APUNTES DE PROCESOS E INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

GES II

UNIDAD DIDÁCTICA 7

Funciones y gráficas

Profesora Ana María Zarco García

Educación de adultos

Unidad Didáctica 7 Funciones y gráficas

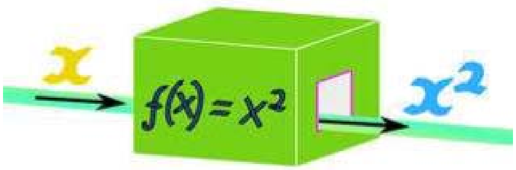
1. FUNCIONES REALES

1.1. Concepto de función

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde ***un solo*** valor de la dependiente, y.

Para indicar que la variable (y) depende o es función de otra, (x), se usa la notación $\boldsymbol{y = f(x)}$, que se lee *"y es función de x"*.

Las funciones son como máquinas a las que se les mete un elemento, x, y devuelve otro valor, $y = f(x)$. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2$, se introduce valores de x, y nos devuelve sus cuadrados.



Es MUY IMPORTANTE que tengamos un solo valor de y (variable dependiente) para cada valor de x (variable independiente). En caso contrario no tenemos una función.
Las funciones se introdujeron para estudiar procesos. Si haciendo lo mismo nos pueden salir cosas distintas, no se puede estudiar del mismo modo.

Ejemplos:

Pensemos en la factura de teléfono. Si sabemos cuántos minutos hemos hablado (suponiendo, claro, que cuesten lo mismo todos) también sabemos cuánto nos toca pagar. El dinero que pagamos es función del tiempo.

Vamos al casino y apostamos a rojo o negro. Si apostamos un euro, podemos ganar dos o no ganar nada. Si decimos cuánto apostamos no sabemos cuánto vamos a ganar. Por tanto, las ganancias en un casino NO son una función de la apuesta.

Actividades resueltas

Indica si las siguientes situaciones representan una función o no

a) El espacio recorrido por un coche y el tiempo.
b) Las ganancias en la Bolsa en función de lo invertido.
c) El cuadrado de un número.

Solución:
Son funciones la a) y la c). La b) no lo es porque no sabemos cuánto ganamos.

1.2. Gráfica de una función

En muchas ocasiones, la manera más sencilla de ver cómo se comporta una función es dibujarla en el plano cartesiano. Vamos a recordar muy brevemente qué era el plano cartesiano (cartesiano, viene de *Cartesio*, que era el nombre con el que firmaba su inventor, *Renè Descartes*).

Un **sistema de referencia cartesiano** consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes**. El punto en el que se cortan los ejes es el origen del sistema, también llamado **origen de coordenadas.**

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos **eje de abscisas** o también eje X y al vertical **eje de ordenadas** o eje Y.

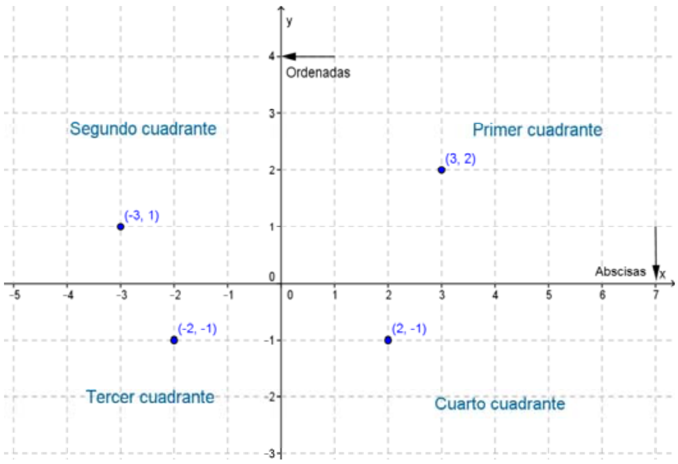
Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como **cuadrantes**:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha

- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda

- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda

- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha.



Sistema de referencia cartesiano

Para representar puntos, sólo hay que recordar que la primera componente (o abscisa) es x, por lo que debe ir al eje X (eje de abscisas). La segunda componente (u ordenada) es y, por tanto va al eje Y (eje de ordenadas).

El sentido positivo es a la derecha y arriba. Si alguna de las componentes es negativa, entonces se coloca en sentido contrario.

Para representar una gráfica, lo que debemos hacer es simplemente tomar valores (x, y) o, lo que es lo mismo $(x, f(x))$ puesto que $y = f(x)$. Luego los unimos, bien con líneas rectas, bien ajustando "a ojo" una línea curva. Naturalmente, ahora nos aparecen dos cuestiones:

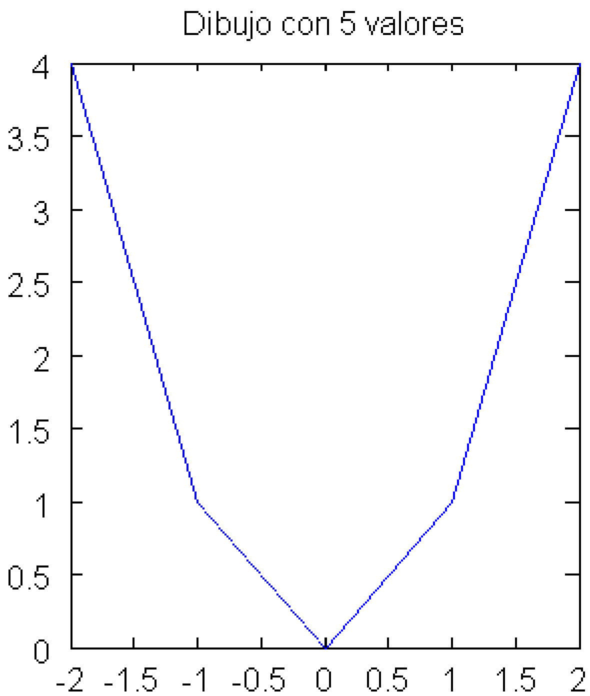
- ¿Cuántos valores hay que dar?
- ¿Qué valores le damos?

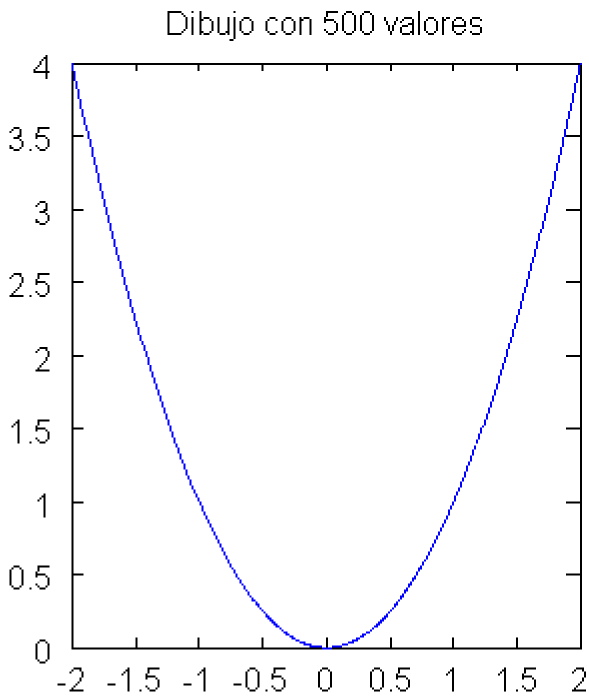
En general, no hay una respuesta clara a esas preguntas, aparte de la obvia "cuánto más, mejor". Si una gráfica se dibuja con ordenador, normalmente se le da un intervalo y el número de valores que queremos que represente. Típicamente, un ordenador da MUCHOS valores: 500, 1000, ….

Ejemplo:

Dibujamos la función $y = x^2$ en el intervalo [–2, 2] con un ordenador (este dibujo está hecho con el programa *Octave*, que es código abierto y puedes descargar libremente).

Hacemos dos gráficas, una dando 5 valores y la otra 500. Observa la diferencia entre los dos dibujos. Observa también que el ordenador une los puntos con segmentos de rectas.



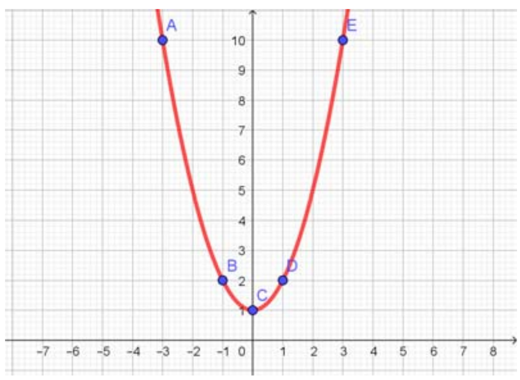


Actividad resuelta

Dibujar la función .

En el capítulo siguiente indicaremos los valores que es recomendable tomar. De momento, nos limitaremos a dar unos pocos y unir puntos. Por ninguna razón en especial, tomamos –3, –1, 0, 1 y 3. Recordemos que al sustituir se usan SIEMPRE paréntesis. Es obligatorio en el caso de que el valor de *x* sea negativo. Así, $(-3)^2 + 1 = 10$. Obtenemos entonces la tabla de valores y basta unir los puntos (dándoles “a ojo” un poco de curva).

x	f (x)
–3	10
–1	2
0	1
1	2
3	10

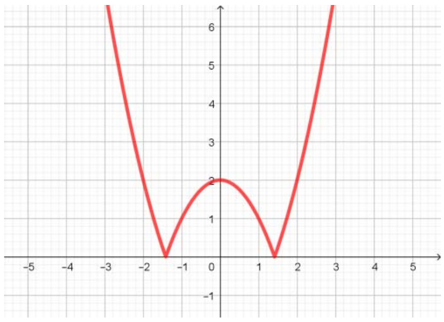


Una cuestión a reseñar de las gráficas es el hecho de que, directamente a partir de un dibujo podemos ver si corresponde a una función o no. Para verlo, basta fijarse en si a algún valor de *x* le corresponde más de un valor de *y*. Si NO lo hay, es una función. Observamos que el ejemplo anterior es una función.

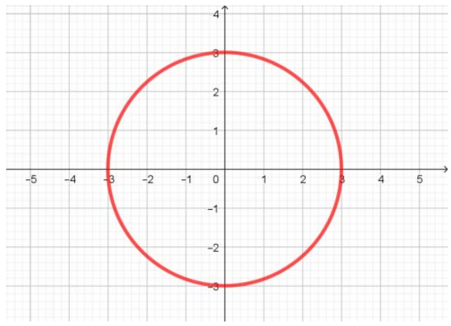
Actividad resuelta

Indica cuáles de las siguientes representaciones corresponden a la gráfica de una función:

a)



b)

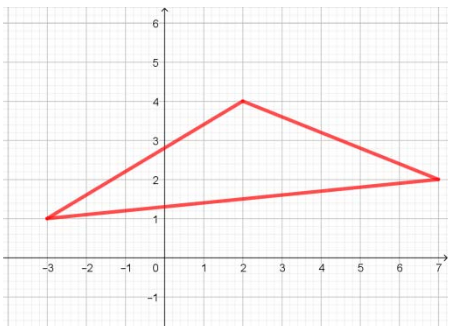


La gráfica a) es una función. La gráfica b) NO lo es porque, por ejemplo, para $x = 0$ hay dos valores de *y*.

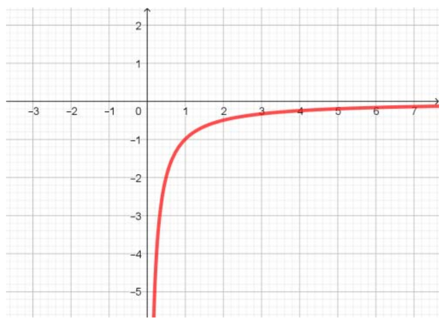
Actividad propuesta

1. De las siguientes gráficas indica cuáles de ellas corresponden a funciones.

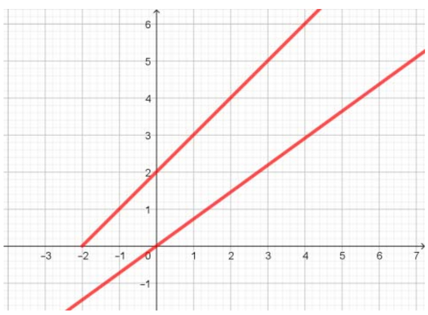
a)



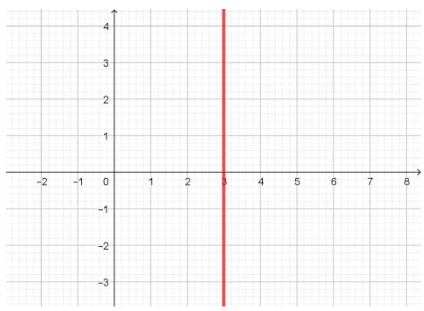
b)



c)



d)



1.3. Diferentes maneras de expresar una función

Recordemos, una vez más, que una función es la descripción de cómo se relacionan dos magnitudes. Así pues, esta descripción la podemos saber de varias maneras.

Funciones dadas por tablas

Probablemente, la manera más sencilla en la que se puede dar una función es con una tabla de valores. Es además la manera más experimental: observamos un proceso y medimos las cantidades que nos salen. Así tenemos una idea de cómo se relacionan.

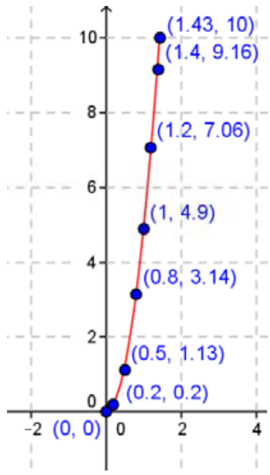
Dibujar su gráfica no puede ser más sencillo. Basta poner los puntos y, en su caso, unirlos.

Ejemplo:

Soltamos una pelota desde 10 m de altura y medimos el espacio recorrido (en segundos). Obtenemos entonces la tabla siguiente:

Espacio (m)	0	0,2	0,5	0,8	1	1,2	1,4	1,43
Tiempo (s)	0	0,2	1,13	3,14	4,9	7,06	9,16	10,00

Es muy sencillo dibujar su gráfica. Basta representar los puntos y unirlos (esta gráfica está hecha con el programa *Geogebra*, también de código abierto):



Date cuenta que tiene sentido "*rellenar*" el espacio entre puntos. Aunque no lo hayamos medido, la pelota no puede teletransportarse, por lo que seguro se puede hablar de dónde está en el instante 0,7, por ejemplo. Y obviamente, el espacio recorrido estará entre 1,13 (que corresponde a 0,5 segundos) y 3,14 (que corresponde a 0,8 segundos).

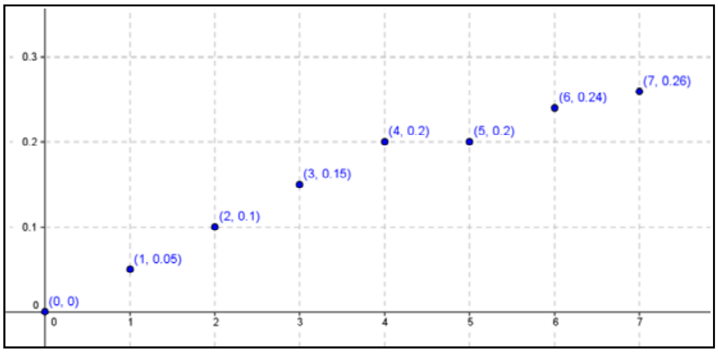
La cuestión que nos planteamos es la siguiente: ¿es siempre así?, ¿puede haber funciones donde NO TENGA SENTIDO poner valores intermedios?

A poco que pienses, te darás cuenta de que sí las hay. Veamos un ejemplo:

Ejemplo:

En una librería, han puesto la siguiente tabla con el precio de las fotocopias, dependiendo del número de copias:

Nº de copias	0	1	2	3	4	5	6	7
Precio (euros)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,2	0,24	0,28



Se puede construir la representación gráfica dibujando estos puntos.

La cuestión de si podemos dibujar puntos intermedios entre los anteriores se responde por sí sola.

No se pueden hacer 1,5 copias.

Solamente puedes hacer un número entero de copias.

Por tanto, no tiene sentido plantearse siquiera dar valores intermedios ni dibujarlos.

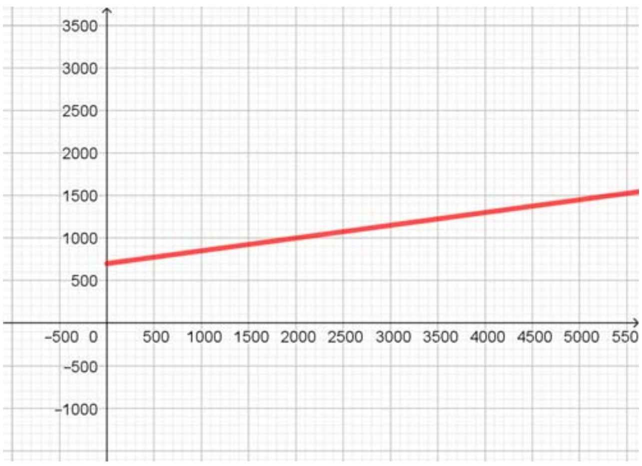
Funciones dadas por una expresión

En muchísimas ocasiones, sabemos suficiente de la relación entre dos magnitudes como para conocer exactamente una expresión que las relaciona. Vamos a empezar con un ejemplo.

Ejemplo:

Supongamos que el salario de un comerciante es de 700 euros fijos más el 15 % de las ventas. Se supone que si no venda nada solamente ganará 700 €. Esto significa que el salario f(x) para unas ventas x viene dado por la expresión:

La gráfica de esta función es:



Fíjate que no tiene sentido representar puntos en el segundo cuadrante pues no puede hacer un número negativo de ventas.

Las graduaciones que se toman en los ejes no siempre tienen que ir de 1 en 1.

Actividades propuestas

2. Un ciclista bebe 1/2 litro de agua cada 10 km de recorrido. Si en el coche de equipo llevan un bidón de 40 litros, haz una tabla que indique su variación y escribe la función que la representa.

3. Un ciclista participa en una carrera recorriendo 3 km cada minuto. Teniendo en cuenta que no partió del origen sino 2 km por detrás representa en una tabla el recorrido durante los tres primeros minutos. Escribe la función que expresa los kilómetros en función del tiempo en minutos y dibújala.

Funciones definidas a trozos

Piensa en la siguiente situación para la tarifa de un teléfono móvil. Se paga un fijo de 10 € al mes y con eso son gratis los 500 primeros minutos. A partir de allí, se paga a 5 céntimos por minuto.

Es evidente que es diferente el comportamiento antes de 500 minutos y después.

Una **función definida a trozos** es aquella que viene dada por una expresión distinta para diferentes intervalos.

En el ejemplo del móvil, la factura viene dada por

$$f(x)=\begin{cases} 10 & si \quad x\le 500 \\ 10+0{,}05\cdot(x-500) & si \quad x>500 \end{cases}.$$

Veamos brevemente por qué. Para valores menores que 500, el gasto es siempre 10 €. Para valores mayores, los minutos que gastamos POR ENCIMA DE 500 son (x–500) y por tanto lo que pagamos por los minutos es $10 + 0{,}05 \cdot (x - 500)$, pues lo medimos en euros. Hay que sumarle los 10 € que pagamos de fijo.

Actividades propuestas

4. Representa las siguientes funciones a trozos. Se indican los valores que has de tomar para la variable *x*.

a) . $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x<-3 \\ -x+1 & si \quad -3\le x<0 \\ 3 & si \quad 0\le x \end{cases}$ Puntos: –5; –3,1; –3; –1; –0,1; 0; 1.

b). $g(x)=\begin{cases} x+3 & si \quad x<-2 \\ 3 & si \quad -2\le x<1 \\ 2 & si \quad 1\le x \end{cases}$ Puntos: –3; –2,1; –2; 0; 0,9; 1; 4; 9.

1.4. Dominio y recorrido de una función

Hasta ahora, no nos hemos preocupado de qué valores pueden tener la *x* y la *y*. Pero es evidente que no siempre pueden tomar todos los valores de la recta real. Por ejemplo, si una función nos da la altura con respecto del peso no vamos a poder tener valores negativos. Para ello existen los conceptos de dominio y recorrido.

El **dominio** de una función es el conjunto de valores que la variable independiente (*x*) puede tomar. Se escribe *Dom f* o *Dom*(*f*).

El **recorrido, rango o imagen** de una función es el conjunto de valores que la variable dependiente (*y*) puede tomar. Se escribe *Rgf* o *Rg*(*f*). También *Im f* o *Im(f)*.

El dominio de una función que viene dada por un polinomio es el conjunto de los números reales.

Normalmente, el recorrido es más directo de calcular. Simplemente, miramos la gráfica y vemos qué valores puede tomar la variable dependiente (*y*).

El dominio suele ser un asunto bastante más complicado. En general, existen dos razones por las que un valor de *x* NO pertenezca al dominio.

1. La función no tiene sentido para esos valores. Por ejemplo, si tenemos una función que represente el consumo de electricidad a cada hora del día, es evidente que *x* debe estar entre 0 y 24. ¡¡Un día tiene 24 horas!! De ninguna manera podemos hablar siquiera de lo que hemos gastado la hora 25.

2. La operación que nos da *f*(*x*) no puede hacerse. Por ejemplo, no se puede dividir entre 0, por lo que la función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto $\{x \in \Re; x \neq 0\}$, es decir $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

El primer caso viene dado por la aplicación práctica y nuestro sentido común. El segundo es el que tiene más dificultad y por eso vamos a dedicarle un poco más de tiempo.

Cálculo de dominios

Existen dos operaciones que NO están permitidas.

a. Dividir entre 0.
b. Hacer raíces cuadradas o de índice par de números negativos. Ten en cuenta que la raíz cuadrada de 0 SÍ está definida (vale 0).

En capítulos futuros veremos alguna operación más, pero por ahora, sólo esas dos operaciones. Vamos a ver un método sistemático para calcular el dominio.

Método para calcular el dominio

1. Recuadra TODAS las operaciones problemáticas.
2. Para TODAS esas operaciones, plantea una ecuación igualándola a 0. Resuelve dicha ecuación.
3. Representa en una recta todas las soluciones de todas las ecuaciones.
4. Da valores a la función. Un valor en cada intervalo y los valores límite. Si la operación se puede hacer, es que el punto o el intervalo pertenece al dominio. Si no, pues no. Puedes ver si una operación vale, o no, haciéndola con la calculadora. Si sale error, es que no se puede. Marca con una X los valores que no valen y con un tick (V) si se pueden hacer.
5. Representa la solución con intervalos. Si el punto del extremo está, es un corchete como [] y si no, un paréntesis.

Así visto, puede parecer un poco complicado. Vamos a ver un par de ejemplos.

Actividades resueltas

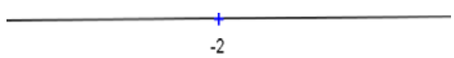
Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $x+\sqrt{2x+4}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}-1}$

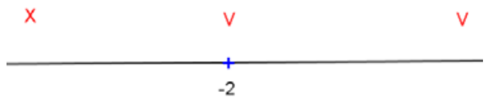
Apartado a

Vamos a seguir el procedimiento punto por punto.

1. El único posible problema es la raíz cuadrada de $2x+4$
2. Igualamos a 0 y resolvemos: $2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$
3. Representamos en la recta los valores.
4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de –2, el valor –2 y un valor a la derecha. Por ejemplo, el –3, el –2 y el 0. Los marcamos en la recta



X	−3	−2	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ



5. El dominio es $[-2,+\infty)$ (el infinito SIEMPRE es abierto, nunca llegamos).

Apartado b

1. Tenemos dos posibles problemas. La raíz cuadrada de $x+2$ y el denominador $\sqrt{x+2}-1$.
2. Tenemos que igualar LOS DOS a cero. $x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

Por otra parte $\sqrt{x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x+2}=1$. Elevando al cuadrado $x+2=1^2 \Rightarrow x=-1$.

3. Representamos en la recta los valores.

4. Tenemos que dar un valor a la izquierda de −2, el valor −2, un valor entre −2 y −1, el valor −1 y un valor a la derecha de −1. Por ejemplo, el −3, el −2, el −1,5, el −1 y el 0. Los marcamos en la recta

X	−3	−2	−1,5	−1	0
¿Es válido?	NO	SÍ	SÍ	NO	SÍ

5. El dominio es $[-2,-1) \cup (-1,+\infty)$.

Actividades propuestas

5. Indica el dominio de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ b) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x+2}}$ c) $y=\dfrac{1}{x-1}$

6. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a) $y = 14x + 2$ b) $y = \sqrt{x+9}$

7. Representa las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:

a) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in [-3,0) \\ 2 & si \quad x \in [0,2] \end{cases}$ b)

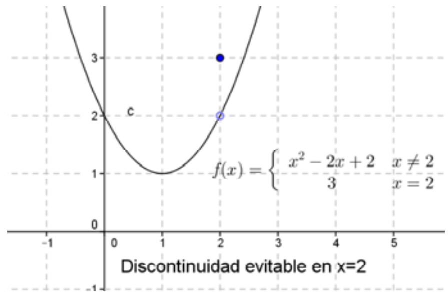
$g(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \in [-2,1] \\ x & si \quad x \in (1,2] \end{cases}$

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

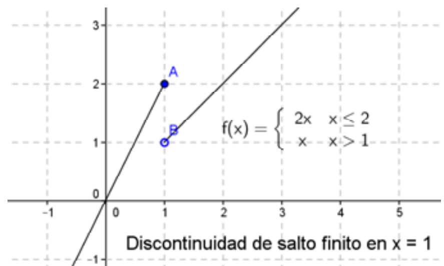
2.1. Continuidad

Intuitivamente, una función es continua si su gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. En caso contrario, se producen "saltos" en determinados valores de la variable independiente que reciben el nombre de discontinuidades.

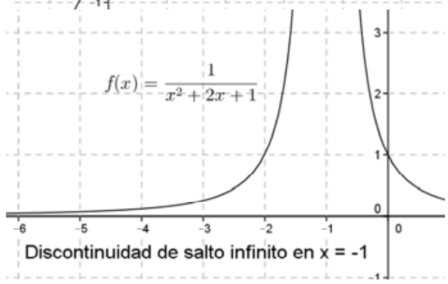
Una discontinuidad puede ser de tres tipos:



1. **Evitable**: En la función sólo "falla" un punto, que "no está donde debería estar". Más formalmente, si nos aproximamos al punto por la derecha y por la izquierda, nos aproximamos a un valor que no es el de la función. En este caso, la función sería continua sin más que cambiar la definición de la función en el punto que nos da problemas.



2. **De salto finito:** En un punto, la función tiene dos ramas diferentes a derecha e izquierda del punto. Estas ramas se aproximan a valores distintos (pero finitos) para cada lado. El punto de discontinuidad puede estar en una cualquiera de las ramas o incluso fuera de ellas. Da lo mismo, la discontinuidad sigue siendo de salto finito.



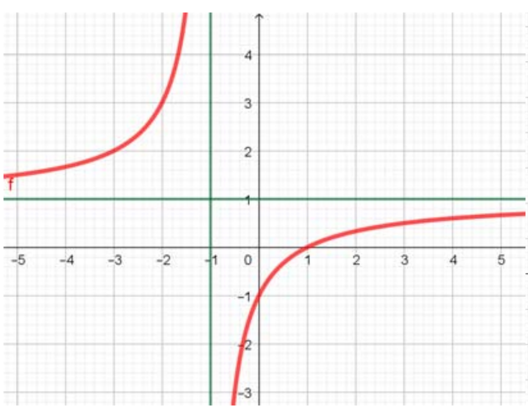
3. **De salto infinito:** Como en salto finito, en un punto la función tiene dos ramas diferentes. Pero en este caso, al menos una de las dos ramas (posiblemente las dos) se hace inmensamente grande o inmensamente negativa (en términos más informales "se va a infinito").

Actividades resueltas

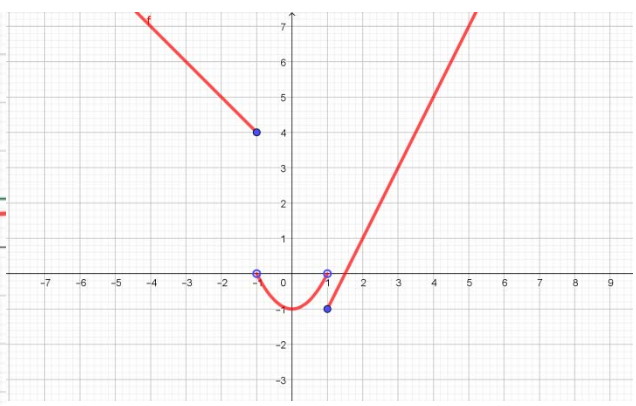
Indica en estas funciones el/los valor/es de la variable independiente donde se produce la discontinuidad e indica el tipo de discontinuidad.

a) –

b)



Salto infinito en x = –1



Salto finito en x = –1 y en x=1.

2.2. Monotonía: Crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

Una función es **constante** en un intervalo (x_1, x_2) cuando tome el valor que tome la variable independiente, la dependiente toma siempre el mismo valor. En símbolos, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo (x_1, x_2) cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **creciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente creciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO disminuye.

Una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo cuando al aumentar el valor de la variable independiente disminuye también el de la dependiente. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo x_1 y x_2.

Una función es **decreciente (en sentido amplio)** en un intervalo si es estrictamente decreciente o constante. En símbolos $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, para todo x_1 y x_2. Puede también decirse que, al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente NO aumenta.

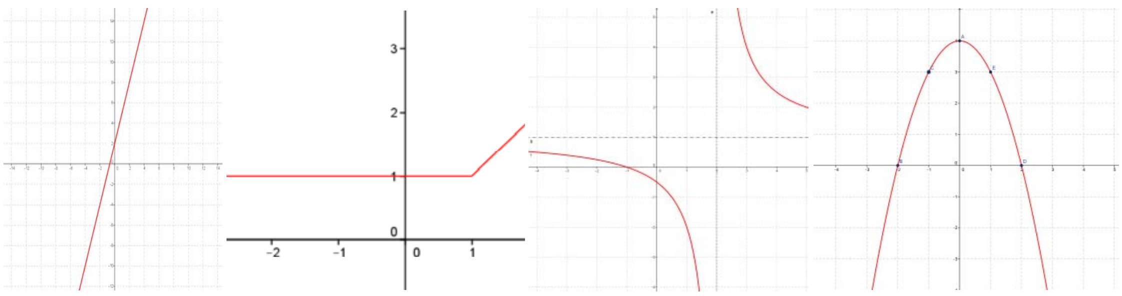
Una función es **estrictamente monótona** en un intervalo cuando es estrictamente creciente o decreciente en dicho intervalo.

Una función es **monótona (en sentido amplio)** en un intervalo cuando es creciente o decreciente (en sentido amplio) en dicho intervalo.

Como indican las definiciones, la monotonía o no de una función se da en un intervalo, es decir, para un conjunto de números reales. Por tanto, una función puede ser creciente para una serie de valores, para otros ser decreciente o constante, luego puede volver a ser creciente o decreciente o constante…

Ejemplos:

En las funciones siguientes estudia el crecimiento y el decrecimiento.



CRECIENTE siempre	*CONSTANTE hasta x = 1* *CRECIENTE desde x = 1* *CRECIENTE (EN SENTIDO AMPLIO) siempre*	*DECRECIENTE hasta x = 2* *DECRECIENTE desde x = 2*	*CRECIENTE hasta x=0* *DECRECIENTE desde x = 0*

Extremos: máximos y mínimos

Una función presenta un **máximo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es mayor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

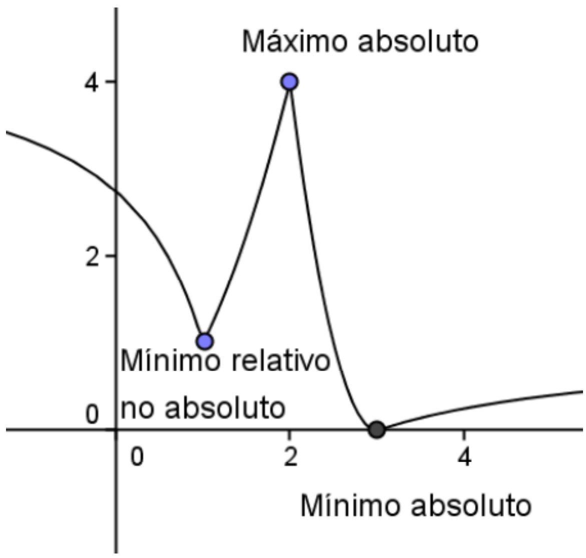
Si, además, la imagen es mayor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **máximo absoluto** en él.

Una función presenta un **mínimo relativo** en un punto cuando la imagen de la función en dicho punto es menor que en cualquiera de los valores que están a su alrededor (en su *entorno*).

Si, además, la imagen es menor que en cualquier otro punto de la función, se dice que la función alcanza un **mínimo absoluto** en él.

Si una función presenta un máximo o un mínimo en un punto, se dice que tiene un **extremo** en dicho punto, que podrá ser relativo o absoluto.

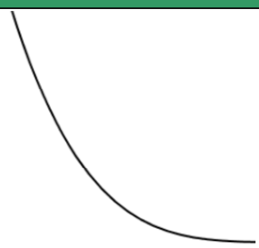
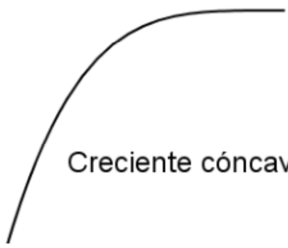
Ejemplo:



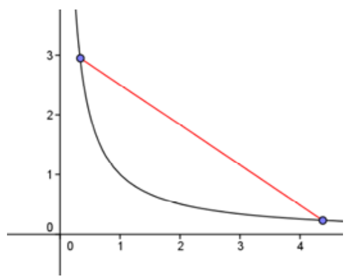
2.3. Curvatura: concavidad, convexidad y puntos de inflexión

Una función es **convexa** si al unir dos puntos de su gráfica el segmento queda por encima de dicha gráfica. Se dice **cóncava** si al hacer la misma operación queda por debajo. Un punto donde se cambia de cóncava a convexa o viceversa se llama **punto de inflexión**.

Una imagen vale más que mil palabras. Así que vamos a dibujar los cuatro tipos de funciones que tenemos:

	Creciente	**Decreciente**
Convexa	 Creciente convexa	 Decreciente convexa
Cóncava	 Creciente cóncava	 Decreciente cóncava

Puedes comprobar fácilmente que se cumple la definición. Si unes dos puntos, el segmento que forman está por encima o por debajo de la gráfica, según corresponde. Aquí a la derecha puedes ver un ejemplo con un tramo decreciente y convexo. Observa cómo el segmento queda por encima de la gráfica de la función.



2.4. Simetrías

Una **función par** es aquella en la que se obtiene lo mismo al sustituir un número y su opuesto:

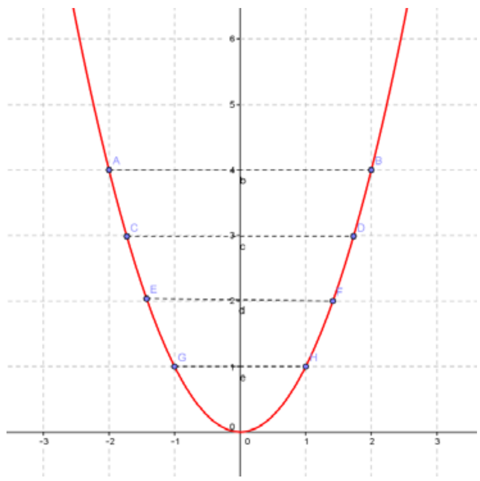
$$f(-x) = f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al eje de ordenadas, es decir, si doblamos el papel por dicho eje, la gráfica de la función coincide en ambos lados.

Ejemplo:

La función cuadrática $f(x) = x^2$ *es par:*

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



Una **función impar** es aquella en la que se obtiene lo opuesto al sustituir un número y su opuesto:

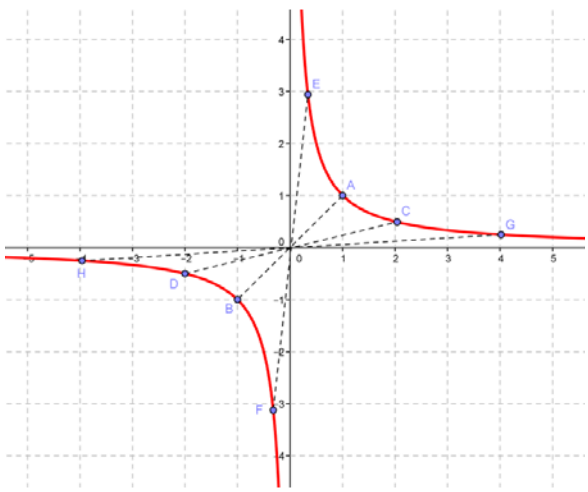
$$f(-x) = -f(x)$$

Esta propiedad se traduce en que la función es simétrica respecto al origen de coordenadas, es decir, si trazamos un segmento que parte de cualquier punto de la gráfica y pasa por el origen de coordenadas, al prolongarlo hacia el otro lado encontraremos otro punto de la gráfica a la misma distancia.

Ejemplo:

La función de proporcionalidad inversa $f(x) = \frac{1}{x}$ es impar porque:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

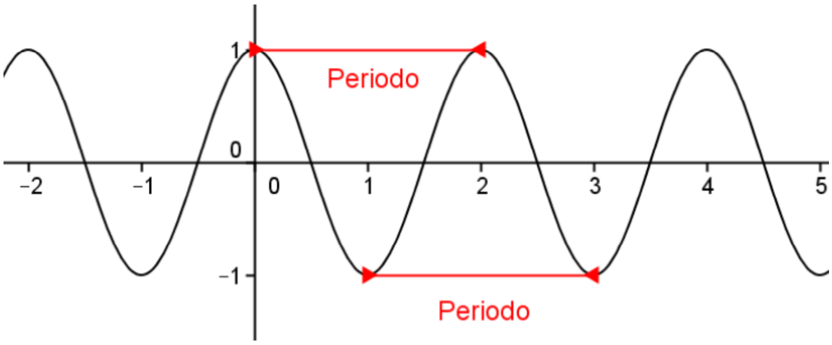


2.5. Periodicidad

Una **función periódica** es aquella en la que las imágenes de la función se repiten conforme se le añade a la variable independiente una cantidad fija, llamada *periodo.*

Ejemplo:

Es muy claro que la siguiente función es periódica de periodo 2. Observa que el periodo se puede medir entre dos "picos" o entre dos "valles". De hecho, se puede medir entre dos puntos equivalentes cualesquiera.



2.6. Comportamiento en el infinito

El infinito es, por propia definición, inalcanzable. Pero nos dice mucho de una función saber cómo es para valores muy grandes. Por eso, se recomienda, al dibujar una gráfica, dar un valor (o varios) positivo muy grande y un valor (o varios) muy negativo.

En algunas funciones simplemente ocurre que obtenemos valores muy grandes y "nos salimos de la tabla". Esto simplemente nos da una idea de hacia dónde va la función.

Pero en otras, y esto es lo interesante, nos aproximamos a un número finito. Eso significa que, para valores muy grandes de *x*, la función es aproximadamente una recta horizontal. Esta recta se llama **asíntota**.

Actividad resuelta

Dibuja la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ *dando valores muy grandes y muy negativos.*

Damos valores muy grandes y vemos que nos aproximamos a 1:

$$f(10)=\frac{10^2+2}{10^2+1}=1'0099,\quad f(100)=\frac{100^2+2}{100^2+1}=1'0001,$$

$$f(1000)=\frac{1000^2+2}{1000^2+1}=1{,}000001$$

Si damos valores muy negativos, pasa lo mismo:

$$f(-10)=\frac{(-10)^2+2}{(-10)^2+1}=1'0099,\quad f(-100)=\frac{(-100)^2+2}{(-100)^2+1}=1{,}0001,$$

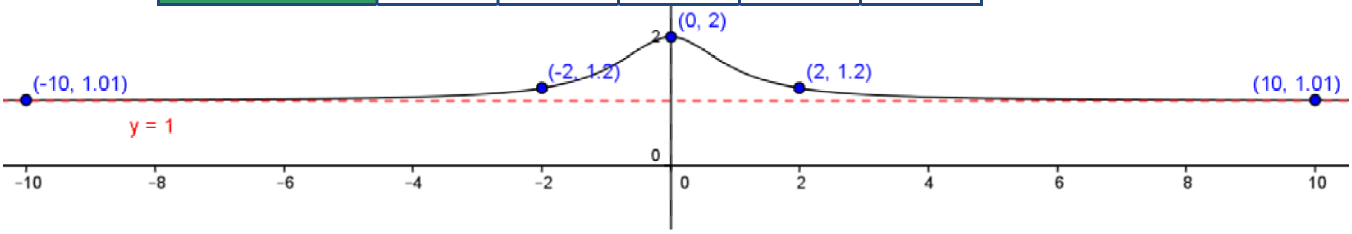
$$f(-1000)=\frac{(-1000)^2+2}{(-1000)^2+1}=1{,}000001$$

Podríamos haber visto directamente que los valores iban a ser los mismos porque la función es claramente par $f(-x)=f(x)$ y por tanto $f(-10)=f(10)$, $f(-100)=f(100)$ etc.

Eso nos da una idea de que la recta a la que nos aproximamos (asíntota) es la recta horizontal *y* = 1.

Vamos a dar unos valores más y dibujamos la función. Los valores negativos son iguales que los positivos. Hemos redondeado 1,0099 a 1,01

x	–10	–2	0	2	10
y	1,01	1,2	2	1,2	1,01



Observa la línea horizontal que es la asíntota dibujada en rojo a trazos.

Ten en cuenta que para dibujar correctamente una función, primero tenemos que estudiar los elementos principales que la caracterizan dependiendo de su expresión. En el próximo capítulo estudiaremos las funciones que vienen dadas por polinomios de primer y segundo grado.

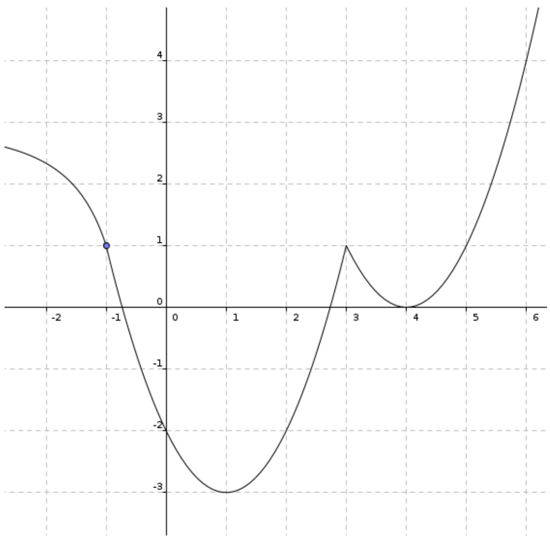
✗ 2.7. Descripción de una función

Si nos dan la gráfica de una función y nos piden describirla, es sencillo:

1. Miramos los valores de *x* donde cambia el comportamiento.
2. Describimos cada uno de los tramos
3. Describimos los máximos y mínimos indicando si son relativos o absolutos.

Actividad resuelta

Describe la función



La función es continua. Los puntos donde "pasa algo" son $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ y $x = 4$. Pasamos a describir los tramos:

En $(-\infty, -1)$ decreciente cóncavo. En $(-1, 1)$ decreciente convexo. En $(1, 3)$ creciente convexo. En el intervalo $(3, 4)$ decreciente convexo. En $(4, +\infty)$ creciente convexo.

A veces se pone separado el crecimiento y la curvatura:

Creciente en $(1, 3) \cup (4, +\infty)$

Decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

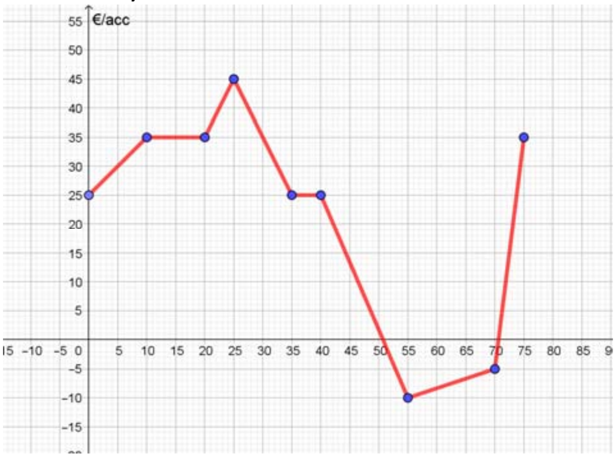
Cóncava en $(-\infty,-1)$. Convexa en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$

Finalmente hay un máximo relativo en $x = 3$ (3, 1). Hay mínimos relativos en $x = 1$ (1, -3) y $x = 4$ (4, 0). No hay máximo absoluto y en $x = 1$ hay un mínimo absoluto. Hay un punto de inflexión en (-1, 1).

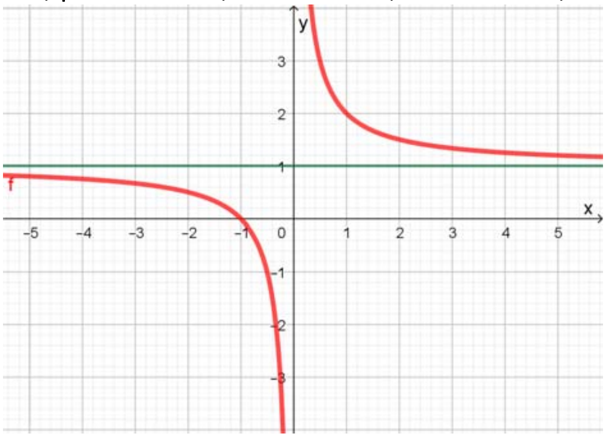
No hay asíntotas. Cuando *x* se hace muy grande la *y* tiende a $+\infty$, y cuando la *x* se acerca a $-\infty$ la *y* tiende también a $+\infty$.

Actividades propuestas

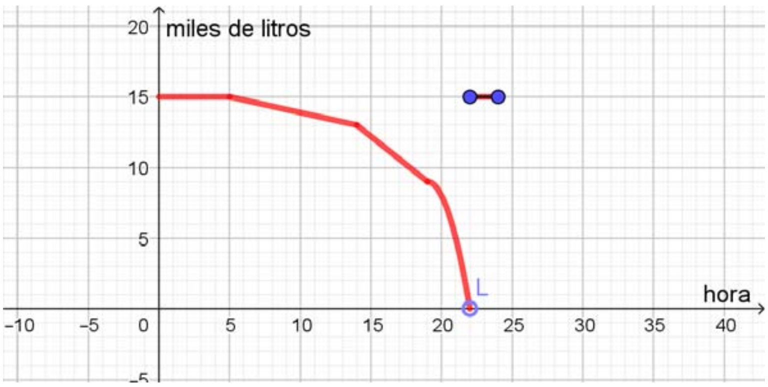
8. La gráfica que se da a continuación indica la evolución de un valor de la bolsa (en el eje vertical en miles de euros por acción) durante una jornada. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



9. Estudia la siguiente gráfica, indicando: dominio, recorrido, puntos de corte con los ejes, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



10. La gráfica que se da a continuación representa el volumen de combustible en el depósito de una gasolinera al cabo de un día. Estudia su dominio, recorrido, puntos de corte, simetría, periodicidad, crecimiento, continuidad, máximos y mínimos.



3. VALORES ASOCIADOS A LAS FUNCIONES

Muchas veces, nos interesa el comportamiento de una función en un valor concreto y alguna medida sobre ella. Por ejemplo, si consideramos el espacio que recorre un coche, lo que nos puede interesar no es todo el recorrido, sino sólo la velocidad al pasar junto a un radar. Las medidas más importantes vamos a describirlas ahora.

3.1. Tasa de variación y tasa de variación media (velocidad)

La **tasa de variación** de una función entre dos puntos *a* y *b* es la diferencia entre el valor de la función para *x* = *a* y el valor para *x* = *b*. En símbolos:

$$TV\left[a,b\right]=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

La **tasa de variación media** (**velocidad media**) de una función entre dos puntos *a* y *b* es el cociente entre la tasa de variación entre los mismos y la diferencia *a* y *b*. En símbolos:

$$TVM\left[a,b\right]=\frac{TV\left[a,b\right]}{b-a}=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$$

Estos conceptos pueden parecerte raros al principio. Pero realmente son cosas que se aplican mucho en la vida diaria. Pensemos en un coche que se mueve. El espacio que recorre entre dos momentos de tiempo es la tasa de variación. La velocidad media a lo que los ha recorrido es la tasa de variación media.

Actividad resuelta

El coche en que circulamos recorre 100 Km a 50 Km/h y luego otros 100 Km a 100 Km/h. En consecuencia, el espacio recorrido viene dado por la función $f\left(t\right)=\begin{cases}50t, & t\le 2\\ 100+100\cdot(t-2), & t>2\end{cases}$.

Se pide:

1. Justificar la función que da el espacio recorrido.
2. Calcular e interpretar las tasas de variación TV[0, 3], TV[1, 2], TV[2’5, 3]
3. Calcular e interpretar las tasas de variación medias TVM[0, 3], TVM[1, 2], TVM[2’5, 3]
4. ¿Por qué la velocidad media NO ha sido 75 Km/h, que es la media de las velocidades?

Apartado 1.

Para justificar la función, sólo tenemos que recordar la conocida fórmula $e=vt$. Lo único que hay que ver es cuándo cambia la velocidad.

Si el coche va a 50 km/h, obviamente en 2 h llega a los 100 km y cambia la velocidad. Hasta entonces, el espacio recorrido es 50*t* (velocidad por tiempo). A partir de allí, sería 100(*t* – 2) puesto que contamos el tiempo desde el instante 2. A ello se le debe sumar el espacio ya recorrido, que son 100.

Apartado 2. La tasa de variación no es más que el espacio recorrido. Basta con aplicar la definición. Como ya hemos dicho antes, no nos tiene que dar ningún miedo las funciones definidas a trozos. Simplemente sustituimos donde corresponda y punto.

$TV[0,3]=f(3)-f(0)=[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0=200$. Entre 0 y 3 horas hemos recorrido 200 Km.

$TV[1,2]=f(2)-f(1)=50\cdot 2-50\cdot 1=50$. Entre 1 y 2 horas hemos recorrido 50 Km.

$TV[2{,}5\ ,\ 3]=f(3)-f(2{,}5)=[100+100\cdot(3-2)]-[100+100\cdot(2{,}5-2)]=100\cdot(3-2{,}5)=50$. Hemos recorrido 50 Km entre las 2,5 horas y las 3.

Apartado 3. La tasa de variación media es lo que en el lenguaje de la calle se llama velocidad (media). Y para calcularla se divide el espacio entre el tiempo.

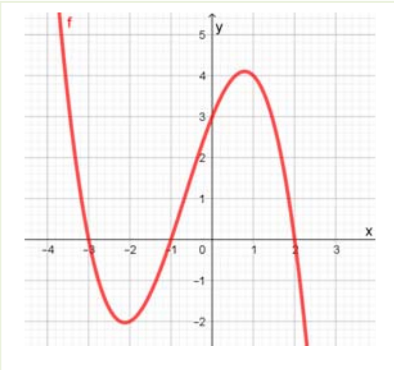
$TVM[0,3]=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{[100+100\cdot(3-2)]-50\cdot 0}{3-0}=66{,}67$ Km/h. Entre 0 y 3 horas nuestra velocidad media ha sido de 66'67 Km/h, una media (ajustada por el tiempo) de las velocidades.

$TVM[1,2]=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=\dfrac{50}{2-1}=50$. Entre 1 y 2 horas nuestra velocidad ha sido de 50 Km/h, como planteaba de hecho el problema.

$TVM\ [2{,}5\ ,\ 3]=\dfrac{f(3)-f(2{,}5)}{3-2{,}5}=\dfrac{50}{3-2{,}5}=100$. Entre 2,5 y 3 horas nuestra velocidad ha sido, como era de esperar, de 100 Km/h

Apartado 4. Porque hemos pasado más tiempo circulando a 50 Km/h que a 100 Km/h y por tanto nuestra velocidad media debe estar más cerca de 50 que de 100.

Actividades propuestas



11. Dada la función $f(x)=(x-1)^3$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [0, 1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

12. Dada la función $f(x)=\dfrac{3}{x}$, calcula la tasa de variación media en el intervalo [–3, –1]. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

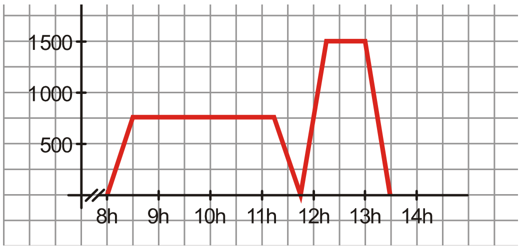
13. Calcula la TVM de esta función *f*(*x*) en los siguientes intervalos: *a*) [–3, -1] y b) [0, 2].

14. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo [0, 2] e indica si es creciente o decreciente en ese intervalo.

15. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=2x^2-3x$ en el intervalo [1, 2] e indica si *f*(*x*) crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Pablo salió de su casa a las 8 de la mañana para ir al instituto. En el recreo, tuvo que volver a su casa para ir con su padre al médico. La siguiente gráfica refleja la situación. Las distancias vienen dadas en metros.



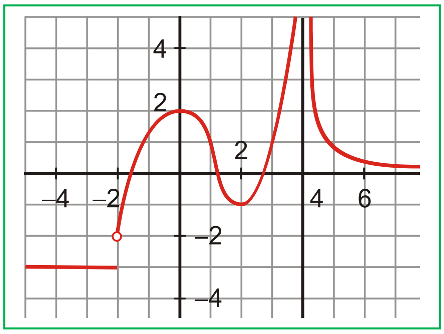
a) ¿A qué hora comienzan las clases y a qué hora empieza el recreo?

b) ¿A qué distancia de su casa está el instituto? ¿Qué velocidad lleva cuando va a clase?

c) ¿A qué distancia de su casa está el consultorio médico? ¿Qué velocidad llevan cuando se dirigen allí?

d) ¿Cuánto tiempo ha estado en clase? ¿Y en el consultorio médico?

2. Dada la función a través de la siguiente gráfica:



a) Indica cuál es su dominio de definición.

b) ¿Es continua? Si no lo es, indica los puntos de discontinuidad.

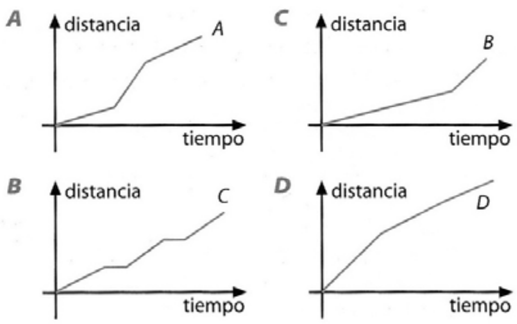
c) ¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y cuáles los de decrecimiento de la función?

d) ¿Qué ocurre en el intervalo (–∞, –2]?

3. Dibuja la gráfica de $f(x)=\begin{cases} 1-x & si \quad x\le 1 \\ x^2-4x & si \quad 1<x \end{cases}$ y explica si es continua en $x=1$.

4. Tres kilos de peras nos han costado 4,5 €; y, por siete kilos, habríamos pagado 10,5 €. Encuentra la ecuación de la recta que nos da el precio total, "y", en función de los kilos que compremos, "x". Haz una tabla de valores y represéntala gráficamente.

5. Asigna las gráficas al recorrido efectuado por los siguientes estudiantes en su camino diario a su escuela de adultos:



a) Emilio es el que vive más lejos de la escuela.

b) Ana debe recoger a dos amigas por el camino y siempre le toca esperar.

c) Felipe es el que menos tiempo tarda.

d) Isabel es dormilona; siempre le toca correr en el último tramo, aunque es la que vive más cerca de la escuela.

6. El precio del viaje de fin de curso de un grupo de alumnos es de 200 euros por persona si van 30 alumnos o menos. En cambio, si viajan más de 30 y menos de 40, rebajan un 5 % por cada alumno que sobrepase el número de 30, y si viajan 40 o más, el precio por persona es de 100 euros. Halla la expresión y de la función que hace corresponder al número de viajeros el precio del viaje.

7. Halla el dominio de las siguientes funciones:

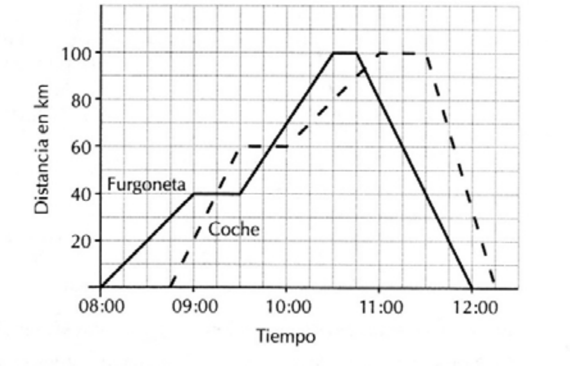
a) $f(x)=\dfrac{5x-3}{4x-1}$ c) $f(x)=\sqrt{3x+6}$ e).

$f(x)=\dfrac{4x^2-3x}{1+5x-6x^2}$

b) d) $f(x)=2-\dfrac{3}{x^2-3x}$ f).

$f(x)=\sqrt[3]{x^2+2x}$

8. La siguiente gráfica muestra los viajes hechos por una furgoneta y un coche saliendo desde Teruel hacia la población de Alcañiz, ida y vuelta.



a) ¿Cuánto tiempo se detuvo la furgoneta durante el trayecto?

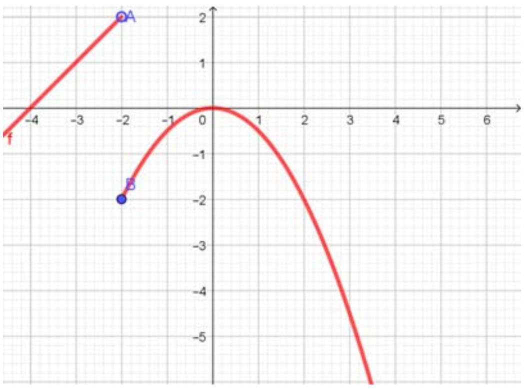
b) ¿A qué hora adelantó el coche a la furgoneta?

c) ¿Qué velocidad llevaba la furgoneta entre las 9:30 y las 10:00?

d) ¿Cuál fue la mayor velocidad alcanzada por el coche durante el viaje?

e) ¿Cuál fue la velocidad media del coche en el viaje completo?

9. La siguiente gráfica corresponde a la función: _ .



Estudia las zonas de crecimiento-decrecimiento, los extremos (máximos-mínimos) y su continuidad.

10. Representa gráficamente una función *f*, que cumpla las siguientes condiciones:

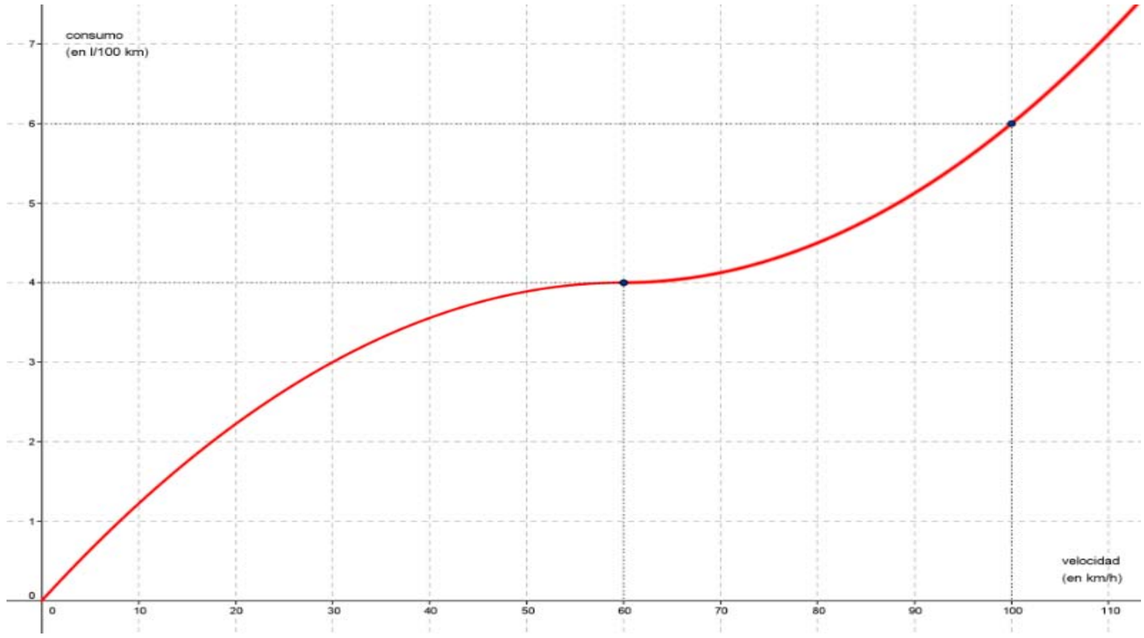
a) Dom (*f*) = [–5, 6]
b) Crece en los intervalos (–5, –3) y (0, 6); decrece en el intervalo (–3, 0).
c) Es continua en su dominio.
d) Corta al eje OX en los puntos (–5, 0), (–1, 0) y (4, 0).
e) Tiene un mínimo en (0, –2) y máximos en (–3, 3) y (6, 3).

11. Construye una gráfica que represente la audiencia de una determinada cadena de televisión durante un día, sabiendo que:

a) A las 0 horas había, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores.
b) Este número se mantuvo prácticamente igual hasta las 6 de la mañana.

c) A las 7 de la mañana alcanzó la cifra de 1,5 millones de espectadores.
d) La audiencia descendió de nuevo hasta que, a las 13 horas, había 1 millón de espectadores.
e) Fue aumentando hasta las 21 horas, momento en el que alcanzó el máximo: 6,5 millones de espectadores.
f) A partir de ese momento, la audiencia fue descendiendo hasta las 0 horas, que vuelve a haber, aproximadamente, 0,5 millones de espectadores.

12. El consumo de gasolina de un coche por cada 100 km viene representado mediante la gráfica.



a) ¿Cuál es la variable dependiente?
b) ¿Y la independiente?
c) ¿Cuál es el consumo para una velocidad de 60 km/h?
d) ¿A qué velocidad el consumo es de 6 l/100 km?

13. Utiliza la gráfica para explicar cómo varía el consumo de gasolina dependiendo de la velocidad del coche.Joaquín ha llegado a un acuerdo con su padre para recibir su paga. Cobrará 20 euros al mes el primer año, y 5 euros más por cada año que pase. ¿Cuánto le corresponderá dentro de 7 años? Haz una tabla de valores y representa su gráfica. ¿Es continua? Indica los puntos de discontinuidad y su tipo. Busca una fórmula que permita calcular la paga cuando hayan pasado n años.

14. Al entrar en el aparcamiento de un centro comercial encontramos un letrero con los precios que nos indican que 1 hora o fracción cuesta 1,20 € y las dos primeras horas son gratis para los clientes con tarjeta de compra del centro. Haz una tabla que relacione el tiempo con el importe pagado durante una jornada completa (12 horas) en los casos de un cliente con tarjeta o sin ella. Esboza la gráfica y contesta a las preguntas:

a) ¿Qué valores toma la variable dependiente? ¿Y la independiente?
b) ¿Puedes unir los puntos de la gráfica? ¿Cómo se debe hacer?
c) ¿Existen puntos de discontinuidad? Si la respuesta es afirmativa, señálalos y explica su significado.