



APUNTES DE
PROCESOS E
INSTRUMENTOS
MATEMÁTICOS
GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 2

*Fracciones.
Proporcionalidad*

Ana M^a Zarco

Educación de adultos
Curso 2017/18



Unidad Didáctica 2. Números racionales e irracionales y sus operaciones. Proporcionalidad y porcentajes

1. Números racionales

Una fracción es una división entre dos números enteros, teniendo en cuenta que el divisor no puede ser un número cero. Se denota por:

$$\frac{a}{b}$$

Al número a se le llama **numerador** y al número b se le llama **denominador**.

Si el numerador es menor que el denominador, la fracción es menor que la unidad, y se llama **fracción propia**.

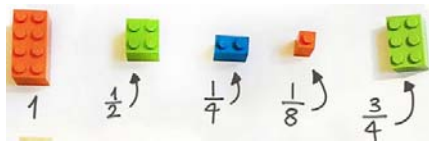
Si el numerador es mayor que el denominador, la fracción es mayor que la unidad, y se llama **fracción impropia**.

Los números enteros también se pueden expresar como fracción, por ejemplo:

$$6 = \frac{12}{2} = \frac{6}{1}$$

El conjunto de todas las fracciones se llama **conjunto de números racionales** y se designa por \mathbb{Q} .

Observa la interpretación geométrica:



2. Fracciones equivalentes

Si el numerador y el denominador de una fracción se pueden dividir por un mismo número, al hacerlo diremos que hemos simplificado o reducido la fracción. La nueva fracción que se obtiene es equivalente a la primera, pues ambas representan el mismo número racional.

Cuando una fracción tiene el denominador positivo y no se puede reducir más porque el numerador y el denominador son primos entre sí, diremos que es **irreducible**.

Dos fracciones se llaman **equivalentes** cuando al simplificarlas dar lugar a la misma fracción irreducible.

Propiedad: Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo:

Simplifica la fracción $\frac{15}{200}$

Solución. Dividimos numerador y denominador por 5:

$$\frac{15}{200} = \frac{3}{40}$$

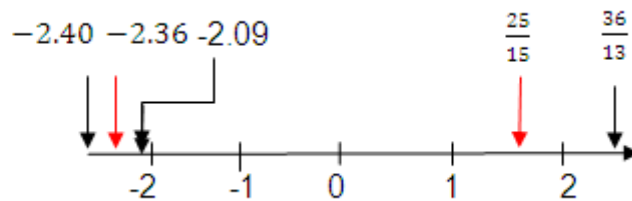
Ejercicios

1. Simplifica las siguientes fracciones:

| | | | |
|--------------------|---------------------|------------------------|-----------------------|
| a) $\frac{80}{60}$ | b) $\frac{10}{14}$ | c) $\frac{150}{250}$ | d) $\frac{90}{120}$ |
| e) $\frac{21}{7}$ | f) $\frac{60}{180}$ | g) $\frac{1500}{1200}$ | h) $\frac{500}{2500}$ |

3. Representación en la recta

Las fracciones se pueden representar en la recta numérica. Para obtener su posición podemos hacer la división entre el numerador y el denominador y obtener el decimal y también podemos utilizar el teorema de Tales** (ver contenidos de ampliación).



Ejercicios

2. Representa, aproximadamente, sobre una recta:

$$\frac{4}{6}, \frac{-4}{6}, \frac{3}{4}, \frac{18}{5}$$

4. Reducción a común denominador

Reducir dos o más fracciones a común denominador consiste en encontrar otras fracciones equivalentes a las primeras que tengan el mismo denominador.

El denominador común puede ser un múltiplo cualquiera de todos los denominadores. Por ejemplo podemos tomar el producto de todos los denominadores y también el m.c.m. de los denominadores. Es preferible tomar el m.c.m por ser el menor múltiplo común no nulo de los denominadores.

Ejemplo:

Reduce a común denominador las fracciones

$$\frac{3}{4}, \frac{-5}{3}, \frac{1}{6}, \frac{-1}{2}$$

Solución.

El m.c.m de los denominadores es 12.

| | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ | $\frac{-5}{3} = \frac{-20}{12}$ | $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ | $\frac{-1}{2} = \frac{-6}{12}$ |
| El número 9 resulta de dividir 12 entre 4 (el denominador y multiplicar por 3 (el numerador). | El número -20 resulta de dividir 12 entre 3 (el denominador y multiplicar por -5 (el numerador). | El número 2 resulta de dividir 12 entre 6 (el denominador y multiplicar por 1 (el numerador). | El número -6 resulta de dividir 12 entre 2 (el denominador y multiplicar por -1 (el numerador). |

Ejercicios

3. Reduce a común denominador las fracciones:

$$\frac{11}{6}, \frac{5}{4}, \frac{2}{5}$$

4. Reduce a común denominador las fracciones:

$$\frac{-7}{6}, \frac{8}{9}, \frac{5}{12}$$

5. Ordena de mayor a menor estas fracciones:

$$\frac{7}{12}, \frac{4}{6}, \frac{5}{9}, \frac{3}{4}, \frac{13}{18}$$

5. Operaciones con fracciones

Suma de fracciones con igual denominador

Para sumar fracciones con el mismo denominador, se suman sus numeradores y se mantiene el denominador.

Ejemplo:

Calcula la suma

$$\frac{45}{60} + \frac{48}{60} + \frac{50}{60}$$

Solución.

$$\frac{45}{60} + \frac{48}{60} + \frac{50}{60} = \frac{45 + 48 + 50}{60} = \frac{143}{60}$$

Ejercicios

6. Calcula:

$$\frac{10}{9} + \frac{5}{9} + \frac{3}{9}$$

Suma de fracciones con distinto denominador

Para sumar fracciones con distinto denominador, en primer lugar hallamos fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador y después sumamos los nuevos numeradores manteniendo el denominador común.

Ejemplo:

Calcula la suma:

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$$

Solución. El m.c.m. de los denominadores es 60,

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{45}{60} + \frac{48}{60} + \frac{50}{60} = \frac{45 + 48 + 50}{60} = \frac{143}{60}$$

Ejercicios

7. Calcula:

$$\frac{11}{9} + \frac{5}{4} + \frac{2}{5}$$

Ejemplo:

Calcula la suma:

$$\frac{3}{4} + 5$$

Solución. Escribiendo 5 como $\frac{5}{1}$,

$$\frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{5}{1} = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

Ejercicios

8. Calcula:

a) $\frac{1}{9} + 6$

b) $4 + \frac{3}{2}$

Resta de fracciones

El cálculo de la resta se hace de la misma forma que la suma teniendo en cuenta los signos de los números enteros que aparezcan.

Ejemplo:

Calcula:

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$$

Solución. El m.c.m. de los denominadores es 60,

$$\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{45}{60} - \frac{48}{60} + \frac{50}{60} = \frac{45 - 48 + 50}{60} = \frac{47}{60}$$

Ejercicios

9. Calcula:

a) $\frac{1}{30} - \frac{1}{45}$

b) $\frac{11}{30} - \frac{3}{40} - \frac{7}{60}$

Producto de fracciones

El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo denominador es el producto de sus denominadores y cuyo numerador es el producto de sus numeradores.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ejemplo:

Calcula:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$$

Solución.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

La fracción $\frac{5}{8}$ se obtiene simplificando la fracción $\frac{15}{24}$.

Ejercicios

10. Calcula y simplifica:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{5}$

b) $\frac{11}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{10}$

Cociente de fracciones:

La inversa de la fracción no nula $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$ porque $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

El cociente de dos fracciones es el producto de la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo:

Calcula:

$$\frac{7}{4} : \frac{2}{5}$$

Solución.

$$\frac{7}{4} : \frac{2}{5} = \frac{35}{8}$$

Ejercicios

11. Calcula y simplifica:

a) $\frac{5}{3} : \frac{11}{5}$

b) $7 : \frac{4}{3}$

c) $\frac{4}{3} : 7$

Operaciones combinadas con fracciones:

Cuando aparecen varias operaciones y también paréntesis entre fracciones tenemos que aplicar la jerarquía de las operaciones.

Ejercicios

12. Calcula y simplifica:

a) $\frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - 1\right)}{\frac{3}{4} + 1}$

b) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) : \frac{7}{5}$

6. Potencias de fracciones. Propiedades

La potencia de base una fracción $\frac{a}{b}$ y exponente un número natural n distinto de cero es el número racional que resulta de multiplicar la fracción $\frac{a}{b}$ por sí misma n veces, es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}}$$

Cuando la base es distinta de cero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 := 1$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\left(\frac{45}{11}\right)^0 = 1$$

La potencia de base una fracción no nula $\frac{a}{b}$ y exponente $-n$ siendo n un número natural n distinto de cero es el número racional que resulta de calcular la fracción inversa de $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplos:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{125}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{81}{16}$$

Propiedades de las potencias con base una fracción no nula y exponente entero

- ❖ Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- ❖ Producto de potencias con la misma base $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
- ❖ Cociente de potencias con la misma base $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
- ❖ $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
- ❖ Potencia de un producto $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m$
- ❖ Potencia de base otra potencia $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$

Ejercicios

13. Expresa como potencia de base 10 el resultado de la operación:
0,0 000 001: 10 000 000 000

14. Expresa con una sola fracción irreducible:

a) $\frac{2^3}{2^4}$

b) 2^{-1}

c) $\frac{a^2}{a^6}$

d) $x^{-1} \cdot y^{-2}$

e) $\frac{x^2 \cdot y^4}{x^3 \cdot y^6}$

f) $(2 \cdot a^2 \cdot b)^{-2}$

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$

h) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2$

15. Reduce a un solo número racional:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

c) $\left(\frac{-1}{3}\right)^{-2}$

d) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)^5$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$

7. Decimales y fracciones. Números irracionales

Para obtener la expresión decimal de una fracción, se efectúa la división entre el numerador y el denominador. El cociente puede ser:

| Cociente | Ejemplos | |
|---------------|------------------------|-----------------|
| Número entero | $\frac{72}{9} = 8=8,0$ | Cociente entero |

| | | |
|-------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Decimal exacto | $\frac{197}{40} = 4,925$ | Cociente decimal exacto |
| Decimal periódico puro | $\frac{11}{3} = 3,6 \dots = 3,\hat{6}$ | Hay una o varias cifras decimales que se repiten indefinidamente. Estas cifras que se repiten se llaman periodo. |
| Decimal periódico mixto | $\frac{87}{66} = 1,3181818 \dots = 1,3\hat{1}8$ | Hay una o varias cifras decimales que no forman parte del periodo |

Sabías que...

Una fracción irreducible cuyo denominador solo tenga los divisores primos 2 y 5 da lugar a un decimal exacto y en el caso de que tenga otros divisores primos dará lugar a un decimal periódico.

Ejercicios

16. Calcula la expresión decimal de las siguientes fracciones:

a) $\frac{10}{3}$

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{8}{6}$

17. Sin hacer la división, di si estas fracciones darán lugar a decimales exactos o periódicos.

a) $\frac{313}{500}$

b) $\frac{122}{150}$

c) $\frac{505}{1024}$

Números irracionales

Existen números decimales que no son exactos ni periódicos a estos números se les llama números irracionales. Tienen infinitas cifras decimales que no son periódicos y no se pueden expresar como un cociente de dos enteros.

Son irracionales: $\pi, \sqrt{2}, e, \dots$

Observa que no todas las raíces de números enteros son irracionales. Por ejemplo $\sqrt{4} = 2$ es un número entero.

Sabías que...

El inteligentísimo y brillante Mr. Spock, de la serie futurista Star Trek, consiguió salvar a la tripulación de la maldad de una diabólica computadora. Le ordenó que calculara el valor de π , y como este es irracional, la computadora se quedó presa del proceso y...ellos escaparon.

Sabías que...

El número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618 \dots$ es un irracional.

Más información en:

https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo

https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci

8. Proporcionalidad y porcentajes. Repartos

Una razón es el cociente indicado de dos números que corresponden a valores de diferentes magnitudes:

$$\frac{a}{b}$$

Una proporción es una igualdad de dos razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por su colocación, los números a y d se llaman extremos y los números b y c medios.

En una proporción se cumple que el producto de extremos es igual al producto de medios.

Dos magnitudes son directamente proporcionales con razón de proporcionalidad k cuando el cociente $\frac{a}{b}$ es siempre igual a k .

Observa, que en este caso al aumentar una magnitud también aumenta el valor de la otra.

$$\frac{a}{b} = k$$

Dos magnitudes son inversamente proporcionales con razón de proporcionalidad k cuando el producto $a \cdot b$ es siempre igual a k .

$$a \cdot b = k$$

Observa que al aumentar el valor de una disminuye el valor de la otra.

Ejemplos:

El peso es directamente proporcional a la masa.

En un movimiento rectilíneo y uniforme el espacio recorrido es directamente proporcional a la velocidad.

En un movimiento rectilíneo y uniforme el tiempo empleado es inversamente proporcional a la velocidad.

En una factura de compra de patatas el precio total es directamente proporcional al número de kilogramos que se han comprado.

9. Regla de tres simple directa e inversa

Problema 1. Para transportar 120000 litros de agua se necesitan 8 camiones cisterna. ¿Cuántos camiones se necesitarán para transportar 315000?

Solución. A más volumen de agua, más camiones. Es evidente que se trata de una proporcionalidad **directa**.

En el método de la regla de tres tenemos que colocar en cada columna los valores de una misma magnitud

$$\begin{array}{l} 120\ 000 \text{ litros} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \quad 8 \text{ camiones} \\ 315\ 000 \text{ litros} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \quad x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 120\ 000 \text{ litros} \\ 315\ 000 \text{ litros} \end{array}} \right\}$$

Como la relación entre litros y camiones es constante, la ecuación que tenemos que plantear es:

$$\frac{120\ 000}{8} = \frac{315\ 000}{x}$$

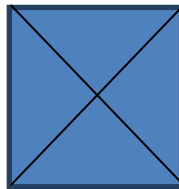
Es equivalente a plantear:

$$\frac{120\ 000}{315\ 000} = \frac{8}{x}$$

Basta con recordar que en una proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos.

Ahora aplicamos la regla del cuadrado y sus diagonales para despejar x :

$$x = \frac{8 \cdot 315\ 000}{120\ 000};$$



$$x = 21 \text{ camiones}$$

También podemos calcular los litros que puede llevar un camión y después dividir el total de litros que se tienen que transportar por la capacidad de un camión. Este método se llama reducción a la unidad de la magnitud.

En este caso,

$$120\ 000 : 8 = 15\ 000 \text{ litros caben en cada camión}$$

$$315\ 000 : 15\ 000 = 21 \text{ camiones se necesitan}$$

¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre litros y camiones?

La respuesta es 15 000

Problema 2. Seis pintores tardan 8 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarán 4 pintores en realizar la misma tarea?

A menos pintores, más tiempo Se trata de una proporcionalidad **inversa**.

Planteamos el problema con el esquema de regla de tres.

$$\begin{array}{l} 6 \text{ pintores} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \quad 8 \text{ días} \\ 4 \text{ pintores} \quad \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \quad x \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 6 \text{ pintores} \\ 4 \text{ pintores} \end{array}} \right\}$$

El producto del número de pintores por el número de días es constante.

Por lo tanto la ecuación que tenemos que plantear es

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{x}$$

Esta ecuación es equivalente, $\underbrace{4 \cdot x}_{\text{pintores por días}} = \underbrace{6 \cdot 8}_{\text{pintores por días}}$

Por lo tanto, $x = \frac{6 \cdot 8}{4}$; $x = 12$ días.

Ejercicios

18. El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?
19. Cinco carpinteros necesitan 21 días para entarimar un suelo. ¿Cuántos carpinteros serán necesarios si se desea hacer el trabajo en 15 días?
20. Una locomotora, a 85 km/h, tarda tres horas y dieciocho minutos en realizar el viaje de ida entre dos ciudades. ¿Cuánto tardará en el viaje de vuelta si aumenta su velocidad a 110 km/h?

10. Repartos proporcionales directos.

En los problemas de repartos tenemos una cantidad que tenemos que repartir con unas condiciones.

Los repartos directamente proporcionales a unas cantidades iniciales se resuelven de la siguiente forma:

1. Se suman los valores iniciales
2. Se divide la cantidad a repartir entre el resultado del paso 1.
3. Se multiplica cada valor inicial por el resultado del paso 2.

La suma de los valores obtenidos en 3 da la cantidad a repartir.

Ejemplo:

Dos amigas juntan 1,2 y 1,8 € que tenían para comprar un paquete de pegatinas de una serie de dibujos animados. El paquete contiene 120 pegatinas. ¿Cómo deben repartírselas de forma justa?

Solución.

| | |
|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Se suman los valores iniciales | $1,20 + 1,80 = 3$ |
| Se divide 120 entre 3 | $\frac{120}{3} = 40$ |
| Se multiplican los valores iniciales por 40 | $1,20 \cdot 40 = 48$ pegatinas $1,80 \cdot 40 = 72$ pegatinas |
| Comprobación: $48+72= 120$ pegatinas | |

Ejercicios

- 21.** Los dos camareros de un bar se reparten un bote con 544 € de propina de forma proporcional al número de días que han trabajado, que han sido respectivamente 60 y 100 días. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
- 22.** Por un reportaje fotográfico realizado por tres fotógrafos me cobraron 6720 euros. Del reportaje, 140 fotos eran del primer fotógrafo, 180 del segundo y 240 del tercero. ¿Qué cantidad de euros le corresponde a cada uno?
- 23.** Modeliza algebraicamente el problema del reparto proporcional directo.

Indicación.

Sea M la cantidad a repartir directamente proporcional a las cantidades a, b, c Sean x, y, z las cantidades que corresponden a cada uno entonces se tiene:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{M}{a+b+c}$$

Completa: La constante de proporcionalidad es _____

Las cantidades que corresponden a cada uno son _____

11. La fracción como operador

En este apartado calculamos la fracción de una cantidad.

Ejemplo:

$$\text{Calcula los } \frac{2}{3} \text{ de } 360 \text{ €:} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot 360 = \frac{2 \cdot 360}{3} = 240 \text{ €}$$

De igual forma, el producto de las fracciones se puede encadenar:

$$\text{Calcula los } \frac{4}{5} \text{ de los } \frac{2}{3} \text{ de } 360 \text{ €:} \rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 360 = \frac{8}{15} \cdot 360 = 192 \text{ €}$$

Ejercicios

- 24.** En una clase de 35 alumnos, los $\frac{2}{7}$ son chicas, ¿cuántos chicos hay?
- 25.** Unos amigos hacen un trayecto de 210 km en bicicleta. En la primera etapa hacen $\frac{1}{3}$ del trayecto, en la segunda los $\frac{2}{5}$ y dejan el resto para la tercera etapa. ¿Cuántos km han recorrido en cada etapa?

12. Cálculo de la fracción que queda

Todas las fracciones en que se divide un todo suman 1.

Ejemplo:

De un viaje en tren llevo recorridas $\frac{5}{7}$ partes. ¿Qué fracción del viaje me queda por recorrer?.

| | | |
|---------------------|---|---------------------------------|
| Queda por recorrer: | → | $1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$ |
|---------------------|---|---------------------------------|

Es decir, llevo recorridas $\frac{5}{7}$ partes y me quedan $\frac{2}{7}$. En total deben sumar 1.

Sabías que...

La herencia y el Cadí.

La herencia de tres hermanos consistía en 17 camellos que se debían repartir de la siguiente forma: al mayor le correspondía la mitad, al mediano la tercera parte y al menor la novena parte.

Como no podían partir ningún camello, acudieron al Cadí para que los ayudara a resolver el problema. El Cadí tomó uno de sus camellos y lo añadió a la herencia. Ahora había 18 camellos que se repartieron así:

mayor $\frac{18}{2} = 9$ camellos, mediano $\frac{18}{3} = 6$ camellos y menor $\frac{18}{9} = 2$ camellos

Se han repartido 17 camellos y ha sobrado el del Cadí. ¿Podrías explicar qué ha pasado?

Ejercicios

26. Una empresa tiene tres socios. Dos de ellos poseen $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ partes respectivamente. ¿Qué parte de la empresa posee el tercer socio?

27. Una persona realiza $\frac{3}{5}$ partes de un viaje en tren, los $\frac{7}{8}$ del resto en autobús y la última parte en taxi. ¿Qué parte del trayecto ha recorrido en taxi?

13. Cálculo del total a partir de la fracción

En ciertos problemas se conoce la parte que representa una fracción dada y se busca calcular la cantidad total.

Ejemplo:

Una piscina está llena hasta sus $\frac{3}{7}$ partes. Si tiene 3600 litros de agua, ¿Cuál es su capacidad total?.

| | | |
|------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------|
| El enunciado dice... | → | $\frac{3}{7}$ del total son 3600 |
| Que en matemáticas se escribe | → | $\frac{3}{7} \cdot x = 3600$ |
| Para calcular la x se invierte la fracción y se multiplica | → | $x = 3600 \cdot \frac{7}{3} = \frac{25200}{3} = 8400$ l |

Ejercicios

- 28. Los $\frac{3}{11}$ de los alumnos de la escuela llevan gafas, si llevan gafas 72 alumnos, ¿cuántos alumnos son en total?
- 29. He gastado las $\frac{3}{4}$ partes de mi dinero y me quedan 900 euros. ¿Cuánto tenía?
- 30. Elabora un método gráfico para resolver el problema 29.
- 31. Unos amigos hacen una excursión en tres días. El primer día recorren $\frac{1}{4}$ del trayecto, el segundo día $\frac{2}{3}$, y dejan los últimos 25 km para el tercer día. ¿Cuántos kilómetros han recorrido en total?

14. Porcentajes

Porcentaje mediante regla de tres.

Quando tenemos 100 unidades y r de ellas tienen una cierta propiedad decimos que el $r\%$ tienen dicha propiedad.

Ahora, si tenemos una cantidad T , ¿cuántas tienen esa propiedad?

Planteamos la regla de tres

| | | |
|--------------|--------|--------------|
| <i>Parte</i> | | <i>Total</i> |
| r | -----→ | 100 |
| p | -----→ | T |

Las magnitudes parte y total son directamente proporcionales porque el cociente entre la parte y el total es constante. Observa que a mayor parte mayor total.

De donde deducimos que el $r\%$ de una cantidad T se calcula mediante la fórmula:

$$p = \frac{T \cdot r}{100}$$

Porcentaje como fracción de una cantidad. Observa que $\frac{r}{100}$ de la cantidad T es igual al $r\%$ de dicha cantidad.

Ejercicios

- 32. El 25 % de los socios de un club son menores de 20 años. Si el club tiene 180 socios, ¿cuántos socios menores de 20 años tiene el club?
- 33. De 600 personas encuestadas, 396 dicen que leen con frecuencia. ¿Qué porcentaje representan?
- 34. En la compra de un producto he pagado con antelación 528 euros que supone el 48% del total que cuesta. ¿Cuál es el precio total del producto?
- 35. El censo electoral de una población es de 2200 personas. En unas elecciones un partido político ha obtenido el 40,5 % de los votos. ¿Cuántos votos ha obtenido?

36. Una máquina fabrica al día 650 piezas de las que 26 presentan algún defecto. ¿Qué porcentaje de piezas defectuosas fabrica la máquina?

15. Aumentos Porcentuales

Aumentar el $r\%$ una cantidad C significa realizar el siguiente cálculo:

$$C + \text{el } r\% \text{ de } C$$

Observa que si C es igual a una unidad entonces el resultado del cálculo anterior es:



índice de variación, es decir:

$$C_a = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Ejemplos:

El precio de un libro es de 32 euros. A este precio hay que añadirle el 7% de I.V.A. ¿Cuál es el precio final?

Resolución mediante la fórmula:

Datos: $r=7$; $C=32$. Nos piden la cantidad final

$$C_a = 32 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right) = 34,24$$

Planteamiento mediante regla de tres.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sin IVA} & \longrightarrow & \text{Con IVA} \\ 100 & \longrightarrow & 107 \\ 32 & \longrightarrow & C_a \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \text{Sin IVA} & \longrightarrow & \text{Con IVA} \\ 100 & \longrightarrow & 107 \\ 32 & \longrightarrow & C_a \end{array}} \right\} C_a = \frac{32 \cdot 107}{100} = 34,24$$

Planteamiento como fracción de una cantidad.

$$C_a \text{ es el } \frac{107}{100} \text{ de } 32$$

Un ordenador cuesta con el IVA (21%) incluido 472 €. ¿Cuánto cuesta sin IVA?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos: $r=21$; $C_a=472$. Aquí nos piden la cantidad.

$$472 = C \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right)$$

Ahora, despeja C y termina el ejercicio

Planteamiento con regla de tres

$$\left. \begin{array}{ccc} \text{Sin IVA} & & \text{Con IVA} \\ 100 & \text{-----} & 121 \\ C & \text{-----} & 472 \end{array} \right\} C = \frac{472 \cdot 100}{121} = 390,08$$

Planteamiento cómo cálculo del Total a partir de conocer la parte.

Sabemos que el $\frac{121}{100}$ de una cantidad C es 472. De donde, la cantidad $C = \frac{472 \cdot 100}{121}$

Ejercicios

37. Completa

| r | $1 + \frac{r}{100}$ |
|-----|---------------------|
| 1 | |
| 40 | |
| 16 | |
| 8 | |
| 50 | |
| 100 | |
| 200 | |
| 25 | |

Ejemplos:

De una superficie edificada de 750 m² se ha pasado a una superficie edificada de 1200 m². ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento que ha habido?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos C=750 m²; C_a=1200 m². Nos piden r.

$$1200 = 750 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right) \Rightarrow \frac{1200}{750} = 1 + \frac{r}{100}$$

Como $\frac{1200}{750}$ es igual a 1,6 entonces r=60

Planteamiento mediante regla de tres

$$\left. \begin{array}{ccc} \text{Cantidad} & & \text{Cantidad aumentada} \\ 750 & \text{-----} & 1200 \\ 100 & \text{-----} & x \end{array} \right\} x = \frac{1200 \cdot 100}{750} = 160$$

Por lo tanto el porcentaje es del 60%

Ejercicios

- 38. El precio de un portátil que costaba 490 €, ha subido el 14%. ¿Cuánto cuesta ahora?
- 39. Al subir el precio de unos zapatos un 25 %, el precio final es ahora de 35 euros. ¿Cuál era el precio inicial?
- 40. Al aumentar el precio de un televisor ha pasado de 350 a 392 €. ¿Qué tanto por ciento ha subido?
- 41. Se prevé una subida de la bombona del gas propano para el año que viene del 8 %. Si ahora cuesta 67,5 €, ¿cuánto costará?

16. Disminuciones Porcentuales

Disminuir el $r\%$ una cantidad C significa realizar el siguiente cálculo:

$$C - \text{el } r\% \text{ de } C$$

Observa que si C es igual a una unidad entonces el resultado del cálculo anterior es:

$$1 - \frac{r}{100}$$

A este número se le llama índice de variación para una disminución del $r\%$.

Por lo tanto, para disminuir el $r\%$ a una cantidad C podemos multiplicar dicha cantidad por el índice de variación, es decir:

$$C_d = C \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$$

Ejemplos:

El precio de un libro es de 32 euros. Si tiene una rebaja del 7%, ¿cuál es el precio final?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos: $r=7$; $C=32$. Nos piden la cantidad disminuida

$$C_d = 32 \cdot \left(1 - \frac{7}{100}\right) = 29,76$$

Planteamiento mediante regla de tres.

| | | | | |
|---------------|--------|-------------------------|---|-----------------------------------------|
| <i>Precio</i> | -----> | <i>Precio Descotado</i> | } | $C_d = \frac{32 \cdot 93}{100} = 29,76$ |
| 100 | -----> | 93 | | |
| 32 | -----> | C_d | | |

Planteamiento como fracción de una cantidad.

$$C_d \text{ es el } \frac{93}{100} \text{ de } 32$$

Un ordenador cuesta con una rebaja del 15% incluido 540 €. ¿Cuánto cuesta sin rebaja?

Planteamiento mediante la fórmula

Datos: $r=15$; $C_d=540$. Aquí nos piden la cantidad C .

$$540 = C \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right)$$

Despejando, nos queda $C = \frac{540 \cdot 100}{85} = 635,29$

Planteamiento mediante regla de tres

$$\left. \begin{array}{l} \text{Precio} \\ 100 \quad \text{-----} \rightarrow \\ C \quad \text{-----} \rightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Precio Descotado} \\ 85 \\ 540 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Precio} \\ 100 \\ C \end{array}} \right\} C = \frac{540 \cdot 100}{85} = 635,29$$

Planteamiento como cálculo del Total a partir de conocer la parte

$\frac{85}{100}$ de una cantidad C es igual a 540

Ejercicios

42. Completa

| r | $1 - \frac{r}{100}$ |
|-----|---------------------|
| 1 | |
| 40 | |
| 16 | |
| 8 | |
| 50 | |
| 100 | |
| 20 | |
| 25 | |

Un vestido que costaba 240 €, cuesta en rebajas 168 €. ¿Qué porcentaje de descuento han hecho?

Planteamiento mediante la fórmula:

Datos $C=240$ €; $C_d=168$ €. Nos piden r .

$$168 = 240 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) \Rightarrow \frac{168}{240} = 1 - \frac{r}{100}$$

Como $\frac{168}{240}$ es igual a 0,7 entonces $r=30$

Planteamiento mediante regla de tres:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Precio} \\ 100 \quad \text{-----} \rightarrow \\ 240 \quad \text{-----} \rightarrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Descuento} \\ r \\ 240 - 168 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Precio} \\ 100 \\ 240 \end{array}} \right\} x = \frac{72 \cdot 100}{240} = 30$$

Planteamiento con fracciones

$$\frac{r}{100} \text{ de } 240 \text{ es } 72$$

Ejercicios

43. El precio de un ordenador que costaba 490 ha sido rebajado un 18 %, ¿cuánto cuesta ahora?
44. El precio de unos zapatos está rebajado un 25%. El precio rebajado es ahora de 36 euros. ¿Cuál era el precio antes de la rebaja?
45. Un televisor que costaba 390 ha sido rebajado a 315,9 €. ¿Qué tanto por ciento de rebaja tiene?
46. Se prevé una bajada del precio del jamón para el año que viene del 8 %. Si ahora cuesta 17,5 €/kg. ¿Cuánto costará?

Ejercicios finales

47. El sueldo mensual de un representante de informática consta de una parte fija de 500 € más un 4% del dinero de las ventas que formalice.
- Si durante un mes ha vendido 54 ordenadores a un precio por unidad de 450 €, ¿cuánto le corresponde cobrar dicho mes?
 - Si su sueldo durante un mes ha sido 1300 €, ¿a cuánto asciende el importe de las ventas realizadas durante dicho mes?
48. Reparte 1485 € entre tres niños en partes directamente proporcionales a sus edades que son 12, 11 y 10 años.
49. Una mezcla de café está compuesta por $\frac{3}{8}$ de café de Brasil, $\frac{5}{12}$ de café de Colombia y el resto de café de Arabia.
- ¿Qué parte de café de Arabia tiene la mezcla?
 - Si de café de Arabia hay 70 gramos, ¿Qué cantidad hay de los otros tipos de café?
50. Aumenta 1 euro el 2 por ciento. Disminuye la cantidad resultante el 2 por ciento. ¿Queda un euro?
51. Una factura con I.V.A. incluido asciende a 345 euros. Si el impuesto que se aplica es del 21%, calcula el valor de la factura sin I.V.A.
52. Seis pintores tardan 8 días en pintar una casa. ¿Cuánto tardarán 4 pintores en realizar la misma tarea?
53. En una granja, 16 conejos consumen 100 kg de alfalfa en 12 días. ¿Cuántos días pueden comer 6 conejos con 100 kg de alfalfa?
54. Tres socios pusieron 2, 3 y 6 millones, respectivamente, para crear una empresa.
- ¿Qué parte de las ganancias corresponderá a cada uno?
 - Si las ganancias del primer año fueron de 75900€, ¿cuánto corresponderá a cada uno?