



APUNTES DE  
PROCESOS E  
INSTRUMENTOS  
MATEMÁTICOS  
GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 1  
*Números naturales y  
enteros*

Educación de adultos  
Curso 2017/18



## Unidad Didáctica 1 Números naturales y enteros

### 1. Los números naturales

Los números naturales surgieron de la necesidad de contar colecciones o conjuntos. Denotamos por  $\mathbf{N}$  el conjunto de los números naturales, admitiendo el 0 como número natural.

$$\mathbf{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$$

En este conjunto las operaciones suma y producto de números naturales son internas, es decir, si sumamos o multiplicamos dos números naturales entonces el resultado es un número natural. Sin embargo, no ocurre lo mismo con las operaciones resta y división. Por ello, necesitamos ampliar este conjunto de números.

#### Sabías que...

##### *Códigos de barras*

Los productos vendidos al por menor fuera de EEUU y Canadá tienen el código de barras EAN estándar. La sigla "EAN" significa Número Europeo de Artículo. Los productos en venta al por menor vendidos dentro de EEUU y Canadá tienen el código de barras UPC, que significa código universal de producto.

##### *Código de barras real*



##### *Código de barras ficticio*

	Número del país	Número Empresa	Número del producto	Carácter de control
	<b>84</b>	<b>12345</b>	<b>67890</b>	<b>0</b>
	España	Empresa, S.A. Plaza España, S/N Zaragoza	Melocotón en almibar 500 g.	Código de seguridad
Origen del número	Asociación europea de codificación de productos EAN	Asociación española de codificación comercial (AECOC)	Industrial o fabricante	Algoritmo matemático

[https://www.codigoean.com/calculadora\\_del\\_digito\\_control.php](https://www.codigoean.com/calculadora_del_digito_control.php)

CÓDIGO DE BARRAS. EAN 13													
Posición	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Valores	8	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
Corrector	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	
Valor x corrector	8	12	1	6	3	12	5	18	7	24	9	0	Suma (control)

1.- Multiplicamos por 1 las posiciones impares y por 3 las posiciones pares del código, empezando de izquierda a derecha.

2.- Sumamos los valores resultantes.

$$8 + 12 + 1 + 6 + 3 + 12 + 5 + 18 + 7 + 24 + 9 + 0 = 105$$

3.- Restamos de la decena superior el valor de la suma de los valores resultantes. El resultado de esta operación es el valor del código de control (primera posición de la derecha del código de barras). Si el resultado es 0 el dígito de control será 0.

En nuestro ejemplo la decena superior a 105 es 110, por tanto:

$$110 - 105 = 5 \implies 5 \text{ es el valor del código de control.}$$

Otra posibilidad es dividir la suma resultante (105) entre 10, siendo el

resto de esta división el valor del dígito de control:  $105 / 10 = 10$  de cociente y 5 de resto.

El resultado final del código es: 84

12345 67890 **5** (EAN-13).

### Sabías que...

El sistema de matrículas actual en España es una combinación de cuatro números (del 0000 al 9999) y tres letras (comenzado por BBB y terminando por ZZZ), excluidas las vocales, la

Ñ y la Q. 

### Ejercicios

1. Comprueba el dígito de control del siguiente código de barras:



## 2. Jerarquía de las operaciones

Cuando mezclamos las operaciones, éstas se deben resolver en un orden.

Primero. Paréntesis, corchetes y llaves. (Se simplifica al máximo las operaciones que están dentro).

Segundo. Potencias

Tercero. Multiplicaciones y divisiones

Cuarto. Sumas y restas.

Las expresiones se leen de izquierda a derecha. Es decir, si tenemos una multiplicación y una división se realizará primero la operación que está más a la izquierda. Si tenemos sólo sumas y restas se realizará en primer lugar la operación que quede más a la izquierda.

**Ejemplo:**

Resuelve

$$3 \cdot 5 - 4 : 2 + 5^2 - 3 + 4 \cdot 2$$

Solución:

$3 \cdot 5 - 4 : 2 + 25 - 3 + 4 \cdot 2$	<i>Efectuamos en primer lugar la potencia</i>
$15 - 2 + 25 - 3 + 8$	<i>Realizamos las multiplicaciones y divisiones.</i>
43	<i>Y por último, las sumas y las restas</i>

**Ejercicios**

**2.** Calcula

a) $30 - 2 \cdot (5 + 7)$	=	<input type="text"/>
b) $3 \cdot 4 - 6 \cdot (10 - 4 \cdot 2)$	=	<input type="text"/>
c) $15 + 4 \cdot (3 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 2)$	=	<input type="text"/>
d) $8 + 7 \cdot 2 - 3 \cdot (9 - 5) + 3 \cdot 4$	=	<input type="text"/>

**3. Los números enteros**

En la vida cotidiana utilizamos el signo negativo. Por ejemplo en los botones del ascensor, para indicar temperaturas y para indicar que debemos una cierta cantidad de dinero.

Por tanteo intenta calcular el valor de  $x$  que satisface la igualdad:

$$x + 8 = 5$$

Habrás observado que no existe ningún número natural que sumándole 8 dé como resultado 5.

Esta ecuación tiene solución en el conjunto de números enteros.

Denotamos por  $\mathbf{Z}$  el conjunto de números enteros.

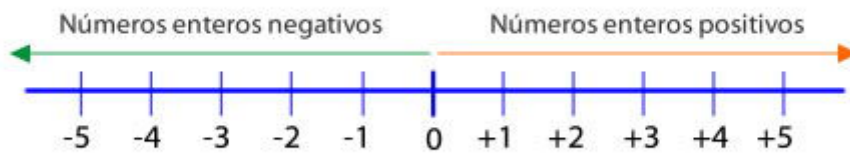
$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Los números enteros se utilizan para contar o medir magnitudes con signos. Por ejemplo, la temperatura, la velocidad, la aceleración, el número de planta,...

Así, el conjunto de números enteros está formado por enteros positivos, negativos y el cero. Los enteros no negativos se identifican con el conjunto de números naturales.

**Representación gráfica**

Los números enteros se representan sobre la recta graduada de forma que un número mayor que otro se representa a la derecha.



**Ejercicios**

3. En la siguiente tabla se muestran algunas situaciones descritas con números enteros. Asigna el número entero correspondiente.

Situación	Nº Entero
La temperatura ambiente es de 2º bajo cero	
La temperatura ambiente es de 2º sobre cero	
La ciudad se encuentra a 800 m sobre el nivel del mar	
El buzo está nadando a 20 m de profundidad	
Estamos justo al nivel del mar	
Julián tiene una deuda de \$5.000	
El avión está volando a 9.500 metros de altura	
El saldo deudor de la libreta de ahorro es de \$12.356	
Los termómetros marcaron una temperatura de 3º bajo cero	
Latitud de la línea del ecuador	
La altura del monte Aconcagua es de 7.010 metros	
La profundidad de la fosa marina es de 10.882 metros	

Marisa debe 11.650 €	
Andrés tiene 3.580 €	
El submarino está a 35 metros bajo el nivel del mar.	

### Conceptos

- 1) ¿Qué significa **valor absoluto** de un número entero?
- 2) ¿Qué significa **opuesto** de un número entero?

Se llama valor absoluto de un número a la distancia de dicho número al punto de origen o cero en la representación en la recta numérica. Para representar el valor absoluto se utilizan dos barras verticales.

El valor absoluto de -8 es igual a 8

$$|-8| = 8$$

El valor absoluto de +4 es igual a 4

$$|+4| = 4$$

El **opuesto de un número entero** es su simétrico respecto del número cero en la recta numérica. Por ejemplo, a distancia de tres unidades comenzando en la posición del cero tenemos dos números 3 y -3.

Por lo tanto, decimos que 3 es el opuesto de -3 y que -3 es el opuesto de 3.

Escribimos:

$$-(-3) = 3$$

Por lo tanto, el opuesto del opuesto de un número es el mismo número.

## 4. Operaciones con números enteros

### Suma de números enteros

**Para sumar valores del mismo signo** se suman los valores absolutos de los números y se deja el mismo signo.

**Ejemplos:**

$$(+2) + (+3) = +5$$

$$(-2) + (-4) = -6$$

**Para sumar valores de distinto signo** se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto.

**Ejemplos:**

$$(-4) + (+10) = +6$$

$$(-17) + (+10) = -7$$

**Forma reducida** de una suma de números enteros:

Cuando tengamos  $(-3)+(+1)$  podemos escribir simplemente  $-3+1$  que es la forma reducida de la expresión anterior.

### Ejercicios

4. Expresa en la forma reducida y calcula:

$(-3) + (+1) =$		$(+6) + (+9) =$	
$(+4) + (+7) =$		$(+5) + (-8) =$	
$(-23) + (10) =$		$(-2) + (+1) =$	
$(+5) + (+5) =$		$(+9) + (-2) =$	
$(-3) + (+7) =$		$(+5) + (+8) =$	

### Resta de números enteros

La resta de números enteros es el resultado de sumar al primer entero el opuesto del segundo entero. Es decir,

$$(+3) - (+4) = (+3) + (-4) = 3 - 4 = -1$$

La forma reducida de  $(+3) - (+4)$  es  $3 - 4$

### Ejercicios

5. Expresa en la forma reducida y calcula:

$(+9) - (+5) =$		$(+8) - (-5) =$	
$(-15) - (-3) =$		$(-1) - (-13) =$	
$(-8) - (+4) =$		$(+7) - (+5) =$	
$(+3) - (-7) =$		$(-5) - (+8) =$	
$(-11) - (+6) =$		$(+9) - (-9) =$	

### Producto de números enteros

Se multiplican los valores absolutos de los números y se añade el signo + o - según la regla de los signos:

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (+) \cdot (-) &= (-) \\ (-) \cdot (+) &= (-) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \end{aligned}$$

**División de números enteros**

Se dividen los valores absolutos de los números y se añade el signo + o – según la regla de los signos:

La división de dos números enteros no es siempre un número entero.

$$\begin{aligned} \frac{(+)}{(+)} &= (+) & \frac{(-)}{(+)} &= (-) \\ \frac{(+)}{(-)} &= (-) & \frac{(-)}{(-)} &= (+) \end{aligned}$$

**Ejercicios**

6. Calcula:

$(+ 4) \cdot (- 2) =$		$(- 8) : (+ 2) =$	
$(- 7) \cdot (+ 3) =$		$(- 15) : (- 3) =$	
$(+ 5) \cdot (+ 1) =$		$(+ 4) : (+ 1) =$	
$(- 3) \cdot (+ 8) =$		$(+ 10) : (- 2) =$	

7. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones. Haz el cálculo en varios pasos. Fíjate en la posición de los paréntesis.

a) $6 - (5 - (2 - 3 + 5) - 1)$	b) $16 - (6 + (5 - 7) - (3 - 1))$
c) $6 - (5 - (2 - 3) + 5 - 1)$	d) $16 - (6 + 5 + (-7 - 3) - (3 - 1))$
e) $7 - (6 - (-5 + 4) - 2) + 1$	f) $-(4 - 3) + 2 - (1 - (4 + 2) - 5)$

8. Calcula:

a/  $3 - 4 \cdot (2 + 3)$

$3 - 4 \cdot 5$	←	Paréntesis
	←	Producto
	←	Suma/Resta

b/  $5 + (3 - 4) \cdot (2 + 3)$

		Paréntesis
		Producto
		Suma/Resta



9. Calcula:

a/ $4+6\cdot 7-3\cdot 2+5\cdot(-4)$	b/ $4+6\cdot(7-3\cdot 2)+5\cdot(-4)$
c/ $-1\cdot 5+3\cdot[(-2)\cdot 4-5\cdot 3]+6$	d/ $-1\cdot(5+3)\cdot[(-2)\cdot 4-5\cdot(3+6)]$

**Potencia de base un número entero y exponente un número natural**

La potencia de base un número entero  $a$  y exponente un número natural  $n$  distinto de cero es el número entero que resulta de multiplicar la base por sí misma  $n$  veces, es decir,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

Cuando la base es distinta de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

**Sabías que...**

$0^0$  es una indeterminación matemática

**Ejemplos:**

$(+3)^4 = 81$	$(+6)^3 = 216$	$(-5)^4 = 625$	$(-4)^3 = -64$
---------------	----------------	----------------	----------------

Observa que si la base es un número entero positivo, el signo del resultado de la potencia es siempre positivo.

**Si la base es un número entero negativo, el signo del resultado depende del exponente.**

\*Cuando el exponente es **par** el resultado es positivo y cuando el exponente es **impar** el resultado es negativo

**Ejercicios**

10. Calcula:

a) $(-4)^2$	b) $(-3)^3$
c) $(-4)^0$	d) $(-2)^5$

**5. Divisibilidad**

**Múltiplos y divisores**

Un número entero  $a$  es **múltiplo** de otro número entero  $b$  si existe un número entero  $n$  tal que

$$a = n \cdot b.$$

Cuando  $b$  es distinto de cero se dice que  $b$  es divisor de  $a$ .

Por ejemplo, 3 es divisor de 12 y 12 es múltiplo de 3.

Crterios de divisibilidad
Un número es divisible por 2 si y sólo si acaba en 0 o cifra par.
Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3
Un número es divisible por 5 si y sólo si acaba en 0 o en 5
Un número es divisible por 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan los lugares impares menos la suma de las cifras que ocupan los lugares pares es múltiplo de 11.

**Ejemplo:**

El número 10890

Es divisible por		
2	→	Acaba en 0
3	→	$1 + 0 + 8 + 9 + 0 = 18$
5	→	Acaba en 0
11	→	$(1 + 8 + 0) - (9 + 0) = 0$

**Ejercicios**

¿Divisible por 3?

11.      940      430      115      124      264      517      956  
           244      925      977      487      867      725      907  
           949      941      322      426      677      169      995

¿Divisible por 8 y 6?

- |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 712 | 134 | 209 | 796 | 540 | 731 | 442 | 757 |
| 108 | 282 | 979 | 782 | 182 | 649 | 430 | 132 |
| 161 | 816 | 831 | 673 | 673 | 486 | 579 | 737 |

12. Inventa un número que sea divisible por 11 que tenga 5 cifras.

13. Busca el criterio de divisibilidad del número 7 y del número 13.\*\*

**Número primo** es un número distinto de la unidad que solamente es divisible por el mismo y la unidad. Si un número tiene más de dos divisores se le llama **compuesto**.

**Ejercicios**

14. ¿Qué es la criba de Eratóstenes?\*\*\*

**Descomposición factorial.**

Factorizar un número consiste en expresarlo como producto de factores primos.

**Ejemplos:**

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$495 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

Ejercicios

15. Descompón en factores primos:

$$\begin{array}{r|l} 252 & \\ 252 = & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 132 & \\ 132 = & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 81 & \\ 81 = & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 189 & \\ 189 = & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 144 & \\ 144 = & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & \\ 54 = & \end{array}$$

16. Encuentra un método para hallar de forma rápida la descomposición en factores primos de números que acaben en muchos ceros.

## 6. Máximo común divisor

El **máximo común divisor** (M.C.D) de dos o más números es el mayor de sus divisores comunes.

Para calcular el M.C.D. de dos o más números, se descomponen éstos en sus factores primos y se multiplican los factores comunes elevados a su menor exponente.

Si los números no tienen divisores primos comunes entonces el M.C.D. es la unidad.

**Ejemplos:** Calcula el M.C.D. de 1225 y 490

$$\begin{array}{r|l}
 1225 & 5 \\
 245 & 5 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 1225 = 5^2 \cdot 7^2 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 490 & 2 \\
 245 & 5 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2 & 
 \end{array}$$

$$\text{M.C.D.}(1225,490)=5 \cdot 7^2 = 245$$

Observa que 245 es divisor de ambos números y es el mayor posible.

### Ejercicios

17. Calcula el máximo común divisor de 40 y 50.
18. Calcula el máximo común divisor de 42 y 70.
19. Calcula el máximo común divisor de 100 y 150.
20. Calcula el máximo común divisor de 50, 300 y 180.
21. Calcula el máximo común divisor de 38808 y 847

Indicación:

$$38808 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

$$847 = 11^2 \cdot 7$$

### 7. Mínimo común múltiplo

El **mínimo común múltiplo** (m.c.m.) de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes distintos de cero.

Para calcular el m.c.m. de dos o más números, se descomponen éstos en sus factores primos y se multiplican los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

**Ejemplos:** Calcula el m.c.m. de 1225 y 490

$$\begin{array}{r|l}
 1225 & 5 \\
 245 & 5 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 1225 = 5^2 \cdot 7^2 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 490 & 2 \\
 245 & 5 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2 & 
 \end{array}$$

$$\text{m.c.m.}(1225,490)=2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 2450$$

Observa que 2450 es múltiplo de ambos números y es el menor posible no nulo.

**Ejercicios**

- 22. Calcula el mínimo común múltiplo de 40 y 50.
- 23. Calcula el mínimo común múltiplo de 42 y 70.
- 24. Calcula el mínimo común múltiplo de 100 y 150.
- 25. Calcula el mínimo común múltiplo de 50, 300 y 180.
- 26. Calcula el mínimo común múltiplo de 38808 y 847

Indicación:

$$38808 = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

$$847 = 11^2 \cdot 7$$

- 27. Se quieren envasar en una fábrica de alimentos lácteos 350 litros de leche desnatada, 300 litros de leche semidesnatada y 450 litros de leche entera en envases iguales de la mayor capacidad posible. ¿Qué capacidad deben tener estos envases?
- 28. En dos calles de 144 m y 168 m cada una se quieren plantar árboles que estén igualmente espaciados. ¿Cuál es la mayor distancia posible entre cada árbol?
- 29. María quiere comenzar a vender bombones con lo que aprendió en su taller de chocolatería. Hizo 32 bombones de trufa, 24 de frambuesa y 28 de manjar. ¿Cuántos paquetes con la misma cantidad de bombones de cada tipo puede hacer?
- 30. Diego ha iniciado un tratamiento médico para su alergia. Debe tomar tres medicamentos distintos: unas pastillas, un jarabe y una crema. Las pastillas las debe tomar cada tres horas, el jarabe cada cuatro y la crema aplicarla cada dos horas. Si Diego tomó todos los medicamentos a las 8:00 de la mañana, ¿a qué hora los volverá a tomar todos a la vez?
- 31. En el aeropuerto existen dos líneas aéreas que realizan vuelos a Isla de Pascua durante todo el día. Los aviones de la primera línea aérea, despegan cada 10 minutos y los de la otra despegan cada 15 minutos. Si el primer vuelo de ambas líneas aéreas se realiza a las 7:00 a. m., ¿a qué hora vuelven a despegar juntos los aviones?
- 32. En el almacén tenemos 100 cartones de zumo, 60 piezas de fruta y 40 bocadillos. Queremos guardarlos en cajas con el mismo número de objetos. ¿Cuántos artículos habrá en cada caja? ¿Cuántas cajas harán falta?

**Sabías que...**

**LETRA DEL D.N.I. O DEL N.I.F.**

La letra de tu D.N.I. no se pone al azar. A cada número del D.N.I. le corresponde una letra según un algoritmo que veremos a continuación. Para saberla haz lo siguiente:

Algoritmo para hallar la letra del D.N.I.

- 1. Haz la división entera del número del D.N.I. entre 23.
- 2. A cada resto se le asocia una letra según la tabla siguiente.

RESTO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----



b) Del número 11.

42. Calcula, escribiendo los pasos intermedios:

a)  $100 : 20 \cdot 3 - (4 - 5 + 6) \cdot (-1) + [(-5)^6]^0 \cdot 3$

b)  $(-11 + 6 \cdot 2) \cdot 3 - (-4) \cdot (-6) + (-2)^3$

## Vocabulary

- ✚ The **exponent** of a number says **how many times** to use the number in a multiplication.
- ✚ "**Operations**" mean things like add, subtract, multiply, divide, squaring, etc.
- ✚ **Least Common Multiple**
- ✚ **Greatest Common Factor**