ son iguales.
		
Lo mismo para $\hat{B}_1$ y $\hat{C}$. Entonces $\hat{C}+\hat{D} = \hat{B}_2+\hat{B}_2 = \hat{B}$	Además el ángulo Ô del cuadrilátero mide 360º – $\hat{A}$.	$\hat{B} + (\hat{C}+\hat{D}) + \hat{O} = 360º$. $\hat{B} + (\hat{B}) + 360º - \hat{A} = 360º$. 2 $\hat{B} = \hat{A}$

Actividades propuestas

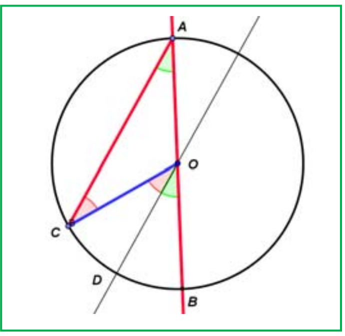


54. Tales observó que en cualquier triángulo rectángulo el circuncentro siempre estaba en el punto medio de la hipotenusa. Observa la figura y razona la afirmación.

55. Un ángulo inscrito en la circunferencia que abarca un diámetro es un ángulo recto. ¿Por qué? Razona la respuesta.

56. ¿En qué posiciones tiene un futbolista el mismo ángulo de tiro que desde el punto de penalti?

57. ***Otra demostración. Intenta comprenderla.*** Trazamos un ángulo inscrito en la circunferencia *CAB* que tenga un lado que pase por el centro *O* de la circunferencia. Trazamos su central *COB*. El triángulo *OAC* es isósceles pues dos de sus lados son radios de la circunferencia. Trazamos por *O* una recta paralela a *AC*. El ángulo *CAO* es igual al ángulo *DOB* pues tienen sus lados paralelos. El ángulo *ACO* es igual al ángulo *COD* por alternos internos entre paralelas, y es igual al ángulo *CAO* por ser el triángulo isósceles. Por tanto el central mide el doble que el ángulo inscrito.



3.5. Longitudes y áreas de figuras circulares

Ya sabes que:

El **número π** se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

π = Longitud de la circunferencia / Diámetro

Ya sabes que es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592. Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio *r*, entonces su diámetro mide 2*r*, y su longitud, por la definición de π, mide $2\cdot\pi\cdot r$.

Longitud de la circunferencia = $2\cdot\pi\cdot r$.

Para calcular la **longitud de un arco de circunferencia** que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360 º. Por tanto:

$$L = 2\cdot\pi\cdot r\cdot\alpha/360.$$

El **área del círculo** es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

$$A = \pi\cdot r^2.$$

El **área de una corona circular** es igual al área del círculo mayor menos el área del círculo menor.

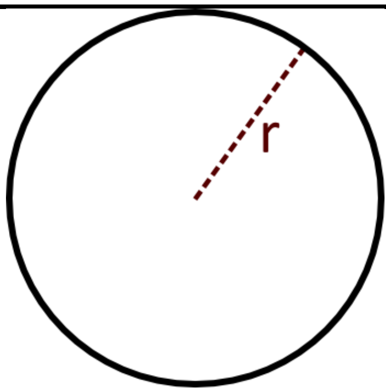
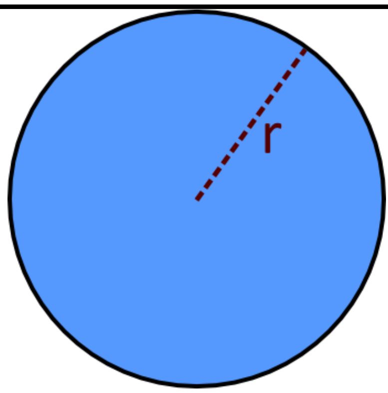
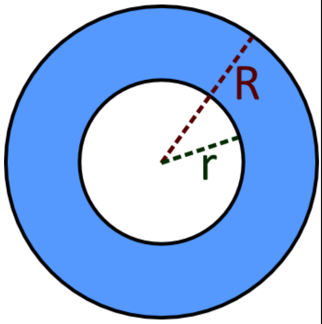
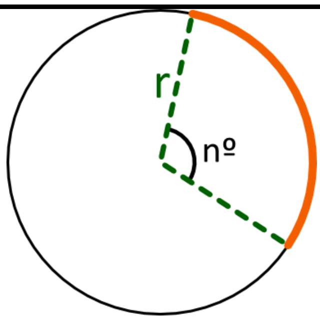
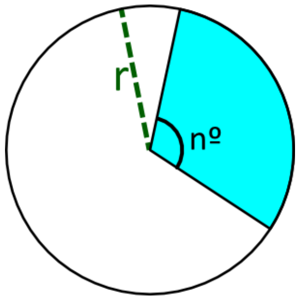
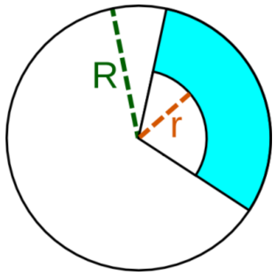
$$A = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi\cdot(R^2 - r^2)$$

El **área de un sector circular** que abarca un ángulo de *n* grados es igual a:

$$A = \pi\cdot r^2\cdot n/360.$$

Para hallar el **área del segmento circular** restamos al área del sector circular el área del triángulo.

En resumen

Longitud de la circunferencia	**Área del círculo**	**Área de la corona circular**
		
$\mathbf{L} = 2 \cdot \pi \cdot r$	$\mathbf{A} = \pi \cdot r^2$	$\mathbf{A} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
π es la razón entre el la longitud de una circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación de π es 3,14, otra 3,1416 y otra 3,141592		
Longitud del arco de circunferencia	**Área del sector circular**	**Área del trapecio circular**
		
$L = \frac{nº \cdot 2 \cdot \pi \cdot r}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot r^2}{360º}$	$A = \frac{nº \cdot \pi \cdot (R^2 - r^2)}{360º}$

Actividades resueltas

- La circunferencia de radio 5 *cm* tiene una longitud L = 2·π·*r* = 2·π·5 = 10·π ≈ 31,416.
- Las ruedas de un carro miden 60 *cm* de diámetro, y tienen 16 radios. La longitud del arco entre cada radio es:

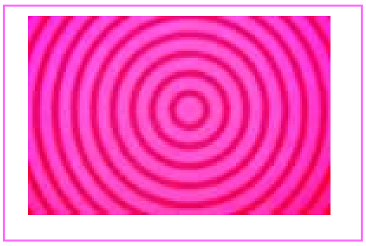
  L = 2·π·*r*·α/360 = 60·π/16 ≈ 11,78 *cm*.

- El área de un círculo de radio 8 *cm* es A = 64 π ≈ 201,06 cm^2. Y el de un círculo de 10 *cm* de radio es A = π ≈ 314,16 cm^2.

- El área de un círculo de diámetro 10 m es A = 25π ≈ 78,54 m^2.
- El área de la corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 *cm* y 5 *cm* es igual a: A = $\pi\cdot(R^2 - r^2) = \pi\cdot(9^2 - 5^2) = \pi\cdot(81 - 25) = \pi\cdot 56 \approx 175{,}93\ cm^2$.
- Para hallar el área del *sector* circular de radio 10 m que abarca un ángulo de 90º, calculamos el área del círculo completo: $\pi\cdot 10^2$ = 100 π, y hallamos la proporción:
    - $A_S = 100\pi\cdot 90/360 = 25\pi \approx 78{,}54\ m^2$.
- Para hallar el área del *segmento* circular, restamos al área anterior el área del triángulo rectángulo de base 10 *m* y altura 10 *m*, $A_T = 10\cdot 10/2 = 50\ m^2$. Luego el área del segmento es:

$$A = A_S - A_T = 78{,}54 - 50 = 28{,}54\ m^2.$$

Actividades propuestas



58. Las circunferencias de tamaño real de la ilustración del margen tienen como radio, la menor 1 *cm*, la siguiente, un poco más oscura 2 *cm*, la clara siguiente 3 *cm*, y así, aumenta un centímetro. Calcula las longitudes de las 10 primeras circunferencias.

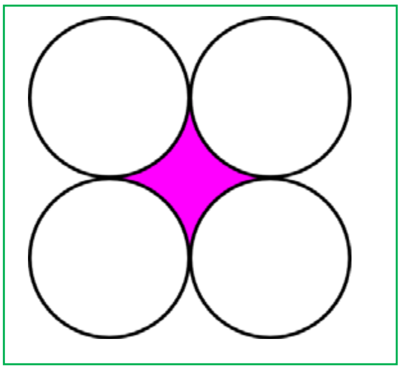
59. La Tierra es aproximadamente una esfera de radio 6.379 *km*. ¿Cuánto mide el Ecuador?

60. Antiguamente se definía un metro como: *"la diez millonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París"*. Según esta definición, ¿cuánto mide (en metros) el diámetro terrestre?

61. Un faro gira describiendo un arco de 170º. A una distancia de 5 *km*, ¿cuál es la longitud del arco de circunferencia en el que se ve la luz?

62. Determina el área del triángulo equilátero de 10 cm de radio.

63. Calcula el área encerrada por una circunferencia de radio 9 cm.



64. Calcula el área de la corona circular de radios 12 y 5 *cm*.

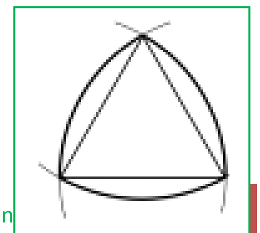
65. Calcula el área del sector circular y del segmento circular de radio 6 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

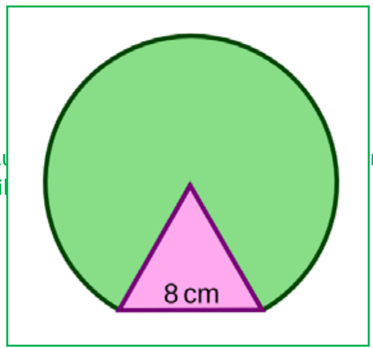
66. Calcula el área del sector de corona circular de radios 25 *cm* y 18 *cm* y que forma un ángulo de 60º.

67. Calcula el área encerrada entre estos círculos de 5 cm de radio.

68. Queremos construir una rotonda para una carretera de 9 metros de ancho de forma que el círculo interior de la rotonda tenga la misma área que la corona circular que forma la carretera. ¿Qué radio debe tener la rotonda?

69. Una figura típica de la arquitectura gótica se dibuja a partir de un triángulo equilátero trazando arcos de circunferencia con centro en cada uno de sus vértices y que

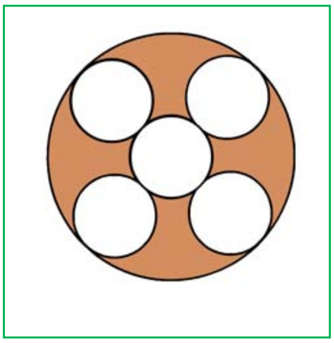


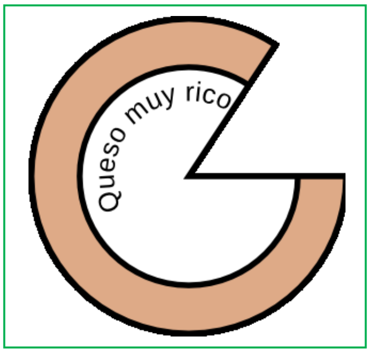


pasan por los dos vértices restantes. Calcula el área de una de estas figuras si se construye a partir de un triángulo equilátero de 2 metros de lado.

70. Calcula el área y el perímetro de la figura formada por un triángulo equilátero de 8 cm de lado sobre el que se construye un sector circular.

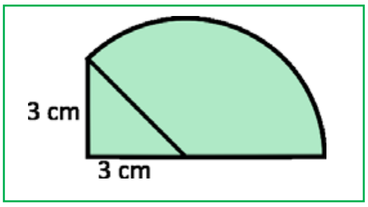
Hay 5 circunferencias inscritas en una circunferencia de 12 cm de radio tal como indica la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?



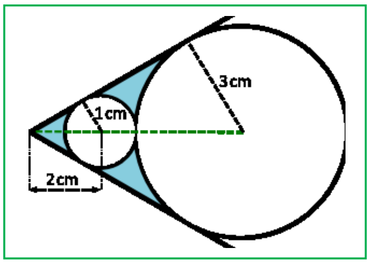


71. Un queso cilíndrico tiene una base circular de 14 cm de diámetro y una etiqueta circular de 8 cm de diámetro. Se corta una cuña de 70º. ¿Qué área tiene el trozo de etiqueta cortada?

72. De un queso de 18 cm de diámetro cortamos una cuña de 50º. La etiqueta tiene 7 cm de radio. ¿Qué área del queso está visible?

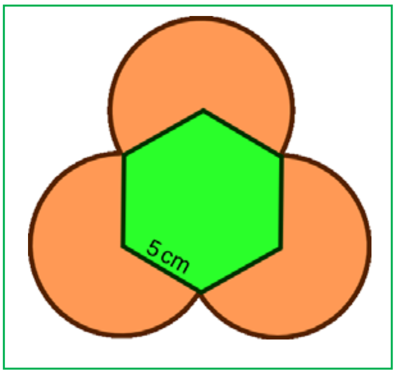


73. A partir de un triángulo rectángulo isósceles de 3 cm de cateto construimos un sector circular. Calcula el área de la figura.



74. En dos rectas que forman 60º se inscriben dos circunferencias tangentes entre sí. La primera tiene el centro a 2 centímetros del vértice y el radio de 1 centímetro. La segunda tiene de radio 3 centímetros. ¿Cuánto vale el área sombreada?

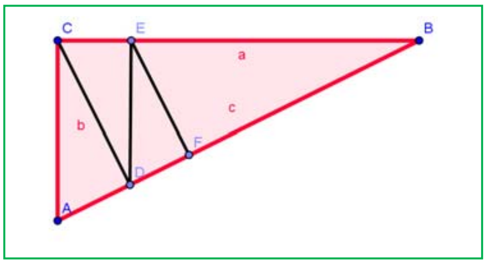
75. Trazamos tres arcos circulares desde tres vértices de un hexágono de 5 cm de lado. Calcula el área y el perímetro de la figura.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

1. La sombra de un edificio mide 15 m, y la del primer piso 2 m. Sabemos que la altura de ese primer piso es de 3 m, ¿cuánto mide el edificio?

2. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.



3. Demuestra que en dos triángulos semejantes las medianas son proporcionales.

4. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un cateto de longitud 7 cm, igual a la hipotenusa de otro triángulo semejante al primero. ¿Cuánto valen las áreas de ambos triángulos?

5. El mapa a escala 1:3000000 de un pueblo tiene un área de 2500 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicho pueblo?

6. Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo se obtiene otro triángulo. ¿Cómo son? ¿Qué relación hay entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

7. La altura y la base de un triángulo rectángulo miden respectivamente 4 y 7 cm; y es semejante a otro de base 26 cm. Calcula la altura del nuevo triángulo y las áreas de ambos.

Ángulos, longitudes y áreas

8. Construye un triángulo conociendo la altura sobre el lado *a*, el lado *a* y el *c*.

9. Calcula la longitud del lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.

10. Calcula la apotema de un hexágono regular lado 7 cm.

11. Calcula el área de un círculo cuya circunferencia mide 50 cm.

12. Calcula la longitud de una circunferencia cuya círculo tiene una superficie de mide 50 cm^2.

13. La Tierra da una vuelta cada 24 horas, ¿a qué velocidad se mueve un punto del Ecuador?

14. ¿Qué relación hay entre las áreas un triángulo inscrito en un círculo y la del círculo?

15. Los griegos conocían las dos siguientes posibles formas de construir un triángulo rectángulo con sus tres lados de longitud un número natural, sin más que dar valores a *n*. Comprueba si se verifican para n = 1, 2, …. a) Catetos: $2n$ y $n^2 - 1$, hipotenusa: $n^2 + 1$. b) Catetos: $2n + 1$ y $2n^2 + 2n$, hipotenusa: $2n^2 + 2n + 1$.

16. Al aumentar en 3 cm el lado de un cuadrado su área aumenta 32 cm^2 ¿Cuánto mide el lado de dichos cuadrados?

17. Se quiere cubrir un terreno circular de 25 m de diámetro con gravilla, echando 10 kg por cada metro cuadrado. ¿Cuánta gravilla se necesita?

18. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada sobre una pared. El pie de la escalera dista 1,5 m de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera sobre la pared?

19. Calcula el área de la circunferencia circunscrita a un rectángulo de lados 7 y 9 cm.

20. Calcula el área de un hexágono regular de 3 cm de lado. Prolonga los lados del hexágono y dibuja un hexágono estrellado. Calcula su área.

21. La señal de tráfico de STOP tiene forma de octógono regular. Su altura mide 90 cm, y su lado 37 cm, ¿cuánto mide su superficie?

22. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 10 cm.

23. Calcula el área de un hexágono regular de perímetro 60 cm.

24. Calcula el área de un trapecio isósceles de base menor 5 cm, lado 3 cm y altura 4 cm.

25. Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 8 y 6 cm y lado 3 cm.

26. Calcula el área y el perímetro de un rectángulo de lado 4 cm y diagonal 7 cm.

27. Calcula el área y el perímetro de un cuadrado de diagonal 9 cm.

28. Calcula el área y el perímetro de un triángulo isósceles de base 8 cm y altura 6 cm.

29. Un triángulo mide de altura π y de base $\pi + 1$. ¿Es rectángulo?

30. Dibuja un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto igual a 1 dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 4 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

31. Dibuja un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1 y 2 cm, ¿cuánto mide la hipotenusa? Tomando dicha hipotenusa como cateto y con el otro cateto de longitud 1 cm dibuja un nuevo triángulo rectángulo. ¿Cuánto mide la nueva hipotenusa? Continúa el proceso 3 veces, ¿cuánto mide la última hipotenusa?

32. Calcula la altura de una pirámide regular cuadrangular de lado de la base 10 m y de arista 15 m.

33. Calcula la generatriz de un cono de radio de la base 5 m y de altura 7 m.

34. Dos ascetas hindúes viven en lo alto de un acantilado de 10 m de altura cuyo pié está a 200 metros del pueblo más cercano. Uno de los ascetas baja del acantilado y va al pueblo. El otro, que es mago, asciende una distancia x y viaja volando en línea recta al pueblo. Ambos recorren la misma distancia. ¿Cuánto ha ascendido el mago?

35. ¿Cuánto mide la arista de la base de la pirámide de Keops si mide 138 m de altura y 227 m de arista?

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 7

Funciones y gráficas

Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Textos Marea Verde

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Unidad Didáctica 7 Funciones y gráficas

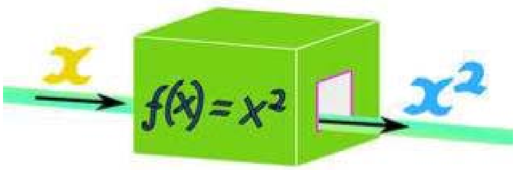
1. FUNCIONES REALES

1.1. Concepto de función

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, *x*, le corresponde ***un solo*** valor de la dependiente, *y*.

Para indicar que la variable (*y*) depende o es función de otra, (*x*), se usa la notación $\boldsymbol{y = f(x)}$**,** que se lee *"y es función de x"*.

Las funciones son como máquinas a las que se les mete un elemento, *x*, y devuelve otro valor, $y = f(x)$. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2$, se introduce valores de *x*, y nos devuelve sus cuadrados.



Es MUY IMPORTANTE que tengamos un solo valor de *y* (variable dependiente) para cada valor de *x* (variable independiente). En caso contrario no tenemos una función.
Las funciones se introdujeron para estudiar procesos. Si haciendo lo mismo nos pueden salir cosas distintas, no se puede estudiar del mismo modo.

Ejemplos:

Pensemos en la factura de teléfono. Si sabemos cuántos minutos hemos hablado (suponiendo, claro, que cuesten lo mismo todos) también sabemos cuánto nos toca pagar. El dinero que pagamos es función del tiempo.

Vamos al casino y apostamos a rojo o negro. Si apostamos un euro, podemos ganar dos o no ganar nada. Si decimos cuánto apostamos no sabemos cuánto vamos a ganar. Por tanto, las ganancias en un casino NO son una función de la apuesta.

Actividades resueltas

Indica si las siguientes situaciones representan una función o no

a) El espacio recorrido por un coche y el tiempo.

b) Las ganancias en la Bolsa en función de lo invertido.

c) El cuadrado de un número.

Solución:

Son funciones la a) y la c). La b) no lo es porque no sabemos cuánto ganamos.

1.2. Gráfica de una función

En muchas ocasiones, la manera más sencilla de ver cómo se comporta una función es dibujarla en el plano cartesiano. Vamos a recordar muy brevemente qué era el plano cartesiano (cartesiano, viene de *Cartesio*, que era el nombre con el que firmaba su inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

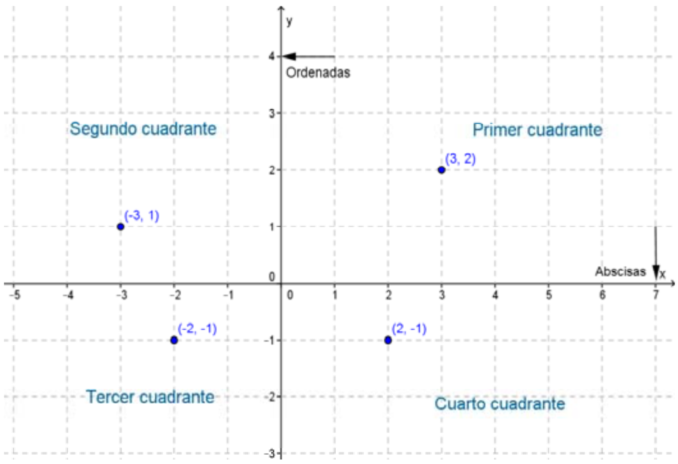
Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como **cuadrantes**:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha

- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda

- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda

- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha.



Sistema de referencia cartesiano

Para representar puntos, sólo hay que recordar que la primera componente (o abscisa) es x, por lo que debe ir al eje X (eje de abscisas). La segunda componente (u ordenada) es y, por tanto va al eje Y (eje de ordenadas).

El sentido positivo es a la derecha y arriba. Si alguna de las componentes es negativa, entonces se coloca en sentido contrario.

Para representar una gráfica, lo que debemos hacer es simplemente tomar valores (x, y) o, lo que es lo mismo $(x, f(x))$ puesto que $y = f(x)$. Luego los unimos, bien con líneas rectas, bien ajustando "a ojo" una línea curva. Naturalmente, ahora nos aparecen dos cuestiones:

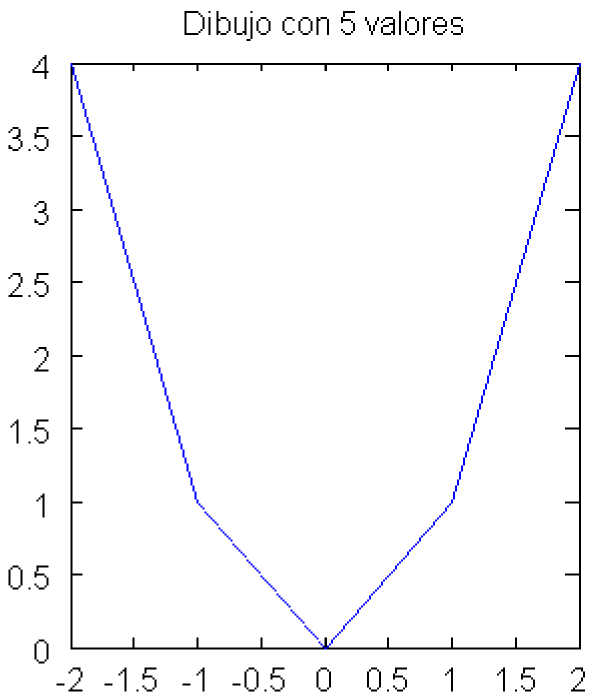
- ¿Cuántos valores hay que dar?
- ¿Qué valores le damos?

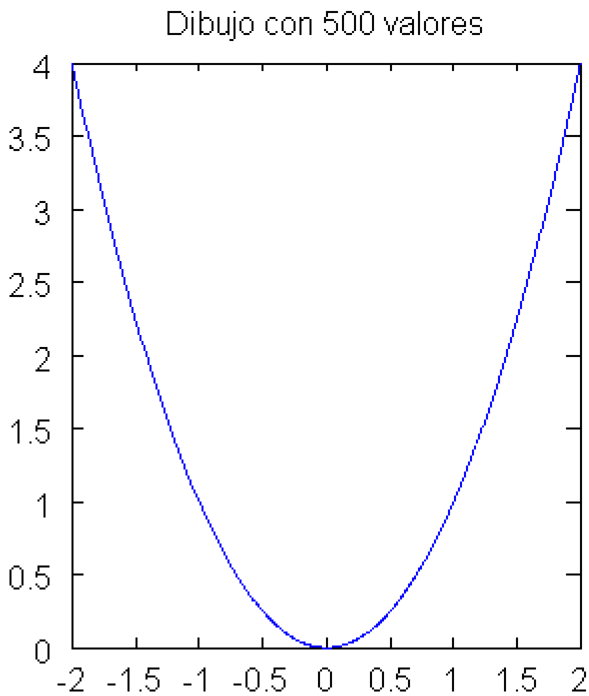
En general, no hay una respuesta clara a esas preguntas, aparte de la obvia "cuánto más, mejor". Si una gráfica se dibuja con ordenador, normalmente se le da un intervalo y el número de valores que queremos que represente. Típicamente, un ordenador da MUCHOS valores: 500, 1000, ….

Ejemplo:

Dibujamos la función $y=x^2$ en el intervalo [–2, 2] con un ordenador (este dibujo está hecho con el programa *Octave*, que es código abierto y puedes descargar libremente).

Hacemos dos gráficas, una dando 5 valores y la otra 500. Observa la diferencia entre los dos dibujos. Observa también que el ordenador une los puntos con segmentos de rectas.



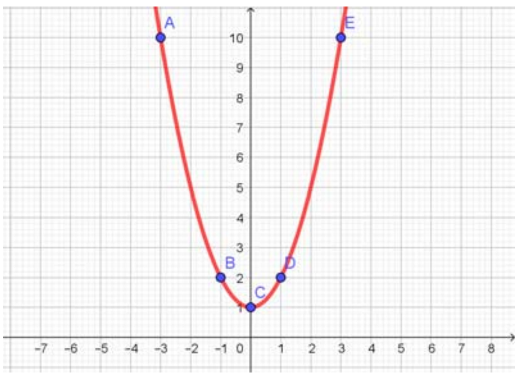


Actividad resuelta

Dibujar la función .

En el capítulo siguiente indicaremos los valores que es recomendable tomar. De momento, nos limitaremos a dar unos pocos y unir puntos. Por ninguna razón en especial, tomamos –3, –1, 0, 1 y 3. Recordemos que al sustituir se usan SIEMPRE paréntesis. Es obligatorio en el caso de que el valor de *x* sea negativo. Así, $(-3)^2+1=10$. Obtenemos entonces la tabla de valores y basta unir los puntos (dándoles "a ojo" un poco de curva).

x	f (x)
–3	10
–1	2
0	1
1	2
3	10

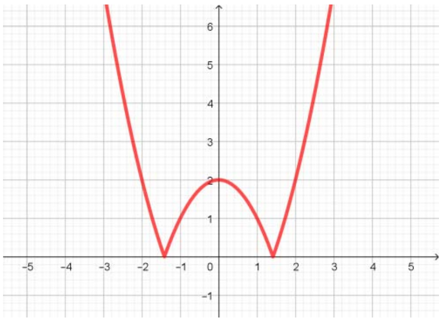


Una cuestión a reseñar de las gráficas es el hecho de que, directamente a partir de un dibujo podemos ver si corresponde a una función o no. Para verlo, basta fijarse en si a algún valor de *x* le corresponde más de un valor de *y*. Si NO lo hay, es una función. Observamos que el ejemplo anterior es una función.

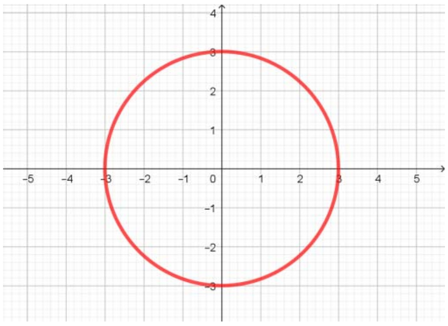
Actividad resuelta

Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función:

a)



b)

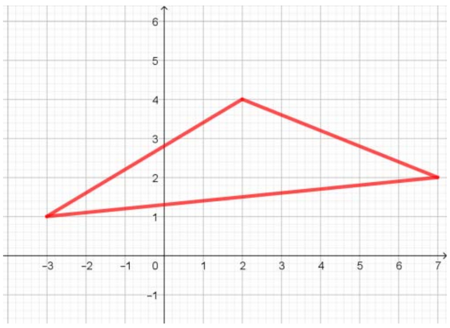


La gráfica a) es una función. La gráfica b) NO lo es porque, por ejemplo, para $x = 0$ hay dos valores de *y*.

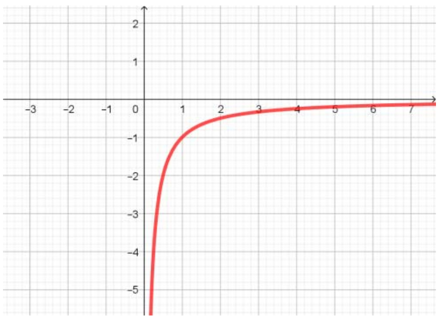
Actividad propuesta

1. De las siguientes gráficas indica cuáles de ellas corresponden a funciones.

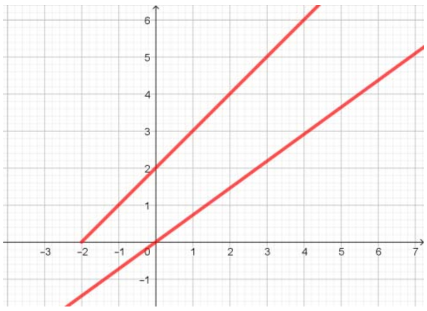
a)



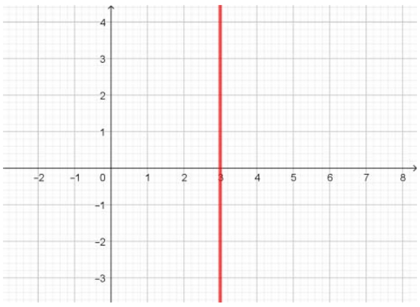
b)



c)



d)



1.3. Diferentes maneras de expresar una función

Recordemos, una vez más, que una función es la descripción de cómo se relacionan dos magnitudes. Así pues, esta descripción la podemos saber de varias maneras.

Funciones dadas por tablas

Probablemente, la manera más sencilla en la que se puede dar una función es con una tabla de valores. Es además la manera más experimental: observamos un proceso y medimos las cantidades que nos salen. Así tenemos una idea de cómo se relacionan.

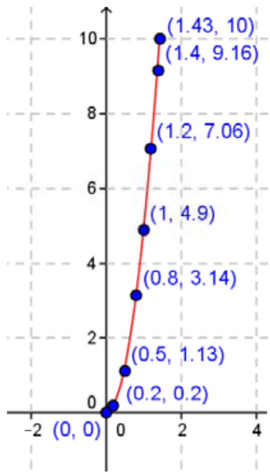
Dibujar su gráfica no puede ser más sencillo. Basta poner los puntos y, en su caso, unirlos.

Ejemplo:

Soltamos una pelota desde 10 m de altura y medimos el espacio recorrido (en segundos). Obtenemos entonces la tabla siguiente:

Espacio (m)	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,4	1,43
Tiempo (s)	0	0,2	1,13	3,14	4,9	7,06	9,16	10,00

Es muy sencillo dibujar su gráfica. Basta representar los puntos y unirlos (esta gráfica está hecha con el programa *Geogebra*, también de código abierto):



Date cuenta que tiene sentido "*rellenar*" el espacio entre puntos. Aunque no lo hayamos medido, la pelota no puede teletransportarse, por lo que seguro se puede hablar de dónde está en el instante 0,7, por ejemplo. Y obviamente, el espacio recorrido estará entre 1,13 (que corresponde a 0,5 segundos) y 3,14 (que corresponde a 0,8 segundos).

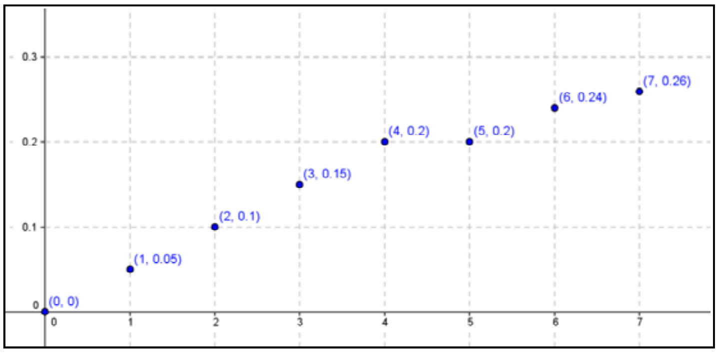
La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿es siempre así?, ¿puede haber funciones donde NO TENGA SENTIDO poner valores intermedios?

A poco que pienses, te darás cuenta de que sí las hay. Veamos un ejemplo:

Ejemplo:

En una librería, han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias, dependiendo del número de copias:

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Precio (euros)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28



Se puede construir la representación gráfica dibujando estos puntos.

La cuestión de si podemos dibujar puntos intermedios entre los anteriores se responde por sí sola.
No se pueden hacer 1,5 copias.
Solamente puedes hacer un número entero de copias.
Por tanto, no tiene sentido plantearse siquiera dar valores intermedios ni dibujarlos.

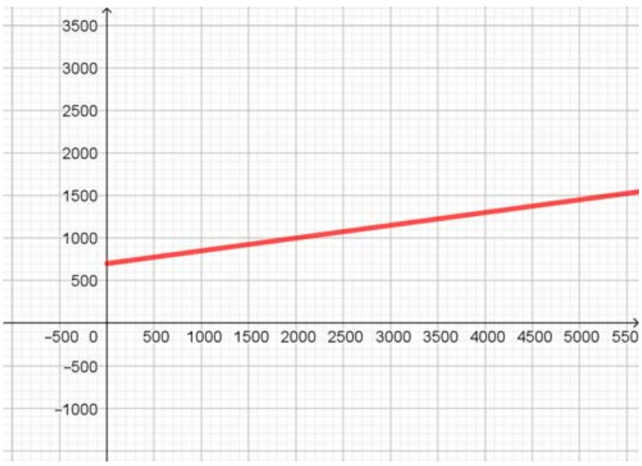
Funciones dadas por una expresión

En muchísimas ocasiones, sabemos suficiente de la relación entre dos magnitudes como para conocer exactamente una expresión que las relaciona. Vamos a empezar con un ejemplo.

Ejemplo:

Supongamos que el salario de un comerciante es de 700 euros fijos más el 15 % de las ventas. Se supone que si no venda nada solamente ganará 700 €. Esto significa que el salario f(x) para unas ventas x viene dado por la expresión:

La gráfica de esta función es:



Fíjate que no tiene sentido representar puntos en el segundo cuadrante pues no puede hacer un número negativo de ventas.

Las graduaciones que se toman en los ejes no siempre tienen que ir de 1 en 1.

Actividades propuestas

2. Un ciclista bebe 1/2 litro de agua cada 10 km de recorrido. Si en el coche de equipo llevan un bidón de 40 litros, haz una tabla que indique su variación y escribe la función que la representa.

3. Un ciclista participa en una carrera recorriendo 3 km cada minuto. Teniendo en cuenta que no partió del origen sino 2 km por detrás representa en una tabla el recorrido durante los tres primeros minutos. Escribe la función que expresa los kilómetros en función del tiempo en minutos y dibújala.

Funciones definidas a trozos

Piensa en la siguiente situación para la tarifa de un teléfono móvil. Se paga un fijo de 10 € al mes y con eso son gratis los 500 primeros minutos. A partir de allí, se paga a 5 céntimos por minuto.

Es evidente que es diferente el comportamiento antes de 500 minutos y después.

Una **función definida a trozos** es aquella que viene dada por una expresión distinta para diferentes intervalos.

En el ejemplo del móvil, la factura viene dada por

$$f(x)=\begin{cases} 10 & si \quad x\le 500 \\ 10+0{,}05\cdot(x-500) & si \quad x>500 \end{cases}.$$

Veamos brevemente por qué. Para valores menores que 500, el gasto es siempre 10 €. Para valores mayores, los minutos que gastamos POR ENCIMA DE 500 son (x–500) y por tanto lo que pagamos por los minutos es $10+0{,}05\cdot(x-500)$, pues lo medimos en euros. Hay que sumarle los 10 € que pagamos de fijo.

Actividades propuestas

4. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los valores que has de tomar para la variable *x*.

a) . $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x<-3 \\ -x+1 & si \quad -3\le x<0 \\ 3 & si \quad 0\le x \end{cases}$ Puntos: –5; –3,1; –3; –1; –0,1; 0; 1.

b). $g(x)=\begin{cases} x+3 & si \quad x<-2 \\ 3 & si \quad -2\le x<1 \\ 2 & si \quad 1\le x \end{cases}$ Puntos: –3; –2,1; –2; 0; 0,9; 1; 4; 9.

1.4. Dominio y recorrido de una función

Hasta ahora, no nos hemos preocupado de qué valores pueden tener la *x* y la *y*. Pero es evidente que no siempre pueden tomar todos los valores de la recta real. Por ejemplo, si una función nos da la altura con respecto del peso no vamos a poder tener valores negativos. Para ello existen los conceptos de dominio y recorrido.

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que la variable independiente (*x*) puede tomar. Se escribe *Dom f* o *Dom*(*f*).

El **recorrido, rango o imagen** de una función es el conjunto de valores que la variable dependiente (*y*) puede tomar. Se escribe *Rgf* o *Rg*(*f*). También *Im f* o *Im(f)*.

El dominio de una función que viene dada por un polinomio es el conjunto de los números reales.

Normalmente, el recorrido es más directo de calcular. Simplemente, miramos la gráfica y vemos qué valores puede tomar la variable dependiente (*y*).

El dominio suele ser un asunto bastante más complicado. En general, existen dos razones por las que un valor de *x* NO pertenezca al dominio.

1. La función no tiene sentido para esos valores. Por ejemplo, si tenemos una función que represente el consumo de electricidad a cada hora del día, es evidente que *x* debe estar entre 0 y 24. ¡¡Un día tiene 24 horas!! De ninguna manera podemos hablar siquiera de lo que hemos gastado la hora 25.

2. La operación que nos da *f*(*x*) no puede hacerse. Por ejemplo, no se puede dividir entre 0, por lo que la función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto $\{x \in \Re; x \neq 0\}$, es decir $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

El primer caso viene dado por la aplicación práctica y nuestro sentido común. El segundo es el que tiene más dificultad y por eso vamos a dedicarle un poco más de tiempo.

Cálculo de dominios

Existen dos operaciones que NO están permitidas.

a. Dividir entre 0.

b. Hacer raíces cuadradas o de índice par de números negativos. Ten en cuenta que la raíz cuadrada de 0 SÍ está definida (vale 0).

En capítulos futuros veremos alguna operación más, pero por ahora, sólo esas dos operaciones. Vamos a ver un método sistemático para calcular el dominio.

Método para calcular el dominio

1. Recuadra TODAS las operaciones problemáticas.
2. Para TODAS esas operaciones, plantea una ecuación igualándola a 0. Resuelve dicha ecuación.
3. Representa en una recta todas las soluciones de todas las ecuaciones.
4. Da valores a la función. Un valor en cada intervalo y los valores límite. Si la operación se puede hacer, es que el punto o el intervalo pertenece al dominio. Si no, pues no. Puedes ver si una operación vale, o no, haciéndola con la calculadora. Si sale error, es que no se puede. Marca con una X los valores que no valen y con un tick (V) si se pueden hacer.
5. Representa la solución con intervalos. Si el punto del extremo está, es un corchete como [] y si no, un paréntesis.

Así visto, puede parecer un poco complicado. Vamos a ver un par de ejemplos.

Actividades resueltas

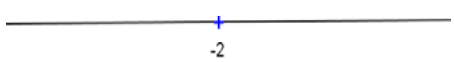
Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $x+\sqrt{2x+4}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

Apartado a

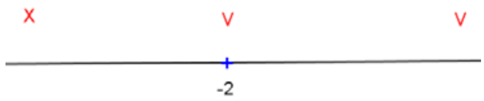
Vamos a seguir el procedimiento punto por punto.

1. El único posible problema es la raíz cuadrada de $2x+4$
2. Igualamos a 0 y resolvemos: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$
3. Representamos en la recta los valores.



4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2 y un valor a la derecha. Por ejemplo, el –3, el –2 y el 0. Los marcamos en la recta

X	-3	-2	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ



5. El dominio es $[-2,+\infty)$ (el infinito SIEMPRE es abierto, nunca llegamos).

Apartado b

1. Tenemos dos posibles problemas. La raíz cuadrada de $x+2$ y el denominador $\sqrt{x+2}-1$.

2. Tenemos que igualar LOS DOS a cero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Por otra parte $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevando al cuadrado $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representamos en la recta los valores.

4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de -2, el valor -2, un valor entre -2 y -1, el valor -1 y un valor a la derecha de -1. Por ejemplo, el -3, el -2, el $-1{,}5$, el -1 y el 0. Los marcamos en la recta

X	-3	-2	$-1{,}5$	-1	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ

5. El dominio es $[-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

Actividades propuestas

5. Indica el dominio de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ b) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x+2}}$ c) $y=\dfrac{1}{x-1}$

6. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $y=14x+2$ b) $y=\sqrt{x+9}$

7. Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

a) $f(x)=\begin{cases} x & si \quad x\in[-3,0) \\ 2 & si \quad x\in[0,2] \end{cases}$ b)

$g(x)=\begin{cases} -x & si \quad x\in[-2,1] \\ x & si \quad x\in(1,2] \end{cases}$

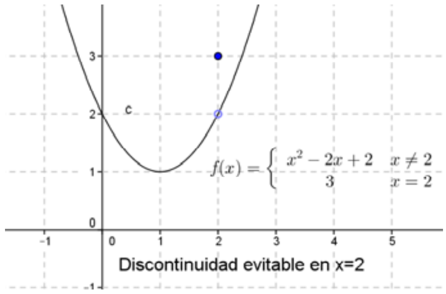
2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

2.1. Continuidad

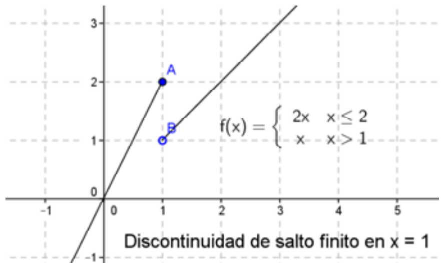
Intuitivamente, una función es continua si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. En caso contrario, se producen “saltos” en determinados valores de la variable independiente que reciben el nombre de discontinuidades.

Una discontinuidad puede ser de tres tipos:

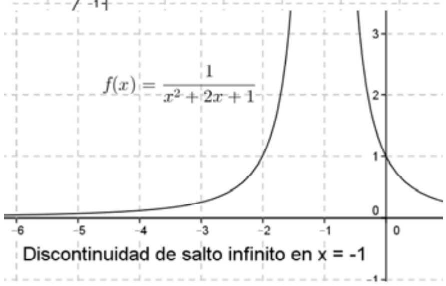
1. **Evitable**: En la función sólo “falla” un punto, que “no está donde debería estar”. Más formalmente, si nos aproximamos al punto por la derecha y por la izquierda, nos aproximamos a un valor que no es el de la función. En este caso, la función sería continua sin más que cambiar la definición de la función en el punto que nos da problemas.



2. **De salto finito:** En un punto, la función tiene dos ramas diferentes a derecha e izquierda del punto. Estas ramas se aproximan a valores distintos (pero finitos) para cada lado. El punto de discontinuidad puede estar en una cualquiera de las ramas o incluso fuera de ellas. Da lo mismo, la discontinuidad sigue siendo de salto finito.



3. **De salto infinito:** Como en salto finito, en un punto la función tiene dos ramas diferentes. Pero en este caso, al menos una de las dos ramas (posiblemente las dos) se hace inmensamente grande o inmensamente negativa (en términos más informales “se va a infinito”).

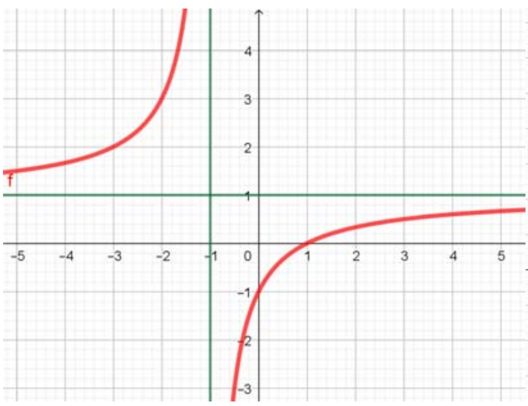


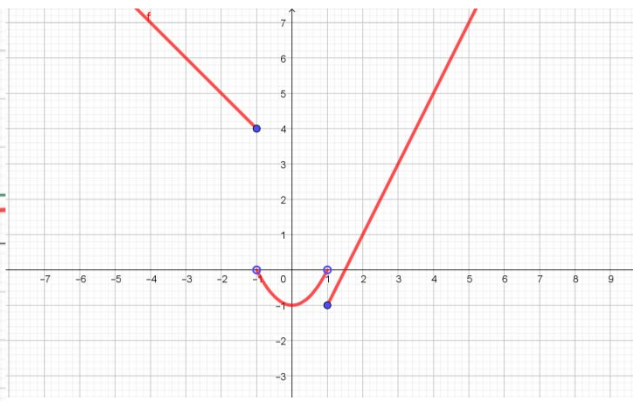
Actividades resueltas

Indica en estas funciones el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad e indica el tipo de discontinuidad.

a) –

b)





Salto infinito en x = –1

Salto finito en x = –1 y en x=1.

2.2. Monotonía: Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

Una función es **constante** en un intervalo (x_1, x_2) cuando tome el valor que tome la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor. En símbolos, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo (x_1, x_2) cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **creciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente creciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO disminuye.

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente disminuye también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **decreciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente decreciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO aumenta.

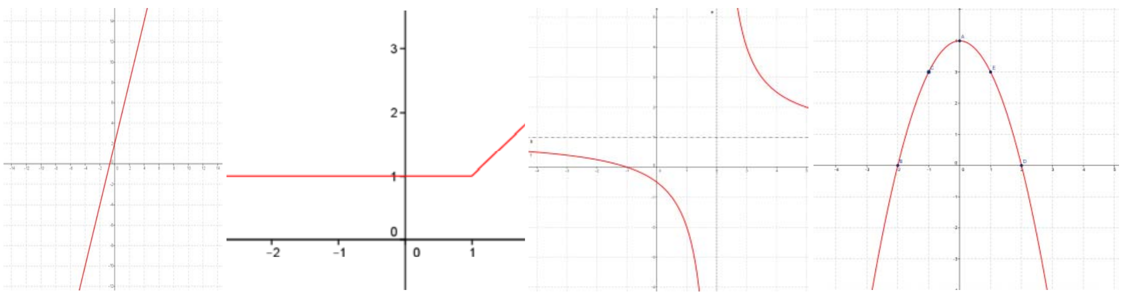
Una función es **estrictamente monótona** en un intervalo cuando es estrictamente creciente o decreciente en dicho intervalo.

Una función es **monótona (en sentido amplio)** en un intervalo cuando es creciente o decreciente (en sentido amplio) en dicho intervalo.

Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo, es decir, para un conjunto de números reales. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

Ejemplos:

En las funciones siguientes estudia el crecimiento y el decrecimiento.



CRECIENTE siempre

CONSTANTE hasta x = 1
CRECIENTE desde x = 1
CRECIENTE (EN SENTIDO AMPLIO) siempre

DECRECIENTE hasta x = 2
DECRECIENTE desde x = 2

CRECIENTE hasta x=0
DECRECIENTE desde x = 0

Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es mayor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

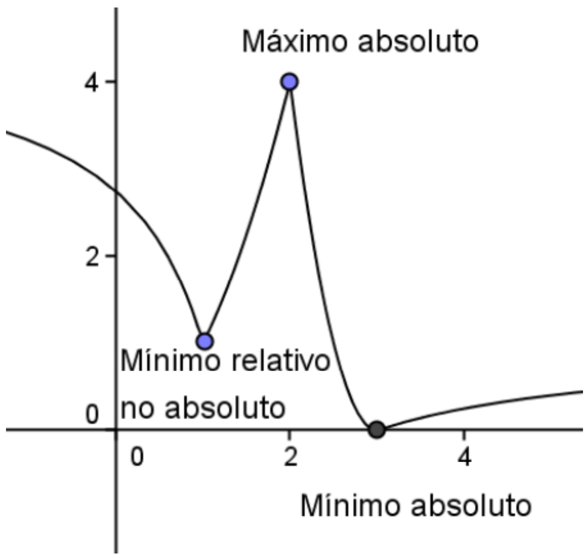
Si, además, la imagen es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** en él.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

Si, además, la imagen es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** en él.

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

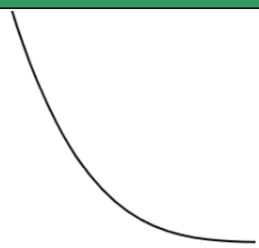
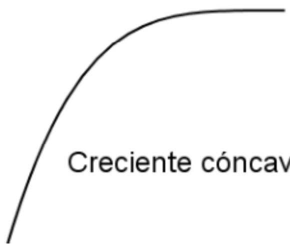
Ejemplo:



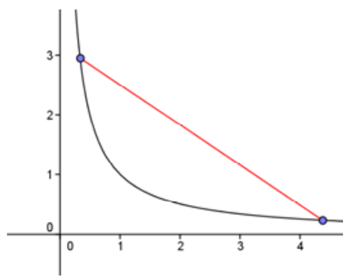
2.3. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Una función es **convexa** si al unir dos puntos de su gráfica el segmento queda por encima de dicha gráfica. Se dice **cóncava** si al hacer la misma operación queda por debajo. Un punto donde se cambia de cóncava a convexa o viceversa se llama **punto de inflexión**.

Una imagen vale más que mil palabras. Así que vamos a dibujar los cuatro tipos de funciones que tenemos:

	Creciente	**Decreciente**
Convexa	 Creciente convexa	 Decreciente convexa
Cóncava	 Creciente cóncava	 Decreciente cóncava

Puedes comprobar fácilmente que se cumple la definición. Si unes dos puntos, el segmento que forman está por encima o por debajo de la gráfica, según corresponde. Aquí a la derecha puedes ver un ejemplo con un tramo decreciente y convexo. Observa cómo el segmento queda por encima de la gráfica de la función.



2.4. Simetrías

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número y su opuesto:

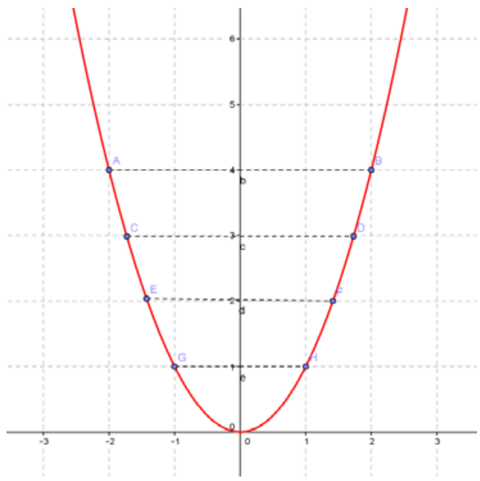
$$f(-x)=f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al eje de ordenadas, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo:

La función cuadrática $f(x)=x^2$ *es par:*

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$



Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número y su opuesto:

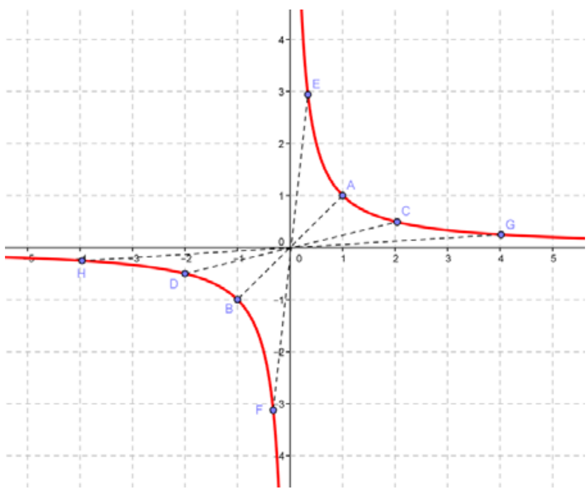
$$f(-x)=-f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al origen de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

La función de proporcionalidad inversa $f(x)=\frac{1}{x}$ es impar porque:

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)}=\frac{-1}{x}=-f(x)$$

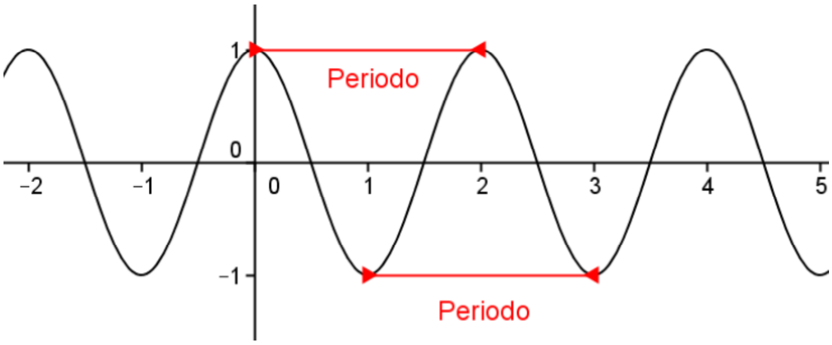


2.5. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten conforme se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo.*

Ejemplo:

Es muy claro que la siguiente función es periódica de periodo 2. Observa que el periodo se puede medir entre dos "picos" o entre dos "valles". De hecho, se puede medir entre dos puntos equivalentes cualesquiera.



2.6. Comportamiento en el infinito

El infinito es, por propia definición, inalcanzable. Pero nos dice mucho de una función saber cómo es para valores muy grandes. Por eso, se recomienda, al dibujar una gráfica, dar un valor (o varios) positivo muy grande y un valor (o varios) muy negativo.

En algunas funciones simplemente ocurre que obtenemos valores muy grandes y "nos salimos de la tabla". Esto simplemente nos da una idea de hacia dónde va la función.

Pero en otras, y esto es lo interesante, nos aproximamos a un número finito. Eso significa que, para valores muy grandes de *x*, la función es aproximadamente una recta horizontal. Esta recta se llama **asíntota**.

Actividad resuelta

Dibuja la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ *dando valores muy grandes y muy negativos.*

Damos valores muy grandes y vemos que nos aproximamos a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1'0099,\ f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1'0001,$$

$$f(1000)=\frac{1000^2+2}{1000^2+1}=1{,}000001$$

Si damos valores muy negativos, pasa lo mismo:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1'0099,\ f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1{,}0001,$$

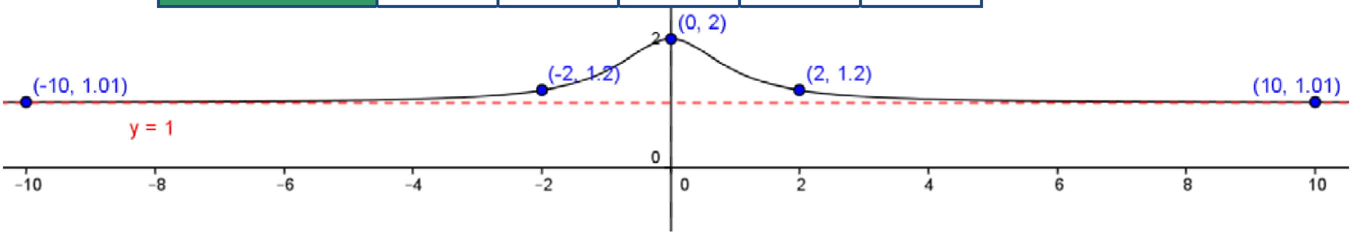
$$f(-1000)=\frac{(-1000)^2+2}{(-1000)^2+1}=1{,}000001$$

Podríamos haber visto directamente que los valores iban a ser los mismos porque la función es claramente par $f(-x)=f(x)$ y por tanto $f(-10)=f(10)$, $f(-100)=f(100)$ etc.

Eso nos da una idea de que la recta a la que nos aproximamos (asíntota) es la recta horizontal *y* = 1.

Vamos a dar unos valores más y dibujamos la función. Los valores negativos son iguales que los positivos. Hemos redondeado 1,0099 a 1,01

x	–10	–2	0	2	10
y	1,01	1,2	2	1,2	1,01



Observa la línea horizontal que es la asíntota dibujada en rojo a trazos.

Ten en cuenta que para dibujar correctamente una función, primero tenemos que estudiar los elementos principales que la caracterizan dependiendo de su expresión. En el próximo capítulo estudiaremos las funciones que vienen dadas por polinomios de primer y segundo grado.

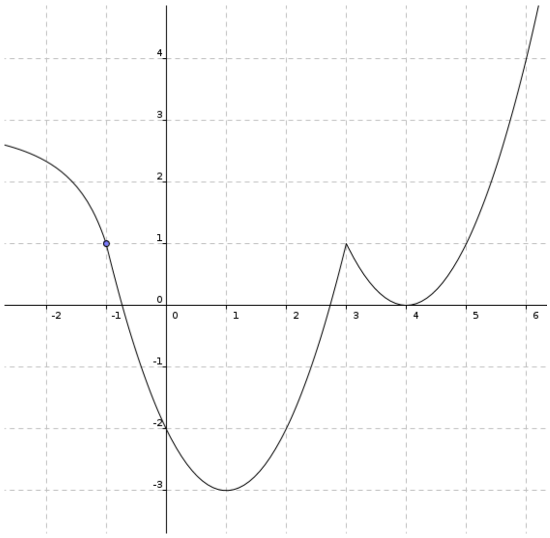
✗ 2.7. Descripción de una función

Si nos dan la gráfica de una función y nos piden describirla, es sencillo:

1. Miramos los valores de *x* donde cambia el comportamiento.
2. Describimos cada uno de los tramos
3. Describimos los máximos y mínimos indicando si son relativos o absolutos.

Actividad resuelta

Describe la función



La función es continua. Los puntos donde "pasa algo" son $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$. Pasamos a describir los tramos:

En $(-\infty, -1)$ decreciente cóncavo. En $(-1, 1)$ decreciente convexo. En $(1, 3)$ creciente convexo. En el intervalo $(3, 4)$ decreciente convexo. En $(4, +\infty)$ creciente convexo.

A veces se pone separado el crecimiento y la curvatura:

Creciente en $(1, 3) \cup (4, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

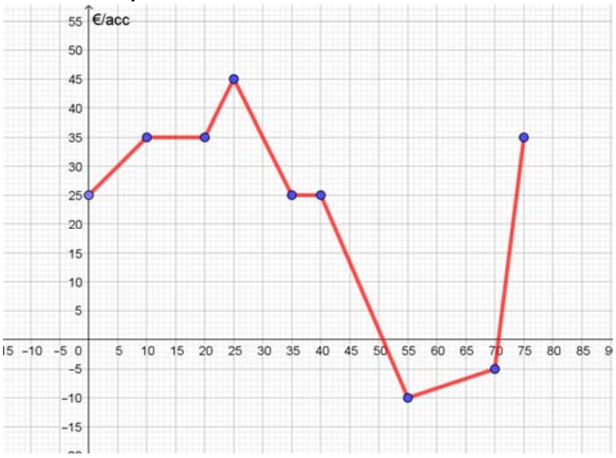
Cóncava en $(-\infty, -1)$. Convexa en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Finalmente hay un máximo relativo en $x = 3$ (3, 1). Hay mínimos relativos en $x = 1$ (1, -3) y $x = 4$ (4, 0). No hay máximo absoluto y en $x = 1$ hay un mínimo absoluto. Hay un punto de inflexión en (-1, 1).

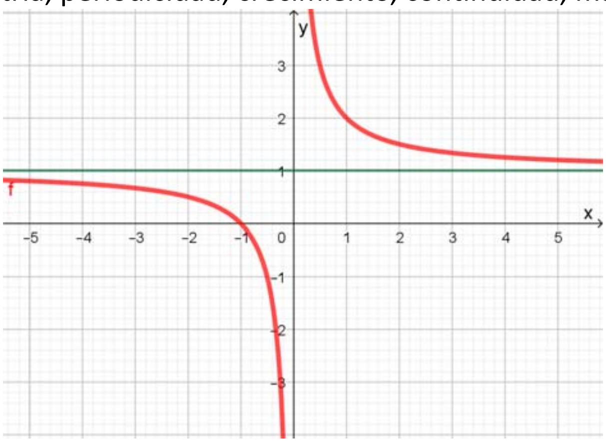
No hay asíntotas. Cuando *x* se hace muy grande la *y* tiende a $+\infty$, y cuando la *x* se acerca a $-\infty$ la *y* tiende también a $+\infty$.

Actividades propuestas

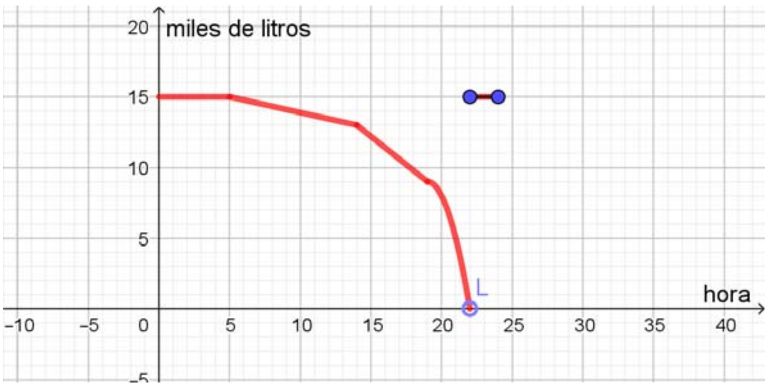
8. La gráfica que se da a continuación indica la evolución de un valor de la bolsa (en el eje vertical en miles de euros por acción) durante una jornada. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



9. Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



10. La gráfica que se da a continuación representa el volumen de combustible en el depósito de una gasolinera al cabo de un día. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



3. VALORES ASOCIADOS A LAS FUNCIONES

Muchas veces, nos interesa el comportamiento de una función en un valor concreto y alguna medida sobre ella. Por ejemplo, si consideramos el espacio que recorre un coche, lo que nos puede interesar no es todo el recorrido, sino sólo la velocidad al pasar junto a un radar. Las medidas más importantes vamos a describirlas ahora.

3.1. Tasa de variación y tasa de variación media (velocidad)

La **tasa de variación** de una función entre dos puntos *a* y *b* es la diferencia entre el valor de la función para *x* = *a* y el valor para *x* = *b*. En símbolos:

$$TV\left[a,b\right]=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

La **tasa de variación media** (**velocidad media**) de una función entre dos puntos *a* y *b* es el cociente entre la tasa de variación entre los mismos y la diferencia *a* y *b*. En símbolos:

$$TVM\left[a,b\right]=\frac{TV\left[a,b\right]}{b-a}=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$$

Estos conceptos pueden parecerte raros al principio. Pero realmente son cosas que se aplican mucho en la vida diaria. Pensemos en un coche que se mueve. El espacio que recorre entre dos momentos de tiempo es la tasa de variación. La velocidad media a lo que los ha recorrido es la tasa de variación media.

Actividad resuelta

El coche en que circulamos recorre 100 Km a 50 Km/h y luego otros 100 Km a 100 Km/h. En consecuencia, el espacio recorrido viene dado por la función $f\left(t\right)=\begin{cases}50t, & t\le 2\\ 100+100\cdot(t-2), & t>2\end{cases}$.

Se pide:

1. Justificar la función que da el espacio recorrido.
2. Calcular e interpretar las tasas de variación TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2’5, 3]
3. Calcular e interpretar las tasas de variación medias TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2’5, 3]
4. ¿Por qué la velocidad media NO ha sido 75 Km/h, que es la media de las velocidades?

Apartado 1.

Para justificar la función, sólo tenemos que recordar la conocida fórmula $e=vt$. Lo único que hay que ver es cuándo cambia la velocidad.

Si el coche va a 50 km/h, obviamente en 2 h llega a los 100 km y cambia la velocidad. Hasta entonces, el espacio recorrido es 50*t* (velocidad por tiempo). A partir de allí, sería 100(*t* – 2) puesto que contamos el tiempo desde el instante 2. A ello se le debe sumar el espacio ya recorrido, que son 100.

Apartado 2. La tasa de variación no es más que el espacio recorrido. Basta con aplicar la definición. Como ya hemos dicho antes, no nos tiene que dar ningún miedo las funciones definidas a trozos. Simplemente sustituimos donde corresponda y punto.

$TV[0,3]=f(3)-f(0)=[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0=200$. Entre 0 y 3 horas hemos recorrido 200 Km.

$TV[1,2]=f(2)-f(1)=50\cdot 2-50\cdot 1=50$. Entre 1 y 2 horas hemos recorrido 50 Km.

$TV[2{,}5\ ,\ 3]=f(3)-f(2{,}5)=[100+100\cdot(3-2)]-[100+100\cdot(2{,}5-2)]=100\cdot(3-2{,}5)=50$. Hemos recorrido 50 Km entre las 2,5 horas y las 3.

Apartado 3. La tasa de variación media es lo que en el lenguaje de la calle se llama velocidad (media). Y para calcularla se divide el espacio entre el tiempo.

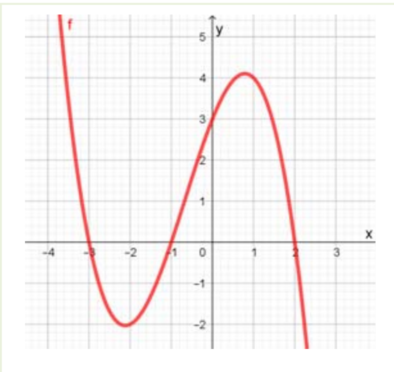
$TVM[0,3]=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0}{3-0}=66{,}67$ Km/h. Entre 0 y 3 horas nuestra velocidad media ha sido de 66'67 Km/h, una media (ajustada por el tiempo) de las velocidades.

$TVM[1,2]=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{50}{2-1}=50$. Entre 1 y 2 horas nuestra velocidad ha sido de 50 Km/h, como planteaba de hecho el problema.

$TVM[2{,}5\ ,\ 3]=\dfrac{f(3)-f(2{,}5)}{3-2{,}5}=\dfrac{50}{3-2{,}5}=100$. Entre 2,5 y 3 horas nuestra velocidad ha sido, como era de esperar, de 100 Km/h

Apartado 4. Porque hemos pasado más tiempo circulando a 50 Km/h que a 100 Km/h y por tanto nuestra velocidad media debe estar más cerca de 50 que de 100.

Actividades propuestas



11. Dada la función $f(x)=(x-1)^3$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [0, 1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

12. Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x}$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [–3, –1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

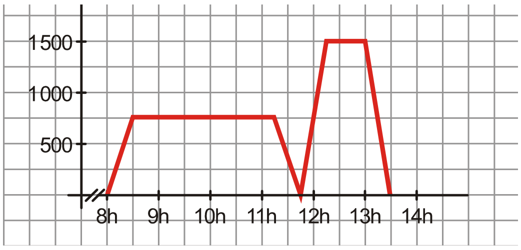
13. Calcula la TVM de esta función *f*(*x*) en los siguientes intervalos: *a*) [–3, -1] y b) [0, 2].

14. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si es creciente o decreciente en ese intervalo.

15. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=2x^2-3x$ en el intervalo [1, 2] e indica si *f*(*x*) crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Pablo salió de su casa a las 8 de la mañana para ir al instituto. En el recreo, tuvo que volver a su casa para ir con su padre al médico. La siguiente gráfica refleja la situación. Las distancias vienen dadas en metros.



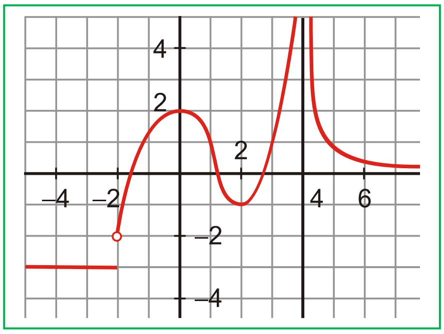
a) ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora empieza el recreo?

b) ¿A qué distancia de su casa está el instituto? ¿Qué velocidad lleva cuando va a clase?

c) ¿A qué distancia de su casa está el consultorio médico? ¿Qué velocidad llevan cuando se dirigen allí?

d) ¿Cuánto tiempo ha estado en clase? ¿Y en el consultorio médico?

2. Dada la función a través de la siguiente gráfica:



a) Indica cuál es su dominio de definición.

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.

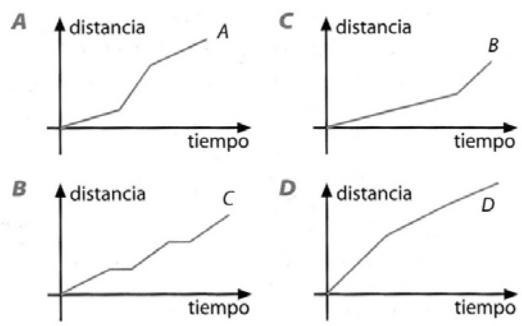
c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función?

d) ¿Qué ocurre en el intervalo $(-\infty, -2]$?

3. Dibuja la gráfica de $f(x)=\begin{cases} 1-x & si \quad x\le 1 \\ x^2-4x & si \quad 1<x \end{cases}$ y explica si es continua en $x=1$.

4. Tres kilos de peras nos han costado 4,5 €; y, por siete kilos, habríamos pagado 10,5 €. Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio total, "y", en función de los kilos que compremos, "x". Haz una tabla de valores y represéntala gráficamente.

5. Asigna las gráficas al recorrido efectuado por los siguientes estudiantes en su camino diario a su escuela de adultos:



a) Emilio es el que vive más lejos de la escuela.

b) Ana debe recoger a dos amigas por el camino y siempre le toca esperar.

c) Felipe es el que menos tiempo tarda.

d) Isabel es dormilona; siempre le toca correr en el último tramo, aunque es la que vive más cerca de la escuela.

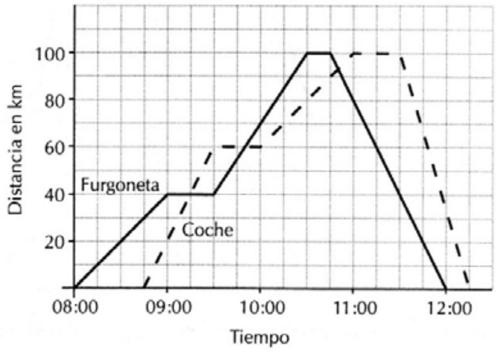
6. El precio del viaje de fin de curso de un grupo de alumnos es de 200 euros por persona si van 30 alumnos o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan un 5 % por cada alumno que sobrepase el número de 30, y si viajan 40 o más, el precio por persona es de 100 euros. Halla la expresión y de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

7. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{5x-3}{4x-1}$ c) $f(x)=\sqrt{3x+6}$ e). $f(x)=\dfrac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

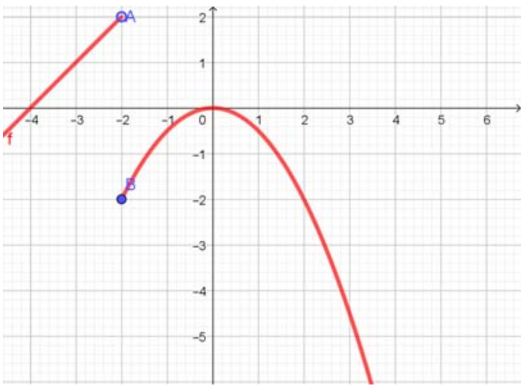
b) d) $f(x)=2-\dfrac{3}{x^2-3x}$ f). $f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$

8. La siguiente gráfica muestra los viajes hechos por una furgoneta y un coche saliendo desde Teruel hacia la población de Alcañiz, ida y vuelta.



a) ¿Cuánto tiempo se detuvo la furgoneta durante el trayecto?
b) ¿A qué hora adelantó el coche a la furgoneta?
c) ¿Qué velocidad llevaba la furgoneta entre las 9:30 y las 10:00?
d) ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el coche durante el viaje?
e) ¿Cuál fue la velocidad media del coche en el viaje completo?

9. La siguiente gráfica corresponde a la función: _ .



Estudia las zonas de crecimiento-decrecimiento, los extremos (máximos-mínimos) y su continuidad.

10. Representa gráficamente una función *f*, que cumpla las siguientes condiciones:

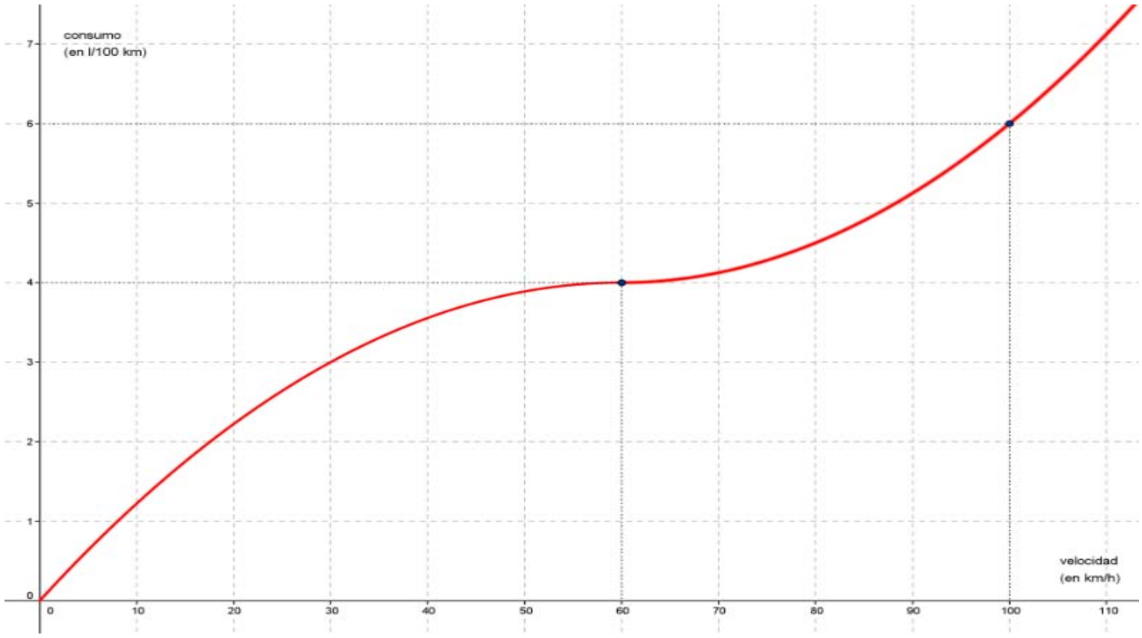
a) Dom (*f*) = [–5, 6]
b) Crece en los intervalos (–5, –3) y (0, 6); decrece en el intervalo (–3, 0).
c) Es continua en su dominio.
d) Corta al eje OX en los puntos (–5, 0), (–1, 0) y (4, 0).
e) Tiene un mínimo en (0, –2) y máximos en (–3, 3) y (6, 3).

11. Construye una gráfica que represente la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que:

a) A las 0 horas había, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores.
b) Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana.

c) A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1,5 millones de espectadores.
d) La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores.
e) Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6,5 millones de espectadores.
f) A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores.

12. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica.



a) ¿Cuál es la variable dependiente?
b) ¿Y la independiente?
c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?
d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?

13. Utiliza la gráfica para explicar cómo varía el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado n años.

14. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1,20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.

UNIDAD DIDÁCTICA 8

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

Funciones Polinómicas y funciones definidas a trozos

Educación de adultos

Ana María Zarco García

Unidad didáctica 8: Funciones polinómicas y funciones definidas a trozos

1. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

1.1. Proporcionalidad directa

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar o dividir a la primera por un número, la segunda queda multiplicada o dividida por el mismo número.

Al realizar el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra, obtenemos la **razón de proporcionalidad directa *k***.

Ejemplo:

- *Cuando viajamos a velocidad constante, las magnitudes espacio y tiempo son directamente proporcionales*

Tiempo (t)	0	1	2	5	10
Espacio (s)	0	5	10	25	50

y la razón de proporcionalidad es $k=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{25}{5}=\frac{50}{10}=5$

Si observamos su gráfica, podemos comprobar que se trata de una semirrecta cuyo origen es el origen de coordenadas. En esta situación no es interesante considerar tiempos negativos, razón por la cual la representación es una semirrecta.

La representación gráfica en el plano cartesiano de dos **magnitudes directamente proporcionales** es una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.

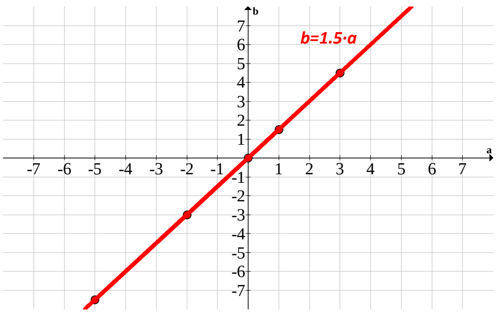
Se puede escribir la relación entre la magnitud A (a) y la magnitud B (b) como $b=k\cdot a$ donde k es la **razón de proporcionalidad**.

Para representar estas relaciones de proporcionalidad directa, basta con situar los valores de cada magnitud en el plano cartesiano y unirlos mediante una recta.

Actividades resueltas

- *Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla:*

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



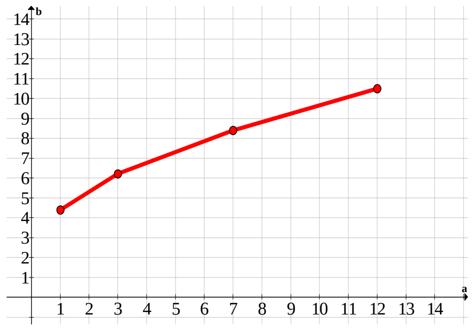
Al calcular la razón de proporcionalidad se obtiene:

$k=\frac{-7{,}5}{-5}=\frac{-3}{-2}=\frac{1{,}5}{1}=\frac{4{,}5}{3}=1{,}5$. La relación se define así:

$b=1{,}5\cdot a$.

La siguiente tabla nos muestra el peso de un bebé los primeros meses de crecimiento. Utilizando una gráfica, decide si son magnitudes directamente proporcionales.

Meses	1	3	7	12
Peso (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5



Al representar los puntos en el plano, se observa que la gráfica no es una recta, entonces **no son directamente proporcionales**.

Actividades propuestas

1. El consumo medio de agua al día por habitante (en 2011) es de 142 litros. Representa gráficamente el consumo de una persona en una semana.

2. El agua virtual es el agua necesaria para crear un producto. Representa gráficamente las siguientes relaciones:

a) 71 litros para producir una manzana.

b) 10.850 litros para producir unos vaqueros.

c) 4.000 litros para producir una camiseta.

3. La tabla siguiente corresponde a los datos de la altura en cm de un niño según el número de meses. Representa los puntos e indica si la magnitud número de meses y altura son magnitudes directamente proporcionales.

Meses (x)	2	4	12	24	36
Altura (y) en cm	58	64	76	87	96

1.2. Función lineal. Rectas de la forma y = m · x

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado de la forma $y = m \cdot x$. Su representación en el plano cartesiano es una recta que pasa por el origen.

La representación gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es una recta que pasa por el origen. Luego la relación de proporcionalidad directa es una función lineal.

Ejemplo:

- Las proporciones se representan como rectas de la forma $b = k \cdot a$
  - donde k es la razón de proporcionalidad, $k = \frac{b}{a}$
  - a y b son los valores que toman las magnitudes A y B respectivamente.

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

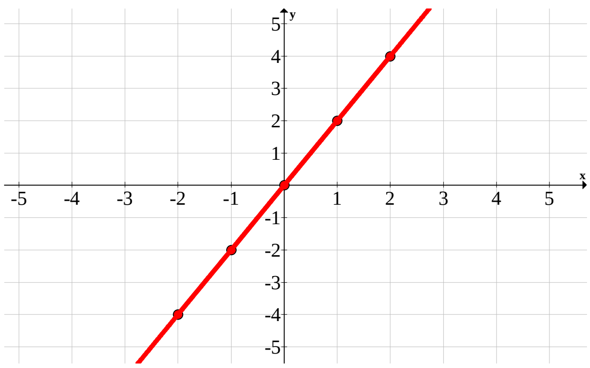
- La relación peso – coste de cualquier producto, es una proporcionalidad y se representa con rectas de la forma $y = m\,x$.
- Muchas de las relaciones en física son proporcionales y se representan mediante rectas como espacio – tiempo, peso – densidad , fuerza – masa, …

Actividades resueltas

- *Representa la recta $y = 2 \cdot x$.*

  Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.

  Se puede observar, que la variable y se define dando valores a la variable x. Por esta razón x es la variable independiente (puede ser cualquier valor que se le dé) e y es la variable dependiente (depende del valor de la x).



***Nota:** para definir una recta es suficiente con dar dos puntos de ella.*

Las rectas $y = m\,x$ tienen los siguientes componentes:

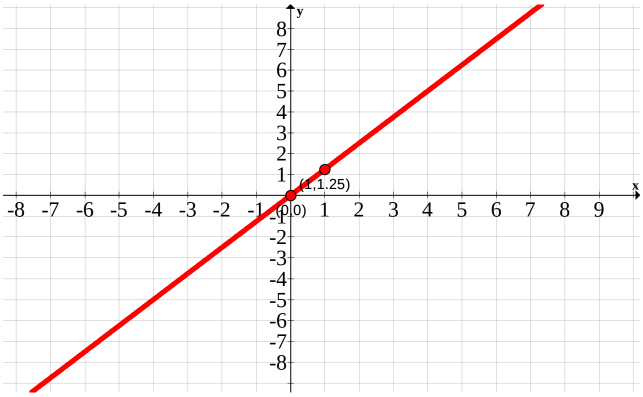
- x es la variable **independiente**.
- y es la variable **dependiente**.
- m es la **pendiente** de la recta, y es lo que diferencia una recta de otra.

Las características más importantes:

- Pasan por el origen de coordenadas, es decir, el punto (0, 0) pertenece a la recta.
- Su dominio y su recorrido son todos los reales: tanto x la como la y aceptan cualquier valor.
- Son simétricas respecto al origen, o lo que es lo mismo, son funciones impares.

Actividades resueltas

- *Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de la función lineal* $y = 1,25 \cdot x$



Al tratarse de una recta, se puede observar que el dominio son todos los reales, puesto que se admite cualquier valor de la x.

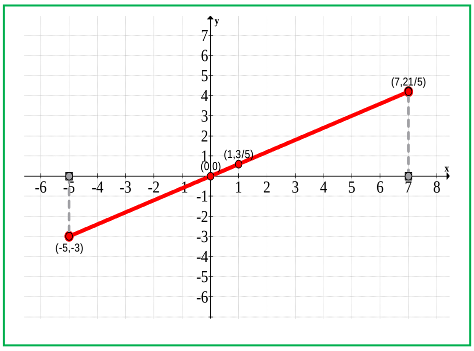
Si no se considera ningún intervalo, la recta no tiene máximos ni mínimos absolutos y relativos.

Para ver la simetría, tomamos la función $y = f(x) = 1,25 \cdot x$

$f(-x) = 1,25 \cdot (-x) = -1,25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$

Es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

- *Estudia la función* $y = \frac{3}{5} \cdot x$ *en el intervalo* [–5, 7].



El dominio es todo el intervalo [–5, 7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f \text{ es impar}$, simétrica respecto al origen.

En los extremos del intervalo, existen mínimo (–5, –3) y máximo (7,21/5).

Actividades propuestas

4. Halla el dominio, máximos y mínimos y la simetría de las siguientes rectas:

a) $y = 4 \cdot x$ b) $y = \frac{x}{3}$ c) $y = 2,65 \cdot x$

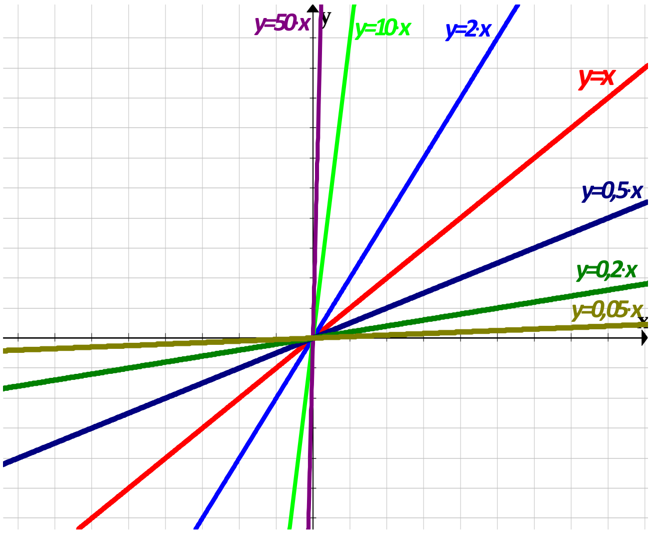
d) $y = -\frac{1}{2}x$ e) $y = -\frac{5}{2}x$ f) $y = -5x$

1.3. Estudio de la pendiente

Como hemos visto con anterioridad, la pendiente m es lo que diferencia unas rectas de otras. Mide la inclinación de la recta respecto al eje de abscisas.

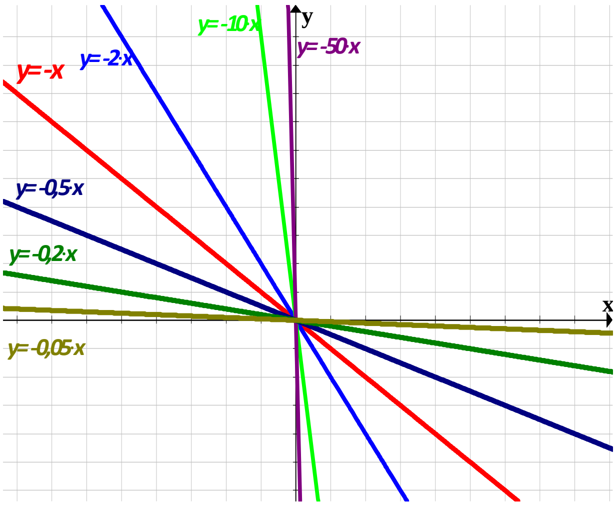
En las relaciones de proporcionalidad directa, la pendiente viene dada por la razón de proporcionalidad k.

Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Partimos de la recta $y = x$, donde $m=1$.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x

Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos.



- Si aumenta m, entonces la recta se hace cada vez más horizontal, hasta casi convertirse en el eje x .
- Si disminuye m, entonces la recta se hace cada vez más vertical, hasta casi convertirse en el eje y.

Como se puede observar, al variar la pendiente la inclinación de la recta también varia, según se van dando valores m.

La pendiente de la recta es el valor que mide la inclinación de la recta, es decir, mide el crecimiento o decrecimiento de la función lineal:

- Si $m>0$, la recta es creciente.
- Si $m<0$, la recta es decreciente.

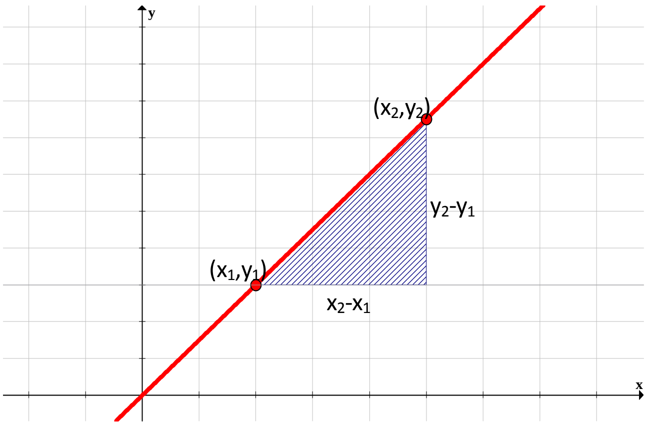
La pendiente es el coeficiente que acompaña a la variable independiente x .

Interpretación geométrica de la pendiente

La pendiente de la recta no solo indica el crecimiento y decrecimiento de la función, sino que también mide cuánto crece o cuánto decrece. Se puede decir que la pendiente mide el crecimiento de la recta en función de lo que avanza:

- Si $m > 0$:
  - Para valores altos de m la recta crece con mayor rapidez, esto es, la recta "sube" mucho y avanza poco.
  - Para valores pequeños de m la recta crece con menos rapidez, es decir, "sube" poco y avanza mucho.
- Si $m < 0$:
  - Para valores altos de m la recta decrece con menos rapidez, es decir, baja poco y avanza mucho.
  - Para valores pequeños de m la recta decrece con mayor rapidez, esto es, la recta "baja" mucho y "avanza" poco.

Una manera de calcular la pendiente, es dividiendo el valor de lo que sube la recta entre lo que avanza, como se muestra en el siguiente dibujo:



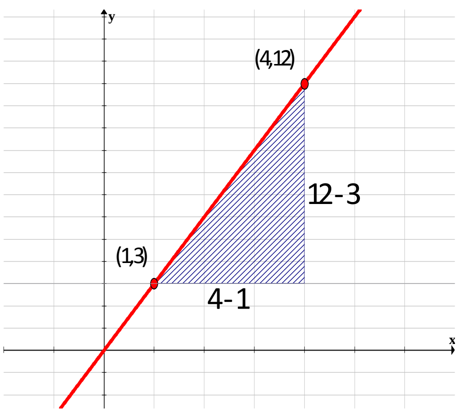
Dados dos puntos cualesquiera de la recta, la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es decir,

$$m = \frac{\textit{lo que sube}}{\textit{lo que avanza}}$$

Ejemplo:

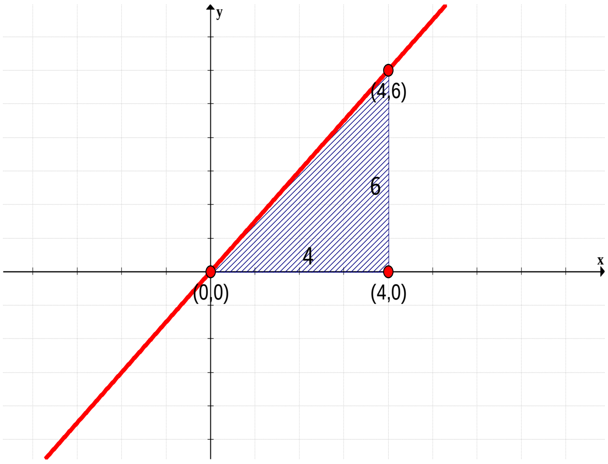


La recta sube 12 – 3 = 9 y avanza 4 – 1 = 3, entonces

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Actividades resueltas

Calcula la pendiente de la siguiente recta y su expresión algebraica.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, el (0, 0) y el (4, 6).

En este caso, la altura del triángulo sombreado nos indica el valor que sube la recta, 6, y la base es el valor que la recta avanza, 4.

Al dividir estos valores, obtenemos la pendiente y la expresión algebraica de la recta.

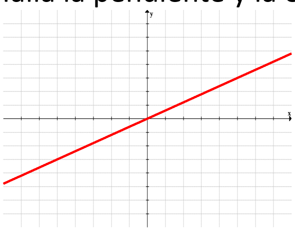
$$m = \frac{6}{4} = 1,5$$
$$y = 1,5 \cdot x$$

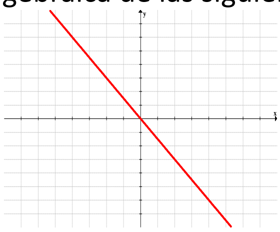
En estos ejemplos, la recta siempre sube, es decir, la función es creciente. ¿Qué ocurre si la recta fuese decreciente? Para no equivocarnos con los cálculos, siempre evaluamos la función de izquierda a derecha, es decir, el primer punto estará más a la izquierda, será más pequeño.

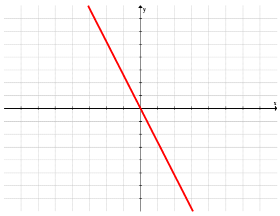
Esto es así porque la pendiente mide la cantidad de crecimiento (o decrecimiento) según la función va aumentando o lo que es lo mismo, avanzando.

Actividades propuestas

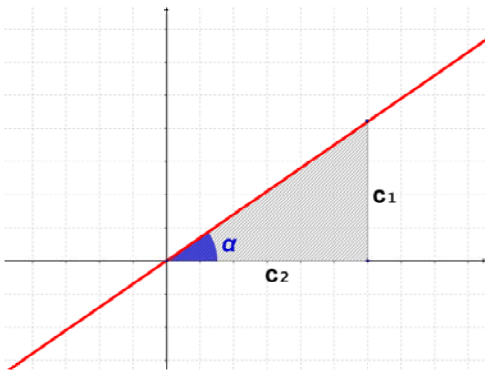
5. Halla la pendiente y la expresión algebraica de las siguientes rectas:

a) 

b) 

c) 

Otra expresión de la pendiente



Para hallar la pendiente se toma como referencia la base y la altura del triángulo rectángulo que forman los vértices de los puntos de la recta.

El cociente entre la altura y la base es la pendiente. Como el triángulo construido es un triángulo rectángulo, la pendiente es el cociente entre sus dos catetos, o lo que es lo mismo, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal.

La tangente de un ángulo de un triángulo rectángulo es el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y el cateto contiguo al ángulo (el cateto que forma parte del ángulo).

$$\tan\alpha = \frac{C_{opuesto}}{C_{contiguo}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = \tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas, es decir, la horizontal con la recta (ángulo en el sentido contrario a las agujas del reloj).

1.4. Rectas de la forma y = m · x + n

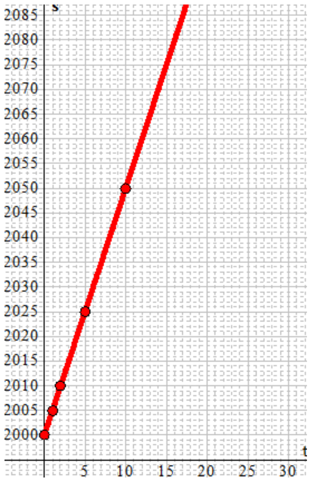
Ahora, consideremos un movimiento rectilíneo y uniforme. En este tipo de movimiento la trayectoria es una línea recta y la velocidad es constante. Supongamos que previamente se ha recorrido una distancia.

Actividades resueltas

- *Representa la gráfica s-t del movimiento rectilíneo uniforme que lleva un ciclista que se ha trasladado 2 km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.*
- En este caso, la fórmula del MRU, como tenemos un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. Con los datos del ejercicio, la expresión queda: s= 2000+5t .

Construimos la nueva tabla y dibujamos la gráfica:

Tiempo (t)	Espacio (s)
0	2000
1	2005
2	2010
5	2025
10	2050



Podemos observar que hemos tenido que adaptar los ejes para poder pintar la gráfica, ya que la recta se ha desplazado 2.000 posiciones en el eje y.

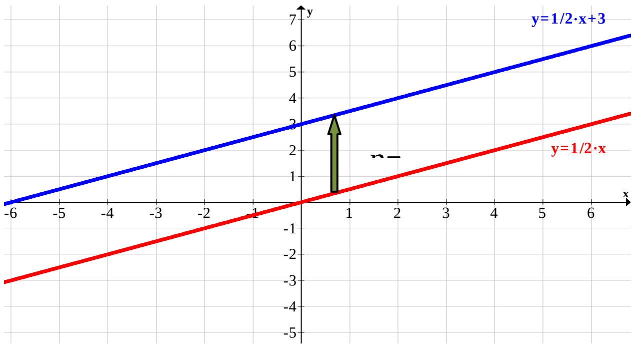
La gráfica de esta recta tiene como expresión algebraica $y = 5 \cdot x + 2.000$, donde x corresponde al tiempo t e y al espacio s , y 2.000 es el espacio inicial s_0.

La **pendiente** es 5 pero la recta no pasa por el punto (0, 0), sino que corta al eje de ordenadas en el punto (2000, 0). Se dice que la **ordenada en el origen** es 2000.

Las rectas de la forma $y = m \cdot x + n$ tienen la misma pendiente que las rectas $y = m \cdot x$ pero se desplazan en el eje de abscisas (eje y) n posiciones. Por esta razón, a n se le llama **ordenada en el origen**, ya que es el valor de la recta en el punto de partida, es decir, cuando $x = 0$.

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

Ejemplo:



- *Comparemos la recta* $y = 1/2 \cdot x$ *con la recta* $y = 1/2 \cdot x + 3$

Las dos rectas tienen la misma forma, es decir, la misma inclinación o la misma pendiente. En ambos casos *m* = 1/2. Son dos rectas paralelas.

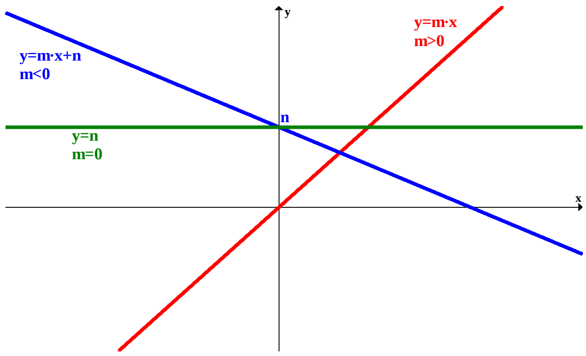
La diferencia está en el valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (donde $n=0$) se ha desplazado 3 posiciones en el eje *y*, para convertirse en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (donde $n=3$)

Las funciones polinómicas de primer grado, o afines, se describen algebraicamente de la forma $y=m\cdot x+n$ y sus gráficas son rectas que pasan por el punto (0, *n*).

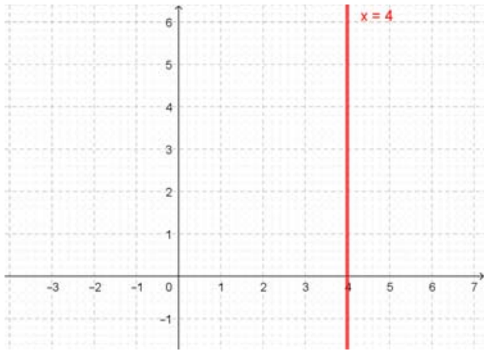
Además de la variable independiente x, la variable dependiente *y*, y la pendiente *m*, se añade el valor n que es la ordenada en el origen.

La recta $y=m\cdot x+n$ es paralela a la recta $y = m \cdot x$ (tienen la misma pendiente, *m*) desplazada verticalmente n posiciones. Por esta razón, el crecimiento o decrecimiento de estas funciones se comportan de la misma manera:

- Si $m>0$, la función es **creciente**.
- Si $m<0$, la función es **decreciente**.
- Si $m=0$, la función es **constante**, ni crece ni decrece. Es paralela al eje x, y pasa por el punto $y=n$.



Observa que no todas las rectas corresponden con la gráfica de una función. Este es el caso de las rectas verticales.



Actividades propuestas

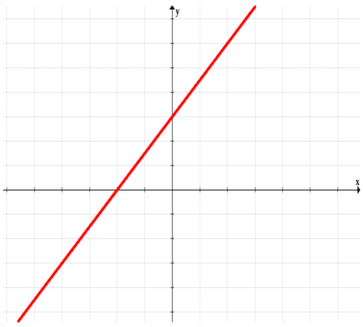
6. Representa las siguientes funciones:

a) $y=3\cdot x+4$ b) $y=-\dfrac{3}{7}\cdot x-2$ c) $2x+\cdot 4y=5$

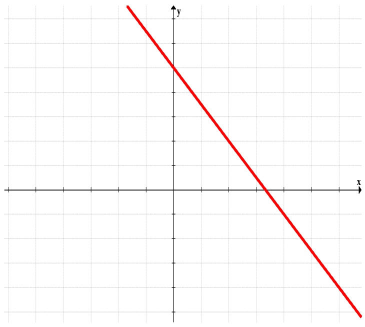
d) $y=5$ e) $y=0$ f) $y=-3$

7. Halla la expresión de las siguientes rectas:

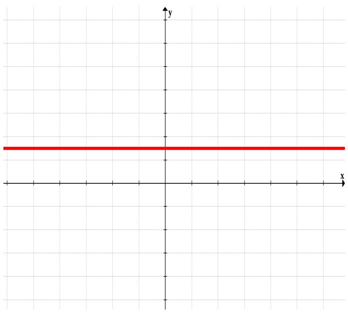
a)



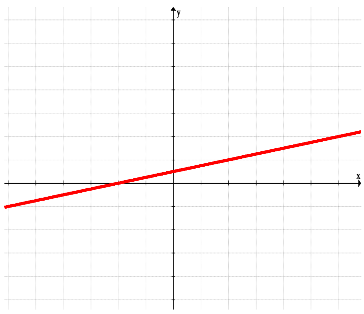
b)



c)



d)



2. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

2.1. Funciones polinómicas de segundo grado. Parábola $y = a \cdot x^2$

En el apartado anterior hemos representado las gráficas de las funciones polinómicas de primer grado. Ahora, vamos a estudiar la representación de las funciones polinómicas de segundo grado. La gráfica de este tipo de funciones será semejante a la representación de la *situación 2* al principio del capítulo.

Las funciones polinómicas de segundo grado son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de grado 2, es decir, su expresión es de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.
Se representan mediante **parábolas.**

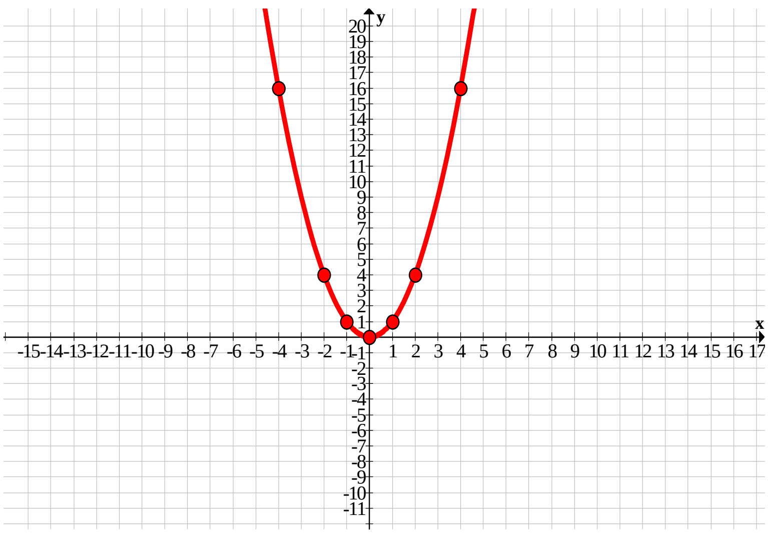
Ejemplo:

- La representación de la situación 2 es una parábola.
- En Física, la trayectoria de muchos movimientos se representan mediante parábolas, y por eso recibe el nombre de tiro parabólico: lanzar un proyectil con cierto ángulo, el aterrizaje de un avión en un portaviones, etc.

Parábola $y = a \cdot x^2$

Vamos a representar la parábola $y = x^2$. Para ello, construimos una tabla de valores y representamos los pares de puntos en el plano cartesiano.

x	y
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100



En la tabla y en la gráfica se pueden observar algunas características:

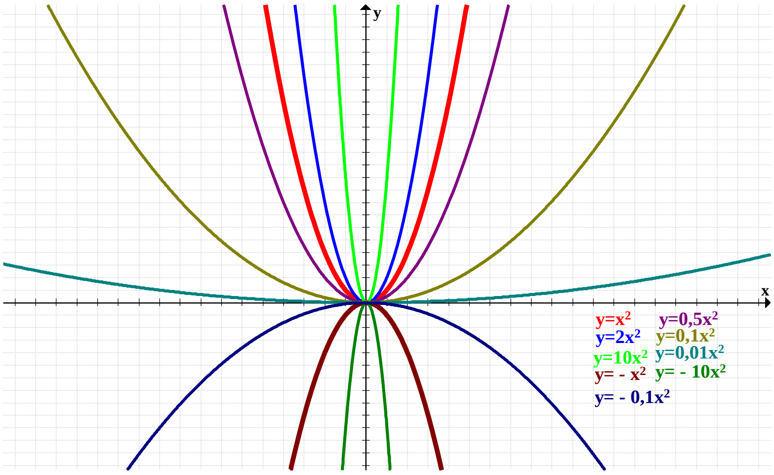
- El dominio es toda la recta real. El recorrido son los reales positivos y el cero.
- La función es continua, porque no presenta saltos.
- Es simétrica respecto al eje y, es decir, es una función par:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- Es decreciente hasta el 0, y después creciente, luego tiene un mínimo absoluto en el (0, 0).

En este caso, $a=1$, y sabemos que si $a=-1$, la parábola tiene la misma forma pero está abierta hacia abajo, y en vez de un mínimo, tiene un máximo en el (0, 0).

Veamos lo que sucede cuando aumentamos o disminuimos el coeficiente a :



- Si $a > 0$:
  - al aumentar a, la parábola se hace más estrecha, y se va acercando al eje y.
  - al disminuir a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
- Si $a < 0$:
  - al aumentar a, la parábola se hace más ancha (plana), y se va acercando al eje x.
  - al disminuir a, la parábola se hace más estrecha y se va acercando al eje y.

En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $y=a\cdot x^2$, tienen las siguientes características:

- Son **continuas** en todo el dominio-
- El dominio es toda la recta real.
- Si $a>0$, la parábola está abierta hacia arriba, el recorrido son los reales positivos y el cero, y tiene un **mínimo absoluto** en el punto (0, 0)
- Si $a<0$, la parábola está abierta hacia abajo, el recorrido son los reales negativos y el cero, y tiene un máximo absoluto en el punto (0, 0)

  A este punto se le llama **vértice** de la parábola

- Son funciones pares, es decir, simétricas respecto al eje y.

Actividades propuestas

8. A partir de la parábola $y=x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y=\frac{5}{3}x^2$ b) $y=-3x^2$ c) $y=-\frac{15}{3}x^2$

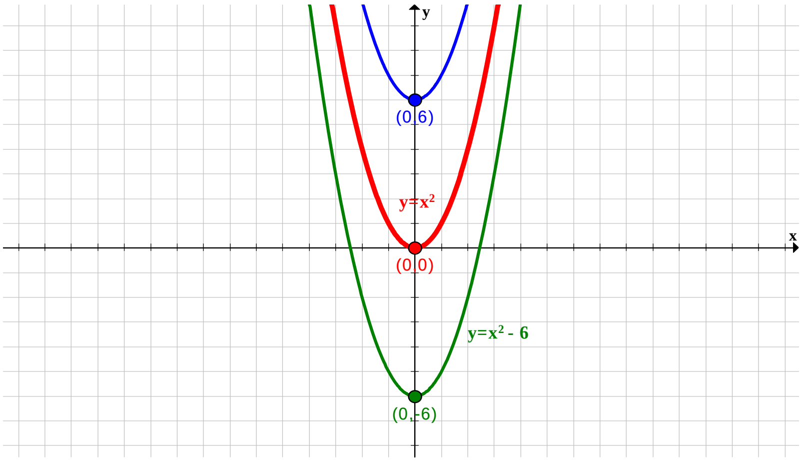
d) $y=4{,}12x^2$ e) $y=-\frac{6}{10}x^2$ f) $y=\frac{7}{8}x^2$

2.3. Traslaciones en el plano

Utilizando como plantilla la gráfica de $y=x^2$, se pueden obtener las gráficas de otras parábolas más complejas, dependiendo del tipo de desplazamiento que utilicemos.

Desplazamientos verticales: traslaciones en la dirección del eje y: $y = x^2 + k$.

En este caso, se trata de mover la parábola en dirección vertical, es decir, hacia arriba o hacia abajo. Comparemos las parábolas $y=x^2+6$ y $y=x^2-6$ con nuestra plantilla:



Se puede observar, que al sumar 6 a la parábola x^2, la gráfica es idéntica pero desplazada 6 unidades en sentido positivo en el eje y, es decir, la parábola ha subido 6 unidades. El nuevo vértice pasa a ser el punto (0, 6).

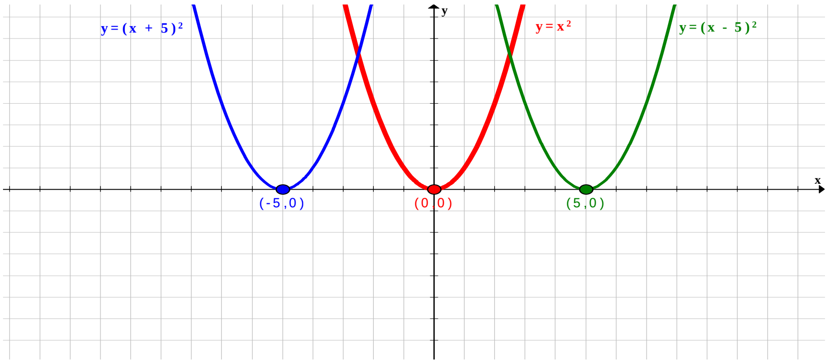
Algo parecido ocurre cuando se resta 6 unidades a x^2. En este caso la gráfica se ha desplazado 6 unidades en sentido negativo hasta el vértice (0,-6), es decir, baja 6 unidades.

En general, la parábola $\boldsymbol{y=x^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ pero trasladada k unidades verticalmente en el eje y. Si k es positivo, la traslación es hacia arriba y si k es negativo, hacia abajo.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (0, k).

Desplazamientos horizontales: traslaciones en la dirección del eje *x*: $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$.

Ahora trasladamos la parábola en dirección horizontal. Hacia la derecha o hacia la izquierda. Comparemos las parábolas $y=(x+5)^2$ y $y=(x-5)^2$ con la plantilla:



En este caso, al aumentar la variable que se eleva al cuadrado, es decir, sumar 5 unidades, la gráfica se traslada horizontalmente hacia la izquierda 5 unidades, siendo el nuevo vértice el punto (–5, 0). Al disminuir dicha variable, es decir, restar 5 unidades, la parábola se desplaza hacia la derecha siendo el nuevo vértice el punto (5, 0).

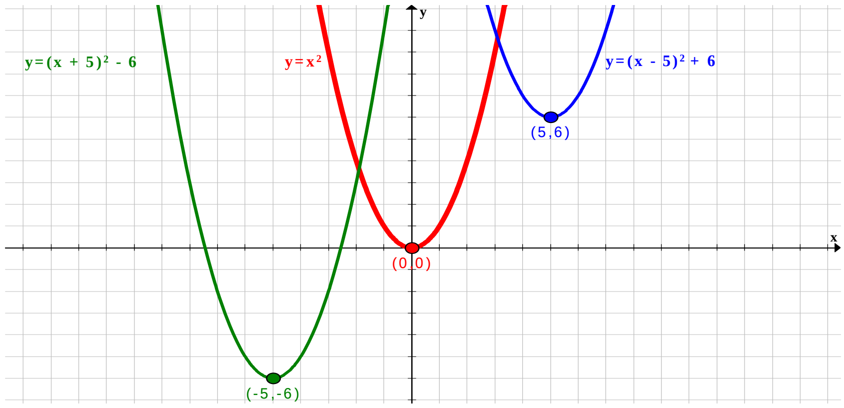
En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada $\boldsymbol{q}$ unidades en el eje x hacia la derecha si $q>0$ y hacia la izquierda si $q<0$.

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto $(q,0)$.

Desplazamientos oblicuos: traslaciones en ambos ejes: $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$.

El último movimiento es el que combina los dos anteriores, es decir, movemos la plantilla k posiciones de manera vertical y q posiciones de manera horizontal, resultando un movimiento oblicuo en el plano.

Comparemos la parábola $y=(x-5)^2+6$ y $y=(x+5)^2-6$ con la plantilla $y=x^2$.



La parábola $y=(x-5)^2+6$ se traslada 5 unidades a la derecha y 6 unidades hacia arriba, mientras que la parábola $y=(x+5)^2-6$ se traslada 5 unidades hacia la izquierda y 6 unidades hacia abajo.

Es decir, es la combinación de los dos movimientos anteriores.

En general, la parábola $\boldsymbol{y=(x-q)^2+k}$ tiene la misma gráfica que $y=x^2$ trasladada de la siguiente forma:

$$q\ unidades\begin{cases} hacia\ la\ derecha\ si\ q>0 \\ hacia\ la\ izquierda\ si\ q>0 \end{cases} \quad ; \quad k\ unidades\begin{cases} hacia\ arriba\ si\ k>0 \\ hacia\ abajo\ si\ k<0 \end{cases}$$

El **vértice** de la parábola se sitúa en el punto (q,k).

Representación de parábolas de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabemos representar las parábolas de la forma $y=(x-q)^2+k$ mediante traslaciones. ¿Cómo podemos pintar la gráfica de las parábolas cuya expresión algebraica es $y=x^2+r\cdot x+s$? Basta con convertir esa expresión en una cuya función sepamos representar:

Actividades resueltas

- *Representa la gráfica de la función cuadrática* $y=x^2+6\cdot x-4$

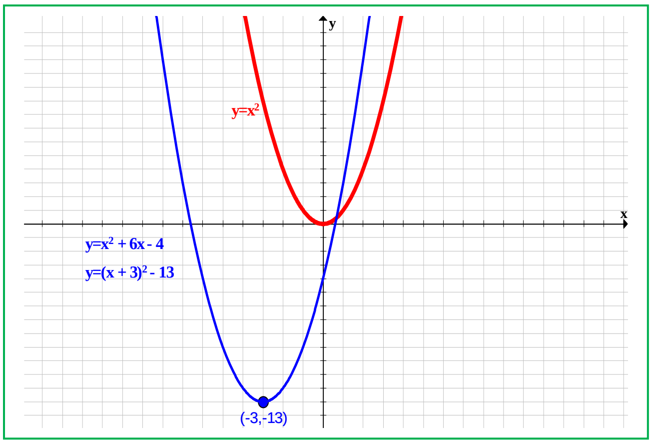
  La función viene dada de la forma $y=x^2+r\cdot x+s$, y queremos convertirla en $y=(x-q)^2+k$.

$$y=x^2+r\cdot x+s \Leftrightarrow y=(x-q)^2+k$$

  Sabemos que $(x+3)^2=x^2+6x+9$, donde ya nos aparece x^2 + 6x. Ahora tenemos que ajustar el resto:

$$y=x^2+6x-4=(x+3)^2+K=x^2+6x+9+K \Rightarrow K=-13 \Rightarrow \boxed{y=(x+3)^2-13}$$

Con la parábola expresada de esta manera, basta con trasladar la gráfica de $y=x^2$, 3 unidades a la izquierda y 13 unidades hacia abajo, siendo el vértice el punto (–3, –13).



En general, el vértice de la parábola se encuentra en el punto $x=\frac{-r}{2}$. La otra coordenada se obtiene sustituyendo x en la expresión de la función.

Ejemplo:

- *En el caso anterior,* $y=x^2+6\cdot x-4$*, el vértice está en el punto (–3, –13).*

Como r = 6, la primera coordenada del vértice es $x=\frac{-r}{2}=\frac{-6}{2}=-3$. Sustituyendo el valor en la expresión: $y=(-3)^2+6\cdot(-3)-4=9-18-4=-13$

Actividades propuestas

9. Representa la gráfica de las siguientes parábolas y localiza el vértice:

a) $y=(x+4)^2-5$	b) $y=-(x-\frac{4}{5})^2+6$	c) $y=x^2-5$
d) $y=x^2-6x+16$	e) $y=x^2+4x+\frac{5}{2}$	f) $y=-x^2+12x-26$
g) $y=x^2-10x+17$	h) $y=-x^2+2x-4$	i) $y=-x^2+\frac{4}{3}x-1$

2.3. Función cuadrática. Parábolas de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Las funciones polinómicas de segundo grado reciben el nombre de **funciones cuadráticas**.

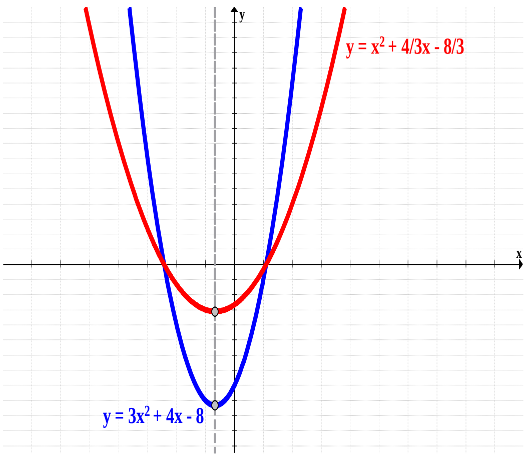
Hasta ahora solo hemos estudiado las funciones de tipo $y = x^2 + rx + s$, que es una parábola abierta hacia arriba, o $y = -x^2 + rx + s$, abierta hacia abajo.

Sabemos cómo afecta el valor del coeficiente a en la gráfica de la parábola $y = a \cdot x^2$, haciéndola más estrecha o más ancha.

Para representar las funciones cuadráticas $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se convierte dicha expresión en una más familiar que sabemos representar:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$$

Actividades resueltas



- *Representa la parábola* $y = 3x^2 + 4x - 8$*:*

  Convertimos la función en una expresión más fácil de representar:

  $$y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$$

  y la comparamos con $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

  $$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}.$$

  Las dos parábolas tienen el vértice en el mismo punto de abscisa, y la coordenada y queda multiplicada por 3.

  En cuanto a la forma, la parábola es más estrecha, como se puede ver en el punto 2.1.

En general, la representación de la función cuadrática $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ se puede aproximar representando la parábola $y = x^2 + rx + s$, teniendo el vértice en el mismo punto de abscisa y la forma dependerá del valor absoluto del coeficiente a, siendo más ancha para valores grandes más estrecha para valores más pequeños.

La orientación de la parábola será:

- hacia arriba si $a > 0$
- hacia abajo si $a < 0$

Elementos de la parábola

Los elementos más característicos de la parábola ayudan a representar su gráfica en el plano cartesiano.

<u>Coeficiente a</u>:

Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba.

Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo.

<u>Vértice</u>:

El **vértice** de la parábola está en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4\cdot a\cdot c}{4a}\right)$:

Habíamos visto que para la parábola de la forma $y=x^2+rx+s$, la primera coordenada es $\frac{-r}{2}$. (En este caso a es igual a 1). La parábola en el caso general es:

$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, es decir, $r=\frac{b}{a}$, entonces la abscisa del vértice es $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segunda coordenada sale al sustituir $x=\frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática.

<u>Puntos de corte con el eje OX</u>:

Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Indica cuándo la parábola es positiva o negativa.

Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

<u>Punto de corte con el eje OY</u>:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x = 0$.

Cuando $x=0$, la parábola toma el valor de c, luego el punto de corte es el punto (0, c).

<u>Eje de simetría</u>:

La parábola es simétrica en la recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola, es decir, el **eje de simetría** de la parábola es la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

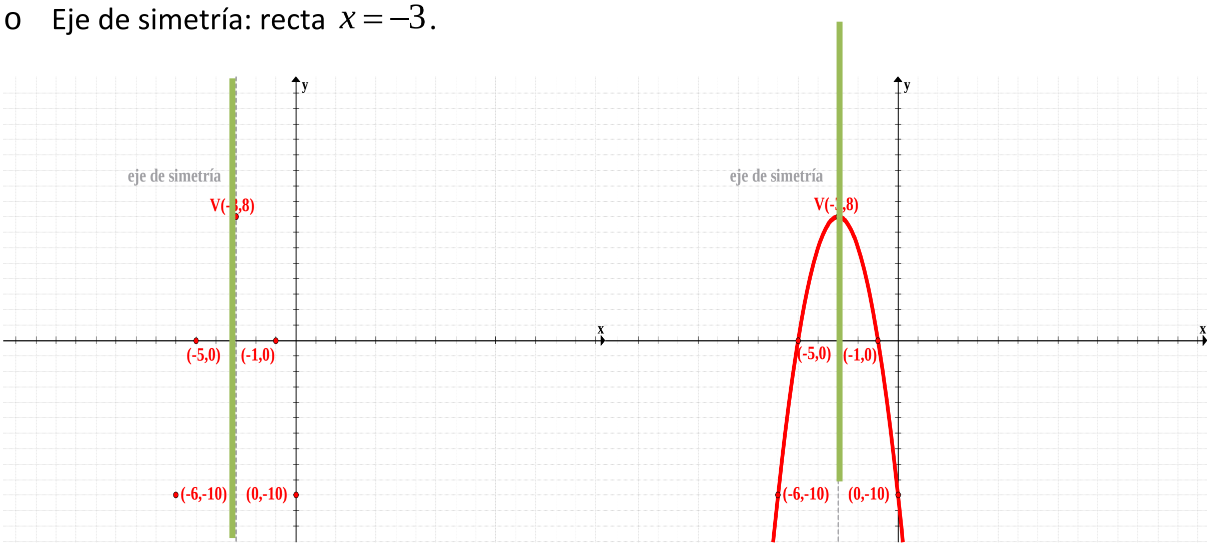
El eje de simetría también pasa por el punto medio del segmento formado por los dos puntos de corte con el eje x.

A partir de estos elementos, se puede representar la gráfica de una función cuadrática.

Actividades resueltas

- *Determina los elementos de la parábola* $y=-2x^2-12x-10$
  - $a=-2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo.
  - Vértice: $\begin{cases} x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{12}{2\cdot(-2)}=\dfrac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{cases} \Rightarrow Vértice: V(-3,8)$
  - Puntos de corte:
    - Eje OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\begin{cases} x_1=-5 \Rightarrow (-5,0) \\ x_2=-1 \Rightarrow (-1,0) \end{cases}$
    - Eje OY: $\begin{cases} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10 \Rightarrow (0,-10)$

    La parábola también pasa por su simétrico: $(-6,-10)$.
  - Eje de simetría: recta $x=-3$.



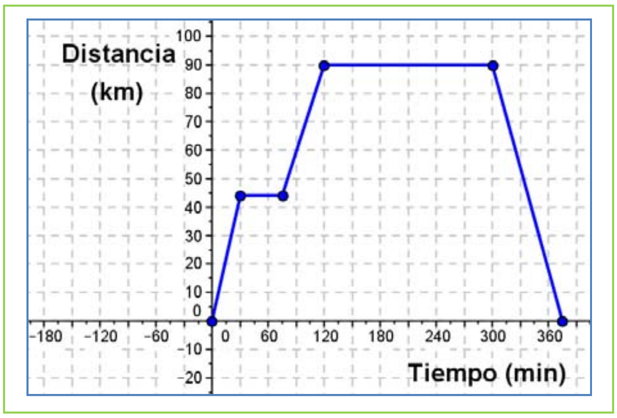
Actividades propuestas

10. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a) $y=2x^2+4x-6$	b) $y=6x^2-24x$	c) $y=-2x^2+4x-2$
d) $y=2x^2+5x-12$	e) $y=3x^2+6x-9$	f) $y=-2x^2+7x+3$
g) $y=7x^2+21x-28$	h) $y=5x^2-9x+4$	i) $y=-4x^2-4x-1$

4. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Hay gráficas que no podemos representar con una única fórmula, como la del margen:



Actividades resueltas

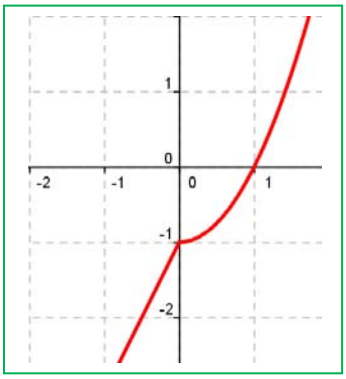
- *La gráfica del margen representa una excursión en autobús de un grupo de Personas Adultas de nivel II a Toledo, pasando por Aranjuez. Busca una expresión que la represente.*

Este tipo de función se denomina **función definida a trozo**s pues cada trozo tiene una expresión algebraica diferente. Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular sus ecuaciones pues conocemos los puntos por los que pasan: (0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

Su expresión es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & si\ 0 \le x \le 30 \\ 45 & si\ 30 < x \le 75 \\ 5x - 330 & si\ 75 < x \le 120 \\ 90 & si\ 120 < x \le 300 \\ -\frac{3}{2}x + 360 & si\ 300 < x \le 360 \end{cases}$$

- *Representa gráficamente la función* $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & si\ x < 0 \\ x^2 - 1 & si\ x \ge 0 \end{cases}$.



Está definida de distinta manera antes de 0, que es una recta, que después de 0, que es una parábola. Simplemente dibujamos estas funciones en los intervalos indicados.

Actividades propuestas

11. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & si\ x < 0 \\ x-1 & si\ x > 0 \end{cases}$.

12. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & si\ x < 0 \\ 2x+2 & si\ x > 0 \end{cases}$.

13. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < 1 \\ x+3 & si\ x > 1 \end{cases}$.

4. APLICACIONES A CONTEXTOS Y SITUACIONES REALES

Interpretación de prospectos. Cantidad de paracetamol. Interpolación

Tenemos paracetamol para niños con una concentración de 100 mg/ml. El prospecto nos indica que la dosis recomendada es de 15 mg por kg de peso del niño cada 6 horas.

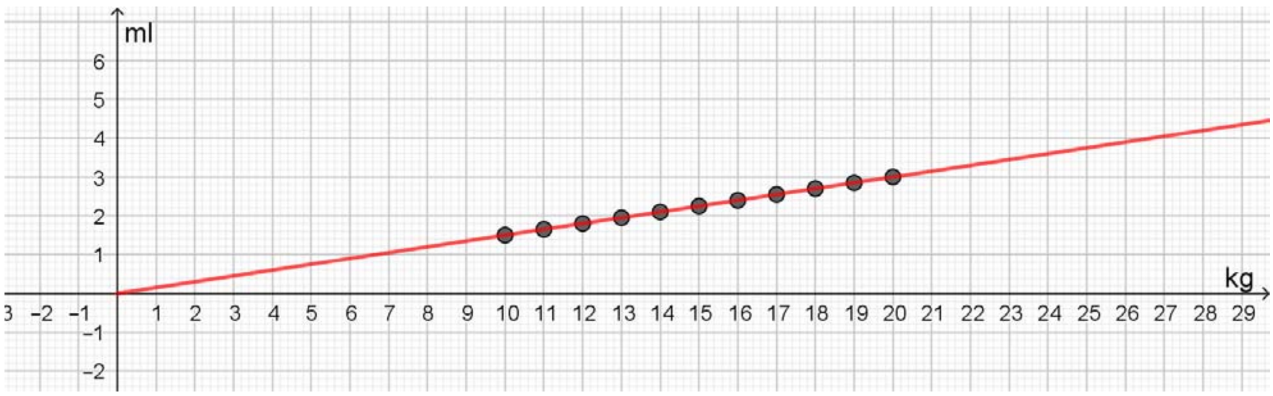
Llamamos a la variable kilogramos del niño y consideramos la función $f(x)$ que es la cantidad en *ml* de paracetamol que tenemos que administrar.

Como $15x$ es el número de mg y en 1 ml de nuestro frasco hay 100 mg entonces tenemos que administrar $\frac{15x}{100}\,ml$. Por lo tanto, la función viene dada por $f(x) = 0{,}15x$.

kg	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ml	1,5	1,65	1,8	1,95	2,1	2,25	2,4	2,55	2,7	2,85	3

Con la función definida a partir de la expresión $f(x) = 0{,}15x$ podemos calcular fácilmente la cantidad de mililitros exactamente para cualquier peso.

Por ejemplo, para un niño de 12,7 kg, la cantidad de mililitros es $f(12{,}7) = 1{,}905$ cada 6 horas.



Interpretación de prospectos. Cantidad de ibuprofeno. Interpolación

Leemos en el prospecto de una cierta marca de ibuprofeno para niños que viene en un frasco con concentración de 40 mg/ml que la dosis administrada de ibuprofeno depende de la edad y del peso del niño. Para niños de 3 meses hasta 12 años, la dosis diaria recomendada es de 20 a 30 mg por cada kg de peso, repartida en tres o cuatro tomas.

Llamamos x a la variable kg de peso del niño. Consideramos las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que determinan las cantidades en ml mínima y máxima que deben administrarse **en total al día**.

Si se hace cada 6 horas, es decir, 4 tomas, entonces se divide la cantidad resultante entre 4.

Si se hace cada 8 horas, es decir, 3 tomas, entonces se divide la cantidad resultante entre 3.

Por lo tanto, $f(x) = \frac{20x}{40}$, $g(x) = \frac{30x}{40}$.

Simplificando, $f(x) = 0{,}5x$, $g(x) = 0{,}75\,x$

Para 14,5 kg la dosis oscila entre $f(14,5)$ y $g(14,5)$, es decir entre 7,25 ml y 10,875 ml.

Al día

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	*f(x)*	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
máximo	*g(x)*	7,5	8,25	9	9,75	10,5	11,25	12	12,75	13,5	14,25	15

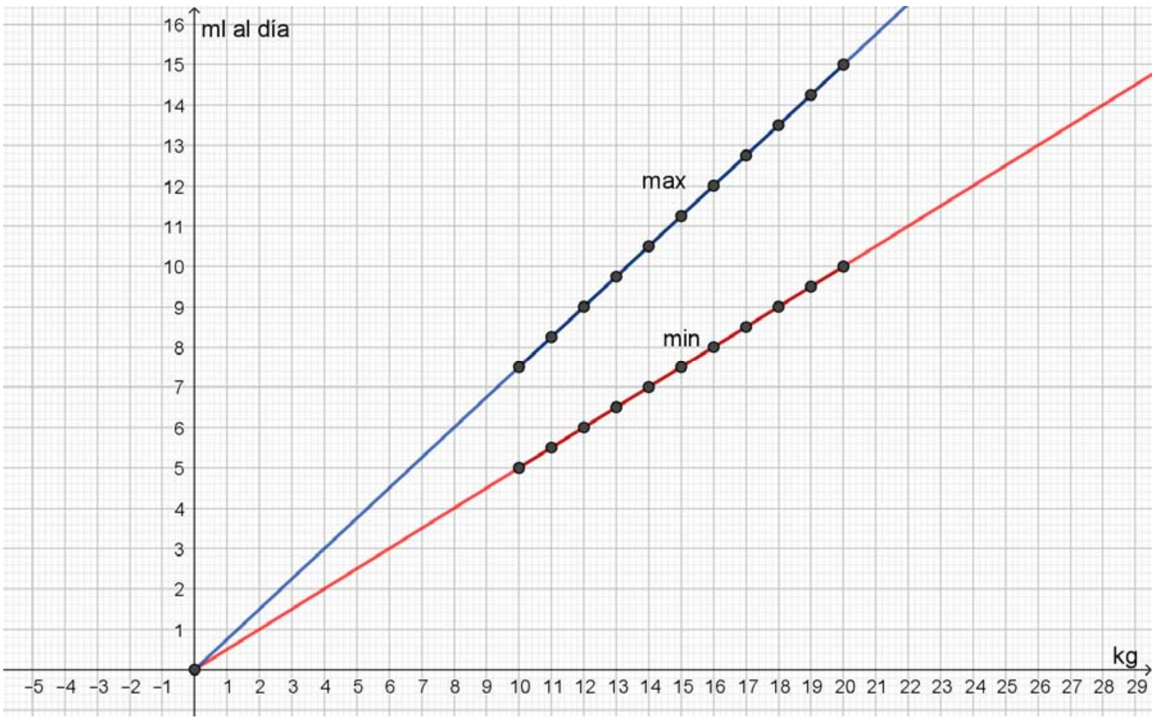
En 3 tomas

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	*f(x)/3*	1,67	1,83	2,00	2,17	2,33	2,50	2,67	2,83	3,00	3,17	3,33
máximo	*g(x)/3*	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5

En 4 tomas

	x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
mínimo	*f(x)/4*	1,25	1,38	1,50	1,63	1,75	1,88	2,00	2,13	2,25	2,38	2,50
máximo	*g(x)/4*	1,88	2,06	2,25	2,44	2,63	2,81	3,00	3,19	3,38	3,56	3,75

Gráficas para la cantidad de ml en un día



Actividad propuesta

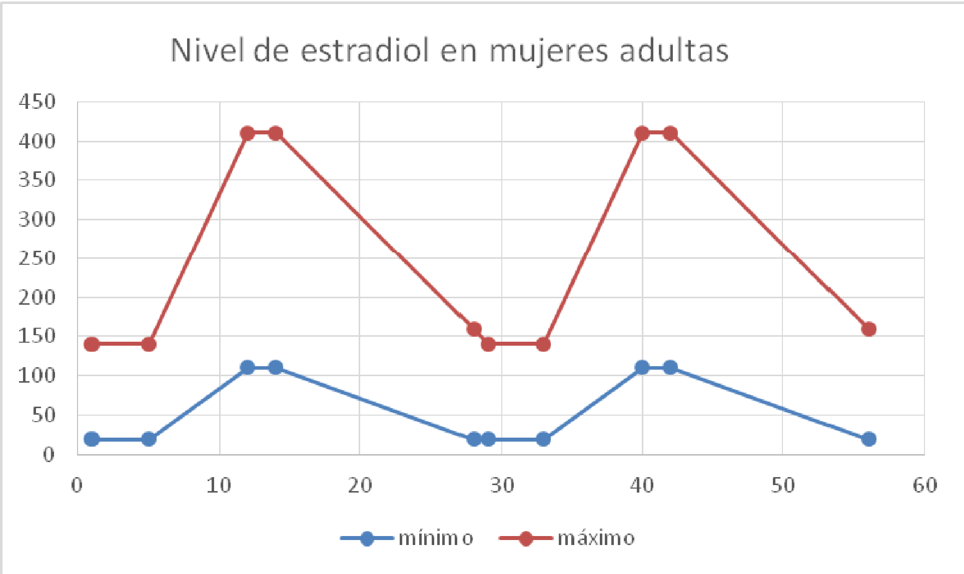
14. A) Si la concentración del frasco de ibuprofeno es de 20 mg/ml y mi niño pesa 16 kg, ¿cuántos ml tendré que administrarle cada 6 horas?

B) Determina la expresión de la función cantidad de ml cada 6 horas en función del peso de un niño.

Gráfica del nivel de estradiol en mujeres adultas

Este es un ejemplo de función periódica. El periodo en este caso es 28 días.

En el eje horizontal se han representado los días y en el vertical los picogramos/mililitro en sangre.



	1	5	12	14	28	29	33	40	42	56
mínimo	19	19	110	110	19	19	19	110	110	19
máximo	140	140	410	410	160	140	140	410	410	160

En hembras adultas -
Fase Folicular - 19 a 140 pg/ml
Momentos antes de la ovulación - 110 a 410 pg/mL
Fase Luteal - 19 a 160 pg/ml
Después de la menopausia - Menos de 35 pg/ml

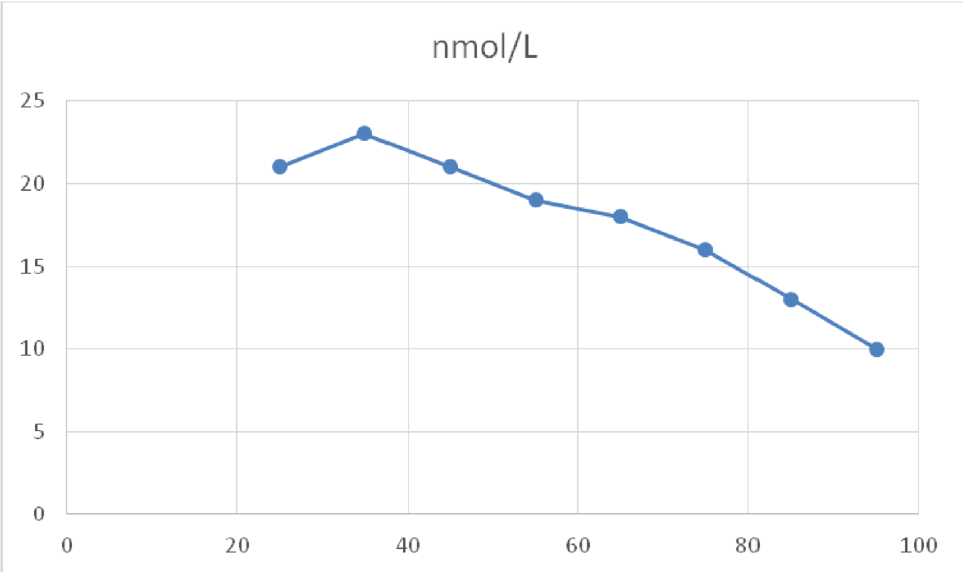
Actividad propuesta

15. De acuerdo con el gráfico, ¿en qué intervalos la función nivel de estradiol es creciente.

¿En qué intervalo es convexa?

¿En qué días se alcanzan los valores mínimos?

- ***Nivel de Testosterona en el hombre en función de la edad***



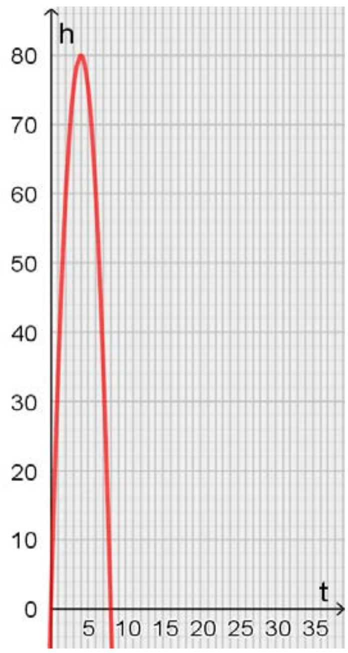
EDAD-nml/L

La tabla muestra los rangos referenciales para la testosterona libre en hombres, de acuerdo a su edad.

edad en años	25	35	45	55	65	75	85	95
nmol/L	21	23	21	19	18	16	13	10
ng/dL	606	663	606	548	519	461	375	288

Actividad propuesta

16. De acuerdo con el gráfico anterior sobre la testosterona, ¿a qué edad se alcanza la máxima concentración de testosterona? ¿En qué intervalo la función es decreciente?



- ***Lanzamiento vertical***

Supongamos que se lanza hacia arriba desde el suelo un objeto con una velocidad inicial . Nos proponemos encontrar expresiones matemáticas que determinen las posiciones y velocidades en cada segundo transcurrido, tomando .

Tomamos el sentido positivo hacia arriba y como origen de coordenadas el punto de lanzamiento. Como se trata de un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) con aceleración negativa, las ecuaciones del movimiento son:

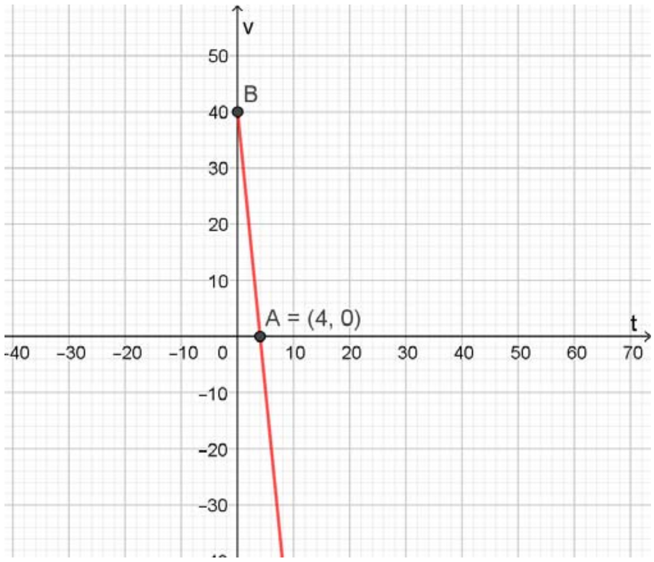
$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$h = v_0 \cdot t - (1/2) g \cdot t^2$$

Supongamos que la velocidad inicial es de 40 *m/s* . En este caso, tenemos:

$$v = 40 - 10 \cdot t; \; h = 40 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

La gráfica de la velocidad dependiendo del tiempo es una recta mientras que la gráfica de la altura dependiendo del tiempo es una parábola.



Actividad propuesta

17. Calcula el vértice de la parábola correspondiente a un lanzamiento vertical. ¿Qué relación tiene con la altura este punto? Observa la gráfica anterior v-t. ¿Cuánto vale la pendiente de la recta? ¿Cuánto vale la ordenada en el origen? ¿Qué relación existe entre la pendiente y el tipo de movimiento?

La energía cinética.

La energía cinética que tiene un cuerpo viene dada por la fórmula $Ec = (1/2) \cdot m \cdot v^2$.

Para un cuerpo de masa 10 kg que va a una velocidad de x m/s, la Ec es de $(1/2) \cdot 10 \cdot x^2$ Julios.

Podemos escribir la función $f(x) = 5\,x^2$.

Observa que en este fenómeno físico no puedes aplicar reglas de tres simples ya que la energía no es directamente proporcional a la velocidad sino al cuadrado de la velocidad.

Actividad propuesta

18. Encuentra la función que determina la energía cinética de un cuerpo de masa 12 kg. Representa esta función y calcula la energía cinética para una velocidad de 8 m/s.

La energía mecánica.

La energía mecánica de un cuerpo es la suma de la energía cinética más la energía potencial.

$$Ep = m \cdot g \cdot h$$

$$Ec = (1/2) \cdot m \cdot v^2$$

El principio de conservación de la energía mecánica establece que la energía mecánica de un cuerpo en el que sólo interviene su peso se conserva.

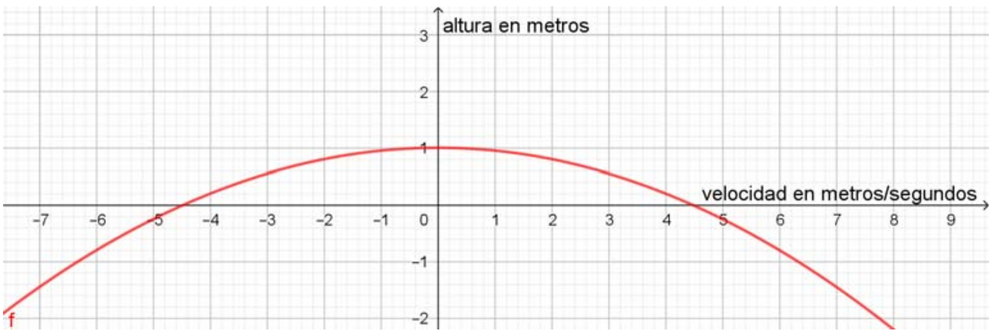
Supongamos que la energía mecánica de un cuerpo es constante igual a 1000 Julios y tiene una masa de 100 kg. Suponiendo que la aceleración de la gravedad es de $10 m/s^2$, la altura $f(x)$ en función de la velocidad x viene dada por $f(x) = 1 - \frac{1}{20}x^2$.

¿A qué velocidad va cuando se encuentra en el suelo?

Las abscisas de los puntos de corte con el eje OX corresponden a las velocidades donde la altura es igual a cero.

Resolvemos la ecuación $1 - \frac{1}{20}x^2 = 0$. Las soluciones son: $x_1 = -\sqrt{20}$, $x_2 = \sqrt{20}$.

El signo significa que las velocidades tienen sentido opuesto. Por ejemplo, si se trata de un lanzamiento de un cuerpo hacia arriba con una cierta velocidad, cuando vuelve a caer al suelo lo hace con la misma velocidad, pero el sentido es el contrario.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Función lineal

1. Representa gráficamente la siguiente relación de proporcionalidad dada en la siguiente tabla y escribe su ecuación. Describe qué tipo de relación es.

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa las rectas: a) $y = 5x$, b) $y = –5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2'3x$.

3. Estudia el dominio, máximos y mínimos y simetrías de las funciones lineales:

a) $y = 1'5x$, b) $y = –0'5x$.

4. Estudia la función $y = 0,7x$ en el intervalo [–2, 5].

5. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (0, 0) y determina su expresión algebraica.

6. Representa las siguientes funciones lineales:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = –x + 5$ c) $y = 3x – 2$ d) $y = –2x – 3$.

7. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (2, 1) y determina su expresión algebraica.

8. Calcula la pendiente de las rectas que pasa por los puntos que se indican y determina su expresión algebraica.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

9. Dos empresas de telefonía móvil lanzan sus ofertas: la empresa StarTel ofrece por cada llamada pagar 50 céntimos más 2 céntimos por minuto hablado; Tel-Hello ofrece 75 céntimos por llamada y minutos ilimitados. ¿Qué oferta es más económica? Para dar la respuesta, realiza los siguientes pasos, expresando los resultados analítica y gráficamente:

a) ¿Hay algún momento en que las dos ofertas sean iguales?

b) Si hablo una media de 15 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?

c) Si hablo una media de 35 minutos al día, ¿qué oferta me conviene?

d) Si hago una media de 10 llamadas al día de 3 minutos de duración, ¿qué oferta me conviene?

e) Si hago una media de 2 llamadas al día de 30 minutos de duración, ¿qué oferta es la mejor?

f) ¿Qué oferta es más económica?

10. El escritor Jaime Joyce tiene distintas ofertas editoriales para publicar su última novela. La editorial Dole le ofrece 100 €, además del 20 % de cada libro que venda; la editorial Letrarte le ofrece 350 €; y la editorial Paco le ofrece según la venta de libros: 50 € si vende hasta 250 libros, 100 € si vende hasta 500 libros, 300 € si vende hasta 1000 libros y 500 € si vende más de 1000 libros. Entre todas las editoriales, ¿cuál crees que es mejor oferta para Jaime?

Funciones cuadráticas

11. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.

12. A partir de la parábola $y = x^2$, dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = 2{,}5x^2$ b) $y = -1{,}2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0{,}7x^2$.

13. Representa la gráfica de las funciones parabólicas siguientes e indica el vértice:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina los elementos de las parábolas siguientes

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funciones definidas a trozos

15. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ x^2 - 1 & si\ x > -1 \end{cases}$.

16. Determina los puntos de intersección con los ejes coordenados de la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

17. Indica los intervalos donde la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si\ x < 2 \\ -x^2 + 4 & si\ x > 2 \end{cases}$ es creciente.

18. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si\ x < 1 \\ 1/x & si\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. La recta $y = 4x + 2$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. La recta que pasa por los puntos (1, 6) y (–2, 4) tiene de pendiente m y ordenada en el origen b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/3$, $b = 16/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica cuál de las siguientes funciones lineales es simétrica respecto del origen de coordenadas:

a) $y = (–10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = –x + 3$

4. Indica cuál de las siguientes funciones cuadráticas es simétrica respecto del eje de ordenadas:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = –x^2 + 3x + 2$

5. Indica el vértice de la función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas es *más estrecha* que $y = x^2$:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

7. Indica cuál de las siguientes parábolas abre hacia arriba:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

8. Indica cuál de las siguientes parábolas no corta al eje OX:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

9. Indica cuál de las siguientes funciones es siempre decreciente:

a) $y = -5x+1$ b) $y = 5x^2+6x$ c) $y = 3x-8$ d) $y = –x^2$

10. Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas alcanza un mínimo absoluto:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 9

Estadística y probabilidad

Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

1. LA TOMA DE DATOS

1.1. Un ejemplo para realizar un análisis

Ejemplo:

La Casa de la Moneda quiere estudiar cuántas monedas debe emitir, teniendo en cuenta las que están en circulación y las que se quedan atesoradas (bien en casas particulares, o en máquinas de refrescos, o depositadas en un banco). Se ha hecho una encuesta a pie de calle a 60 personas y se ha apuntado cuántas monedas llevaba cada una de ellas en el bolsillo. Hemos obtenido estos datos:

12	7	11	8	8	9	6	12	7	7	13	0	10	9	13	18	7	6	11	12	16	0	10	10	8	8	9	11	10	8
16	8	5	2	12	8	14	14	16	6	2	0	18	10	10	12	14	6	7	3	12	11	10	18	9	7	12	1	15	8

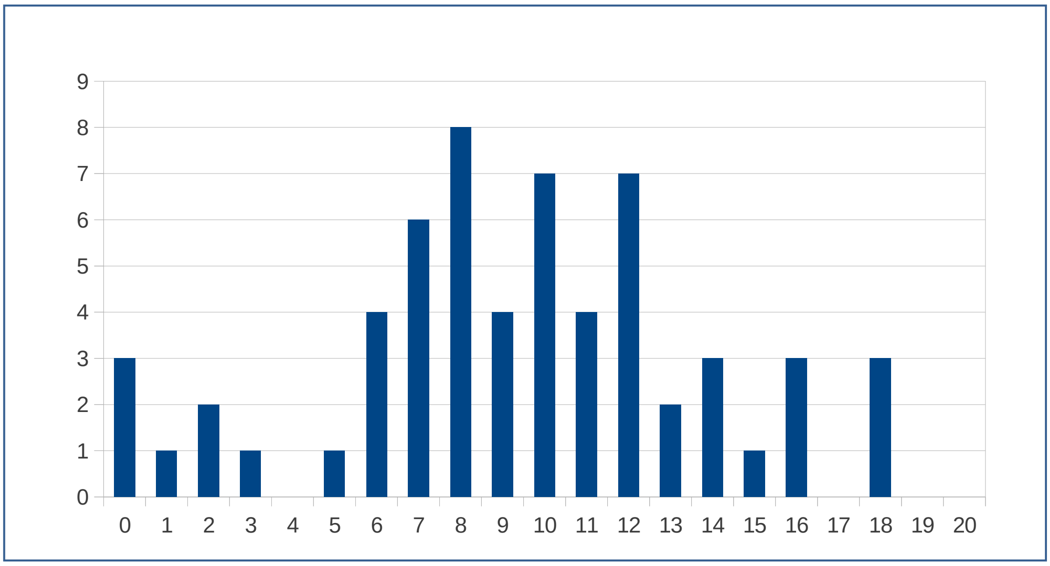
El primer paso consiste en hacer un esquema para el recuento: usaremos una tabla y marcaremos palotes cada vez que aparezca ese número.

0	///	**7**	///// /	**14**	///
1	/	**8**	///// ///	**15**	/
2	//	**9**	////	**16**	///
3	/	**10**	///// //	**17**	
4		**11**	////	**18**	///
5	/	**12**	///// //	**19**	
6	////	**13**	//	**20**	

Pasar de ese recuento a una tabla de **frecuencias absolutas** es muy sencillo: solo hay que sustituir los palotes por el número que representan.

0	3	**7**	6	**14**	3
1	1	**8**	8	**15**	1
2	2	**9**	4	**16**	3
3	1	**10**	7	**17**	0
4	0	**11**	4	**18**	3
5	1	**12**	7	**19**	0
6	4	**13**	2	**20**	0

Es mucho mejor analizar los datos de modo visual. Estamos más acostumbrados a trabajar de esa manera. Podemos representar los datos de la tabla de frecuencias en un **diagrama de barras**, donde la altura de cada barra representa la frecuencia de aparición.



El procesamiento de datos estadísticos se utiliza mucho. Obviamente no se hacen las operaciones a mano, sino que se utilizan calculadoras u hojas de cálculo. Disponer de esos medios tecnológicos será un buen complemento para el capítulo, aunque recordamos que lo más importante es comprender qué se hace en cada momento.

Comenzaremos introduciendo algo de **nomenclatura**. Casi todos estos nombres los has escuchado puesto que los medios de comunicación los utilizan muchísimo

Población es el colectivo sobre el que se quiere hacer el estudio.

Muestra es un subconjunto de la población de modo que a partir de su estudio se pueden obtener características de la población completa.

Individuo es cada uno de los elementos de la población o la muestra.

Ejemplo:

Se quiere hacer un estudio sobre hábitos alimenticios de los estudiantes de 3º de ESO de todo Madrid. Pero como es muy costoso entrevistar a todos los estudiantes se decide tomar un IES por cada distrito y entrevistar a los alumnos de 3º de ESO de esos colegios elegidos.

La **población** objeto del estudio serán todos los estudiantes madrileños matriculados en 3º de ESO.
La **muestra** son los estudiantes de 3º de ESO matriculados en los institutos elegidos.
Cada uno de los estudiantes de 3º de ESO es un **individuo** para este estudio estadístico.

Actividades propuestas

1. Queremos hacer un estudio de la cantidad de monedas que llevan en el bolsillo los estudiantes de tu clase. Pero para no preguntar a todos elige 10 compañeros al azar y anota en tu cuaderno cuántas monedas lleva cada uno.

a) ¿Cuál es la población objeto del estudio?

b) ¿Cuál es la muestra elegida?

c) Especifica 5 individuos que pertenezcan a la población y no a la muestra.

1.2. Variables estadísticas

Ejemplo:

En un estudio estadístico se puede preguntar cosas tan variopintas como

- ¿Qué frutas comes a lo largo de una semana?
- ¿Cuántas piezas de fruta comes al día?
- ¿Cuántas monedas llevas en el bolsillo?
- ¿Cuál es tu altura?
- ¿Cuántas marcas de chocolate recuerdas?
- ¿Cuáles son las marcas de chocolate que recuerdas?
- ¿Cuántos hermanos tienes?
- ¿Cuál es tu color favorito para un coche?
- ¿Cuánto tiempo pasas al día viendo la televisión?
- ¿Cuántos seguidores tienes en twitter?

Esas preguntas pueden corresponder a estudios de salud, económicos, publicitarios o socioeconómicos. Algunas se responden con un número y otras se responden con un nombre o un adjetivo. Incluso hay diferencias entre las que se responden con números: el número de monedas que llevas o el número de seguidores de *twitter* se contestan con números enteros, mientras que para hallar tu altura o las horas que pasas delante del televisor necesitamos utilizar números reales (normalmente con representación decimal).

Una variable se dice **cuantitativa** si sus valores se expresan con números.

Las variables cuantitativas pueden ser

- **discretas** si solo admiten valores aislados
- **continuas** si entre dos valores pueden darse también todos los intermedios

Una variable estadística es **cualitativa** cuando sus valores no se expresan mediante un número, sino con una cualidad.

Actividades propuestas

2. Clasifica en variables cualitativas y cuantitativas las que aparecen en el primer ejemplo de esta sección. Para las cuantitativas indica si son continuas o discretas.

1.3. Las fases de un estudio estadístico

En un estudio estadístico hay 6 fases fundamentales:

1. Determinación del objeto del estudio. Esto es, saber qué queremos estudiar.
2. Selección de las variables que se van a estudiar.
3. Recogida de los datos.
4. Organización de los datos.
5. Representación y tratamiento de los datos.
6. Interpretación y análisis.

En este libro empezaremos los ejemplos a partir del punto 4, con datos ya proporcionados en los enunciados.

2. REPRESENTACIÓN DE LA INFORMACIÓN

2.1. Ejemplos para trabajar

En la sección anterior lo comenzábamos analizando una variable discreta: el número de monedas que se llevan en el bolsillo. Puedes repasar qué hacíamos allí: cómo recontábamos los datos, cómo los llevábamos después a una tabla de frecuencias y cómo representábamos la información en un gráfico.

Haremos ahora el mismo proceso con una variable continua.

Ya sabes que:

Podemos distinguir entre **frecuencias absolutas**, si, como en este ejemplo, hacemos un recuento del número de veces que aparece cada dato. **Frecuencias relativas**, que estudiaremos con más detenimiento al final del capítulo, y que consiste en dividir cada frecuencia absoluta por el número total de observaciones. **Frecuencias acumuladas**, tanto frecuencias absolutas acumuladas como frecuencias relativas acumuladas si se calculan todos los valores menores o iguales a él.

Ejemplos:

- Se está realizando un control del peso de un grupo de niños. Para ello, se contabilizan el número de veces que comen al día una chocolatina 13 niños durante un mes, obteniendo los siguientes números: 2, 5, 3, 2, 0, 4, 1, 7, 4, 2, 1, 0, 2.

La información obtenida se puede resumir en una tabla de frecuencias **absolutas** y frecuencias **absolutas acumuladas**:

Valores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Frecuencia absoluta	2	2	4	1	2	1	0	1
Frecuencia absoluta acumulada	2	4	8	9	11	12	12	13

También se puede resumir en una tabla de frecuencias **relativas** y frecuencias **relativas acumuladas**:

Valores	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia relativa	0'154	0'154	0'307	0'077	0'154	0'077	0	0'077
Frecuencia relativa acumulada	0'154	0'308	0'615	0'692	0'846	0'923	0'923	1

- En una fábrica se realiza un estudio sobre el espesor, en *mm*, de un cierto tipo de latas de refresco. Con este fin, selecciona una muestra de tamaño *N* = 25, obteniendo los siguientes valores: 7'8, 8'2, 7'6, 10'5, 7'4, 8'3, 9'2, 11'3, 7'1, 8'5, 10'2, 9'3, 9'9, 8'7, 8'6, 7'2, 9'9, 8'6, 10'9, 7'9, 11'1, 8'8, 9'2, 8'1, 10'5.

Esta información se puede resumir haciendo cinco intervalos y haciendo una tabla de frecuencias absolutas, frecuencias absolutas acumuladas, frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas

Intervalos de clase	**(7, 8]**	**(8, 9]**	**(9, 10]**	**(10, 11]**	**(11, 12]**
Marcas de clase	7'5	8'5	9'5	10'5	11'5
Frecuencia absoluta	6	8	5	4	2
Frecuencia relativa	0'24	0'32	0'2	0'16	0'08
Frecuencia relativa acumulada	0'24	0'56	0'76	0'92	1

Ejemplo:

- Las alturas de los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto (en metros) que participaron en la Eurocopa 2013 se recogen en la siguiente tabla:

2'03	1'96	1'91	2'11	1'91	1'93	2'08	1'99	1'90	2'16	2'06	2'03

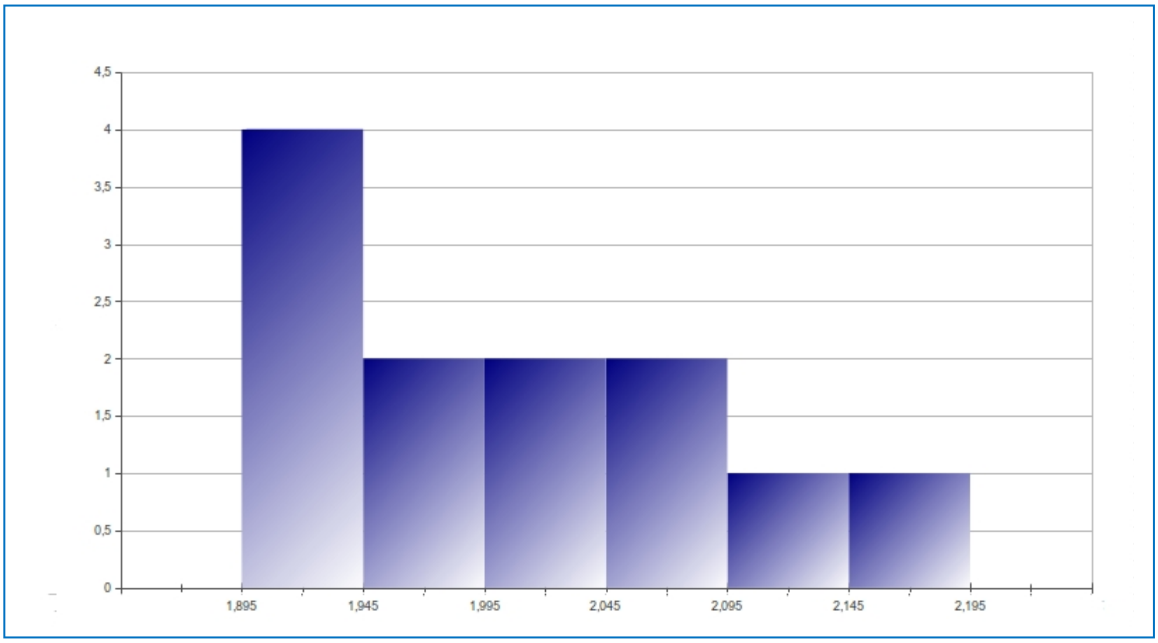
Como los datos son continuos, para hacer el recuento fijaremos **intervalos** de altura:

- entre 1'895 y 1'945 ////
- entre 1'945 y 1'995 //
- entre 1'995 y 2'045 //
- entre 2'045 y 2'095 //
- entre 2'095 y 2'145 /
- entre 2'145 y 2'195 /

Ahora llevamos los datos del recuento a un diagrama de frecuencias:

entre 1'895 y 1'945	4
entre 1'945 y 1'995	2
entre 1'995 y 2'045	2
entre 2'045 y 2'095	2
entre 2'095 y 2'145	1
entre 2'145 y 2'195	1

En este caso la representación gráfica la hacemos con un **histograma de frecuencias**.

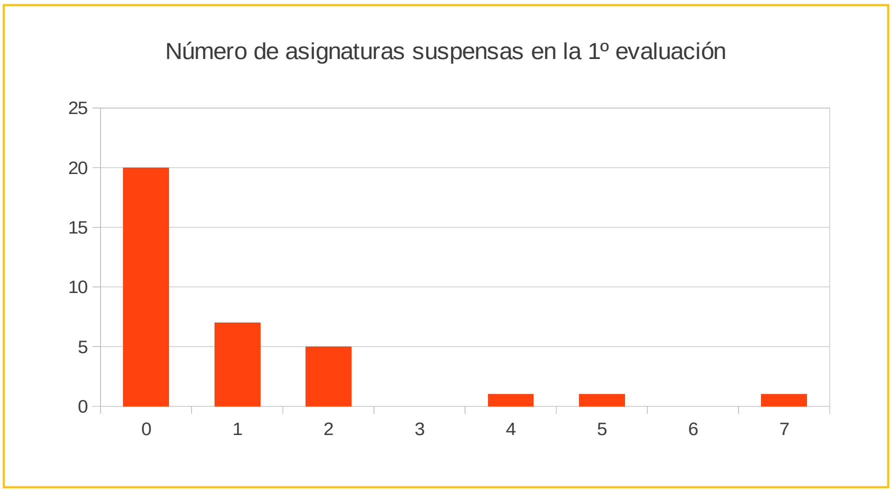


Observa la diferencia entre este gráfico (correspondiente a una variable continua) y el que hicimos para el recuento de monedas (que representaba una variable discreta). Este gráfico se denomina histograma de frecuencias y es similar a un diagrama de barras pero ahora representamos unas barras pegadas a otras, para recordar que se trata de intervalos de clase y no de valores aislados de las variables. En nuestro ejemplo todos los intervalos tienen la misma longitud, 0'05 cm. Si las longitudes de los intervalos fueran diferentes las alturas de los rectángulos deberían ser proporcionales al área.

2.2. Diagramas de barras

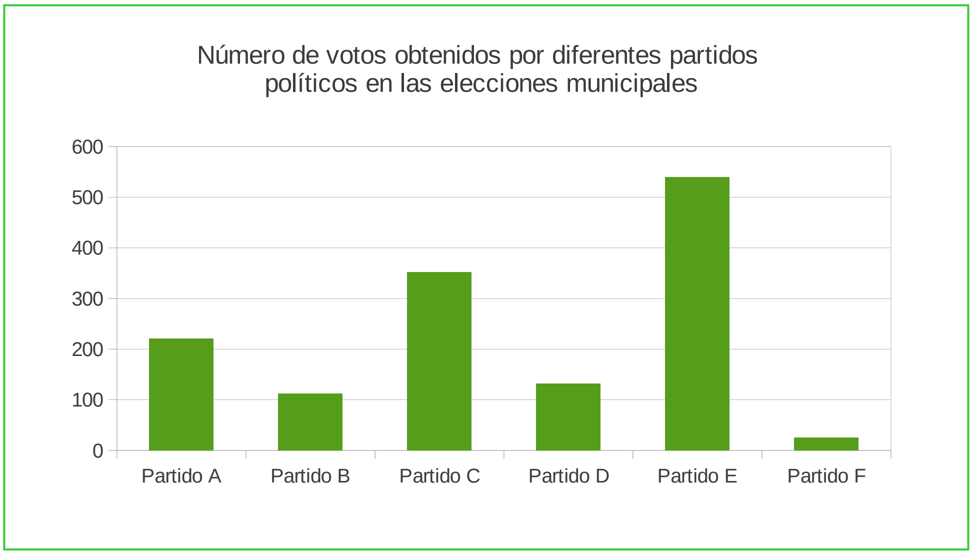
Se utiliza para representar datos de variables estadísticas discretas o variables estadísticas cualitativas.

Al principio del capítulo estudiando el número de monedas que se llevan en el bolsillo. Podemos utilizar este tipo de gráfico en otras situaciones.



El gráfico anterior representa el número de alumnos (de una clase de 35) que han aprobado todo, el de alumnos con 1 asignatura suspensa, con dos asignaturas suspensas, etc. Lo bueno de la representación gráfica es que **de un solo vistazo sabemos que 20 alumnos han aprobado todo y que hay un alumno que tiene 7 asignaturas suspensas.**

También podemos utilizar diagramas de barras para representar variables cualitativas, como la elección de la modalidad de bachillerato que cursan los alumnos de un IES o las preferencias políticas de los ciudadanos de un municipio.

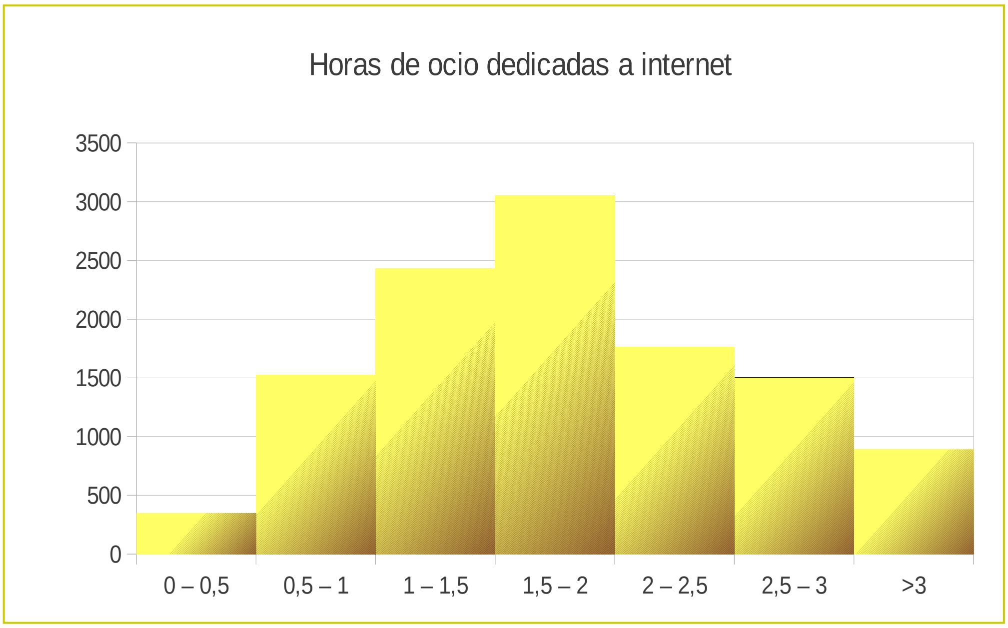


2.3. Histograma de frecuencias

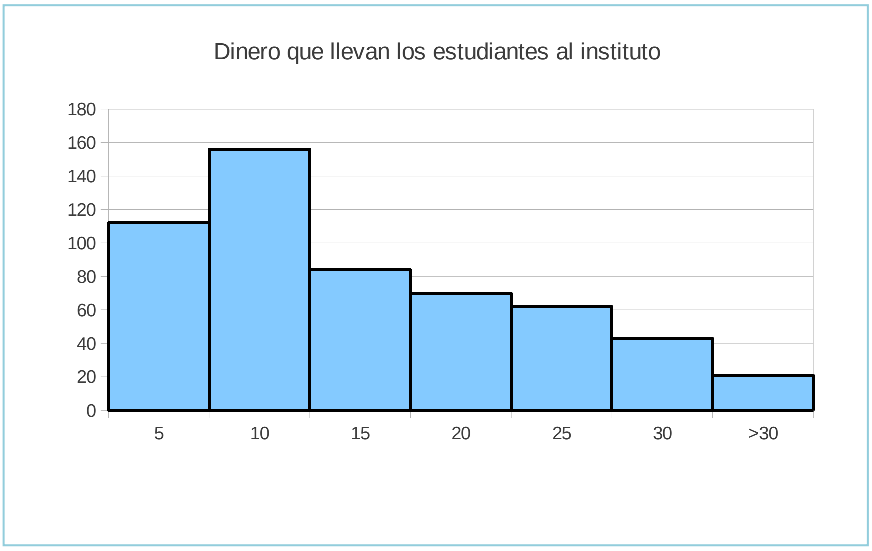
Este tipo de gráfico lo hemos utilizado antes para representar las alturas de los jugadores de la Selección Española de Baloncesto.

Es similar a un diagrama de barras pero la altura de cada barra viene dada por el número de elementos que hay en cada clase.

Otras variables que podemos considerar como variables continuas son el número de horas que los jóvenes de una población dedican a internet en sus ratos de ocio o la cantidad de dinero que se lleva en el bolsillo (ojo, esto no es el número de monedas).



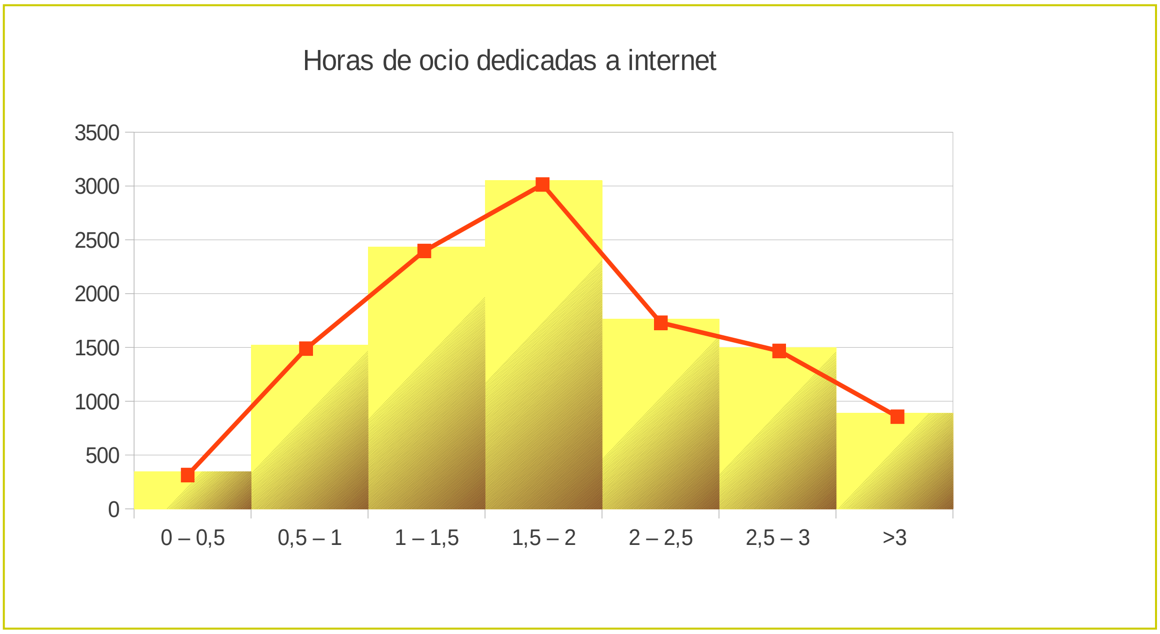
En el gráfico que incluimos a continuación las marcas del eje de las *x* se refieren a los tramos de dinero expresados de 5 en 5 euros. La altura del gráfico se corresponde con la cantidad de alumnos que llevan esa cantidad de dinero. De un simple vistazo se ve que hay algo más de 150 alumnos que llevan entre 5 € y 10 € al instituto y que poco más de 40 alumnos llevan entre 25 € y 30 €.



Las barras son más anchas y aparecen unas a continuación de otras para destacar que estamos representando una variable continua y que las alturas se corresponden con individuos dentro de un intervalo de datos. Pero recuerda, si los intervalos fueran distintos, las alturas de los rectángulos serían proporcionales al área.

2.4. Polígono de frecuencias

Se utiliza en los mismos casos que el histograma. Pero da idea de la variación de la tendencia. La línea poligonal se construye uniendo los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos.

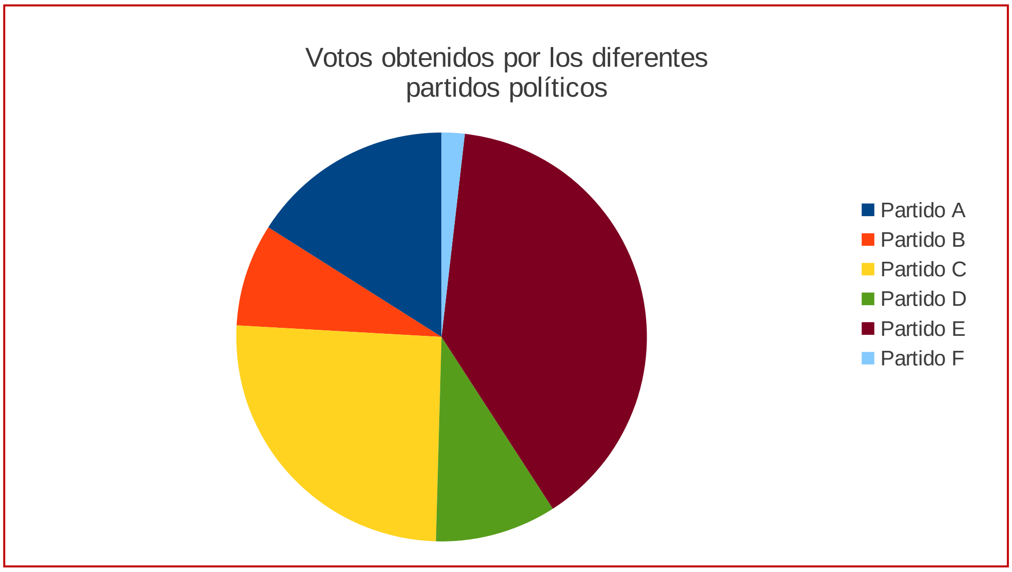


2.4. Diagrama de sectores

En algunas ocasiones nos interesa hacernos a la idea de la proporción que tiene cada resultado en relación con los demás. Se utiliza mucho con variables cualitativas. Por ejemplo, esta representación se utiliza para mostrar los resultados de unas las elecciones cuando queremos comparar los votos obtenidos por los diferentes partidos.

En un diagrama de sectores aparecen representados sectores circulares. El ángulo de estos sectores es proporcional a la frecuencia absoluta.

Retomando el ejemplo de los resultados obtenidos por diferentes partidos políticos vamos a representar esos mismos resultados mediante un diagrama de sectores:



Actividades propuestas

3. Reúne a 10 amigos. Recuenta cuántas monedas de cada valor (1céntimo, 2 céntimos, 5 céntimos, …) tenéis entre todos. Representa mediante un gráfico adecuado el número de monedas de cada clase que hay. ¿Hay algún otro diagrama que te permita ver qué tipos de monedas son más abundantes en la muestra que has tomado?

4. En la clase de Educación Física el profesor ha medido el tiempo que tarda cada alumno en recorrer 100 metros. Los resultados están en esta tabla:

14’92	13’01	12’22	16’72	12’06	10’11	10’58	18’58	20’07	13’15	20’10	12’43	17’51	11’59	11’79
16’94	16’45	10’94	16’56	14’87	17’59	13’74	19’71	18’63	19’87	11’12	12’09	14’20	18’30	17’64

Agrupa estos resultados por clases’ comenzando en 10 segundos y haciendo intervalos de longitud 1 segundo. Realiza una tabla de frecuencias y representa adecuadamente estos datos.

3. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

3.1. Introducción

Seguro que sabes qué es la media de dos números y probablemente sabes calcular la media de una serie de datos. Pero además de esa medida estadística hay otras medidas que pueden ser interesantes para conocer propiedades de los datos que tenemos.

Ahora estudiaremos las **medidas de centralización** (media, mediana y moda) que nos proporcionan un valor de referencia en torno al que se distribuyen los datos y las **medidas de dispersión** (recorrido, desviación media, varianza y desviación típica). Estas medidas nos indican cómo están de separados los datos en torno a la media.

Ejemplo:

Imagina que en dos exámenes de matemáticas obtienes un 6 y un 5. La media es 5.5. Supón ahora que las notas que has tenido son 10 y 1. La media también es 5.5 pero deberás estudiarte la parte en la que has sacado 1 para recuperar. Las medidas de dispersión nos van a servir para detectar cuándo tenemos valores extremos, alejados de la media.

3.2. Medidas de centralización

La **media** se calcula sumando todos los valores y dividiendo entre el número de datos.

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores que toma la variable estadística que estamos considerando, la media se representa por $\overline{x}$ y se calcula mediante la fórmula:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Esa suma se puede escribir abreviadamente como $\overline{\boldsymbol{x}} = \dfrac{\sum \boldsymbol{x_i}}{\boldsymbol{n}}$. El símbolo $\sum$ se utiliza habitualmente para representar sumas de varios sumandos. Lo utilizarás mucho a partir de ahora.

Para calcular la **mediana** se ordenan todos los datos de menor a mayor y nos quedamos con el que ocupa la posición central. Si tenemos un número par de datos, tomamos como mediana la media de los dos números que ocupan las posiciones centrales. La representaremos por *Me*.

La ***mediana*** *Me* es un valor tal que el 50 % de las observaciones son inferiores a él.

Los ***cuartiles*** Q_1, Q_2 y Q_3 son los valores tales que el 25 %, 50 % y 75 % (respectivamente) de los valores de la variable son inferiores a él. Por tanto la mediana coincide con el segundo cuartil.

Usamos el término **moda** para referirnos al valor que más se repite. La denotamos por *Mo*.

Actividades resueltas

- Continuamos utilizando los datos de estatura correspondientes a los 12 jugadores de la Selección Española de Baloncesto *(ver sección 2.1 de este capítulo).*

La estatura **media** se calcula sumando todas las alturas y dividiendo entre el número de datos.

$\sum \boldsymbol{x_i}$ = 2’03 + 2’06 + 2’16 + 1’90 + 1’99 + 2’08 + 1’93 + 1’91 + 2’11 + 1’91 + 1’96 + 2’03 = 24’07

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{24.07}{12} = 2'0058.$$

En este ejemplo no podemos hablar de **moda**, puesto que no hay un único valor que sea el que más se repite.

La **mediana** en este caso es 2'01. Para calcularla ordenamos todos los datos de menor a mayor y nos quedamos con el que ocupa la posición central. Como en este caso tenemos un número impar de datos, tomamos como mediana la media aritmética de los 2 que ocupan las posiciones centrales.

Los datos, tras ordenarlos, quedarían así:

1'90	1'91	1'91	1'93	1'96	1'99	2'03	2'03	2'06	2'08	2'11	2'16

Media de ambos = 2'01

Para calcular los **cuartiles** tenemos que dividir el total de datos, en este ejemplo 12, entre 4, (o multiplicar por 0'25 que es lo mismo) y obtenemos 3. Luego el primer cuartil observamos que está entre 1'91 y 1'93, hacemos la media y obtenemos que Q_1 = 1'92. Para calcular el tercer cuartil multiplicamos por 3 y dividimos por 4, (o multiplicamos por 0'75) y en este caso se obtiene el valor que está entre 9, 2'06, y 10, 2'08, por lo que Q_3 = 2'07.

3.3. Medidas de dispersión

Recorrido es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor. También se denomina **rango**.

Desviación media es la media de las distancias de los datos a la media de los datos de los que dispongamos.

$$DM = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Varianza es la media de los cuadrados de las distancias de los datos a la media.

$$\text{Varianza} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Equivalentemente (desarrollando los cuadrados que aparecen en la expresión) se puede calcular mediante esta otra expresión:

$$\text{Varianza} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza.

Se representa por σ.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Recorrido intercuartílico o **intervalo intercuartil** es la distancia entre el tercer y el primer cuartil:

$$R = \text{Recorrido intercuartílico} = Q_3 - Q_1.$$

Estas fórmulas provienen de diferentes modos de medir las distancias. Para el cálculo de la desviación media se usan valores absolutos, que es como se mide la distancia entre números en la recta real. La desviación típica tiene que ver con la forma de medir distancias en el plano (recordemos que la hipotenusa de un triángulo es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos). No hace falta que comprendas ahora de dónde salen estas fórmulas pero sí es conveniente que sepas que no es por capricho de los matemáticos que lo inventaron. Cada cosa a su tiempo...

Actividades resueltas

- Volvemos a usar los datos del ejemplo de la Selección Española con los que venimos trabajando.

Recorrido: 2’16 – 1’90 = 0’26 (metros). Esto es la diferencia de alturas entre el jugador más alto y el más bajo.

Para calcular la **desviación media** primero calcularemos la suma que aparece en el numerador. Después dividiremos entre el número de datos.

|2’03 – 2’0058| + |2’06 – 2’0058| + |2’16 – 2’0058| + |1’90 – 2’0058| + |1’99 – 2’0058| +

|2’08 – 2’0058| + |1’93 – 2’0058| + |1’91 – 2’0058| + |2’11 – 2’0058| + |1’91 – 2’0058| +

|1’96 – 2’0058| + |2’03 – 2’0058| = 0’0242 + 0’0458 + 0’0958 + 0’1042 + 0’0958 + 0’0758 + 0’0742 + 0’0158 + 0’1058 + 0’1542 + 0’9458 + 0’0242 = 0’87

Así la **desviación media** es 0’87/12 = 0’0725

Para calcular la **varianza** primero calcularemos la suma que aparece en el numerador, de modo similar a como acabamos de hacer. Después terminaremos dividiendo entre el número de datos.

(2’03 – 2’0058)² + (2’06 – 2’0058)² + (2’16 – 2’0058)² + (1’90 – 2’0058)² + (1’99 – 2’0058)² +

(2’08 – 2’0058)² + (1’93 – 2’0058)² + (1’91 – 2’0058)² + (2’11 – 2’0058)² + (1’91 – 2’0058)² +

(1’96 – 2’0058)² + (2’03 – 2’0058)² = 0’08934

Así la **varianza** es 0’08934/12 = 0’00744

La **desviación típica** es la raíz cuadrada de la varianza: $\sigma = \sqrt{0'00744}$ = 0’08628.

Recorrido intercuartílico o **intervalo intercuartil** se calcula restando $Q_3 - Q_1$ = 2’07 – 1’92 = 0’15.

Las medidas de posición nos permiten realizar otro tipo de gráfico estadístico que se llama el ***gráfico de caja***.

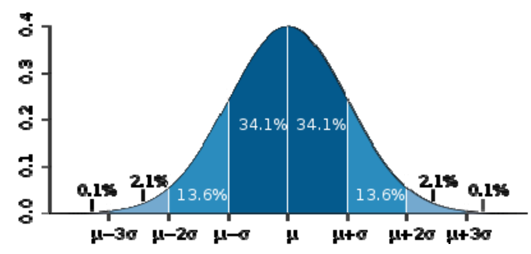
3.5. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica

Hemos visto que la desviación típica nos mide la distancia de los datos respecto de la media. Nos da mucha información. Informa sobre cómo se agrupan los datos alrededor de la media.

La media y la desviación típica están relacionadas.

1. Aproximadamente el 68 % de los datos distan como mucho una desviación típica de la media.
2. Aproximadamente el 95 % de los datos distan como mucho dos desviaciones típicas de la media.
3. Aproximadamente más del 99 % de los datos distan como mucho tres desviaciones típicas de la media.

Si los datos que hemos recogido tuvieran una distribución normal (de momento no sabemos lo que esto significa exactamente dentro de la Estadística, pero puedes suponer que significa eso, que son normales, que no les pasa nada raro) resulta que en el intervalo entre la media menos una desviación típica y la media más una desviación típica están más del 68 % de los datos. En el intervalo entre la media menos 2 desviaciones típicas y la media más 2 desviaciones típicas están más del 95 % de los datos, y entre la media menos 3 desviaciones típicas y la media más 3 desviaciones típicas están más del 99'7 % de los datos.



Media y desviación típica. Imagen de wikipedia

Se podría decir que algo, por ejemplo la inteligencia de una persona, la altura de una planta o el peso de un animal... es normal si está dentro de ese intervalo $(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma)$, que es inteligente, alto o pesado si está entre $(\overline{x} + \sigma, \overline{x} + 2\sigma)$, o que es un genio, gigante o muy pesado si está en el intervalo $(\overline{x} + 2\sigma, \overline{x} + 3\sigma)$.

Observa que estamos diciendo que prácticamente todos los datos distan de la media menos de tres desviaciones típicas y que más del 68 % distan menos de una desviación típica. Esto va a ser de gran utilidad pues conecta con otras ramas de la Estadística. Hasta ahora hemos estado describiendo lo que ocurre. Ahora vamos a poder tomar decisiones, inferir o predecir con una cierta probabilidad lo que va a ocurrir. Por eso vamos a estudiar a continuación las probabilidades.

3.5. Cálculo detenido de los parámetros estadísticos

Lo más cómodo para calcular parámetros estadísticos es utilizar una hoja de cálculo. Las calculadoras científicas también incorporan funciones para obtener los principales parámetros estadísticos. Para saber cómo usar tu calculadora puedes leer el manual que viene con ella.

Ahora veremos cómo se pueden utilizar las tablas de frecuencias para calcular la media y la varianza.

Cuando hay valores repetidos en vez de sumar ese valor varias veces podemos multiplicar el valor por su frecuencia absoluta. También, el número de datos es la suma de las frecuencias.

De este modo obtenemos la siguiente **fórmula para la media**

$$\overline{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i}$$

Análogamente, la **varianza** se puede calcular mediante

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}$$

o, alternativamente, mediante la expresión

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \cdot x_i^{\,2}}{\sum f_i} - \overline{x}^2$$

(Estas dos fórmulas son equivalentes. La segunda expresión se obtiene desarrollando los cuadrados de la primera y simplificando).

Por tanto la **desviación típica** se calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^{\,2}}{\sum f_i} - \overline{x}^2}$$

Actividades resueltas

Las notas de 15 alumnos en un examen de matemáticas se reflejan en la siguiente tabla

7	7	6	6	10	1	4	5	5	3	9	5	5	8	6

Queremos calcular su media y su varianza.
En primer lugar, elaboramos una tabla de frecuencias con esos datos:

x_i	f_i
1	1
2	0
3	1
4	1
5	4
6	3
7	2
8	1
9	1
10	1

Añadimos una columna en la que escribiremos el resultado de multiplicaremos la frecuencia y el valor, esto es, $\boldsymbol{xi \cdot fi}$.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
1	1	1
2	0	0
3	1	3
4	1	4
5	4	20
6	3	18
7	2	14
8	1	8
9	1	9
10	1	10
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$

Sumando las frecuencias (columna central) obtenemos el número de datos.
Así la media es el cociente entre la suma de la columna de la derecha entre la suma de la columna central.

$$\bar{x} = \frac{87}{15} = 5'8$$

Para calcular la varianza añadiremos una columna más a la tabla anterior. En esa columna escribiremos el producto de la frecuencia por el cuadrado del valor.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	9
4	1	4	16
5	4	20	100
6	3	18	108
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
10	1	10	100
	$\sum f_i = n = 15$	$\sum x_i \cdot f_i = 87$	$\sum x_i^2 \cdot f_i = 577$

Así la **varianza** es $\sigma^2 = \frac{577}{12} - 5'8^2 = 14'4433$

Y la **desviación típica** es $\sigma = \sqrt{14'4433} = 3'8004$.

3.6. Diagrama de cajas o de bigotes

El **diagrama de cajas** es una representación gráfica en la que se utilizan los cuartiles, la mediana, los valores máximos y mínimos… intentando visualizar todo el conjunto de datos.

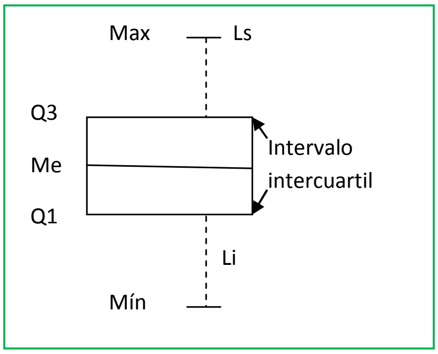
Se forma un rectángulo (o caja) cuyos lados son los cuartiles (Q_1 y Q_3) y donde se señala en el centro, la mediana (*Me*). Se añaden dos brazos (o *bigotes*) donde se señalan los valores máximo (*Máx*) y mínimo (*Mín*).

Se pueden calcular, además, unos límites superior e inferior. El inferior, L_i; es Q_1 – 1’5 por el intervalo intercuartil, y el superior Ls es Q_3 + 1’5 por el intervalo intercuartil.

Ejemplo

- Nieves ha tenido en Matemáticas las siguientes notas: 8, 4, 6, 10 y 10. Calcula su recorrido, la varianza, la desviación típica, los cuartiles y el intervalo intercuartil.

Ordenamos los datos: 4 ≤ 6 ≤ 8 ≤ 10 ≤ 10, y calculamos que:



Mediana = *Me* = 8.

Q_1 = 6. Q_3 = 10.

Intervalo intercuartil = 10 – 6 = 4.

Los bigotes nos indican:

Máx = 10. Mín = 4.

Ls = Q3 + 4*1’5 = 16. Li = Q1 – 4*1’5 = 0.

En este ejemplo el máximo es igual a 10, que es menor que el posible extremo superior, igual a 16. El mínimo es 4, mayor que el extremo inferior, luego no hay valores *atípicos* que sean mayores que el límite superior o menores que el límite inferior. Los extremos de los bigotes, en nuestro ejemplo son 10 y 4.

El diagrama de caja es el de la figura del margen.

4. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

4.1. Conceptos básicos en probabilidad

Todos los días aparecen en nuestra vida hechos que tienen que ver con la probabilidad. Si jugamos al parchís, intuimos que *más o menos* una de cada 6 veces saldrá un 5, con lo que podremos sacar una ficha a recorrer el tablero. En el 'Monopoly' sacar un doble tres veces seguidas nos manda a la cárcel (“sin pasar por la casilla de salida”). Esto no ocurre muchas veces; sin embargo, todos los que hemos jugado a esto hemos ido a la cárcel por ese motivo.

La **probabilidad** es una medida de lo factible que es que tenga lugar un determinado suceso.

Para estudiar la probabilidad, debemos introducir algunos nombres. Lo vamos a hacer con ayuda de un caso concreto.

Ejemplo

Imaginemos que tenemos una bolsa con 5 bolas: 2 blancas, 2 rojas y una negra. Hacemos el siguiente **experimento aleatorio**: meter la mano en la bolsa y mirar el color de la bola que ha salido.

Hay 3 *casos* posibles: “que la bola sea blanca”, “que la bola sea roja” o “que la bola sea negra”. Abreviadamente los representaremos por *blanca*, *roja* o *negra* (también podremos representar los colores o escribir B, R o N; recuerda que en matemáticas siempre se debe simplificar, incluso la manera de escribir).

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los casos posibles: {B, R, N}.

Los diferentes **sucesos** son los subconjuntos del espacio muestral. En nuestro ejemplo los sucesos posibles son {B},{R}, {N}, {B,R}, {B,N}, {R,N}, {B,R,N}.

Es seguro que en nuestro experimento la bola que sacamos es “blanca”, “negra” o “roja”. Por eso al espacio muestral se le llama también **suceso seguro**.

Recuerda estos nombres:

Un **experimento aleatorio** es una acción (experimento) cuyo resultado depende del azar.

A cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio le llamaremos **caso** o **suceso individual**.

El conjunto de todos los casos posibles se llama **espacio muestral** o **suceso seguro**.

Un **suceso** es un subconjunto del espacio muestral.

Ejemplos

1. Baraja española de 40 cartas. Experimento: sacamos una carta al azar y miramos su palo.

   Espacio muestral {oros, copas, espadas, bastos}

2. Experimento: lanzamos simultáneamente 1 moneda de euro y una de 2 euros al aire.

   Espacio muestral:{Cara-Cara, Cara-Cruz, Cruz-Cara, Cruz-Cruz}

3. Experimento: lanzamos simultáneamente 2 monedas de 1 euro (indistinguibles)

   Espacio muestral: {Salen 2 caras, Salen 2 cruces, Sale 1 cara y una cruz}

4. Experimento: lanzamos una moneda de 1 euro y apuntamos qué ha salido; la volvemos a lanzar y apuntamos el resultado.

   Espacio muestral: {CC, CX, XC, XX}

5. Experimento: lanzamos simultáneamente dos dados y sumamos los números que se ven en las caras superiores.

   Espacio muestral:{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

6. Experimento: lanzamos un dado usual y sumamos los números que aparecen en la cara superior y la cara inferior (la que no se ve, que está sobre la mesa).
   Espacio de sucesos: {7}

En los ejemplos anteriores, (2) y (4) son equivalentes: los posibles resultados del lanzamiento de 2 monedas que se distinguen son los mismos que los del lanzamiento de una misma moneda dos veces (por ejemplo, equiparamos el resultado del lanzamiento de la moneda de 1 euro del ejemplo 3 con el primer lanzamiento de la moneda del ejemplo 4 y el resultado del lanzamiento de la moneda de 2 euros con el segundo lanzamiento).
En el experimento 6 siempre sale el mismo resultado (por alguna razón los puntos en los dados usuales se distribuyen siempre de modo que las caras opuestas suman 7). Técnicamente éste no es un experimento aleatorio, puesto que el resultado no depende del azar.

Actividades propuestas

5. Para cada uno de los ejemplos 1 a 5 anteriores indica 3 sucesos diferentes que no sean sucesos individuales.

6. En una bolsa tenemos 10 bolas rojas numeradas del 1 al 10. Se hacen los dos experimentos siguientes:

EXPERIMENTO A: Se saca una bola de la bolsa y se mira su color.

EXPERIMENTO B: Se saca una bola de la bolsa y se mira su número.

¿Cuál de estos experimentos no es un experimento aleatorio? ¿Por qué?

Para el experimento que sí es un experimento aleatorio indica su espacio muestral.

7. Una baraja francesa tiene 52 cartas, distribuidas en 13 cartas de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Las picas y los tréboles son cartas negras mientras que los corazones y los diamantes son cartas rojas. Se mezcla la baraja, se corta y se hace el siguiente experimento: coger las dos cartas que han quedado arriba del todo y observar de qué color son.

Describe el espacio muestral.

4.2. Cálculo de probabilidades

Ya hemos indicado que la probabilidad es una medida que nos indica el grado de confianza de que ocurra un determinado suceso.

La **probabilidad** se expresa mediante un número comprendido entre 0 y 1.

Si ese número está próximo a 0 diremos que es un suceso improbable (ojo, improbable no quiere decir que sea imposible), mientras que si está próximo a 1 diremos que ese suceso será mucho más probable.

Ejemplo

En una bolsa que contiene 20 bolas blancas introducimos una bola negra (indistinguible al tacto). Mezclamos bien las bolas de la bolsa, y realizamos el experimento consistente en meter la mano en la bolsa y sacar una bola.

Sin que hayamos estudiado nada formalmente sobre probabilidad. ¿Qué piensas que es más probable, que la bola sacada es blanca o que es negra? Estaremos de acuerdo en que es más probable sacar una bola blanca.

Ahora ya sí que podemos plantearnos una pregunta: ¿En qué medida es más probable sacar una bola blanca?

No es difícil de calcular. Los datos que tenemos son los siguientes

- la bolsa tiene 21 bolas
- 1 bola es negra
- 20 bolas son blancas

La probabilidad de sacar la bola negra es 1 de entre 21. La probabilidad de sacar una bola blanca es de 20 entre 21.

Lo que acabamos de utilizar es conocido como **Ley de Laplace.** Si todos los casos de un espacio muestral son **equiprobables** (esto es, tienen la misma probabilidad de ocurrir), y S es un suceso de ese experimento aleatorio se tiene que

$$P(S) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } S}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo

Mezclamos una baraja española de 40 cartas (los palos son oros, copas, espadas y bastos y en cada palo hay cartas numeradas del 1 al 7 además de una sota, un caballo y un rey).

Se realiza el experimento consistente en *cortar la baraja y quedarnos con la carta superior*.

Consideraremos los siguientes sucesos:

1) Obtener una figura
2) Obtener una carta con un número impar
3) Obtener una carta de espadas
4) Obtener una carta de espadas o una figura
5) Obtener la sota de oros

En principio las cartas no van a estar marcadas, con lo que la probabilidad de que salga cada una de ellas es la misma. Esto es, estamos ante un experimento aleatorio con todos los casos equiprobables.

1) En la baraja hay 12 figuras (3 por cada palo). Así

   Casos favorables: 12

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 12/40= 3/10

2) Por cada palo hay 4 cartas con números impares: 1, 3, 5 y 7.

   Casos favorables: 16

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 16/40=2/5

3) Hay 10 cartas de espadas en la baraja

   Casos favorables: 10

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 10/40=1/4

4) Hay 10 cartas de espadas y además otras 9 figuras que no son de espadas (claro, las 3 figuras de espadas ya las hemos contado).

   Casos favorables: 19

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 19/40

5) Solo hay una sota de oros

   Casos favorables: 1

   Casos posibles: 40

   Probabilidad: 1/40

El que es capaz de calcular probabilidades rápidamente tiene ventaja en algunos juegos en los que se mezcla azar con estrategia. Por ejemplo, juegos de cartas o de dominó. Si sabemos qué cartas o fichas se han jugado podemos estimar la probabilidad de que otro jugador tenga una determinada jugada. Obviamente en esos casos no *cuantificamos* (no hacemos los cálculos exactos) pero sí que *estimamos* si tenemos la probabilidad a nuestro favor o en nuestra contra.

Para aprender más…

Jerónimo Cardano (1501-1576) fue un personaje inquieto y prolífico. Además de dedicarse a las matemáticas era médico, pero también era un jugador. De hecho él fue quien escribió el primer trabajo que se conoce sobre juegos de azar. Un siglo después el Caballero de Meré, un conocido jugador, planteó a Blas Pascal diversos problemas que le aparecían en sus partidas. Uno de los problemas que le planteó es el del reparto de las ganancias cuando una partida se tiene que interrumpir. Este problema ya había sido tratado con anterioridad por Luca Pacioli (el matemático que inventó la tabla de doble entrada para ayudar a los Medici a llevar la contabilidad de su Banca).

El problema enunciado y resuelto por Pacioli es éste:

Dos equipos juegan a la pelota de modo que gana el juego el primer equipo que gana 6 partidos. La apuesta es de 22 ducados, que se los llevará el ganador. Por algún motivo hay que interrumpir el juego cuando un equipo ha ganado 5 partidos y el otro 3. Se quiere saber cómo repartir los 22 ducados de la apuesta, de un modo justo.

¡Piénsalo!

A pesar de haber pasado a la historia de las matemáticas, la solución que dio Pacioli a este problema hoy no se consideraría correcta por no tener en cuenta la probabilidad. ¿Qué propones tú? Este es un problema curioso, porque no tenemos todos los datos ni conocemos las probabilidades que intervienen en su resolución, pero es un bonito ejemplo para pensar en equipo y discutir sobre el tema. Decir qué es y qué no es justo es muy complicado.

Actividades resueltas

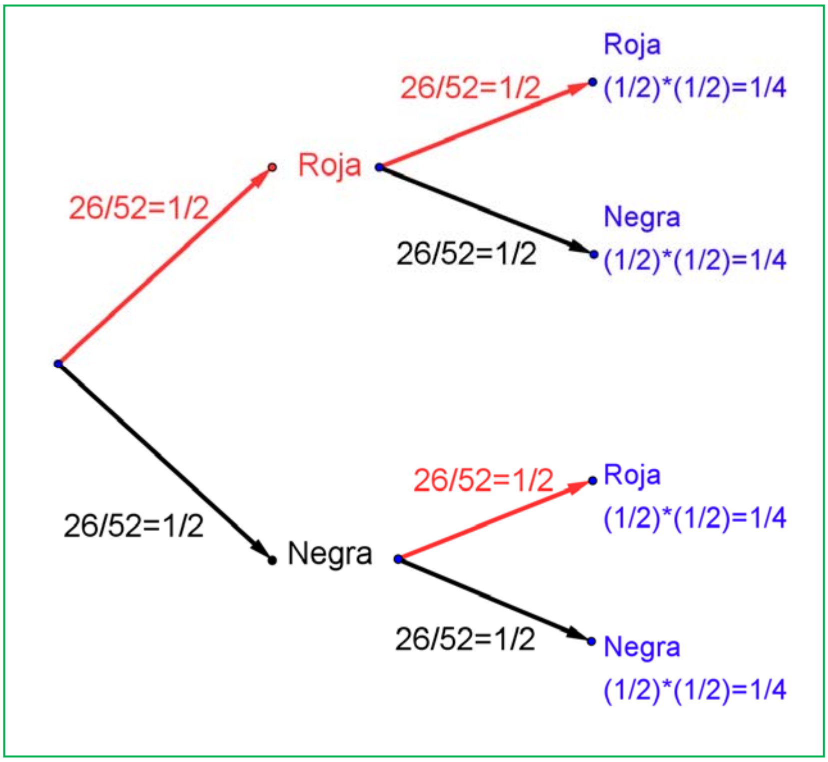
Una bolsa de bolas contiene 26 negras y 26 rojas. Se mezcla el contenido de la bolsa, se mete la mano y se saca una bola, se mira el color y se devuelve a la bolsa. A continuación se saca otra bola y se mira el color. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan salido una bola roja y una bola negra?

Antes de seguir leyendo, piénsalo. Si te equivocas no pasa nada: el sentido de probabilidad no lo tenemos demasiado desarrollado, pero este es el momento de hacerlo.

Este problema lo hemos planteado muchas veces a otros estudiantes. Algunos dicen que la probabilidad es 1/3 porque hay 3 casos posibles: Roja-Roja, Negra-Negra y Roja-Negra. Esa respuesta no es correcta.

En realidad el suceso *sacar una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra y Negra-Roja. Dependiendo de cómo hubiésemos escrito el espacio muestral o de cómo hubiésemos planteado el problema ese detalle se podría ver con mayor o menor claridad.

Así, la probabilidad de sacar una bola de cada color es, en realidad 1/2.



Si no te lo crees puedes hacer un experimento: será difícil que tengas 26 bolas negras y 26 bolas rojas, pero sí que es fácil que tengas una baraja francesa. Mézclala, corta y mira el color de la carta que ha quedado arriba en el montón. Apúntalo. Vuelve a dejar las cartas en el mazo, vuelve a mezclar, corta de nuevo y mira el color de la carta que ha quedado arriba ahora. Apunta los colores. Repite este experimento muchas veces: 20, 50 o 100.

Si tienes en cuenta los resultados verás que, aproximadamente, la mitad de las veces las dos cartas son del mismo color y la otra mitad las cartas son de colores diferentes. Con eso, hemos podido "comprobar" que la probabilidad de ese suceso era 1/2.

Otra forma que te puede ayudar a razonar sobre este problema, y otros muchos de probabilidad, es confeccionar un **diagrama en árbol**. La primera bola que sacamos tiene una probabilidad de ser Roja igual a 26/52 = 1/2. Ese número lo escribimos en la rama del árbol. Si devolvemos a la bolsa la bola y volvemos a sacar otra bola de la bolsa, la probabilidad de que sea Roja vuelve a ser 26/52 = 1/2. Completamos con idéntico razonamiento el resto de las ramas.

La probabilidad de que las dos bolas que hayamos sacado sean rojas es el producto de sus ramas: (1/2)·(1/2) = 1/4. Igual probabilidad obtenemos para los sucesos Negra-Negra, Negra-Roja y Roja-Negra. La probabilidad de Roja-Negra es por tanto 1/4, igual a la de Negra-Roja. Como son sucesos elementales la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es la suma: 1/4 + 1/4 = 1/2.

4.3. Probabilidad y frecuencia relativa

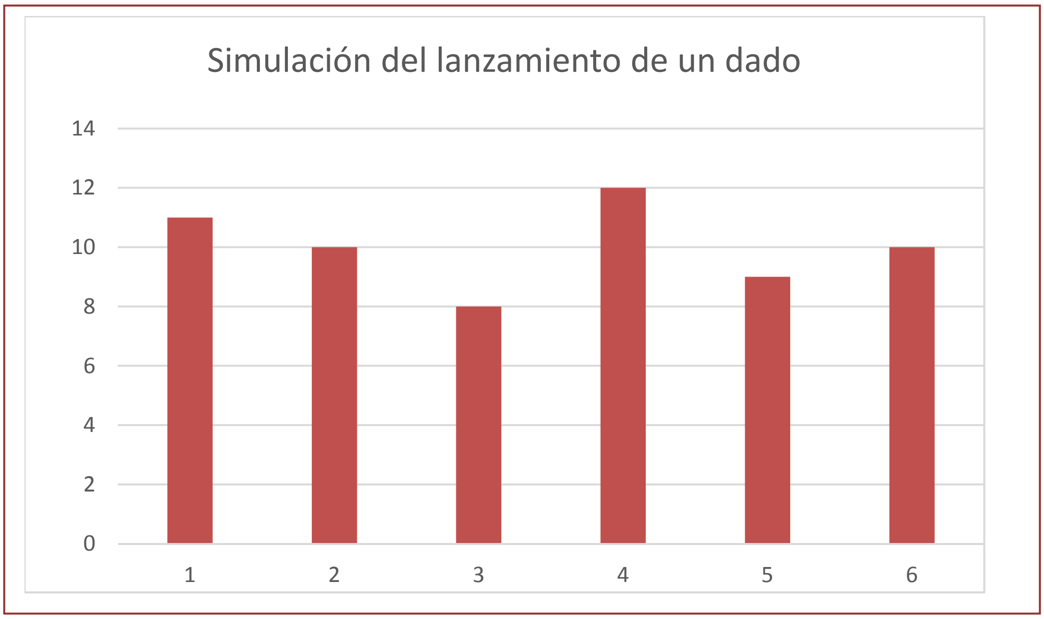
Al principio del capítulo, cuando introducíamos los principales conceptos estadísticos, hablábamos de la frecuencia. A esa frecuencia se le llama **frecuencia absoluta** para distinguirla de otro concepto, que es mucho más próximo a la probabilidad.

Llamaremos **frecuencia relativa** de un resultado de un experimento aleatorio a su frecuencia absoluta dividido entre el número de repeticiones del experimento.

Ejemplo

Tira un dado 60 veces, copia esta tabla en tu cuaderno y apunta lo que sale:

Si dibujas un diagrama de barras con los resultados del experimento obtendrás algo parecido a esto:

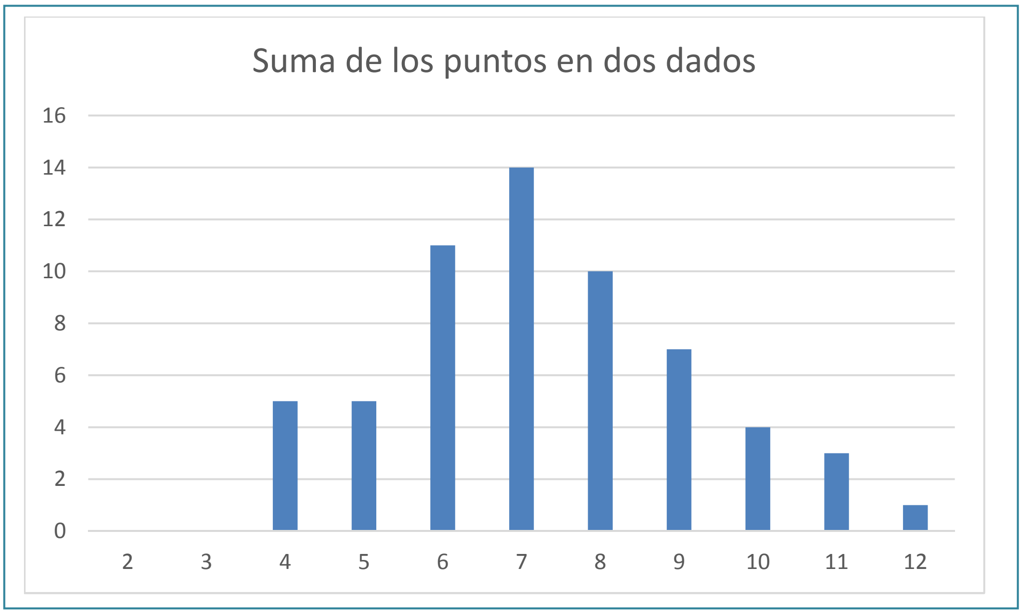


La frecuencia relativa de cada uno de los casos es bastante parecida a la probabilidad de ese caso (que es 1/6).

Ejemplo.

Haz ahora otro experimento: tira 2 dados 60 veces y apunta la suma de los valores de los dos dados en esta tabla.

Dibuja ahora un diagrama de barras. Lo que obtendrás será algo parecido a esto:



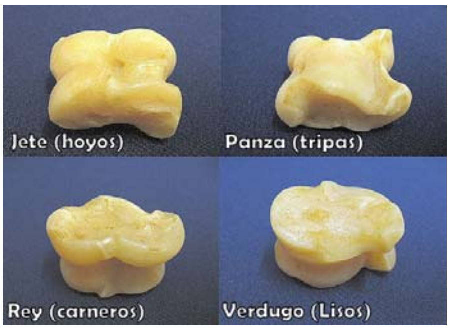
Si la probabilidad "se tiene que parecer" a las frecuencias relativas, en este caso vemos que el suceso *que la suma dé 7* es más probable que cualquiera de los demás. Y mucho más probable que *que la suma dé 2* o *que la suma dé 12*.

La **ley de los grandes números** nos dice que cuando se repite muchas veces un experimento aleatorio la frecuencia relativa de cada suceso S se aproxima a su probabilidad. Cuanto más grande sea el número de repeticiones, mejor va siendo la aproximación.

En este caso lo útil es utilizar las frecuencias relativas para estimar probabilidades cuando éstas no son conocidas.

Actividades propuestas

8. En algunos lugares de España se sigue jugando a la taba. La taba es un hueso de cordero que no es regular. Puede caer en cuatro posiciones distintas. Podemos pensar en ella como si fuese un dado "raro".



(Imagen: Wikimedia Commons)

Considera el experimento "lanzar la taba al aire y ver lo que marca su cara superior: hoyo, panza, rey y verdugo".

Aproxima la probabilidad de cada uno de los casos de este experimento aleatorio.

9. Tu calculadora probablemente tendrá una función que sirve para generar números aleatorios. Normalmente da un número comprendido entre 0 y 1.

Realiza el experimento aleatorio "genera un número aleatorio y apunta su segundo decimal". Haz 40 repeticiones de este experimento. Dibuja un histograma de frecuencias.

10. La probabilidad no es un concepto intuitivo. Para ello vamos a hacer una prueba. Consideraremos el experimento aleatorio *lanzar una moneda*. Copia la tabla en tu cuaderno

- Escribe en la 1ª fila de esta tabla lo que tú crees que saldría al repetir el experimento 30 veces. Piénsalo y rellena la tabla. Como tú quieras (invéntatelo, pero "con sentido").
- En la 2ª fila de la tabla escribe el resultado real de 30 lanzamientos de la moneda.

¿Qué observas en ambos casos? ¿Alguna pauta? Presta atención a estas cuestiones para cada una de las filas de la tabla.

¿Hay más o menos 15 caras y 15 cruces?
¿Aparecen grupos seguidos de caras o de cruces?
¿Cuál es el mayor número de caras que han salido seguidas? ¿Y el de cruces?

Normalmente cuando "te inventas" los resultados sí sueles poner la mitad de caras y la mitad de cruces. En un experimento aleatorio estos números están cerca de la mitad pero no suelen ser la mitad exacta.
Cuando te lo inventas, en general pones pocos grupos seguidos de caras o cruces.

El cerebro nos engaña y en temas probabilísticos tenemos que educarlo mucho más. Por eso este tema es muy importante, aunque sea el que muchas veces se queda sin dar. Nos ayuda a que, como ciudadanos, no nos engañen. Ni con loterías, ni con cartas, ni con estadísticas electorales.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Estadística

1. Se han recogido los datos sobre el número de hijos que tienen 20 matrimonios. ¿Cómo es la variable utilizada? Escribe una tabla de frecuencias de los datos recogidos y representa los datos en un diagrama de sectores:

3, 1, 1, 2, 0, 2, 3, 1, 1, 1, 1, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 3.

2. Con los datos del problema anterior calcula la media, la mediana, la moda y los cuartiles.

3. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza, la desviación típica y el intervalo intercuartílico.

4. Representa esos datos en un diagrama de cajas.

5. La siguiente tabla expresa las estaturas, en metros, de 1000 soldados:

Talla	1,50 – 1,56	1,56 – 1,62	1,62 – 1,68	1,68 - 1,74	1,74 - 1,80	1,80-1,92
Nº de soldados	10	140	210	340	210	90

a) Representa los datos en un histograma.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) Determina el intervalo donde se encuentran la mediana.

6. Se pregunta a un grupo de personas por el número de televisores que hay en su hogar y los resultados son:

Número de televisores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de hogares	2	27	15	4	2	1

¿Qué tipo de variables es? Representa los datos en la representación que te parezca más adecuada.

Calcula la media y la desviación típica-

7. Con los datos del problema anterior calcula la mediana y el intervalo intercuartílico.

8. En un centro escolar se ha recogido información sobre el número de ordenadores en las casas de 100 familias y se han obtenido los siguientes resultados:

Número ordenadores	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de familias:	24	60	14	1	1

Representa los datos en un diagrama de barras y calcula la media, la mediana y la moda.

9. Con los datos del problema anterior calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica. Haz un diagrama de cajas.

10. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de personas:	13	18	7	5	7

Representa los datos en un diagrama de sectores y calcula la media, la mediana y la moda.

11. Se pregunta a un grupo de personas por el número de veces que han visitado al dentista en el último año. Las respuestas obtenidas se recogen en la siguiente tabla:

Número de visitas:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Número de personas:	13	18	7	5	7

Calcula el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

12. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por grupo parlamentario (DM: demócrata – cristianos; S: socialistas; L: Liberales; V: verdes; C: conservadores; I: izquierda unitaria; LD: Libertad y democracia; NI: No inscritos; Otros).

Partidos	**DM**	**S**	**L**	**V**	**C**	**I**	**LD**	**NI**	**Otros**	**Total**
Escaños	213	190	64	52	46	42	38	41	65	751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla?

13. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes escaños por alguno de los estados miembro:

Estado	**Alemania**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Polonia**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Otros**	**Total**
Escaños	96	54	74	73	51	73	21	21		751

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Determina el número de escaños de los otros países miembros de la Unión Europea.

14. En las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	**Alemania**	**España**	**Francia**	**Italia**	**Reino Unido**	**Portugal**	**Grecia**	**Bélgica**	**% total**
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

¿Qué representación de los datos te parece más adecuada? ¿Puedes calcular la media o el rango? ¿Qué tipo de variables es la de la tabla? Ordena a los países de mayor a menos porcentaje de votantes en las elecciones de 2014.

15. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004’ 2009’ 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

Representa en un polígono de frecuencias los porcentajes de participación del total de los estados miembros.

16. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

Separa los Estados Miembros en dos grupos, los que tuvieron un porcentaje superior al porcentaje medio y los que lo tuvieron menor en 2004. Haz lo mismo para 2014. ¿Son los mismos? Analiza el resultado.

17. Con los datos del problema anterior sobre las elecciones de 2004, 2009, 2014 al Parlamento Europeo se obtuvieron los siguientes porcentajes de votos por algunos de los estados miembros:

Estado	Alemania	España	Francia	Italia	Reino Unido	Portugal	Grecia	Bélgica	% total
2004	43	45’14	42’76	71’72	38’52	38’6	63’22	90’81	45’47
2009	43’27	44’87	40’63	65’05	34’7	36’77	52’61	90’39	43
2014	47’6	45’9	43’5	60	36	34’5	58’2	90	43’09

Calcula el porcentaje de participación medio para Alemania en esas tres convocatorias y la desviación típica. Lo mismo para España, para Bélgica y para Portugal.

18. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

Censo	Total de votantes	Abstención	Votos nulos	Votos en blanco
35.379.097	15.920.815	19.458.282	290.189	357.339

Representa en un diagrama de sectores estos datos. Haz una tabla de porcentajes: el censo es el 100 %. Determina los otros porcentajes. ¿Consideras que ha ganado la abstención?

19. En las elecciones de 2014 al Parlamento Europeo los resultados de España han sido:

PP	PSOE	Izquierda plural	Podemos	UPyD	Otros	Total de votantes
4.074.363	8.001.754	1.562.567	1.245.948	1.015.994		15.920.815

Determina el número de votos de los otros partidos. Representa en un diagrama de barras estos datos. Haz una tabla de porcentajes para cada partido. Tienes que distribuir 54 escaños, ¿cómo los distribuirías por partidos?

Probabilidad

20. Se considera el experimento aleatorio de tirar un dado dos veces. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Sacar algún 1.

b) La suma de los dígitos es 8.

c) No sacar ningún 2.

d) Sacar algún 1 o bien no sacar ningún 2.

21. Se considera el experimento aleatorio sacar dos cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de:

a) Sacar algún rey.

b) Obtener al menos un basto.

c) No obtener ningún basto.

d) No obtener el rey de bastos.

e) Sacar alguna figura: sota, caballo, rey o as.

f) No sacar ninguna figura.

22. Se considera el experimento aleatorio de tirar una moneda tres veces. Calcula las probabilidades siguientes:

a) Sacar cara en la primera tirada.
b) Sacar cara en la segunda tirada.
c) Sacar cara en la tercera tirada.
b) Sacar alguna cara.
c) No sacar ninguna cara.
d) Sacar tres caras.

23. Con una baraja española se hace el experimento de sacar tres cartas, con reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de sacar tres reyes? Y si el experimento se hace sin reemplazo, ¿cuál es ahora la probabilidad de tener 3 reyes?

24. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas con reemplazo. Determina la probabilidad de que:

a) Las dos sean negras.
b) Haya al menos una negra.
c) Ninguna sea negra.

25. En una urna hay 6 bolas blancas y 14 bolas negras. Se sacan dos bolas sin reemplazo. Determina la probabilidad de que:

a) Las dos sean negras.
b) Haya al menos una negra.
c) Ninguna sea negra.
d) Compara los resultados con los de la actividad anterior.

26. Al lanzar cuatro monedas al aire,

a) ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro sean caras?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo sumo tres caras?
c) ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente 3 caras?

27. Dos tiradores al plato tienen unas marcas ya conocidas. El primero acierta con una probabilidad de 0,7 y el segundo de 0,5. Se lanza un plato y ambos disparan. Expresa mediante un diagrama de árbol y las distintas posibilidades: a) ¿Qué probabilidad hay de que uno de los tiradores dé en el plato? b) Calcula la probabilidad de que ninguno acierte. c) Calcula la probabilidad de que los dos acierten.

28. Se lanza una moneda hasta que aparezca cara dos veces seguidas. a) Calcula la probabilidad de que la experiencia termine en el segundo lanzamiento. b) Calcula la probabilidad de que termine en el tercer lanzamiento.

29. En el lanzamiento de naves espaciales se han instalado tres dispositivos de seguridad A, B y C. Si falla A se pone automáticamente en marcha el dispositivo B, y si falla este, se pone en marcha C. Se sabe que la probabilidad de que falle A es 0,1, la probabilidad de que B funcione es 0,98 y la probabilidad de que falle C es 0,05. Calcula la probabilidad de que todo funcione bien.

30. Se hace un estudio sobre los incendios forestales de una zona y se comprueba que el 40 % son intencionados, el 50 % se deben a negligencias y el 10 % a causas naturales. Se han producido tres incendios, a) ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno haya sido intencionado? b) Probabilidad de que los tres incendios se deban a causas naturales. c) Probabilidad de que ningún incendio sea por negligencias.

31. Se lanza dos veces un dado equilibrado con seis caras. Hallar la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

32. Se sabe que se han eliminado varias cartas de una baraja española que tiene cuarenta. La probabilidad de extraer un as entre las que quedan 0,12, la probabilidad de que salga una copa es 0,08 y la probabilidad de que no sea ni as ni copa es 0.84.

Calcular la probabilidad de que la carta sea el as de copas. ¿Se puede afirmar que entre las cartas que no se han eliminado está el as de copas?

33. Una persona despistada tiene ocho calcetines negros, seis azules y cuatro rojos, todos ellos sueltos. Un día con mucha prisa, elige dos calcetines al azar. Hallar la probabilidad de:

a) que los calcetines sean negros.
b) que los dos calcetines sean del mismo color.
c) que al menos uno de ellos sea rojo.
d) que uno sea negro y el otro no.

34. Tres personas viajan en un coche. Si se supone que la probabilidad de nacer en cualquier día del año es la misma y sabemos que ninguno ha nacido en un año bisiesto,

a) hallar la probabilidad de que solamente una de ellas celebre su cumpleaños ese día.
b) calcular la probabilidad de que al menos dos cumplan años ese día.

AUTOEVALUACIÓN

1. Se hace un estudio sobre el color que prefieren los habitantes de un país para un coche. La variable utilizada es:

a) cuantitativa b) cualitativa c) cuantitativa discreta d) cuantitativa continua

2. En un histograma de frecuencias la altura de los rectángulos es:

a) proporcional al área b) igual a la frecuencia absoluta

c) proporcional a la frecuencia relativa d) proporcional a la frecuencia acumulada

3. Ana ha obtenido en Matemáticas las siguientes notas: 7, 8, 5, 10, 8, 10, 9 y 7. Su nota media es de:

a) 7,6 b) 8,2 c) 8 d) 9

4. En las notas anteriores de Ana la mediana es:

a) 9 b) 8 c) 7,5 d) 8,5

5. En las notas anteriores de Ana la moda es:

a) 10 b) 8 c) 7 d) 7, 8 y 10

6. El espacio muestral de sucesos elementales equiprobables del experimento "tirar dos monedas y contar el número de caras" es:

a) {2C, 1C, 0C} b) {CC, CX, XC, XX} c) {XX, XC, CC} d) {CC, CX, XC, CC}

7. Tiramos dos dados y contamos los puntos de las caras superiores. La probabilidad de que la suma sea 7 es:

a) 1/6 b) 7/36 c) 5/36 d) 3/36

8. Al sacar una carta de una baraja española (de 40 cartas), la probabilidad de que sea un oro o bien un rey es:

a) 14/40 b) 13/40 c) 12/40 d) 15/40

9. En una bolsa hay 7 bolas rojas, 2 negras y 1 bola blanca. Se sacan 2 bolas. La probabilidad de que las dos sean rojas es:

a) 49/100 b) 42/100 c) 49/90 d) 7/15

10. Tiramos tres monedas al aire. La probabilidad de que las tres al caer sean caras es:

a) 1/5 b) 1/7 c) 1/8 d) 1/6