**Módulo de Matemáticas Académicas II**
**Módulo de Matemáticas Aplicadas II**
**Nivel II de ESPAD**

# Unidad 3

# Lenguaje algebraico. Polinomios

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR del Alcorcón en las opciones de **enseñanzas académicas** o **enseñanzas aplicadas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017).

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes del siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

3- "Expresiones algebraicas. Polinomios" del libro MATEMÁTICAS 4º B de ESO (Autor: Eduardo Cuchillo)

# ÍNDICE

# 1. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

La palabra álgebra procede del árabe y hace referencia a la parte de la Matemática que se ocupa del estudio generalizado de las operaciones aritméticas mediante el uso de números, letras y signos operacionales.

En las unidades anteriores has aprendido a manejar diferentes tipos de números. En los razonamientos, sobre todo matemáticos, usamos letras para designar números desconocidos o valores cualesquiera, de forma que los resultados sean válidos con independencia de los valores particulares.

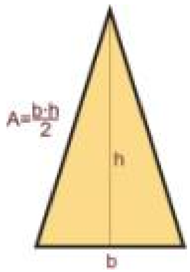
***Ejemplo 1***→ Si tenemos un contrato con una compañía de telefonía móvil por el que pagamos 5 céntimos de euro por minuto, así como 12 céntimos por establecimiento de llamada y queremos expresar el precio de una llamada cualquiera, llamando $t$ a los minutos que dure la llamada, tenemos la siguiente expresión algebraica para su coste:

$$0'05 \cdot t + 0'12 \text{ euros.}$$

Para calcular el coste de una llamada concreta solamente hay que sustituir $t$ por el valor de su duración y realizar las operaciones indicadas en la expresión algebraica.
Por ejemplo, una llamada de 4 minutos costará $0'05 \cdot 4 + 0'12 = 0{,}20 + 0{,}12 = 0{,}32$ euros.

***Ejemplo 2***→ El área de un triángulo de base $b$ y altura asociada $h$ se da mediante la fórmula o expresión algebraica $\frac{b \cdot h}{2}$.

El área de un triángulo de base 6 cm y altura asociada 10 cm, por ejemplo, se calcula haciendo las operaciones indicadas en la expresión algebraica después de sustituir $b$ por 6 y $h$ por 10: $\frac{6 \cdot 10}{2} = \frac{60}{2} = 30\,\text{cm}^2$.




***Ejemplo 3***→ Usamos igualdades entre expresiones algebraicas para generalizar propiedades de las operaciones numéricas. Recordemos algunas:

- a+b=b+a (propiedad conmutativa de la suma)
- a·(b·c)=(a·b)·c (propiedad asociativa del producto)
- a·(b+c)=a·b+a·c (propiedad distributiva del producto respecto a la suma)

Toda expresión en la que aparecen números y letras relacionados entre sí con operaciones aritméticas recibe la denominación de **expresión algebraica**, y al conjunto de éstas junto con las reglas de uso de sus elementos es lo que se conoce como lenguaje algebraico. Según el contexto, las letras de una expresión algebraica pueden recibir, entre otros, los nombres de *variables*, *indeterminadas*, *parámetros*, *incógnitas*.

Las expresiones algebraicas surgen al traducir a lenguaje matemático situaciones o enunciados en los que aparecen datos indeterminados o desconocidos que se representan por letras, como los ejemplos de la tabla.

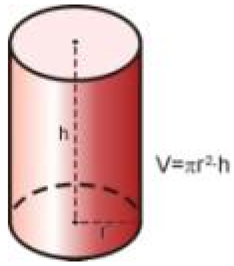
| ENUNCIADOS | EXPRESIÓN ALGEBRAICA |
|---|---|
| La suma de 5 más el triple de un número a | $5+3a$ |
| El doble del número siguiente al número natural b | $2(b+1)$ |
| Las cuatro quintas partes de un número x | $\frac{4x}{5}$ |

En la escritura de las expresiones algebraicas el signo de la multiplicación no suele ponerse entre las letras. Así: $3a$ es lo mismo que $3 \cdot a$ y $2xy$ es lo mismo que $2 \cdot x \cdot y$.

Al fijar un valor concreto para cada letra de una expresión algebraica y realizar las operaciones indicadas se obtiene un número real que se denomina **valor numérico** de esa expresión algebraica para tales valores de las letras.

***Ejemplos:***

- El volumen de un cilindro viene dado por la expresión algebraica
$$\pi \cdot r^2 \cdot h$$
en la que *r* es el radio del círculo base y *h* es su altura. De este modo, el volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 10 cm y de altura 15 cm es igual a:
$$\pi \cdot 10^2 \cdot 15 = 1500 \cdot \pi \ \ cm^3 .$$




- Si en la expresión $7 + \frac{x}{2} + x \cdot y^3 - \frac{6}{z}$ particularizamos las tres variables con los valores $x = 4,\ y = -1,\ z = \frac{1}{2}$ se obtiene el valor numérico $7 + \frac{4}{2} + 4 \cdot (-1)^3 - \frac{6}{1/2} = 7 + 2 - 4 - 12 = -7$.

En una expresión algebraica puede no tener sentido otorgar algún valor a cierta indeterminada. En efecto, en el último ejemplo no es posible hacer $z=0$.

## Actividades propuestas

**1.** Recuerda la expresión algebraica que nos proporciona la longitud de una circunferencia.

**2.** Escribe en lenguaje algebraico los siguientes enunciados, referidos a dos números cualesquiera $x$ e $y$:

a) La mitad del opuesto de su suma.

b) La suma de sus cubos.

c) El cubo de su suma.

d) El inverso de su suma.

e) La suma de sus inversos.

**3.** Una tienda de ropa anuncia en sus escaparates que está de rebajas y que todos sus artículos están rebajados un 20 % sobre el precio impreso en cada etiqueta. Escribe lo que pagaremos por una prenda en función de lo que aparece en su etiqueta (variable $p$).

**4.** Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para el valor o valores que se indican:

a) $x^2 + 7x - 12$ para $x = 0$.

b) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ para $a = -3$ y $b = 4$.

c) $a^2 - 5a + 2$ para $a = -1$.

**5.** Indica, en cada caso, el valor numérico de la siguiente expresión: $10x + 20y + 30z$

a) $x = 1,\ y = 2,\ z = 1$ b) $x = 2,\ y = 0,\ z = 5$ c) $x = 0,\ y = 1,\ z = 0$.

# 2. POLINOMIOS. SUMA Y PRODUCTO DE POLINOMIOS

## 2.1. Monomios y polinomios

Unas expresiones algebraicas de gran utilidad son los **polinomios**, cuya versión más simple y, a la vez, generadora de ellos, son los **monomios**.

Un **monomio** es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones con números reales y letras que intervienen son la multiplicación y la potenciación de exponente natural. Todo monomio está formado por una parte numérica llamada **coeficiente** (el factor numérico) y una **parte literal** formada por las letras y sus exponentes.

***Ejemplos:***

- La expresión algebraica $2x$ es un monomio con una única variable, $x$, y coeficiente 2.
- La expresión algebraica que da el volumen de un cilindro, $\pi \cdot r^2 \cdot h$, es un monomio con dos indeterminadas, $r$ y $h$, y coeficiente $\pi$. Su parte literal es $r^2 \cdot h$.
- Otros monomios: $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$, $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$.
- La expresión $7xy^2 + 3xy - 2x$ está formada por tres términos o monomios. Cada uno tiene un coeficiente y una parte literal:

  En el primer monomio, $7xy^2$, el coeficiente es $7$ y la parte literal $xy^2$.

  El segundo monomio, $3xy$, tiene por coeficiente $3$ y parte literal $xy$.

  Y en el tercer término, $-2x$, el coeficiente es $-2$ y la parte literal $x$.

Atendiendo al exponente de la variable, o variables, se adjudica un **grado** a cada monomio con arreglo al siguiente criterio:

- Cuando haya una única indeterminada, el grado del monomio será el exponente de su indeterminada.
- Si aparecen varias indeterminadas, el grado del monomio será la suma de los exponentes de esas indeterminadas.
- Un número real es un monomio de grado 0.

***Ejemplos:***

- $2x$ es un monomio de grado 1 en la variable $x$.
- $\pi \cdot r^2 \cdot h$ es un monomio de grado 3 en las indeterminadas $r$ y $h$.
- $\frac{4}{7} \cdot x^2 \cdot y^3$ es un monomio de grado 5 en $x$ e $y$.
- $5 \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot y^2 \cdot z$ es un monomio de grado 4 en $x$, $y$ y $z$.

Dos **monomios** son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal (las letras pueden estar en distinto orden).

***Ejemplo→*** Son semejantes el monomio $7x^2yz^3$ y el monomio $-3yz^3x^2$.

La semejanza de monomios es esencial para definir la suma o diferencia de monomios.

Los monomios semejantes que tienen el mismo coeficiente son **iguales**.

***Ejemplo→*** Son iguales el monomio $7x^2yz^3$ y el monomio $7yz^3x^2$.

Los monomios semejantes que tienen coeficientes opuestos son **opuestos**.

***Ejemplo→*** Son opuestos el monomio $7x^2yz^3$ y el monomio $-7yz^3x^2$.

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de monomios. Cada uno de los monomios que forman el polinomio se dice que es un **término** del polinomio. El término de grado cero se llama **término independiente**.

El **grado de un polinomio** viene dado por el mayor grado de sus términos. El coeficiente del término de mayor grado del polinomio recibe el nombre de **coeficiente principal.**

Si el polinomio tiene 2, 3, 4,… términos se llama **binomio**, **trinomio**, **cuatrinomio**…, respectivamente.

***Ejemplos:***

- $\frac{1}{5}\cdot x^2 - 7\cdot x^3 + 2$ es un polinomio de grado 3 en la variable $x$.
- $-3\cdot y^4 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x$ es un trinomio de grado 4 en las indeterminadas $x$ e $y$.
- $4\cdot x^2\cdot y^3 + 3\cdot y^2$ es un binomio de grado 5 en $x$ e $y$.
- $x - 2\cdot y + 6\cdot z$ es un polinomio de grado 1 en $x$, $y$ y $z$.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable. Es habitual escribir ordenados los diferentes monomios de un polinomio de forma que sus grados vayan en descenso para, con este criterio, apreciar en su primer monomio cuál es el grado del polinomio.

El aspecto de un polinomio de grado $n$ en la variable $x$ es $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
Los coeficientes $a_k$ son números reales, el coeficiente principal es $a_n$ y el término independiente $a_0$.

***Ejemplos:***

- $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ es un polinomio de grado 4 en la variable $x$.
  El coeficiente principal es -3 y el término independiente es 2.
- $4y^3 + 3y - 7$ es un polinomio de grado 3 en la indeterminada $y$.
  El coeficiente principal es 4 y el término independiente es -7.
- $z^2 - 3z + 12$ es un polinomio de grado 2 en $z$, con coeficiente principal 1 y término independiente 12.
- $3x$ es un polinomio de grado 1 en $x$, con coeficiente principal 3 y término independiente 0.

Como ocurre con cualquier expresión algebraica, si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real que es el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable. Si hemos llamado $p$ a un polinomio, a la evaluación de $p$ en, por ejemplo, el número $-3$ la denotamos por $p(-3)$, y leemos *"p de menos tres"* o *"p en menos tres"*. Con este criterio, si $p$ es un polinomio cuya indeterminada es la variable $x$, podemos referirnos a él como $p$ o $p(x)$ indistintamente.

***Ejemplos:***

- Si evaluamos el polinomio $p \equiv -3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ en $x = 5$ nos encontramos con el número
$$p(5) = -3 \cdot 5^4 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 = -3 \cdot 625 + 5 + 2 = -1875 + 7 = -1868.$$
- El valor del polinomio $q(y) = 4y^3 + 3y - 7$ para $y = -1$ es
$$q(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 7 = 4 \cdot (-1) - 3 - 7 = -4 - 10 = -14.$$
- Al particularizar el polinomio $r \equiv z^2 - 3z + 12$ en $z = 0$ resulta el número $r(0) = 12$.

## 2.2. Suma de polinomios

Las letras que aparecen en las expresiones algebraicas representan números y que, por esta razón, las operaciones que se realizan con letras cumplen las mismas propiedades que las operaciones que se realizan con números.

Dados dos monomios, en general, no pueden sumarse o restarse para dar otro monomio a no ser que sean monomios semejantes. **La suma o diferencia de dos monomios semejantes es otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma o diferencia de los coeficientes.**

Así: $3x^2y + 6x^2y = (3+6)x^2y = 9x^2y$ (observa que se aplica la propiedad distributiva)

$3x^2y - 6x^2y = (3-6)x^2y = -3x^2y$.

La suma o diferencia de dos monomios no semejantes es el polinomio formado por la suma o diferencia indicada de dichos monomios.

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. **Para sumar dos polinomios se suman los monomios semejantes de ambos y se deja indicada la suma de los términos no semejantes.**

***Ejemplos:***

- La suma de los polinomios $-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2$ y $-x^4 + 4x^2 - 5x - 6$ es el polinomio $-4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$:
$$(-3x^4 + \frac{1}{5}x^2 + 2) + (-x^4 + 4x^2 - 5x - 6) =$$
$$(-3x^4 - x^4) + (\frac{1}{5}x^2 + 4x^2) - 5x + (2 - 6) =$$
$$(-3 - 1) \cdot x^4 + (\frac{1}{5} + 4) \cdot x^2 - 5x + (2 - 6) =$$
$$-4x^4 + \frac{21}{5}x^2 - 5x - 4$$
- $(5x^2 - 3x + 1) + (x^2 + 4x - 7) = (5x^2 + x^2) + (-3x + 4x) + (1 - 7) = 6x^2 + x - 6$.
- $(2x^3 + 1) + (-x^4 + 4x) = -x^4 + 2x^3 + 4x + 1$.
- $(x^3 + 9) + (-x^3 + 2) = 11$.

En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos uno sobre otro con los monomios del mismo grado en la misma columna:

$$\begin{array}{rrrrrr} 4x^5 & +2x^4 & +\;x^3 & -5x^2 & +\;x & +4 \\ -7x^5 & & +4x^3 & +5x^2 & -3x & -6 \\ \hline -3x^5 & +2x^4 & +5x^3 & & -2x & -2 \end{array}$$

## Propiedades de la suma de polinomios

**Propiedad conmutativa.** Si $p$ y $q$ son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos: $p+q=q+p$.

***Ejemplo*** → $(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$

$(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$

**Propiedad asociativa.** Para sumar tres o más polinomios, se pueden agrupar y sumar de dos en dos como se quiera: $(p+q)+r=p+(q+r)$.

***Ejemplo*** ↘

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=$$
$$(-x^3+5x^2-5x+8)+(x-6)=-x^3+5x^2-4x+2$$

También:

$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)+(x-6)=(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1+x-6)=$$
$$(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-2x-5)=-x^3+5x^2-4x+2$$

**Elemento neutro.** El *polinomio cero*, dado por el número 0, es el elemento neutro porque el resultado de sumarlo con cualquier otro polinomio siempre es éste último: $0+p=p$.

***Ejemplo*** → $0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$.

**Elemento opuesto.** Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su *polinomio opuesto*, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Obtenemos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

***Ejemplo*** → El polinomio opuesto de $p\equiv-2x^4+x^3+2x-7$ es $2x^4-x^3-2x+7$, al que denotaremos como $-p$. Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-2x^4+x^3+2x-7)+(2x^4-x^3-2x+7)=(-2x^4+2x^4)+(x^3-x^3)+(2x-2x)+(-7+7)=0.$$

Para realizar la resta de dos polinomios $p-q$ hay que sumar al polinomio minuendo $p$ el opuesto del polinomio sustraendo $q$: $p-q\equiv p+(-q)$.

***Ejemplo*** →

$$(-5x^2-3x+2)-(-2x^4+x^3+3x^2+6)=(-5x^2-3x+2)+(2x^4-x^3-3x^2-6)=$$
$$2x^4-x^3+(-5x^2-3x^2)-3x+(2-6)=2x^4-x^3-8x^2-3x-4$$

Recuerda que para quitar un paréntesis que lleva delante el signo – hay que cambiar el signo de todos sus términos: $(3x^2-1)-(x^3-5x^2-7x+3)=3x^2-1-x^3+5x^2+7x-3=-x^3+8x^2+7x-4$.

## Actividades propuestas

**6.** Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(x^2-x)+(-2x^2-3x+1)+(2x^3-2x^2+x-2)$.

b) $-x^4-(x^3+2x-3)+(-3x^2-5x+4)-(2x^3-x+5)$.

**7.** Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $3x^4+5x^3+x^2+4x-1$.

b) $7x$.

c) $-x^4+3x^2$.

**8.** Considera los polinomios $p\equiv -x^3-5x+2$, $q\equiv 3x^2+3x+1$, y calcula el polinomio suma $s\equiv p+q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x=-2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. ¿Qué relación existe entre esos tres valores?

**9.** Obtén el valor numérico del polinomio $p\equiv -x^3-5x+2$ en $x=3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de $p$ en $x=3$?

**10.** Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

a) $(-4x^3+2x)-(-3x^2)$.

b) $(2x^4+x)-(-3x-4)$.

c) $(3x^2-x)-(2x^3+x^2-x)$.

## 2.3. Producto de polinomios

El **producto de dos monomios** es otro monomio que tiene como coeficiente el producto de los coeficientes y como parte literal las letras que aparecen en los monomios con exponente igual a la suma de los exponentes con que figuran en los factores: $ax^n\cdot bx^m=abx^{n+m}$.

***Ejemplos:***

- $(-5)x^2\cdot 2x^4=(-5)\cdot 2\cdot x^{2+4}=-10x^6$.
- $5x^3\cdot(-4)=5\cdot(-4)\cdot x^3=-20x^3$.

El **producto de dos polinomios** es igual a otro polinomio cuyos términos se obtienen multiplicando cada término del primer polinomio por cada término del segundo (propiedad distributiva) y reduciendo después los términos semejantes.

***Ejemplos:***

- $3x^2\cdot(2x^2-4x+6)=(3x^2\cdot 2x^2)-(3x^2\cdot 4x)+(3x^2\cdot 6)=6x^4-12x^3+18x^2$
- $(-x^3+3x-1)\cdot(-2x)=(-x^3)\cdot(-2x)+(3x)\cdot(-2x)+(-1)\cdot(-2x)=2x^4-6x^2+2x$
- $(3x-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x)\cdot(x^2-4x-5)+(-2)\cdot(x^2-4x-5)=(3x^3-12x^2-15x)+(-2x^2+8x+10)=$
  $=3x^3+(-12x^2-2x^2)+(-15x+8x)+10=3x^3-14x^2-7x+10$
- $(x-6)\cdot(x^3-2x)=(x-6)\cdot x^3+(x-6)\cdot(-2x)=(x^4-6x^3)+(-2x^2+12x)=x^4-6x^3-2x^2+12x$

Una disposición práctica para multiplicar polinomios es la siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & & & x^2 & -3x & +1 \\
\hline
 & & -2x^3 & & +x & +4 \\
 & 6x^4 & & -3x^2 & -12x & \\
-2x^5 & & +x^3 & +4x^2 & & \\
\hline
-2x^5 & +6x^4 & -x^3 & +x^2 & -11x & +4
\end{array}
$$

## Actividades propuestas

**11.** Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(-4x^3+2x)\cdot(-3x^2)$

b) $(2x^4+x)\cdot(-3x-4)$

c) $(2x^3+x^2-x)\cdot(3x^2-x)$

d) $(-1)\cdot(7x^3-4x^2-3x+1)$

**12.** Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x\cdot(2x^2+4x-6)$ b) $(3x-4)\cdot(4x+6)$

c) $(2a^2-5b)\cdot(4b-3a^3)$ d) $(3a-6)\cdot(8-2a)\cdot(9a-2)$

## Propiedades del producto de polinomios

**Propiedad conmutativa.** Si $p$ y $q$ son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos: $p\cdot q = q\cdot p$.

***Ejemplo:***

$$(2x-7)\cdot(-x^3+x^2)=2x\cdot(-x^3+x^2)-7\cdot(-x^3+x^2)=-2x^4+2x^3+7x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

$$(-x^3+x^2)\cdot(2x-7)=-x^3\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)=-2x^4+7x^3+2x^3-7x^2=-2x^4+9x^3-7x^2$$

**Propiedad asociativa.** Para multiplicar tres polinomios se multiplican dos cualesquiera de ellos y el polinomio resultante se multiplica por el tercero: $(p\cdot q)\cdot r = p\cdot(q\cdot r)$.

***Ejemplo:***

$$\left((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\right)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\left((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\right)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

## Actividades propuestas

**13.** Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2 \cdot (-2x^2 - 3x + 1) \cdot 2x^3$    b) $(2x-3) \cdot (-3x^2 - 5x + 4) \cdot (-x)$.

**Elemento neutro.** El polinomio dado por el número 1 o *polinomio unidad* es el elemento neutro porque al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último.

***Ejemplo →*** $1 \cdot (-5x^3 - 2x + 3) = -5x^3 - 2x + 3$.

**Propiedad distributiva** del producto respecto de la suma de polinomios: $p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r$.

La propiedad distributiva nos dice que cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x))$$

tenemos dos opciones para calcular el resultado:

a) realizar la suma primero y, después, multiplicar

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 6x + 7) =$$
$$3x^5 - 18x^3 + 21x^2 - x^4 + 6x^2 - 7x = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

b) distribuir primero, aplicar la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(3x^2 - x) \cdot ((-2x + 7) + (x^3 - 4x)) = (3x^2 - x) \cdot (-2x + 7) + (3x^2 - x) \cdot (x^3 - 4x) =$$
$$(-6x^3 + 21x^2 + 2x^2 - 7x) + (3x^5 - 12x^3 - x^4 + 4x^2) = 3x^5 - x^4 - 18x^3 + 27x^2 - 7x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

Conviene recordar que la propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

***Ejemplo →*** $6x^5 - 4x^4 - 18x^3 + 2x^2 = (3x^3 - 2x^2 - 9x + 1) \cdot 2x^2$

## Actividades propuestas

**14.** De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-15x^3 - 20x^2 + 10x$    b) $24x^4 - 30x^2$

## 2.4. Potencias y productos notables

Las potencias de expresiones algebraicas se definen de la misma forma que las potencias de números: la potencia enésima de un polinomio es el polinomio que se obtiene multiplicando el polinomio por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

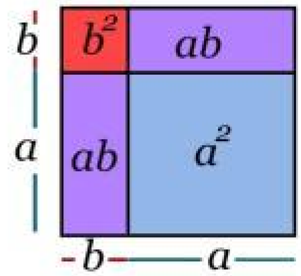
Si $p$ es un polinomio cualquiera y $n > 1$ un número natural se define $p^n = \overbrace{p \cdot p \cdots p}^{n \text{ factores}}$.

Por definición $p^0 = 1$ y $p^1 = p$.

A continuación, como aplicación de la potenciación, se dan algunos resultados importantes que conviene memorizar por la frecuencia con la que tendrás que utilizarlos a partir de ahora. Junto con la identidad o igualdad algebraica notable hay una interpretación geométrica del resultado.

**Potencias de un binomio.** Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los productos indicados en cada potencia y reducir términos semejantes:

- **Cuadrado de una suma:** $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

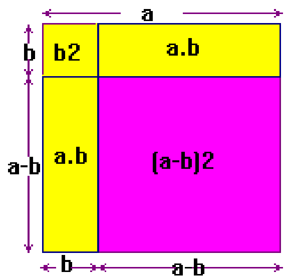



El cuadrado de una suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Demostración algebraica:

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\,a + a\,b + b\,a + b\,b = a^2 + 2\,a\,b + b^2.$

- **Cuadrado de una diferencia:** $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$




El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Demostración algebraica:

$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a\,a - a\,b - b\,a + b\,b = a^2 - 2\,a\,b + b^2.$

***Ejemplos:***

- $(a+3)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9.$
- $(x-4)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 - 8x + 16.$
- $(3x+5)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + (5)^2 = 9x^2 + 30x + 25.$
- $(x-6y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 6y + (6y)^2 = x^2 - 12xy + 36y^2.$

## Actividades propuestas

**15.** Realiza los cálculos:

a) $(1+3a)^2$ b) $(-x+3)^2$ c) $(-3x-2)^2$.

**16.** Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

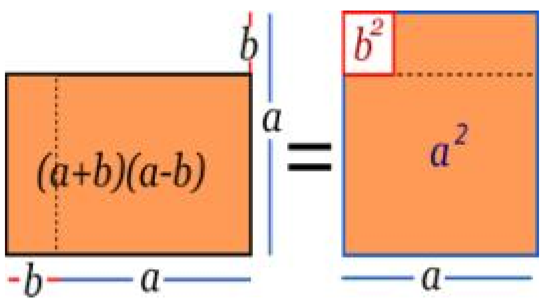
a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$.

**17.** Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x + 3y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x - 5/x)^2$.

d) $(3a - 5)^2$ e) $(a^2 - b^2)^2$ f) $(3y/5 - 2/y)^2$.

**Suma por diferencia:** $\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$




La suma de dos monomios por su diferencia es igual a diferencia del cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

Demostración algebraica:

$(a+b)\cdot(a-b) = a\,a - a\,b + b\,a - b\,b = a^2 - b^2.$

***Ejemplos:***

- $(a+7)\cdot(a-7)=a^2-7^2=a^2-49.$
- $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1.$
- $(2x+3)\cdot(2x-3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9.$

## Actividades propuestas

**18.** Efectúa estos productos:

a) $(4x+3y)\cdot(4x-3y)$

b) $(2x^2+4)\cdot(2x^2-4)$

c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x).$

**19.** Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones algebraicas y obtener otras equivalentes. Después calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas de cada uno de los miembros para los valores de las letras que se indica y comprueba que son iguales.

*(Se ha hecho el primer ejercicio como modelo)*

a) $(4x-2y)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$).

*Desarrollamos el cuadrado de una diferencia* $(4x-2y)^2=(4x)^2-2(4x)(2y)+(2y)^2=16x^2-16xy+4y^2$.

*Calculamos el valor numérico de la expresión algebraica inicial* $(4x-2y)^2$ *para* $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$:

$$(4\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\frac{5}{2})^2=(6-5)^2=1^2=1\cdot$$

*Calculamos el valor numérico de la expresión algebraica desarrollada* $16x^2-16xy+4y^2$ *para* $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$:

$$16\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-16\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}+4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=16\cdot\frac{9}{4}-16\cdot\frac{15}{4}+4\cdot\frac{25}{4}=36-60+25=1\cdot$$

*Comprobamos que el valor numérico de ambas expresiones algebraicas es igual a 1*

b) $(4+x)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=3$).

c) $(4-x)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=5$).

d) $(4+x)(4-x)=$ (comprueba la igualdad para $x=-6$).

e) $(4x-2y)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$).

f) $\left(\frac{1}{2}x+y\right)^2=$ (comprueba la igualdad para $x=4$, $y=1$).

g) $(3x+6y)(3x-6y)=$ (comprueba la igualdad para $x=2$, $y=1$).

# 3. DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Hasta este momento hemos estudiado varias operaciones con polinomios: suma, resta y producto. El resultado de cualquiera de las operaciones anteriores con polinomios siempre es otro polinomio. No sucede lo mismo con la división.

## 3.1. División de monomios

Para que el cociente de dos monomios sea un monomio, el dividendo tiene que tener, al menos, las mismas variables que el divisor con exponentes mayores o iguales. Cuando la división puede hacerse, el cociente es un polinomio que tiene:

- → Como coeficiente el cociente de los coeficientes de ambos monomios.
- → Como parte literal las variables que aparecen en el dividendo con exponente igual a la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor de cada una de ellas.

***Ejemplos:***

Se puede dividir el monomio $8x^3y^5z^4$ entre el monomio $4x^2y^2z$ y el cociente resultante es un monomio: $\frac{8x^3y^5z^4}{4x^2y^2z}=\frac{8}{4}x^{3-2}y^{5-2}z^{4-1}=2xy^3z^3$.

La división del monomio $21x^3y$ entre el monomio $7xy^2z^3$ no es un monomio, sino una fracción algebraica que se puede simplificar: $\frac{21x^3y}{7xy^2z^3}=\frac{\cancel{7}\cdot 3\cdot \cancel{x}\cdot x^2\cdot \cancel{y}}{\cancel{7}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{y}\cdot y\cdot z^3}=\frac{3x^2}{yz^3}$.

## 3.2. División entera de polinomios en una variable

Recordemos que hacer la división entera de dos números naturales, $D$ (dividendo) entre $d$ (divisor, distinto de 0), consiste en hallar otros dos números, el cociente ($c$) y el resto ($r$), que verifican la relación $D=d\cdot c+r$, en la que el resto $r$ tiene que ser menor que el divisor $d$ y mayor o igual que $0$.

La división entera de polinomios se define y realiza de manera similar.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, consiste en hallar otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$, de forma que se verifique la relación $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$ y el grado de $r(x)$ sea menor que el grado del polinomio divisor $q(x)$.

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto “provisionales” de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto.

***Ejemplo:***

Vamos a dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$. Como el polinomio divisor es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que $p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$.

La división se efectúa ejecutando los siguientes pasos:

→ Se escribe a la izquierda el dividendo colocando sus términos de mayor a menor grado y en caso de que falte algún grado se deja un espacio o se pone el término de dicho grado con coeficiente 0.

→ El polinomio divisor se coloca ordenado de mayor a menor grado en su caja.

→ Se divide el monomio de mayor grado del dividendo entre el monomio de mayor grado del divisor para obtener el primer término del cociente.

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2$$

→ Se multiplica el primer término del cociente por todos los términos del divisor y, para efectuar la resta, el resultado cambiado de signo se coloca debajo de los términos semejantes del dividendo para sumar después ambos polinomios.
El resultado es el primer resto parcial

$$3x^2(2x^2 - x + 3) = 6x^4 - 3x^3 + 9x^2$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{r} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 0x - 2 \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \qquad\qquad} \\ 8x^3 - 8x^2 + 0x - 2 \end{array}$$

→ Se procede a dividir este resto parcial entre el polinomio divisor para obtener el siguiente término del polinomio cociente repitiendo el procedimiento anterior para obtener el siguiente resto parcial, y así sucesivamente, hasta que el resto obtenido sea un polinomio de grado inferior al del divisor.

$$\begin{array}{rl} 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 0x - 2 & \underline{|\ 2x^2 - x + 3} \\ \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2 \qquad\qquad} & 3x^2 + 4x - 2 \\ 8x^3 - 8x^2 + 0x - 2 & \\ \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x \qquad} & \\ -4x^2 - 12x - 2 & \\ \underline{4x^2 - 2x + 6} & \\ -14x + 4 & \end{array}$$

Conclusión: al dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ y como polinomio resto $r(x) = -14x + 4$.

Podemos comprobar que se verifica la relación $6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 = (2x^2 - x + 3)\cdot(3x^2 + 4x - 2) + (-14x + 4)$.

## Actividades propuestas

**20.** Divide los siguientes polinomios y comprueba la relación dividendo=divisor·cociente+resto:

a) $2x^3 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 - 2x + 4$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^2 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$

**21.** Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 + x - 3$ como polinomio cociente y $r(x) = -3x^2 + 1$ como resto.

## 3.3. Regla de Ruffini para dividir un polinomio entre x-a

Si en la división entera de polinomios el divisor es un binomio de primer grado de la forma $x-a$ ($a$ es un número real cualquiera) se puede hacer la división con mayor rapidez usando un algoritmo conocido con el nombre de regla de Ruffini.

***Ejemplo***→ Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x-2$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +x & +3 & \ x-2 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & +6x^2 & & & 3x^2+2x+5 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & +x & +3 & \\
 & -2x^2 & +4x & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x & +3 & \\
 & & -5x & +10 & \\ \cline{1-4}
 & & & 13 & 
\end{array}
$$

A la derecha se ha hecho la división con la caja, por el método explicado anteriormente.

Como el polinomio divisor es de grado 1 con coeficiente principal igual a 1:

- → El grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.
- → El coeficiente principal del cociente es el mismo número que el coeficiente principal del divisor.
- → El resto es de grado 0, es decir, un número.

La **regla de Ruffini**, para hacer la división anterior con mayor rapidez, consiste en hacer las misma operaciones pero escribiendo solamente en una fila los coeficientes del dividendo ordenados de mayor a menor grado (si falta algún grado se pone 0) y en una segunda fila y a la izquierda el valor del número a (en este caso 2).

En una tercera fila, debajo de una línea divisoria, se repite el primer coeficiente del dividendo en la misma columna; este coeficiente se multiplica por $a$ (en este caso 2) y el resultado se escribe en la segunda fila y en la siguiente columna para sumarlo con el siguiente coeficiente del dividendo; se multiplica este resultado nuevamente por $a$, y así sucesivamente hasta llegar al último término, que se separa de los anteriores porque es el resto de la división. Los demás números de la tercera fila son los coeficientes del polinomio cociente, de mayor a menor grado. El primer coeficiente de la izquierda es el que corresponde al monomio de mayor grado (una unidad menos que el grado del dividendo) y el coeficiente anterior al resto es el del término de grado 0

*Dividendo:*
$p(x)=3x^3-4x^2+x+3$

*divisor:* $d(x)=x-2$

*Algoritmo de la división usando la REGLA DE RUFFINI*

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
2 & \downarrow & 6 & 4 & 10 \\ \hline
 & 3 & 2 & 5 & 13
\end{array}
$$

*cociente:* $c(x)=3x^2+2x+5$

*resto:* $r=13$

Si el divisor es $x+2$ el valor de $a$ para usar la regla de Ruffini es ahora $-2$, ya que $x+2=x-(-2)$.

*La división* $(3x^3-4x^2+x+3):(x+2)$, *que se hace a la derecha usando la regla de Ruffini, da como cociente* $c(x)=3x^2-10x+21$ *con resto* $r=-39$

*Dividendo:*
$p(x)=3x^3-4x^2+x+3$

*divisor:* $d(x)=x+2$

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 3 & -4 & 1 & 3 \\
-2 & \downarrow & -6 & 20 & -42 \\ \hline
 & 3 & -10 & 21 & -39
\end{array}
$$

## Actividades propuestas

**22.** Usa la regla de Ruffini para obtener el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-2x^2+x+1$ entre $x+1$.

b) $x^3+2x^2-2x+1$ entre $x+2$.

c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x-1$.

d) $x^3-9x+1$ entre $x-3$.

## 3.4. Valor de un polinomio para x=a. Teorema del resto

Recuerda que el valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x=a$, $P(a)$, es el número que se obtiene al sustituir la $x$ por $a$ y efectuar las operaciones indicadas. El siguiente teorema, que recibe el nombre de **teorema del resto**, nos proporciona otra forma de calcular $P(a)$:

**El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x=a$ es igual al resto de la división $P(x) : (x-a)$.**

La demostración es sencilla: si C(x) es el cociente de la división P(x):(x-a) y el número R es el resto entonces, teniendo en cuenta que el dividendo es igual al divisor por cociente más resto, se verifica que P(x) = (x-a)C(x)+R, por lo que P(a) = (a-a)C(a)+R y como a-a=0 , entonces P(a)=R.

Por lo tanto, para calcular el valor numérico de un polinomio P(x) para x=a se puede hacer la división P(x):(x-a) y tomar el resto de la división, que es igual a P(a).

Por ejemplo, el valor numérico del polinomio $P(x)=5x^6-7x^3+3x^2+x+3$ para $x=2$ se puede calcular sustituyendo x por 2 en el polinomio y haciendo las operaciones indicadas,

$$P(2)=5\cdot 2^6-7.2^3+3\cdot 2^2+2+3=5\cdot 64-7\cdot 8+3\cdot 4+2+3=320-56+12+5=281,$$

o bien, haciendo la división $P(x):(x-2)$, que puede hacerse usando la regla de Ruffini. El resto de la división es 281, por lo tanto $P(2)=281$.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 0 | 0 | -7 | 3 | 1 | 3 |
| 2 | | 10 | 20 | 40 | 66 | 138 | 278 |
| | 5 | 10 | 20 | 33 | 69 | 139 | 281 |

También podemos hallar el resto de una división de la forma $P(x):(x-a)$ sin hacer la división, calculando $P(a)$. Por ejemplo, podemos afirmar que el resto de la división $(x^{25}-x^{12}+3):(x-1)$ es $3$ sin necesidad de hacer la división porque el valor numérico del polinomio dividendo para $x=1$ es $3$.

Otro ejemplo: se puede ver fácilmente que $(x-1)$ es un divisor del polinomio $P(x)=x^3-x^2-4x+4$, es decir, que la división $P(x):(x-1)$ es exacta, comprobando que $P(1)=0$, $P(1)=1^3-1^2-4\cdot 1+4=0$, por lo que el resto de la división $P(x):(x-1)$ también es 0.

## Actividades propuestas

**23.** Utiliza la regla de Ruffini para conocer el valor del polinomio $P(x)=-x^3+2x^2+x+2$ en $x=3$.

**24.** Calcula el resto de la división $(x^{25}-x^{12}+3):(x+1)$ sin hacer la división.

**25.** Calcular el valor de $k$ para que el polinomio $P(x)=2x^3+kx^2+6$ sea divisible por $x+1$.

## 3.5. Raíces y divisores de un polinomio

Un número a se llama **raíz** de un polinomio P(x) si P(a)=0.

**Un polinomio de grado n puede tener como máximo n raíces reales.**

Si el número a es raíz del polinomio P(x), entonces (x – a) es un divisor de P(x) y el polinomio P(x) se puede descomponer como producto de dos factores, **P(x)=(x-a)·C(x)** siendo C(x) el cociente de la división exacta P(x):(x-a)

## Actividades propuestas

**26.** Determina si a es una raíz de P(x) en los siguientes casos:

a) $a=3$ , $P(x)=x^3-4x^2+5$

b) $a=-2$ , $P(x)=-x^3-2x^2+x+2$

c) $a=1$ , $P(x)=-2x^4+x+1$

d) $a=-1$ , $P(x)=2x^3+2x^2$

Para buscar raíces de un polinomio tenemos en cuenta el siguiente teorema:

**Las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del término independiente.**

***Ejemplo:*** Buscamos las raíces enteras del polinomio $P(x)=x^3+2x^2-x-2$ entre los divisores enteros del término independiente, $1, -1, 2, -2$, y sabemos que como máximo hay tres raíces:

$P(1)=1^3+2\cdot 1^2-1-2=1+2-1-2=0 \Rightarrow\ x=1$ es raíz de $P(x)$.

$P(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-(-1)-2=-1+2+1-2=0 \Rightarrow\ x=-1$ es raíz de $P(x)$.

$P(2)=2^3+2\cdot 2^2-2-2=8+8-2-2\neq 0 \Rightarrow\ x=2$ no es raíz de $P(x)$.

$P(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-(-2)-2=-8+8+2-2=0 \Rightarrow\ x=-2$ es raíz de $P(x)$.

El polinomio P(x) tiene las tres raíces que hemos encontrado: $1, -1, -2$.

## Actividades propuestas

**27.** Halla todas las raíces enteras de los siguientes polinomios:

a) $P(x)=5x^2-5$    b) $P(x)=x^3+3x^2-x-3$.

**28.** Comprueba que a es una raíz del polinomio P(x) haciendo la división P(x):(x-a) y escribe la descomposición de P(x) como producto de dos factores, uno de los cuales debe ser x-a:

a) $a=2$ , $P(x)=3x^3-4x^2-9x+10$.

b) $a=-1$ , $P(x)=x^3+1$.

c) $a=-3$ , $P(x)=x^2-9$.

d) $a=3$ , $P(x)=2x^2-10x+12$.

## 4. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

**Factorizar** un polinomio $P(x)$ es escribirlo como producto de polinomios de menor grado que $P(x)$.

Se dice que un polinomio es **irreducible** si no se puede descomponer como producto de polinomios de grado menor que el grado de $P(x)$ y que no sean de grado cero (es decir que no sean factores numéricos). Todo polinomio de grado 1 se considera irreducible.

Ejemplos:

- El polinomio $P(x) = x^2 - 9$ se puede descomponer como producto de dos factores irreducibles $P(x) = (x+3)(x-3)$.
- El polinomio $P(x) = x^2 + 9$ es irreducible, no se puede escribir como producto de polinomios de menor grado.

**ESTRATEGIAS PARA DESCOMPONER UN POLINOMIO COMO PRODUCTO DE FACTORES IRREDUCIBLES.**

- **Si el polinomio P(x) no tiene término independiente**, se puede descomponer como producto de dos factores sacando factor común a la menor potencia de x.

  ***Ejemplo:*** *El polinomio* $P(x) = 2x^7 + x^5$ *se puede descomponer sacando factor común a* $x^5$ *con el resultado* $P(x) = x^5(2x^2 + 1)$.

- Si el polinomio $P(x)$ es el resultado de desarrollar el cuadrado de una suma o diferencia de monomios, o de multiplicar una suma de monomios por su diferencia, se puede aplicar la identidad notable correspondiente para descomponer el polinomio como producto de dos factores.

  ***Ejemplo 1:*** $P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

  ***Ejemplo 2:*** $P(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

  ***Ejemplo 3:*** $P(x) = x^2 - 5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$.

- **Si el polinomio P(x) tiene término independiente distinto de cero**, para hacer una descomposición de P(x) como producto de dos factores, se trata de buscar un divisor del polinomio de la forma (x-a), donde a es una raíz del polinomio P(x), ya que entonces la división P(x): (x-a) es exacta. Si el cociente de la división es C(x), entonces la relación dividendo es igual a divisor por cociente nos da una descomposición del polinomio P(x) como producto de dos factores de menor grado: P(x) = (x-a)·C(x). Por esta razón, los pasos para descomponer como producto de factores irreducibles un polinomio con coeficientes enteros y con término independiente no nulo son los siguientes:

1. Buscar una raíz entera entre los divisores del término independiente.
2. En cuanto se haya encontrado una raíz x = a del polinomio P(x), se hace la división P(x): (x-a), que tiene resto cero, y se obtiene el polinomio cociente C(x).
3. Se escribe la descomposición del polinomio dividendo P(x) como producto del divisor (x-a) por el cociente C(x): P(x)=(x-a)·C(x)
4. Si el polinomio C(x) tiene alguna raíz, se descompone a su vez como producto de dos factores repitiendo los pasos 1, 2 y 3, o bien aplicando alguna identidad notable si es posible. Así

sucesivamente, hasta que todos los factores de la descomposición de P(x) sean de grado uno o de grado dos sin raíces reales (irreducibles).

**Ejemplo 1:** *Para descomponer el polinomio* $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$*:*

1. *Buscamos una raíz entre los divisores de 4:* $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 4$ *calculando el valor numérico del polinomio para cada uno de estos números hasta encontrar uno para el cual el valor numérico sea cero:*

$P(1) = 1^3 - 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1 - 1 - 4 + 4 = 0$*; luego x = 1 es una raíz de P(x).*

2. *Hacemos la división P(x) : (x-1) usando la regla de Ruffini*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -4 | 4 |
| 1 | | 1 | 0 | -4 |
| | 1 | 0 | -4 | 0 |

*El cociente de la división es el polinomio* $C(x) = x^2 - 4$.

3. *Tenemos la primera descomposición del polinomio:* $P(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 4)$.
4. *Ahora descomponemos el polinomio* $C(x) = x^2 - 4$. *Aquí podemos fijarnos que es una diferencia de cuadrados y descomponerlo como suma por diferencia:*
   $C(x) = x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$.

   *Por lo tanto, la descomposición del polinomio P(x) en factores irreducibles es:* $\boxed{P(x) = (x-1)(x+2)(x-2)}$ *como puede comprobarse haciendo los productos:*

   $(x-1)(x+2)(x-2) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

**Ejemplo 2:** $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

a) *Como el polinomio no tiene término independiente, sacamos factor común a x:* $P(x) = x(x^2 - 5x + 6)$

b) *Para descomponer el polinomio* $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ *seguimos el procedimiento general:*

1. *Buscamos una raíz entre los divisores de 6:* $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$

$P(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$, *luego 1 no es raíz del polinomio.*

$P(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12 \neq 0$, *luego -1 no es raíz del polinomio.*

$P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, *luego 2 es una raíz de Q(x).*

2. *Hacemos la división Q(x) : (x-2) usando la regla de Ruffini*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | -5 | 6 |
| 2 | | 2 | -6 |
| | 1 | -3 | 0 |

*El cociente de la división es el polinomio* $C(x) = x - 3$.

3. *Tenemos la descomposición del polinomio* $Q(x) = (x-2) \cdot (x-3)$
4. *Por lo tanto, la descomposición del polinomio P(x) en factores irreducibles es:*

$\boxed{P(x) = x(x-2)(x-3)}$ *como puede comprobarse haciendo los productos:*

$$x(x-2)(x-3) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

***Ejemplo 3:*** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

*Vemos que 1 es una raíz y hacemos la división exacta P(x) : (x-1) usando la regla de Ruffini*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *1* | *-3* | *3* | *-1* |
| *1* | | *1* | *-2* | *1* |
| | *1* | *-2* | *1* | *0* |

*El cociente de la división es el polinomio* $C(x) = x^2 - 2x + 1$.

*Ahora descomponemos el polinomio* $C(x) = x^2 - 2x + 1$. *Aquí podemos fijarnos que es el desarrollo de un cuadrado:*

$C(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ *(También se puede ver que 1 es una raíz de C(x) y hacer la división C(x):(x-1)).*

*La descomposición del polinomio P(x) en factores irreducibles es* $\boxed{P(x) = (x-1)^3}$.

*Comprobación:*

$(x-1)^3 = (x-1)(x-1)(x-1) = (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

*Se dice que* ***1 es una raíz triple*** *del polinomio P(x) porque el factor (x-1) aparece tres veces en la descomposición.*

## Actividades propuestas

**29.** Utiliza los productos notables para factorizar los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 2x + 1$
b) $x^4 - 16$
c) $x^2 + 12x + 36$
d) $3x^2 + 18x + 27$
e) $4x^5 - 16x^3$
f) $9x^2 - 6x^3 + x^4$
g) $9 - x^2$
h) $x^4 - 81x^2$
i) $16x^2 - 16x + 4$
j) $9x^2 + 24x + 16$

**30.** Realiza la descomposición en factores irreducibles de los siguientes polinomios, indica cuántas raíces tiene cada uno y escríbelas ordenadas de menor a mayor:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
c) $3x^3 + 3x^2 - 12x - 12$
d) $x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$
e) $x^4 - 3x^2 - 2x$
f) $x^4 + x^2 - 20$

g) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

h) $x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 5x^2$

i) $2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

j) $5x^3 - x^2 - 5x + 1$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS

**1.** En este ejercicio se va a presentar un truco mediante el cual vamos a adivinar el número que resulta tras manipular repetidamente un número desconocido. Convierte en una expresión algebraica las sucesivas alteraciones del número desconocido y justifica lo que ocurre.

Dile a un compañero que escriba en un papel un número natural y que no lo muestre.
Que lo multiplique por 10.
Que al resultado anterior le sume 100.
Que multiplique por 1000 lo obtenido.
Que divida entre 10000 la última cantidad.
Que al resultado precedente le reste el número que escribió.

Independientemente del número desconocido original, ¿qué número se obtiene al final?

**2.** Consideremos los polinomios $p \equiv -5x^3 + x^2 - 3x - 2$, $q \equiv 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 7$ y $r \equiv 4x^2 + 5x - 1$ . Realiza las siguientes operaciones: a) $p + q + r$ b) $p - q$ c) $p \cdot r$ d) $p \cdot r - q$.

**3.** Calcula los siguientes cocientes de monomios:

a) $\dfrac{8x^4}{2x^2}$ b) $\dfrac{3x^2y^4z^6}{0,5xy^3z^5}$ c) $\dfrac{7xy^4z^5}{4xy^3z^5}$

**4.** Efectúa las divisiones de polinomios y la prueba de la división:

a) $2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x - 1$ entre $2x^2 + 3x - 3$.

b) $x^4 + 2x^2 + 1$ entre $x^2 + 1$.

c) $4x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 10x - 6$ entre $x^3 + 2x + 3$.

**5.** Determina un polinomio de grado 3 tal que sus raíces sean 6, -3 y 0.

**6.** Encuentra el polinomio $p(x)$ tal que al dividirlo entre el polinomio $q(x) = x^3 + x^2 + 1$ se obtenga como polinomio cociente $c(x) = 5x^2 - 1$ y como resto $r(x) = x - 3$.

**7.** Utiliza la regla de Ruffini para hallar el valor numérico de cada polinomio en el valor de x dado:

a) $3x^3 + 11x^2 + 5x - 3$ en $x = -2$

b) $3x^3 + 2x^2 + 8x - 3$ en $x = 3$

c) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$ en $x = 1/3$

d) $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ en $x = -1/2$

**8.** Desarrolla las potencias notables:

a) $\left(\dfrac{a}{2} + 4b^2\right)^2$ b) $(5x^3 - 3y^2)^2$

**9.** Descompón cada polinomio como producto de polinomios irreducibles y da todas las raíces ordenadas de menor a mayor:

a) $x^3 - 2x^2 - 12x$

b) $3x^3 + 5x^2 + x - 1$

c) $3x^3+11x^2+5x-3$

d) $3x^3-6x^2+x-2$

**10.** Analiza si los siguientes polinomios han surgido del desarrollo de potencias de binomios, o de un producto *suma por diferencia*. En caso afirmativo expresa su procedencia.

a) $x^2+6x+9$

b) $x^4-8x^2+16$

c) $x^2-36$

d) $5x^2+1$

e) $4x^2-25$

f) $4x^2-20x+25$.

# AUTOEVALUACIÓN

**1.** Si llamamos x a la edad de una persona, la expresión algebraica para la edad que tenía hace 7 años es:

a) 7 – x  b) x – 7  c) 7x  d) 7 + x

**2.** El valor numérico de la expresión $\frac{3x-7}{2-3y^2}+5xy^3-\frac{6}{z}$ en $x=2, y=-1, z=-1$ es:

a) $17$  b) $15$  c) $-3$  d) $-5$

**3.** ¿Cuál de las siguientes expresiones algebraicas no es un monomio?

a) $8xy$  b) $\sqrt{5}x^3$  c) $5x^{-2}$  d) $9$

**4.** El coeficiente principal del polinomio $2x-x^2+5-x^3$ es:

a) $2$  b) $5$  c) $1$  d) $-1$

**5.** La expresión algebraica equivalente a $(8-x)^2$ es:

a) $x^2-16x+64$  b) $64-x^2$  c) $64+x^2$  $16-2x$

**6.** La expresión algebraica equivalente a $9-4x^2$ es:

a) $5x^2$  b) $(3+2x)(3-2x)$  c) $(3+2x)^2$  d) $(3-2x)^2$

**7.** Al dividir el polinomio $p(x)=x^5+x^4+x^3+1$ entre $q(x)=x^2+x+1$ el polinomio resto resultante:

a) debe ser de grado 2.  b) puede ser de grado 2.

c) debe ser de grado menor que 2.  d) ninguna de las opciones precedentes.

**8.** El resto de la división $(2x-x^2+5-x^3):(x-1)$ es:

a) 2  b) 0  c) - 1  d) 5

**9.** ¿Cuál de los siguientes números enteros es una raíz del polinomio $2x^4-7x^3+5x^2-7x+3$?

a) 3  b) 2  c) –5  d) -7

**10.** La descomposición factorial del polinomio $x^3-6x^2+12x-8$ es:

a) $(x-2)(x+2)(x+1)$  b) $(x-2)^3$  c) $(x-2)(x+2)^2$  d) $(x-8)(x+1)(x-1)$

***Soluciones →***  1 b  2 c  3 c  4 d  5 a  6 b  7 c  8 d  9 a  10 b.

**SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS**:

**(1)** $2\pi r$ **(2a)** $\frac{-(x+y)}{2}$ **(2b)** $x^3+y^3$ **(2c)** $(x+y)^3$ **(2d)** $\frac{1}{x+y}$ **(2e)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

**(3)** $0{,}8p$ **(4a)** – 12 **(4b)** – 24 **(4c)** 8 **(5a)** 80 **(5b)** 170 **(5c)** 20

**(6a)** $2x^3-3x^2-3x-1$ **(6b)** $-x^4-3x^3-3x^2-6x-2$

**(7a)** $-3x^4-5x^3-x^2-4x+1$ **(7b)** $-7x$ **(7c)** $x^4-3x^2$

**(8)** $p+q \equiv -x^3+3x^2-2x+3$; $p(-2)=20$; $q(-2)=7$; $s(-2)=27$; relación: $s(-2)=p(-2)+q(-2)$

**(9)** $p(3)=-40$; $-p(3)=40$ **(10a)** $-4x^3+3x^2+2x$ **(10b)** $2x^4+4x+4$ **(10c)** $-2x^3+2x^2$

**(11a)** $12x^5-6x^3$ **(11b)** $-6x^5-8x^4-3x^2-4x$ **(11c)** $6x^5+x^4-4x^3+x^2$ **(11d)** $-7x^3+4x^2+3x-1$

**(12a)** $6x^3+12x^2-18x$ **(12b)** $12x^2+2x-24$

**(12c)** $8a^2b-6a^5-20b^2+15ba^3$ **(12d)** $-54a^3+336a^2-504a+96$

**(13a)** $-4x^7-6x^6+2x^5$ **(13b)** $6x^4+x^3-23x^2+12x$ **(14a)** $5x(-3x^2-4x+2)$ **(14b)** $6x^2(4x^2-5)$

**(15a)** $9a^2+6a+1$ **(15b)** $x^2-6x+9$ **(15c)** $9x^2+12x+4$

**(16a)** $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ **(16b)** $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

**(17a)** $4x^2+12xy+9y^2$ **(17b)** $9x^2+2xy+\frac{y^2}{9}$ **(17c)** $25x^2-50+\frac{25}{x^2}$

**(17d)** $9a^2-30a+25$ **(17e)** $a^4-2a^2b^2+b^4$ **(17f)** $\frac{9}{25}y^2-\frac{12}{5}+\frac{4}{y^2}$

**(18a)** $16x^2-9y^2$ **(18b)** $4x^4+16$ **(18c)** $9x^2-x^4$

**(19b)** $(4+x)^2=16+8x+x^2$ Para $x=3$ las dos expresiones algebraicas valen 49.

**(19c)** $(4-x)^2=16-8x+x^2$ Para $x=5$ las dos expresiones algebraicas valen 1.

**(19d)** $(4+x)(4-x)=16-x^2$ Para $x=-6$ las dos expresiones algebraicas valen -20.

**(19e)** $(4x-2y)^2=16x^2-16xy+4y^2$ Para $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$ las dos expresiones algebraicas valen 1.

**(19f)** $(4+x)^2=16+8x+x^2$ Para $x=3$ las dos expresiones algebraicas valen 49.

**(19g)** $(3x+6y)(3x-6y)=9x^2-36y^2$ Para $x=2$, $y=1$ las dos expresiones algebraicas valen 0.

**(20a)** Cociente= $2x+3$, resto= $-3x-5$ **(20b)** Cociente= $-2$, resto= $-4x^2+x+10$

**(20c)** Cociente= $-2x^2+2x-5$, resto= $-4x+8$ **(20d)** Cociente= $-2x^3+3$, resto= $-3x^2+8$

**(20e)** Cociente= $-6x^3+6x+1$, resto= $-6x$

**(21)** Respuesta abierta: escribe un polinomio cualquiera como divisor y calcula el dividendo con la relación ***dividendo=divisor·cociente+resto***.

**(22a)** Cociente= $-2x+3$ , resto= $-2$ **(22b)** Cociente= $x^2-2$ , resto= $5$

**(22c)** Cociente= $4x^2+x+1$ , resto= $0$ **(22d)** Cociente= $x^2+3x$ , resto= $1$

**(23)** El resto de la división $P(x):(x-3)$ es igual a $P(3)=-4$ **(24)** 1

**(25)** $k=-4$ (Se obtiene fácilmente imponiendo que $P(-1)=0$ ) **(26a)** No **(26b)** Sí **(26c)** Sí **(26d)** Sí

**(27a)** Dos raíces: $-1, 1$ **(27b)** Tres raíces: $-1, 1, -3$ **(28a)** $P(x)=(3x^2+2x-5)(x-2)$

**(28b)** $P(x)=(x^2-x+1)(x+1)$ **(28c)** $P(x)=(x+3)(x-3)$ **(28d)** $P(x)=(2x-4)(x-3)$

**(29a)** $(x-1)^2$ **(29b)** $(x+2)(x-2)(x^2+4)$ **(29c)** $(x+6)^2$ **(29d)** $3(x+3)^2$ **(29e)** $4x^3(x+2)(x-2)$

**(29f)** $x^2(3-x)^2$ **(29g)** $(3+x)(3-x)$ **(29h)** $x^2(x+9)(x-9)$ **(29i)** $(4x-2)^2$ **(29j)** $(3x+4)^2$

**(30a)** $(x-1)(x+2)(x-3)$ Tres raíces: - 2, 1, 3 **(30b)** $(x-1)(x+1)(x+2)$ Tres raíces: - 2, - 1, 1

**(30c)** $3(x+1)(x+2)(x-2)$ Tres raíces: - 2, - 1, 2 **(30d)** $x(x-1)(x+1)(x+3)$ Cuatro raíces: - 3, - 1, 0, 1

**(30e)** $x(x+1)^2(x-2)$ Tres raíces: - 1 (doble), 0, 2 **(30f)** $(x-2)(x+2)(x^2+5)$ Dos raíces: - 2, 2

**(30g)** $(x-1)(x-2)(x-4)$ Tres raíces: 1, 2, 4 **(30h)** $x^2(x-1)^2(x+5)$ Tres raíces: - 5, 0, 1

**(30i)** $(x+1)(x+3)(2x-1)$ Tres raíces: - 3, - 1, ½ **(30j)** $(x-1)(x+1)(5x-1)$ Tres raíces: - 1, 1/5 , 1

**SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS**:

**(1)** Sea cual sea el número inicial n, al final se obtiene 10. La cadena de expresiones algebraicas que se van obteniendo en cada paso es: n→10n→10n+100→10000n+100000→n+10→10

**(2a)** $p+q+r\equiv 3x^4-3x^3+4x^2+4x+4$ **(2b)** $p-q\equiv -3x^4-7x^3+2x^2-5x-9$

**(2c)** $p\cdot r\equiv -20x^5-21x^4-2x^3-24x^2-7x+2$ **(2d)** $p\cdot r-q\equiv -20x^5-24x^4-4x^3-23x^2-9x-5$

**(3a)** $4x^2$ **(3b)** $6xyz$ **(3c)** $\frac{7}{4}y$ **(4a)** Cociente= $x^2-3x+2$ , resto= $-6x+5$

**(4b)** Cociente= $x^2+1$ , resto= $0$ **(4c)** Cociente= $4x^2-5x-2$ , resto= $9x$

**(5)** El polinomio más sencillo es $x(x-6)(x+3)=x^3-3x^2-18x$ (podemos obtener otra solución multiplicando este polinomio por cualquier número real distinto de cero)

**(6)** $p(x)\equiv 5x^5+5x^4-x^3+4x^2+x-4$ **(7a)** 7 **(7b)** 63 **(7c)** 0 **(7d)** 0

**(8a)** $\frac{a^2}{4}+4ab^2+16b^4$ **(8b)** $25x^6-30x^3y^2+9y^4$

**(9a)** $2x(x+2)(x-3)$ Tres raíces: -2, 0, 3 **(9b)** $(x+1)^2(3x-1)$ Dos raíces: -1 (doble), ½

**(9c)** $(x+1)(x+3)(3x-1)$ Tres raíces: -3, -1, 1/3 **(9d)** $(x-2)(3x^2+1)$ Una raíz: 2

**(10a)** $(x+3)^2$ **(10b)** $(x^2-4)^2=((x+2)(x-2))^2=(x+2)^2(x-2)^2$ **(10c)** $(x+6)(x-6)$

**(10d)** $5x^2+1$ es irreducible **(10e)** $(2x+5)(2x-5)$ **(10f)** $(2x-5)^2$