Módulo de Matemáticas Académicas II
Nivel II de ESPAD
Unidad 6
GEOMETRÍA

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente Blanco para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas a Distancia en el IES EL PINAR de Alcorcón en la opción de **enseñanzas académicas**, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017)

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se ha utilizado el siguiente capítulo de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

8- "Figuras planas" del libro MATEMÁTICAS 1º de ESO (Autora: Milagros Latasa Asso)

9- "Longitudes y áreas" del libro MATEMÁTICAS 1º de ESO (Autores: Javier Rodrigo, Raquel Hernández y José Antonio Encabo)

7- "Geometría del plano" del libro MATEMÁTICAS 3ºB de ESO (Autor: Pedro Luis Superviola Serrano)

7- "Semejanza" del libro MATEMÁTICAS 4ºB de ESO (Autor: Jorge Muñoz)

8- "Movimientos en el plano y en el espacio" del libro MATEMÁTICAS 3ºB de ESO (Autoras: Adela Salvador y María Molero)

7- "Cuerpos geométricos" del libro MATEMÁTICAS 2º de ESO (Autor: Fernando Blasco)

5- "Geometría del plano y del espacio" del libro MATEMÁTICAS 4ºA de ESO (Autoras: Milagros Latasa Asso y Fernanda Ramos Rodríguez)

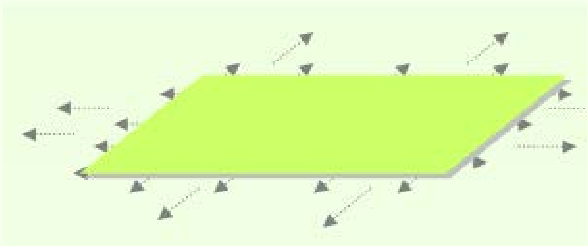
ÍNDICE

1. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

1.1. Puntos, rectas, semirrectas, segmentos

El elemento más sencillo del plano es el **punto**. El signo de puntuación que tiene este mismo nombre sirve para dibujarlo o también un pequeño círculo si queremos destacarlo. Para nombrar puntos se utilizan letras mayúsculas A, B, C,…

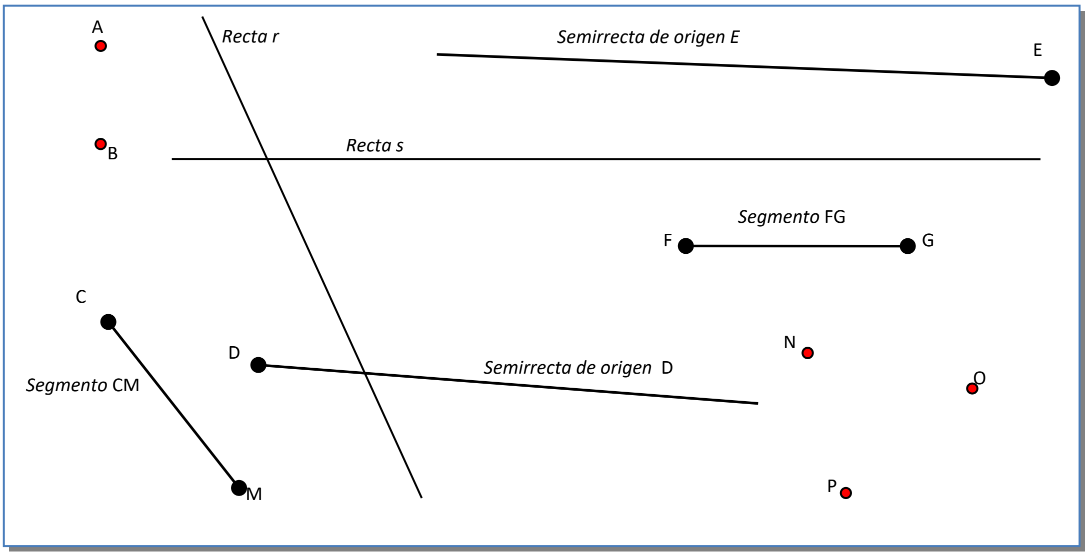
La recta es otro objeto elemental del plano. Constituye una sucesión infinita de puntos alineados en una misma dirección. Las rectas se nombran con letras minúsculas *r, s, t,…*



Imagina que cada uno de los límites de una hoja de papel o de cada una de las paredes de una habitación se prolonga indefinidamente. Los objetos resultantes serían ejemplos de **planos**.

Una **semirrecta** es cada una de las partes en las que queda dividida una recta por un punto que pertenece a ella. El punto se denomina origen. Las semirrectas se nombran con letras minúsculas o referenciando su origen: semirrecta de origen O, semirrecta *p*, …

Un **segmento** es la porción de recta comprendida entre dos puntos de la misma. Los puntos se llaman extremos. Los segmentos se nombran mediante sus extremos, por ejemplo: segmento $\overline{AB}$ o segmento de extremos A, B.



1.2. Posiciones relativas entre dos rectas en el plano

Rectas paralelas*:* No tienen ningún punto común

Rectas secantes*:* Tienen un único punto común

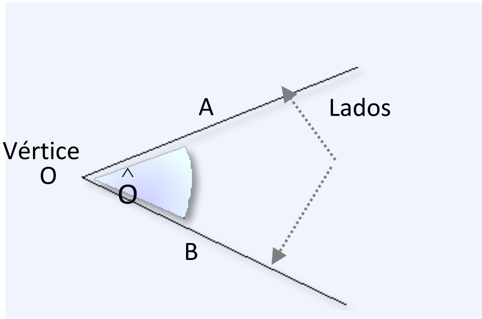
Rectas coincidentes*:* Todos sus puntos son comunes

Por un punto P exterior a una recta r solo puede trazarse una recta paralela a ella e infinitas secantes.

1.3. Ángulos. Tipos de ángulos

Se llama ***ángulo*** a la región del plano limitada por dos semirrectas con un origen común. Las semirrectas que lo limitan se llaman **lados** y el origen **vértice.**

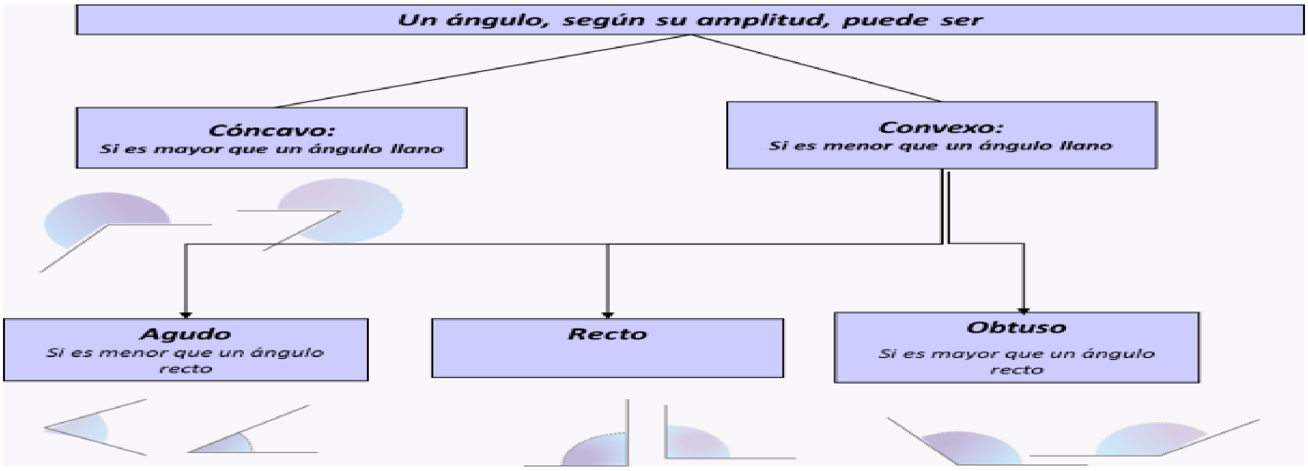
Para nombrar un ángulo podemos utilizar una sola letra o bien tres, que serán nombres de tres puntos: el primero y el último puntos sobre los lados del ángulo y el central el vértice. En ambos casos se coloca encima el símbolo ^.



En el ángulo del dibujo: $\hat{O} = A\hat{O}B$

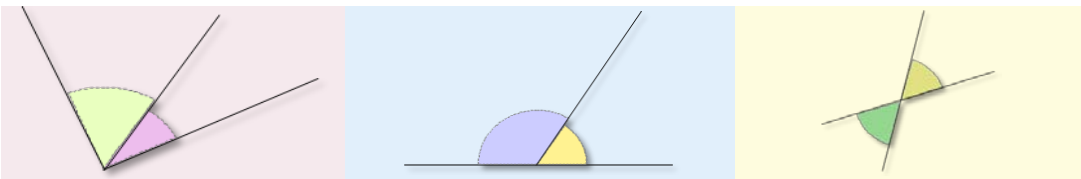
Asociados a semirrectas especiales definiremos tres ángulos que nos servirán tanto como referencia para clasificar los demás, como para definir una de las medidas angulares más utilizadas:

Ángulo completo: Es el definido por dos semirrectas iguales.	**Ángulo llano**: Es la mitad de un ángulo completo.	**Ángulo recto**: Es la mitad de un ángulo llano.



Se llaman ***ángulos consecutivos*** a dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común. Un caso particular son los ***ángulos adyacentes*** que son ángulos consecutivos cuyos lados no comunes forman un ángulo llano.

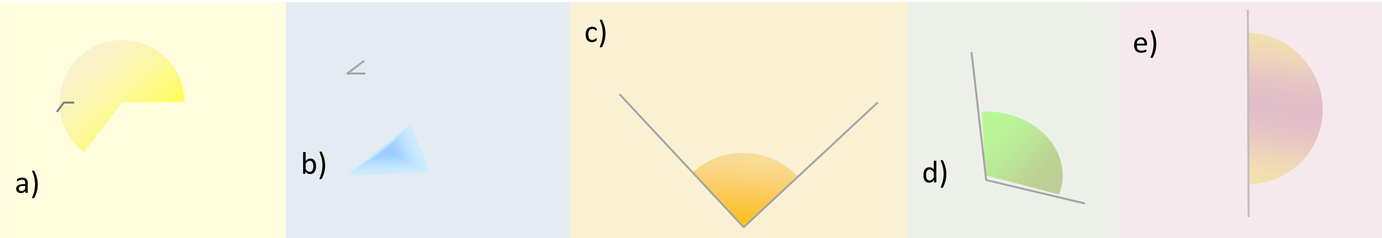
Se llaman ***ángulos opuestos por el vértice*** a los ángulos que tienen el mismo vértice y tales que los lados de uno son semirrectas opuestas a los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.



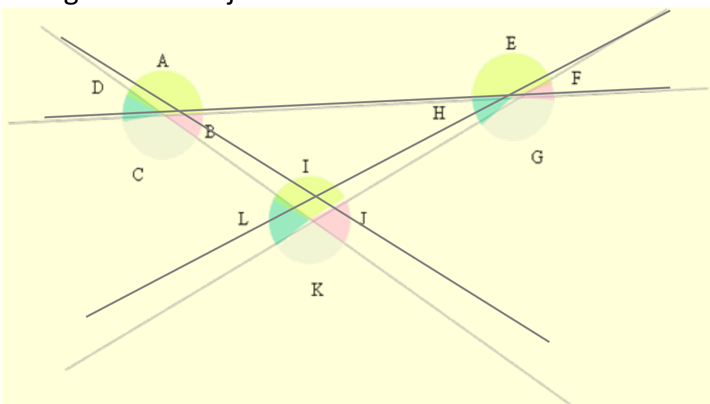
Consecutivos | **Adyacentes** | **Opuestos por el vértice**

Actividades propuestas

1. Nombra cada uno de estos ángulos según su abertura:



2. Indica seis parejas de ángulos adyacentes y otras seis de ángulos opuestos por el vértice que se encuentran en el siguiente dibujo:



1.4. Medida de ángulos

Para medir ángulos utilizamos el llamado ***sistema sexagesimal***. La unidad de medida es el ***grado sexagesimal***. Se representa con el símbolo ° y se define como 1/360 de un ángulo completo.

El *grado sexagesimal* tiene dos divisores:

Minuto 1 minuto = 1 ´ = 1/60 parte de un grado

Segundo 1 segundo = 1 ´´ = 1/60 parte de un minuto

Las unidades de este sistema aumentan y disminuyen de 60 en 60, por eso el sistema se llama sexagesimal.

Recuerda estas relaciones:

1 ángulo completo = 360 °

1 ángulo llano = 180°

1 ángulo recto = 90°

1 grado = 60 minutos = 3600 segundos

1 minuto = 60 segundos

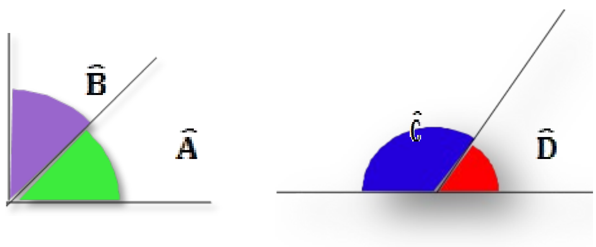
1.5. Ángulos complementarios y suplementarios

Se llaman **ángulos complementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90 º)
Se llaman **ángulos suplementarios** a dos ángulos cuya suma es un ángulo llano (180 º)

Ejemplo:

- En la figura aparecen dos ejemplos gráficos:

A y B son ángulos complementarios. C y D son suplementarios.

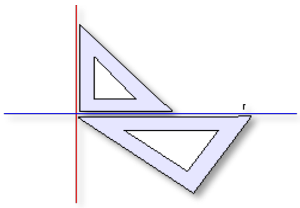


Ejemplo:

- El ángulo $\hat{A}$ = 12 º es el complementario de $\hat{B}$ = 78 º y el suplementario de $\hat{C}$ = 168 º

1.6. Rectas perpendiculares. Mediatriz de un segmento

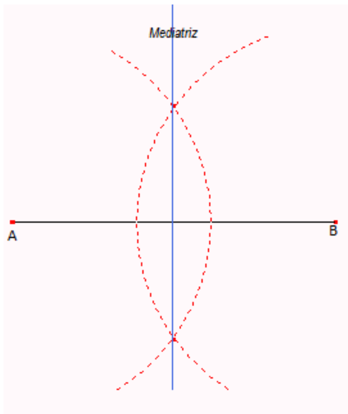
Dos rectas son **perpendiculares** si forman un ángulo recto. Es un caso especial de rectas secantes.



Para construir una recta perpendicular a una recta dada r, se adapta un cartabón a r y sobre él se apoya uno de los lados que forma el ángulo recto (cateto) de la escuadra. El otro cateto de la escuadra nos sirve para realizar la construcción deseada. También pueden cambiarse las funciones de escuadra y cartabón.

La **mediatriz** de un segmento AB es la recta perpendicular a AB trazada desde el punto medio

Todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan, es decir, están a la misma distancia, de los extremos.

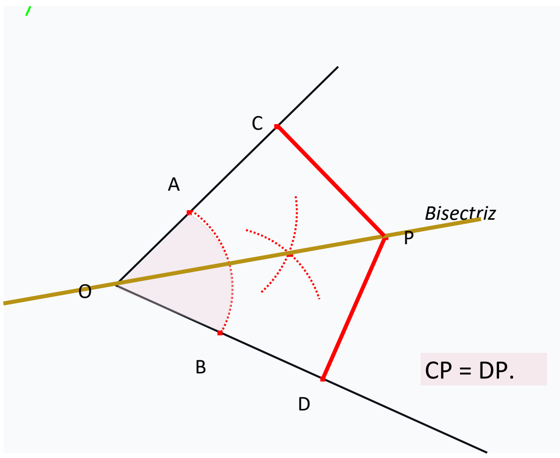


Para dibujar la mediatriz de un segmento AB con regla y compás, con centro en A y con radio R mayor que la mitad del segmento se traza un arco que corte al segmento AB, con el mismo radio se traza un arco de centro B; se unen los puntos comunes de los dos arcos y esta recta es la mediatriz.

1.7. Bisectriz de un ángulo

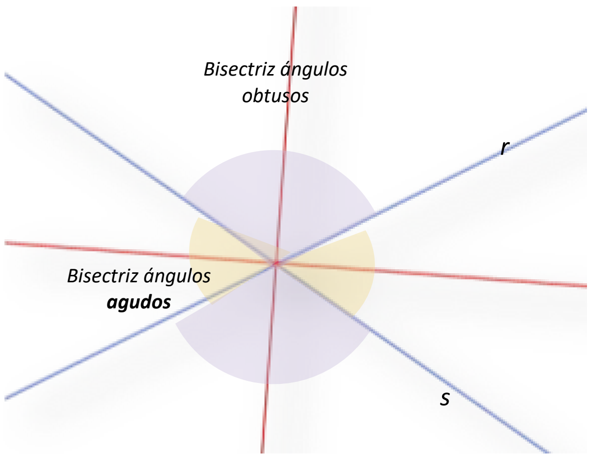
La **bisectriz d**e un ángulo es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Todos los puntos de la bisectriz tienen la propiedad de estar a la misma distancia de los dos lados del ángulo.



Para trazar la bisectriz de un ángulo de vértice O, se traza un arco haciendo centro en O que determina dos puntos, A y B. A continuación, con centros en A y B respectivamente y con radio fijo mayor que la mitad de la distancia AB, trazamos dos arcos. Estos se cortan en un punto, que unido con el vértice O nos da la bisectriz.

Dos rectas secantes determinan cuatro ángulos, iguales dos a dos, y sus bisectrices se cortan conformando ángulos rectos entre ellas.



Actividades propuestas

3. Utilizando un transportador de ángulos, una regla y un compás, dibuja los ángulos que se indican y la bisectriz de cada uno de ellos:

a) 45º b) 130º c) 70º d) 45º

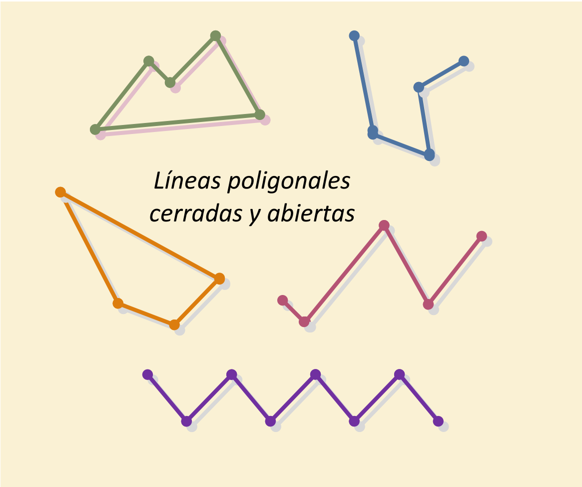
2. FÍGURAS PLANAS

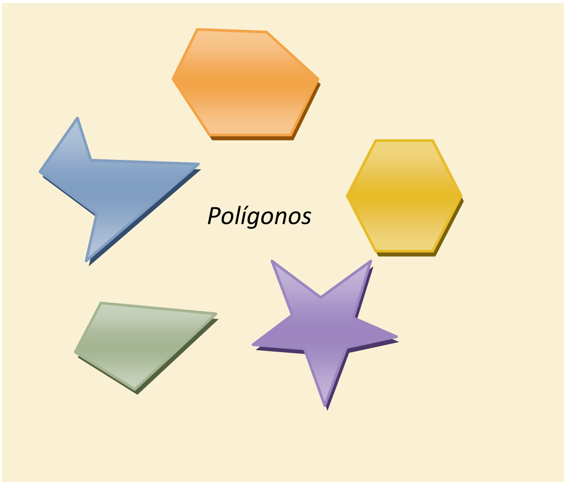
2.1. Líneas poligonales y polígonos

Una **línea poligonal** es una colección de segmentos consecutivos. Esto quiere decir que el primer segmento tiene un extremo común con el segundo. El extremo libre del segundo es común con el tercero y así sucesivamente. Si los extremos libres del primero y del último coinciden, se dice que la línea poligonal es cerrada. En caso contrario, es *abierta*.

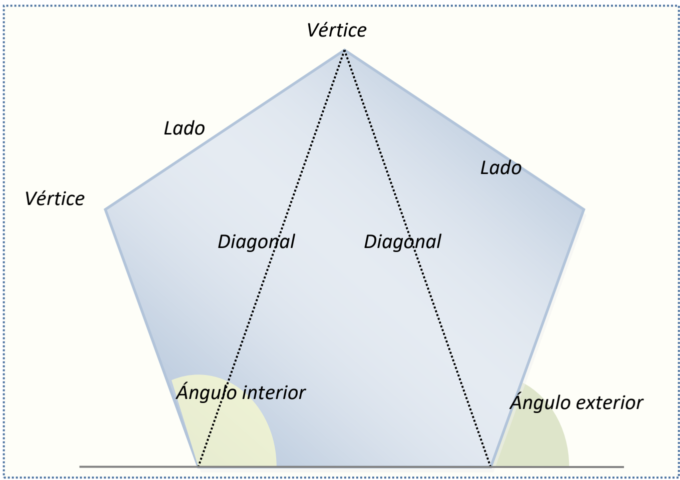
Un **polígono** es una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Ejemplos:





2.2. Elementos de un polígono: lados, ángulos, vértices, diagonales



Se llama **lado** de un polígono a cada uno de los segmentos que forman la línea poligonal que lo limita.

Los ángulos limitados por dos lados consecutivos son los **ángulos interiores** del polígono.

Los ángulos limitados por un lado y la prolongación del lado consecutivo son los **ángulos exteriores** del polígono

Los puntos en los que se cortan los lados se llaman **vértices.**

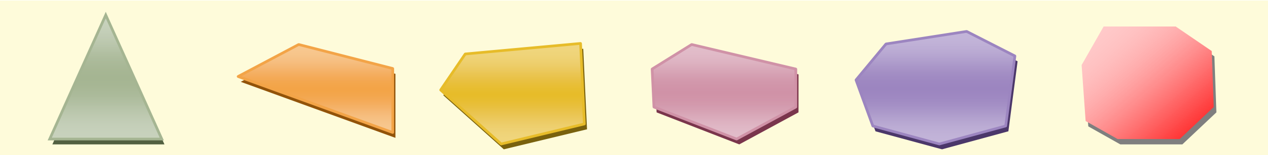
Cada uno de los segmentos que une dos vértices no consecutivos se llama **diagonal.**

Cualquier polígono tiene el mismo número de lados, de ángulos interiores y de vértices.

Dos polígonos son **iguales** si tienen los lados y los ángulos iguales.

2.3. Clasificación de los polígonos

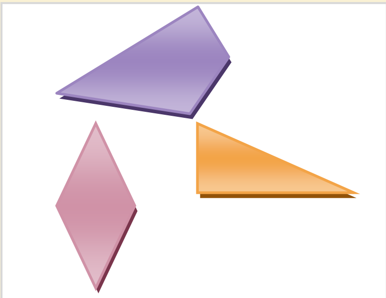
Por *el número de lados,* los polígonos se clasifican en



Triángulo	**Cuadrilátero**	**Pentágono**	**Hexágono**	**Heptágono**	**Octógono**
Tres lados	*Cuatro lados*	*Cinco lados*	*Seis lados*	*Siete lados*	*Ocho lados*

Los nombres que siguen son: eneágono (9 lados), decágono (10), undecágono (11), dodecágono (12),…

Según *los ángulos* los polígonos se clasifican en dos grandes grupos:



Convexos
Si todos sus ángulos son convexos.

Cóncavos
Si al menos uno de sus ángulos es cóncavo

Si un polígono tiene todos sus ángulos iguales se llama **equiángulo** y si tiene todos sus lados iguales se llama **equilátero**.

Los polígonos que tienen todos sus ángulos interiores y sus lados iguales se denominan **regulares.** Los polígonos regulares son entonces equiláteros y equiángulos. Si por lo menos una de estas condiciones se incumple, el polígono se llama **irregular.**

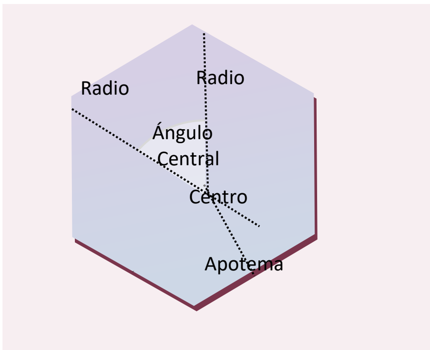
En un polígono regular aparecen nuevos elementos:

Centro que es un punto que equidista de los vértices.

Radio que es un segmento que une el centro con un vértice del polígono.

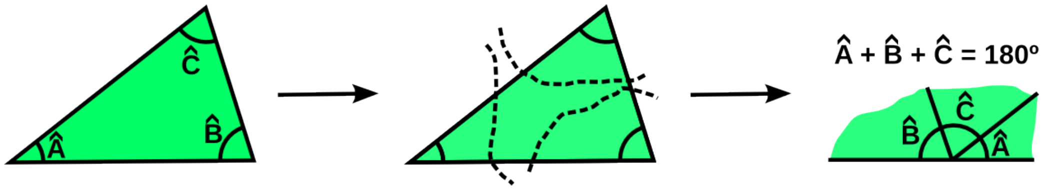
Ángulo central que es el menor de los ángulos que determinan dos radios que unen vértices consecutivos.

Apotema que es el segmento que une el centro con el punto medio de un lado. El apotema es perpendicular al lado.



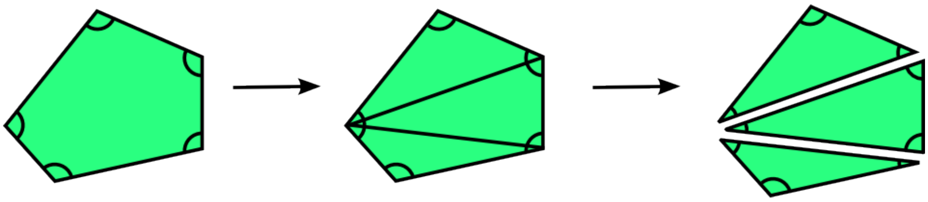
2.4. Suma de ángulos de un polígono

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .



La suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es (*n* – 2)·180°

Para comprobarlo basta con trazar las diagonales de un polígono desde un vértice y lo habremos dividido en triángulos.

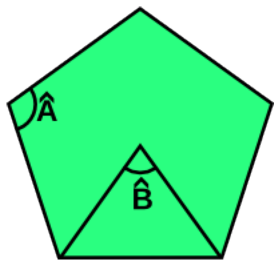


Por lo tanto:

Polígono	Suma de ángulos	Polígono	Suma de ángulos
Triángulo	180°	Cuadrilátero	180° · 2 = 360°
Pentágono	180° · 3 = 540°	Hexágono	180° · 4 = 720°

Si el polígono de *n* lados es regular, todos los ángulos interiores son iguales y para calcular el valor de su ángulo interior se divide entre *n* la suma de los ángulos interiores.

Ejemplo:



- *En un pentágono la suma de los ángulos interiores es* 180° · 3 = 540°.

  Por lo tanto el **ángulo interior:** $\hat{A} = \frac{540^{\circ}}{5} = 108^{\circ}$

  El **ángulo central**: $\hat{B} = \frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$

Actividades propuestas

4. Calcula los ángulos central e interior del hexágono regular.
5. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un decágono irregular?

2.5. Triángulos

Según *los lados* los triángulos se clasifican en

Según *los ángulos* los triángulos se clasifican en

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman ***catetos*** y el tercero se denomina ***hipotenusa***.

<u>Igualdad de triángulos</u>

Dos triángulos son iguales si sus lados y ángulos son respectivamente iguales

$$\overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'} \iff \begin{cases} a = a' ,\ b = b' ,\ c = c' \\ \hat{A} = \hat{A}' ,\ \hat{B} = \hat{B}' ,\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

Sin embargo, para saber con certeza que dos triángulos son iguales no es necesario comprobar todas las igualdades anteriores y basta con comprobar algunas de ellas, como se establece en los siguientes **criterios de igualdad de triángulos**:

I. Si dos triángulos tienen los tres lados respectivamente iguales, entonces son iguales

$$a = a' ,\ b = b' ,\ c = c' \quad \Rightarrow \quad \overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'}$$

II. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo que forman, son iguales

$$a = a' ,\ b = b' ,\ \hat{C} = \hat{C}' \quad \Rightarrow \quad \overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'}$$

III. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales un lado y sus dos ángulos contiguos, son iguales

$$a = a' ,\ \hat{B} = \hat{B}' ,\ \hat{C} = \hat{C}' \quad \Rightarrow \quad \overset{\triangleright}{ABC} = \overset{\triangleright}{A'B'C'}$$

<u>Construcción de triángulos</u>

Para construir un triángulo es suficiente conocer algunos de sus elementos. Los casos posibles coinciden con los criterios de igualdad de triángulos:

I. Se conocen los tres lados.

Para que se pueda construir el triángulo, el lado mayor debe medir menos que la suma de los otros dos.

En un triángulo cualquier lado es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Si se cumple la condición anterior se puede construir un único triángulo como se indica en la figura de la izquierda.

II. Se conocen dos lados y el ángulo que forman.

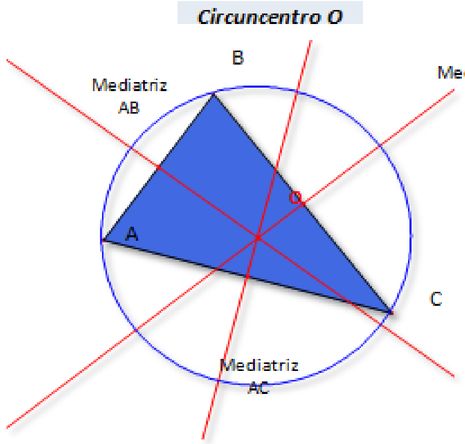
Siempre se puede construir un triángulo si se dan las medidas de dos de sus lados y del ángulo que forman

III. Se conocen un lado y los dos ángulos contiguos.

Siempre que la suma de las medidas de los dos ángulos sea menor que 180° se puede construir un triángulo.

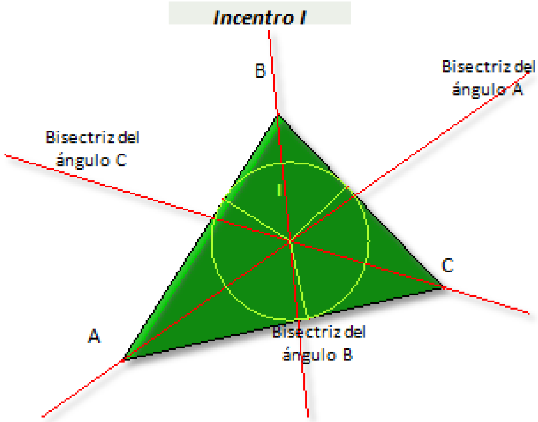
Rectas y puntos notables de un triángulo.

Mediatrices. Circuncentro.



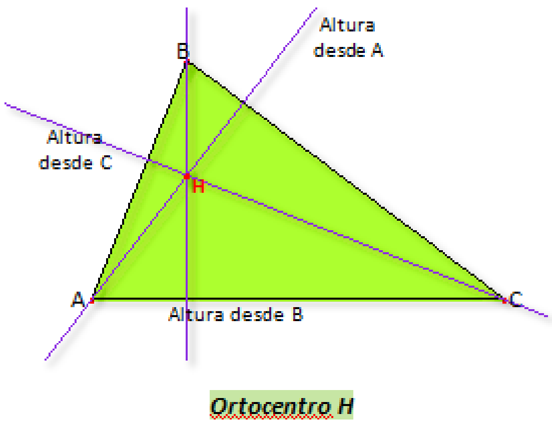
Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en el ***circuncentro***. El circuncentro está a la misma distancia de los tres vértices.
Es el centro de la circunferencia circunscrita.

Bisectrices. Incentro.



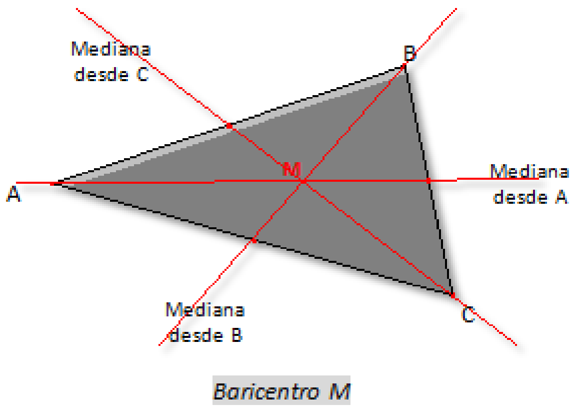
Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en el ***incentro***. El incentro está a la misma distancia de los tres lados.
Es el centro de la circunferencia inscrita.

Alturas. Ortocentro.



Las alturas son las perpendiculares a un lado trazadas desde el vértice opuesto.
Se cortan en el ***ortocentro***.

Medianas. Baricentro.



Las medianas son las rectas que pasan por un vértice y por el punto medio del lado opuesto. Dividen al triángulo en dos triángulos de igual área. Se cortan en el ***baricentro.***

En cualquier triángulo el circuncentro, ortocentro y baricentro están sobre una misma línea recta, a la que se denomina *Recta de Euler*. El incentro está en dicha recta sólo si el triángulo es isósceles.

Actividades propuestas

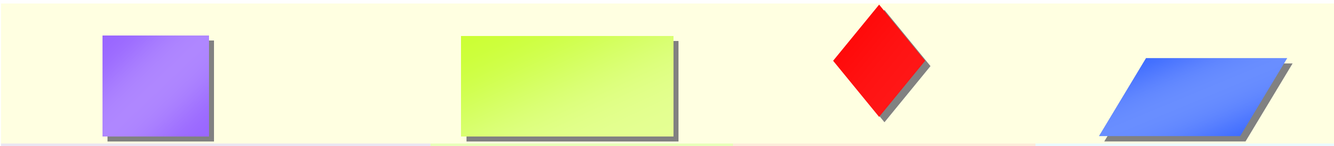
6. Dibuja un triángulo de lados 7, 6 y 4 cm. Traza en él las circunferencias inscritas y circunscritas.
7. Dibuja un triángulo de lado 8 cm y ángulos adyacentes al mismo de 40° y 30°. Encuentra su ortocentro y su baricentro.
8. Dibuja un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 40° comprendido entre dos lados iguales de 6 cm. Obtén su ortocentro, circuncentro y baricentro. El baricentro es el centro de gravedad. Si pones el triángulo recortado horizontalmente en el aire sólo sujetado por la punta de un lápiz en el baricentro comprobarás que se sujeta.

2.6. Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Como otros polígonos, se clasifican en dos grandes grupos dependiendo del tipo de ángulos que tengan: cóncavos y convexos. Además, podemos distinguir varios tipos de cuadriláteros convexos.

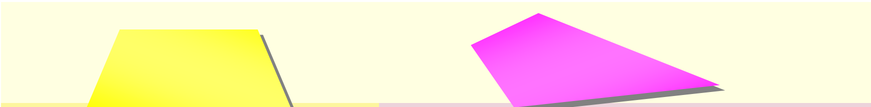
Los cuadriláteros convexos se clasifican en **paralelogramos** y **no paralelogramos.**

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos e iguales dos a dos. También sus ángulos son iguales dos a dos. Hay cuatro tipos de paralelogramos:



Cuadrado	**Rectángulo**	**Rombo**	**Romboide**
Los cuatro lados y los cuatro ángulos son iguales	*Sus lados son distintos y sus cuatro ángulos iguales*	*Los cuatro lados son iguales y los ángulos distintos*	*Lados y ángulos distintos*

Los cuadriláteros no paralelogramos pueden ser de dos tipos:



Trapecios	**Trapezoides**
Tienen exactamente dos lados paralelos	*No tienen ninguna pareja de lados paralelos*

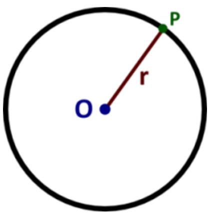
Un trapecio con dos ángulos rectos se llama **rectángulo**
Un trapecio con los dos lados no paralelos iguales se llama **isósceles**
Un trapecio con los tres lados desiguales se llama **escaleno**

La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360 º.

Actividades propuestas

9. Averigua qué tipo de cuadrilátero aparece si se unen los puntos medios de:
 a) un cuadrado b) un rombo c) un rectángulo d) trapezoide
10. Los dos ángulos agudos de un romboide miden 32º. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos obtusos?

2.7. Circunferencias y círculos

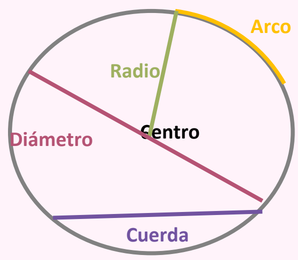


Una circunferencia es una línea cerrada y plana cuyos puntos equidistan de un punto interior a la misma llamado centro.

La porción de plano limitado por una circunferencia se llama **círculo**

El **diámetro** de una circunferencia es el segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.

Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia. El diámetro es la cuerda de longitud máxima. Cada una de las partes en que una cuerda divide a la circunferencia se llama **arco**.



3. PERÍMETROS Y ÁREAS DE FÍGURAS PLANAS

3.1. Concepto de perímetro y de área de una figura plana

El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.

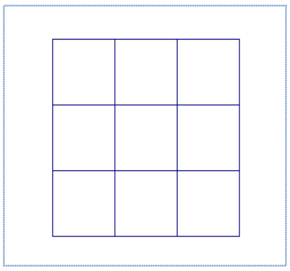
Las unidades para el perímetro en el SI son: metros (m), centímetros (cm), decímetros (dm),…

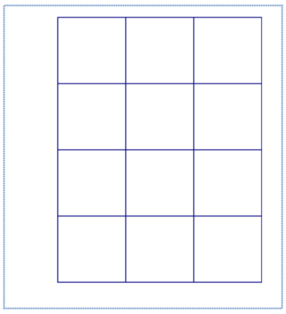
El **área** de una figura plana es lo que mide la región limitada por los lados de la figura.

Las unidades para el área en el SI son m^2, cm^2, dm^2, …

Ejemplo:

Si tenemos un cuadrado de lado 3 *cm*, su perímetro es 3 + 3 + 3 + 3 = 12 *cm* y su área es 9 cm^2 porque podemos meter en él 9 cuadraditos de lado 1 *cm*:





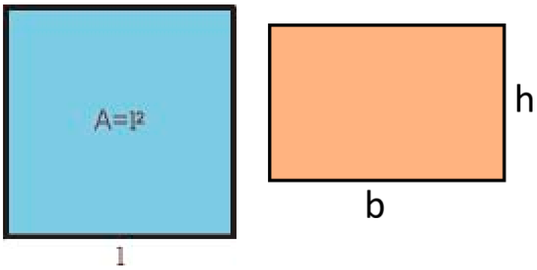
Ejemplo:

Si tenemos un rectángulo de base 3 *cm* y altura 4 *cm*, su perímetro es 3 + 4 + 3 + 4 = 14 *cm* y su área es 12 cm^2 porque podemos meter en él 12 cuadraditos de lado 1 *cm*:

3.2. Área del cuadrado y del rectángulo

El área de un cuadrado es el cuadrado de su lado : $A = l^2$

El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura: $A = b \cdot h$



Ejemplos:

- Si tenemos un cuadrado de 13 *dm* de lado, el área de dicho cuadrado es 169 dm^2 ya que:

$$Área_{cuadrado} = lado^2 = 13^2 = 169 \text{ dm}^2.$$

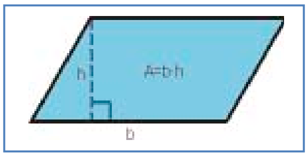
- El área de un rectángulo de 9 cm de base y 4 cm de altura es 36 cm^2

$$Área_{rectángulo} = base \cdot altura = 9 \cdot 4 = 36 \text{ cm}^2.$$

3.3. Área de paralelogramo y del triángulo

El área de un paralelogramo es el producto de su base por su altura:

Área Paralelogramo = base · altura

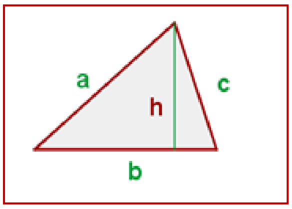


La base es uno cualquiera de los lados del paralelogramo y la altura es la distancia entre dicho lado y el lado paralelo. Un paralelogramo puede convertirse en un rectángulo, como se ve en la figura, cortando un triángulo por la altura y colocándolo al otro lado.

Si cortas a un paralelogramo por una de sus diagonales obtienes dos triángulos iguales, con la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Por tanto su área es la mitad que la del paralelogramo.

El **área de un triángulo** es la mitad del área de un paralelogramo:

$$Área_{triángulo} = \frac{base \cdot altura}{2}$$



En la fórmula anterior, base es la longitud de cualquier lado del triángulo y altura es la distancia a dicho lado desde el vértice opuesto.

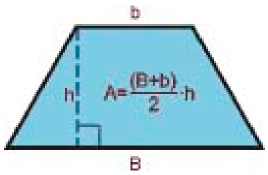
Ejemplo:

- El área de un triángulo de base b = 5 *cm* y altura h = 8 *cm* es $\frac{5 \cdot 8}{2} = 20\ cm^2$

3.4. Área del trapecio, rombo y romboide

A los lados paralelos de un trapecio se les llama bases y a la distancia entre las bases se le llama altura

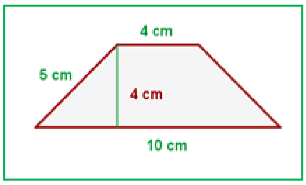
Uniendo dos trapecios iguales como se indica en la figura se forma un paralelogramo que tiene de base, la suma de las bases menor y mayor del trapecio, y de altura, la misma que el trapecio, luego su área es la suma de las bases por la altura. Por tanto el área del trapecio, que es la mitad del paralelogramo, es la semisuma de las bases por la altura.



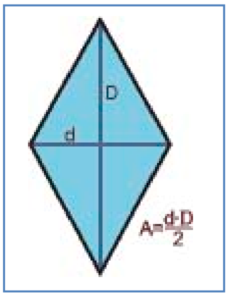
El área de un trapecio es igual a la mitad de la suma de sus bases multiplicada por su altura: $A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$

***Ejemplo*:**

- Tenemos el siguiente trapecio cuyas medidas son: B = 10 *cm*, b = 4 *cm*, h = 4 *cm*, su área es:



$$A = \frac{(10+4) \cdot 4}{2} = 28\ cm^2$$



- Un rombo está formado por dos triángulos iguales

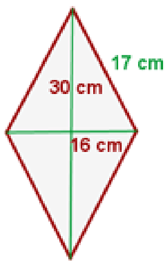
El área de un rombo es el producto de sus diagonales divididas entre 2:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo:

- Si tenemos un rombo cuyas diagonales miden D = 30 *cm* y d = 16 *cm* y un lado mide 17 *cm*,

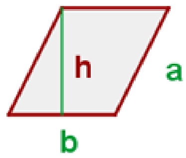
  el área será $A = \frac{30 \cdot 16}{2} = 240\,cm^2$,



y el perímetro P = 17 · 4 = 68 cm al ser todos los lados iguales.

Otra manera de hallar el área de un rombo sería considerar que el rombo con sus dos diagonales forma cuatro triángulos rectángulos iguales de lados 15 *cm*, (la mitad de la diagonal D) y 8 *cm* (la mitad de la diagonal d), pues ambas diagonales se cruzan en el centro del rombo, y de hipotenusa 17 *cm*, el lado del rombo.
El área es: Área de un triángulo multiplicado por 4 triángulos: (8 · 15 : 2) · 4 = 60 · 4 = 240 cm^2.

El romboide es un caso particular de paralelogramo, luego su área es el producto de su base y su altura:



Área romboide = base · altura = b · h

Ejemplo:

- Si tenemos un romboide de 5 *cm* de base y 4 *cm* de altura su área es 5 · 4 = 20 cm^2.
  Si el otro lado mide 4 cm, el perímetro es 5 + 5 + 4 + 4 = 18 *cm*.

3.5. Área de polígonos regulares

Un polígono regular podemos dividirlo en tantos triángulos iguales como lados tiene el polígono. Cada triángulo tiene de área (base · altura)/2. La base del triángulo es el lado del polígono, y su altura, el apotema del polígono.

Ejemplo

- El hexágono regular de lado l=4 *cm* y apotema a=3,5 *cm* lo descomponemos en 6 triángulos de base 4 *cm* y altura 3,5 *cm*, por lo que su área es:

$$Área_{\,triángulo} = \frac{4\cdot 3{,}5}{2} = 7\ cm^2.$$

  El área del hexágono es por tanto:

$$Área_{\,hexágono} = \frac{6\cdot 4\cdot 3{,}5}{2} = \left(\frac{6\cdot 4}{2}\right)\cdot 3{,}5 = 42\ cm^2.$$

Al ser $\left(\frac{6\cdot 4}{2}\right)$ el semiperímetro del hexágono, es decir, la mitad de su perímetro, se puede decir que:

Área de un polígono regular = semiperímetro · apotema

3.6. Longitud de una circunferencia

El número π (pi) se define como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Una aproximación por redondeo de **π** es 3,14, otra 3,1416, y otra 3,141592. Desde la antigüedad más lejana hasta hoy en día los matemáticos siguen investigando sobre él.

Si una circunferencia tiene un radio r, entonces su diámetro mide 2r, y su longitud, por la definición de π, mide 2·π·r. **Longitud de la circunferencia = 2·π·r.**

Ejemplo

- La circunferencia de radio 3 *cm* tiene una longitud L = 2·π·*r* = 2·π·3 = 6·π ≈ 18,84 cm

3.7. Longitud de un arco de circunferencia

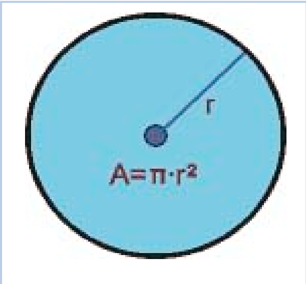
Para calcular la longitud de un arco de circunferencia que abarca un ángulo de α grados, debemos tener en cuenta que la circunferencia completa abarca un ángulo de 360°. Por tanto:

L = 2·π·r·α/360.

3.8. Área del círculo

El área del círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.

A = π·r².



Se puede imaginar el área del círculo como a la que se acercan polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia de radio *r*, con cada vez más lados. Entonces:

i) La apotema del polígono se aproxima al radio.

ii) El perímetro del polígono se aproxima a la longitud de la circunferencia.

Por lo tanto, el área de ese polígono, que es igual al semiperímetro por la apotema, es igual a: $(2\cdot\pi\cdot r/2)\cdot r = \pi\cdot r^2$.

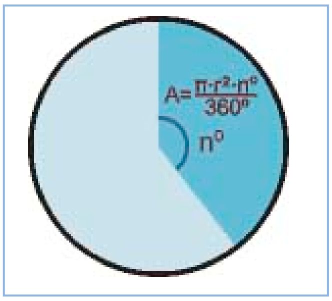
Ejemplo

- El área de un círculo de radio 7 *cm* es A = 49 π ≈ 153,86 cm^2.

3.9. Área del sector circular

El área de un sector circular que abarca un ángulo de n grados es igual a:

A = π·r²·n/360.



Ejemplo

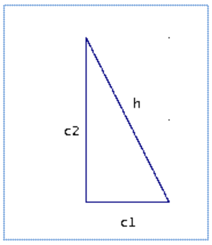
- Para hallar el área del *sector* circular de radio 7 m que abarca un ángulo de 90°, calculamos el área del círculo completo: $\pi\cdot 7^2 = 49\pi$, y hallamos la proporción:

$$A_S = 49\pi\cdot 90/360 = 12{,}25\,\pi \approx 38{,}465\ m^2.$$

Actividades propuestas

11. El tejado de una casa tiene forma de trapecio. La base pegada al techo de la vivienda mide 53 m y la otra base mide 27 m. Sabiendo que la altura del tejado son 8 m, ¿Cuánto mide su área?
12. Se quiere diseñar un posavasos. Puede ser cuadrado de 12 cm de lado o circular de 7 cm de radio. Calcula ambas superficies. A los posavasos se les quiere poner un reborde. ¿Qué longitud de reborde se necesita en cada caso?
13. Una circunferencia de 98,27 cm de longitud, ¿qué radio tiene? ¿y qué diámetro?
14. ¿Cuál es la longitud de un arco de circunferencia de 270° si el radio mide 17 cm?
15. Calcula la longitud de una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado 5 cm.
16. Calcula el radio de un círculo de área 28,26 m^2.
17. En una habitación rectangular de lados 8 y 5 m, cubrimos un trozo con una alfombra circular de radio 2 m, ¿qué área de suelo queda sin cubrir?
18. Calcula el área en m^2 de los círculos de radio *r* igual a: a) *r* = 53 *cm* b) *r* = 8,2 *dam*

4. TEOREMA DE PITÁGORAS



En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Recuerda que los catetos son los lados que forman el ángulo recto del triángulo y la hipotenusa es el lado opuesto a dicho ángulo.

Utilizando el teorema de Pitágoras podemos obtener el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si conocemos lo que miden los catetos, $h = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, o también podemos obtener el valor de un cateto a partir de los valores de la hipotenusa y del otro cateto: $c_2 = \sqrt{h^2 - c_1^2}$

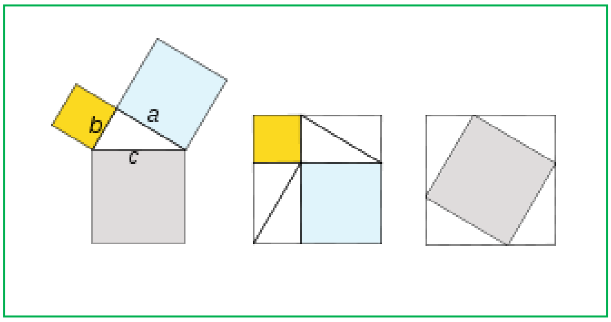
Ejemplo:

- Si los catetos de un triángulo rectángulo miden 10 *cm* y 24 *cm*, su hipotenusa vale 26 *cm*, ya que:

$$\mathrm{h} = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = 26 \ cm.$$

El teorema de Pitágoras dice que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadradazos construidos sobre los catetos

Una comprobación gráfica consiste en dibujar dos cuadrados iguales de lado la suma de los catetos *a* y *b* (figuras del centro y de la derecha). En uno se dibujan los cuadrados de lado *a* y *b*, en amarillo y azul en el dibujo. En el otro el cuadrado de lado la hipotenusa (en gris en el dibujo). Observa que quitando 4 triángulos iguales al de partida nos queda que el cuadrado gris es igual a la suma de los cuadrados amarillo y azul.



Por tanto: $a^2 + b^2 = c^2$

Actividades propuestas

19. Calcula la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos de catetos:
    a) 6 *cm* y 8 *cm* b) 4 *m* y 3 *m* d) 13,6 *km* y 21,4 *km*.
20. Calcula la longitud del cateto que falta en los siguientes triángulos rectángulos de los que se da la medida de la hipotenusa y de un cateto:
    a) 13 *cm* y 5 *cm* b) 17 *m* y 8 *m* c) 37 *dm* y 35 *dm*
21. Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 *m*. (Da el resultado con dos cifras decimales)
22. Calcula el área de un hexágono regular de lado 2 *cm*. (Da el resultado con dos cifras decimales)
23. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 *m*. (Redondea el resultado a mm)
24. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 8 *cm*.

5. SEMEJANZA

5.1. Figuras semejantes

Dos figuras semejantes tienen *la misma forma*, solamente difieren en el tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales, es decir, cada longitud de una de las figuras se obtiene multiplicando la longitud correspondiente de la otra por un número fijo llamado **razón de semejanza**.

Dos polígonos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos son iguales.

5.2. Escala en planos, mapas y maquetas

Cuando representamos un objeto en un plano, o mapa, o mediante una maqueta, la razón de semejanza entre la reproducción y la realidad también se llama *escala*.

Escala es el cociente entre cada longitud en la reproducción y la correspondiente longitud en realidad.

La proporción entre las longitudes de un objeto y su reproducción se expresa en algunas ocasiones en forma de producto y otras veces en forma de cociente.

El producto indica, mediante el signo **"X"**, cuántas veces mayor es la representación frente al modelo. (10X, 100X, etc.)

Ejemplo:

- *Una representación a escala 100X de una célula, indica que la representación es 100 veces más grande que el modelo, o que 100 células en fila tienen la misma longitud que la representación.*

La división indica cuánto más pequeño es el modelo frente a su representación (1:100, 1:500, etc.).

Ejemplo:

- *Un plano de un edificio de escala* 1:100, *indica que la representación es 100 veces más pequeña que el modelo. Si una distancia en el plano es 10 cm, en la realidad será de 1000 cm = 10 m*.

5.3. Teorema de Tales

El teorema de Tales establece una relación entre los segmentos formados cuando dos rectas cualesquiera son cortadas por varias rectas paralelas: los segmentos entre las paralelas en una de las rectas son directamente proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta:

Ejemplo:

- Para calcular los valores de x e y en la figura usamos las proporciones entre segmentos que establece el teorema de Tales:

$$\frac{24}{16}=\frac{x}{4} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 24}{16}=6 \Rightarrow x=6\text{ cm}$$

$$\frac{24}{16}=\frac{y}{12} \Rightarrow y=\frac{12\cdot 24}{16}=18 \Rightarrow y=18\text{ cm}$$

5.4. Triángulos en posición de Tales

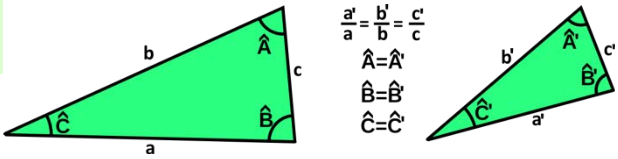
Decimos que dos triángulos están en posición de Tales cuando tienen un ángulo común y los lados opuestos a dicho ángulo son paralelos.

Se verifica la siguiente propiedad importante:

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes, es decir, los ángulos son iguales y los lados son proporcionales:

5.5. Triángulos semejantes. Criterios de semejanza.

Dos triángulos son semejantes si tienen todos los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales.



Para reconocer dos triángulos semejantes no es necesario medir todos los lados y ángulos, basta medir los elementos que se indican en los siguientes **criterios de semejanza**:

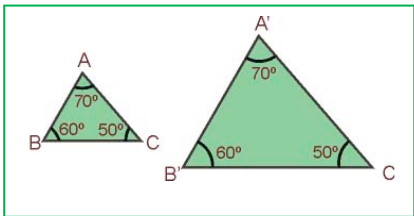
(1º): Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, entonces son semejantes.

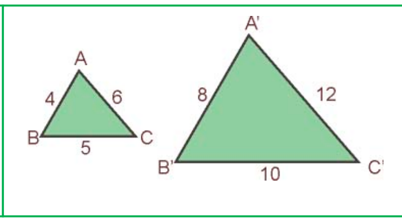
(2º): Si dos triángulos tienen los tres lados proporcionales, entonces son semejantes

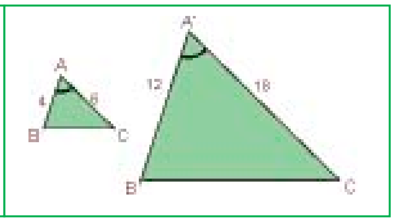
(3º): Si dos triángulos tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman es igual, son semejantes

La demostración de estos criterios de semejanza se basa en ver que en cada caso los triángulos se pueden poner en posición de Tales.

Ejemplos







Ejemplo

- *Cuenta la leyenda que Tales midió la altura de la pirámide de Keops comparando la sombra de la pirámide con la sombra de su bastón. Tenemos un bastón que mide* 1 *m, si la sombra de un árbol mide* 12 *m, y la del bastón, (a la misma hora del día y en el mismo momento), mide* 0,8 *m, ¿cuánto mide el árbol?*

Las alturas del árbol y del bastón son proporcionales a sus sombras, (forman con los rayos del Sol triángulos semejantes), por lo que, si llamamos *x* a la altura del árbol podemos decir:

$\frac{0{,}8}{1}=\frac{12}{x}$. Por tanto $x = 12/0{,}8 = 15$ metros.

Actividades propuestas

25. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos:

a) Un ángulo de 80° y otro de 40°. Un ángulo de 80° y otro de 60°.

b) Triángulo isósceles con ángulo desigual de 70°. Triángulo isósceles con ángulos iguales de 55°.

c) *A* = 30°, *b* = 7 cm, *c* = 9 cm. *A'*= 30°, *b'* = 3,5 cm, *c'* = 4,5 cm

d) *a* = 4 cm, *b* = 5 cm, *c* = 7 cm. *a'* = 10 cm, *b'* = 12,5 cm, *c'* = 24,5 cm

26. Calcula el valor desconocido para que los triángulos sean semejantes:

a) *a* = 9 cm, *b* = 6 cm, *c* = 12 cm. *a*' = 6 cm, *b'* = 4 cm, ¿*c'*?

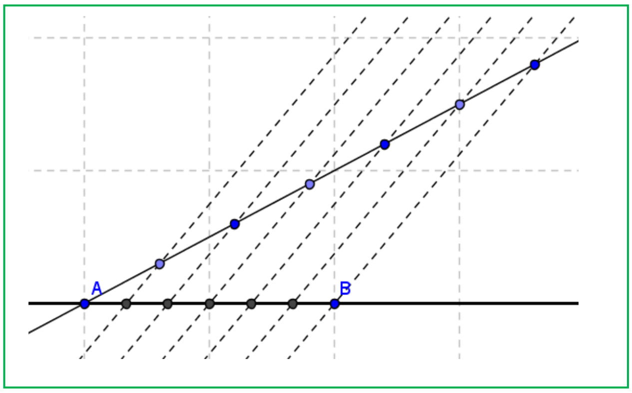
b) *A* = 90°, *b* = 9 cm, c = 12 cm. *A'* = 90°, *b'* = 3 cm, ¿c'? ¿a´?

27. Un triángulo tiene lados de 5 cm, 7 cm y 8 cm. Un triángulo semejante a él tiene un perímetro de 60 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

28. Calcula las longitudes desconocidas en cada figura y la razón de semejanza entre los dos triángulos en posición de Tales:

29. María mide 160 cm. Su sombra mide 90 cm. En ese mismo instante se mide la sombra de un edificio y mide 7,2 m. ¿Cuánto mide el edificio?

5.6. Aplicaciones del teorema de Tales



Para dividir un **segmento *AB* en *n* partes iguales** se traza una semirrecta *r* con origen en *A* donde se señalan, con ayuda de un compás, *n* segmentos consecutivos de la misma longitud. El extremo del último segmento se une con *B*, y se trazan paralelas a este segmento por cada uno de los puntos señalados de la semirrecta.

La figura obtenida es de triángulos en posición Tales y los segmentos obtenidos en *AB* son todos de igual longitud.

Del mismo modo el teorema de Tales nos sirve para **dividir un segmento en partes que tengan una proporción dada**. El procedimiento es el mismo que el anterior. La diferencia es que ahora sobre la semirrecta *r* se llevan en lugar de segmentos iguales los segmentos con los valores dados por la proporción.

En la figura se ha dividido el segmento AB en partes proporcionales a las longitudes de los segmentos a, b y c.

$$\frac{AC}{a}=\frac{CD}{b}=\frac{DB}{c}$$

Actividades propuestas

30. Dibuja un segmento de 6 cm y divídelo en 5 partes iguales utilizando regla y compás.
31. Dibuja un segmento de 7 cm de longitud, y divídelo en dos segmentos que estén en una proporción de 3/5.
32. Dibuja una recta numérica y representa en ella las fracciones 5/7 y -5/3 aplicando el teorema de Tales para dividir la unidad en partes iguales.

5.7. Semejanza en longitudes y áreas

En las figuras semejantes la forma no varía, únicamente cambia el tamaño. Toda las longitudes de una figura son proporcionales a las correspondientes de la figura semejante (lados, perímetros,…).

La **razón de semejanza** se aplica a todas las **longitudes** del modelo por igual.

Cuando otras propiedades de una figura dependen de la longitud, como el área, estas propiedades también cambian en la figura semejante, aunque no de la misma manera que la longitud.

Si el área del cuadrado es $A = L^2 = L \cdot L$, el área de un cuadrado semejante de razón 2, será:

$$A = 2 \cdot L \cdot 2 \cdot L = 2 \cdot 2 \cdot L \cdot L = 2^2 \cdot L^2 = 4 \cdot L^2$$

El área de una figura es una propiedad que depende de la longitud de sus segmentos. En concreto, la relación entre la longitud de una figura y su área es cuadrática.

Cuando se aplica el factor de semejanza, se conserva la relación cuadrática entre longitud y área, por lo que en una figura plana, provocará un aumento de su área proporcional al cuadrado.

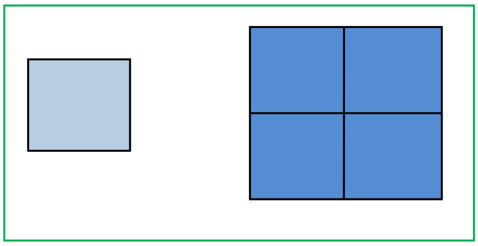
Si la razón de semejanza entre las longitudes de dos figuras es k, entonces la razón entre sus áreas es $\boldsymbol{k^2}$

Ejemplo:

- *Un televisor de* 40 *pulgadas cuesta aproximadamente cuatro veces más que uno de* 20. Por extraño que parezca, el aumento de precio está justificado. El tamaño del televisor, indica la longitud de su diagonal en pulgadas. Una longitud doble, implica un área cuatro veces mayor y por tanto necesita cuatro veces más componentes electrónicos.

Ejemplo:

- *Observa la figura del margen.* Si multiplicamos por 2 el lado del cuadrado pequeño, el área del cuadrado grande es 2^2 = 4 veces la del pequeño.

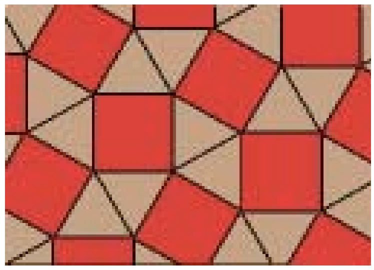


Actividades propuestas

33. En un mapa de carretera de escala 1:300000 la distancia entre dos ciudades es de 2,7 cm. Calcula la distancia real entre dichas ciudades.
34. Un microscopio tiene un aumento de 500X, ¿qué tamaño tiene la imagen que se ve por el objetivo si observamos un paramecio de 0,034 mm de diámetro?
35. En una fotografía una persona que sabe que mide 1,75 m tiene una altura de 2,5 cm. Aparece un árbol que en la fotografía mide 5,7 cm, ¿cuánto mide en la realidad?
36. El área de un rectángulo es 10 cm^2, y uno de sus lados mide 2 cm, ¿qué área tiene un rectángulo semejante al anterior en el que el lado correspondiente mide 1 cm? ¿Qué perímetro tiene?
37. El mapa a escala 1:1500000 de una región tiene un área de 16 cm^2, ¿cuánto mide la superficie verdadera de dicha región?

6. MOVIMIENTOS EN EL PLANO

En el mosaico del margen todos los cuadrados son iguales y también son iguales todos los triángulos.



Isometrías

A las transformaciones geométricas que nos llevan de un cuadrado a otro (o de un triángulo a otro) que mantienen la forma y el tamaño las llamamos isometrías o movimientos.

La palabra *isometría* proviene del griego: Iso = Igual. Metría = Medida. Significa por tanto: *Igual medida*.

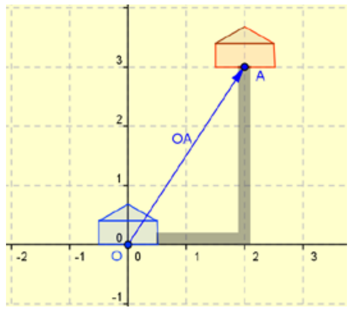
Las **isometrías,** (**movimientos** o **congruencias**) son transformaciones geométricas que conservan ángulos y distancias (aunque no tienen por qué conservar la orientación de los ángulos).

Isometrías en el plano son las **traslaciones**, los **giros** y las **simetrías**.

6.1. Traslaciones

Para definir el sentido, la dirección y la longitud de una traslación en el plano se utiliza un objeto geométrico llamado vector.

Un **vector fijo** $\overrightarrow{OA}$ es un segmento orientado con origen en el punto O y extremo en el punto A. Tiene una dirección, la de la recta, un sentido, desde O hasta A, y una longitud, a la que llamamos módulo. Representamos un vector con una flecha.



Dos vectores fijos son **equipolentes** cuando tienen igual módulo, dirección y sentido. Todos los vectores que son equipolentes se dicen que son un **vector libre**, y cada uno de sus vectores fijos, un **representante** del vector.

Para definir una traslación basta conocer su vector de traslación.

Se llama traslación de vector libre $\vec{v}$ a una transformación T que hace corresponder a cada punto P otro punto $P' = T(P)$, de forma que el vector fijo $\overrightarrow{PP'}$ es un representante del vector libre $\vec{v}$.

Ejemplo:

En la figura de la derecha se ve la traslación del triángulo ABC según el vector $\vec{v}$. El resultado de la traslación es el triángulo A'B'C'

Entre el triángulo inicial y su transformado por la traslación se conservan todas las distancias: AB = A´B´, BC = B'C, AC = A'C'. La traslación también mantiene los ángulos: el ángulo $B\hat{A}C$ es recto, y el nuevo ángulo $B'\hat{A}'C'$ también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. También son iguales y con la misma orientación las otras parejas de ángulos $A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$ y $C\hat{B}A = C'\hat{B}'A'$.

6.2. Giros en el plano

Para determinar un giro o rotación es necesario conocer un punto, O, el centro de giro; un ángulo α y el sentido de giro de ese ángulo.

Existe el acuerdo de considerar *positivo* (+) al sentido de giro contrario de las agujas de un reloj y sentido *negativo* (–) el de las agujas del reloj.

Si P' es el punto girado de P, con centro O y ángulo α, entonces el segmento OP forma un ángulo α con OP' y ambos segmentos tienen la misma longitud.

Dados un punto O y un ángulo α, se llama **giro de centro** O **y ángulo** α a una transformación que hace corresponder a cada punto P otro punto $P' = G(P)$ de modo que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ y $P\hat{O}P' = \alpha$

Para girar una figura se giran los puntos que la forman.

Ejemplos:

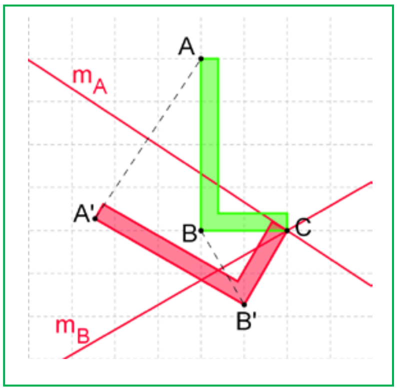
- Si han pasado 15 minutos la manecilla de los minutos ha girado –90° (90° en sentido negativo), cuando pase media hora habrá girado –180°, y si sólo pasan 10 minutos habrá girado –60°.

- En la figura de la izquierda el triángulo ABC se ha transformado en el triángulo A'B'C' por un giro de centro el punto O y ángulo –90°

El triángulo transformado por el giro mantiene las distancias: AC=A´C´, BC = B'C´ y AB = A'B'. También mantiene los ángulos: el ángulo $B\hat{A}C$ es recto, y el nuevo ángulo $B'\hat{A}'C'$ también es un ángulo recto y con la misma orientación que el anterior. También son iguales y con la misma orientación las otras parejas de ángulos $A\hat{C}B = A'\hat{C}'B'$ y $C\hat{B}A = C'\hat{B}'A'$.

Los movimientos que, como los giros y las traslaciones, además de mantener distancias y ángulos, conservan el sentido de los ángulos, se llaman **movimientos directos**. Los movimientos directos también se llaman deslizamientos porque la figura se *desliza* por el plano hasta su posición final.

Para saber si dos figuras son dos figuras giradas trazamos las mediatrices de los puntos correspondientes y todas ellas deben cortarse en un mismo punto, el centro de giro. Con el transportador de ángulos podemos entonces medir el ángulo de giro.



Ejemplos:

- En la figura de la derecha se ha comprobado que la letra L de color rosa es el resultado de realizar un giro de la letra L verde de centro el punto C y ángulo 60°. En el giro, el punto A se ha transformado en el punto A´ y el punto B en B´. Se han trazado las mediatrices de los segmentos AA´y BB. Ambas mediatrices se cortan en el centro de giro C.

6.3. Simetría central en el plano. Centro de simetría

La **simetría central de centro O** en el plano es un giro con ese centro **O** y ángulo 180°. La simetría central es, por tanto, un movimiento directo.

Si P' es el simétrico de P en la **simetría central** de centro de simetría O, entonces, O es el punto medio del segmento PP'.

Ejemplos:

- En la figura de la izquierda el triángulo A'B'C' es la figura simétrica del triángulo ABC con respecto al punto O.

Un punto O es un **centro de simetría** de una figura si todo punto de ella tiene como transformado por la simetría central de centro O otro punto de la figura. La simetría central de centro O transforma la figura en ella misma.

Ejemplo:

- El círculo, el cuadrado, el rectángulo tienen centro de simetría, sin embargo, un triángulo nunca tiene centro de simetría.
- Los polígonos regulares con un número par de lados tienen centro de simetría.
- El pentágono regular, no lo tiene.

6.4. Simetrías axiales. Eje de simetría

Una **simetría axial** de eje una recta *r* transforma un punto P en otro P´, llamado punto simétrico, de forma que los dos puntos están a la misma distancia de la recta, es decir, *r* es la **mediatriz** del segmento PP'.

Ejemplos:

- En la figura de la izquierda el triángulo A'B'C' es la figura simétrica del triágulo ABC con respecto a la recta r.

El triángulo transformado por el giro mantiene las distancias: AC=A´C´, BC = B'C´ y AB = A'B'. También mantiene la magnitud de los ángulos, pero no la orientación: el ángulo $B\hat{A}C$ es recto, y el nuevo ángulo $B'\hat{A}'C'$ también es un ángulo recto pero con orientación opuesta al anterior; lo mismo ocurre con las otras dos parejas de ángulos, son iguales en magnitud pero con sentidos opuestos.

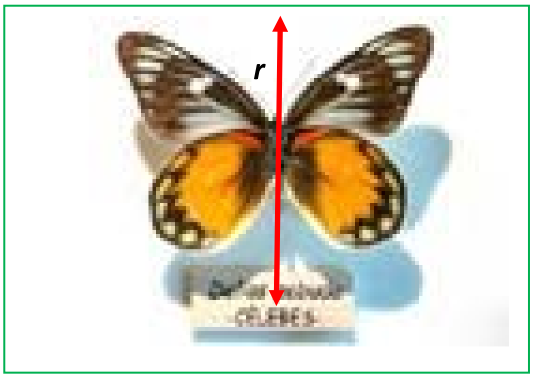
Movimientos, como la simetría axial, que conservan todas las longitudes y la magnitud de los ángulos, pero cambian el sentido de éstos se llaman **movimientos inversos**. En los movimientos inversos, a diferencia de los directos, para llevar una figura a su posición final hay que sacarla del plano.

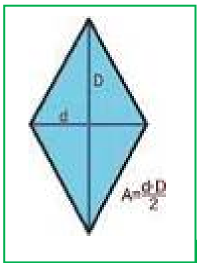
Figuras simétricas. Eje de simetría de una figura

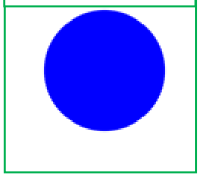
Si una figura es invariante respecto a una simetría axial, se dice que es una figura simétrica y al eje se le llama eje de simetría de la figura

Ejemplos:

- La mariposa de la figura es simétrica respecto del eje de simetría *r*.
- Puedes obtener figuras simétricas doblando un papel. El doblez es el eje de simetría. Si dibujas una figura, doblas el papel y la calcas obtienes la figura simétrica.
- Otra forma es doblar un papel y recortar una figura: se obtiene una figura simétrica respecto al doblez.



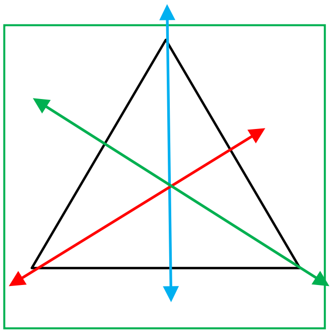




Si la recta r es un eje de simetría de una figura entonces todo punto de esa figura tiene como transformado por la simetría de eje r a otro punto de dicha figura.

Ejemplos:

- Un triángulo isósceles tiene un eje de simetría y un triángulo equilátero, tres.
- Un rectángulo o un rombo tienen dos ejes de simetría, y un cuadrado cuatro.
- Un círculo tiene una infinidad de ejes de simetría (todos sus diámetros).



Actividades propuestas

38. Señala los ejes de simetría de la figura de la derecha.

    Comprueba que la figura tiene también simetría central y señala cuál es el centro de simetría:

39. Con movimientos repetidos de la figura del ejercicio anterior se puede construir un mosaico como el que ves en la figura de la derecha. Describe un giro que transforme F_1 en F_4 (señala el centro y la medida del ángulo de giro. Describe un giro que transforme F_1 en F_3 (señala el centro y la medida del ángulo de giro).Describe una traslación que transforme F_1 en F_2 (dibuja el vector que define la traslación).Describe una traslación que transforme F_1 en F_3 (dibuja el vector que define la traslación)

40. Diseña tu propio mosaico mediante la composición de movimientos de figuras geométricas.

7. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO

7.1. Las tres dimensiones del espacio

Nuestra vida se desarrolla en un entorno tridimensional: cuando vamos a comprar un mueble medimos tres dimensiones, para ver si nos cabe en casa: alto, ancho y largo. Incluso los objetos “planos”, como una hoja de papel o un DVD en realidad son tridimensionales, pero su altura es muy pequeña y tendemos a considerarlos planos.

El espacio involucra tres dimensiones: ancho, alto y largo, mientras que el plano involucra solo a dos.

7.2. Elementos geométricos en el espacio

Puntos, rectas y planos

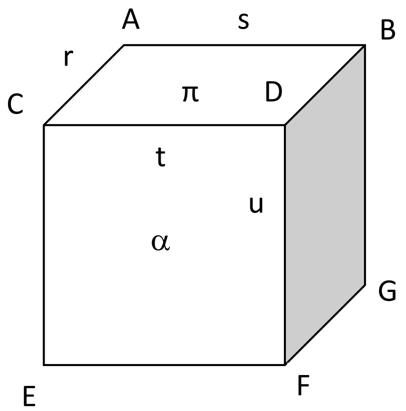
Las paredes, el suelo y el techo de una habitación son planos. Estos planos a veces se cortan en segmentos de rectas. La intersección de tres de esos planos o de dos de esas rectas es en un punto

Posiciones relativas de dos planos

En una habitación el plano del techo y el del suelo son planos paralelos. El plano del techo y el de una pared son planos secantes. Además como forman un ángulo recto son planos perpendiculares.

Dos planos en el espacio son paralelos si no tienen ningún punto en común, y son secantes si tienen una recta en común.

Ejemplos:



- En el cubo del margen hemos dado nombre a los puntos con letras mayúsculas: *A, B, C, D, E, F, G…;* a las rectas con letras minúsculas: *r, s, t, u…;* y a los planos con letras griegas: π, α… También se podrían denominar diciendo, recta que pasa por los puntos *A* y *B*, o plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C*.
- El plano π y el plano α son secantes y se cortan en la recta *t*.
- El plano π y el del suelo son paralelos.

Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

Fíjate en una recta del techo de una habitación. Las otras tres rectas del techo o se cortan con ella, o son paralelas. Sigue fijándote en la misma recta, y mira las cuatro rectas verticales que forman las paredes. ¿Cómo son respecto a esa recta? Observa que dos de ellas la cortan pero las otras dos ni la cortan ni son paralelas. Decimos que esas rectas se cruzan

Dos rectas en el espacio o son paralelas o se cortan o se cruzan.

Ejemplos:

- Nos fijamos en el cubo anterior en la recta r. La recta s la corta (es secante) en el punto A.
- Las tres rectas r, s y t están en el plano π.
- Las rectas s y t son paralelas.
- Las rectas r y u no se cortan en ningún punto, ni son paralelas, ni hay ningún plano que contenga a ambas. Las rectas r y u se cruzan.

Posiciones relativas de recta y plano

Una recta puede estar contenida en un plano o ser paralela al plano o ser secante.

Ejemplo:

- Seguimos fijándonos en el cubo anterior. El plano π contiene a las rectas r, s y t . La recta u corta al plano π en el punto D. La recta que pasa por los puntos E y F es paralela al plano π.

7.3. Cuerpos geométricos. Poliedros

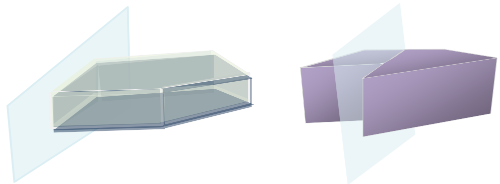
Los cuerpos geométricos son elementos que ocupan un volumen en el espacio desarrollándose en las tres dimensiones de alto, ancho y largo. Los cuerpos geométricos se clasifican en cuerpos poliedros y cuerpos redondos.

Llamamos **cuerpos redondos** a figuras bastante regulares que tienen alguna superficie curva.

Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son polígonos. Llamamos **aristas** de un poliedro a los lados de las caras de éste. Los **vértices** del poliedro son los vértices de sus caras.

Es posible clasificar poliedros atendiendo a diferentes criterios. Si nos fijamos en la amplitud de sus ángulos, se clasifican en ***cóncavos y convexos***.

Un poliedro es *convexo* si el segmento que une dos puntos cualesquiera del poliedro, está dentro del mismo. Un poliedro es *cóncavo* en caso contrario.



Poliedro convexo   Poliedro cóncavo

En los poliedros convexos se cumple el llamado *Teorema de Euler* que relaciona las caras, vértices y aristas y afirma que en todo poliedro convexo el número de caras más el número de vértices coincide con el número de aristas más 2. Si caras, vértices y aristas se representan por sus iniciales, se escribe: $C + V = A + 2$

Existen poliedros cóncavos que cumplen esta relación y poliedros cóncavos que no la cumplen.

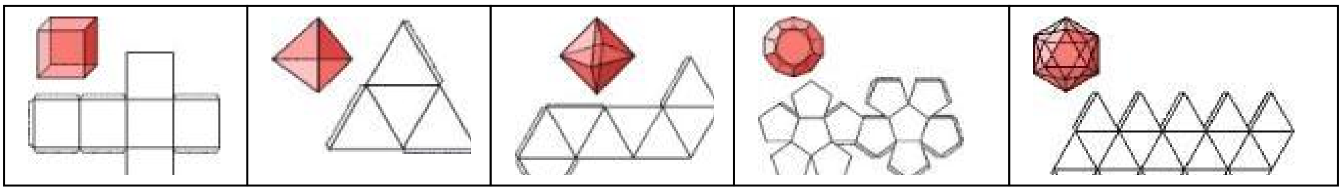
7.4. Poliedros regulares

Un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y además en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Solo existen 5 poliedros regulares convexos, que son los que presentamos en la siguiente tabla:

POLIEDRO	CARAS	VÉRTICES	ARISTAS
TETRAEDRO	4	4	6
CUBO (HEXAEDRO)	6	8	12
OCTAEDRO	8	6	12
DODECAEDRO	12	20	30
ICOSAEDRO	20	12	30

Se puede construir cada poliedro regular a partir de su desarrollo en el plano:



7.5. Prismas

Un **prisma** es un poliedro limitado superior e inferiormente por dos polígonos paralelos e iguales (bases) y tantos paralelogramos (caras laterales) como lados tienen las bases.

La **altura** del prisma es la distancia entre sus bases.

Cuando todas las caras laterales son rectángulos, se dice que el prisma es un **prisma recto**.

Si algunas caras laterales son romboides, tenemos un **prisma oblicuo**.

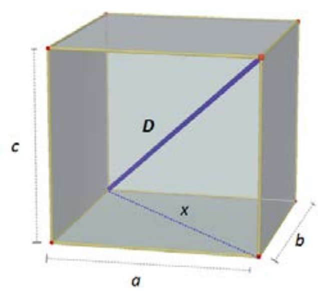
Llamamos **prisma regular** al prisma que tiene por bases dos polígonos regulares.

Desarrollo de prisma hexagonal

Un prisma se nombra en función de los polígonos de la base. Así, si la base es un triángulo tendremos un **prisma triangular**, si es un cuadrilátero el prisma se llamará **cuadrangular**, si es un rombo, **prisma rómbico**, si es un hexágono, el prisma será **hexagonal**…
Los prismas cuadrangulares pueden tener otros muchos nombres como **paralelepípedo**, si todas sus caras son paralelogramos, paralelas dos a dos; **ortoedro** si sus caras son rectángulos, es decir, es un paralelepípedo rectangular (el ortoedro se conoce también como "caja de zapatos"). Si todas las caras del paralelepípedo son cuadradas recibe el nombre particular de **cubo**.

Teorema de Pitágoras en el espacio

La diagonal de un ortoedro al cuadrado coincide con la suma de los cuadrados de sus aristas.



Vamos a demostrarlo: Sean *a, b* y *c* las aristas del ortoedro que suponemos apoyado en el rectángulo de dimensiones *a* , *b*. Si *x* es la diagonal de este rectángulo, cumple: $x^2 = a^2 + b^2$. El triángulo de lados *D, x, c* es rectángulo luego: $D^2 = x^2 + c^2$. Y teniendo en cuenta la relación que cumple *x:* $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Actividades resueltas

- *Las aristas de la base de una caja con forma de ortoedro miden 10 cm y 11 cm y su altura 8 cm. Estudia si puedes guardar en ella tres barras de longitudes 14 cm, 16 cm y 18 cm.*

El rectángulo de la base tiene una diagonal d que mide: $d = \sqrt{10^2 + 11^2} = \sqrt{221} \approx 14{,}9$ cm. Luego la barra más corta cabe apoyada en la base. Calculemos ahora cuánto mide la diagonal del ortoedro:

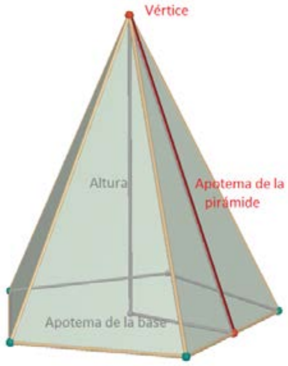
$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 8^2 + 10^2 + 11^2 = 285 \Rightarrow D = \sqrt{285} \approx 16{,}9 \text{ cm}$$

Luego, la barra de 16 cm cabe también en la caja pero la de 18 cm no.

7.6. Pirámides

Una **pirámide** es un poliedro limitado inferiormente por un polígono y superior y lateralmente por triángulos con un vértice común.

Se llama **base** de la pirámide al polígono que la limita inferiormente.



Caras laterales a los triángulos que tienen un lado común con la base y un vértice común.

A ese vértice común se le llama **vértice** de la pirámide.

La **altura** de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

Cuando la base de la pirámide es un polígono regular y el vértice se proyecta sobre el centro de la base, nos encontramos ante una **pirámide regular**.

Dependiendo del número de lados de la base de la pirámide, ésta puede ser **triangular**, **cuadrangular**, **pentagonal**...

7.7. Superficie de poliedros

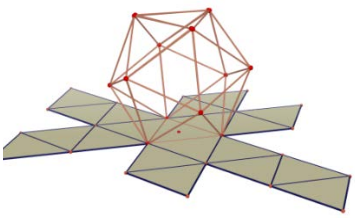
La superficie de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras.

Calcular la superficie de un poliedro es simple, puesto que solo hay que **reducirlo a calcular las áreas de los polígonos que forman sus caras** y sumar.

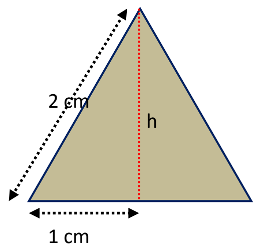
Ejemplos:

- Superficie de un cubo de 3 cm de arista:

El cubo tiene 6 caras, que son cuadrados. Como el área de cada uno de esos cuadrados es 9 cm^2, el del cubo será $6 \cdot 9 = 54\ cm^2$.



- *Calcula el área total de un icosaedro de 2 cm de arista.*



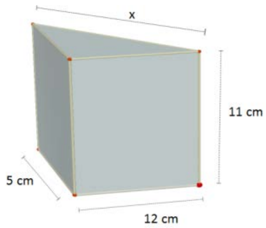
Todas sus caras son triángulos equiláteros de 2 cm de base. Calculamos la altura h que divide a la base en dos segmentos iguales

$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3}$ cm

$A_{triángulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,cm^2$

y por tanto Área icosaedro = $20\sqrt{3}\,cm^2 \approx 34{,}64\,cm^2$

- *Calcula las áreas lateral y total de un prisma triangular recto de 11 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 12 cm y 5 cm.*



Calculamos en primer lugar la hipotenusa del triángulo de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30\ cm;\ A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30\ cm^2$$

$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330\ cm^2$ $\quad$ $A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390\ cm^2$

Superficie de un prisma hexagonal regular recto de altura 10 *cm* y en el que el lado del hexágono de la base es de 4 *cm*.

Debemos recordar que el área de un polígono regular es la mitad del producto de su perímetro por su apotema. Así, como el lado mide 4 *cm*, el perímetro mide 24 *cm*. Calculamos la longitud de apotema, utilizando el teorema de Pitágoras podemos deducir que la apotema del hexágono mide $2\sqrt{3}$. Así el área de una base es $24\sqrt{3}$ *cm*^{2}.

Las caras laterales son rectángulos. El área de cada una de las caras laterales se calcula multiplicando la base por la altura: $4 \cdot 10 = 40$ cm^2.

La superficie total del prisma se obtiene sumando el área de las 6 caras laterales rectangulares más el de las dos bases hexagonales: $6 \cdot 40 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 240 + 48\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \approx 1015{,}96\ \text{cm}^2$.

Actividades propuestas

41. ¿Cuánto cartón es necesario para construir una caja de zapatos de aristas con longitudes de 12 cm, 22 cm y 10 cm?
42. Si con un litro de pintura podemos pintar 20 m^2, ¿cuántos litros de pintura son necesarios para pintar una escultura con forma de icosaedro regular de 4m de arista?

7.8. Volumen de prismas y pirámides

El **volumen** de un cuerpo geométrico representa lo que ocupa en el espacio. Asociado a este concepto está el de **capacidad** de un cuerpo, que es lo que puede contener. En matemáticas muchas veces se confunden estos dos conceptos, dado que las "paredes" del cuerpo se suponen sin grosor.

Del mismo modo que el área de un rectángulo es el producto de sus dos dimensiones (base x altura), el volumen del prisma rectangular recto (**ortoedro**) es el producto de sus tres dimensiones: largo x ancho x alto.

Largo x ancho es el área de la base, con lo que el volumen del ortoedro también puede calcularse multiplicando el área de su base por su altura. Podemos extender esa idea a cualquier prisma:

El volumen de un prisma es igual al producto del área de su base por su altura.

Actividades resueltas

- Calcula el volumen de un ortoedro cuya base es un cuadrado de 10 cm de lado y su altura es de 15 cm.

  Volumen = Área de la base x altura = $10^2 \cdot 15 = 1500$ cm^3

- Halla el volumen de un prisma cuadrangular oblicuo cuya base es un rombo con diagonales que miden 6 cm y 8 cm y su altura es igual a la diagonal mayor.

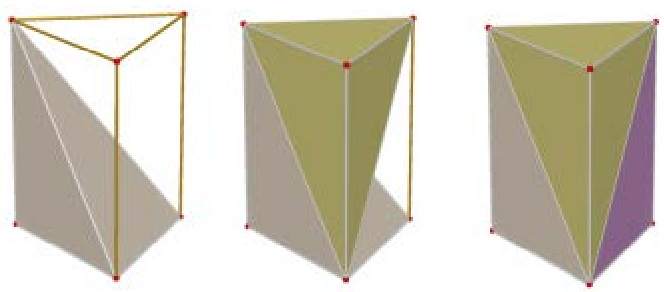
  El área del rombo es la mitad del producto de sus dos diagonales. Así en este caso el área de la base del prisma es $1/2 \cdot 6 \cdot 8 = 24$ cm^2.

  Para calcular el volumen nos da igual que el prisma sea recto o no, ya que solo nos interesa el área de la base y la altura, que en este caso es de 8 cm, igual a la diagonal mayor.

  Volumen = Área de la base x altura = $24 \cdot 8 = 192$ cm^3

El volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide.

Volumen = (Área de la base x altura)/3



Actividades propuestas

43. Halla el volumen de una pirámide hexagonal regular, en la que cada lado de la base mide 2 cm y la altura es de 10 cm.

44. Calcula el volumen de un prisma triangular recto de 5 cm de altura si su base es un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm

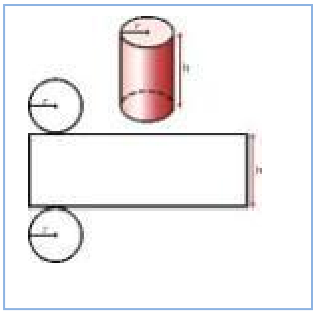
7.9. Cuerpos de revolución: cilindros, conos y esferas

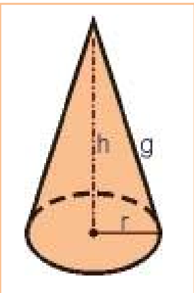
Los cuerpos de revolución son cuerpos geométricos, como cilindros y conos, que se obtienen al hacer girar una línea alrededor de una recta fija denominada *eje*. La línea que gira se llama *generatriz*.

También puede obtenerse un cuerpo de revolución mediante el giro de una figura plana alrededor de un eje de giro, como en el caso de las esferas.

Un **cilindro** se puede generar haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Los círculos que se obtienen al girar el otro lado son las bases del cilindro. El lado del rectángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la altura del cilindro.

El **desarrollo** de un cilindro nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo. Consta de un rectángulo, que lo limitará lateralmente y de dos círculos, las bases que lo limitan inferior y superiormente.

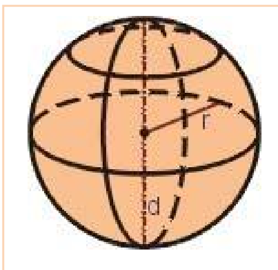


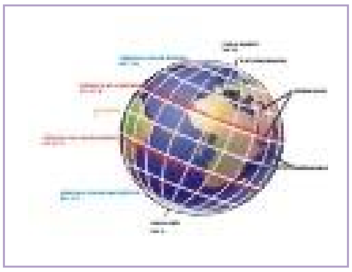


Un **cono** se puede generar haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El círculo que se obtiene al girar el otro cateto es la *base* del cono. El lado del triángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la *altura* del cono. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide lo mismo que la *generatriz* del cono.

El desarrollo de un cono consta de un sector circular y un círculo. Nos permitiría recortarlo en cartulina y armarlo.

Una **esfera** se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro. El *radio* del semicírculo es el radio de la esfera.





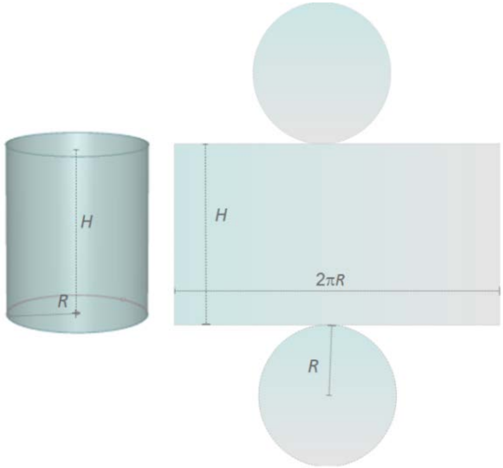
Cuando cortamos una esfera por un plano, todos los cortes son círculos. Si el plano por el que cortamos pasa por el centro de la esfera, obtenemos un **círculo máximo**. Su radio es igual al de la esfera.

- En la esfera terrestre, los meridianos se corresponden con círculos máximos. Los paralelos son las circunferencias que limitan los círculos que quedan al cortar la esfera terrestre con planos perpendiculares al eje que pasa por los polos. El ecuador es el único paralelo que es un círculo máximo.

7.10. Superficie de cilindros, conos y esferas

Superficie del cilindro

El cilindro es un cuerpo geométrico desarrollable. Si recortamos un cilindro recto a lo largo de una generatriz, y lo extendemos en un plano, obtenemos dos círculos y un rectángulo. A partir de su desarrollo podemos ver que el área lateral del cilindro está determinada por el área del rectángulo que tiene como dimensiones la longitud de la circunferencia de la base y la altura del cilindro.



Supondremos que la altura del cilindro es H y que R es el radio de la base con lo que el área lateral A_L es:

A_L = *Longitud de la base . Altura* = $(2\pi R).H = 2\pi RH$

Si a la expresión anterior le sumamos el área de los dos círculos de que constituyen las bases, obtenemos el área total del cilindro.

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

Superficie del cono

También el cono es un cuerpo geométrico desarrollable. Al recortar siguiendo una línea generatriz y la circunferencia de la base, obtenemos un círculo y un sector circular con radio igual a la generatriz y longitud de arco igual a la longitud de la circunferencia de la base.

Llamemos ahora R al radio de la base y G a la generatriz. El área lateral del cono es el área del sector circular obtenido. Para calcularla pensemos que esta área debe ser directamente proporcional a la longitud de arco que a su vez debe coincidir con la longitud de la circunferencia de la base. Podemos escribir entonces:

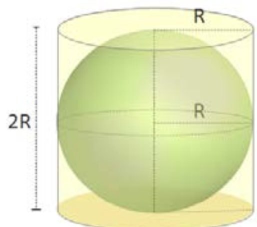
$$\frac{\text{Área lateral del cono}}{\text{Longitud de arco correspondiente al sector}} = \frac{\text{Área total del círculo de radio G}}{\text{Longitud de la circunferencia de radio G}}$$

Es decir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi G^2}{2\pi G}$ y despejando A_L tenemos: $A_L = \frac{2\pi R \, \pi G^2}{2\pi G} = \pi R G$

Si a la expresión anterior le sumamos el área del círculo de la base, obtenemos el área total del cono.

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Superficie de la esfera



Arquímedes demostró que el área de una esfera es igual que el área lateral de un cilindro circunscrito a la esfera, es decir un cilindro con el mismo radio de la base que el radio de la esfera y cuya altura es el diámetro de la esfera.

Si llamamos R al radio de la esfera: $A_T = (2\pi R)\cdot(2R) = 4\pi R^2$

El área de una esfera equivale al área de cuatro círculos máximos : **A= 4πR²**

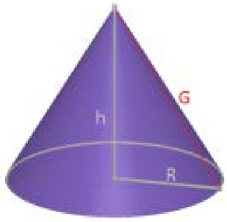
Actividades resueltas

- *Calcula el área total de un cono de 12 dm de altura, sabiendo que la circunferencia de la base tiene un radio de 3 dm.*

  Calculamos la generatriz *G*:

  $$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37 \text{ dm.}$$

$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79$ dm^2.

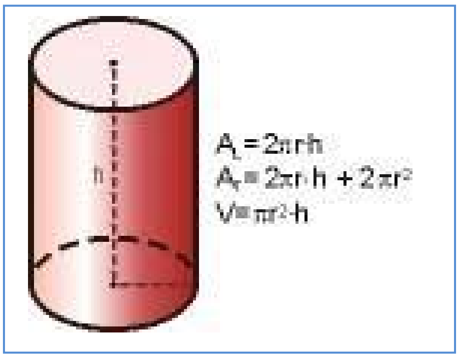


7.11. Volumen de cilindros, conos y esferas

Volumen del cilindro

El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de su base (que es un círculo) por su altura. Si el radio de la base es *r* y la altura es *h* nos queda

Volumen cilindro = $\pi r^2 h$



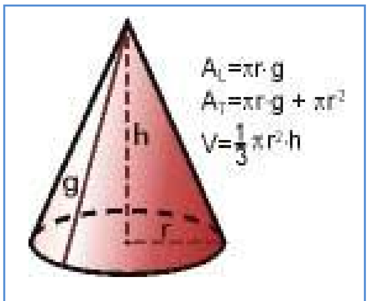
Ejemplo:

- Una lata de tomate frito en conserva tiene un diámetro de 6 *cm* y una altura de 12 *cm*. Vamos a calcular el volumen de la lata, que nos indicará cuánto tomate cabe en su interior.

Hay que tener cuidado con los datos porque nos dan el diámetro en lugar del radio. El radio de la base es 3 *cm*, la mitad del diámetro.

$$\text{Volumen} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339{,}12 \ cm^3$$

Volumen del cono



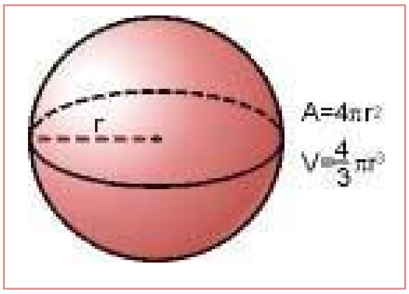
El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura. Así, para un cono cuyo radio de la base es *r* y su altura es *h* se tiene que

Volumen cono = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumen de la esfera

La fórmula que permite calcular el volumen de la esfera en función de su radio *r* es la siguiente:

Volumen de la esfera = $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$



Actividades propuestas

45. Calcula el área total y el volumen de un cilindro sabiendo que el radio de la base mide 5 cm y la altura es el triple del diámetro.
46. Una esfera tiene 4 m de diámetro. Calcula el área y el volumen de la esfera.
47. (CDI Madrid 2008) El depósito de gasoil de la casa de Irene es un cilindro de 1 m de altura y 2 m de diámetro. Irene ha llamado al suministrador de gasoil porque en el depósito solamente quedan 140 litros. ¿Cuál es, en dm^3, el volumen del depósito? (Utiliza 3,14 como valor de π). Si el precio del gasoil es de 0,80 € cada litro, ¿cuánto deberá pagar la madre de Irene por llenar el depósito?
48. Calcula la superficie total y el volumen de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.
49. Calcula los litros de agua que hay en un recipiente con forma de cilindro sabiendo que su base tiene 12 cm de diámetro y que el agua alcanza 1 dm de altura.

7.12. Razón entre volúmenes de cuerpos semejantes

Extendiendo el concepto de semejanza del plano al espacio, podemos decir que dos cuerpos son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño. Si la razón de semejanza entre dos cuerpos es k las longitudes homólogas de los dos cuerpos son proporcionales, el cociente de todas las parejas de longitudes homólogas es igual a k.

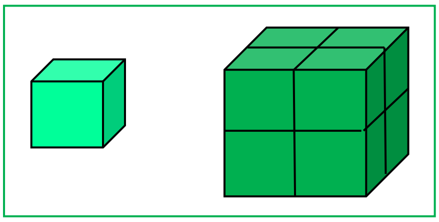
La relación entre las longitudes de una figura y su volumen es cúbica. Si la razón de semejanza entre las longitudes de dos figuras es k, y el volumen de partida es $V = L_1 \cdot L_2 \cdot L_3$: al aplicar la semejanza se tiene:

$$V_k = k \cdot L_1 \cdot k \cdot L_2 \cdot k \cdot L_3 = \mathrm{k} \cdot \mathrm{k} \cdot \mathrm{k} \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = k^3 \cdot V$$

Si la razón de semejanza entre las longitudes de dos figuras es $\boldsymbol{k}$, entonces entre sus volúmenes es $\boldsymbol{k^3}$.

Ejemplo:

- *Observa la figura del margen*. Al multiplicar por 2 el lado del cubo pequeño se obtiene el cubo grande. El volumen del cubo grande es 8 (2^3) veces el del cubo pequeño.



Actividades resueltas

- *La torre Eiffel de París mide 300 metros de altura y pesa unos 8 millones de kilos. Está construida de hierro. Si encargamos un modelo a escala de dicha torre, también de hierro, que pese un kilo, ¿qué altura tendrá?*

El peso está relacionado con el volumen. La torre Eiffel pesa 8 000 000 kilos, y queremos construir una, exactamente del mismo material que pese 1 kilo. Por tanto k^3 = 8000000/1 = 8 000 000, y k = 200. La razón de proporcionalidad entre las longitudes es de 200.

Si la Torre Eiffel mide 300 *m* de altura (mide un poco más, 320 m), y llamamos x a lo que mide la nuestra tenemos: $300/x = 200$. Despejamos x que resulta igual a $x = 1,5$ *m*. ¡Mide metro y medio!

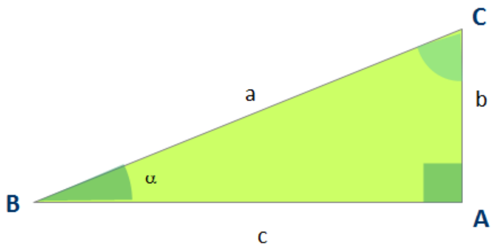
Actividades propuestas

50. Una maqueta de un depósito cilíndrico de 1000 litros de capacidad y 5 metros de altura, queremos que tenga una capacidad de 1 litro. ¿Qué altura y qué radio de base debe tener la maqueta?

8. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Empecemos por considerar un ángulo agudo cualquiera, utilizaremos una letra griega α (alfa) para denotarlo. Es siempre posible construir un triángulo rectángulo de modo que α sea uno de sus ángulos. Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ uno de estos triángulos y situemos en el vértice B, el ángulo α.

Se definen las razones trigonométricas del ángulo α (seno, coseno y tangente) mediante los siguientes cocientes:



$$\textit{seno de } \alpha = \textit{sen}\,\alpha = \textit{sen}\,\hat{B} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

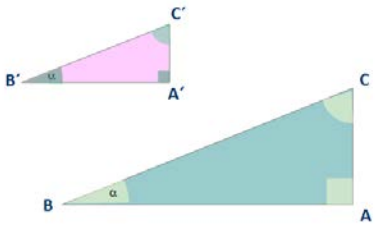
$$\textit{coseno de } \alpha = \cos\alpha = \cos\hat{B} = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\textit{tangente de } \alpha = \tan\alpha = \tan\hat{B} = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

También se utilizan las expresiones tg α y tag α como símbolos de la tangente de α.

Se deben nombrar los ángulos de un triángulo con la misma letra que el vértice correspondiente en mayúscula.

Esta definición no depende del triángulo elegido. Vamos a demostrarlo. Para ello consideremos otro triángulo rectángulo $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ con α en el vértice B'.



Según el segundo criterio de semejanza de triángulos $\overset{\Delta}{ABC}$ y $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos iguales 90º y α. Por lo tanto los lados de ambos son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Rightarrow \text{ el seno es independiente del triángulo en que se mide} \\ \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \Rightarrow \text{ el coseno es independiente del triángulo en que se mide} \\ \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \Rightarrow \text{ la tangente es independiente del triángulo en que se mide} \end{cases}$$

Actividades resueltas

- *Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ cuyos catetos miden b = 30 cm y c = 40 cm.*

Calculamos en primer lugar el valor de la hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500$ $\Rightarrow a = \sqrt{2500} = 50$ cm.

$$\textit{sen}\,\hat{B} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6;\ \cos\hat{B} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8;\ \textit{tg}\,\hat{B} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

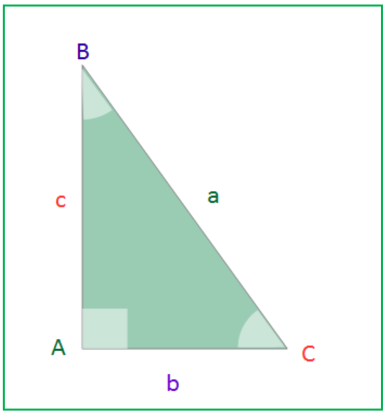
$$\textit{sen}\,\hat{C} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} = 0,8;\ \cos\hat{C} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6;\ \textit{tg}\,\hat{C} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}.$$

Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo es calcular las amplitudes de los tres ángulos y las longitudes de los tres lados.

En el caso de que el triángulo sea rectángulo podemos considerar tres casos dependiendo de las hipótesis o datos iniciales. En cada uno de ellos existen varias formas de obtener la solución. Vamos a describir una en cada caso:

Primer caso: Se conocen un ángulo $\hat{B}$ y la hipotenusa *a*:



$$\text{Como } \hat{A} = 90^o \quad \hat{C} = 90^o - \hat{B}$$

Ahora a partir de las razones trigonométricas de $\hat{B}$ o $\hat{C}$, obtenemos los lados que nos faltan. También cabe utilizar el teorema de Pitágoras cuando conozcamos uno de los dos catetos.

$$sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\,sen\,\hat{B}\,; \qquad \cos\hat{B} = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a\cos\hat{B}$$

Segundo caso: Se conocen un ángulo $\hat{B}$ y un cateto *b*:

$$\text{Como } \hat{A} = 90^o \quad \hat{C} = 90^o - \hat{B}$$

También en este caso las razones trigonométricas de $\hat{B}$ o $\hat{C}$ sirven para obtener al menos uno de los lados y puede utilizarse el teorema de Pitágoras cuando hallemos el valor de un lado más. Una forma de resolución es:

$$tg\,\hat{B} = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{tg\,\hat{B}}\,; \qquad sen\,\hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Tercer caso: Se conocen dos lados:

En este caso utilizaremos en primer lugar el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado, tanto si el que falta es un cateto como si es la hipotenusa. Siguiendo con el triángulo de la figura:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para obtener el primero de los ángulos agudos, calcularemos en primer lugar una de sus razones trigonométricas, por ejemplo $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ y para conocer el valor del ángulo, despejamos escribiendo:

$\hat{B} = arc\,sen\,\frac{b}{a}$, que significa *"ángulo cuyo seno es B"* y que se obtiene con la calculadora activando el comando ***sin⁻¹*** .

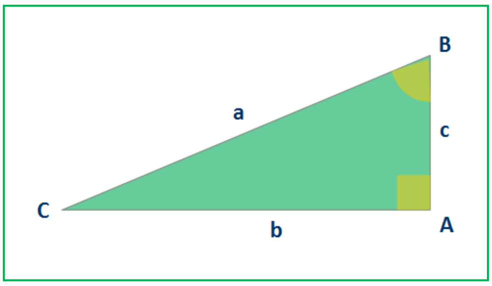
Análogamente, si partimos de $\cos\hat{B} = \frac{c}{a}$ o bien $tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}$ el ángulo *B* es $\hat{B} = arc\cos\frac{c}{a}$ o $\hat{B} = arc\tan\frac{b}{c}$

Actividades resueltas

- *Resolver el triángulo ABC con ángulo recto en A en los dos casos siguientes:*

  a) $\hat{B} = 42^o$ *y la hipotenusa a = 12 m.*

  b) Los catetos miden 12 dm y 5 dm.



a) Cálculo de los ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = 42^o$; $\hat{C} = 90^o - 42^o = 48^o$

Cálculo de los lados: $sen\, 42^o = \frac{b}{12} \Rightarrow b = 12\, sen\, 42^o \approx 8{,}03$ m.

$$cos\, 42^o = \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12\, cos\, 42^o \approx 8{,}92 \text{ m.}$$

b) Cálculo de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2$ = $12^2 + 5^2$= 144 + 25 = 169 $\Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$ dm

Cálculo de los ángulos: $\hat{A} = 90^o$; $\hat{B} = arc\tan\frac{12}{5} =$ 67º 22´ 48´´; $\hat{C} = 90^o -$ 67º 22´ 48´´ = 22º 37´ 12´´.

Aplicaciones de la resolución de triángulos rectángulos al cálculo de distancias

Actividades resueltas

- Calcular la altura de un árbol sabiendo que determina una sombra de 3,5 metros cuando los rayos *de sol forman un ángulo de 30º con el suelo.*

La razón trigonométrica de 30º que relaciona el lado conocido y el que nos piden es la tangente:

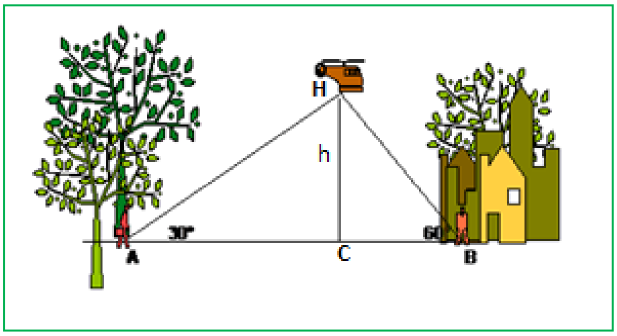
$$\tan 30^o = \frac{h}{3{,}5} \Rightarrow \text{h} = 3{,}5\tan 30^o = 3{,}5\,.\,\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}02 \text{ m.}$$

Técnica de la doble observación

Se utiliza para calcular alturas de objetos a los que resulta difícil llegar como por ejemplo, edificios, montañas, objetos en el extremo opuesto de una calle, etc.…Para medir ángulo se utiliza el llamado **teodolito**. La técnica consiste en tomar la medida del ángulo que forma una visual dirigida al punto más alto del objeto a medir con la horizontal, desde dos puntos distintos y situados a una distancia conocida. Aparecen entonces dos triángulos rectángulos con un lado común que es la altura a medir. Es posible plantear un sistema de ecuaciones en cuyo planteamiento es clave la definición de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Veamos algunos ejemplos:

Actividades resueltas

- *Dos personas, separadas 30 metros ven un helicóptero. La persona situada en A dirige una visual a la base del mismo que forma con el suelo un ángulo de 30°. También la persona situada en B dirige su vista al mismo punto obteniendo un ángulo de 60°. ¿A qué altura vuela el helicóptero?*



Sea h esta altura. Las visuales y el suelo determinan dos triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{AHC}$ y $\overset{\Delta}{BHC}$ en los que:

AC + CB = 30 $\Rightarrow$ *CB = 30 – AC* y si hacemos *AC = x*

$$tan\,30^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\,tan\,30^\circ$$

$$tan\,60^\circ = \frac{h}{30-x} \Rightarrow h = (30-x)\;tan\,60^\circ$$

$$\left\langle \begin{array}{l} x \cdot tan\,30^\circ = (30-x)\cdot tan\,60^\circ \\ x \cdot tan\,30^\circ = 30 \cdot tan\,60^\circ - x \cdot tan\,60^\circ \Rightarrow \\ x \cdot (tan\,30^\circ + tan\,60^\circ) = 30 \cdot tan\,60^\circ \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \cdot tan\,60^\circ}{tan\,30^\circ + tan\,60^\circ} = 22{,}5\,\text{m} \;\Rightarrow\; h = x\;tan\,30^\circ = 22{,}5 \cdot tan\,30^\circ \approx 13\,\text{m}$$

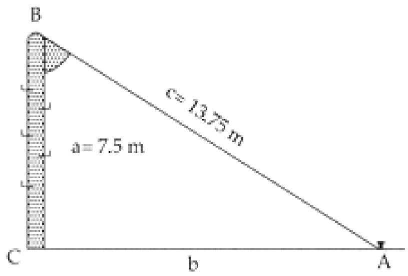
Actividades propuestas

51. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de los rayos solares en el momento en que un bloque de pisos de 25 m de altura proyecta una sombra de 10 m de longitud?

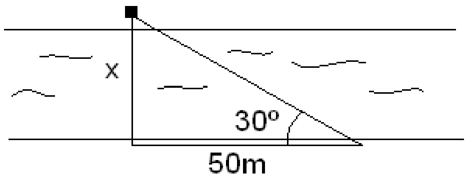
52. Obtener la longitud de una escalera apoyada en una pared a una altura de 4,33 m y que forma un ángulo de 60º con respecto al suelo

53. El hilo de una cometa totalmente extendida mide 150 m, y forma un ángulo con la horizontal de 40° mientras lo sujeto a 1,5 m del suelo. ¿A qué altura del suelo está la cometa?

54. Para medir la altura de un campanario a cuya base no podemos acceder, tendemos una cuerda de 30 m de largo desde lo alto de la torre hasta tensarla en el suelo, formando con éste un ángulo de 60°. ¿Cuál es la altura del campanario?

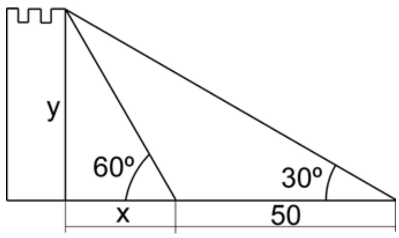


55. Calcula la anchura del río representado en la figura siguiente:



56. Obtener el ángulo que forma un poste de 7,5 m de alto con un cable tirante que va, desde la punta del primero hasta el piso, y que tiene un largo de 13,75 m

57. Desde cierto lugar del suelo se ve el punto más alto de una torre, formando la visual un ángulo de 30º con la horizontal. Si nos acercamos 50 m a la torre, ese ángulo se hace de 60º. Calcula la altura de la torre.



58. Dos amigos observan desde su casa un globo que está situado en la vertical de la línea que une sus casas. La distancia entre sus casas es de 3 km. Los ángulos de elevación medidos por los amigos son de 45º y 60º. Halla la altura del globo y la distancia de ellos al globo.

9. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Un **sistema de referencia cartesiano** está formado por dos ejes perpendiculares entre sí llamados **ejes de coordenadas**: el eje horizontal recibe el nombre de **eje de abscisas** o eje X, y el eje vertical se llama **eje de ordenadas** o eje Y. El punto de corte de ambos ejes es el **origen de coordenadas** O. Para dar la posición de un punto en el plano necesitamos además de los ejes de coordenadas una **unidad de medida**.

Las **coordenadas** de un **punto** *A* son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo "***x***" la primera coordenada o **abscisa** e "***y***" la segunda coordenada u **ordenada**.

Las coordenadas del origen O son (0,0).

Los puntos que están en el eje Y tienen su abscisa cero

Los puntos que están a la derecha del eje Y tienen su abscisa positiva y los que están a la izquierda tienen su abscisa negativa.

Los puntos que están el eje X tienen su ordenada cero.

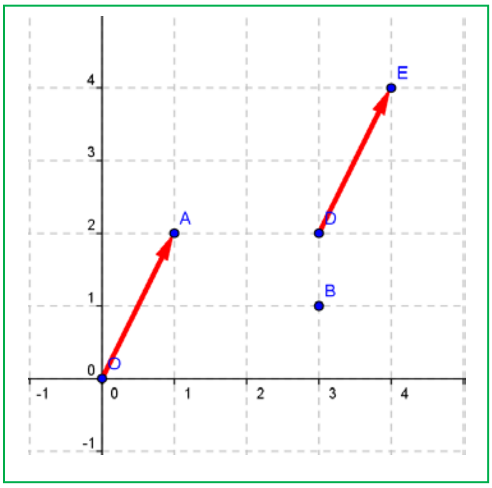
Los puntos que están por encima del eje X tienen su ordenada positiva y los que están por debajo tienen su ordenada negativa.

De igual forma que sobre la recta numérica, se pueden representar sobre la recta puntos con coordenadas fraccionarias

En un sistema de referencia cartesiano podemos representar un vector fijo, conocidos sus puntos origen y extremo (indicado con la punta de flecha).

Dados dos puntos, $D(d_1, d_2)$ y $E(e_1, e_2)$, las componentes del vector de origen *D* y extremo *E*, ***DE***, vienen dadas por ***DE*** = $(e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.

Para dar direcciones en el plano utilizamos vectores.



Ejemplo:

Las coordenadas de los puntos, de la figura son:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) y *E*(4, 4)

Las componentes del vector ***DE*** son ***DE*** = (4 – 3, 4 – 2) = (1, 2)

Las componentes del vector ***OA*** son ***OA*** = (1 – 0, 2 – 0) = (1, 2).

DE y ***OA*** son representantes del mismo vector libre de componentes (1, 2).

Actividades propuestas

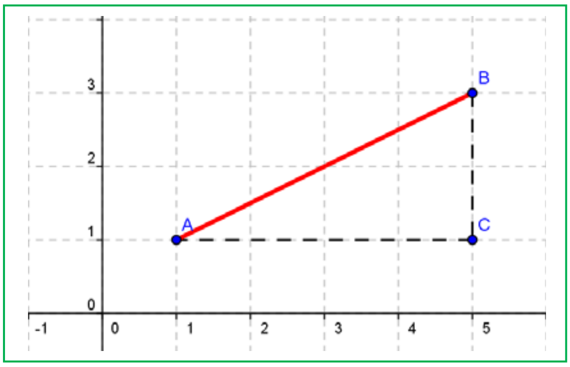
59. Representa en un sistema de coordenadas los puntos A = (1, 1) y B = (5, 3) y calcula las componentes del vector que tiene origen en A y extremo en B

60. El vector de componentes ***u*** = (2, 3) y origen *A* = (1, 1), ¿qué extremo tiene?

El **módulo o longitud de un vector v** de componentes (v_1, v_2) es $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

La **distancia** entre dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ es módulo del vector ***AB***: $D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

Ejemplo:



Por el Teorema de *Pitágoras* sabemos que la distancia al cuadrado entre los puntos *A* = (1, 1) y *B* = (5, 3) es igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

ya que el triángulo *ABC* es rectángulo de catetos 4 y 2.

Luego $D \approx 4{,}47$.

Actividades propuestas

61. Calcula la distancia entre los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 6).

62. Calcula el módulo del vector de componentes ***u*** = (6, 8)

63. Dibuja un cuadrado de diagonal el punto *O*(0, 0) y *A*(3, 3). ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices del cuadrado? Calcula la longitud del lado y de la diagonal de dicho cuadrado.

Se **suman** dos vectores, sumando sus componentes: **(*a*, *b*) + (*c*, *d*) = (*a* + *c*, *b* + *d*)**

Para sumar gráficamente dos vectores, se coloca el origen del segundo vector sobre el extremo del primer vector. El vector suma es el que tiene el mismo origen que el primer sumando y el mismo extremo que el segundo.

Se multiplica un vector por un número, multiplicando sus componentes: ***r*·(*a*, *b*) = (*r*·*a*, *r*·*b*)**

El resultado de multiplicar un vector por un número es otro vector que tiene la misma dirección que el primero, el mismo sentido si r es positivo, el sentido contrario si r es negativo y longitud la del vector inicial multiplicada por el valor absoluto de r.

Ejemplo:

- El vector fijo **OA** = **u** tiene de coordenadas (2, 3) y el vector fijo **AB** = **v** tiene de componentes (3, –5).

La suma de los dos vectores es el vector **OB** = ***w*** de componentes: (2, 3) + (3, –5) = (5, –2).

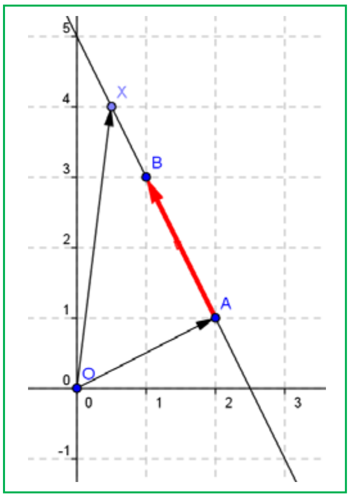
- El vector fijo **OD** = **z** tiene de coordenadas (-1, 2) y el vector fijo **OE** = **2z** tiene de componentes (-2, 4).

El vector **2z** tiene la misma dirección y sentido que **z** y su longitud es el doble que la longitud de **z**

Ecuación vectorial de una recta: Una recta queda determinada si conocemos un punto: A(a_1, a_2) y un vector de dirección ***v*** = (v_1, v_2). Observa que si X es un punto de la recta el vector **OX** puede escribirse como suma del vector **OA** y de un vector de la misma dirección que ***v***, *t**v***. Es decir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

donde *t* es un número variable que recibe el nombre de parámetro. Para cada valor de *t*, se tiene un punto distinto de la recta.



Las coordenadas (x, y) del punto de la recta X son: $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$

Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas de la recta**.

Ejemplo:

- Las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto A(2, 1) y lleva la dirección del vector **v**=(-1, 2) son $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$. Si damos a t el valor 1, obtenemos el punto B de coordenadas $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$. Si t=2 obtenemos el punto (0, 5), etc.

Si en las dos ecuaciones paramétricas despejamos t e igualamos obtenemos la **ecuación continua de la recta** $\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$, y si en esta ecuación quitamos denominadores igualando los productos cruzados y despejamos la coordenada y obtenemos la **ecuación explícita de la recta** $y = mx + n$

El número m en la ecuación explícita de la recta recibe el nombre de pendiente de la recta y es una medida de la inclinación de la misma: $m = \frac{v_2}{v_1}$ es la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con la horizontal.

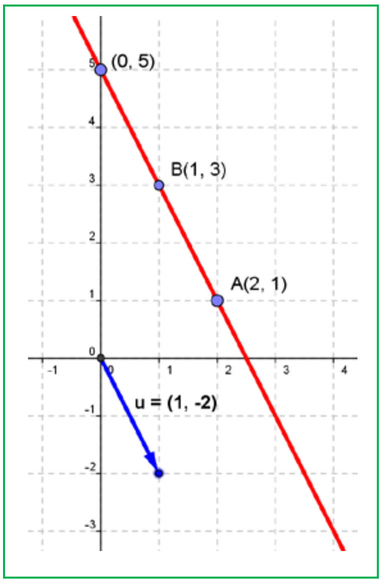
El número n recibe el nombre de ordenada en el origen porque es el valor de la ordenada del punto en el que la recta corta al eje de ordenadas.

Ejemplo:

De las ecuaciones paramétricas de la recta $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$ pasamos a ecuación continua $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2}$ y de ésta a la ecuación explícita despejando y: $2(x-2) = -1(y-1) \Leftrightarrow 2x - 4 = -y + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 5$.

La pendiente de la recta es el número negativo -2, lo que significa que, al pasar de un punto a otro de la recta, por cada unidad que avanzamos a la derecha en horizontal bajamos 2 unidades en vertical.

Actividades resueltas



- *De la recta de ecuación explícita y* = $-2x + 5$, conocemos la pendiente, -2, y la ordenada en el origen, 5. La pendiente nos da un vector de dirección de la recta, en general (1, *m*), y en este ejemplo: (1, -2). La ordenada en el origen nos proporciona un punto, en general, el (0, *n*), y en este ejemplo, (0, 5). La ecuación paramétrica de esta recta es:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

- *Escribe la ecuación de la recta* que pasa por los puntos *A*(2, 1) y *B*(1, 3). Podemos tomar como vector de dirección el vector ***AB*** = (1 – 2, 3 – 1) = (–1, 2), y escribir su ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

La recta es, en ambos casos la misma, la de la figura. Con ello podemos observar que una recta puede tener muchas ecuaciones paramétricas dependiendo del punto y del vector de dirección que se tome. Pero eliminando el parámetro y despejando "*y*" llegamos a una única ecuación explícita.

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente

Si la recta $y = mx + n$ **es perpendicular a la recta** $y = m'x + n'$ **entonces se verifica que** $m \cdot m' = -1$

Actividades propuestas

64. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto *A*(2, 7) y tiene como vector de dirección ***u*** = (4, 5). Halla su ecuación explícita y represéntala gráficamente.
65. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(2, 7) y *B*(4, 6), de forma paramétrica y explícita. Represéntala gráficamente.
66. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos *A*(6, 2) y *B*(3, 9), paramétrica y explícita. Represéntala gráficamente.
67. Representa gráficamente la recta *r*: $y = -2x + 5$ y la recta *s*: $y = -2x$ y comprueba que son dos rectas paralelas.
68. Representa gráficamente la recta *r*: $y = -2x + 5$ y la recta *s*: $y = \frac{1}{2}x$ y comprueba que son dos rectas perpendiculares (se cortan formando un ángulo recto)

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 *m*.

2. Calcula la longitud de la diagonal de un rectángulo de base 15 *cm* y altura 20 *cm*.

3. Calcula la diagonal de un prisma recto de base cuadrada sabiendo que el lado de la base mide 6 *cm* y la altura del prisma 8 *cm*.

4. ¿Cuál es la mayor distancia que se puede medir en línea recta en una habitación que tiene 6 *m* de ancho, 8 *m* de largo y 4 *m* de altura?

5. Un prisma de 8 *dm* de altura tiene como base un triángulo rectángulo de catetos 3 *dm* y 4 *dm*. Calcula las áreas lateral y total del prisma.

6. Dibuja un prisma hexagonal regular que tenga 3 *cm* de arista basal y 0.9 *dm* de altura y calcula las áreas de la base y total.

7. Calcula el área total de un ortoedro de dimensiones 2,7 *dm*, 6,2 *dm* y 80 *cm*.

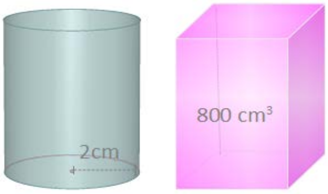
8. Calcula la superficie total y el volumen de un cilindro que tiene 7 *m* de altura y 3 *cm* de radio de la base.

9. Calcula el apotema de una pirámide hexagonal regular sabiendo que el perímetro de la base es de 36 *dm* y la altura de la pirámide es de 6 *dm*. Calcula también el área total y el volumen de esta pirámide.

10. Un triángulo rectángulo de catetos 12 *cm* y 16 *cm* gira alrededor de su cateto menor generando un cono. Calcula el área lateral, el área total y el volumen.

11. ¿Cuál es la capacidad, en litros, de un pozo cilíndrico de 1,50 *m* de diámetro y 30 *m* de profundidad?

12. ¿Cuánto cartón necesitamos para construir una pirámide cuadrangular regular si queremos que el lado de la base mida 12 *cm* y que su altura sea de 15 *cm*?



13. Calcula el volumen de un cilindro que tiene 2 *cm* de radio de la base y la misma altura que un prisma cuya base es un cuadrado de 4 *cm* de lado y 800 cm^3 de volumen.

14. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1,50 *m* de alto y 135 dm^3 de volumen?

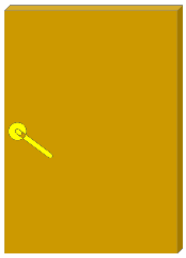
15. El agua de un manantial se conduce hasta unos depósitos cilíndricos que miden 10 *m* de radio de la base y 20 *m* de altura. Luego se embotella en bidones de 2,5 litros. ¿Cuántos envases se llenan con cada depósito?

16. El ayuntamiento de Madrid ha colocado unas jardineras de piedra en sus calles que tienen forma de prisma hexagonal regular. La cavidad interior, donde se deposita la tierra, tiene 80 *cm* de profundidad y el lado del hexágono interior es de 60 *cm*. Calcula el volumen de tierra que llenaría una jardinera por completo.

17. (**CDI Madrid 2011**) Han instalado en casa de Juan un depósito de agua de forma cilíndrica. El diámetro de la base mide 2 metros y la altura es de 3 metros. ¿Cuántos litros de agua caben en el depósito?

18. (**CDI Madrid 2012**) Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma, la base es un cuadrado que tiene 10 *cm* de lado. a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del envase? b) Calcula la altura del envase en cm.

19. Una circunferencia de longitud 18,84 *cm* gira alrededor de uno de sus diámetros generando una esfera. Calcula su volumen.

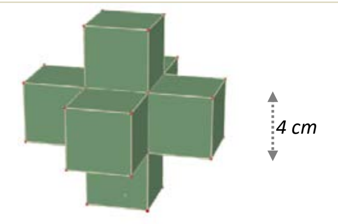


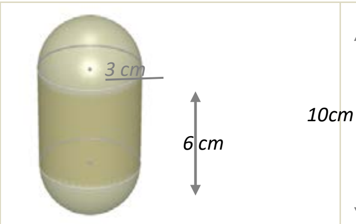
20. Una puerta mide 1,8 *m* de alto, 70 *cm* de ancho y 3 *cm* de espesor. El precio de instalación es de 100 € y se cobra 5 € por m^2 en concepto de barnizado, además del coste de la madera, que es de 280 € cada m^3. Calcula el coste de la puerta si sólo se realiza el barnizado de las dos caras principales.

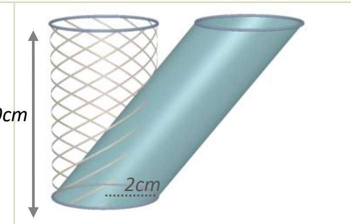
21. El agua contenida en un recipiente cónico de 21 *cm* de altura y 15 *cm* de diámetro de la base se vierte en un vaso cilíndrico de 15 *cm* de diámetro de la base. ¿Hasta qué altura llegará el agua?

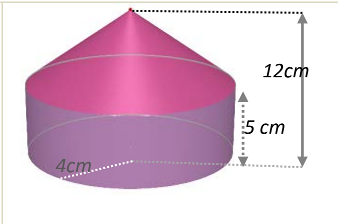
22. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que la longitud de una circunferencia máxima es 251,2 *m*?

23. Calcula el volumen de los siguientes cuerpos geométricos









24. Se ha pintado por dentro y por fuera un depósito sin tapadera de 8 dm de alto y 3 dm de radio. Teniendo en cuenta que la base sólo se puede pintar por dentro, y que se ha utilizado pintura de 2€/dm^2, ¿cuánto dinero ha costado en total?

25. Un tubo de ensayo tiene forma de cilindro abierto en la parte superior y rematado por una semiesfera en la inferior. Si el radio de la base es de 1 *cm* y la altura total es de 12 *cm*, calcula cuántos centilitros de líquido caben en él.

26. El lado de la base cuadrada de la pirámide de Keops mide 230 *m*, y su altura 146 *m*. ¿Qué volumen encierra?

27. En un depósito con forma de cilindro de 30 *dm* de radio, un grifo vierte 15 litros de agua cada minuto. ¿Cuánto aumentará la altura del agua después de media hora?

28. Una pecera con forma de prisma recto y base rectangular se llena con 65 litros de agua. Si tiene 65 *cm* de largo y 20 *cm* de ancho, ¿cuál es su profundidad?

29. En un helado de cucurucho la galleta tiene 12 *cm* de altura y 4 *cm* diámetro. Si el cucurucho está completamente lleno de helado y sobresale una semiesfera perfecta, ¿cuántos cm^3 de helado contiene?

30. Se quiere construir un ortoedro de base cuadrada que tenga un volumen de 240 cm3 y un área lateral total de 240 cm2 ¿Qué medidas deben tener las aristas?

AUTOEVALUACIÓN

1. En un mapa de carretera de escala 1:120000 la distancia entre dos pueblos es de 5 cm. La distancia real entre dichos pueblos es de:

a) 60 m b) 6 km c) 24 km d) 240 cm

2. En el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 *cm* se multiplican por 10 todas sus longitudes. El área del nuevo triángulo es:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. El perímetro de un rombo de diagonales 12 cm y 16 cm es:

a) 34 cm b) 70 cm c) 40 cm d) 62 cm

4. La altura de un prisma de base cuadrada es 20 *cm* y el lado de la base es 5 *cm*, su área total es:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

5. Un depósito de agua tiene forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* de altura y lado de la base 1 *m*. El volumen de agua que hay en él es:

a) $60\sqrt{2}$ m^3 b) $45\sqrt{2}$ m^3 c) $30000\sqrt{2}$ dm^3 d) $7{,}5\sqrt{3}$ m^3

6. Al introducir una piedra en un recipiente cilíndrico, de 20 cm de diámetro, la altura del agua que contiene sube 10 cm. El volumen de la piedra es:

a) 1000 cm^3. b) 6284 cm^3. c) 3142 cm^3. d) 2000 cm^3.

7. Una caja de dimensiones 30, 20 y 15 *cm*, está llena de cubos de 1 *cm* de arista. Si se utilizan todos para construir un prisma recto de base cuadrada de 10 *cm* de lado, la altura medirá:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

8. El radio de una esfera que tiene el mismo volumen que un cono de 5 *dm* de radio de la base y 120 *cm* de altura es:

a) $5\sqrt{3}$ dm b) $\sqrt[3]{75}$ dm c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ cm

9. Se distribuyen 42,39 litros de disolvente en latas cilíndricas de 15 *cm* de altura y 3 *cm* de radio de la base. El número de envases necesario es:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

10. Los triángulos *ABC* y *DEF* son semejantes. Los lados de *ABC* miden 3, 5 y 7 cm, y el perímetro de *DEF* mide 60 m. Los lados de *DEF* miden:

a) 6, 10 y 14 cm b) 12, 20 y 28 cm c) 9, 15 21 m d) 12, 20 y 28 m

SOLUCIONES 1b 2b 3c 4a 5d 6c 7d 8b 9a 10b

SOLUCIONES A LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

(4) ángulo interior=120°, ángulo central=60° **(5)** 1440° **(10)** 148° **(11)** 320 m^2

(12) cuadrado 144 cm^2 y reborde 48 cm, círculo 153,94 cm^2 y reborde 43,98 cm

(13) 15,64 cm **(14)** 80,11 cm **(15)** 15,71 cm **(16)** ≈ 3 m

(17) ≈ 27,43m^2 **(18a)** ≈ 0, 8824 m^2 **(18b)** ≈ 2114,069 m^2

(19a) 10 cm **(19b)** 5 m **(19c)** ≈ 25,356 km **(20a)** 12 cm **(20b)** 15 m **(20c)** 12 dm

(21) ≈ 27,71 m^2 **(22)** ≈ 10,39 cm^2 **(23)** ≈ 4,243 m **(24)** 17 cm

(25a) sí **(25b)** sí **(25c)** sí **(25d)** no

(26a) c´=8cm **(26b)** c'=4 cm a'= 5 cm **(27)** 15 cm, 21 cm y 24 cm

(28a) razón de semejanza k=4; x=2 cm; y= 1,375 cm **(28b)** k=1,5; x=4 cm ; y= 3 cm; z=4 cm

(29) 12,8 m **(33)** 8,1 km **(34)** 17 mm **(35)** 3,99 m **(36)** área= 2,5 cm^2, perímetro= 7 cm

(37) 3600 km^2 **(41)** 1208 cm^2 **(42)** ≈ 7 litros **(43)** 103,92 cm^3 **(44)** 30 cm^3

(45) A≈ 1099,56 cm^2 V≈ 2356,194 cm^3 **(46)** A≈ 50,27 m^2 V≈ 33,510 m^3 **(47)** 2400 €

(48) A≈ 301,59 cm^2 V≈ 301,593 cm^3 **(49)** ≈ 1,13 litros **(50)** altura= 0,5 m , radio≈ 2,52cm

(51) ≈ 68° **(52)** ≈ 5m **(53)** ≈ 97,92 m **(54)** ≈ 25,98 m **(55)** ≈ 28,87 m **(56)** ≈ 57° **(57)** ≈ 43,4 m

(58) El globo está a una altura de 1,9 km, un amigo dista del globo 2,69 km y el otro 2,2 km

(59) (4, 2) **(60)** (3, 4) **(61)** 5 **(62)** 10 **(63)** vértices (3, 0) y (0,3), lado 3, diagonal $\sqrt{18}$

(64) Ec. explícita $y=\frac{5}{4}x+\frac{9}{2}$ **(65)** Ec. explícita $y=\frac{-1}{2}x+8$ **(64)** Ec. explícita $y=\frac{-7}{3}x+16$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS

(1) $\sqrt{2}$ ≈1,414 m **(2)** 25 cm **(3)** ≈11, 7 cm **(4)** ≈10,770 m

(5) área lateral= 96 dm^2, área total= 108 dm^2

(6) área base ≈ 23,38 cm^2 , área total ≈ 208,77 cm^2 **(7)** 175,88 dm^2

(8) área total ≈ 10972,034 dm^2, volumen ≈ 39,584 dm^3

(9) apotema=9 dm, área total ≈ 255,531 dm^2, volumen ≈ 561,184 dm^3

(10) área total ≈ 1809,56 cm^2, volumen ≈ 3216,991 cm^3 **(11)** ≈ 53014,78 litros

(12) ≈ 531,732 cm^2 **(13)** 618,319 cm^3 **(14)** 9 dm

(15) 2 513 274 envases **(16)** 748, 246 dm^3 **(17)** 9 924 778 litros

(18a) 1000 cm^3 **(18b)** 10 cm **(19)** ≈112,925 cm^3 **(20)** 123,18 €

(21) 7 cm **(22)** ≈267 675 060 m^3

(23a) 448 cm^3 **(23b)** ≈282,743 cm^3 **(23c)** ≈125,664 cm^3 **(23d)** ≈368,614 cm^3

(24) 659,73 € **(25)** 3,665 cl **(26)** 2 574 466,667 m^3 **(27)** ≈1,6 cm

(28) 50 cm **(29)** ≈ 67,021 cm^3 **(30)** arista base de 4 cm y arista lateral de 15 cm