Módulo de Matemáticas Académicas II

Módulo de Matemáticas Aplicadas II

Nivel II de ESPAD

Unidad 0

Números naturales y enteros

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR de Alcorcón en cualquiera de las dos opciones (enseñanzas académicas o enseñanzas aplicadas)

En esta unidad se desarrollan contenidos específicos del nivel I que es necesario revisar porque el conocimiento de los mismos y el dominio de las operaciones con números enteros es imprescindible para comenzar el estudio de los contenidos específicos del nivel II del currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

ÍNDICE

1. ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Nuestro sistema de numeración es decimal y posicional. Para escribir cualquier número se utilizan diez dígitos o cifras (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). El valor de una cifra depende de su posición en el número. Cada diez unidades de un orden forman una unidad del orden siguiente superior:

10 unidades = 1 decena, 10 decenas = 1 centena, 10 centenas = 1 unidad de millar,

10 unidades de millar = 1 decena de millar, 10 decenas de millar = 1 centena de millar,

10 centenas de millar = 1 unidad de millón,…

Ejemplo: En el número 7 805 213 el valor de cada cifra viene dado por su posición, como puede verse en la siguiente descomposición:

$7\ 805\ 213 = 3 + 1\cdot 10 + 2\cdot 100 + 5\cdot 1000 + 0\cdot 10\ 000 + 8\cdot 100\ 000 + 7\cdot 1\ 000\ 000$

2. NÚMEROS NATURALES

Los números naturales son los que nos sirven para contar más el cero y son infinitos.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots.\}$$

2.1. Operaciones con números naturales y propiedades

La **suma** o adición de números verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $a+b=b+a$

  Ejemplo: $13+19 = 19+13 = 32$

- Asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$

  Ejemplo: $(15+7)+23 = 22+23 = 45$; $15+(7+23) = 15+30 = 45$

- El número 0 es el neutro para la suma: $0+a =a$

  Ejemplos: $0+3=3$; $0+7=7$

La multiplicación o **producto** de números naturales es la suma de varios sumandos iguales. (A partir de ahora se usará con más frecuencia el símbolo · como signo de multiplicar que símbolo x). El producto de números verifica las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $a\cdot b=b\cdot a$.

  Ejemplo: $13\cdot 10 = 10\cdot 13 = 130$

- Asociativa: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot (b\cdot c)$.

  Ejemplo: $(5\cdot 7)\cdot 2 = 35\cdot 2= 70$;$5\cdot (7\cdot 2) = 5\cdot 14 = 70$

- El número 1 es el neutro para la multiplicación: $1\cdot a = a$

  Ejemplos: $1\cdot 5=5$; $1\cdot 9=9$

- Distributiva del producto con respecto a la suma: $a\cdot (b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Ejemplo: 5·(7+2) = 5.7+5·2

La resta o **diferencia** en el conjunto de los números naturales sólo es posible cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo y es una operación relacionada con la suma de la siguiente manera: la igualdad a-b = c equivale a la igualdad a = c+b.

Ejemplo: 74 – 26 = 48 porque 48 + 26 = 74

Dividir es repartir una cantidad en partes iguales. Los términos de la **división** se llaman:

<u>Dividendo</u>, la cantidad que se reparte (D); <u>Divisor</u>, el número de partes que se hacen (d); <u>Cociente</u>, la cantidad que tiene cada parte (c); <u>Resto</u>, la cantidad que sobra al repartir (r). En toda división de números naturales se verifica que **el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente más el resto**: D = d·c+r. La división es exacta cuando el resto es cero e inexacta cuando el resto es distinto de cero.

Ejemplo: La división 469 : 2 no es exacta, el cociente es 234 y el resto es 1

Se verifica que 469 = 2·234 + 1.

Una **potencia** es una multiplicación en la que todos los factores son iguales. El factor que se repite se llama *base* y el número de veces que se repite *exponente*.

Ejemplo: 3^4 (se lee tres elevado a la cuarta) es igual a 3·3·3·3 = 81

Las operaciones con potencias verifican las siguientes propiedades:

$\boxed{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$ El producto de potencias de igual base es otra potencia de igual base y cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores

$\boxed{x^a : x^b = x^{a-b}}$ El cociente de dos potencias con la misma base es otra potencia de igual base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes

$\boxed{(x^a)^b = x^{a\cdot b}}$ Para calcular una potencia de una potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes

$\boxed{(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x}$ La potencia de un producto es igual al producto de las potencias

$\boxed{(a : b)^x = a^x : b^x}$ La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias

Por convenio $\boxed{a^1 = a}$ y $\boxed{a^0 = 1}$ (cualquier potencia de exponente 0 es igual a 1)

La **raíz cuadrada** exacta de un número es otro número tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene el primero: $\boxed{\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x}$

Ejemplo: $\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$

Cuando el radicando no es un cuadrado perfecto, se halla la raíz cuadrada entera que es el mayor número natural cuyo cuadrado es menor que dicho número. Se llama resto a la diferencia entre el número y el cuadrado de la raíz entera.

Ejemplo: la raíz entera aproximada de 27 es 5 con resto 2 porque 27 = 5^2+2

2.2. Operaciones combinadas y prioridades

Para realizar operaciones combinadas –sumas, restas, multiplicaciones y divisiones- hay que tener en cuenta el siguiente orden de prioridad:

1º. Suprimir los paréntesis después de realizar las operaciones que en ellos se indican.

2º. Realizar las potencias y raíces.

3º. Efectuar las multiplicaciones y divisiones según aparezcan de izquierda a derecha y antes que las sumas y restas.

4º. Efectuar las sumas y restas en el orden de izquierda a derecha según aparezcan.

Ejemplos: $325 – (20+ 40·7) = 325 – (20 + 280) = 325 – 300 = 25$

$35·2 : (27 – 22) = 70 : 5 = 14$

$5 \cdot 2^3 + \sqrt{64} = 5 \cdot 8 + 8 = 40 + 8 = 48$

Actividades propuestas

1. Completa la siguiente tabla después de realizar las operaciones adecuadas y comprobar en cada caso la relación dividendo = divisor · cociente + resto

DIVIDENDO	DIVISOR	COCIENTE	RESTO	¿Es la división exacta?
140	7			
150	15			
650	6			
288	24			
8000	100			
403	15			
	40	8	0	
	7	6	4	
	12	12	3	

2. Efectúa las siguientes operaciones combinadas:

a) $18 – 6 + 3 – 5 =$

b) $13 + 6 \cdot 5 – 3 \cdot 8=$

c) $7 \cdot 8 – 8 \cdot 2 - 6 – 3=$

d) $9 – 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 =$

e) $(7 + 4) \cdot 6 =$

f) $(8 – 3) \cdot (6 + 2)=$

g) $(18 + 2 – 5) \cdot 2 =$

h) $6 \cdot (45 – 15) : 12 + (24 – 6) \cdot 3 =$

i) $(2+5+3)^4 =$

j) $(10+1)^2 =$

k) $10^2 + 1^2 =$

l) $3^2 + 3^2 + 3^2 =$

m) $\sqrt{16} + \sqrt{9} =$

n) $\sqrt{16+9} =$

ñ) $16 + 5^2 - 3^2 =$

o) $3^2 + \sqrt{25} \cdot 2^3 =$

p) $\sqrt{49} - \sqrt{9} - 2^2 =$

q) $(\sqrt{81} - \sqrt{9})^2 + (\sqrt{81} - \sqrt{9}) =$

r) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{100} + 10^3 =$

3. Halla el valor de las siguientes potencias:

   a) 9^2 b) 4^3 c) 10^6

4. Expresa los siguientes números como potencias de 10:

   a) 1.000 b) 1.000.000 c) 10 d) 1

5. Expresa en forma de una sola potencia:

   a) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 =$

   b) $4^8 \div 4^5 =$

   c) $(7^9 \div 7^3) \div 7^4 =$

   d) $(3^2)^4 =$

   f) $5^3 \cdot (5^3)^2 =$

   g) $5^3 \cdot 2^3 =$

   h) $8^2 \div 4^2 =$

6. En un mercado se venden cada día 80 toneladas de fruta. ¿Cuántos camiones de dos toneladas se necesitan para transportar la fruta vendida en una semana?

7. En un edificio de oficinas hay 4 plantas, en cada planta hay 4 oficinas y en cada oficina hay 4 mesas iguales con 4 cajones cada una. ¿Cuántos cajones hay en todo el edificio?

8. Jaime quiere colocar 36 soldados de plomo de forma cuadrada, con el mismo número de filas que de columnas ¿Cuántas filas tendrá la formación?

9. El salón de actos de un instituto tiene forma cuadrada y mide 900 metros cuadrados ¿cuánto mide cada lado?

10. Una furgoneta transporta dos cajas de huevos con 15 docenas cada una. En un frenazo se vuelcan las cajas y se rompen 137 huevos. ¿Cuántos quedan enteros?

11. Un almacenista de fruta compra las manzanas a 22 € la caja y las vende a 2 € el kg. Sabiendo que una caja contiene 15 kg de manzanas, ¿cuántas cajas ha de vender para ganar 600?

3. DIVISIBILIDAD

3.1. Múltiplos y divisores de un número

Un número natural *a* es **múltiplo** de otro número natural *b* si es el resultado de multiplicar éste último por un número natural *c* cualquiera: $a = b \cdot c$

Un número natural es **divisor** de otro si al dividir el segundo por el primero, la división es exacta. En este caso decimos que el segundo número natural es *divisible* por el primero.

> ***Ejemplo:*** 26 es *múltiplo de* 2 porque 26 = 2· 13 , lo que es equivalente a decir que 2 es *divisor de* 26 porque 26:2 = 13, o también que 26 es *divisible por* 2.

3.2. Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas que permiten saber si un número natural es divisible por otro sin tener que realizar la división correspondiente.

- Un número es divisible *por 2* si la cifra de las unidades es 0 o par.
- Un número es divisible *por 3* si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible *por 4* cuando sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 4 o son dos ceros
- Un número es divisible *por 5* si la cifra de las unidades es 0 o 5.
- Un número es divisible *por 9* si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
- Un número es divisible *por 11* si la diferencia entre las sumas de las cifras que ocupan lugares pares y las que ocupan lugares pares es cero o múltiplo de 11.

3.3. Números primos y números compuestos

Un número natural es **primo** si sólo es divisible por él mismo y por la unidad.

Los primeros números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …

Un número es **compuesto** si no es primo, es decir, si tiene algún divisor distinto de él mismo y de la unidad.

El número 1 no es primo ni compuesto, sólo tiene un divisor.

Para averiguar si un número es primo se divide por cada uno de los números primos 2, 3, 5, 7, 11,… sucesivamente, hasta que se obtenga una división exacta (en cuyo caso el número es compuesto), o hasta que uno de los cocientes realizados sea menor o igual que el divisor respectivo sin ninguna división exacta (en cuyo caso el número es primo)

3.4. Descomposición factorial de un número

Descomponer un número en factores primos es expresarlo como producto de números primos.

El método usado para descomponer un número en factores primos es el siguiente:

1º. Se divide dicho número por el primer número primo que sea divisor de éste. Se realiza esta operación con los siguientes números primos hasta llegar a una división de cociente igual a 1.

2º. La descomposición factorial será el producto de los divisores de dichas operaciones.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

La descomposición factorial de 90 es $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

3.5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

El **máximo común divisor** de dos o más números es el mayor divisor común a dichos números y se representa por **m.c.d.**

Para calcular el m.c.d. de varios números se puede seguir el siguiente método:

1º. Se descomponen en factores primos dichos números.

2º. Se consideran los factores primos comunes a todos ellos.

3º. Se realiza el producto de dichos factores comunes, elevados al menor exponente con el que aparecen en las descomposiciones, y el resultado es el m.c.d. de dichos números.

El **mínimo común múltiplo** de dos o más números es el menor múltiplo común a dichos números y se representa por **m.c.m.**
Para calcular el m.c.m. de varios números se puede seguir el siguiente método:

1º. Se descomponen en factores primos dichos números.

2º. Se consideran todos los factores primos, tanto comunes como no comunes

3º. Se realiza el producto de dichos factores, elevados al mayor exponente con el que aparecen en las descomposiciones, y el resultado es el m.c.m. de dichos números.

***Ejemplo*:** Dados los números 90 y 1540, sus descomposiciones factoriales son

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ y } 1540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Luego, $m.c.d.(90,1540) = 2 \cdot 5 = 10$ y $m.c.m.(90,1540) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 13860$

El producto del m.c.d. y del m.c.m. de dos números cualesquiera es igual al producto de ambos

***Ejemplo*:** m.c.d. (14, 30) = 2 , m.c.m. (14, 30) = 210 y se verifica que 2·210 =14·30 = 420.

Si el m.c.d. de dos números es igual a 1, se dice que dichos números son **primos entre sí**. Si dos números son primos entre sí, el m.c.m. es igual a su producto.

Ejemplo: Los números 7 y 12 son primos entre sí porque m.c.d.(7, 12) = 1
m.c.m.(7, 12) = 7·12 =84

Si dividimos dos números por su m.c.d., los cocientes que se obtienen son primos entre sí.

Ejemplo: m.c.d.(14, 30) = 2 , 14:2 = 7, 30:2 = 15 y m.c.d.(7, 15) =1.

Actividades propuestas

12. Escribe todos los divisores de cada uno de los siguientes números:

    a) 36

    b) 56

13. Escribe las listas de los diez primeros múltiplos de 12 y de 16 y observando las dos listas deduce cuál es el m.c.m.(12, 16).

14. Razona si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

    a) 381 es divisible por 3

    b) 1384 es divisible por 2

    c) 5295 es divisible por 3 y por 5

    d) 850 es divisible por 2 y por 5

    e) El cociente de una división exacta es divisor del dividendo.

15. Completa con la palabra adecuada (*múltiplo, divisor, divisible*):

    a) 16 es …………………….. por 2

    b) 4 es …………………….. de 20

    c) 27 es …………………….. de 9

16. Realiza la Criba de Eratóstenes para obtener los números primos comprendidos entre 1 y 100. Para ello tienes que tachar en la tabla adjunta el número 1 que no es primo, a continuación todos los múltiplos de 2, excepto 2 que es primo; después todos los múltiplos de 3 excepto 3 que es primo y así sucesivamente se hace lo mismo con los primos 5 y 7. Al hacerlo con 11 se observa que todos sus múltiplos han sido ya tachados y se concluye que los números que quedan sin tachar son los números primos menores que 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

17. Clasifica razonadamente los siguientes números en primos o compuestos:

    a) 55
    b) 83
    c) 115
    d) 301
    e) 307
    f) 721
    g) 2352

18. Fíjate en el modelo y completa la tabla como productos equivalentes:

60	6·10	2·3·10	2·2·3·5
40			
	4·8		
			2·5·5·5

19. Descomponer en factores primos los siguientes números:

a) 36 b) 52 c) 231 d) 999

20. Calcula estos números y escribe sus divisores:

a) $2^3 \cdot 3 =$ b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 =$ c) $4^2 \cdot 9 =$

21. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números:

a) 2 y 64
b) 20 y 75
c) 4, 6 y 12
d) 6, 9, 12

22. Tenemos que repartir 60 bolas de tenis en estuches de la misma capacidad. ¿Qué capacidades pueden tener los distintos estuches? ¿Cuántos estuches necesitamos en cada caso?

23. Los libros de la biblioteca se pueden organizar en grupos de 2, 3, 5 o 6 ¿cuántos libros pueden ser como mínimo?

24. Dos corredores de Fórmula 1 se entrenan en un circuito. El primero tarda 60 segundos en dar una vuelta mientras que el segundo tarda 70 segundos. Si salen de la meta a la vez, ¿al cabo de cuánto tiempo tardarán en volver a cruzarse en la meta?

25. Los alumnos de 1º de un instituto son entre 80 y 100. Se pueden agrupar exactamente de 4 en 4, pero si se agrupan de 5 en 5 sobra uno. ¿Cuántos son?

26. Una plaza mide 45 m de largo y 25 m de ancho. Se la quiere dividir en zonas cuadradas iguales lo más grandes posible. Calcula la medida del lado de cada cuadrado. ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener?

27. Un anuncio luminoso se enciende cada 10 segundos, otro cada 15 y un tercero cada 18. Calcula cada cuántos segundos se encenderán los tres a la vez.

4. NÚMEROS ENTEROS

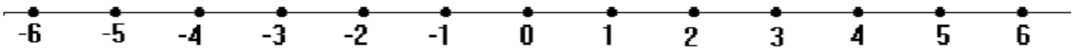
Los números naturales no son suficientes para describir situaciones cotidianas como dar posiciones por debajo del nivel del mar, temperaturas por debajo de 0 grados, el saldo de una cuenta cuando se gasta más de lo que se tenía,…Para este tipo de situaciones se utilizan números con signo, positivos y negativos.

***Ejemplos*:**

- Al hacer las cuentas del dinero que uno tiene, los números negativos indican el dinero gastado, mientras que los números positivos indican el dinero recibido.
- Para medir las temperaturas se define una temperatura de 0 grados como referencia de forma que las temperaturas superiores se dan con números positivos y las inferiores con números negativos.

El conjunto de los números enteros está formado por los números naturales, que son los enteros positivos y que llevan el signo + o no llevan signo, los enteros negativos, que llevan delante el signo –, y el cero, que no es positivo ni negativo. El conjunto de los números enteros se representa por la letra Z:

$$\mathrm{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$



Los números enteros se representan en una recta eligiendo sobre la misma un punto que represente el 0 y una unidad de medida con la que llevar los números positivos a la derecha del cero y los números negativos a la izquierda.

$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$ (El conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros)

4.1. Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número entero es la distancia que lo separa de 0 en la recta graduada y coincide con el número natural que resulta de eliminar su signo.

***Ejemplo*:** $|+5| = |-5| = 5$

Dos números enteros que tienen distinto signo e igual valor absoluto se llaman números **opuestos**.

***Ejemplo*:** 2 es el opuesto de –2, y viceversa.

El 0 es opuesto de sí mismo.

4.2. Relación de orden en el conjunto de los números enteros

Los enteros positivos son mayores que los negativos.

Entre dos enteros positivos es mayor el de mayor valor absoluto.

Entre dos enteros negativos es mayor el de menor valor absoluto.

El menor de dos números enteros es el situado más a la izquierda en la recta numérica.

Ejemplos:

$-7 < -3 < 0 < 1 < 5$ (el símbolo $<$ significa *es menor que*)

$4 > 2 > -2 > -4 > -9$ (el símbolo $>$ significa *es mayor que*)

4.3. Operaciones con números enteros

Operación	Reglas para realizar la operación	Ejemplos
SUMA	Para sumar dos números enteros del mismo signo se suman sus valores absolutos y se deja el mismo signo.	(+4) + (+3) = +7 (– 4) + (– 3) = – 7
	Para sumar dos números enteros de distinto signo se restan sus valores absolutos y se antepone el mismo signo del que tenga mayor valor absoluto.	(– 4) + (+3) = – 1 (+ 4) + (– 3) = +1
RESTA	Para restar dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.	(– 4)–(– 3) = (– 4) + (+3) = – 1
PRODUCTO	Para multiplicar dos números enteros con el mismo signo se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo +	(+4)·(+3) = +12 (– 4)·(– 3) = +12
	Para multiplicar dos números enteros con distinto signo se multiplican sus valores absolutos y se pone el signo –	(+4)·(– 3) = – 12 (– 4)·(+ 3) = – 12
DIVISIÓN	Para dividir dos números enteros con el mismo signo se dividen sus valores absolutos y se pone el signo +	(+12) : (+4) = +3 (– 12) : (– 4) = +3
	Para dividir dos números enteros con el distinto signo se dividen sus valores absolutos y se pone el signo –	(+12) : (– 4) = – 3 (– 12) : (+ 4) = – 3

4.4. Reglas para suprimir paréntesis

Si delante de un paréntesis tenemos el signo +, quitamos el paréntesis y dejamos los números en su interior como están, o sea, con su signo. Si delante de un paréntesis tenemos el signo -, quitamos el paréntesis y cambiamos el signo de los números contenidos en él

Ejemplo:5 + (– 8 + 4 – 2)–(2 + 6 – 5) = 5 – 8 + 4 – 2 – 2 – 6 + 5 = 5 + 4 + 5 – 8 – 2 – 2– 6 = 14 – 18 = – 4

Las operaciones combinadas de sumas y restas con paréntesis se pueden hacer de dos formas:

- Suprimiendo primero los paréntesis y operando después, como en el ejemplo anterior.
- Realizando primero las operaciones de dentro del paréntesis y suprimiéndolo luego.

Ejemplo: 5 + (– 8 + 4 – 2) – (2 + 6 – 5) = 5 + (– 6) – (3) = 5 – 6 – 3 = 5 – 9 = – 4

4.5. Potencias de exponente natural de números enteros

Para calcular la potencia de exponente natural de un número entero se multiplica la base por sí misma tantas veces como indique el exponente.

Ejemplos:

$$(+4)^3 = (+4)\cdot(+4)\cdot(+4) = +64 \, ;$$

$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8 \qquad ;$$

$$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +16$$

Las potencias de base positiva son números positivos.

Las potencias de base negativa y exponente impar son números negativos.

Las potencias de base negativa y exponente par son números positivos.

4.6. Operaciones combinadas y prioridades

Para realizar operaciones combinadas –sumas, restas, multiplicaciones y divisiones- con números enteros hay que tener en cuenta el mismo orden de prioridad que con los naturales:

1º. Suprimir los paréntesis después de realizar las operaciones que en ellos se indican

2º. Realizar las potencias y raíces.

3º. Efectuar las multiplicaciones y divisiones según aparezcan de izquierda a derecha y antes que las sumas y restas.

4º. Efectuar las sumas y restas en el orden de izquierda a derecha según aparezcan.

***Ejemplo*:**

$$4+2\cdot(3-7-1)-(-9):(-3)+5=4+2\cdot(-5)-3+5=4+(-10)-3+5=9-13=-4$$

4.7. Múltiplos y divisores de un número entero

Los conceptos sobre divisibilidad que se definieron para números naturales se definen de manera similar para números enteros.

Un número entero *a* es **múltiplo** de otro número entero *b* si es el resultado de multiplicar éste último por un número entero *c* cualquiera: *a= b·c*

Un número natural es **divisor** de otro si al dividir el segundo por el primero, la división es exacta. En este caso decimos que el segundo número entero es divisible por el primero.

Ejemplo:

26 es *múltiplo de* −2 porque 26 = (−2)·(−13) , lo que es equivalente a decir que −2 es *divisor de* 26 porque 26:(−2) = −13, o también que 26 es *divisible por* −2.

Actividades propuestas

28. Representa sobre una recta los números +4, -6, 7 y -10 y da el valor absoluto de cada número.
29. Ordena los números 305, -17, -4, 777, 0, 3, -15, 18 y -8 de menor a mayor con el símbolo <.
30. Ordena los números -25, -705, +67, 113, -3, 0. -14,21 y +32 de mayor a menor con el símbolo >.
31. ¿Qué número está cuatro unidades a la izquierda de -5 en la recta numérica?
32. ¿Cuál es el entero anterior a -1000?,¿y el siguiente?
33. ¿Qué valores puede tener x si verifica que -7<x<5?
34. La temperatura más alta registrada en la Tierra fue de 58° C en Libia en septiembre de 1922, y la más baja fue de -88° C en la Antártida en agosto de 1960. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura registrada en Libia y la registrada en la Antártida?,¿y entre la Antártida y Libia?
35. Una empresa empezó el año con un saldo de -35000 €. Gracias a una buena gestión obtuvo a lo largo del año 21000 € de beneficios. ¿Cuál fue su saldo al acabar el año?¿Cuánto dinero necesita para quedarse con un saldo de +72000 €?

36. El producto de dos números enteros es igual a – 56. ¿Cuáles pueden ser los dos números? Escribe cuatro casos diferentes.

37. Realiza las siguientes operaciones con números enteros:

a) $4\cdot(-5) - 23 =$

b) $7+8\cdot(-2) =$

c) $2\cdot(-3)+3\cdot(-2)=$

d) $(-6):2 + (-2)\cdot 5=$

e) $(-14):(-7) - (-2)\cdot(+3) =$

f) $8 - 5\cdot(10 + (-5)\cdot(12-6)) =$

g) $(8-3)\cdot(20 + (-5)\cdot(12-3)) =$

h) $(-5) - (-4) + (-3) - (-7) =$

i) $-7 - (23-15) + (-1+4) =$

j) $4 - [-14 - (2-5) +7] =$

38. Aplica primero la propiedad distributiva y después obtén el resultado de las siguientes operaciones:

a) $8\cdot(-3+7-2) =$

b) $-5\cdot(6+4-9) =$

39. Empieza los siguientes cálculos sacando factor común y obtén el resultado final:

c) $4\cdot(-3) + 4\cdot 5 + 4\cdot(-8) =$

d) $-2\cdot 6 + (-2)\cdot(-3) + (-2)\cdot 9 =$

40. Completa la siguiente tabla. ¿Qué propiedad se está comprobando?

a	b	c	a·b	b·c	(a·b)·c	a·(b·c)
-3	6	-5				
-1	-4	-9				

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(1)

DIVIDENDO	DIVISOR	COCIENTE	RESTO	¿Es la división exacta?
140	7	20	0	sí
150	15	10	0	sí
650	6	108	2	NO
288	24	12	0	SÍ
8000	100	80	0	SÍ
403	15	26	13	NO
320	40	8	0	SÍ
46	7	6	4	NO
147	12	12	3	NO

(2) (a) 10 (b) 19 (c) 31 **(d)** 16 **(e)** 66 **(f)** 40 **(g)** 30 **(h)** 69 **(i)** 10 000 **(j)**121
(k) 101 **(l)** 27 **(m)** 7 **(n)** 5 **(ñ)** 32 **(o)** 49 **(p)** 0 **(q)** 42 **(r)** 1050

(3) **(a)** 81 **(b)** 64 **(c)** 1 000 000
(4) **(a)** 10^3 **(b)**10^6 **(c)**10^1 **(d)** 10^0
(5) **(a)** 2^{10} **(b)** 4^3 **(c)** 7^2 **(d)** 3^8 **(f)** 5^9 **(g)** 10^3 **(h)** 2^2
(6) 280 camiones **(7)** 256 cajones **(8)** 6 filas **(9)** 30 metros **(10)** 30 metros **(11)** 75 cajas
(12) **(a)** 1, 36, 2, 18, 3, 12, 4, 9, 6 **(b)** 1, 56, 2, 28, 4, 14, 7, 8

(13) Múltiplos de 12: 12, 24, 36, **48**, 60,72, 84, 96, 108, 120,...
Múltiplos de 16: 16, 32, **48**, 64, 80, 96, 122, 138, 154, 180, ... m.c.m.(12, 16)=**48**
(14) **(a)** verdad **(b)** verdad **(c)** verdad **(d)** verdad **(e)** verdad
(15) **(a)** divisible **(b)** divisor **(c)** múltiplo
(16) Números primos menores que 100:

2, 3, 5, 7
11, 13, 17, 19
23, 29,
31,37,
41, 43, 47,
53, 59,
61, 67,
71, 73, 79,
83, 89,
97

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

(17) **(a)** compuesto **(b)** primo **(c)** compuesto **(d)** compuesto **(e)** primo **(f)** compuesto **(g)** compuesto

(18)

60	6·10	2·3·10	2·2·3·5
40	**4·10**	**2·2·10**	**2·2·2·5**
32	4·8	**2·2·4·2**	**2·2·2·2·2**
250	**10·25**	**10·5·5**	**2·5·5·5**

(19) **(a)** $2^2·3^2$ **(b)** $2^2·13$ **(c)** 3·7·11 **(d)** $3^3·37$

(20) **(a)** 24 Divisores: 1, 24, 2, 12, 3, 8, 4 y 6
(b) 60 Divisores: 1, 60, 2, 30, 3, 20, 4, 15, 5, 12, 6 y 10
(c) 144 Divisores: 1, 144, 2, 72, 3, 48, 4, 36, 6, 24, 8, 18, 9, 16 y 12

(21) **(a)** m.c.d. (2, 64)= 2 ; m.c.m. (2, 64)= 64
(b) m.c.d. (20, 75)= 5 ; m.c.m. (20, 75)= 300
(c) m.c.d. (4,6,12)= 2 ; m.c.m. (4,6,12)= 12
(d) m.c.d. (6, 9,12)= 3 ; m.c.m. (6, 9,12)= 36

(22) De 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 o 60 bolas por estuche;
60, 30, 20, 25, 12, 10, 6, 5, 4, 3, 2 o 1 estuche respectivamente.

(23) 30 libros como mínimo **(24)** Cada 420 segundos **(25)** Son 96 alumnos

(26) El lado de cuadrado debe medir 5 m y se obtienen 45 cuadrados **(27)** Cada 90 segundos

(28) $|-10| = 10$ $\quad |-6| = 6$ $\quad |+4| = 4$ $\quad |7| = 7$

(29) $-17 < -15 < -8 < -4 < 0 < 3 < 18 < 305 < 777$

(30) $113 > 67 > 32 > 21 > 0 > -3 > -14 > -25 > -705$

(31) -9 **(32)** -1001 ; -999 **(33)** $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ o 4 **(34)** 146 º ; −146 º

(35) −14 000 € ; 86 000 € **(36)** Respuesta abierta, por ejemplo, $(-2)\cdot 28 = 4\cdot(-14) = (-8)\cdot 7 = (-1)\cdot 56$

(37) **(a)** – 43 **(b)** – 9 **(c)** −12 **(d)** −13 **(e)** 8 **(f)** 108 **(g)** −125 **(h)** 3 **(i)** −12 **(j)** 8

(38) **(a)** $8\cdot(-3 + 7 - 2) = 8\cdot(-3) + 8\cdot 7 - 8\cdot 2 = -24 + 56 - 16 = 16$

(b) $-5\cdot(6 + 4 - 9) = (-5)\cdot 6 + (-5)\cdot 4 - (-5)\cdot 9 = -30 + (-20) - (-45) = -30-20+45 = -5$

(39) **(a)** $4\cdot(-3) + 4\cdot 5 + 4\cdot(-8) = 4\cdot((-3) + 5 + (-8)) = 4\cdot(-6) = -24$

(b) $-2\cdot 6 + (-2)\cdot(-3) + (-2)\cdot 9 = (-2)\cdot(6 + (-3) + 9) = (-2)\cdot 12 = -24$

(40) Propiedad asociativa del producto

a	b	c	a·b	b·c	(a·b)·c	a·(b·c)
-3	6	-5	**- 18**	**- 30**	**90**	**90**
-1	-4	-9	**4**	**36**	**- 36**	**- 36**